الملاذ في مهارات الرياضيات

2025

الاستاذ حمزة ابو الفول

الصف الثاني عشر- المسار الأكاديمي

الفصل الدراسي الأول

استعـد لدراسة الوحدة

الوحدة 1 الاقترانات والمقادير الجبرية

1 الصورةُ العامةُ لكثير الحدود

2 قسمة كثيرات الحدود (القسمة الطويلة)

3 تحديد عدد حلول المعادلة التربيعية

4 طرائقُ حلِّ المُعادلات التربيعيَّة

5 طرائق حل المعادلات التكعيبية البسيطة (من الدرجة الثالثة)

6 حلُّ مُعادلات خاصَّة

7 تبسيط المقادير النسبية

0772259503

الوحدة 1 الاقترانات والمقادير الجبرية | أستعد لدراسة الوحدة | الاستاذ حمزة ابو الفول

1 الصورةُ العامةُ لكثير الحدود

2 قسمة كثيرات الحدود (القسمة الطويلة)

3 تحديد عدد حلول المعادلة التربيعية

4 طرائقُ حلِّ المُعادلات التربيعيَّة

A حلُّ المعادلات التربيعية بالتحليل

1 إخراج العامل المشترك الأكبر

2 تحليلُ الفرق بينَ مُرَبَّعَيْن

3 تحليلُ المُرَبَّعات الكاملة

4 الصورة القياسية: $x^2 + bx + c = 0$

5 الصورة القياسية: $ax^2 + bx + c = 0$

B حلُّ المُعادلات التربيعيَّة باستعمال الجذر التربيعيِّ

C حلُّ المعادلة التربيعية بالقانون العام

D حلُّ المُعادلة التربيعيَّة بيانيًّا

E حلُّ المُعادلات التربيعيَّة بإكمال المُرَبَّع

5 طرائق حل المعادلات التكعيبية البسيطة (من الدرجة الثالثة)

تحليلُ مجموع مُكَعَّبَيْن أو تحليلُ الفرق بينَهُما، وحلُّ معادلتهما

6 حلُّ مُعادلات خاصَّة

1 حلُّ المُعادلات بإخراج العامل المُشترَك

2 حلُّ المُعادلات بالتجميع

3 تحليلُ مُعادلات على الصورة التربيعيَّة

7 تبسيط المقادير النسبية

1 تبسيط المقادير النسبية

2 جمع المقادير الجبرية النسبية وطرحها

3 ضرب المقادير الجبرية النسبية

4 قسمةُ المقادير الجبرية النسبية

1 الصورةُ العامةُ لكثير الحدود

الاقتران وحيد الحدِّ بمُتغيِّر واحد

هوَ اقتران قاعدته ناتج ضرب عدد حقيقيٍّ (يسمّى المعامل) في مُتغيِّرٍ أُسُّهُ عددٌ صحيحٌ غيرُ سالب
والجدولُ الآتي يعرضُ بعضَ الأمثلةِ على وحيدِ الحدِّ، وأسِّهِ، ومعاملِهِ:

وحيدُ الحدِّ	9	x	$\sqrt{7}x^3$	$-\frac{1}{2}x^5$	$3x^2$
الأُسُّ	0	1	3	5	2
المعاملُ	9	1	$\sqrt{7}$	$-\frac{1}{2}$	3

الاقتران كثير الحدود (بمتغيِّر واحد)

هوَ اقترانٌ يتكوَّنُ منْ وحيدِ حدٍّ واحدٍ ، أو مجموع عِدَّةِ اقتراناتٍ وحيدةِ الحدِّ بمُتغيِّر واحدٍ
ومنْ أمثلته الاقترانات الآتية

$f(x)=2$

$f(x)=3x-4$

$f(x)=x^2+4x-5$

$g(x)=-3x^2+1.5x^4-3$

الصورةُ العامةُ لكثير الحدود

الصورة العامة لكثير الحدودِ: $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x^1 + a_0$

حيث: n: عددٌ صحيحٌ غيرُ سالبٍ.

$a_n , a_{n-1} , a_{n-2} , \dots, a_1 , a_0$: أعدادٌ حقيقيةٌ تُسمّى معاملاتِ حدودِ كثير الحدود.

المعامل الرئيس

إذا كان $a_n \neq 0$ ، فإنَّه يسمّى **المعامل الرئيس**

درجة كثير الحدود

درجة كثير الحدود (n) هيَ أكبرُ أسٍّ للمُتغيِّر في جميع حدوده

لتحديد درجة كثير الحدود، تنظر إلى جميع حدود كثير الحدود

وتجد الحد الذي يحتوي على المتغير بأعلى أُس

الحد الثابت

ويسمّى a_0 الحدَّ الثابت.

