الرياضيات

الصف الثاني عشر - الفرع الأدبي

الفصل الدراسي الثاني

12

إجابات الطالب

الناشر: المركز الوطني لتطوير المناهج

يسر المركز الوطني لتطوير المناهج استقبال آرائكم وملحوظاتكم على هذا الكتاب عن طريق العناوين الآتية:

06-5376262 / 237 06-5376266 P.O.Box: 2088 Amman 11941

@nccdjor feedback@nccd.gov.jo www.nccd.gov.jo

إجابات كتاب الطالب للصف الثاني عشر الأدبي / الفصل الدراسي الثاني(طبعة 2023)

الوحدة الرابعة: التكامل

الدرس الأول: التكامل غير المحدود

<table>
<tr><td colspan="2">مسألة اليوم صفحة 8</td></tr>
<tr><td colspan="2">نعم؛ لأن $f(x) = \int f'(x)dx$.
$f(x) = \int (3x^2 - 4x)dx = x^3 - 2x^2 + C$
لكن منحنى الاقتران يمر بالنقطة $(0,0)$ ، إذن: $C = 0$
ومنه فإن قاعدة الاقتران هي: $f(x) = x^3 - 2x^2$</td></tr>
<tr><td colspan="2">أتحقق من فهمي صفحة 9</td></tr>
<tr><td>a</td><td>$f(x) = 5x^4$
$G(x) = x^5 + C$</td></tr>
<tr><td>b</td><td>$f(x) = -9x^{-10}$
$G(x) = x^{-9} + C$</td></tr>
<tr><td colspan="2">أتحقق من فهمي صفحة 11</td></tr>
<tr><td>a</td><td>$\int 6dx = 6x + C$</td></tr>
<tr><td>b</td><td>$\int x^8 dx = \frac{1}{8+1}x^{8+1} + C$
$= \frac{1}{9}x^9 + C$</td></tr>
<tr><td>c</td><td>$\int \sqrt[3]{x}dx = \int x^{\frac{1}{3}}dx$
$= \frac{1}{\frac{1}{3}+1}x^{\frac{1}{3}+1} + C$
$= \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + C$
$= \frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4} + C$</td></tr>
</table>

d	$\int \frac{1}{x^5}dx = \int x^{-5}dx$ $= -\frac{1}{4}x^{-4} + C$ $= -\frac{1}{4x^4} + C$
أتحقق من فهمي صفحة 12	
a	$\int \left(x^3 - 2x^{\frac{5}{3}}\right)dx = \int x^3dx - 2\int x^{\frac{5}{3}}dx$ $= \frac{1}{4}x^4 - 2\left(\frac{3}{8}x^{\frac{8}{3}}\right) + C$ $= \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{4}\sqrt[3]{x^8} + C$
b	$\int \left(3x^2 - \frac{6}{\sqrt[5]{x}}\right)dx = 3\int x^2dx - 6\int \frac{1}{\sqrt[5]{x}}dx$ $= 3\int x^2dx - 6\int x^{-\frac{1}{5}}dx$ $= x^3 - 6\left(\frac{5}{4}x^{\frac{4}{5}}\right) + C$ $= x^3 - \frac{15}{2}\sqrt[5]{x^4} + C$
أتحقق من فهمي صفحة 13	
a	$\int \frac{x^4 - 8x^3}{x^2}dx = \int \left(\frac{x^4}{x^2} - \frac{8x^3}{x^2}\right)dx$ $= \int (x^2 - 8x)dx$ $= \frac{1}{3}x^3 - 4x^2 + C$
b	$\int (3x+2)(x-1)dx = \int (3x^2 - 3x + 2x - 2)dx$ $= \int (3x^2 - x - 2)dx$ $= x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x + C$

c	$\int x(x^3-7)dx = \int (x^4-7x)dx$ $= \frac{1}{5}x^5 - \frac{7}{2}x^2 + C$
أتدرب وأحل المسائل صفحة 14	
1	$G(x) = \frac{1}{8}x^8 + C$
2	$G(x) = -\frac{2}{7}x^7 + C$
3	$G(x) = -10x + C$
4	$G(x) = 4x^2 + C$
5	$3x^2 + C$
6	$\frac{7}{2}x^2 - 5x + C$
7	$3x - 2x^2 + C$
8	$\int 10x^{-\frac{1}{2}}dx$ $= 20x^{\frac{1}{2}} + C$ $= 20\sqrt{x} + C$
9	$\frac{4}{5}x^{\frac{5}{2}} + C$
10	$\frac{2}{5}x^5 - \frac{5}{2}x^2 + 10x + C$
11	$\frac{1}{2}x^4 - x^2 + C$
12	$\int \left(3x^{-\frac{1}{3}} - x^{\frac{3}{2}}\right)dx$ $= \frac{9}{2}x^{\frac{2}{3}} - \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + C = \frac{9}{2}\sqrt[3]{x^2} - \frac{2}{5}\sqrt{x^5} + C$
13	$\int (x^{-2} - x^{-3})dx$ $= -x^{-1} + \frac{1}{2}x^{-2} + C = -\frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + C$

14	$\int\left(\frac{4x^3}{x^3}-\frac{2}{x^3}\right)dx$ $=\int(4-2x^{-3})dx$ $=4x+x^{-2}+C=4x+\frac{1}{x^2}+C$
15	$\int\left(\frac{2x}{\sqrt{x}}+\frac{8}{\sqrt{x}}\right)dx$ $=\int\left(2x^{\frac{1}{2}}+8x^{-\frac{1}{2}}\right)dx$ $=\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}+16x^{\frac{1}{2}}+C$ $=\frac{4}{3}\sqrt{x^3}+16\sqrt{x}+C$
16	$\int(x^2-2x+1)dx$ $=\frac{1}{3}x^3-x^2+x+C$
17	$\int\frac{(x+2)(x^2-2x+4)}{x+2}dx$ $=\int(x^2-2x+4)dx$ $=\frac{1}{3}x^3-x^2+4x+C$
18	$\int\left(x^{\frac{3}{2}}-x^{\frac{1}{2}}\right)dx$ $=\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+C=\frac{2}{5}\sqrt{x^5}-\frac{2}{3}\sqrt{x^3}+C$
19	$\int(6x^2-2x-9x+3)dx$ $=\int(6x^2-11x+3)dx$ $=2x^3-\frac{11}{2}x^2+3x+C$

	هي ظنّت أنّ: $\int f(x) \times g(x)dx = \int f(x)dx \times \int g(x)dx$. وهذا غير صحيح، والصحيح أن تضرب المقدارين ثم تكامل ناتج الضرب.
20	$\int (2x+1)(x-1)dx = \int (2x^2-2x+x-1)dx$ $= \int (2x^2-x-1)dx$ $= \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - x + C$
21	$\int \left(\frac{x^2}{x^2}+\frac{1}{x^2}\right)^2 dx$ $= \int (1+x^{-2})^2 dx$ $= \int (1+2x^{-2}+x^{-4})dx$ $= x - 2x^{-1} - \frac{1}{3}x^{-3} + C = x - \frac{2}{x} - \frac{1}{3x^3} + C$
22	$\int (x^2-3x-x+3)(x+5)dx$ $= \int (x^2-4x+3)(x+5)dx$ $= \int (x^3+5x^2-4x^2-20x+3x+15)dx$ $= \int (x^3+x^2-17x+15)dx$ $= \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{17}{2}x^2 + 15x + C$

$$\int \left(\frac{P}{2x^2} + Q\right) dx = \frac{2}{x} + 10x + C$$

$$\int \left(\frac{P}{2x^2} + Q\right) dx = \int \left(\frac{P}{2}x^{-2} + Q\right) dx$$

$$= -\frac{P}{2}x^{-1} + Qx + C$$

$$= -\frac{P}{2x} + Qx + C$$

وبمقارنة هذه النتيجة مع النتيجة المعطاة نلاحظ أنّ:

$$\Rightarrow -\frac{P}{2} = 2 \quad \text{و} \quad Q = 10$$

23

$$\Rightarrow P = -4 \quad \text{و} \quad Q = 10$$

حلّ آخر:

نعلم أن مشتقة نتيجة التكامل تساوي الاقتران المكامَل (الذي وُجد تكامله)

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left(\frac{2}{x} + 10x + C\right) = \frac{P}{2x^2} + Q$$

$$\frac{-2}{x^2} + 10 = \frac{P}{2x^2} + Q$$

وبمقارنة طرفي هذه المعادلة نلاحظ أنّ:

الحد الثابت : $Q = 10$

معامل $\frac{1}{x^2}$: $\frac{P}{2} = -2 \Rightarrow P = -4$

مسألة اليوم صفحة 15
$S(t) = \int 500\sqrt[4]{t}dt$ $= \int 500t^{\frac{1}{4}}dt$ $= 500 \times \frac{4}{5}t^{\frac{5}{4}} + C \quad = 400t^{\frac{5}{4}} + C$ بما أن $S(0) = 0$ ، إذن $C = 0$ ومنه $S(t) = 400\sqrt[4]{t^5}$
أتحقق من فهمي صفحة 16
$f(x) = \int (6x^2 + 5)dx$ $f(x) = 2x^3 + 5x + C$ $f(1) = 2(1)^3 + 5(1) + C$ $9 = 7 + C$ $C = 2$ $f(x) = 2x^3 + 5x + 2$
أتحقق من فهمي صفحة 17
$C(x) = \int (0.3x^2 + 2x)dx$ $C(x) = 0.1x^3 + x^2 + K$ $C(10) = 0.1(10)^3 + (10)^2 + K$ $2200 = 100 + 100 + K$ $K = 2000$ $C(x) = 0.1x^3 + x^2 + 2000$
أتحقق من فهمي صفحة 18
$s(t) = \int v(t)dt \quad = \int (36t - 3t^2)dt \quad = 18t^2 - t^3 + C$ $s(0) = 18(0)^2 - (0)^3 + C$ $0 = 0 + C$ $C = 0$ $s(t) = 18t^2 - t^3$ $s(3) = 18(3)^2 - (3)^3$ $= 135$ إذن، موقع الجسيم بعد 3 ثوانٍ من بدء الحركة هو: 135 m

أتحقق من فهمي صفحة 20

$$v(t) = \int a(t)dt$$

$$= \int (4t - 4)dt$$

$$= 2t^2 - 4t + C_1$$

بما أن الجسيم بدأ حركته من نقطة الأصل بسرعة متجهة مقدارها $5\ m/s$ ، فإن

$v(0) = 5$ وهذا يعد شرطًا أوليًا لإيجاد قيمة ثابت التكامل C_1

$$v(0) = 2(0)^2 - 4(0) + C_1$$

$$5 = 0 + C_1$$

$$C_1 = 5$$

$$v(t) = 2t^2 - 4t + 5$$

$$s(t) = \int v(t)dt$$

$$= \int (2t^2 - 4t + 5)dt$$

$$= \frac{2}{3}t^3 - 2t^2 + 5t + C_2$$

بما أن الجسيم بدأ حركته من نقطة الأصل، فإن $s(0) = 0$ ، وهذا يعد شرطًا أوليًا لإيجاد قيمة ثابت التكامل C_2

$$s(t) = \frac{2}{3}t^3 - 2t^2 + 5t + C_2$$

$$s(0) = \frac{2}{3}(0)^3 - 2(0)^2 + 5(0) + C_2$$

$$0 = 0 + C_2$$

$$C_2 = 0$$

$$s(t) = \frac{2}{3}t^3 - 2t^2 + 5t$$

$$s(3) = \frac{2}{3}(3)^3 - 2(3)^2 + 5(3)$$

$$= 15$$

موقع الجسيم بعد 4 ثوان من بدء الحركة هو: $15\ \text{m}$

أتدرب وأحل المسائل صفحة 20

1	$f(x) = \int (x-3)dx$ $= \frac{1}{2}x^2 - 3x + C$ $9 = \frac{1}{2} \times (2)^2 - 3(2) + C$ $C = 13$ $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 13$
2	$f(x) = \int (x^2-4)dx$ $= \frac{1}{3}x^3 - 4x + C$ $7 = \frac{1}{3} \times (0)^3 - 4(0) + C$ $C = 7$ $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x + 7$
3	$f(x) = \int (6x^2 - 4x + 2)dx$ $= 2x^3 - 2x^2 + 2x + C$ $9 = 2(1)^3 - 2(1)^2 + 2(1) + C$ $C = 7$ $f(x) = 2x^3 - 2x^2 + 2x + 7$

4	$f(x) = \int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{4}x^2\right) dx$ $= \int \left(x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{4}x^2\right) dx$ $= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{12}x^3 + C$ $11 = \frac{2}{3}(4)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{12}(4)^3 + C$ $C = 11$ $f(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{12}x^3 + 11$ $= \frac{2}{3}\sqrt{x^3} - \frac{1}{12}x^3 + 11$
5	$f(x) = \int (x+2)^2 dx$ $= \int (x^2 + 4x + 4) dx$ $= \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 4x + C$ $7 = \frac{1}{3}(1)^3 + 2(1)^2 + 4(1) + C$ $C = \frac{2}{3}$ $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 4x + \frac{2}{3}$

6	$f(x) = \int \left(\frac{3}{\sqrt{x}} - x\right) dx$ $= \int \left(3x^{-\frac{1}{2}} - x\right) dx$ $= 6x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x^2 + C$ $= 6\sqrt{x} - \frac{1}{2}x^2$ $0 = 6\sqrt{4} - \frac{1}{2}(4)^2 + C$ $C = -4$ $f(x) = 6\sqrt{x} - \frac{1}{2}x^2 - 4$
7	$y = \int (0.4x + 3) dx$ $= 0.2x^2 + 3x + C$ $5 = 0.2(0)^2 + 3(0) + C$ $C = 5$ $y = 0.2x^2 + 3x + 5$
8	$f(x) = \int \frac{x^2 + 10}{x^2} dx$ $= \int \left(\frac{x^2}{x^2} + \frac{10}{x^2}\right) dx$ $= \int (1 + 10x^{-2}) dx$ $= x - 10x^{-1} + C$ $= x - \frac{10}{x} + C$ $2 = 5 - \frac{10}{5} + C$ $C = -1$ $f(x) = x - \frac{10}{x} - 1$

9	$f(x)=\int(3x^2-3)dx$ $=x^3-3x+C$ منحنى الاقتران يمر بالنقطة $(0,2)$ إذن: $2=(0)^3-3(0)+C$ $C=2$ $f(x)=x^3-3x+2$
10	$y=\int 4t^{-\frac{2}{3}}dt$ $=12t^{\frac{1}{3}}+C$ $=12\sqrt[3]{t}+C$ $30=12\sqrt[3]{8}+C$ $C=6$ $y=12\sqrt[3]{t}+6$
11	$y=12\sqrt[3]{27}+6$ $=42$ إذن، نصف قطر البالون بعد 27 ثانية من بدء نفخه هو: 42 cm
12	$h(t)=\int\left(0.2t^{\frac{2}{3}}+\sqrt{t}\right)dt$ $=\int\left(0.2t^{\frac{2}{3}}+t^{\frac{1}{2}}\right)dt$ $=0.12t^{\frac{5}{3}}+\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}+C$ $=0.12\sqrt[3]{t^5}+\frac{2}{3}\sqrt{t^3}+C$ بما أن ارتفاع الشجرة عند زراعتها 2 ft، فإن $h(0)=2$ ، وهذا يعد شرطًا أوليًا لإيجاد قيمة ثابت التكامل C $2=0.12\sqrt[3]{(0)^5}+\frac{2}{3}\sqrt{(0)^3}+C$ $C=2$ $h(t)=0.12\sqrt[3]{t^5}+\frac{2}{3}\sqrt{t^3}+2$

13	$s(t) = \int v(t)dt$ $= \int (2t+3)dt$ $= t^2 + 3t + C$ بما أن الجسيم بدأ حركته من نقطة الأصل، فإن $s(0) = 0$ ، وهذا يعد شرطًا أوليًا لإيجاد قيمة ثابت التكامل C $s(t) = t^2 + 3t + C$ $0 = (0)^2 + 3(0) + C$ $C = 0$ $s(t) = t^2 + 3t$ $s(3) = (3)^2 + 3(3)$ $= 18$ موقع الجسيم بعد 3 ثوان من بدء الحركة هو: $18\ \mathrm{m}$

14	$v(t) = \int a(t)dt$ $= \int t^2 dt$ $= \frac{1}{2}t^3 + C_1$ بما أن السرعة بعد ثانية واحدة من بدء الحركة هي $1\ m/s$ ، فإن $v(1) = 1$ وهذا يعد شرطًا أوليًا لإيجاد قيمة ثابت التكامل C_1 $1 = \frac{1}{2}(1)^3 + C_1$ $C_1 = \frac{1}{2}$ $v(t) = \frac{1}{2}t^3 + \frac{1}{2}$ $s(t) = \int v(t)dt$ $= \int \left(\frac{1}{2}t^3 + \frac{1}{2}\right)dt$ $= \frac{1}{8}t^4 + \frac{1}{2}t + C_2$ بما أن الموقع الابتدائي للجسيم هو $3\ m$، فإن $s(0) = 3$ ، وهذا يعد شرطًا أوليًا لإيجاد قيمة ثابت التكامل C_2 $s(t) = \frac{1}{8}t^4 + \frac{1}{2}t + C_2$ $3 = \frac{1}{8}(0)^4 + \frac{1}{2}(0) + C_2$ $C_2 = 3$ $s(t) = \frac{1}{8}t^4 + \frac{1}{2}t + 3$ $s(2) = \frac{1}{8}(2)^4 + \frac{1}{2}(2) + 3$ $= 6$ موقع الجسيم بعد ثانيتين من بدء الحركة هو: $6\ m$

$$v(t)=\int a(t)dt$$
$$=\int (9-2t)dt$$
$$=9t-t^2+C_1$$

بما أن السرعة الابتدائية هي $2\ \mathbf{m/s}$ ، فإن $v(0)=2$ ، وهذا يعد شرطًا أوليًا لإيجاد قيمة ثابت التكامل C_1

$$v(t)=9t-t^2+C_1$$
$$2=9(0)-(0)^2+C_1$$
$$C_1=2$$
$$v(t)=9t-t^2+2$$
$$s(t)=\int v(t)dt$$
$$=\int (9t-t^2+2)dt$$

15

$$=\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{3}t^3+2t+C_2$$

بما أن الحركة من نقطة الأصل، فإن $s(0)=0$ ، وهذا يعد شرطًا أوليًا لإيجاد قيمة ثابت التكامل C_2

$$s(t)=\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{3}t^3+2t+C_2$$
$$0=\frac{1}{2}(0)^2-\frac{1}{3}(0)^3+2(0)+C_2$$
$$C_2=0$$
$$s(t)=\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{3}t^3+2t$$
$$s(2)=\frac{1}{2}(2)^2-\frac{1}{3}(2)^3+2(2)$$
$$=\frac{10}{3}$$

موقع الجسيم بعد ثانيتين من بدء الحركة هو: $\frac{10}{3}\ \mathbf{m}$

$f'(x) = ax + b$

$f(x) = \int (ax + b)dx$

$= \frac{a}{2}x^2 + bx + C$

ميل المماس لمنحنى الاقتران f عند النقطة $(-2, 8)$ هو 7 معناها: $f'(-2) = 7$ وكذلك $f(-2) = 8$

منحنى الاقتران يقطع محور y عند النقطة $(0, 18)$ معناه: $f(0) = 18$

$f'(-2) = 7 \quad \Rightarrow a(-2) + b = 7$

$\Rightarrow -2a + b = 7 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$

16 $f(-2) = 8 \Rightarrow \frac{a}{2}(-2)^2 + b(-2) + C = 8$

$\Rightarrow 2a - 2b + C = 8 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$

$f(0) = 18 \Rightarrow \frac{a}{2}(0)^2 + b(0) + C = 18$

$\Rightarrow C = 18$

نعوض قيمة C في المعادلة (2) فنحصل على:

$2a - 2b + 18 = 8 \Rightarrow 2a - 2b = -10$

$\Rightarrow a - b = -5 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4)$

نجمع طرفي المعادلتين (1) و(4) فنحصل على:

$-a = 2 \Rightarrow a = -2$

نعوض قيمة a في المعادلة (4) فنحصل على: $b = 3$

قاعدة الاقتران هي:

$f(x) = -x^2 + 3x + 18$

17	$f'(x) = 4 - \frac{100}{x^2}$ $f(x) = \int \left(4 - \frac{100}{x^2}\right) dx$ $= \int (4 - 100x^{-2}) dx$ $= 4x + 100x^{-1} + C$ $= 4x + \frac{100}{x} + C$ للاقتران f نقطة حرجة عن $(a, 10)$ إذن: $f'(a) = 0$ وكذلك $f(a) = 10$ $f'(a) = 0 \Rightarrow 4 - \frac{100}{a^2} = 0$ $\Rightarrow 4 = \frac{100}{a^2}$ $\Rightarrow 4a^2 = 100$ $\Rightarrow a^2 = 25$ $\Rightarrow a = \pm 5$ لكن $a > 0$ إذن $a = 5$، ومنه $f(5) = 10$ $10 = 4(5) + \frac{100}{5} + C$ $\Rightarrow C = -30$ وتكون قاعدة الاقتران: $f(x) = 4x + \frac{100}{x} - 30$

مسألة اليوم صفحة 22
$C'(x) = 500 - \frac{x}{3}$ مقدار التغير في التكلفة عند زيادة الإنتاج من 300 دراجة إلى 600 دراجة شهريًا هو: $f(b) - f(a) = \int_a^b C'(x)dx$ $f(600) - f(300) = \int_{300}^{600} \left(500 - \frac{x}{3}\right) dx$ $= \left(500x - \frac{x^2}{6}\right)\Big\|_{300}^{600}$ $= \left(500(600) - \frac{(600)^2}{6}\right) - \left(500(300) - \frac{(300)^2}{6}\right)$ $= 105000$ إذن، عند زيادة الإنتاج من 300 إلى 400 دراجة، فإن تكلفة الإنتاج ستزيد شهريًا بمقدار 105000 دينار.

أتحقق من فهمي صفحة 23	
a	$\int_1^4 (8x - \sqrt{x})dx = \int_1^4 \left(8x - x^{\frac{1}{2}}\right) dx$ $= \left(4x^2 - \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)\Big\|_1^4$ $= \left(4x^2 - \frac{2}{3}\sqrt{x^3}\right)\Big\|_1^4$ $= \left(4(4)^2 - \frac{2}{3}\sqrt{4^3}\right) - \left(4(1)^2 - \frac{2}{3}\sqrt{1^3}\right)$ $= \frac{166}{3}$

<table>
<tr><td>b</td><td>$$\int_{-1}^{2}(1-x)(1+3x)dx=\int_{-1}^{2}(1+3x-x-3x^2)dx$$
$$=\int_{-1}^{2}(1+2x-3x^2)dx$$
$$=(x+x^2-x^3)\Big|_{-1}^{2}$$
$$=(2+2^2-2^3)-(-1+(-1)^2-(-1)^3)$$
$$=-3$$</td></tr>
<tr><td colspan="2">أتحقق من فهمي صفحة 24</td></tr>
<tr><td colspan="2">$$\int_{0}^{k}6x^2dx=2$$
$$2x^3\Big|_{0}^{k}=2$$
$$2k^3-2(0)^3=2$$
$$2k^3=2$$
$$k^3=1$$
$$k=1$$</td></tr>
<tr><td colspan="2">أتحقق من فهمي صفحة 26</td></tr>
<tr><td>a</td><td>$$\int_{-1}^{1}(f(x)+3h(x))dx=\int_{-1}^{1}f(x)dx+\int_{-1}^{1}3h(x)dx$$
$$=\int_{-1}^{1}f(x)dx+3\int_{-1}^{1}h(x)dx$$
$$=5+3(7)$$
$$=26$$</td></tr>
<tr><td>b</td><td>$$\int_{-1}^{4}f(x)dx=\int_{-1}^{1}f(x)dx+\int_{1}^{4}f(x)dx$$
$$=\int_{-1}^{1}f(x)dx-\int_{4}^{1}f(x)dx$$
$$=5-2$$
$$=3$$</td></tr>
</table>

c	$\int_{1}^{-1} 4h(x)dx = -\int_{-1}^{1} 4h(x)dx$ $= -4\int_{-1}^{1} h(x)dx$ $= -4(7)$ $= -28$
أتحقق من فهمي صفحة 27	
a	بما أن الاقتران تشعب عند 1، فإنني أجزئ التكامل عنده: $\int_{-2}^{2} f(x)dx = \int_{-2}^{1}(1+x)dx + \int_{1}^{2} 2x dx$ $= \left(x+\frac{1}{2}x^2\right)\Big\vert_{-2}^{1} + x^2\Big\vert_{1}^{2}$ $= \left(1+\frac{1}{2}(1)^2\right) - \left(-2+\frac{1}{2}(-2)^2\right) + (2^2 - 1^2)$ $= \frac{9}{2}$
b	أعيد تعريف اقتران القيمة المطلقة: $f(x) = \vert x-3\vert = \begin{cases} 3-x, & x<3 \\ x-3, & x\geq 3 \end{cases}$ بما أن الاقتران تشعب عند 3، فإنني أجزئ التكامل عنده: $\int_{-1}^{4} f(x)dx = \int_{-1}^{3}(3-x)dx + \int_{3}^{4}(x-3)dx$ $= \left(3x-\frac{1}{2}x^2\right)\Big\vert_{-1}^{3} + \left(\frac{1}{2}x^2-3x\right)\Big\vert_{3}^{4}$ $= \left(3(3)-\frac{1}{2}(3)^2\right) - \left(3(-1)-\frac{1}{2}(-1)^2\right) + \left(\frac{1}{2}(4)^2-3(4)\right) - \left(\frac{1}{2}(3)^2-3(3)\right)$ $= \frac{17}{2}$

أتحقق من فهمي صفحة 29
$P'(x) = 165 - 0.1x$ مقدار التغير الشهري في أرباح الشركة عند زيادة مبيعاتها الشهرية من 1400 دراجة إلى 1500 جهاز هو: $P(b) - P(a) = \int_a^b P'(x)dx$ $P(1500) - P(1400) = \int_{1400}^{1500} (165 - 0.1x)dx$ $= (165x - 0.05x^2)\Big\|_{1400}^{1500}$ $= (165(1500) - 0.05(1500)^2) - (165(1400) - 0.05(1400)^2)$ $= 2000$ إذن، عند زيادة مبيعات الشركة من 1400 جهاز إلى 1500 جهاز، فإن أرباح الشركة ستزيد شهريًّا بمقدار 2000 دينار.

أتدرب وأحل المسائل صفحة 29

1	$\int_{-1}^{3} 3x^2 dx = x^3\Big\|_{-1}^{3}$ $= (3)^3 - (-1)^3$ $= 28$
2	$\int_{-3}^{-2} 6dx = 6x\Big\|_{-3}^{-2}$ $= 6(-2) - 6(-3)$ $= 6$
3	$\int_{0}^{2} (3x^2 + 4x + 3)dx = (x^3 + 2x^2 + 3x)\Big\|_0^2$ $= \left((2)^3 + 2(2)^2 + 3(2)\right) - \left((0)^3 + 2(0)^2 + 3(0)\right)$ $= 22$

4	$\int_1^8 8\sqrt[3]{x}dx = \int_1^8 8x^{\frac{1}{3}}dx$ $= 6x^{\frac{4}{3}}\Big\|_1^8$ $= 6\sqrt[3]{x^4}\Big\|_1^8$ $= 6\sqrt[3]{8^4} - 6\sqrt[3]{1^4}$ $= 90$
5	$\int_1^9 \left(\sqrt{x} - \frac{4}{\sqrt{x}}\right) dx = \int_1^9 \left(x^{\frac{1}{2}} - 4x^{-\frac{1}{2}}\right) dx$ $= \left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - 8x^{\frac{1}{2}}\right)\Big\|_1^9$ $= \left(\frac{2}{3}\sqrt{x^3} - 8\sqrt{x}\right)\Big\|_1^9$ $= \left(\frac{2}{3}\sqrt{9^3} - 8\sqrt{9}\right) - \left(\frac{2}{3}\sqrt{1^3} - 8\sqrt{1}\right)$ $= \frac{4}{3}$
6	$\int_{-2}^3 (-x^2 + 4x - 5)dx = \left(-\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 5x\right)\Big\|_{-2}^3$ $= \left(-\frac{1}{3}(3)^3 + 2(3)^2 - 5(3)\right) - \left(-\frac{1}{3}(-2)^3 + 2(-2)^2 - 5(-2)\right)$ $= -\frac{80}{3}$
7	$\int_1^3 (x-2)(x+2)dx = \int_1^3 (x^2 - 4)dx$ $= \left(\frac{1}{3}x^3 - 4x\right)\Big\|_1^3$ $= \left(\frac{1}{3}(3)^3 - 4(3)\right) - \left(\frac{1}{3}(1)^3 - 4(1)\right)$ $= \frac{2}{3}$
8	$\int_{-3}^3 (9 - x^2)dx = \left(9x - \frac{1}{3}x^3\right)\Big\|_{-3}^3$ $= \left(9(3) - \frac{1}{3}(3)^3\right) - \left(9(-3) - \frac{1}{3}(-3)^3\right)$ $= 36$

9	$\int_1^4 \frac{2+\sqrt{x}}{x^2}dx = \int_1^4 \left(\frac{2}{x^2}+\frac{\sqrt{x}}{x^2}\right)dx$ $= \int_1^4 \left(2x^{-2}+x^{-\frac{3}{2}}\right)dx$ $= \left(-2x^{-1}-2x^{-\frac{1}{2}}\right)\Big\|_1^4$ $= \left(\frac{-2}{x}-\frac{2}{\sqrt{x}}\right)\Big\|_1^4$ $= \left(\frac{-2}{4}-\frac{2}{\sqrt{4}}\right)-\left(\frac{-2}{1}-\frac{2}{\sqrt{1}}\right)$ $= \frac{5}{2}$
10	$\int_1^4 x^3\left(\sqrt{x}+\frac{1}{x}\right)dx = \int_1^4 x^3\left(x^{\frac{1}{2}}+x^{-1}\right)dx$ $= \int_1^4 \left(x^{\frac{7}{2}}+x^2\right)dx$ $= \left(\frac{2}{9}x^{\frac{9}{2}}+\frac{1}{3}x^3\right)\Big\|_1^4$ $= \left(\frac{2}{9}\sqrt{x^9}+\frac{1}{3}x^3\right)\Big\|_1^4$ $= \left(\frac{2}{9}\sqrt{4^9}+\frac{1}{3}(4)^3\right)-\left(\frac{2}{9}\sqrt{1^9}+\frac{1}{3}(1)^3\right)$ $= \frac{1211}{9}$
11	$\int_1^8 \left(x^{\frac{1}{3}}-x^{-\frac{1}{3}}\right)dx = \left(\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}-\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}\right)\Big\|_1^8$ $= \left(\frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4}-\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}\right)\Big\|_1^8$ $= \left(\frac{3}{4}\sqrt[3]{8^4}-\frac{3}{2}\sqrt[3]{8^2}\right)-\left(\frac{3}{4}\sqrt[3]{1^4}-\frac{3}{2}\sqrt[3]{1^2}\right)$ $= \frac{27}{4} = 6.75$

12	$\int_1^9 (2+\sqrt{x})^2 dx = \int_1^9 (4+4\sqrt{x}+x)dx$ $= \int_1^9 \left(4+4x^{\frac{1}{2}}+x\right) dx$ $= \left(4x+\frac{8}{3}x^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{2}x^2\right)\Big\|_1^9$ $= \left(4(9)+\frac{8}{3}(9)^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{2}(9)^2\right) - \left(4(1)+\frac{8}{3}(1)^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{2}(1)^2\right)$ $= \frac{424}{3}$
13	$\int_{-1}^4 \|6-3x\|dx$ أعيد تعريف اقتران القيمة المطلقة: $\|6-3x\| = \begin{cases} 6-3x, & x<2 \\ 3x-6, & x\geq 2 \end{cases}$ بما أن الاقتران تشعب عند 2، فإنني أجزئ التكامل عنده: $\int_{-1}^4 \|6-3x\|dx = \int_{-1}^2 (6-3x)dx + \int_2^4 (3x-6)dx$ $= \left(6x-\frac{3}{2}x^2\right)\Big\|_{-1}^2 + \left(\frac{3}{2}x^2-6x\right)\Big\|_2^4$ $= \left(6(2)-\frac{3}{2}(2)^2\right) - \left(6(-1)-\frac{3}{2}(-1)^2\right) + \left(\frac{3}{2}(4)^2-6(4)\right) - \left(\frac{3}{2}(2)^2-6(2)\right)$ $= \frac{39}{2}$

14	$\int_3^5 \lvert x-2\rvert dx$ أعيد تعريف اقتران القيمة المطلقة: $\lvert x-2\rvert = \begin{cases} 2-x, & x<2 \\ x-2, & x\geq 2 \end{cases}$ ألاحظ أن نقطة التشعيب خارج فترة التكامل، فلا أجزىء التكامل ويكون على هذه الفترة: $\lvert x-2\rvert = x-2$ $\int_3^5 \lvert x-2\rvert dx = \int_3^5 (x-2)dx$ $= \left(\frac{1}{2}x^2 - 2x\right)\Big\|_3^5$ $= \left(\frac{1}{2}(5)^2 - 2(5)\right) - \left(\frac{1}{2}(3)^2 - 2(3)\right)$ $= 4$
15	$\int_2^3 \frac{x^2-1}{x+1}dx = \int_2^3 \frac{(x+1)(x-1)}{x+1}dx$ $= \int_2^3 (x-1)dx$ $= \left(\frac{1}{2}x^2 - x\right)\Big\|_2^3$ $= \left(\frac{1}{2}(3)^2 - 3\right) - \left(\frac{1}{2}(2)^2 - 2\right) = \frac{3}{2}$
16	بما أن الاقتران تشعب عند 3، فإنني أجزئ التكامل عنده: $\int_0^4 f(x)dx = \int_0^3 (2x+1)dx + \int_3^4 (10-x)dx$ $= (x^2+x)\Big\|_0^3 + \left(10x - \frac{1}{2}x^2\right)\Big\|_3^4$ $= ((3)^2+3) - ((0)^2+0) + \left(10(4) - \frac{1}{2}(4)^2\right) - \left(10(3) - \frac{1}{2}(3)^2\right)$ $= \frac{37}{2}$

17	بما أن الاقتران تشعب عند 0، فإنني أجزئ التكامل عنده: $\int_{-1}^{2} f(x)dx = \int_{-1}^{0} (-x^2+5)dx + \int_{0}^{2} (x+5)dx$ $= \left(-\frac{1}{3}x^3+5x\right)\Big\|_{-1}^{0} + \left(\frac{1}{2}x^2+5x\right)\Big\|_{0}^{2}$ $= \left(-\frac{1}{3}(0)^3+5(0)\right) - \left(-\frac{1}{3}(-1)^3+5(-1)\right) + \left(\frac{1}{2}(2)^2+5(2)\right) - \left(\frac{1}{2}(0)^2+5(0)\right)$ $= \frac{50}{3}$
18	$\int_{2}^{2} g(x)dx = 0$
19	$\int_{5}^{1} (g(x)-2)dx = \int_{5}^{1} g(x)dx - \int_{5}^{1} 2dx$ $= (-8) - \left((2x)\|_5^1\right)$ $= (-8) - \left((2(1)) - (2(5))\right)$ $= 0$
20	$\int_{1}^{2} (3f(x)+x)dx = \int_{1}^{2} 3f(x)dx + \int_{1}^{2} xdx$ $= 3\int_{1}^{2} f(x)dx + \left(\frac{1}{2}x^2\right)\Big\|_{1}^{2}$ $= 3(-4) + \left(\frac{1}{2}(2)^2\right) - \left(\frac{1}{2}(1)^2\right)$ $= -\frac{21}{2}$
21	$\int_{2}^{5} f(x)dx = \int_{2}^{1} f(x)dx + \int_{1}^{5} f(x)dx$ $= -(-4)+6$ $= 10$
22	$\int_{1}^{5} (f(x)-g(x))dx = \int_{1}^{5} f(x)dx - \int_{1}^{5} g(x)dx$ $= 6-8$ $= -2$

23	$\int_1^5 (4f(x)+g(x))dx = \int_1^5 4f(x)dx + \int_1^5 g(x)dx$ $= 4\int_1^5 f(x)dx + \int_1^5 g(x)dx$ $= 4(6)+8$ $= 32$
24	$\int_1^m (6x-10)dx = 4$ $(3x^2-10x)\Big\|_1^m = 4$ $(3m^2-10m)-\left(3(1)^2-10(1)\right) = 4$ $3m^2-10m+7=4$ $3m^2-10m+3=0$ $(3m-1)(m-3)=0$ $3m-1=0 \Rightarrow m=\frac{1}{3}$, $m-3=0 \Rightarrow m=3$
25	$C'(x)=6x+1$ مقدار التغير في التكلفة عند زيادة الشركة إنتاجها من 10 قطع إلى 20 قطعة شهريًا هو: $C(b)-C(a)=\int_a^b C'(x)dx$ $C(20)-C(10)=\int_{10}^{20}(6x+1)dx$ $= (3x^2+x)\Big\|_{10}^{20}$ $= (3(20)^2+20)-(3(10)^2+10)$ $= 910$ إذن، عند زيادة الإنتاج من 10 قطع إلى 20 قطعة، فإن تكلفة الإنتاج ستزيد شهريًا بمقدار 910 دنانير.

26	$N'(t) = 280t^{\frac{3}{2}}$ $N(t) = \int_0^4 280\, t^{\frac{3}{2}}\, dx$ $= 112\, t^{\frac{5}{2}}\Big\|_0^4$ $= 112\sqrt{t^5}\Big\|_0^4$ $= 112\sqrt{4^5} - 112\sqrt{0^5}$ $= 3584$ إذن، يدخل البحيرة 3584 كيلوغرامًا من الملوثات في 4 أشهر.
27	خالد لم يراعِ ترتيب حدود التكامل عند التعويض، يجب أن يطرح قيمة الاقتران الأصلي عند الحد السفلي للتكامل من قيمته عند الحد العلوي على النحو الآتي: $\int_0^2 (x^2 + x)\, dx = \left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2\right)\Big\|_0^2$ $= \left(\frac{1}{3}(2)^3 + \frac{1}{2}(2)^2\right) - \left(\frac{1}{3}(0)^3 + \frac{1}{2}(0)^2\right)$ $= \frac{14}{3}$
28	$\int_0^1 x^n(1-x)dx = \int_0^1 (x^n - x^{n+1})dx$ $= \left(\frac{1}{n+1}x^{n+1} - \frac{1}{n+2}x^{n+2}\right)\Big\|_0^1$ $= \left(\frac{1}{n+1}(1)^{n+1} - \frac{1}{n+2}(1)^{n+2}\right) - \left(\frac{1}{n+1}(0)^{n+1} - \frac{1}{n+2}(0)^{n+2}\right)$ $= \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) - (0)$ $= \frac{n+2-n-1}{(n+1)(n+2)}$ $= \frac{1}{(n+1)(n+2)}$

29	$\int_1^5 (2ax+7)\,dx = 4a^2$ $(ax^2+7x)\Big\|_1^5 = 4a^2$ $\left(a(5)^2+7(5)\right)-\left(a(1)^2+7(1)\right)=4a^2$ $25a+35-a-7=4a^2$ $24a+28=4a^2$ $4a^2-24a-28=0$ $a^2-6a-7=0$ $(a-7)(a+1)=0$ $a-7=0 \Rightarrow a=7 \quad ,a+1=0 \Rightarrow a=-1$

الدرس الرابع: المساحة

مسألة اليوم صفحة 31
$f(x) = 4 - x^2$ أولا نساوي قاعدة الاقتران بالصفر، ونحل المعادلة الناتجة: $f(x) = 0 \implies 4 - x^2 = 0$ $\implies (2+x)(2-x) = 0$ $\implies x = -2 \;,\; x = 2$ وهي تمثل حدود التكامل $A = \int_{-2}^{2} (4 - x^2)dx$ $= \left(4x - \frac{1}{3}x^3\right)\Big\|_{-2}^{2}$ $= \left(4(2) - \frac{1}{3}(2)^3\right) - \left(4(-2) - \frac{1}{3}(-2)^3\right)$ $= \frac{32}{3}$ إذن، المساحة هي: 10.667 كيلومتر مربع.
أتحقق من فهمي صفحة 33
$f(x) = x + 3$ أولا نساوي قاعدة الاقتران بالصفر، ونحل المعادلة الناتجة: $f(x) = 0 \implies x + 3 = 0$ $\implies x = -3$ بما أن -3 لا تنتمي إلى الفترة $[-1, 3]$، إذن نهملها. نختار عددًا ضمن الفترة $[-1, 3]$، وليكن 0 ونعوضه في قاعدة الاقتران: $f(0) = 0 + 3 = 3 > 0$ بما أن ناتج التعويض موجب، إذن منحنى الاقتران يقع فوق المحور x $A = \int_{-1}^{3} (x+3)dx$ $= \left(\frac{1}{2}x^2 + 3x\right)\Big\|_{-1}^{3}$ $= \left(\frac{1}{2}(3)^2 + 9\right) - \left(\frac{1}{2}(-1)^2 - 3\right)$ $= 16$ إذن، المساحة هي: 16 وحدة مربعة.

أتحقق من فهمي صفحة 34

$f(x) = x^2 - 4$

أولا نساوي قاعدة الاقتران بالصفر، ونحل المعادلة الناتجة:

$$f(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 4 = 0$$
$$\Rightarrow (x-2)(x+2) = 0$$
$$\Rightarrow x = 2 \ , \quad x = -2$$

بما كلا العددين $-2, 2$ لا ينتمي إلى الفترة $[-1, 1]$، إذن نهملهما.

نختار عددًا ضمن الفترة $[-1, 1]$، وليكن 0 ونعوضه في قاعدة الاقتران:

$$f(0) = 0 - 4 = -4 < 0$$

بما أن ناتج التعويض سالب، إذن منحنى الاقتران يقع تحت المحور x في الفترة $[-1, 1]$.

$$A = -\int_{-1}^{1} (x^2 - 4)\,dx$$
$$= -\left(\frac{1}{3}x^3 - 4x\right)\Big|_{-1}^{1}$$
$$= -\left(\left(\frac{1}{3}(1)^3 - 4(1)\right) - \left(\frac{1}{3}(-1)^3 - 4(-1)\right)\right)$$
$$= \frac{22}{3}$$

إذن، المساحة هي: $\frac{22}{3}$ وحدات مربعة

أتحقق من فهمي صفحة 36

$f(x) = x^2 + 2x$

أولا نساوي قاعدة الاقتران بالصفر، ونحل المعادلة الناتجة:

$$f(x) = 0 \implies x^2 + 2x = 0$$
$$\implies x(x+2) = 0$$
$$\implies x = 0 \ , x = -2$$

بما أن العدد -2 ينتمي إلى الفترة $[-3, -1]$، إذن نقسم الفترة إلى فترتين:

$[-2, -1]$ و $[-3, -2]$

نختار عددًا ضمن الفترة $[-3, -2]$، وليكن $-\frac{5}{2}$ ونعوضه في قاعدة الاقتران:

$$f\left(-\frac{5}{2}\right) = \left(-\frac{5}{2}\right)^2 + 2\left(-\frac{5}{2}\right) = \frac{5}{4} > 0$$

بما أن ناتج التعويض موجب، إذن منحنى الاقتران يقع فوق المحور x في الفترة $[-3, -2]$

نختار عددًا ضمن الفترة $[-2, -1]$، وليكن $-\frac{3}{2}$ ونعوضه في قاعدة الاقتران:

$$f\left(-\frac{3}{2}\right) = \left(-\frac{3}{2}\right)^2 + 2\left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{3}{4} < 0$$

بما أن ناتج التعويض سالب، إذن منحنى الاقتران يقع تحت المحور x في الفترة $[-2, -1]$

$$A = \int_{-3}^{-2} (x^2 + 2x)dx - \int_{-2}^{-1} (x^2 + 2x)dx$$
$$= \left(\frac{1}{3}x^3 + x^2\right)\Big|_{-3}^{-2} - \left(\frac{1}{3}x^3 + x^2\right)\Big|_{-2}^{-1}$$
$$= \left(\left(\frac{1}{3}(-2)^3 + (-2)^2\right) - \left(\frac{1}{3}(-3)^3 + (-3)^2\right)\right) - \left(\left(\frac{1}{3}(-1)^3 + (-1)^2\right) - \left(\frac{1}{3}(-2)^3 + (-2)^2\right)\right)$$
$$= 2$$

إذن، المساحة هي: 2 وحدة مربعة.

أتحقق من فهمي صفحة 38

a

$$f(x) = x^2 + 5x + 4$$

أولا نساوي قاعدة الاقتران بالصفر، ونحل المعادلة الناتجة:

$$f(x) = 0 \;\Rightarrow\; x^2 + 5x + 4 = 0$$
$$\Rightarrow (x+4)(x+1) = 0$$
$$\Rightarrow x = -4 \;, x = -1$$

هذه الإحداثيات تمثل حدود التكامل.

نختار عددًا ضمن الفترة $[-4,-1]$، وليكن -2 ونعوضه في قاعدة الاقتران:

$$f(-2) = (-2)^2 + 5(-2) + 4 = -2 < 0$$

بما أن ناتج التعويض سالب، إذن منحنى الاقتران يقع تحت المحور x في الفترة $[-4,-1]$

$$A = -\int_{-4}^{-1} (x^2 + 5x + 4)dx$$

$$= -\left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 + 4x\right)\Big|_{-4}^{-1}$$

$$= -\left(\left(\frac{1}{3}(-1)^3 + \frac{5}{2}(-1)^2 + 4(-1)\right) - \left(\frac{1}{3}(-4)^3 + \frac{5}{2}(-4)^2 + 4(-4)\right)\right)$$

$$= \frac{9}{2}$$

إذن، المساحة هي: $\frac{9}{2}$ وحدة مربعة.

b

$$f(x) = x^3 - 9x$$

أولا نساوي قاعدة الاقتران بالصفر، ونحل المعادلة الناتجة:

$$\begin{aligned} f(x) = 0 \;&\Rightarrow\; x^3 - 9x = 0 \\ &\Rightarrow x(x^2 - 9) = 0 \\ &\Rightarrow x(x+3)(x-3) = 0 \\ &\Rightarrow x = 0 \;, x = -3 \;, x = 3 \end{aligned}$$

هذه الإحداثيات تمثل حدود التكامل.

نختار عددًا ضمن الفترة $[-3, 0]$، وليكن -1 ونعوضه في قاعدة الاقتران:

$$f(-1) = (-1)^3 - 9(-1) = 8 > 0$$

بما أن ناتج التعويض موجب، إذن منحنى الاقتران يقع فوق المحور x في الفترة $[-3, 0]$

نختار عددًا ضمن الفترة $[0, 3]$، وليكن 1 ونعوضه في قاعدة الاقتران:

$$f(1) = (1)^3 - 9(1) = -8 < 0$$

بما أن ناتج التعويض سالب، إذن منحنى الاقتران يقع تحت المحور x في الفترة $[0, 3]$

$$\begin{aligned} A &= \int_{-3}^{0} (x^3 - 9x)dx - \int_{0}^{3} (x^3 - 9x)dx \\ &= \left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{9}{2}x^2\right)\Big|_{-3}^{0} - \left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{9}{2}x^2\right)\Big|_{0}^{3} \\ &= \left((0) - \left(\frac{1}{4}(-3)^4 - \frac{9}{2}(-3)^2\right)\right) - \left(\left(\frac{1}{4}(3)^4 - \frac{9}{2}(3)^2\right) - (0)\right) \\ &= \frac{81}{2} \end{aligned}$$

إذن، المساحة هي: $\frac{81}{2}$ وحدة مربعة.