الصورة القياسية

يكــون كثير الحدود مكتوبًا **بالصورةِ القياســيةِ**
إذا كانَتْ حدودُهُ مكتوبةً بترتيب تنازليٍّ منْ أكبرِها درجةً إلى أصغرِ درجةً.

لكتابة كثير الحدود بالصورة القياسية، يتم ترتيب حدوده من

القوة الأعلى إلى القوة الأقل

كثير الحدود الصفري

$(\ f(x) = 0\ )$ هو كثيرُ الحدودِ الذي جميعُ معاملاتِهِ أصفارٌ
ليسَ لهُ درجةٌ، ويُمثِّلُهُ المحورُ x في المستوى الإحداثيِّ.

الوحدة 1 الاقترانات والمقادير الجبرية | أستعد لدراسة الوحدة | الاستاذ حمزة ابو الفول

الصورةُ العامةُ لكثير الحدود

مثال أحـدِّدُ إذا كانَ كل ممّـا يأتـي كثيـرَ حـدودٍ أمْ لا. وفـي حـال كانَ كثيرَ حـدودٍ أكتبـه بالصورة القياسـية ، ثـمَّ أحـدِّدُ المُعامـلَ الرئيـسَ، والدرجةَ، والحـدَّ الثابتَ:

1) $f(x) = -4 + 6x - 2x^3 + x^2$

كثير حدود

الصورة القياسية $f(x) = -2x^3 + x^2 + 6x - 4$

الدرجة 3

المعامل الرئيس -2

الحد الثابت -4

2) $g(x) = 2x^2 + \frac{1}{x}$

ليس كثير حدود لأنَّ أُسَّ المُتغيِّرِ في الحدِّ الثاني هوَ -1

الصورة القياسية

الدرجة

المعامل الرئيس

الحد الثابت

3) $h(x) = \sqrt{x} + 7$

ليس كثير حدود لأنَّ أُسَّ المُتغيِّرِ في الحدِّ الأولِ هوَ $\frac{1}{2}$

الصورة القياسية

الدرجة

المعامل الرئيس

الحد الثابت

4) $k(x) = \frac{3x^2 - 5}{4} + 2x$

كثير حدود

الصورة القياسية $k(x) = \frac{3}{4}x^2 + 2x - \frac{5}{4}$

الدرجة 2

المعامل الرئيس $\frac{3}{4}$

الحد الثابت $-\frac{5}{4}$

لأيِّ عددٍ حقيقيٍّ $a \neq 0$، فإنَّ: $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$. وإذا كانَ a مرفوعًا للقوَّةِ السالبةِ في المقامِ، فإنَّ: $\frac{1}{a^{-n}} = a^n$

2 قسمة كثيرات الحدود (القسمة الطويلة)

- هي طريقة موجودة في الصف العاشر الاساسي
- تُستخدم لقسمة كثير حدود (المقسوم) على كثير حدود آخر (المقسوم عليه).
- يجب كتابة كل من المقسوم والمقسوم عليه بالصورة القياسية (من أعلى قوة إلى أقل قوة) قبل البدء بالقسمة
- خطوات قسمة كثير حدود على آخرَ تشـــبه كثيرًا عمليةَ قسمةِ عددٍ كليٍّ على آخرَ
  إذْ تُتَّبَع الخطوات نفسُها في كلتا الحالتيْن
- يمكِن قسمة كثير الحدودِ $f(x)$ على كثيرِ الحدودِ $h(x) \neq 0$ إذا كانَتْ درجة $f(x)$ أكبرَ منْ أوْ تســاوي درجة $h(x)$

⇐ لقســـمة كثير حدودٍ على آخر

⇐ أكتبُ المقســومَ والمقسومَ عليْه بالصورةِ القياســيةِ

⇐ وإذا كانَتْ إحدى قوى المُتغيِّر في المقسوم مفقودةً، فإنّي أضيفها في موقعِها، وأكتبُ معاملها 0

⇐ ثم قسمة الحد الرئيس (الذي يحتوي على أعلى درجة) في المقسوم على الحد الرئيس في المقسوم عليه

⇐ ثم يتم ضرب الناتج بالكامل المقسوم عليه.

⇐ بعد الضرب، يتم طرح الناتج من الجزء المقابل في المقسوم، أو يمكن عكس إشارات الناتج ثم الجمع.

⇐ تتكرر عملية قســمةِ كثيــراتِ الحدودِ حتى تصبح درجة الباقي أقل من درجة المقسوم عليه

⇐ يكتب ناتج القسمة عادةً بالصورة التالية : **ناتج القسمة + (الباقي / المقسوم عليه)**

⇐ درجـة ناتـج القسـمة **تساوي الفرق** بيـن درجتَـي المقسـوم والمقسـوم عليـه.