أتدرب وأحل المسائل صفحة 39

1

$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^{1} (x^2 + 2)dx = \left(\frac{1}{3}x^3 + 2x\right)\Big|_{-2}^{1} \\ &= \left(\frac{1}{3}(1)^3 + 2(1)\right) - \left(\frac{1}{3}(-2)^3 + 2(-2)\right) \\ &= 9 \end{aligned}$$

2	$A=\int_{4}^{9} x^{\frac{3}{2}}dx=\left(\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\right)\Big\vert_{4}^{9}$ $=\left(\frac{2}{5}\sqrt[2]{x^5}\right)\Big\vert_{4}^{9}$ $=\left(\frac{2}{5}\sqrt[2]{9^5}\right)-\left(\frac{2}{5}\sqrt[2]{4^5}\right)$ $=\frac{422}{5}$
3	$A=-\int_{2}^{4}\left(\frac{2}{x^2}-3\right)dx=-\int_{2}^{4}(2x^{-2}-3)dx$ $=\int_{2}^{4}(-2x^{-2}+3)dx$ $=(2x^{-1}+3x)\vert_{2}^{4}$ $=\left(\frac{2}{x}+3x\right)\Big\vert_{2}^{4}$ $=\left(\frac{2}{4}+3(4)\right)-\left(\frac{2}{2}+3(2)\right)$ $=\frac{11}{2}$
4	$A=\int_{-1}^{0}(x^3-3x)dx-\int_{0}^{1}(x^3-3x)dx$ $=\int_{-1}^{0}(x^3-3x)dx+\int_{0}^{1}(-x^3+3x)dx$ $=\left(\frac{1}{4}x^4-\frac{3}{2}x^2\right)\Big\vert_{-1}^{0}+\left(-\frac{1}{4}x^4+\frac{3}{2}x^2\right)\Big\vert_{0}^{1}$ $=(0)-\left(\frac{1}{4}(-1)^4-\frac{3}{2}(-1)^2\right)+\left(-\frac{1}{4}(1)^4+\frac{3}{2}(1)^2\right)-(0)$ $=\frac{5}{2}$

5	$A = \int_0^3 (x+1)dx = \left(\frac{1}{2}x^2 + x\right)\Big\vert_0^3$ $= \left(\frac{1}{2}(3)^2 + 3\right) - \left(\frac{1}{2}(0)^2 + 0\right)$ $= \frac{15}{2}$
6	$A = \int_0^2 3x^2 dx = x^3\Big\vert_0^2$ $= (2^3) - (0^3)$ $= 8$
7	$f(x) = 3x^2 - 2x + 2$ أولا نساوي قاعدة الاقتران بالصفر، ونحل المعادلة الناتجة: $f(x) = 0 \implies 3x^2 - 2x + 2 = 0$ نحسب المميز: $\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4(3)(2) = -20$ بما أن المميز سالب، إذن لا يوجد حلول لهذه المعادلة، أي أن المنحنى لا يقطع المحور x أبدًا، وتكون حدود التكامل هي 0 و 2 نختار عددًا ضمن الفترة $[0, 2]$، وليكن 1 ونعوضه في قاعدة الاقتران: $f(1) = 3(1)^2 - 2(1) = 1 > 0$ بما أن ناتج التعويض موجب، إذن منحنى الاقتران يقع فوق المحور x في الفترة $[0, 2]$ $A = \int_0^2 (3x^2 - 2x + 2)dx = (x^3 - x^2 + 2x)\Big\vert_0^2$ $= \left((2)^3 - (2)^2 + 2(2)\right) - \left((0)^3 - (0)^2 + 2(0)\right)$ $= 8$ إذن، المساحة هي: 8 وحدات مربعة.

<table>
<tr><td>8</td><td>

$f(x) = 9 - x^2$

أولا نساوي قاعدة الاقتران بالصفر، ونحل المعادلة الناتجة:

$$f(x) = 0 \implies 9 - x^2 = 0$$
$$\implies (3 + x)(3 - x) = 0$$
$$\implies x = -3 \,, x = 3$$

هذه الإحداثيات تمثل حدود التكامل.

نختار عددًا ضمن الفترة $[-3, 3]$، وليكن 0 ونعوضه في قاعدة الاقتران:

$$f(0) = 9 - (0)^2 = 9 > 0$$

بما أن ناتج التعويض موجب، إذن منحنى الاقتران يقع فوق المحور x في الفترة $[-3, 3]$

$$A = \int_{-3}^{3} (9 - x^2) dx = \left(9x - \frac{1}{3}x^3\right)\Big|_{-3}^{3}$$
$$= \left(9(3) - \frac{1}{3}(3)^3\right) - \left(9(-3) - \frac{1}{3}(-3)^3\right)$$
$$= 36$$

إذن، المساحة هي: 36 وحدة مربعة.

</td></tr>
</table>

$f(x) = x^3 + 4x$

أولا نساوي قاعدة الاقتران بالصفر، ونحل المعادلة الناتجة:

$$f(x) = 0 \Rightarrow x^3 + 4x = 0$$
$$\Rightarrow x(x^2 + 4) = 0$$
$$\Rightarrow x = 0$$

مميز العبارة التربيعية $(x^2 + 4)$ سالب، لذا لا أصفار لها.

نختار عددًا ضمن الفترة $[-1, 0]$، وليكن $-\frac{1}{2}$ ونعوضه في قاعدة الاقتران:

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^3 + 4\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{17}{8} < 0$$

بما أن ناتج التعويض سالب، إذن منحنى الاقتران يقع تحت المحور x في الفترة $[-1, 0]$

نختار عددًا ضمن الفترة $[0, 2]$، وليكن 1 ونعوضه في قاعدة الاقتران:

9 $f(1) = (1)^3 + 4(1) = 5 > 0$

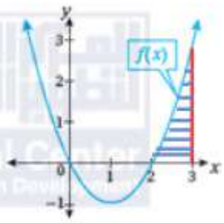
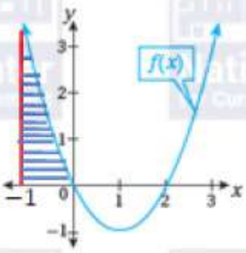
بما أن ناتج التعويض موجب، إذن منحنى الاقتران يقع فوق المحور x في الفترة $[0, 2]$

$$A = -\int_{-1}^{0}(x^3 + 4x)dx + \int_{0}^{2}(x^3 + 4x)dx$$
$$= \int_{-1}^{0}(-x^3 - 4x)dx + \int_{0}^{2}(x^3 + 4x)dx$$
$$= \left(-\frac{1}{4}x^4 - 2x^2\right)\Big|_{-1}^{0} + \left(\frac{1}{4}x^4 + 2x^2\right)\Big|_{0}^{2}$$
$$= \left((0) - \left(-\frac{1}{4}(-1)^4 - 2(-1)^2\right)\right) + \left(\left(\frac{1}{4}(2)^4 + 2(2)^2\right) - (0)\right)$$
$$= \frac{57}{4} = 14.25$$

إذن، المساحة هي: 14.25 وحدة مربعة.

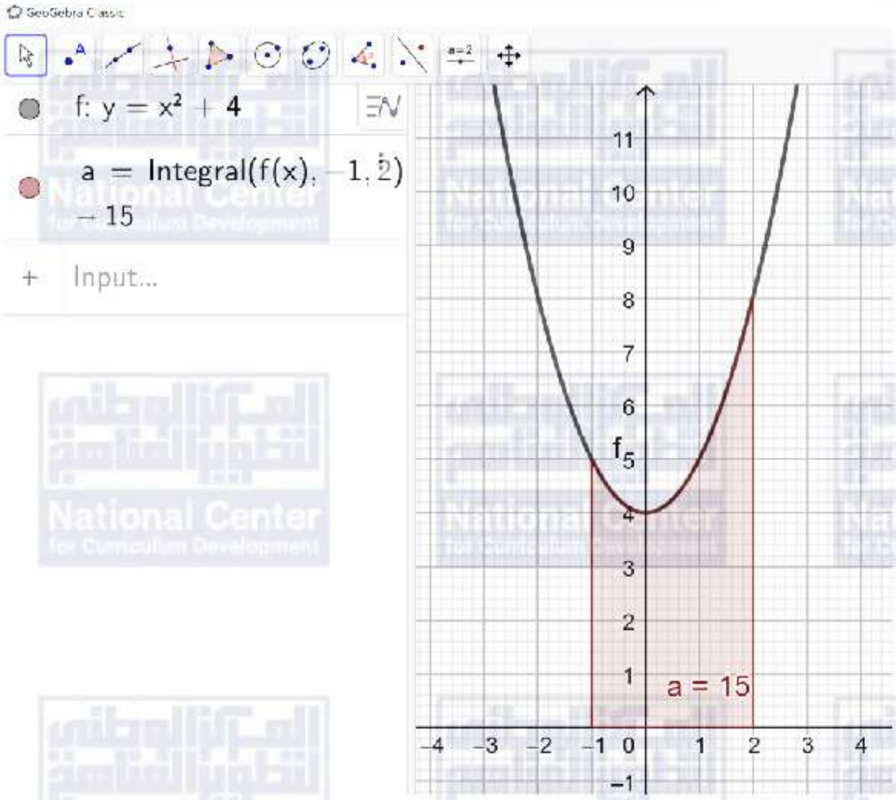
10	$f(x) = -7 + 2x - x^2$ أولا نساوي قاعدة الاقتران بالصفر، ونحل المعادلة الناتجة: $f(x) = 0 \implies -7 + 2x - x^2 = 0$ نحسب المميز: $\Delta = b^2 - 4ac = (2)^2 - 4(-1)(-7) = -24$ بما أن المميز سالب، إذن لا يوجد حلول لهذه المعادلة، أي أن المنحنى لا يقطع المحور x أبدًا، وتكون حدود التكامل هي 1 و 4 نختار عددًا ضمن الفترة $[1, 4]$، وليكن 2 ونعوضه في قاعدة الاقتران: $f(2) = -7 + 2(2) - (2)^2 = -7 < 0$ بما أن ناتج التعويض سالب، إذن منحنى الاقتران يقع تحت المحور x في الفترة $[1, 4]$ $A = -\int_1^4 (-7 + 2x - x^2)dx$ $= \int_1^4 (7 - 2x + x^2)dx$ $= \left(7x - x^2 + \frac{1}{3}x^3\right)\Big\|_1^4$ $= \left(7(4) - (4)^2 + \frac{1}{3}(4)^3\right) - \left(7(1) - (1)^2 + \frac{1}{3}(1)^3\right)$ $= 27$ إذن، المساحة هي: 27 وحدة مربعة.
11	$f(x) = 5 - x$ أولا نساوي قاعدة الاقتران بالصفر، ونحل المعادلة الناتجة: $f(x) = 0 \implies 5 - x = 0$ $\implies x = 5$ نختار عددًا ضمن الفترة $[3, 5]$، وليكن 4 ونعوضه في قاعدة الاقتران: $f(4) = 5 - (4) = 1 > 0$ بما أن ناتج التعويض موجب، إذن منحنى الاقتران يقع فوق المحور x في الفترة $[3, 5]$ $A = \int_3^5 (5 - x)dx = \left(5x - \frac{1}{2}x^2\right)\Big\|_3^5$ $= \left(\left(5(5) - \frac{1}{2}(5)^2\right) - \left(5(3) - \frac{1}{2}(3)^2\right)\right)$ $= 2$ إذن، المساحة هي: 2 وحدة مربعة.

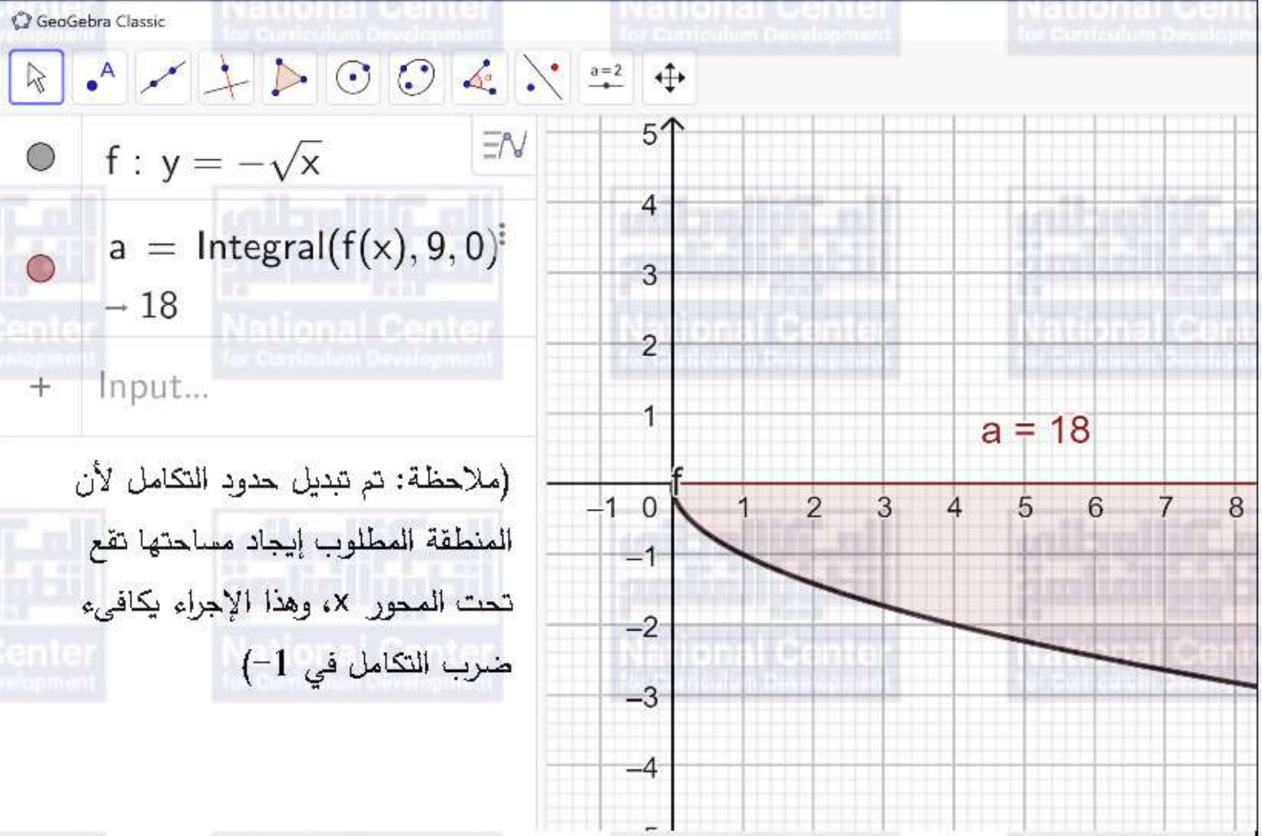
12	$f(x) = (x+1)(x-4)$ أولا نساوي قاعدة الاقتران بالصفر، ونحل المعادلة الناتجة: $f(x) = 0 \Rightarrow (x+1)(x-4) = 0$ $\Rightarrow x = -1, x = 4$ هذه الإحداثيات تمثل حدود التكامل. نختار عددًا ضمن الفترة $[-1, 4]$، وليكن 0 ونعوضه في قاعدة الاقتران: $f(0) = (0+1)(0-4) = -4 < 0$ بما أن ناتج التعويض سالب، إذن منحنى الاقتران يقع تحت المحور x في الفترة $[-1, 4]$ $A = -\int_{-1}^{4}(x+1)(x-4)dx = -\int_{-1}^{4}(x^2+x-4x-4)dx$ $= -\int_{-1}^{4}(x^2-3x-4)dx$ $= \int_{-1}^{4}(-x^2+3x+4)dx$ $= \left(-\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 4x\right)\Big\|_{-1}^{4}$ $= \left(-\frac{1}{3}(4)^3 + \frac{3}{2}(4)^2 + 4(4)\right) - \left(-\frac{1}{3}(-1)^3 + \frac{3}{2}(-1)^2 + 4(-1)\right)$ $= \frac{125}{6} \approx 20.83$ إذن، المساحة هي: 20.83وحدة مربعة تقريبًا.
13	$f(x) = x^2 - 2x$ حسب الشكل، فإن منحنى الاقتران يقع تحت المحور x في الفترة $[0, 2]$ $A = -\int_{0}^{2}(x^2-2x)dx = \int_{0}^{2}(-x^2+2x)dx$ $= \left(-\frac{1}{3}x^3 + x^2\right)\Big\|_{0}^{2}$ $= \left(-\frac{1}{3}(2)^3 + (2)^2\right) - \left(-\frac{1}{3}(0)^3 + (0)^2\right)$ $= \frac{4}{3}$ إذن، المساحة هي: $\frac{4}{3}$ وحدة مربعة.

14	$A = \int_2^3 (x^2 - 2x)dx$ $= \left(\frac{1}{3}x^3 - x^2\right)\Big\|_2^3$ $= \left(\left(\frac{3^3}{3} - 3^2\right) - \left(\frac{8}{3} - 4\right)\right)$ $= \frac{4}{3}$  إذن، المساحة هي $\frac{4}{3}$ وحدة مربعة
15	$A = \int_{-1}^0 (x^2 - 2x)dx$ $= \left(\frac{1}{3}x^3 - x^2\right)\Big\|_{-1}^0$ $= (0) - \left(-\frac{1}{3} - 1\right) = \frac{4}{3}$  إذن، المساحة هي $\frac{4}{3}$ وحدة مربعة
16	$A = \int_0^4 (8 + 8\sqrt{x} - 6x)dx = \int_0^4 \left(8 + 8x^{\frac{1}{2}} - 6x\right)dx$ $= \left(8x + \frac{16}{3}x^{\frac{3}{2}} - 3x^2\right)\Big\|_0^4$ $= \left(8x + \frac{16}{3}\sqrt{x^3} - 3x^2\right)\Big\|_0^4$ $= \left(8(4) + \frac{16}{3}\sqrt{4^3} - 3(4)^2\right) - (0)$ $= \frac{80}{3}$ إذن، مساحة سطح الجناح هي $\frac{80}{3}$ متر مربع

17	$y = kx(4-x)$ أولا نساوي قاعدة الاقتران بالصفر، ونحل المعادلة الناتجة: $y = 0 \Rightarrow \ kx(4-x) = 0$ $\Rightarrow \ x = 0 \ or \ x = 4$ حسب الشكل، فإن منحنى الاقتران يقع فوق المحور x في الفترة $[0,4]$ $A = \int_0^4 (kx(4-x))dx = \int_0^4 (4kx - kx^2)dx$ $= \left(2kx^2 - \frac{k}{3}x^3\right)\Big\|_0^4$ $= \left(2k(4)^2 - \frac{k}{3}(4)^3\right) - \left(2k(0)^2 - \frac{k}{3}(0)^3\right)$ $= \frac{32}{3}k$ $\frac{32}{3}k = 32 \ \Rightarrow \ k = 3$
18	$R_1 = 2 \ \Rightarrow -\int_{-1}^{0} f(x)dx = 2$ $\Rightarrow \int_{-1}^{0} f(x)dx = -2$ $R_2 = 3 \ \Rightarrow -\int_{3}^{4} f(x)dx = 3$ $\Rightarrow \int_{3}^{4} f(x)dx = -3$ $\int_0^4 f(x)dx = \int_0^3 f(x)dx + \int_3^4 f(x)dx$ $\Rightarrow 10 = \int_0^3 f(x)dx + (-3)$ $\Rightarrow \int_0^3 f(x)dx = 13$ $\int_{-1}^{3} f(x)dx = \int_{-1}^{0} f(x)dx + \int_0^3 f(x)dx$ $= -2 + 13$ $= 11$

معمل جيوجبرا: تطبيقات التكامل: المساحة

أتدرب صفحة 41	
1	 إذن، المساحة هي 15 وحدة مربعة

2	 (ملاحظة: تم تبديل حدود التكامل لأن المنطقة المطلوب إيجاد مساحتها تقع تحت المحور x، وهذا الإجراء يكافىء ضرب التكامل في -1) إذن، المساحة هي 18 وحدة مربعة

الدرس الخامس: تكامل اقترانات خاصة

مسألة اليوم صفحة 42
أولًا نجد تكامل الاقتران $P'(t)$ $P(t)=\int \frac{5000}{\sqrt{(t+1)^3}}dt=\int \frac{5000}{(t+1)^{\frac{3}{2}}}dt$ $=\int 5000(t+1)^{-\frac{3}{2}}dt$ $=-10000(t+1)^{-\frac{1}{2}}+C$ ثانيًا، نجد ثابت التكامل C: بما أن عدد طلاب الجامعة عند التأسيس 2000 طالب، إذن $P(0)=2000$ $P(t)=-10000(t+1)^{-\frac{1}{2}}+C$ $P(0)=-10000(0+1)^{-\frac{1}{2}}+C$ $2000=-10000+C$ $C=12000$ $P(t)=-10000(t+1)^{-\frac{1}{2}}+12000$ ثالثًا، نجد عدد الطلبة بعد 3 سنوات من التأسيس: $P(3)=-10000(3+1)^{-\frac{1}{2}}+12000$ $=7000$ إذن، عدد الطلبة بعد 3 سنوات من التأسيس هو 7000 طالب.

أتحقق من فهمي صفحة 43	
a	$\int(5x^2+7e^x)dx=\frac{5}{3}x^3+7e^x+C$
b	$\int\left(9\cos x+\frac{4}{x^3}\right)dx=\int(9\cos x+4x^{-3})dt$ $=9\sin x-2x^{-2}+C$ $=9\sin x-\frac{2}{x^2}+C$
c	$\int(\sqrt[3]{x}-\sin x)dx=\int\left(x^{\frac{1}{3}}-\sin x\right)dx$ $=\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}+\cos x+C$

	أتحقق من فهمي صفحة 45
a	$\int \left(\frac{1}{x} + 8e^x\right) dx = \ln\|x\| + 8e^x + C$
b	$\int \left(\sin x - \frac{5}{x}\right) dx = -\cos x - 5\ln\|x\| + C$
c	$\int \frac{x^2 - 7x + 2}{x^2} dx = \int \left(\frac{x^2}{x^2} - \frac{7x}{x^2} + \frac{2}{x^2}\right) dx$ $= \int \left(1 - \frac{7}{x} + 2x^{-2}\right) dx$ $= x - 7\ln\|x\| - x^{-1} + C$ $= x - 7\ln\|x\| - \frac{1}{x} + C$
	أتحقق من فهمي صفحة 47
a	$\int (7x-5)^6 dx = \frac{1}{7} \times \frac{1}{7}(7x-5)^7 + C$ $= \frac{1}{49}(7x-5)^7 + C$
b	$\int \sqrt{2x+1} dx = \int (2x+1)^{\frac{1}{2}} dx$ $= \frac{1}{2} \times \frac{2}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}} + C$ $= \frac{1}{3}\sqrt{(2x+1)^3} + C$
c	$\int 4\cos(3x-7)\, dx = \frac{1}{3} \times 4\sin(3x-7) + C$ $= \frac{4}{3}\sin(3x-7) + C$
d	$\int (\sin 5x + e^{2x}) dx = -\frac{1}{5}\cos 5x + \frac{1}{2}e^{2x} + C$
e	$\int (6x^2 - 3e^{7x+1}) dx = 2x^3 - \frac{3}{7}e^{7x+1} + C$
f	$\int \frac{5}{3x+2} dx = \frac{5}{3}\ln\|3x+2\| + C$

أتحقق من فهمي صفحة 49

أولًا نجد تكامل الاقتران $P'(t)$

$$P(t) = \int 105e^{0.03t}\,dt = \frac{105}{0.03}e^{0.03t} + C$$
$$= 3500e^{0.03t} + C$$

ثانيًا، نجد ثابت التكامل C:

بما أن عدد سكان المدينة عام 2010 هو 3500 شخص، إذن $P(0) = 3500$

$$P(t) = 3500e^{0.03t} + C$$
$$P(0) = 3500e^{0} + C$$
$$3500 = 3500 + C$$
$$C = 0$$
$$P(t) = 3500e^{0.03t}$$

ثالثًا، نجد سكان المدينة عام 2020 (أي بعد 10 سنوات) بتعويض t = 10:

$$P(10) = 3500e^{0.03(10)}$$
$$\approx 4725$$

إذن، عدد سكان المدينة عام 2020 هو 4725 شخصًا تقريبًا.

أتحقق من فهمي صفحة 50

a	$\int \frac{2x+3}{x^2+3x}\,dx = \ln\lvert x^2+3x\rvert + C$
b	$\int \frac{9x^2}{x^3+8}\,dx = \int \frac{3(3x^2)}{x^3+8}\,dx = 3\int \frac{3x^2}{x^3+8}\,dx = 3\ln\lvert x^3+8\rvert + C$
c	$\int \frac{x+1}{4x^2+8x}\,dx = \int \frac{\frac{1}{8}(8x+8)}{4x^2+8x}\,dx = \frac{1}{8}\int \frac{8x+8}{4x^2+8x}\,dx = \frac{1}{8}\ln\lvert 4x^2+8x\rvert + C$
d	$\int \frac{e^{3x}}{e^{3x}+5}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{3e^{3x}}{e^{3x}+5}\,dx = \frac{1}{3}\ln\lvert e^{3x}+5\rvert + C$

	أتحقق من فهمي صفحة 51
a	$\int_0^2 (4e^{2x}+7)dx = (2e^{2x}+7x)\Big\|_0^2$ $= \left(2e^{2(2)}+7(2)\right)-\left(2e^{2(0)}+7(0)\right)$ $= 2e^4+12$
b	$\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{6x+1}}dx = \int_0^4 (6x+1)^{-\frac{1}{2}}dx$ $= \frac{1}{6}\times 2\,(6x+1)^{\frac{1}{2}}\Big\|_0^4$ $= \frac{1}{3}\sqrt{6x+1}\Big\|_0^4$ $= \left(\frac{1}{3}\sqrt{6(4)+1}\right)-\left(\frac{1}{3}\sqrt{6(0)+1}\right)$ $= \frac{4}{3}$
c	$\int_0^4 \frac{8x}{x^2+1}dx = \int_0^4 \frac{4(2x)}{x^2+1}dx$ $= 4\int_0^4 \frac{2x}{x^2+1}dx$ $= 4\ln\|x^2+1\|\Big\|_0^4$ $= \left(4\ln\|(4)^2+1\|\right)-\left(4\ln\|(0)^2+1\|\right)$ $= 4\ln 17$
	أتدرب وأحل المسائل صفحة 52
1	$\int\left(\frac{1}{2}e^x+3x\right)dx = \frac{1}{2}e^x+\frac{3}{2}x^2+C$
2	$\int \frac{x^2+2x+1}{x^2}dx = \int\left(\frac{x^2}{x^2}+\frac{2x}{x^2}+\frac{1}{x^2}\right)dx$ $= \int\left(1+\frac{2}{x}+x^{-2}\right)dx = x+2\ln\|x\|-x^{-1}+C$
3	$\int (e^x+1)^2dx = \int (e^{2x}+2e^x+1)dx$ $= \frac{1}{2}e^{2x}+2e^x+x+C$

4	$\int \frac{1}{x}(x+2)dx = \int \left(1+\frac{2}{x}\right)dx$ $= x + 2\ln\|x\| + C$
5	$\int \left(\frac{4}{x^3}+\frac{5}{x}\right)dx = \int \left(4x^{-3}+\frac{5}{x}\right)dx$ $= -2x^{-2} + 5\ln\|x\| + C$
6	$\int \left(\sqrt{x}+3e^{6x}-\frac{7}{x}\right)dx = \int \left(x^{\frac{1}{2}}+3e^{6x}-\frac{7}{x}\right)dx$ $= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}e^{6x} - 7\ln\|x\| + C$
7	$\int \left(\frac{3}{x+1} - 5e^{-2x}\right)dx = 3\ln\|x+1\| + \frac{5}{2}e^{-2x} + C$
8	$\int \frac{1}{\sqrt{2x-3}}dx = \int (2x-3)^{-\frac{1}{2}}dx$ $= (2x-3)^{\frac{1}{2}} + C = \sqrt{2x-3} + C$
9	$\int (\sin(2x-3) + e^{6x-4})dx = -\frac{1}{2}\cos(2x-3) + \frac{1}{6}e^{6x-4} + C$
10	$\int 4\cos(6x+1)\,dx = \frac{2}{3}\sin(6x+1) + C$
11	$\int \frac{\sin x + 3\cos x}{4}dx = \frac{1}{4}\int (\sin x + 3\cos x)dx$ $= \frac{1}{4}(-\cos x + 3\sin x) + C$ $= -\frac{1}{4}\cos x + \frac{3}{4}\sin x + C$
12	$\int (e^{6x-4} + (1-2x)^6)dx = \frac{1}{6}e^{6x-4} - \frac{1}{14}(1-2x)^7 + C$
13	$\int \frac{x}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}dx$ $= \frac{1}{2}\ln\|x^2+1\| + C$

14	$\int \frac{x^2}{x^3-3}dx = \frac{1}{3}\int \frac{3x^2}{x^3-3}dx$ $= \frac{1}{3}\ln\lvert x^3-3\rvert + C$
15	$\int \frac{x^2-x}{2x^3-3x^2+12}dx = \frac{1}{6}\int \frac{6x^2-6x}{2x^3-3x^2+12}dx$ $= \frac{1}{6}\ln\lvert 2x^3-3x^2+12\rvert + C$
16	$\int \frac{e^x+7}{e^x}dx = \int \left(\frac{e^x}{e^x}+\frac{7}{e^x}\right)dx$ $= \int (1+7e^{-x})dx$ $= x - 7e^{-x} + C$
17	$\int \frac{1}{5-\frac{1}{4}x}dx = -4\int \frac{-\frac{1}{4}}{5-\frac{1}{4}x}dx$ $= -4\ln\left\lvert 5-\frac{1}{4}x\right\rvert + C$
18	$\int (4x^3+2+3\sin(5-3x))dx = x^4+2x+\cos(5-3x)+C$
19	$\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+3}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2e^{2x}}{e^{2x}+3}dx$ $= \frac{1}{2}\ln\lvert e^{2x}+3\rvert + C$
20	$\int \frac{3}{(1-4x)^2}dx = \int 3(1-4x)^{-2}dx$ $= \frac{3}{4}(1-4x)^{-1} + C$ $= \frac{3}{4(1-4x)} + C$

21	$\int \frac{1+xe^x}{x}dx = \int \left(\frac{1}{x}+\frac{xe^x}{x}\right)dx$ $= \int \left(\frac{1}{x}+e^x\right)dx$ $= \ln\lvert x\rvert + e^x + C$
22	$\int_1^2 \left(2x+3e^x-\frac{4}{x}\right)dx = \left(x^2+3e^x-4\ln\lvert x\rvert\right)\Big\rvert_1^2$ $= \left((2)^2+3e^2-4\ln\lvert 2\rvert\right)-\left((1)^2+3e^1-4\ln\lvert 1\rvert\right)$ $= 3+3e^2-4\ln 2-3e$
23	$\int_0^5 \frac{x}{x^2+10}dx = \frac{1}{2}\int_0^5 \frac{2x}{x^2+10}dx$ $= \frac{1}{2}\ln\lvert x^2+10\rvert\Big\rvert_1^2$ $= \frac{1}{2}\ln\lvert(2)^2+10\rvert - \frac{1}{2}\ln\lvert(1)^2+10\rvert$ $= \frac{1}{2}\ln 14 - \frac{1}{2}\ln 11 = \frac{1}{2}\ln\frac{14}{11}$
24	$\int_3^4 (2x-6)^4dx = \frac{1}{10}(2x-6)^5\Big\rvert_3^4$ $= \frac{1}{10}(2(4)-6)^5 - \frac{1}{10}(2(3)-6)^5$ $= \frac{32}{10}$

25	$v(t) = e^{-2t}$ $s(t) = \int e^{-2t}dt$ $= -\frac{1}{2}e^{-2t} + C$ $s(t) = -\frac{1}{2}e^{-2t} + C$ بما أن الموقع الابتدائي للجسيم 2 m إذن $s(0) = 2$: $s(0) = -\frac{1}{2}e^{0} + C$ $2 = -\frac{1}{2}e^{0} + C$ $2 = -\frac{1}{2} + C$ $C = \frac{5}{2}$ $\Rightarrow s(t) = -\frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{5}{2}$
26	$f(x) = \int 5e^{x}dx$ $= 5e^{x} + C$ لإيجاد ثابت التكامل، نعوض النقطة $\left(0, \frac{1}{2}\right)$: $f(x) = 5e^{x} + C \Rightarrow f(0) = 5e^{0} + C$ $\Rightarrow \frac{1}{2} = 5 + C$ $\Rightarrow C = -\frac{9}{2}$ $f(x) = 5e^{x} - \frac{9}{2}$

27	$f(x) = \int \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}\right) dx$ $= \int \left(\frac{2}{x} - x^{-2}\right) dx$ $= 2\ln\|x\| + x^{-1} + C$ لإيجاد ثابت التكامل، نعوض النقطة $(1, -1)$: $f(x) = 2\ln\|x\| + \frac{1}{x} + C \Rightarrow f(1) = 2\ln 1 + 1 + C$ $\Rightarrow \quad -1 = 1 + C$ $\Rightarrow C = -2$ $f(x) = 2\ln\|x\| + \frac{1}{x} - 2$
28	$f(x) = \int (e^{-x} + x^2) dx$ $= -e^{-x} + \frac{1}{3}x^3 + C$ لإيجاد ثابت التكامل، نعوض النقطة $(0, 4)$: $f(x) = -e^{-x} + \frac{1}{3}x^3 + C \Rightarrow f(0) = -e^0 + \frac{1}{3}(0)^3 + C$ $\Rightarrow \quad 4 = -1 + C$ $\Rightarrow C = 5$ $f(x) = -e^{-x} + \frac{1}{3}x^3 + 5$
29	$y = \int \left(2x + \frac{3}{x+e}\right) dx$ $= x^2 + 3\ln\|x+e\| + C$ لإيجاد ثابت التكامل، نعوض النقطة (e, e^2): $f(x) = x^2 + 3\ln\|x+e\| + C \Rightarrow f(e) = e^2 + 3\ln\|e+e\| + C$ $\Rightarrow \quad e^2 = e^2 + 3\ln 2e + C$ $\Rightarrow C = -3\ln 2e = -3(\ln 2 + \ln e)$ $= -3\ln 2 - 3$ $f(x) = x^2 + 3\ln\|x+e\| - 3\ln 2e - 3$

30	$P(t) = \int -0.51e^{-0.03t}dt$ $= \frac{0.51}{0.03}e^{-0.03t} + C$ $= 17e^{-0.03t} + C$ بما أن عدد الأسماك عند بدء الدراسة هو 1000 سمكة، إذن $P(0) = 1000$ ومنه: $P(0) = 17e^{-0.03(0)} + C$ $1000 = 17 + C$ $C = 983$ $P(t) = 17e^{-0.03t} + 983$
31	$P(10) = 17e^{-0.03(10)} + 983 \approx 996$ عدد الأسماك بعد 10 سنوات من بدء الدراسة هو 996 سمكة تقريبًا.
32	$A(t) = \int -0.9e^{-0.1t}dt$ $= \frac{0.9}{0.1}e^{-0.1t} + C$ $= 9e^{-0.1t} + C$ بما أن مساحة سطح الجرح عند الإصابة هي 9 cm^2 ، إذن، $A(0) = 9$، ومنه: $A(0) = 9e^{-0.1(0)} + C$ $9 = 9 + C$ $C = 0$ $A(t) = 9e^{-0.1t}$
33	$A(5) = 9e^{-0.1(5)} \approx 5.46 \text{ cm}^2$ مساحة سطح الجرح بعد 5 أيام من الإصابة هي 5.46 cm^2 تقريبًا.

34	الخطأ الذي وقع فيه أحمد أنه ضرب بسط المقدار في 2 ولم يقسم المقدار على 2 ليحافظ على قيمته، فلم يحوّله إلى مقدار مكافئ له. ويكون الحل الصحيح على النحو الآتي: $\int \frac{1}{2x}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2}{2x}dx$ $= \frac{1}{2}\ln\|2x\| + C$ ويمكن إخراج $\frac{1}{2}$ أمام رمز التكامل والحلّ على النحو الآتي: $\int \frac{1}{2x}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{x}dx = \frac{1}{2}\ln\|x\| + C$ (و هاتان الإجابتان متكافئتان لأن لهما المشتقة نفسها، ولأن: $\ln\|2x\| = \ln\|x\| + \ln 2$)
35	$\int \sqrt{e^x}dx = \int (e^x)^{\frac{1}{2}}dx$ $= \int e^{\frac{1}{2}x}dx$ $= 2e^{\frac{1}{2}x} + C$
36	$\int \frac{\cos x}{3 + 2\sin x}dx = -\frac{1}{2}\int \frac{-2\cos x}{3 + 2\sin x}dx$ $= -\frac{1}{2}\ln\|3 + 2\sin x\| + C$
37	$\int (x^2 + 2x + 1)^5 dx = \int ((x+1)^2)^5 dx$ $= \int (x+1)^{10}dx$ $= \frac{1}{11}(x+1)^{11} + C$
38	$\int \frac{1}{x+1}dx$ هذا هو المختلف كونه الوحيد الذي تكامله اقتران لوغاريتمي طبيعي والبقية تكاملاتها اقترانات قوة.

الدرس السادس: التكامل بالتعويض

مسألة اليوم صفحة 54

$$C(t) = \int \frac{0.3t}{\sqrt{t^2+16}}\,dt$$

$$u = t^2 + 16 \quad \Longrightarrow \frac{du}{dt} = 2t$$

$$\Longrightarrow dt = \frac{du}{2t}$$

$$C(t) = \int \frac{0.3t}{\sqrt{t^2+16}}\,dt$$

$$= \int \frac{0.3t}{\sqrt{u}} \times \frac{du}{2t}$$

$$= 0.15 \int u^{-\frac{1}{2}} du$$

$$= 0.3u^{\frac{1}{2}} + K$$

$$= 0.3\sqrt{u} + K$$

$$= 0.3\sqrt{t^2+16} + K$$

بما أن مقدار تركيز الدواء في الدم في البداية هي 0 مليغرام، إذن $C(0) = 0$ ومنه:

$$C(t) = 0.3\sqrt{t^2+16} + K$$

$$C(0) = 0.3\sqrt{0^2+16} + K$$

$$0 = 1.2 + K$$

$$K = -1.2$$

$$C(t) = 0.3\sqrt{t^2+16} - 1.2$$

$$C(3) = 0.3\sqrt{(3)^2+16} - 1.2 = 0.3$$

مقدار التغير في تركيز الدواء في الجسم خلال الساعات الثلاث الأولى من حقنه هو 0.3 mg/cm^3

أتحقق من فهمي صفحة 58

a	$\int 6x^2(2x^3-3)^4dx$ $u = 2x^3 - 3 \quad \Rightarrow \frac{du}{dx} = 6x^2$ $\Rightarrow dx = \frac{du}{6x^2}$ $\int 6x^2(2x^3-3)^4dx = \int 6x^2u^4 \times \frac{du}{6x^2}$ $= \int u^4du$ $= \frac{1}{5}u^5 + C$ $= \frac{1}{5}(2x^3-3)^5 + C$
b	$\int xe^{x^2+1}dx$ $u = x^2 + 1 \quad \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2x$ $\Rightarrow dx = \frac{du}{2x}$ $\int xe^{x^2+1}dx = \int xe^u \times \frac{du}{2x}$ $= \int \frac{1}{2}e^u du$ $= \frac{1}{2}e^u + C$ $= \frac{1}{2}e^{x^2+1} + C$

c	$\int \frac{4x+8}{\sqrt{2x^2+8x}}dx$ $u = 2x^2+8x \implies \frac{du}{dx} = 4x+8$ $\implies dx = \frac{du}{4x+8}$ $\int \frac{4x+8}{\sqrt{2x^2+8x}}dx = \int \frac{4x+8}{\sqrt{u}} \times \frac{du}{4x+8}$ $= \int \frac{1}{\sqrt{u}}du$ $= \int u^{-\frac{1}{2}}du$ $= 2u^{\frac{1}{2}} + C$ $= 2\sqrt{2x^2+8x} + C$
d	$\int \frac{(\ln x)^2}{x}dx$ $u = \ln x \implies \frac{du}{dx} = \frac{1}{x}$ $\implies dx = xdu$ $\int \frac{(\ln x)^2}{x}dx = \int \frac{u^2}{x} \times xdu$ $= \int u^2du$ $= \frac{1}{3}u^3 + C$ $= \frac{1}{3}(\ln x)^3 + C$

e	$\int x^3 \cos(x^4-5)\,dx$ $u = x^4 - 5 \quad \Rightarrow \dfrac{du}{dx} = 4x^3$ $\Rightarrow dx = \dfrac{du}{4x^3}$ $\int x^3 \cos(x^4-5)\,dx = \int x^3 \cos u \times \dfrac{du}{4x^3}$ $= \int \dfrac{1}{4} \cos u\, du$ $= \dfrac{1}{4} \sin u + C$ $= \dfrac{1}{4} \sin(x^4-5) + C$
f	$\int \cos^4 x \sin x\,dx$ $u = \cos x \quad \Rightarrow \dfrac{du}{dx} = -\sin x$ $\Rightarrow dx = \dfrac{du}{-\sin x}$ $\int \cos^4 x \sin x\,dx = \int u^4 \sin x \times \dfrac{du}{-\sin x}$ $= \int -u^4 du$ $= -\dfrac{1}{5} u^5 + C$ $= -\dfrac{1}{5} \cos^5 x + C$

أتحقق من فهمي صفحة 60

أولًا نجد تكامل الاقتران $p'(x)$:

$$p(x) = \int \frac{-300x}{\sqrt{(36+x^2)^3}}\,dx$$

$$u = 36 + x^2 \quad \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2x$$

$$\Rightarrow dx = \frac{du}{2x}$$

$$p(x) = \int \frac{-300x}{\sqrt{(36+x^2)^3}}\,dx = \int \frac{-300x}{u^{\frac{3}{2}}} \times \frac{du}{2x}$$

$$= -150 \int u^{-\frac{3}{2}}\,du$$

$$= 300u^{-\frac{1}{2}} + C$$

$$= \frac{300}{\sqrt{u}} + C$$

$$= \frac{300}{\sqrt{36+x^2}} + C$$

بما أن سعر القطعة الواحدة هو 75 دينارًا عندما يكون عدد القطع المبيعة 800 قطعة، أي عندما $x = 8$،

إذن $p(8) = 75$ ومنه:

$$p(x) = \frac{300}{\sqrt{36+x^2}} + C$$

$$p(8) = \frac{300}{\sqrt{36+8^2}} + C$$

$$75 = \frac{300}{10} + C$$

$$C = 75 - 30 = 45$$

$$p(x) = \frac{300}{\sqrt{36+x^2}} + 45$$

أتحقق من فهمي صفحة 62

	$\int_0^1 x^2(x^3-1)^4 dx$
	$u = x^3 - 1 \quad \Rightarrow \dfrac{du}{dx} = 3x^2$
	$\Rightarrow dx = \dfrac{du}{3x^2}$
	$x = 0 \quad \Rightarrow u = (0)^3 - 1 = -1$
	$x = 1 \quad \Rightarrow u = (1)^3 - 1 = 0$
a	$\int_0^1 x^2(x^3-1)^4 dx = \int_{-1}^0 x^2 u^4 \dfrac{du}{3x^2}$
	$= \int_{-1}^0 \dfrac{1}{3} u^4 du$
	$= \dfrac{1}{15} u^5 \Big\|_{-1}^{0}$
	$= \left(\dfrac{1}{15}(0)^5\right) - \left(\dfrac{1}{15}(-1)^5\right)$
	$= \dfrac{1}{15}$

b	$\int_{-1}^{0} \frac{x^3}{(2-x^4)^7} dx$ $u = 2 - x^4 \quad \Rightarrow \frac{du}{dx} = -4x^3$ $\Rightarrow dx = \frac{du}{-4x^3}$ $x = 0 \quad \Rightarrow u = 2 - (0)^4 = 2$ $x = -1 \quad \Rightarrow u = 2 - (-1)^4 = 1$ $\int_{-1}^{0} \frac{x^3}{(2-x^4)^7} dx = \int_{1}^{2} \frac{x^3}{u^7} \times \frac{du}{-4x^3}$ $= \int_{1}^{2} -\frac{1}{4} u^{-7} du$ $= \frac{1}{24} u^{-6} \Big\|_{1}^{2}$ $= \frac{1}{24u^6} \Big\|_{1}^{2}$ $= \left(\frac{1}{24(2)^6}\right) - \left(\frac{1}{24(1)^6}\right)$ $= -\frac{21}{512}$

c	$\int_1^e \frac{\ln x}{x} dx$ $u = \ln x \quad \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{x}$ $\Rightarrow dx = xdu$ $x = e \quad \Rightarrow u = \ln e = 1$ $x = 1 \quad \Rightarrow u = \ln 1 = 0$ $\int_1^e \frac{\ln x}{x} dx = \int_0^1 \frac{u}{x} xdu$ $= \int_0^1 u\, du$ $= \frac{1}{2}u^2 \Big\vert_0^1$ $= \left(\frac{1}{2}(1)^2\right) - \left(\frac{1}{2}(0)^2\right)$ $= \frac{1}{2}$

أتدرب وأحل المسائل صفحة 62

1	$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+4}} dx$ $u = x^2 + 4 \quad \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2x$ $\Rightarrow dx = \frac{du}{2x}$ $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+4}} dx = \int \frac{x}{\sqrt{u}} \times \frac{du}{2x}$ $= \int \frac{1}{2\sqrt{u}} du$ $= \int \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} du$ $= u^{\frac{1}{2}} + C$ $= \sqrt{x^2+4} + C$

2	$\int x^2(2x^3+5)^4dx$ $u = 2x^3+5 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 6x^2$ $\Rightarrow dx = \frac{du}{6x^2}$ $\int x^2(2x^3+5)^4dx = \int x^2u^4 \times \frac{du}{6x^2}$ $= \int \frac{1}{6}u^4du$ $= \frac{1}{30}u^5 + C$ $= \frac{1}{30}(2x^3+5)^5 + C$
3	$\int 3x\sqrt{x^2+7}dx$ $u = x^2+7 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2x$ $\Rightarrow dx = \frac{du}{2x}$ $\int 3x\sqrt{x^2+7}dx = \int 3x\sqrt{u} \times \frac{du}{2x}$ $= \int \frac{3}{2}u^{\frac{1}{2}}du$ $= u^{\frac{3}{2}} + C$ $= \sqrt{(x^2+7)^3} + C$

4	$\int x^6 e^{1-x^7}\,dx$ $u = 1 - x^7 \quad \Rightarrow \dfrac{du}{dx} = -7x^6$ $\Rightarrow dx = \dfrac{du}{-7x^6}$ $\int x^6 e^{1-x^7}\,dx = \int x^6 e^u \times \dfrac{du}{-7x^6}$ $= \int -\dfrac{1}{7} e^u du$ $= -\dfrac{1}{7} e^u + C$ $= -\dfrac{1}{7} e^{1-x^7} + C$
5	$\int \dfrac{x^4}{(x^5+9)^3}\,dx$ $u = x^5 + 9 \quad \Rightarrow \dfrac{du}{dx} = 5x^4$ $\Rightarrow dx = \dfrac{du}{5x^4}$ $\int \dfrac{x^4}{(x^5+9)^3}\,dx = \int \dfrac{x^4}{u^3} \times \dfrac{du}{5x^4}$ $= \int \dfrac{1}{5} u^{-3} du$ $= -\dfrac{1}{10} u^{-2} + C$ $= -\dfrac{1}{10(x^5+9)^2} + C$

6	$\int (3x^2-1)e^{x^3-x}dx$ $u = x^3 - x \implies \frac{du}{dx} = 3x^2 - 1$ $\implies dx = \frac{du}{3x^2-1}$ $\int (3x^2-1)e^{x^3-x}dx = \int (3x^2-1)e^u \frac{du}{3x^2-1}$ $= \int e^u du$ $= e^u + C$ $= e^{x^3-x} + C$
7	$\int \frac{3x-3}{\sqrt{x^2-2x+4}}dx$ $u = x^2 - 2x + 4 \implies \frac{du}{dx} = 2x - 2$ $\implies dx = \frac{du}{2x-2}$ $\int \frac{3x-3}{\sqrt{x^2-2x+4}}dx = \int \frac{3x-3}{\sqrt{u}} \times \frac{du}{2x-2}$ $= \int \frac{3(x-1)}{\sqrt{u}} \times \frac{du}{2(x-1)}$ $= \int \frac{3}{2}u^{-\frac{1}{2}}du$ $= 3u^{\frac{1}{2}} + C$ $= 3\sqrt{x^2-2x+4} + C$

8	$\int \frac{1}{x\ln x}dx$ $u = \ln x \quad \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{x}$ $\Rightarrow dx = xdu$ $\int \frac{1}{x\ln x}dx = \int \frac{1}{xu} \times xdu$ $= \int \frac{1}{u}du$ $= \ln\|u\| + C$ $= \ln\|\ln x\| + C$
9	$\int \sin x\,(1+\cos x)^4 dx$ $u = 1+\cos x \quad \Rightarrow \frac{du}{dx} = -\sin x$ $\Rightarrow dx = \frac{du}{-\sin x}$ $\int \sin x\,(1+\cos x)^4 dx = \int \sin x\, u^4 \times \frac{du}{-\sin x}$ $= \int -u^4 du$ $= -\frac{1}{5}u^5 + C$ $= -\frac{1}{5}(1+\cos x)^5 + C$

10	$\int \sin^5 2x \cos 2x \, dx$ $u = \sin 2x \quad \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2\cos 2x$ $\Rightarrow dx = \frac{du}{2\cos 2x}$ $\int \sin^5 2x \cos 2x \, dx = \int u^5 \cos 2x \times \frac{du}{2\cos 2x}$ $= \int \frac{1}{2} u^5 du$ $= \frac{1}{12} u^6 + C$ $= \frac{1}{12} (\sin 2x)^6 + C$
11	$\int \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2} dx$ $u = \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \frac{du}{dx} = -\frac{1}{x^2}$ $\Rightarrow dx = -x^2 du$ $\int \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2} dx = \int \frac{\sin(u)}{x^2} \times -x^2 du$ $= \int -\sin u \, du$ $= \cos u + C$ $= \cos\left(\frac{1}{x}\right) + C$