⇐ للتحقق من صحة الحل، يمكن استخدام العلاقة : **(ناتج القسمة × المقسوم عليه) + الباقي = المقسوم**

ادرس خطوات القسمة كما في المثال الاول على الصفحة التالية

الوحدة 1 الاقترانات والمقادير الجبرية | أستعد لدراسة الوحدة | الاستاذ حمزة ابو الفول

قسمةُ كثيرات الحدود

مثال أَجد ناتجَ قسمةِ $f(x)=2x^3+24x-15$ على $g(x)=x+5$ ، وباقيَها.

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2x^2-10x+74 \\
\hline
x+5 & 2x^3+0x^2+24x-15 \\
 & (-)\ 2x^3+10x^2 \\
\hline
 & -10x^2+24x \\
 & (-)\ -10x^2-50x \\
\hline
 & 74x-15 \\
 & (-)\ 74x+370 \\
\hline
 & -385
\end{array}
$$

بقسمةِ $2x^3$ على x، وكتابةِ النتيجةِ $2x^2$ فوقَ الحدِّ المشابهِ

بضربِ المقسومِ عليْهِ $(x+5)$ في $2x^2$

بالطرحِ، وإضافة الحدِّ $(24x)$

بقسمةِ $-10x^2$ على x، وكتابةِ النتيجةِ $-10x$ فوقَ الحدِّ المشابهِ، ثمَّ

ضربِ المقسومِ عليْهِ $(x+5)$ في $-10x$

بالطرحِ، وإضافة الحدِّ (-15)

بقسمةِ $74x$ على x، وكتابةِ النتيجةِ 74 فوقَ الحدِّ الثابتِ، وضربِ

المقسومِ عليْهِ $(x+5)$ في 74

بالطرحِ

درجــة باقــي القســمةِ
أقلُّ منْ درجةِ المقسومِ عليهِ.

تنتهي عملية القسمة

إذنْ، ناتجُ القسمةِ هوَ: $2x^2-10x+74$، والباقي -385، ويُمكِنُ كتابةُ ذلكَ كما يأتي:

$$\frac{2x^3+24x-15}{x+5}=2x^2-10x+74+\frac{-385}{x+5},\ x\neq -5$$

أتحقَّقُ منْ صحَّةِ الحلِّ: يُمكِنُ التحققُ منْ صحَّةِ القســمةِ بضربِ الناتجِ فــي المقســوم عليْــهِ، وإضافــة الباقــي فإذا كانَتِ النتيجةُ مســاويةً للمقســوم كانَ الحــلُّ صحيحًا.

(المقســوم) = (الباقــي) + (المقســوم عليْــه)(الناتج)

$$\left(\overset{\text{الناتج}}{\boxed{2x^2-10x+74}}\right)\left(\overset{\text{المقسوم عليه}}{\boxed{x+5}}\right)+\left(\overset{\text{الباقي}}{\boxed{-385}}\right)=2x^3-10x^2+74x+10x^2-50x+370-385$$

$$=2x^3+(-10+10)x^2+(74-50)x-15$$

$$=\left(\overset{\text{المقسوم}}{\boxed{2x^3+24x-15}}\right)\ \checkmark$$

مراجعة قسمة كثير حدود على كثير حدود آخر باستعمال القسمة الطويلة

مثال استعمل القسمة الطويلة لإيجاد ناتج قسمة $(x^3 + 2x^2 - 11x - 12)$ على $(x + 4)$ كما يأتي:

قبل البدء بقسمة كثيرات الحدود، أكتب المقسوم والمقسوم عليه بالصورة القياسية

ناتج القسمة ← $x^2 - 2x - 3$

المقسوم عليه ← $x + 4$

المقسوم ← $x^3 + 2x^2 - 11x - 12$

$$
\begin{array}{rl}
 & x^2 - 2x - 3 \\
x + 4 \,\big) & x^3 + 2x^2 - 11x - 12 \\
 & \underline{x^3 + 4x^2} \\
 & -2x^2 - 11x \\
 & \underline{-2x^2 - 8x} \\
 & -3x - 12 \\
 & \underline{-3x - 12} \\
 & 0
\end{array}
$$

بالضرب في x^2
بالطرح
بالضرب في $-2x$
بالطرح
بالضرب في -3
بالطرح

باقي القسمة ← 0

تتوقَّف عملية قسمة كثيرات الحدود عندما تصبح درجة باقي القسمة أقل من درجة المقسوم عليه.