12	$\int \frac{\cos x}{e^{\sin x}} dx$ $u = \sin x \quad \Rightarrow \frac{du}{dx} = \cos x$ $\Rightarrow dx = \frac{du}{\cos x}$ $\int \frac{\cos x}{e^{\sin x}} dx = \int \frac{\cos x}{e^{u}} \times \frac{du}{\cos x}$ $= \int \frac{1}{e^{u}} du$ $= \int e^{-u} du$ $= -e^{-u} + C$ $= -e^{-\sin x} + C$ $= -\frac{1}{e^{\sin x}} + C$
13	$\int e^{x}(2+e^{x})^{5} dx$ $u = 2 + e^{x} \quad \Rightarrow \frac{du}{dx} = e^{x}$ $\Rightarrow dx = \frac{du}{e^{x}}$ $\int e^{x}(2+e^{x})^{5} dx = \int e^{x} u^{5} \times \frac{du}{e^{x}}$ $= \int u^{5} du$ $= \frac{1}{6} u^{6} + C$ $= \frac{1}{6}(2+e^{x})^{6} + C$

14	$\int \frac{\cos(\ln x)}{x} dx$ $u = \ln x \quad \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{x}$ $\Rightarrow dx = x du$ $\int \frac{\cos(\ln x)}{x} dx = \int \frac{\cos(u)}{x} \times x du$ $= \int \cos u \, du$ $= \sin u + C$ $= \sin(\ln x) + C$
15	$\int (3x^2 - 2x - 1)(x^3 - x^2 - x)^4 dx$ $u = x^3 - x^2 - x \quad \Rightarrow \frac{du}{dx} = 3x^2 - 2x - 1$ $\Rightarrow dx = \frac{du}{3x^2 - 2x - 1}$ $\int (3x^2 - 2x - 1)(x^3 - x^2 - x)^4 dx$ $= \int (3x^2 - 2x - 1) u^4 \times \frac{du}{3x^2 - 2x - 1}$ $= \int u^4 du$ $= \frac{1}{5} u^5 + C$ $= \frac{1}{5}(x^3 - x^2 - x)^5 + C$

16	$\int_0^2 (2x-1)e^{x^2-x}dx$ $u = x^2 - x \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2x-1$ $\Rightarrow dx = \frac{du}{2x-1}$ $x = 2 \Rightarrow u = (2)^2 - 2 = 2$ $x = 0 \Rightarrow u = (0)^2 - 0 = 0$ $\int_0^2 (2x-1)e^{x^2-x}dx = \int_0^2 (2x-1)e^u \frac{du}{2x-1}$ $= \int_0^2 e^u du$ $= e^u\vert_0^2$ $= e^2 - e^0$ $= e^2 - 1$
17	$\int_1^2 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx$ $u = \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{du}{dx} = -\frac{1}{x^2}$ $\Rightarrow dx = -x^2 du$ $x = 2 \Rightarrow u = \frac{1}{2}$ $x = 1 \Rightarrow u = 1$ $\int_1^2 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx = \int_1^{\frac{1}{2}} \frac{e^u}{x^2} \times -x^2 du$ $= \int_1^{\frac{1}{2}} -e^u du$ $= -e^u\vert_1^{\frac{1}{2}}$ $= -e^{\frac{1}{2}} + e$ $= -\sqrt{e} + e$

18	$\int_{e}^{e^3} \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx$ $u = \ln x \quad \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{x}$ $\Rightarrow dx = x du$ $x = e^3 \quad \Rightarrow u = \ln e^3 = 3$ $x = e \quad \Rightarrow u = \ln e = 1$ $\int_{e}^{e^3} \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx = \int_{1}^{3} \frac{\sqrt{u}}{x} x du$ $= \int_{1}^{3} u^{\frac{1}{2}} du$ $= \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} \Big\|_{1}^{3}$ $= \frac{2}{3} \sqrt{u^3} \Big\|_{1}^{3}$ $= \frac{2}{3}\sqrt{3^3} - \frac{2}{3}\sqrt{1^3}$ $= 2\sqrt{3} - \frac{2}{3} \approx 2.8$

19

$$\int_0^1 (x^3+x)\sqrt{x^4+2x^2+1}\,dx$$

$$u = x^4+2x^2+1 \quad \Rightarrow \frac{du}{dx} = 4x^3+4x$$

$$\Rightarrow dx = \frac{du}{4x^3+4x}$$

$$x=1 \quad \Rightarrow u = (1)^4+2(1)^2+1 = 4$$

$$x=0 \quad \Rightarrow u = (0)^4+2(0)^2+1 = 1$$

$$\int_0^1 (x^3+x)\sqrt{x^4+2x^2+1}\,dx = \int_1^4 (x^3+x)\sqrt{u}\times\frac{du}{4x^3+4x}$$

$$= \int_1^4 (x^3+x)\sqrt{u}\times\frac{du}{4(x^3+x)}$$

$$= \int_1^4 \frac{1}{4}u^{\frac{1}{2}}\,du$$

$$= \frac{1}{6}u^{\frac{3}{2}}\Big|_1^4$$

$$= \frac{1}{6}\sqrt{u^3}\Big|_1^4$$

$$= \frac{1}{6}\sqrt{4^3} - \frac{1}{6}\sqrt{1^3}$$

$$= \frac{7}{6}$$

$$\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$$

$$u = x^2+1 \quad \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2x$$

$$\Rightarrow dx = \frac{du}{2x}$$

$$x = 3 \quad \Rightarrow u = 10$$

$$x = 0 \quad \Rightarrow u = 1$$

20

$$\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \int_1^{10} \frac{x}{\sqrt{u}} \times \frac{du}{2x}$$

$$= \int_1^{10} \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} du$$

$$= u^{\frac{1}{2}}\Big|_1^{10}$$

$$= \sqrt{u}\Big|_1^{10}$$

$$= \sqrt{10} - 1 \approx 2.2$$

21	$\int_1^2 \frac{2x+1}{(x^2+x+4)^3}dx$ $u = x^2+x+4 \quad \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2x+1$ $\Rightarrow dx = \frac{du}{2x+1}$ $x = 2 \quad \Rightarrow u = (2)^2+2+4 = 10$ $x = 1 \quad \Rightarrow u = (1)^2+1+4 = 6$ $\int_1^2 \frac{2x+1}{(x^2+x+4)^3}dx = \int_6^{10} \frac{2x+1}{u^3} \times \frac{du}{2x+1}$ $= \int_6^{10} u^{-3}du$ $= -\frac{1}{2}u^{-2}\Big\vert_6^{10}$ $= -\frac{1}{2u^2}\Big\vert_6^{10}$ $= -\frac{1}{2(10)^2} + \frac{1}{2(6)^2}$ $= \frac{2}{225}$

$$A = -\int_{-1}^{0} 6x(x^2+1)dx + \int_{0}^{1} 6x(x^2+1)dx$$

طريقة التكامل بالتعويض:

$$u = x^2 + 1 \quad \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2x$$
$$\Rightarrow dx = \frac{du}{2x}$$
$$x = 0 \quad \Rightarrow u = (0)^2 + 1 = 1$$
$$x = -1 \quad \Rightarrow u = (-1)^2 + 1 = 2$$
$$x = 1 \quad \Rightarrow u = (1)^2 + 1 = 2$$
$$A = -\int_{-1}^{0} 6x(x^2+1)dx + \int_{0}^{1} 6x(x^2+1)dx$$
$$= -\int_{2}^{1} 6xu \times \frac{du}{2x} + \int_{1}^{2} 6xu \times \frac{du}{2x}$$
$$= -\int_{2}^{1} 3u\,du + \int_{1}^{2} 3u\,du$$

22

$$= -\frac{3}{2}u^2\Big|_{2}^{1} + \frac{3}{2}u^2\Big|_{1}^{2}$$
$$= -\frac{3}{2}(1)^2 + \frac{3}{2}(2)^2 + \frac{3}{2}(2)^2 - \frac{3}{2}(1)^2$$
$$= 9$$

ومنه مساحة المنطقة المظللة هي 9 وحدات مربعة.

طريقة ثانية باستعمال خاصية التوزيع، ومن ثم تكامل كثير حدود:

$$A = -\int_{-1}^{0} 6x(x^2+1)dx + \int_{0}^{1} 6x(x^2+1)dx$$
$$= -\int_{-1}^{0} (6x^3+6x)dx + \int_{0}^{1} (6x^3+6x)dx$$
$$= -\left(\frac{6}{4}x^4 + 3x^2\right)\Big|_{-1}^{0} + \left(\frac{6}{4}x^4 + 3x^2\right)\Big|_{0}^{1}$$
$$= -\left(\frac{6}{4}(0) + 3(0)\right) + \left(\frac{6}{4}(-1)^4 + 3(-1)^2\right) + \left(\frac{6}{4}(1)^4 + 3(1)^2\right) - \left(\frac{6}{4}(0) + 3(0)\right)$$
$$= 0 + 4.5 + 4.5 - 0 = 9$$

23	$A = -\int_{-4}^{0} x\sqrt{16-x^2}dx + \int_{0}^{4} x\sqrt{16-x^2}dx$ $u = 16 - x^2 \Rightarrow \frac{du}{dx} = -2x$ $\Rightarrow dx = \frac{du}{-2x}$ $x = 0 \Rightarrow u = 16-(0)^2 = 16$ $x = -4 \Rightarrow u = 16-(-4)^2 = 0$ $x = 4 \Rightarrow u = 16-(4)^2 = 0$ $A = -\int_{-4}^{0} x\sqrt{16-x^2}dx + \int_{0}^{4} x\sqrt{16-x^2}dx$ $= -\int_{0}^{16} x\sqrt{u} \times \frac{du}{-2x} + \int_{16}^{0} x\sqrt{u} \times \frac{du}{-2x}$ $= \int_{0}^{16} \frac{1}{2}u^{\frac{1}{2}}\,du - \int_{16}^{0} \frac{1}{2}u^{\frac{1}{2}}\,du$ $= \frac{1}{3}u^{\frac{3}{2}}\Big\|_{0}^{16} - \frac{1}{3}u^{\frac{3}{2}}\Big\|_{16}^{0}$ $= \frac{1}{3}\sqrt{u^3}\Big\|_{0}^{16} - \frac{1}{3}\sqrt{u^3}\Big\|_{16}^{0}$ $= \frac{1}{3}\sqrt{(16)^3} - \frac{1}{3}\sqrt{(0)^3} - \frac{1}{3}\sqrt{(0)^3} + \frac{1}{3}\sqrt{(16)^3}$ $= \frac{128}{3}$ ومنه مساحة المنطقة المظللة هي $\frac{128}{3}$ وحدة مربعة

24	$f(x) = \int xe^{4-x^2}dx$ $u = 4 - x^2 \quad \Rightarrow \frac{du}{dx} = -2x$ $\Rightarrow dx = \frac{du}{-2x}$ $f(x) = \int xe^{4-x^2}dx$ $= \int xe^u \frac{du}{-2x}$ $= \int -\frac{1}{2}e^u du$ $= -\frac{1}{2}e^u + C$ $= -\frac{1}{2}e^{4-x^2} + C$ لإيجاد ثابت التكامل، نعوض النقطة $(-2, 1)$: $f(x) = -\frac{1}{2}e^{4-x^2} + C \Rightarrow f(-2) = -\frac{1}{2}e^{4-(-2)^2} + C$ $\Rightarrow \quad 1 = -\frac{1}{2} + C$ $\Rightarrow C = \frac{3}{2}$ $f(x) = -\frac{1}{2}e^{4-x^2} + \frac{3}{2}$

25

$$f(x)=\int\frac{2x}{(1-x^2)^2}dx$$

$$u=1-x^2\quad\Rightarrow\frac{du}{dx}=-2x$$

$$\Rightarrow dx=\frac{du}{-2x}$$

$$f(x)=\int\frac{2x}{(1-x^2)^2}dx$$

$$=\int\frac{2x}{u^2}\times\frac{du}{-2x}$$

$$=-\int u^{-2}du$$

$$=u^{-1}+C$$

$$=\frac{1}{1-x^2}+C$$

لإيجاد ثابت التكامل، نعوض النقطة $(0,-1)$:

$$f(x)=\frac{1}{1-x^2}+C\ \Rightarrow f(0)=\frac{1}{1-0^2}+C$$

$$\Rightarrow\quad -1=1+C$$

$$\Rightarrow C=-2$$

$$f(x)=\frac{1}{1-x^2}-2$$

26	$s(t) = \int \frac{-2t}{\sqrt{(1+t^2)^3}}dt$ $u = 1 + t^2 \quad \Rightarrow \frac{du}{dt} = 2t$ $\Rightarrow dt = \frac{du}{2t}$ $\int \frac{-2t}{\sqrt{(1+t^2)^3}}dt = \int \frac{-2t}{\sqrt{u^3}} \times \frac{du}{2t}$ $= -\int u^{-\frac{3}{2}}du$ $= 2u^{-\frac{1}{2}} + C$ $= 2(1+t^2)^{-\frac{1}{2}} + C$ $= \frac{2}{\sqrt{1+t^2}} + C$ بما أن الموقع الابتدائي للجسيم 4 m ، إذن، $s(0) = 4$: $s(t) = \frac{2}{\sqrt{1+t^2}} + C \Rightarrow s(0) = \frac{2}{\sqrt{1+0^2}} + C$ $\Rightarrow \quad 4 = 2 + C$ $\Rightarrow C = 2$ $s(t) = \frac{2}{\sqrt{1+t^2}} + 2$

أولًا نجد تكامل الاقتران $V'(t)$:

27

$$V(t)=\int \frac{0.4t^3}{\sqrt[3]{0.2t^4+8000}}dt$$

$$u=0.2t^4+8000 \quad \Rightarrow \frac{du}{dt}=0.8t^3$$

$$\Rightarrow dt=\frac{du}{0.8t^3}$$

$$V(t)=\int \frac{0.4t^3}{\sqrt[3]{0.2t^4+8000}}dx$$

$$=\int \frac{0.4t^3}{\sqrt[3]{u}}\times\frac{du}{0.8t^3}$$

$$=\int \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{3}}du$$

$$=\frac{1}{3}u^{\frac{2}{3}}+C$$

$$=\frac{1}{3}\sqrt[3]{u^2}+C$$

$$=\frac{1}{3}\sqrt[3]{(0.2t^4+8000)^2}+C$$

بما أن سعر دونم الأرض الآن هو 5000 دينارٍ، إذن $V(0)=5000$ ومنه:

$$V(t)=\frac{1}{3}\sqrt[3]{(0.2t^4+8000)^2}+C$$

$$V(0)=\frac{1}{3}\sqrt[3]{(0.2(0)^4+8000)^2}+C$$

$$5000=\frac{1}{3}\sqrt[3]{(8000)^2}+C$$

$$5000=\frac{400}{3}+C$$

$$C=\frac{14600}{3}$$

$$V(t)=\frac{1}{3}\sqrt[3]{(0.2t^4+8000)^2}+\frac{14600}{3}$$

<table>
<tr><td>28</td><td>

الزيادة في السكان تساوي: $P(10)-P(0)$، ونجدها على النحو الآتي:
في العام 2015 تكون $t=0$، وفي العام 2025 تكون $t=10$

$$P(10)-P(0)=\int_0^{10} P'(t)\,dt$$

$$=\int_0^{10}\frac{4e^{0.2t}}{\sqrt{4+e^{0.2t}}}\,dt$$

$$u=4+e^{0.2t} \Rightarrow \frac{du}{dt}=0.2e^{0.2t}$$

$$\Rightarrow dt=\frac{du}{0.2e^{0.2t}}$$

$$t=10 \Rightarrow u=4+e^{0.2(10)}=4+e^2$$

$$t=0 \Rightarrow u=4+e^{0.2(0)}=5$$

$$\int_0^{10}\frac{4e^{0.2t}}{\sqrt{4+e^{0.2t}}}\,dt=\int_5^{4+e^2}\frac{4e^{0.2t}}{\sqrt{u}}\times\frac{du}{0.2e^{0.2t}}$$

$$=\int_5^{4+e^2}20u^{-\frac{1}{2}}\,du$$

$$=40u^{\frac{1}{2}}\Big|_5^{4+e^2}$$

$$=40\sqrt{u}\Big|_5^{4+e^2}$$

$$=40\sqrt{4+e^2}-40\sqrt{5}$$

$$\approx 46$$

إذن يزداد عدد سكان هذه المدينة بحوالي 46 ألف شخص من 2015 إلى 2025.

</td></tr>
<tr><td>29</td><td>

المختلف هو $\int x(x^3+1)\,dx$ لأنه الوحيد الذي يمكن إيجاده من دون استعمال طريقة التكامل بالتعويض، بينما التكاملات الباقية يلزم لإيجادها استعمال طريقة التكامل بالتعويض.

</td></tr>
</table>

	الخطأ الذي وقعت فيه سعاد هو أنها لم تغير حدود التكامل. ويكون الحل الصحيح كما يأتي:
30	$\int_0^1 8x(x^2+1)^3\,dx$ $u = x^2 + 1 \quad \Rightarrow \dfrac{du}{dt} = 2x$ $\Rightarrow dt = \dfrac{du}{2x}$ $x = 1 \quad \Rightarrow u = 1^2 + 1 = 2$ $x = 0 \quad \Rightarrow u = 0^2 + 1 = 1$ $\int_0^1 8x(x^2+1)^3\,dx = \int_1^2 8x\,u^3 \dfrac{du}{2x}$ $= \int_1^2 4u^3\,du$ $= u^4\Big\vert_1^2$ $= (2)^4 - (1)^4$ $= 15$

31

$$\int_0^k kx^2e^{x^3}dx$$

$$u = x^3 \quad \Rightarrow \frac{du}{dx} = 3x^2$$

$$\Rightarrow dx = \frac{du}{3x^2}$$

$$x = k \quad \Rightarrow u = k^3$$

$$x = 0 \quad \Rightarrow u = 0^3 = 0$$

$$\int_0^k kx^2e^{x^3}dx = \int_0^{k^3} kx^2e^u\frac{du}{3x^2}$$

$$= \int_0^{k^3}\frac{k}{3}e^u du$$

$$= \frac{k}{3}e^u\Big|_0^{k^3}$$

$$= \frac{k}{3}e^{k^3} - \frac{k}{3}e^0$$

$$= \frac{k}{3}e^{k^3} - \frac{k}{3}$$

$$\int_0^k kx^2e^{x^3}dx = \frac{2}{3}(e^8 - 1) \quad \Rightarrow \frac{k}{3}e^{k^3} - \frac{k}{3} = \frac{2}{3}(e^8 - 1)$$

$$\Rightarrow \frac{k}{3}\left(e^{k^3} - 1\right) = \frac{2}{3}(e^8 - 1)$$

$$\Rightarrow \frac{k}{3} = \frac{2}{3} \Rightarrow k = 2 \ , k^3 = 8 \Rightarrow k = 2$$

إذن، $k = 2$

اختبار نهاية الوحدة صفحة 65

1	$\int \frac{x^3-1}{x^2}dx = \int\left(\frac{x^3}{x^2}-\frac{1}{x^2}\right)dx$ $= \int (x - x^{-2})dx$ $= \frac{1}{2}x^2 + x^{-1} + C$ $= \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{x} + C \ldots\ldots\ldots(b)$
2	$\int_0^2 kx\,dx = 6 \Rightarrow \frac{k}{2}x^2\Big\|_0^2 = 6$ $\Rightarrow \frac{k}{2}(2)^2 - \frac{k}{2}(0)^2 = 6$ $\Rightarrow 2k = 6$ $\Rightarrow k = 3 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(c)$
3	$\int_0^3 (-x^2+3x)\,dx = \left(-\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2\right)\Big\|_0^3$ $= \left(-\frac{1}{3}(3)^3 + \frac{3}{2}(3)^2\right) - \left(-\frac{1}{3}(0)^3 + \frac{3}{2}(0)^2\right)$ $= \frac{9}{2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(c)$
4	$\int_0^2 e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}e^{2x}\Big\|_0^2$ $= \frac{1}{2}e^{2(2)} - \frac{1}{2}e^{2(0)}$ $= \frac{1}{2}e^4 - \frac{1}{2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(d)$

5	$\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \int_1^4 x^{-\frac{1}{2}}\,dx$ $= 2x^{\frac{1}{2}}\Big\vert_1^4$ $= 2\sqrt{x}\Big\vert_1^4$ $= 2\sqrt{4} - 2\sqrt{1}$ $= 2$ ……………………………… (d)
6	$f(x) = 4x - x^2$ أولا نساوي قاعدة الاقتران بالصفر، ونحل المعادلة الناتجة: $f(x) = 0 \;\Rightarrow 4x - x^2 = 0$ $\Rightarrow\; x(4 - x) = 0$ $\Rightarrow x = 0\,, x = 4$ هذه الإحداثيات تمثل حدود التكامل. نختار عددًا ضمن الفترة $[0, 4]$، وليكن 1 ونعوضه في قاعدة الاقتران: $f(1) = 4(1) - (1)^2 = 3 > 0$ بما أن ناتج التعويض موجب، إذن منحنى الاقتران يقع فوق المحور x في الفترة $[0, 4]$ والتكامل المحدود الذي يمكن عن طريقه إيجاد المساحة المطلوبة هو $\int_0^4 (4x - x^2)\,dx$ الإجابة الصحيحة هي (b)
7	$\int 3x^{-\frac{1}{2}}dx = 6x^{\frac{1}{2}} + C$
8	$\int (8x - 10x^2)dx = 4x^2 - \frac{10}{3}x^3 + C$
9	$\int \frac{5}{x^3}\,dx = \int 5x^{-3}\,dx$ $= -\frac{5}{2}x^{-2} + C$ $= -\frac{5}{2x^2} + C$

10	$\int \frac{x^2-1}{\sqrt[3]{x}}dx = \int \frac{x^2-1}{x^{\frac{1}{3}}}dx$ $= \int \left(\frac{x^2}{x^{\frac{1}{3}}} - \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}\right)dx$ $= \int \left(x^{\frac{5}{3}} - x^{-\frac{1}{3}}\right)dx$ $= \frac{3}{8}x^{\frac{8}{3}} + \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} + C$ $= \frac{3}{8}\sqrt[3]{x^8} + \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + C$
11	$\int (5x^2 - 2e^{7x})dx = \frac{5}{3}x^3 - \frac{2}{7}e^{7x} + C$
12	$\int (2x + 3e^{4x+5})dx = x^2 + \frac{3}{4}e^{4x+5} + C$
13	$\int \frac{x^2-6}{2x}dx = \int \left(\frac{x^2}{2x} - \frac{6}{2x}\right)dx$ $= \int \left(\frac{1}{2}x - \frac{3}{x}\right)dx$ $= \frac{1}{4}x^2 - 3\ln\|x\| + C$
14	$\int \frac{1}{(x-1)^3}dx = \int (x-1)^{-3}dx$ $= -\frac{1}{2}(x-1)^{-2} + C$ $= -\frac{1}{2(x-1)^2} + C$
15	$\int \frac{e^x}{e^x+4}dx = \ln\|e^x + 4\| + C$

16	$\int 2xe^{x^2-1}dx$ $u = x^2 - 1 \quad \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2x$ $\Rightarrow dx = \frac{du}{2x}$ $\int 2xe^{x^2-1}dx = \int 2xe^u \times \frac{du}{2x}$ $= \int e^u du$ $= e^u + C$ $= e^{x^2-1} + C$
17	$\int 4e^x(3 + e^{2x})dx = \int (12e^x + 4e^{3x})dx$ $= 12e^x + \frac{4}{3}e^{3x} + C$
18	$\int \frac{1+x}{(4+2x+x^2)^8}dx$ $u = 4 + 2x + x^2 \quad \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2 + 2x$ $\Rightarrow dx = \frac{du}{2+2x}$ $\int \frac{1+x}{(4+2x+x^2)^8}dx = \int \frac{1+x}{u^8} \times \frac{du}{2+2x}$ $= \int \frac{1+x}{u^8} \times \frac{du}{2(1+x)}$ $= \int \frac{1}{2}u^{-8}du$ $= -\frac{1}{14}u^{-7} + C$ $= -\frac{1}{14}(4+2x+x^2)^{-7} + C$ $= -\frac{1}{14(4+2x+x^2)^7} + C$