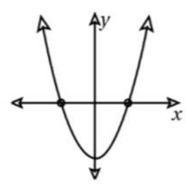
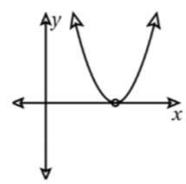
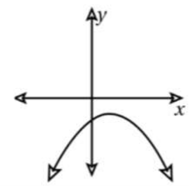
3 تحديد عدد حلول المعادلة التربيعية

يمكن تحديد عددِ الحُلــولِ الحقيقيَّةِ للمُعادلةِ التربيعيَّةِ قبلَ حلِّها باســتعمالِ **المُمَيِّز** وَهُوَ المقدارُ التربيعيُّ الذي يقعُ أسفلَ الجذرِ التربيعيِّ في القانونِ العامِّ $(b^2 - 4ac)$، وَيُرمَزُ إليهِ بالرَّمزِ Δ.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

المُميِّزُ ← $b^2 - 4ac$

مُمَيِّزُ المُعادلةِ التربيعيَّةِ $ax^2 + bx + c = 0$ هُوَ $\boxed{\Delta = b^2 - 4ac}$

إشارةُ المُمَيِّزِ Δ	$\Delta > 0$ موجبٌ	$\Delta = 0$ صفرٌ	$\Delta < 0$ سالبٌ
عددُ الحُلولِ	حلّانِ حقيقيّانِ مختلفانِ	حلٌّ حقيقيٌّ واحدٌ	لا توجدُ حُلولٌ حقيقيَّةٌ
مثالٌ بيانِيٌّ			

مثال أحدّدُ عددَ الحُلولِ الحقيقيَّةِ لكلِّ مُعادلةٍ تربيعيَّةٍ ممّا يأتي باستعمالِ المُمَيِّزِ:

1 $x^2 - 4x + 3 = 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4(1)(3) = 4$$

بما أنَّ $\Delta > 0$، إذنْ للمُعادلةِ حلّانِ حقيقيّانِ مختلفانِ.

2 $x^2 - 2x + 1 = 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4(1)(1) = 0$$

بما أنَّ $\Delta = 0$، إذنْ للمُعادلةِ حلٌّ حقيقيٌّ واحدٌ.

3 $x^2 - x + 1 = 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4(1)(1) = -3$$

بما أنَّ $\Delta < 0$، إذنْ ليسَ للمُعادلةِ أيُّ حلٍّ حقيقيٍّ.

4 طرائقُ حلِّ المُعادلات التربيعيَّة

المُعادلــةُ التربيعيَّــةُ

معادلــة يمكــن كتابتهــا علــى الصــورة: $ax^2 + bx + c = 0$، حيث $a \neq 0$ والتي تســمّى الصورة القياسيَّةَ للمعادلةِ التربيعيَّة

لكل مُعادلةٍ تربيعيَّة اقتران تربيعيٌّ مرتبط بها يمكن الحصول عليهِ بوضع $f(x)$ بدلًا من العدد 0

الاقترانُ التربيعيُّ المُرتبطُ بالمُعادلةِ	المُعادلةُ التربيعيَّةُ
$f(x) = 2x^2 - 3x + 8$	$2x^2 - 3x + 8 = 0$

حلُّ المُعادلة التربيعيَّة

يمكنُ حلُّ المعادلةِ التربيعيَّةِ بتحديدِ قِيَم x التي يقطع عندها منحنى الاقترانِ التربيعيِّ المرتبط بالمُعادلــةِ المحورَ x وتســمّى تلكَ القِيم **جذور المعادلــة** أو **أصفارَ الاقتران**

المُعادلـةُ التربيعيَّـةُ 4 طرائقُ حلِّ المُعادلات التربيعيَّة

A حلُّ المعادلات التربيعية بالتحليل

لحل المُعادلاتِ التربيعيَّةِ بالتحليلِ، أتّبع الخطوات الآتيةَ:

1 أنقل جميع الحدود إلى الطرف الأيسر منَ المُعادلـة، وأترك الصِّفرَ في الطرف الأيمن.

2 أحلّلُ المقدارَ الجبريَّ في الطرفِ الأيسرِ من المُعادلةِ على صورة حاصل ضرب عامليْن.

3 أُسـاوي كلَّ عامل بالصِّفر (خاصيَّة الضَّرب الصِّفريِّ)، وَأَحُلُّ كلَّ معادلة خطيَّة.

4 حلول المُعادلةِ التربيعيَّة هي حلول المعادلتين الخطيّتَين.