19	$\int x\sin(3+x^2)\,dx$ $u = 3 + x^2 \quad \Rightarrow \dfrac{du}{dx} = 2x$ $\Rightarrow dx = \dfrac{du}{2x}$ $\int x\sin(3+x^2)\,dx = \int x\sin u \times \dfrac{du}{2x}$ $= \int \dfrac{1}{2}\sin u\,du$ $= -\dfrac{1}{2}\cos u + C$ $= -\dfrac{1}{2}\cos(3+x^2) + C$
20	$\int (3\sin 3x - 4\cos x)dx = -\cos 3x - 4\sin x + C$
21	$\int (x - \sin(7x+2))dx = \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{7}\cos(7x+2) + C$
22	$\int (e^{3x} - e^{-3x})dx = \dfrac{1}{3}e^{3x} + \dfrac{1}{3}e^{-3x} + C$
23	$\int \dfrac{2}{1-5x}dx = \dfrac{2}{-5}\int \dfrac{-5}{1-5x}dx$ $= -\dfrac{2}{5}\ln\|1-5x\| + C$
24	$y = \int (4x-2)dx$ $= 2x^2 - 2x + C$ منحنى الاقتران يمر بالنقطة $(0,3)$ إذن: $3 = 2(0)^2 - 2(0) + C \Rightarrow C = 3$ $\Rightarrow y = 2x^2 - 2x + 3$
25	$R(x) = \int (4x - 1.2x^2)dx$ $= 2x^2 - 0.4x^3 + C$ بما أن $R(20) = 30000$ إذن: $30000 = 2(20)^2 - 0.4(20)^3 + C \Rightarrow C = 32400$ $\Rightarrow R(x) = 2x^2 - 0.4x^3 + 32400$

26	$v(t) = \int \cos(3t - \pi)\, dx$ $= \frac{1}{3}\sin(3t - \pi) + C$ بما أن الجسم بدا الحركة من السكون، فإن $v(0) = 0$ $v(0) = \frac{1}{3}\sin(3(0) - \pi) + C \Rightarrow 0 = \frac{1}{3}\sin(-\pi) + C$ $0 = 0 + C \Rightarrow C = 0$ $\Rightarrow v(t) = \frac{1}{3}\sin(3t - \pi)$
27	$\int_{-1}^{5} f(x)dx = \int_{-1}^{-5} f(x)dx + \int_{-5}^{5} f(x)dx$ $= -4 + 10$ $= 6$
28	$\int_{-5}^{-1} 7f(x)dx = 7\int_{-5}^{-1} f(x)dx$ $= 7 \times 4$ $= 28$
29	$\int_{-1}^{-5} (3f(x) - g(x))dx = 3\int_{-1}^{-5} f(x)dx - \int_{-1}^{-5} g(x)dx$ $= 3(-4) - (-11)$ $= -1$
30	$\int_{-2}^{3} (3x^2 - 4x + 1)dx = (x^3 - 2x^2 + x)\Big\vert_{-2}^{3}$ $= ((3)^3 - 2(3)^2 + 3) - ((-2)^3 - 2(-2)^2 - 2)$ $= 30$
31	$\int_{1}^{3} \frac{x^3 + 2x^2}{x} dx = \int_{1}^{3} \left(\frac{x^3}{x} + \frac{2x^2}{x}\right) dx$ $= \int_{1}^{3} (x^2 + 2x)dx$ $= \left(\frac{1}{3}x^3 + x^2\right)\Big\vert_{1}^{3}$ $= \left(\frac{1}{3}(3)^3 + (3)^2\right) - \left(\frac{1}{3}(1)^3 + (1)^2\right) = \frac{50}{3}$

32	$\int_1^5 \lvert 3-x\rvert dx$ أعيد تعريف اقتران القيمة المطلقة: $\lvert 3-x\rvert = \begin{cases} 3-x, & x<3 \\ x-3, & x\geq 3 \end{cases}$ بما أن الاقتران تشعب عند 3، فإنني أجزئ التكامل عنده: $\int_1^5 \lvert 3-x\rvert dx = \int_1^3 (3-x)dx + \int_3^5 (x-3)dx$ $= \left(3x-\frac{1}{2}x^2\right)\Big\rvert_1^3 + \left(\frac{1}{2}x^2-3x\right)\Big\rvert_3^5$ $= \left(3(3)-\frac{1}{2}(3)^2\right) - \left(3(1)-\frac{1}{2}(1)^2\right) + \left(\frac{1}{2}(5)^2-3(5)\right) - \left(\frac{1}{2}(3)^2-3(3)\right)$ $= 4$
33	$\int_1^4 \frac{20}{\sqrt{x}}dx = \int_1^4 20x^{-\frac{1}{2}}dx$ $= 40x^{\frac{1}{2}}\Big\rvert_1^4$ $= 40\sqrt{x}\Big\rvert_1^4$ $= 40\sqrt{4} - 40\sqrt{1}$ $= 40$
34	$\int_2^5 3x(x+2)dx = \int_2^5 (3x^2+6x)dx$ $= (x^3+3x^2)\Big\rvert_2^5$ $= ((5)^3+3(5)^2) - ((2)^3+3(2)^2)$ $= 180$

35	$\int_2^3 2xe^{-x^2}dx$ $u=-x^2 \Rightarrow \frac{du}{dx}=-2x$ $\Rightarrow dx=\frac{du}{-2x}$ $x=3 \Rightarrow u=-9$ $x=2 \Rightarrow u=-4$ $\int_2^3 2xe^{-x^2}dx=\int_{-4}^{-9} 2xe^u \times \frac{du}{-2x}$ $=\int_{-4}^{-9} -e^u du$ $=-e^u\|_{-4}^{-9}$ $=-e^{-9}+e^{-4}$ $=-\frac{1}{e^9}+\frac{1}{e^4}$

36	$\int_0^2 \frac{3x^2}{(x^3+1)^5}dx$ $u = x^3 + 1 \quad \Rightarrow \frac{du}{dx} = 3x^2$ $\Rightarrow dx = \frac{du}{3x^2}$ $x = 2 \quad \Rightarrow u = 9$ $x = 0 \quad \Rightarrow u = 1$ $\int_0^2 \frac{3x^2}{(x^3+1)^5}dx = \int_1^9 \frac{3x^2}{u^5} \times \frac{du}{3x^2}$ $= \int_1^9 u^{-5} du$ $= -\frac{1}{4}u^{-4}\Big\vert_1^9$ $= -\frac{1}{4u^4}\Big\vert_1^9$ $= -\frac{1}{4(9)^4} + \frac{1}{4(1)^4}$ $= \frac{1640}{6561}$
37	$\int_0^1 \frac{6x}{x^2+1}dx = \int_0^1 \frac{3(2x)}{x^2+1}dx$ $= 3\int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}dx$ $= 3\ln\|x^2+1\|\Big\vert_0^1$ $= 3\ln\|2\| - 3\ln\|1\|$ $= 3\ln 2$

38	بما أن الاقتران تشعب عند 0، فإنني أجزئ التكامل عنده: $\int_{-2}^{1} f(x)dx = \int_{-2}^{0} (x^2+4)dx + \int_{0}^{1} (4-x)dx$ $= \left(\frac{1}{3}x^3+4x\right)\Big\vert_{-2}^{0} + \left(4x-\frac{1}{2}x^2\right)\Big\vert_{0}^{1}$ $= (0) - \left(\frac{1}{3}(-2)^3+4(-2)\right) + \left(4(1)-\frac{1}{2}(1)^2\right) - (0)$ $= \frac{85}{6}$
39	$v(t) = 5 + e^{t-2}$ $s(t) = \int (5+e^{t-2})dt$ $= 5t + e^{t-2} + C$ $s(t) = 5t + e^{t-2} + C$ بما أن الجسيم بدأ حركته من نقطة الأصل، إذن $s(0) = 0$: $s(0) = 5(0) + e^{0-2} + C$ $0 = e^{-2} + C$ $C = -e^{-2}$ $C = -\frac{1}{e^2}$ $\Rightarrow s(t) = 5t + e^{t-2} - \frac{1}{e^2}$ موقع الجسيم بعد 3 ثوانٍ من الحركة هو: $s(3) = 5(3) + e^{3-2} - \frac{1}{e^2}$ $= 15 + e - \frac{1}{e^2} \approx 17.6 \text{ m}$

40	$f(x) = \int (3x^2 + 6x - 2)dx$ $= x^3 + 3x^2 - 2x + C$ بما أن منحنى الاقتران يمر بالنقطة $(0, 6)$ إذن: $6 = (0)^3 + 3(0)^2 - 2(0) + C$ $C = 6$ $\Rightarrow f(x) = x^3 + 3x^2 - 2x + 6$
41	$f(x) = \int \frac{\sqrt{20}}{x^2} dx$ $= \int \sqrt{20} x^{-2} dx$ $= -\sqrt{20} x^{-1} + C$ $= -\frac{\sqrt{20}}{x} + C$ بما أن منحنى الاقتران يمر بالنقطة $(1, 400)$ إذن: $400 = -\frac{\sqrt{20}}{1} + C$ $C = 400 + \sqrt{20}$ $\Rightarrow f(x) = -\frac{\sqrt{20}}{x} + 400 + \sqrt{20}$
42	$f(x) = \int \left(\frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}\right) dx$ $= \int \left(\frac{2}{x} + x^{-2}\right) dx$ $= 2\ln\|x\| - x^{-1} + C$ $= 2\ln\|x\| - \frac{1}{x} + C$ بما أن منحنى الاقتران يمر بالنقطة $(1, 1)$ إذن: $1 = 2\ln\|1\| - \frac{1}{1} + C$ $C = 2$ $\Rightarrow f(x) = 2\ln\|x\| - \frac{1}{x} + 2$

<table>
<tr><td>43</td><td>

$f(x) = \int (5e^x - 4)dx$

$= 5e^x - 4x + C$

بما أن منحنى الاقتران يمر بالنقطة $(0, -1)$ إذن:

$-1 = 5e^0 - 4(0) + C$

$C = -6$

$f(x) = 5e^x - 4x - 6$

</td></tr>
<tr><td>44</td><td>

$f(x) = \int x\sqrt{x^2+5}\, dx$

$u = x^2 + 5 \quad \Rightarrow \dfrac{du}{dx} = 2x$

$\Rightarrow dx = \dfrac{du}{2x}$

$\int x\sqrt{x^2+5}\, dx = \int xu^{\frac{1}{2}} \times \dfrac{du}{2x}$

$= \int \dfrac{1}{2} u^{\frac{1}{2}} du$

$= \dfrac{1}{3} u^{\frac{3}{2}} + C$

$= \dfrac{1}{3}\sqrt{(x^2+5)^3} + C$

بما أن منحنى الاقتران يمر بالنقطة $(2, 10)$ إذن:

$10 = \dfrac{1}{3}\sqrt{((2)^2+5)^3} + C$

$C = 1$

$f(x) = \dfrac{1}{3}\sqrt{(x^2+5)^3} + 1$

</td></tr>
</table>

$f(x) = x^2 - x - 2$

أولا نساوي قاعدة الاقتران بالصفر، ونحل المعادلة الناتجة:

$$f(x) = 0 \implies x^2 - x - 2 = 0$$
$$\implies (x+1)(x-2) = 0$$
$$\implies x = -1\,, x = 2$$

أحد الأصفار وهو 1- يقع بين حدي التكامل 1 ,2-، لذلك يجب تجزئة فترة التكامل إلى فترتين:

$[-1,1][-2,-1]$,

نختار عددًا ضمن الفترة $[-2,-1]$، وليكن -1.5 ونعوضه في قاعدة الاقتران:

$$f(0) = (-1.5+1)(-1.5-2) = 1.75 > 0$$

بما أن ناتج التعويض موجب، إذن منحنى الاقتران يقع فوق المحور x في الفترة $[-2,-1]$

ونختار عددًا ضمن الفترة $[-1,1]$، وليكن 0 ونعوضه في قاعدة الاقتران:

45 $$f(0) = (0+1)(0-2) = -2 < 0$$

بما أن ناتج التعويض سالب، إذن منحنى الاقتران يقع تحت المحور x في الفترة $[-1,1]$

$$A = \int_{-2}^{-1} (x^2 - x - 2)dx - \int_{-1}^{1} (x^2 - x - 2)dx$$
$$= \int_{-2}^{-1} (x^2 - x - 2)dx + \int_{-1}^{1} (-x^2 + x + 2)dx$$
$$= \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x\right)\Big|_{-2}^{-1} + \left(-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2x\right)\Big|_{-1}^{1}$$
$$= \left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2\right) - \left(-\frac{8}{3} - 2 + 4\right) + \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 2\right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2\right)$$
$$= \frac{31}{6}$$

إذن، المساحة هي: $\frac{31}{6}$ وحدة مربعة.

مقدار التغير في تركيز الدواء في الجسم خلال الساعات الثماني الأولى من حقنه هو $C(8) - C(0)$

وهو يساوي $\int_0^8 C'(t)dt$

$$C(8) - C(0) = \int_0^8 \frac{3t}{\sqrt{(t^2+36)^3}} dt$$

$$u = t^2 + 36 \Rightarrow \frac{du}{dt} = 2t$$

$$\Rightarrow dt = \frac{du}{2t}$$

$$t = 0 \Rightarrow u = 36, \quad t = 8 \Rightarrow u = 100$$

46 $$C(8) - C(0) = \int_0^8 \frac{3t}{\sqrt{(t^2+36)^3}} dt = \int_{36}^{100} \frac{3t}{\sqrt{u^3}} \frac{du}{2t}$$

$$= \frac{3}{2} \int_{36}^{100} u^{-3/2} du$$

$$= \left(-3u^{-1/2}\right)\Big|_{36}^{100}$$

$$= -\frac{3}{\sqrt{u}}\Big|_{36}^{100}$$

$$= -\frac{3}{10} + \frac{3}{6} = 0.2$$

مقدار التغير في تركيز الدواء في الجسم خلال الساعات الثماني الأولى من حقنه هو $0.2\ \text{mg/cm}^3$

47	$f(x) = 3x^2 - 3x$ أولا نساوي قاعدة الاقتران بالصفر، ونحل المعادلة الناتجة: $f(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 3x = 0$ $\Rightarrow 3x(x-1) = 0$ $\Rightarrow x = 0, x = 1$ هذه الإحداثيات تمثل حدود التكامل. نختار عددًا ضمن الفترة $[0, 1]$، وليكن $\frac{1}{2}$ ونعوضه في قاعدة الاقتران: $f(0) = 3\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 3\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{4} < 0$ بما أن ناتج التعويض سالب، إذن منحنى الاقتران يقع تحت المحور x في الفترة $[0, 1]$ $A = -\int_0^1 (3x^2 - 3x)dx = \int_0^1 (-3x^2 + 3x)dx$ $= \left(-x^3 + \frac{3}{2}x^2\right)\Big\|_0^1$ $= \left(-(1)^3 + \frac{3}{2}(1)^2\right) - \left(-(0)^3 + \frac{3}{2}(0)^2\right)$ $= \frac{1}{2}$ إذن، المساحة هي: $\frac{1}{2}$ وحدة مربعة.
48	$A = -\int_{-3}^{-1} (x^2 + 4x + 3)dx + \int_{-1}^{0} (x^2 + 4x + 3)dx$ $= \int_{-3}^{-1} (-x^2 - 4x - 3)dx + \int_{-1}^{0} (x^2 + 4x + 3)dx$ $= \left(-\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - 3x\right)\Big\|_{-3}^{-1} + \left(\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 3x\right)\Big\|_{-1}^{0}$ $= \left(\frac{1}{3} - 2 + 3\right) - (9 - 18 + 9) + (0) - \left(-\frac{1}{3} + 2 - 3\right)$ $= \frac{8}{3}$ إذن، المساحة هي: $\frac{8}{3}$ وحدة مربعة.

49	$A = \int_0^1 x^3\,dx$ $= \left(\frac{1}{4}x^4\right)\Big\|_0^1$ $= \left(\frac{1}{4}(1)^4\right) - \left(\frac{1}{4}(0)^4\right)$ $= \frac{1}{4}$ إذن، المساحة هي: $\frac{1}{4}$ وحدة مربعة.
50	$A = -\int_0^2 -x^2\,dx$ $= \int_0^2 x^2\,dx$ $= \left(\frac{1}{3}x^3\right)\Big\|_0^2$ $= \left(\frac{1}{3}(2)^3\right) - \left(\frac{1}{3}(0)^3\right)$ $= \frac{8}{3}$ إذن، المساحة هي: $\frac{8}{3}$ وحدة مربعة.

51	$A=-\int_{-1}^{0} xe^{x^2}dx+\int_{0}^{2} xe^{x^2}dx$ $=\int_{-1}^{0} -xe^{x^2}dx+\int_{0}^{2} xe^{x^2}dx$ $u=x^2 \quad \Rightarrow \frac{du}{dx}=2x$ $\Rightarrow dx=\frac{du}{2x}$ $x=0 \quad \Rightarrow u=0$ $x=-1 \quad \Rightarrow u=1$ $x=2 \quad \Rightarrow u=4$ $A=\int_{1}^{0} -xe^{u}\times\frac{du}{2x}+\int_{0}^{4} xe^{u}\times\frac{du}{2x}$ $=\int_{1}^{0} -\frac{1}{2}e^{u}du+\int_{0}^{4}\frac{1}{2}e^{u}du$ $=\left(-\frac{1}{2}e^{u}\right)\Big\vert_{1}^{0}+\left(\frac{1}{2}e^{u}\right)\Big\vert_{0}^{4}$ $=\left(-\frac{1}{2}e^{0}\right)-\left(-\frac{1}{2}e^{1}\right)+\left(\frac{1}{2}e^{4}\right)-\left(\frac{1}{2}e^{0}\right)$ $=-1+\frac{1}{2}e+\frac{1}{2}e^{4}\approx 27.66$ إذن، المساحة هي: 27.66 وحدة مربعة تقريبًا.

الوحدة الخامسة: الإحصاء والاحتمالات

الدرس الأول: التوزيع الهندسي

مسألة اليوم صفحة 70

$$P(X=7)=(0.05)(1-0.05)^{7-1}$$
$$=(0.05)(0.95)^{6}$$
$$\approx 0.04$$

أتحقق من فهمي صفحة 72

a	نبحث في تحقق الشروط الأربعة: - الشرط الأول: اشتمال التجربة على محاولات متكررة لكن عدد المرات محدد (تم رمي النرد 4 مرات) ومستقلة (رمي حجر النرد في كل مرة لا يؤثر في نتيجة رميه في المرات الأخرى)، إذن الشرط الأول غير متحقق. إذن، هذه التجربة العشوائية لا تمثل تجربة احتمالية هندسية.
b	نبحث في تحقق الشروط الأربعة: - الشرط الأول: اشتمال التجربة على محاولات متكررة (تم إلقاء قطعة النقد 4 مرات) ومستقلة (إلقاء قطعة النقد في كل مرة لا يؤثر في نتيجة رميها في المرات الأخرى)، إذن الشرط الأول محقق - الشرط الثاني: فرز النتائج الممكنة في كل محاولة إلى نجاح (ظهور صورة) أو فشل (عدم ظهور صورة)، هذا الشرط محقق - الشرط الثالث: ثبات احتمال النجاح في كل مرة، وهو $\frac{1}{2}$ ، هذا شرط محقق - الشرط الرابع: التوقف عند أول نجاح محقق، لأن حنان توقفت بعد ظهور الصورة أول مرّة. إذن، هذه التجربة العشوائية تمثل تجربة احتمالية هندسية.

أتحقق من فهمي صفحة 74

a	$P(X=2)=(0.4)(1-0.4)^{2-1}$ $=(0.4)(0.6)$ $=0.24$

b	$P(X \leq 3) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)$ $= (0.4)(1 - 0.4)^{1-1} + (0.4)(1 - 0.4)^{2-1} + (0.4)(1 - 0.4)^{3-1}$ $= (0.4) + (0.4)(0.6)^1 + (0.4)(0.6)^2$ $= 0.784$
c	$P(X > 4) = 1 - P(X \leq 4)$ $= 1 - \big(P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4)\big)$ $= 1 - \big((0.4) + (0.4)(0.6)^1 + (0.4)(0.6)^2 + (0.4)(0.6)^3\big)$ $= 0.1296$ حل آخر باستعمال القاعدة $P(X > x) = (1 - p)^x$: $P(X > 4) = (1 - p)^4 = (0.6)^4 = 0.1296$

أتحقق من فهمي صفحة 75

a	$P(X = 10) = (0.1)(1 - 0.1)^{10-1}$ $= (0.1)(0.9)^9$ ≈ 0.039
b	$P(X > 3) = (1 - 0.1)^3 = (0.9)^3 = 0.729$

أتحقق من فهمي صفحة 76

$$E(X) = \frac{1}{\frac{1}{6}} = 6$$

إذن، يُتوقّع أن يرمي ريّان حجر النرد 6 مرات حتى يظهر العدد 4 أول مرّة.

أتدرب وأحل المسائل صفحة 77

1	نبحث في تحقق الشروط الأربعة: - الشرط الأول: اشتمال التجربة على محاولات متكررة (تجيب أسماء عن عدة أسئلة) ومستقلة (الإجابة عن سؤال بشكل صحيح أو غير صحيح لا يؤثر في صحة الإجابة عن الأسئلة الأخرى)، إذن الشرط الأول محقق - الشرط الثاني: فرز النتائج الممكنة في كل محاولة إلى نجاح (الإجابة بشكل صحيح)أو فشل (الإجابة بشكل غير صحيح)، هذا الشرط محقق - الشرط الثالث: ثبات احتمال النجاح في كل مرة، وهو 0.2 ، هذا شرط محقق الشرط الرابع: التوقف عند أول نجاح، وهو غير محقق، لأن أسماء ستتوقف بعد الإجابة عن الأسئلة جميعها. إذن، هذه التجربة العشوائية لا تمثل تجربة احتمالية هندسية.
2	نبحث في تحقق الشروط الأربعة: - الشرط الأول: اشتمال التجربة على محاولات متكررة (تم رمي كرة السلة عدة مرات) ومستقلة (إحراز هدف أو عدمه في كل مرة لا يؤثر في نتيجة إحرازه في المرات الأخرى)، إذن الشرط الأول محقق - الشرط الثاني: فرز النتائج الممكنة في كل محاولة إلى نجاح (إحراز الهدف)أو فشل (عدم إحراز الهدف)، هذا الشرط محقق - الشرط الثالث: ثبات احتمال النجاح في كل مرة، وهو 0.3 ، هذا شرط محقق - الشرط الرابع: التوقف عند أول نجاح، وهو محقق، لأن اللاعب سيتوقف بعد إحراز الهدف لأول مرّة. إذن، هذه التجربة العشوائية تمثل تجربة احتمالية هندسية.
3	$P(X=2)=(0.2)(1-0.2)^{2-1}$ $=(0.2)(0.8)^{1}$ ≈ 0.16
4	$P(X\leq 3)=P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)$ $=(0.2)(0.8)^{0}+(0.2)(0.8)^{1}+(0.2)(0.8)^{2}$ ≈ 0.488

5	$P(X \geq 3) = 1 - P(X < 3)$ $= 1 - \big(P(X = 1) + P(X = 2)\big)$ $= 1 - \big((0.2)(0.8)^0 + (0.2)(0.8)^1\big)$ $= 0.64$ حلّ آخر: $P(X \geq 3) = P(X > 2) = (1 - 0.2)^2 = (0.8)^2 = 0.64$
6	$P(3 \leq X \leq 5) = P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5)$ $= (0.2)(0.8)^2 + (0.2)(0.8)^3 + (0.2)(0.8)^4$ ≈ 0.312
7	$P(X < 4) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)$ $= (0.2)(0.8)^0 + (0.2)(0.8)^1 + (0.2)(0.8)^2$ ≈ 0.488
8	$P(X > 4) = (0.8)^4 \approx 0.410$
9	$P(1 < X < 3) = P(X = 2)$ $= (0.2)(0.8)^1$ $= 0.16$
10	$P(4 < X \leq 6) = P(X = 5) + P(X = 6)$ $= (0.2)(0.8)^4 + (0.2)(0.8)^5$ ≈ 0.147
11	$P(X < 1) = 0$
12	$P(X = 6) = \left(\frac{1}{8}\right)\left(1 - \frac{1}{8}\right)^{6-1}$ $= \left(\frac{1}{8}\right)\left(\frac{7}{8}\right)^5$ $= \frac{16807}{262144} \approx 0.064$

13	$E(X) = \frac{1}{0.3} = \frac{10}{3} \approx 3.33$
14	$E(X) = \frac{1}{\frac{3}{7}} = \frac{7}{3} \approx 2.33$
15	$E(X) = \frac{1}{0.45} = \frac{100}{45} \approx 2.22$
16	$P(X = 5) = (0.1)(1 - 0.1)^{5-1}$ $= (0.1)(0.9)^4$ ≈ 0.066 احتمال أن يجد مراقب الجودة أول وحدة إنارة معيبة بعد فحص 5 وحدات إنارة هو0.066 تقريبًا
17	$P(X > 4) = 1 - P(X \leq 4)$ $= 1 - \left(P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4)\right)$ $= 1$ $- \left((0.1)(0.9)^0 + (0.1)(0.9)^1 + (0.1)(0.9)^2 + (0.1)(0.9)^3\right)$ $= 0.6561$ احتمال أن يجد مراقب الجودة أكثر من 4 وحدات إنارة حتى إيجاد أول وحدة معيبة هو 0.6561 حل آخر: $P(X > 4) = (1 - 0.1)^4 = (0.9)^4 = 0.6561$
18	$E(X) = \frac{1}{0.10} = 10$ إذن، يُتوقّع أن يفحص مراقب الجودة 10 وحدات إنارة حتى يجد أول وحدة إنارة معيبة.
19	$P(X = 3) = \left(\frac{1}{6}\right)\left(1 - \frac{1}{6}\right)^{3-1}$ $= \left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^2$ $= \frac{25}{216}$

20	$P(X>3)=1-P(X\leq 3)$ $=1-\left(P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)\right)$ $=1-\left(\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^{0}+\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^{1}+\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^{2}\right)$ $=\frac{125}{216}$ حل آخر: $P(X>3)=(1-\frac{1}{6})^{3}=(\frac{5}{6})^{3}=\frac{125}{216}$
21	الخطأ الذي وقعت فيه لانا هو أنها وضعت الأس 2 على احتمال الفشل **(1-p)** والصحيح أن يكون الأس أقل من **x** بواحد أي: **x-1**، ويكون الحل الصيح كما يأتي: $P(X=2)=\left(\frac{2}{5}\right)\left(1-\frac{2}{5}\right)^{2-1}$ $=\left(\frac{2}{5}\right)\left(\frac{3}{5}\right)^{1}$ $=\frac{6}{25}$
22	$P(X>3)=1-P(X\leq 3)$ $=1-\frac{819}{1331}$ $=\frac{512}{1331}$
23	$P(X=1)=p(1-p)^{1-1}$ $\Rightarrow 0.2=p(1-p)^{0}$ $\Rightarrow p=0.2$ $E(X)=\frac{1}{0.2}=5$

الدرس الثاني: توزيع ذي الحدين

مسألة اليوم صفحة 79
$P(X=2)=\binom{5}{2}(0.2)^2(0.8)^3$ $=0.2048$

	أتحقق من فهمي صفحة 80
a	نبحث في تحقق الشروط الأربعة: - الشرط الأول: اشتمال التجربة على محاولات متكررة (تم إلقاء حجر النرد 20 مرة) وبما أن إلقاء أي حجر منها لا يؤثر في نتيجة إلقاء الحجر في المرات الأخرى)، فإن هذه المحاولات مستقلة. - الشرط الثاني: فرز النتائج الممكنة في كل محاولة إلى ناتجين فقط، هما: النجاح (ظهور العدد 1) أو الفشل (عدم ظهور العدد 1) - الشرط الثالث: ثبات احتمال النجاح في كل محاولة، وهو $\frac{1}{6}$ - الشرط الرابع: وجود عدد محدد من المحاولات في التجربة وهو 20 إذن، تمثل هذه التجربة العشوائية تجربة احتمالية ذات حدين.
b	تتضمن هذه التجربة محاولات متكررة (اختيار 7 أشخاص)، وبما أن اختيار كل شخص يتأثر بنتائج اختيار الأشخاص السابقين له، فإن هذه المحاولات غير مستقلة. إذن، لا تمثل هذه التجربة العشوائية تجربة احتمالية ذات حدين.
	أتحقق من فهمي صفحة 82
a	$P(X=4)=\binom{5}{4}(0.1)^4(0.9)^1$ $=0.00045$
b	$P(X\le 2)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)$ $=\binom{5}{0}(0.1)^0(0.9)^5+\binom{5}{1}(0.1)^1(0.9)^4+\binom{5}{2}(0.1)^2(0.9)^3$ $=0.99144$

c	$P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2)$ $= 1 - 0.99144$ $= 0.00856$
أتحقق من فهمي صفحة 83	
a	$P(X = 3) = \binom{5}{3}\left(\frac{2}{7}\right)^3\left(\frac{5}{7}\right)^2$ ≈ 0.12 احتمال أن تكون 3 أيام فقط من هذه الأيام ماطرة هو 0.12 تقريبًا.
b	$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0)$ $= 1 - \binom{5}{0}\left(\frac{2}{7}\right)^0\left(\frac{5}{7}\right)^5$ ≈ 0.8141 احتمال أن يكون يوم واحد على الأقل من هذه الأيام ماطرًا هو 0.8141 تقريبًا.
أتحقق من فهمي صفحة 84	
$E(X) = 400 \times 0.3 = 120$ إذن، يُتوقّع وجود 120 من الإناث في هذه العينة.	
أتحقق من فهمي صفحة 85	
a	$E(X) = 400 \times \frac{3}{8} = 150$
b	$Var(X) = 400 \times \frac{3}{8} \times \frac{5}{8} = \frac{375}{4}$

أتدرب وأحل المسائل صفحة 86

1	نبحث في تحقق الشروط الأربعة للتجربة الاحتمالية ذات الحدين: 1- اشتمال التجربة على محاولات متكررة (إلقاء قطعة النقد 80 مرّة)، وبما أن نتيجة إلقاء قطعة النقد لا تؤثر في نتيجة إلقائها في المحاولات اللاحقة، فإن هذه المحاولات مستقلة. 2- فرز النتائج الممكنة في كل محاولة إلى ناتجين فقط، هما: النجاح (ظهور الكتابة)، أو الفشل (عدم ظهور الكتابة). 3- ثبات احتمال النجاح في كل محاولة، وهو $\frac{1}{2}$ 4- وجود عدد محدد من المحاولات في التجربة، هو 80 إذن، تمثل هذه التجربة العشوائية تجربة احتمالية ذات حدين.
2	نبحث في تحقق الشروط الأربعة للتجربة الاحتمالية ذات الحدين: 1- اشتمال التجربة على محاولات متكررة (إلقاء حجر النرد 20 مرّة)، وبما أن نتيجة إلقاء حجر النرد لا تؤثر في نتيجة إلقائه في المحاولات اللاحقة، فإن هذه المحاولات مستقلة. 2- فرز النتائج الممكنة في كل محاولة إلى ناتجين فقط، هما: النجاح (ظهور العدد 4)، أو الفشل (عدم ظهور العدد 4). 3- ثبات احتمال النجاح في كل محاولة، وهو $\frac{1}{6}$ 4- وجود عدد محدد من المحاولات في التجربة، هو 20 إذن، تمثل هذه التجربة العشوائية تجربة احتمالية ذات حدين.
3	بما أن عدد المحاولات في هذه التجربة غير محدد، إذن، لا تمثل هذه التجربة العشوائية تجربة احتمالية ذات حدين.
4	$X \sim B(17, 0.64)$
5	$P(X=2) = \binom{10}{2}(0.2)^2(0.8)^8$ ≈ 0.302
6	$P(X=5) = \binom{10}{5}(0.2)^5(0.8)^5$ ≈ 0.026

7	$P(X<3)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)$ $=\binom{10}{0}(0.2)^0(0.8)^{10}+\binom{10}{1}(0.2)^1(0.8)^9$ $+\binom{10}{2}(0.2)^2(0.8)^8$ ≈ 0.678
8	$P(X=1)=\binom{3}{1}\left(\frac{2}{3}\right)^1\left(\frac{1}{3}\right)^2$ $=\frac{2}{9}$
9	$P(X>1)=1-P(X\leq 1)$ $=1-\left(P(X=0)+P(X=1)\right)$ $=1-\left(\binom{3}{0}\left(\frac{2}{3}\right)^0\left(\frac{1}{3}\right)^3+\binom{3}{1}\left(\frac{2}{3}\right)^1\left(\frac{1}{3}\right)^2\right)$ $=\frac{20}{27}$ طريقة ثانية: $P(X>1)=P(X=2)+P(X=3)=\binom{3}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^1+\binom{3}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^0=\frac{20}{27}$
10	$P(0\leq X<2)=P(X=0)+P(X=1)$ $=\binom{3}{0}\left(\frac{2}{3}\right)^0\left(\frac{1}{3}\right)^3+\binom{3}{1}\left(\frac{2}{3}\right)^1\left(\frac{1}{3}\right)^2$ $=\frac{7}{27}$
11	$P(X=7)=\binom{12}{7}(0.6)^7(0.4)^5$ ≈ 0.227

12	$P(X \le 2) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)$ $= \binom{12}{0}(0.6)^0(0.4)^{12} + \binom{12}{1}(0.6)^1(0.4)^{11}$ $+ \binom{12}{2}(0.6)^2(0.4)^{10}$ $= 0.003$
13	$E(X) = 5(0.1) = 0.5$ $Var(X) = 5(0.1)(0.9) = 0.45$
14	$E(X) = 20\left(\frac{3}{8}\right) = 7.5$ $Var(X) = 20\left(\frac{3}{8}\right)\left(\frac{5}{8}\right) = 4.6875$
15	$P(X=3) = \binom{50}{3}(0.12)^3(0.88)^{47}$ ≈ 0.083
16	$E(X) = 50(0.12) = 6$
17	$Var(X) = 50(0.12)(0.88) = 5.28$
18	$E(X) = np \implies 10 = n(0.04)$ $\implies n = 250$ عدد الأشخاص الذين يلزم إشراكهم في العينة العشوائية من السكان هو 250 شخصًا.

19	$P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1)$ $= 1 - P(X = 0)$ $= 1 - \binom{3}{0}(p)^0(1-p)^3$ $\Rightarrow \frac{215}{216} = 1 - \binom{3}{0}(p)^0(1-p)^3$ $\Rightarrow \frac{215}{216} = 1 - (1-p)^3$ $\Rightarrow (1-p)^3 = 1 - \frac{215}{216}$ $\Rightarrow (1-p)^3 = \frac{1}{216}$ $\Rightarrow 1 - p = \frac{1}{6}$ $\Rightarrow p = 1 - \frac{1}{6}$ $\Rightarrow p = \frac{5}{6}$ $P(X = 2) = \binom{3}{2}\left(\frac{5}{6}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right)^1$ $= \frac{75}{216}$
20	$Var(X) = 100p(1-p)$ $\Rightarrow 24 = 100p(1-p)$ $\Rightarrow 24 = 100p - 100p^2$ $\Rightarrow 100p^2 - 100p + 24 = 0$ $\Rightarrow 25p^2 - 25p + 6 = 0$ $\Rightarrow (5p-3)(5p-2) = 0$ $\Rightarrow p = \frac{3}{5}$, $p = \frac{2}{5}$
21	بما أن لكل فقرة 4 علامات، وحصل رامي على العلامة 76، معناه أن رامي قد أجاب بشكل صحيح على 19 فقرة من أصل 25 فقرة في هذا الاختبار. بما أن كل فقرة لها 4 بدائل واحدة منها فقط صحيحة، إذن احتمال اختيار البديل الصحيح هو $\frac{1}{4}$ $P(X = 19) = \binom{25}{19}\left(\frac{1}{4}\right)^{19}\left(\frac{3}{4}\right)^6$ $= 0.00000011467$

الدرس الثالث: التوزيع الطبيعي

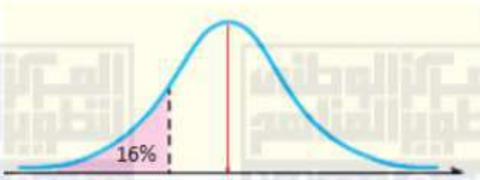
<table>
<tr><td colspan="2">مسألة اليوم صفحة 88</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\mu = 18.5 \quad , \sigma = 2.5$
$P(16 < X < 21) = P(18.5 - 2.5 < X < 18.5 + 2.5)$
$= P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma)$
$= 0.34 + 0.34$
$= 0.68$
احتمال أن يتراوح طول الشجرة بين 16 مترًا و21 مترًا هو 68%</td></tr>
<tr><td colspan="2">أتحقق من فهمي صفحة 92</td></tr>
<tr><td>a</td><td>النسبة المئوية للطلبة الذين تقع أطوالهم فوق الوسط الحسابي هي 50%</td></tr>
<tr><td>b</td><td>النسبة المئوية للطلبة الذين لا يزيد البعد بين أطوالهم و الوسط الحسابي على انحراف معياري واحد هي 68% (وهم المجموعة التي أطوالها تتراوح أطوالهم بين $\mu - \sigma$، و $\mu + \sigma$)</td></tr>
<tr><td>c</td><td>النسبة المئوية للطلبة الذين تقل أطوالهم عن الوسط الحسابي بمقدار لا يزيد على انحرافين معياريين هي 47.5%(وهم المجموعة الذين تتراوح أطوالهم بين $\mu - 2\sigma$، وμ)</td></tr>
<tr><td>d</td><td>النسبة المئوية للطلبة الذين تقل أطوالهم عن الوسط الحسابي بمقدار لا يزيد على ثلاثة انحرافات معيارية أو تزيد عليه بمقدار لا يزيد على انحرافين معياريين هي 97.35%
(وهم المجموعة الذين تتراوح أطوالهم بين $\mu - 3\sigma$، و$\mu + 2\sigma$)</td></tr>
<tr><td colspan="2">أتحقق من فهمي صفحة 94</td></tr>
<tr><td>a</td><td>قيمة الوسط الحسابي هي $\mu = 55$ ، وقيمة الانحراف المعياري هي $\sigma = \sqrt{121} = 11$
$P(X < 55) = P(X < \mu)$
$= 0.5$</td></tr>
<tr><td>b</td><td>$P(55 < X < 66) = P(55 < X < 55 + 11)$
$= P(\mu < X < \mu + \sigma)$
$= 0.34$</td></tr>
</table>

c	$P(X > 77) = P\big(X > 55 + 2(11)\big)$ $= P(X > \mu + 2\sigma)$ $= 2.35\% + 0.15\%$ $= 2.5\%$ $= 0.025$
أتحقق من فهمي صفحة 95	
a	قيمة الوسط الحسابي هي $\mu = 178$ ، وقيمة الانحراف المعياري هي $\sigma = 7$ $P(X > 178) = P(X > \mu)$ $= 50\%$ $= 0.5$
b	$P(171 < X < 192) = P\big(178 - 7 < X < 178 + 2(7)\big)$ $= P(\mu - \sigma < X < \mu + 2\sigma)$ $= 34\% + 34\% + 13.5\%$ $= 81.5\%$ $= 0.815$
أتدرب وأحل المسائل صفحة 96	
1	النسبة المئوية للعلامات التي تقع فوق الوسط الحسابي هي 50%
2	النسبة المئوية للعلامات التي لا يزيد البعد بينها وبين الوسط الحسابي على انحراف معياري واحد هي 68%
3	النسبة المئوية للعلامات الذين تزيد على الوسط الحسابي بمقدار لا يزيد على انحرافين معياريين هي 47.5%
4	النسبة المئوية للعلامات التي تزيد على الوسط الحسابي بمقدار لا يزيد على انحراف معياري واحد، أو تقل عنه بمقدار لا يزيد على ثلاثة انحرافات معيارية هي 83.85% وهي 34%+ (99.7% ÷2)

5	$P(\mu - 3\sigma < X < \mu - \sigma) = 2.35\% + 13.5\%$ $= 15.85\%$
6	$P(\mu - 2\sigma < X < \mu - \sigma) + P(\mu + \sigma < X < \mu + 2\sigma) = 13.5\% + 13.5\%$ $= 27\%$
7	$P(\mu < X < \mu + 2\sigma) = 34\% + 13.5\%$ $= 47.5\%$
8	$P(\mu - 2\sigma < X < \mu - \sigma) + P(\mu < X < \mu + \sigma) = 13.5\% + 34\%$ $= 47.5\%$
9	$A: \mu = 15 \quad , \sigma = 2$ $B: \mu = 12 \quad , \sigma = 3$ التوزيع A أقل تشتتًا وهو يضيق في وسطه، بينما يتوسع وسط التوزيع B، فيكون $\sigma_A < \sigma_B$
10	$\mu = 79 \quad , \sigma = \sqrt{144} = 12$ $P(X < 79) = P(X < \mu)$ $= 0.5$
11	$P(67 < X < 91) = P(79 - 12 < X < 79 + 12)$ $= P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma)$ $= 0.34 + 0.34$ $= 0.68$
12	$P(X > 91) = P(X > 79 + 12)$ $= P(X > \mu + \sigma)$ $= 13.5\% + 2.35\% + 0.15\%$ $= 16\%$ $= 0.16$

13	$P(X > 103) = P(X > 79 + 2(12))$ $= P(X > \mu + 2\sigma)$ $= 2.35\% + 0.15\%$ $= 2.5\%$ $= 0.025$
14	$P(43 < X < 115) = P(79 - 3(12) < X < 79 + 3(12))$ $= P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma)$ $= 99.7\%$ $= 0.997$
15	$P(X < 43) = P(X < 79 - 3(12))$ $= P(X < \mu - 3\sigma)$ $= 0.15\%$ $= 0.0015$
16	$\mu = 30 \quad , \sigma = \sqrt{0.4^2} = 0.4$ $P(X > 30) = P(X > \mu)$ $= 0.5$
17	$P(29.6 < X < 30.4) = P(30 - 0.4 < X < 30 + 0.4)$ $= P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma)$ $= 34\% + 34\%$ $= 68\%$ $= 0.68$
18	$P(29.2 < X < 30) = P(30 - 2(0.4) < X < 30)$ $= P(\mu - 2\sigma < X < \mu)$ $= 34\% + 13.5\%$ $= 47.5\%$ $= 0.475$

19	$P(29.2 < X < 30.4) = P(30 - 2(0.4) < X < 30 + 0.4)$ $= P(\mu - 2\sigma < X < \mu + \sigma)$ $= 34\% + 13.5\% + 34\%$ $= 81.5\%$ $= 0.815$
20	$\mu = 50 \quad , \sigma = 2$ $P(X > 54) = P(X > 50 + 2(2))$ $= P(X > \mu + 2\sigma)$ $= 2.35\% + 0.15\%$ $= 2.5\%$ $= 0.025$ احتمال أن تكون كتلة الكيس أكثر من 54 kg هو0.025
21	$P(44 < X < 52) = P(50 - 3(2) < X < 50 + 2)$ $= P(\mu - 3\sigma < X < \mu + \sigma)$ $= 2.35\% + 13.5\% + 34\% + 34\%$ $= 83.85\%$ $= 0.8385$ احتمال أن تتراوح كتلة الكيس بين 44 kg و 52 kg هو0.8385
22	أخطأ يوسف في تحديد قيمة الوسط والانحراف المعياري،والصحيح أن الانحراف المعياري يساوي الجذر التربيعي للمقدار الأيمن بين القوسين، والوسط الحسابي هو المقدار الأيسر. إن $X \sim N(4^2, t^2)$ متغير عشوائي طبيعي، وسطه الحسابي $= 164^2$ ، وانحرافه المعياري هو $\sqrt{t^2} = t$
23	$P(93 < X < 107) = P(100 - 7 < X < 100 + 7)$ $= P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma)$ $= 68\%$ ومنه فإن: $\sigma^2 = (7)^2 = 49$

24	تمثل نسبة غير الناجحين المساحة في الطرف الأيسر من منحنى التوزيع الطبيعي إلى يسار علامة النجاح كما هو مبين في الرسم الآتي:  فتكون نسبة الناجحين الذين علاماتهم أقلّ من الوسط الحسابي هي: $50\% - 16\% = 34\%$ ونعلم من القاعدة التجريبية أن 34% هي نسبة المساحة بين الوسط الحسابي μ ، و $\mu - \sigma$ إذن ، علامة النجاح هي: $\mu - \sigma = 68 - 15 = 53$

مسألة اليوم صفحة 98	
$P(Z > 2.64) = 1 - P(Z < 2.64)$ $= 1 - 0.9959$ $= 0.0041$ احتمال أن تكون درجة الحرارة المسجلة في المحطة أكثر من $2.64°C$ هو 0.0041	
أتحقق من فهمي صفحة 100	
a	$P(Z < 0.69) = 0.7549$
b	$P(Z < 3.05) = 0.9989$
c	$P(Z > -1.67) = P(Z < 1.67)$ $= 0.9525$
d	$P(Z > -2.88) = P(Z < 2.88)$ $= 0.9980$
أتحقق من فهمي صفحة 101	
a	$P(Z > 2.56) = 1 - P(Z < 2.56)$ $= 1 - 0.9948$ $= 0.0052$
b	$P(Z > 1.01) = 1 - P(Z < 1.01)$ $= 1 - 0.8438$ $= 0.1562$
c	$P(Z < -0.09) = 1 - P(Z < 0.09)$ $= 1 - 0.5359$ $= 0.4641$
d	$P(Z < -1.52) = 1 - P(Z < 1.52)$ $= 1 - 0.9357$ $= 0.0643$

<table>
<tr><th colspan="2">أتحقق من فهمي صفحة 102</th></tr>
<tr><td>a</td><td>$P(0 < Z < 0.33) = P(Z < 0.33) - P(Z < 0)$
$= 0.6293 - 0.5$
$= 0.1293$</td></tr>
<tr><td>b</td><td>$P(-1 < Z < 1.25) = P(Z < 1.25) - P(Z < -1)$
$= P(Z < 1.25) - \left(1 - P(Z < 1)\right)$
$= 0.8944 - (1 - 0.8413)$
$= 0.8944 - 0.1587$
$= 0.7357$</td></tr>
<tr><th colspan="2">أتحقق من فهمي صفحة 106</th></tr>
<tr><td>a</td><td>$P(Z < a) = 0.9788$
الاحتمال المعطى يمثل المساحة التي تقع يسار القيمة المعيارية a أسفل منحنى التوزيع الطبيعي.
بما أن قيمة الاحتمال أكبر من 0.5 ، فهذا يعني أن a موجبة، وأنه يمكن استبدالها بالقيمة z
$P(Z < a) = P(Z < z)$
$\Rightarrow 0.9788 = P(Z < z)$
$\Rightarrow z = 2.03$
$\Rightarrow a = 2.03$</td></tr>
<tr><td>b</td><td>$P(Z < a) = 0.25$
الاحتمال المعطى يمثل المساحة التي تقع يسار القيمة المعيارية a أسفل منحنى التوزيع الطبيعي.
بما أن قيمة الاحتمال أقل من 0.5 ، فهذا يعني أن a سالبة، وأنه يمكن استبدالها بالقيمة $-z$
$P(Z < a) = P(Z < -z)$
$\Rightarrow 0.25 = P(Z < -z)$
$\Rightarrow 0.25 = 1 - P(Z < z)$
$P(Z < z) = 1 - 0.25$
$P(Z < z) = 0.75$
$\Rightarrow z = 0.67$
$\Rightarrow a = -0.67$</td></tr>
</table>

c	$P(Z > a) = 0.9738$ الاحتمال المعطى يمثل المساحة التي تقع يمين القيمة المعيارية a أسفل منحنى التوزيع الطبيعي. بما أن قيمة الاحتمال أكبر من 0.5 ، فهذا يعني أن a سالبة، وأنه يمكن استبدالها بالقيمة $-z$ $P(Z > a) = P(Z > -z)$ $\Rightarrow 0.9738 = P(Z > -z)$ $\Rightarrow 0.9738 = P(Z < z)$ $\Rightarrow P(Z < z) = 0.9738$ $\Rightarrow z = 1.94$ $\Rightarrow a = -1.94$
d	$P(Z > a) = 0.2$ الاحتمال المعطى يمثل المساحة التي تقع يمين القيمة المعيارية a أسفل منحنى التوزيع الطبيعي. بما أن قيمة الاحتمال أقل من 0.5 ، فهذا يعني أن a موجبة، وأنه يمكن استبدالها بالقيمة z $P(Z > a) = P(Z > z)$ $\Rightarrow 0.2 = P(Z > z)$ $\Rightarrow 0.2 = 1 - P(Z < z)$ $\Rightarrow P(Z < z) = 1 - 0.2$ $\Rightarrow P(Z < z) = 0.8$ $\Rightarrow z = 0.84$ $\Rightarrow a = 0.84$
	أتدرب وأحل المسائل صفحة 107
1	$P(Z < 0.68) = 0.7517$
2	$P(Z < 1.54) = 0.9382$
3	$P(Z > 0.27) = 1 - P(Z < 0.27)$ $= 1 - 0.6064$ $= 0.3936$
4	$P(0.49 < Z < 2.9) = P(Z < 2.9) - P(Z < 0.49)$ $= 0.9981 - 0.6879$ $= 0.3102$