خاصيَّة الضَّربِ الصِّفريِّ إذا كانَ حاصلُ ضربِ عددَيْنِ حقيقيَّيْنِ يُسـاوي صِفرًا فإنَّ أحدَهُما على الأقلِّ يجبُ أنْ يكونَ صِفرًا.

أي أن إذا كانَ a وَ b عددَيْنِ حقيقيَّيْنِ، وكانَ $ab = 0$، فإن: $a = 0$ or $b = 0$

التحليل الكامل للمقدار الجبري هـو كتابـة مقـدارٍ جبـريٍّ بالصـورةِ التحليليَّةِ مثل:

- $x^2 + 5x = x(x+5)$

- $x^2 + 3x + 2 = (x+2)(x+1)$

تستعمل خاصيَّة الضَّرب الصِّفريِّ والتحليل لحلِّ المُعادلات التربيعيَّةِ فإذا كان أحد طرفيْ معادلـةٍ مكتوبًا بالصورةِ التحليليَّـة والطرف الآخر هو 0 فيمكن اسـتعمال خاصيَّةِ الضرَّب الصِّفريِّ لحلهاً.

الوحدة 1 الاقترانات والمقادير الجبرية | أستعد لدراسة الوحدة | الاستاذ حمزة ابو الفول

المُعادلــةُ التربيعيَّــةُ

A حلُّ المعادلات التربيعية بالتحليل

1 حلُّ المعادلات التربيعية بالتحليل: إخراج العامل المشترك الأكبر

مثال أَحُلُّ كُلًّا مِنَ المُعادلاتِ الآتيةِ:

1 $x^2 = x$

$\Rightarrow x^2 = x$

$\Rightarrow x^2 + x = 0$

$\Rightarrow x(x+1) = 0$

$\Rightarrow x = 0$

or $\Rightarrow x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$

إذنْ، الجذرانِ هُما: $0, -1$

2 $x^2 = -5x$

$\Rightarrow x^2 = -5x$

$\Rightarrow x^2 + 5x = 0$

$\Rightarrow x(x+5) = 0$

$\Rightarrow x = 0$

or $\Rightarrow x + 5 = 0 \Rightarrow x = -5$

إذنْ، الجذرانِ هُما: $0, -5$

3 $6x^2 = 20x$

$\Rightarrow 6x^2 = 20x$

$\Rightarrow 6x^2 - 20x = 0$

$\Rightarrow 2x(3x - 10) = 0$

$\Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = 0$

or $\Rightarrow 3x - 10 = 0 \Rightarrow x = \frac{10}{3}$

إذنْ، الجذرانِ هُما: $0, \frac{10}{3}$

4 $9x^2 = 72x$

$\Rightarrow 9x^2 = 72x$

$\Rightarrow 9x^2 - 72x = 0$

$\Rightarrow 9x(x - 8) = 0$

$\Rightarrow 9x = 0 \Rightarrow x = 0$

or $\Rightarrow x - 8 = 0 \Rightarrow x = 8$

إذنْ، الجذرانِ هُما: $0, 8$

المُعادلــةُ التربيعيَّــةُ

A حلُّ المعادلات التربيعية بالتحليل

2 تحليلُ الفرق بينَ مُرَبَّعَيْن

يمكنُ استعمالُ خاصيَّةِ الضَّرب الصِّفريِّ والتحليل لحلِّ مُعادلاتٍ تربيعيَّةٍ تتضمَّنُ فرقًا بينَ مربّعَين.

الفرقُ بَيْنَ مربعَيْ حدَّينِ يساوي ناتجَ ضربِ مجموعِ الحدَّينِ في الفرقِ بينَهُما.

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

مثال أَحُلُّ كُلًّا مِنَ المُعادلاتِ الآتيةِ:

1 $x^2 - 49 = 0$

$\Rightarrow (x-7)(x+7) = 0$

$\Rightarrow x - 7 = 0 \Rightarrow x = 7$

or $\Rightarrow x + 7 = 0 \Rightarrow x = -7$

إذنْ، الجذرانِ هُما: $-7, 7$

2 $x^2 - 36 = 0$

$\Rightarrow (x-6)(x+6) = 0$

$\Rightarrow x - 6 = 0 \Rightarrow x = 6$

or $\Rightarrow x + 6 = 0 \Rightarrow x = -6$

إذنْ، الجذرانِ هُما: $-6, 6$

3 $2x^2 - 50 = 0$

$\Rightarrow x^2 - 25 = 0$

$\Rightarrow (x-5)(x+5) = 0$

$\Rightarrow x-5 = 0 \Rightarrow x = 5$

or $\Rightarrow x+5 = 0 \Rightarrow x = -5$

إذنْ، الجذرانِ هُما: $5, -5$

4 $8x^2 - 50 = 0$

$\Rightarrow 4x^2 - 25 = 0$

$\Rightarrow (2x-5)(2x+5) = 0$

$\Rightarrow 2x-5 = 0 \Rightarrow x = \frac{5}{2}$

or $\Rightarrow 2x+5 = 0 \Rightarrow x = -\frac{5}{2}$

إذنْ، الجذرانِ هُما: $\frac{5}{2}, -\frac{5}{2}$

المُعادلــةُ التربيعيَّــةُ

A حلُّ المعادلات التربيعية بالتحليل

2 تحليلُ الفرق بينَ مُرَبَّعَيْن

يمكنُ استعمالُ خاصيَّةِ الضَّرب الصِّفريِّ والتحليل لحلِّ مُعادلاتٍ تربيعيَّةٍ تتضمَّنُ فرقًا بينَ مربّعَين.

الفرقُ بَيْنَ مربعَيْ حدَّينِ يساوي ناتجَ ضربِ مجموعِ الحدَّينِ في الفرقِ بينَهُما.

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

مثال أَحُلُّ كُلًّا مِنَ المُعادلاتِ الآتيةِ:

1 أحل المعادلة التالية : $(x-1)^2 - 49 = 0$

$$\Rightarrow \big((x-1) - 7\big)\big((x-1) + 7\big) = 0$$

$$\Rightarrow (x-8)(x+6) = 0$$

$$\Rightarrow x-8 = 0 \Rightarrow x = 8$$

$$\text{or} \Rightarrow x+6 = 0 \Rightarrow x = -6$$

إذنْ، الجذرانِ هُما: $8 , -6$

2 أحل المعادلة التالية: $(x-2)^2 - (x+3)^2 = 0$

$$\Rightarrow \big((x-2) - (x+3)\big)\big((x-2) + (x+3)\big) = 0$$

$$\Rightarrow (x-2-x-3)(x-2+x+3)$$

$$\Rightarrow (-5)(2x+1) = 0$$

$$\Rightarrow 2x+1 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1}{2}$$

إذنْ ، الجذر هو $-\frac{1}{2}$

---

3 $y^4 - 1 = 0$

$$\Rightarrow (y^2)^2 - (1)^2 = 0$$

$$\Rightarrow (y^2-1)(y^2+1) = 0$$

$$\Rightarrow (y-1)(y+1)(y^2+1) = 0$$

$$\Rightarrow y-1 = 0 \Rightarrow y = 1$$

$$\text{or} \Rightarrow y+1 = 0 \Rightarrow y = -1$$

$$\text{or} \Rightarrow (y^2+1) = 0 \Rightarrow y^2 = -1$$

لا يوجد حل

إذنْ، الجذرانِ هُما: $1 , -1$

المُعادلـةُ التربيعيَّـةُ A حلُّ المعادلات التربيعية بالتحليل

3 تحليلُ المُرَبَّعات الكاملة

المربع الكامل هـو مقدار جبري على الصورة $(a+b)^2$ لأَنَّهُ يسـاوي ناتجَ ضربِ $(a+b)$ في نفسه أي $(a+b)^2$

$(a-b)^2 = (a-b)(a-b)$ ناتج ضرب

$= a^2 - ab - ab + b^2$

$= a^2 - 2ab + b^2$

يسمى مربع كامل ثلاثـي

$(a+b)^2 = (a+b)(a+b)$ ناتج ضرب

$= a^2 + ab + ab + b^2$

$= a^2 + 2ab + b^2$

يسمى مربع كامل ثلاثـي

يكون المقدار الثلاثي $a^2 + 2ab + b^2$ مربع كامل ثلاثـي إذا حققَ الشروطَ الثلاثةَ الآتيةَ:

1. الحد الأول مربع كامل
2. الحدُّ الأخيرُ مربع كامل
3. الحد الأوسط يساوي ضعف ناتج ضرب الجذر التربيعيِّ لكلٍّ مِنَ الحدّينِ: الأول، والأخير

تحليلُ المربع الكامل الثلاثيِّ الحدود

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2 = (a+b)(a+b)$$
$$a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2 = (a-b)(a-b)$$

مثال أحددُ ما إذا كانَتْ ثلاثيّةِ حدود($x^2 + 6x + 9$) تمثلُ مربعًا كاملًا أَمْ لا، وإذا كانَتْ تمثلُهُ فأحللُها:

- هلِ الحدُّ الأولُ مربعٌ كاملٌ؟ نعم
- هلِ الحدُّ الأوسطُ يساوي $3 \times x \times 2$؟ نعم؛ لأنَّ $6x = 2(x)(3)$
- هل الحدُّ الأخيرُ مربعٌ كاملٌ؟ نعم؛ لأنَّ $9 = 3^2$