5	$P(-0.08 < Z < 0.8) = P(Z < 0.8) - P(Z < -0.08)$ $= P(Z < 0.8) - (1 - P(Z < 0.08))$ $= 0.7881 - (1 - 0.5319)$ $= 0.7881 - 0.4681$ $= 0.3200$
6	$P(0 < Z < 1.07) = P(Z < 1.07) - P(Z < 0)$ $= 0.8577 - 0.5$ $= 0.3577$
7	$P(Z < -0.08) = 1 - P(Z < 0.08)$ $= 1 - 0.5319$ $= 0.4681$
8	$P(Z > -1.99) = P(Z < 1.99)$ $= 0.9767$
9	$P(-0.5 < Z < 0) = P(Z < 0) - P(Z < -0.5)$ $= P(Z < 0) - (1 - P(Z < 0.5))$ $= 0.5 - (1 - 0.6915)$ $= 0.5 - 0.3085$ $= 0.1915$
10	$P(Z < 0.43) = 0.6664$
11	$P(Z > 3.08) = 1 - P(Z < 3.08)$ $= 1 - 0.9990$ $= 0.0010$
12	$P(Z < -2.03) = 1 - P(Z < 2.03)$ $= 1 - 0.9788$ $= 0.0212$

13	$P(Z > 2.2) = 1 - P(Z < 2.2)$ $= 1 - 0.9861$ $= 0.0139$
14	$P(-0.72 < Z < 3.26) = P(Z < 3.26) - P(Z < -0.72)$ $= P(Z < 3.26) - \left(1 - P(Z < 0.72)\right)$ $= 0.9994 - (1 - 0.7642)$ $= 0.9994 - 0.2358$ $= 0.7636$
15	$P(1.5 < Z < 2.5) = P(Z < 2.5) - P(Z < 1.5)$ $= 0.9938 - 0.9332$ $= 0.0606$
16	$P(Z > 2) = 1 - P(Z < 2)$ $= 1 - 0.9772$ $= 0.0228$
17	$P(-2.25 < Z < 0) = P(Z < 0) - P(Z < -2.25)$ $= P(Z < 0) - \left(1 - P(Z < 2.25)\right)$ $= 0.5 - (1 - 0.9878)$ $= 0.5000 - 0.0122$ $= 0.4878$
18	$P(Z < a) = 0.7642$ الاحتمال المعطى يمثل المساحة التي تقع يسار القيمة المعيارية a أسفل منحنى التوزيع الطبيعي. بما أن قيمة الاحتمال أكبر من 0.5 ، فهذا يعني أن a موجبة، وأنه يمكن استبدالها بالقيمة z $P(Z < a) = P(Z < z)$ $\Rightarrow 0.7642 = P(Z < z)$ $\Rightarrow z = 0.72$ $\Rightarrow a = 0.72$

19	$P(Z < a) = 0.13$ الاحتمال المعطى يمثل المساحة التي تقع يسار القيمة المعيارية a أسفل منحنى التوزيع الطبيعي. بما أن قيمة الاحتمال أقل من 0.5 ، فهذا يعني أن a سالبة، وأنه يمكن استبدالها بالقيمة $-z$ $P(Z < a) = P(Z < -z)$ $\Rightarrow 0.13 = P(Z < -z)$ $\Rightarrow 0.13 = 1 - P(Z < z)$ $P(Z < z) = 1 - 0.13$ $P(Z < z) = 0.87$ $\Rightarrow z = 1.12$ $\Rightarrow a = -1.12$
20	$P(Z > a) = 0.8531$ الاحتمال المعطى يمثل المساحة التي تقع يمين القيمة المعيارية a أسفل منحنى التوزيع الطبيعي. بما أن قيمة الاحتمال أكبر من 0.5 ، فهذا يعني أن a سالبة، وأنه يمكن استبدالها بالقيمة $-z$ $P(Z > a) = P(Z > -z)$ $\Rightarrow 0.8531 = P(Z > -z)$ $\Rightarrow 0.8531 = P(Z < z)$ $\Rightarrow P(Z < z) = 0.8531$ $\Rightarrow z = 1.05$ $\Rightarrow a = -1.05$

21	$P(Z > a) = 0.372$ الاحتمال المعطى يمثل المساحة التي تقع يمين القيمة المعيارية a أسفل منحنى التوزيع الطبيعي. بما أن قيمة الاحتمال أقل من 0.5 ، فهذا يعني أن a موجبة، وأنه يمكن استبدالها بالقيمة z $P(Z > a) = P(Z > z)$ $\Rightarrow 0.372 = P(Z > z)$ $\Rightarrow 0.372 = 1 - P(Z < z)$ $\Rightarrow P(Z < z) = 1 - 0.372$ $\Rightarrow P(Z < z) = 0.628$ $\Rightarrow z = 0.32$ $\Rightarrow a = 0.32$
22	أخطات روان في جميع مواقع الرموز والأعداد.فرمز المتغير العشوائي الطبيعي المعياري هوZ ، ويوضع في أقصى اليسار، ونوع المتغير طبعي **N**يوضع بعد ~، والوسط الحسابي 0يوضع في يسار الزوج المرتب، ويكتب التباين الذي هو مربع الانحراف المعياري في يمين الزوج المرتب. فالتعبير الصحيح عن المتغير العشوائي الطبيعي المعياري هو: $Z \sim N(0,1)$ أو $Z \sim N(0,1^2)$
23	$P(-a < Z < a) = P(Z < a) - P(Z < -a)$ $= P(Z < a) - (1 - P(Z < a))$ $= P(Z < a) - 1 + P(Z < a)$ $= 2P(Z < a) - 1$

24	$P(0 < Z < a) = 0.45$ $\Rightarrow P(Z < a) - P(Z < 0) = 0.45$ $\Rightarrow P(Z < a) - 0.5 = 0.45$ $\Rightarrow P(Z < a) = 0.95$ الاحتمال المعطى يمثل المساحة التي تقع يسار القيمة المعيارية a أسفل منحنى التوزيع الطبيعي. بما أن قيمة الاحتمال أكبر من 0.5 ، فهذا يعني أن a موجبة، وأنه يمكن استبدالها بالقيمة z $P(Z < a) = P(Z < z)$ $\Rightarrow 0.95 = P(Z < z)$ $\Rightarrow z = 1.64$ $\Rightarrow a = 1.64$
25	$P(-a < Z < a) = 0.1272$ $\Rightarrow P(Z < a) - P(Z < -a) = 0.1272$ $\Rightarrow P(Z < a) - 1 + P(Z < a) = 0.1272$ $\Rightarrow 2P(Z < a) - 1 = 0.1272$ $\Rightarrow 2P(Z < a) = 1.1272$ $\Rightarrow P(Z < a) = 0.5636$ الاحتمال المعطى يمثل المساحة التي تقع يسار القيمة المعيارية a أسفل منحنى التوزيع الطبيعي. بما أن قيمة الاحتمال أكبر من 0.5 ، فهذا يعني أن a موجبة، وأنه يمكن استبدالها بالقيمة z $P(Z < a) = P(Z < z)$ $\Rightarrow 0.5636 = P(Z < z)$ $\Rightarrow z = 0.16$ $\Rightarrow a = 0.16$

الدرس الخامس: احتمال المتغير العشوائي الطبيعي باستعمال الجدول

مسألة اليوم صفحة 108	
$X \sim N(127, 16^2)$ $P(X < 123) = P\left(Z < \frac{123-127}{16}\right)$ $= P(Z < -0.25)$ $= 1 - P(Z < 0.25)$ $= 1 - 0.5987$ $= 0.4013$ احتمال أن يكون ضغط دمه الانقباضي أقل من 123 mmHg هو 0.4013	
أتحقق من فهمي صفحة 109	
a	$z = \frac{24-15}{4}$ $= 2.25$
b	$z = \frac{10-15}{4}$ $= -1.25$

	أتحقق من فهمي صفحة 110
a	$X \sim N(7, 0.5^2)$ $P(X < 7.7) = P\left(Z < \frac{7.7 - 7}{0.5}\right)$ $= P(Z < 1.4)$ $= 0.9192$
b	$P(X > 6.1) = P\left(Z > \frac{6.1 - 7}{0.5}\right)$ $= P(Z > -1.8)$ $= P(Z < 1.8)$ $= 0.9641$
c	$P(X > 8.2) = P\left(Z > \frac{8.2 - 7}{0.5}\right)$ $= P(Z > 2.4)$ $= 1 - P(Z < 2.4)$ $= 1 - 0.9918 = 0.0082$
d	$P(6 < X < 7.1) = P\left(\frac{6 - 7}{0.5} < Z < \frac{7.1 - 7}{0.5}\right)$ $= P(-2 < Z < 0.2)$ $= P(Z < 0.2) - P(Z < -2)$ $= P(Z < 0.2) - (1 - P(Z < 2))$ $= 0.5793 - (1 - 0.9772)$ $= 0.5793 - 0.0228$ $= 0.5565$

أتحقق من فهمي صفحة 112

a	$X \sim N(90, 5^2)$ $P(X < 80) = P\left(Z < \frac{80-90}{5}\right)$ $= P(Z < -2)$ $= 1 - P(Z < 2)$ $= 1 - 0.9772$ $= 0.0228$ نسبة ثمار البندورة التي تقل كتلة كل منها عن 80 g هي 0.0228
b	$P(X > 100) = P\left(Z > \frac{100-90}{5}\right)$ $= P(Z > 2)$ $= 1 - P(Z < 2)$ $= 1 - 0.9772$ $= 0.0228$ نسبة ثمار البندورة التي تزيد كتلة كل منها عن 100 g هي 0.0228 $n = 200 \times 0.0228 = 4.56 \approx 5$ عدد ثمار البندورة التي تزيد كتلة كل منها عن 100 g هو 5 حبات تقريبًا.

أتدرب وأحل المسائل صفحة 112	
1	$z = \frac{239 - 224}{6}$ $= 2.5$
2	$z = \frac{200 - 224}{6}$ $= -4$
3	$z = \frac{224 - 224}{6}$ $= 0$
4	$X \sim N(30, 10^2)$ $P(X < 35) = P\left(Z < \frac{35 - 30}{10}\right)$ $= P(Z < 0.5)$ $= 0.6915$
5	$P(X > 38) = P\left(Z > \frac{38 - 30}{10}\right)$ $= P(Z > 0.8)$ $= 1 - P(Z < 0.8)$ $= 1 - 0.7881$ $= 0.2119$
6	$P(35 < X < 40) = P\left(\frac{35 - 30}{10} < Z < \frac{40 - 30}{10}\right)$ $= P(0.5 < Z < 1)$ $= P(Z < 1) - P(Z < 0.5)$ $= 0.8413 - (1 - 0.6915)$ $= 0.8413 - 0.3085$ $= 0.5328$

7	$P(X<20)=P\left(Z<\frac{20-30}{10}\right)$ $=P(Z<-1)$ $=1-P(Z<1)$ $=1-0.8413$ $=0.1587$
8	$P(15<X<32)=P\left(\frac{15-30}{10}<Z<\frac{32-30}{10}\right)$ $=P(-1.5<Z<0.2)$ $=P(Z<0.2)-P(Z<-1.5)$ $=P(Z<0.2)-\left(1-P(Z<1.5)\right)$ $=0.5793-(1-0.9332)$ $=0.5793-0.0668$ $=0.5125$
9	$P(17<X<19)=P\left(\frac{17-30}{10}<Z<\frac{19-30}{10}\right)$ $=P(-1.3<Z<-1.1)$ $=P(Z<-1.1)-P(Z<-1.3)$ $=1-P(Z<1.1)-(1-P(Z<1.3))$ $=P(Z<1.3)-P(Z<1.1)$ $=0.9032-0.8643$ $=0.0389$
10	$X\sim N(154,12^2)$ $P(X<154)=P\left(Z<\frac{154-154}{12}\right)$ $=P(Z<0)$ $=0.5$

11	$P(X > 160) = P\left(Z > \frac{160-154}{12}\right)$ $= P(Z > 0.5)$ $= 1 - P(Z < 0.5)$ $= 1 - 0.6915$ $= 0.3085$
12	$P(140 < X < 155) = P\left(\frac{140-154}{12} < Z < \frac{155-154}{12}\right)$ $= P(-1.17 < Z < 0.08)$ $= P(Z < 0.08) - P(Z < -1.17)$ $= P(Z < 0.08) - (1 - P(Z < 1.17))$ $= 0.5319 - (1 - 0.8790)$ $= 0.5319 - 0.1210$ $= 0.4109$
13	$X \sim N(78, 5^2)$ $P(X < 70) = P\left(Z < \frac{70-78}{5}\right)$ $= P(Z < -1.6)$ $= 1 - P(Z < 1.6)$ $= 1 - 0.9452$ $= 0.0548$ نسبة الأشخاص الذين يقل محيط الخصر لكل منهم عن 70 cm هي 0.0548

14	$P(70 < X < 80) = P\left(\frac{70-78}{5} < Z < \frac{80-78}{5}\right)$ $= P(-1.6 < Z < 0.4)$ $= P(Z < 0.4) - P(Z < -1.6)$ $= P(Z < 0.4) - (1 - P(Z < 1.6))$ $= 0.6554 - (1 - 0.9452)$ $= 0.6554 - 0.0548$ $= 0.6006$ نسبة الأشخاص الذين يتراوح محيط الخصر لكل منهم بين 70 cm و 80 cm هي 0.6006 $n = 1200 \times 0.6006 = 720.72 \approx 721$ عدد الأشخاص الذين يتراوح محيط الخصر لكل منهم بين 70 cm و 80 cm هو 721 شخصًا.
15	$X \sim N(25, 1.5^2)$ $P(X > 28) = P\left(Z > \frac{28-25}{1.5}\right)$ $= P(Z > 2)$ $= 1 - P(Z < 2)$ $= 1 - 0.9772$ $= 0.0228$ احتمال أن يكون عمر البطارية أكثر من 28 ساعة هو 0.0228
16	$P(X > 20) = P\left(Z > \frac{20-25}{1.5}\right)$ $= P(Z > -3.33)$ $= P(Z < 3.33)$ $= 0.9996$ احتمال أن يكون عمر البطارية أكثر من 20 ساعة هو 0.9996

17	$P(22 < X < 25) = P\left(\frac{22-25}{1.5} < Z < \frac{25-25}{1.5}\right)$ $= P(-2 < Z < 0)$ $= P(Z < 0) - P(Z < -2)$ $= P(Z < 0) - (1 - P(Z < 2))$ $= 0.5 - (1 - 0.9772)$ $= 0.5000 - 0.0228$ $= 0.4772$ احتمال أن يتراوح عمر البطارية بين 22 ساعة و25 ساعة هو 0.4772
18	$X \sim N(68.5, 5^2)$ $P(X > 70) = P\left(Z > \frac{70-68.5}{5}\right)$ $= P(Z > 0.3)$ $= 1 - P(Z < 0.3)$ $= 1 - 0.6179$ $= 0.3821$ $n = 1300 \times 0.3821 = 496.73 \approx 497$ العدد التقريبي للسيارات التي ستتجاوز السرعة المحددة على الطريق في هذا اليوم هو 497 سيارة.

19

$$P(75 < X < 85) = P\left(\frac{75-68.5}{5} < Z < \frac{85-68.5}{5}\right)$$
$$= P(1.3 < Z < 3.3)$$
$$= P(Z < 3.3) - P(Z < 1.3)$$
$$= 0.9995 - 0.9032$$
$$= 0.0963$$
$$n = 1300 \times 0.0963 = 125.19 \approx 125$$

عدد المخالفات التي سجلت من الدرجة الأولى في هذا اليوم هو 125 مخالفة تقريبًا.

$$P(X > 85) = P\left(Z > \frac{85-68.5}{5}\right)$$
$$= P(Z > 3.3)$$
$$= 1 - P(Z < 3.3)$$
$$= 1 - 0.9995$$
$$= 0.0005$$
$$n = 1300 \times 0.0005 = 0.65 \approx 1$$

عدد المخالفات التي سجلت من الدرجة الثانية في هذا اليوم هو مخالفة واحدة تقريبًا.

20

$$3.2 = \frac{14-\mu}{\sigma} \quad \Rightarrow \quad 3.2\sigma = 14 - \mu \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$-1.8 = \frac{-6-\mu}{\sigma} \quad \Rightarrow \quad -1.8\sigma = -6 - \mu \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

بضرب المعادلة (2) بسالب واحد، تنتج لدينا المعادلة:

$$1.8\sigma = 6 + \mu \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

بجمع المعادلتين (1) و (3) طرفًا إلى طرف، نحصل على:

$$5\sigma = 20 \quad \Rightarrow \sigma = 4$$

بالتعويض في المعادلة (3) نحصل على:

$$1.8(4) = 6 + \mu \quad \Rightarrow \mu = 1.2$$

إذن، الوسط الحسابي هو 1.2 ، والانحراف المعياري هو 4

21

نفرض a هو المعدل المطلوب.

نفرض p هو احتمال أن يكرم الطالب، أي احتمال أن يحصل على معدل أعلى من a أو يساويه.

$$n = 600 \times p = 50 \quad \Rightarrow p = \frac{50}{600} \approx 0.0833$$

إذن، احتمال أن يتم تكريم الطالب (أي أن يحصل على معدل يفوق a أو يساويه) هو 0.0833

$$P(X \geq a) = P\left(Z \geq \frac{a-73}{8}\right)$$

$$= 1 - P\left(Z < \frac{a-73}{8}\right)$$

$$\Rightarrow 0.0833 = 1 - P\left(Z < \frac{a-73}{8}\right)$$

$$\Rightarrow P\left(Z < \frac{a-73}{8}\right) = 1 - 0.0833$$

$$\Rightarrow P\left(Z < \frac{a-73}{8}\right) = 0.9167$$

$$\Rightarrow \frac{a-73}{8} = 1.38$$

$$\Rightarrow a - 73 = 11.04$$

$$\Rightarrow a = 84.04$$

إذن، أقل معدل للطلبة الخمسين هو 84.04

اختبار نهاية الوحدة الخامسة

1	$X \sim B(4, 0.4)$ $P(X=3) = \binom{4}{3}(0.4)^3(0.6)^1 = 0.1536 \ldots\ldots\ldots\ldots (a)$
2	$E(X) = np$ $\Rightarrow 60 = 320p$ $\Rightarrow p = \frac{60}{320} = \frac{3}{16} \ldots\ldots\ldots\ldots (a)$
3	$X \sim B(8, 0.1)$ $P(X < 2) = P(X=0) + P(X=1)$ $= \binom{8}{0}(0.1)^0(0.9)^8 + \binom{8}{1}(0.1)^1(0.9)^7 = 0.8131 \ldots\ldots (b)$
4	$X \sim B(n, p)$ $E(X) = 8 \ \Rightarrow np = 8$ $Var(X) = np(1-p) \ \Rightarrow \ np(1-p) = \frac{20}{3}$ بتعويض قيمة np في المعادلة الثانية، نحصل على: $8(1-p) = \frac{20}{3} \ \Rightarrow 1 - p = \frac{5}{6}$ $\Rightarrow p = \frac{1}{6}$ $np = 8 \ \Rightarrow n\left(\frac{1}{6}\right) = 8 \Rightarrow n = 48 \ldots\ldots\ldots\ldots (d)$
5	$99.7\% \ldots\ldots\ldots\ldots (c)$
6	$P(X < 80) = P\left(Z < \frac{80 - 83}{4}\right)$ $= P(Z < -0.75)$ $= 1 - P(Z < 0.75)$ $= 1 - 0.7734$ $= 0.2266$ $n = 2000 \times 0.2266 = 453.2 \approx 453$ عدد الطلبة الذين تقل علاماتهم عن 80 هو 453 تقريبًا.................................(a)

7	$X \sim Geo(0.3)$ $P(X=4)=(0.3)(0.7)^3$ $=0.1029$
8	$P(3<X\le 5)=P(X=4)+P(X=5)$ $=(0.3)(0.7)^3+(0.3)(0.7)^4$ $=0.17493$
9	$P(X>4)=(1-0.3)^4=(0.7)^4=0.2401$
10	$E(X)=\frac{1}{0.3}=\frac{10}{3}$
11	$X \sim B(6,0.3)$ $P(X=2)=\binom{6}{2}(0.3)^2(0.7)^4=0.324135$
12	$P(X>4)=P(X=5)+P(X=6)$ $=\binom{6}{5}(0.3)^5(0.7)^1+\binom{6}{6}(0.3)^6(0.7)^0$ $=0.010935$
13	$P(2\le X<3)=P(X=2)$ $=\binom{6}{2}(0.3)^2(0.7)^4$ $=0.324135$
14	$E(X)=6(0.3)=1.8$
15	$P(Z<1.93)=0.9732$
16	$P(Z<0.72)=0.7642$
17	$P(Z>-1.04)=P(Z<1.04)=0.8508$
18	$P(-1.7<Z<3.3)=P(Z<3.3)-P(Z<-1.7)$ $=P(Z<3.3)-\left(1-P(Z<1.7)\right)$ $=0.9995-(1-0.9554)$ $=0.9995-0.0446$ $=0.9549$

19	$X \sim N(55, 4^2)$ $P(X \leq 50) = P\left(Z \leq \frac{50-55}{4}\right)$ $= P(Z \leq -1.25)$ $= 1 - P(Z < 1.25)$ $= 1 - 0.8944$ $= 0.1056$
20	$P(50 < X < 58) = P\left(\frac{50-55}{4} < Z < \frac{58-55}{4}\right)$ $= P(-1.25 < Z < 0.75)$ $= P(Z < 0.75) - P(Z < -1.25)$ $= P(Z < 0.75) - \left(1 - P(Z < 1.25)\right)$ $= 0.7734 - (1 - 0.8944)$ $= 0.7734 - 0.1056$ $= 0.6678$
21	$P(56 < X < 59) = P\left(\frac{56-55}{4} < Z < \frac{59-55}{4}\right)$ $= P(0.25 < Z < 1)$ $= P(Z < 1) - P(Z < 0.25)$ $= 0.8413 - 0.5987$ $= 0.2426$
22	$P(X > 55) = P\left(Z > \frac{55-55}{4}\right)$ $= P(Z > 0)$ $= 1 - P(Z \leq 0)$ $= 1 - 0.5$ $= 0.5$
23	$P(0 < Z < 1.5) = P(Z < 1.5) - P(Z < 0)$ $= 0.9332 - 0.5$ $= 0.4332$
24	$P(0.1 < Z < 0.31) = P(Z < 0.31) - P(Z < 0.1)$ $= 0.6217 - 0.5398$ $= 0.0819$

25	$X \sim B(100, 0.17)$ $E(X) = 100(0.17) = 17$ العدد المتوقع من المصابيح التالفة هو 17 مصباحًا.
26	$X \sim Geo(0.1)$ $P(X > 5) = (1 - 0.1)^5 = (0.9)^5$ $= 0.59049$
27	$P(X > 3) = (1 - 0.1)^3 = (0.9)^3$ $= 0.729$
28	$P(Z < a) = 0.638 \Rightarrow a = 0.35$
29	$P(Z > a) = 0.6$ الاحتمال المعطى يمثل المساحة التي تقع يمين القيمة المعيارية a أسفل منحنى التوزيع الطبيعي. بما أن قيمة الاحتمال أكبر من 0.5 ، فهذا يعني أن a سالبة، وأنه يمكن استبدالها بالقيمة $-z$ $P(Z > a) = P(Z > -z)$ $\Rightarrow 0.6 = P(Z > -z)$ $\Rightarrow 0.6 = P(Z < z)$ $\Rightarrow P(Z < z) = 0.6$ $\Rightarrow z = 0.25$ $\Rightarrow a = -0.25$
30	$X \sim N(250, 4^2)$ $P(X > 260) = P\left(Z > \frac{260 - 250}{4}\right)$ $= P(Z > 2.5)$ $= 1 - P(Z < 2.5)$ $= 1 - 0.9938$ $= 0.0062$

31	$P(240 < X < 250) = P\left(\frac{240-250}{4} < Z < \frac{250-250}{4}\right)$ $= P(-2.5 < Z < 0)$ $= P(Z < 0) - P(Z < -2.5)$ $= P(Z < 0) - (1 - P(Z < 2.5))$ $= 0.5 - (1 - 0.9938)$ $= 0.5 - 0.0062$ $= 0.4938$
32	$X \sim B(20, 0.3)$ $P(X = 4) = \binom{20}{4}(0.3)^4(0.7)^{16} \approx 0.1304$
33	$P(X \geq 2) = 1 - (P(X = 0) + P(X = 1))$ $= 1 - \left(\binom{20}{0}(0.3)^0(0.7)^{20} + \binom{20}{1}(0.3)^1(0.7)^{19}\right)$ ≈ 0.9924
34	$X \sim N(506, 3^2)$ $P(X < 500) = P\left(Z < \frac{500-506}{3}\right)$ $= P(Z < -2)$ $= 1 - P(Z < 2)$ $= 1 - 0.9772$ $= 0.0228$ $n = 100 \times 0.0228 = 2.28 \approx 2$ عدد القوارير التي تحوي كل منها أقل من 500 mL هو 2 تقريبًا.