بما أنّ الشروطَ جميعَها متحققةٌ، فإنَّ $x^2 + 6x + 9$ تشكلُ مربعًا كاملًا.

$$x^2 + 6x + 9 = (x+3)(x+3) = (x+3)^2$$

مثال أحددُ ما إذا كانَتْ ثلاثيّةِ حدود($x^2 + 2x + 16$) تمثلُ مربعًا كاملًا أَمْ لا، وإذا كانَتْ تمثلُهُ فأحللُها:

- هلِ الحدُّ الأولُ مربعٌ كاملٌ؟ نعم
- هلِ الحدُّ الأوسطُ يساوي $4 \times x \times 2$؟ لا؛ لأنَّ $2x \neq 2(x)(4)$
- هل الحدُّ الأخيرُ مربعٌ كاملٌ؟ نعم؛ لأنَّ $16 = 4^2$

بما أنَّ الشرطَ الثانيَ غيرُ متحققٍ، فإنَّ $x^2 + 2x + 16$ ليسَتْ مربعًا كاملًا، ولا يمكنُ تحليلُهُ.

المُعادلـةُ التربيعيَّـةُ A حلُّ المعادلات التربيعية بالتحليل

3 تحليلُ المُرَبَّعات الكاملة

مثال أَحُلُّ كُلًّا مِنَ المُعادلاتِ الآتيةِ:

1 $x^2+2x+1=0$

$\Longrightarrow \; x^2+2(x)(1)+1^2=0$

$\Longrightarrow \; (x+1)(x+1)=0$

$\Longrightarrow \; x+1=0 \Rightarrow x=-1$

إذنْ، للمُعادلةِ جذرٌ واحد، هو: -1

2 $x^2+4x+4=0$

$\Longrightarrow \; x^2+2(x)(2)+2^2=0$

$\Longrightarrow \; (x+2)(x+2)=0$

$\Longrightarrow \; x+2=0 \Rightarrow x=-2$

إذنْ، للمُعادلةِ جذرٌ واحد، هو: -2

---

3 $x^2-8x+16=0$

$\Longrightarrow \; x^2+2(x)(4)+4^2=0$

$\Longrightarrow \; (x-4)(x-4)=0$

$\Longrightarrow \; x-4=0 \Rightarrow x=4$

إذنْ، للمُعادلةِ جذرٌ واحد، هو: 4

4 $9x^2+6x+1=0$

$\Longrightarrow \; (3x)^2+2(3x)(1)+1^2=0$

$\Longrightarrow \; (3x+1)(3x+1)=0$

$\Longrightarrow \; 3x+1=0 \Rightarrow x=-\frac{1}{3}$

إذنْ، للمُعادلةِ جذرٌ واحدٌ، هُوَ: $-\frac{1}{3}$

المُعادلــةُ التربيعيَّــةُ

A حلُّ المعادلات التربيعية بالتحليل

4 الصورة القياسية: $x^2 + bx + c = 0$

إذا كانَ المقدارُ الجبريُّ $x^2 + bx + c$ قابلًا للتحليلِ، فيمكنُ أيضًا اســتعمالُ خاصيَّةِ الضَّربِ الصِّفريِّ لحلِّ المُعادلةِ التربيعيَّةِ المكتوبةِ بالصورةِ القياسيَّةِ $x^2 + bx + c = 0$

مثال أَحُلُّ كُلًّا مِنَ المُعادلاتِ الآتيةِ:

1 $x^2 + 6x + 8 = 0$

$\Rightarrow x^2 + 6x + 8 = 0$

$\Rightarrow (x + 4)(x + 2) = 0$

$\Rightarrow x + 4 = 0 \Rightarrow x = -4$

or $\Rightarrow x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$

إذنْ، الجذرانِ هُما: -2, -4

2 $x^2 - 8x + 12 = 0$

$\Rightarrow x^2 - 8x + 12 = 0$

$\Rightarrow (x - 6)(x - 2) = 0$

$\Rightarrow x - 6 = 0 \Rightarrow x = 6$

or $\Rightarrow x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$

إذنْ، الجذرانِ هُما: $6, 2$

---

3 $x^2 + 5x = 6$

$\Rightarrow x^2 + 5x - 6 = 0$

$\Rightarrow (x - 1)(x + 6) = 0$

$\Rightarrow x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$

or $\Rightarrow x + 6 = 0 \Rightarrow x = -6$

إذنْ، الجذرانِ هُما: $1, -6$

4 $x^2 - 2x - 24 = 0$

$\Rightarrow x^2 - 2x + 24 = 0$

$\Rightarrow (x - 6)(x + 4) = 0$

$\Rightarrow x - 6 = 0 \Rightarrow x = 6$

or $\Rightarrow x + 4 = 0 \Rightarrow x = -4$

إذن، الجذرانِ هُما: $6, -4$

المُعادلـةُ التربيعيَّـةُ

A حلُّ المعادلات التربيعية بالتحليل

5 الصورة القياسية: $ax^2 + bx + c = 0$

لتحليل ثلاثِـيِّ الحدودِ $ax^2 + bx + c$

⇐ أَجِدُ عددَينِ صحيحَينِ m وَ n حاصلُ ضربِهما يُساوي (ac) ومجموعُهُما يُساوي b

⇐ ثمَّ أكتبُ $ax^2 + bx + c$ على الصورةِ $ax^2 + mx + nx + c$

⇐ ثمَّ أحلِّلُ بتجميعِ الحدودِ.

⇐ لتسهيلِ عمليَّةِ التحليلِ مِنَ الأفضلِ أنْ أجعلَ معاملَ x^2 موجبًا.

يمكنُ حلُّ المُعادلاتِ التربيعيَّةِ على الصورةِ $ax^2 + bx + c = 0$ بالتحليلِ أوَّلًا، ثمَّ استعمالِ خاصيَّةِ الضَّربِ الصِّفريِّ.

مثال أَحُلُّ كُلًّا مِنَ المُعادلاتِ الآتيةِ:

1 $3x^2 - 4x + 1 = 0$

$\Longrightarrow 3x^2 - 4x + 1 = 0$

$\Longrightarrow (3x-1)(x-1) = 0$

$\Longrightarrow 3x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$

or $\Longrightarrow x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$

إذنْ، الجذرانِ هُما: $1 , \frac{1}{3}$

2 $30x^2 - 5x = 5$

$\Longrightarrow 30x^2 - 5x = 5$

$\Longrightarrow 30x^2 - 5x - 5 = 0$

$\Longrightarrow 6x^2 - x - 1 = 0$

$\Longrightarrow (3x+1)(2x-1) = 0$

$\Longrightarrow 3x+1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{3}$

or $\Longrightarrow 2x-1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

إذنْ، الجذرانِ هُما: $\frac{1}{2} , -\frac{1}{3}$

المُعادلــةُ التربيعيَّــةُ

B حلُّ المُعادلاتِ التربيعيَّة باستعمال الجذر التربيعيِّ

يمكنُ حلُّ المُعادلاتِ على الصورةِ $x^2 = c$؛ حيثُ $c \geq 0$، باستعمالِ تعريفِ الجــذرِ التربيعيِّ للعددِ الموجب؛ حيث: $x = \pm\sqrt{c}$

أمّا إذا لمْ تكُن المُعادلةُ التربيعيَّةُ مكتوبةً على الصورةِ $x^2 = c$

فأســتعمل العملياتِ الجبريَّةَ لكتابــةِ x^2 وحدَهُ في أحدِ طرفي المُعادلة أوَّلًا، إنْ أمكَنْ

ثمَّ أَحُلُّ المُعادلةَ بأخذِ الجذرِ التربيعيِّ لكلِّ طرفٍ.

مثال أَحُلُّ كُلًّا مِنَ المُعادلاتِ الآتيةِ:

1 $x^2 - 9 = 0$

$\Rightarrow x^2 - 9 = 0$

$\Rightarrow x^2 = 9$

$\Rightarrow x = \pm\sqrt{9}$

$\Rightarrow x = \pm 3$

إذنْ، الجذرانِ هُما: $3, -3$

2 $3x^2 - 27 = 0$

$\Rightarrow 3x^2 - 27 = 0$

$\Rightarrow 3x^2 = 27$

$\Rightarrow x^2 = 9$

$\Rightarrow x = \pm\sqrt{9}$

$\Rightarrow x = \pm 3$

إذنْ، الجذرانِ هُما: $3, -3$

3 $(x+1)^2 = 64$

$\Rightarrow (x+1)^2 = 54$

$\Rightarrow x + 1 = \pm\sqrt{64}$

$\Rightarrow x + 1 = \pm 8$

$\Rightarrow x = -1 \pm 8$

$\Rightarrow x = -1 + 8 \Rightarrow x = 7$

or $\Rightarrow x = -1 - 8 \Rightarrow x = -9$

إذنْ، الجذرانِ هُما: $7, -9$

4 $(x+4)^2 = 49$

$\Rightarrow (x+4)^2 = 49$

$\Rightarrow x + 4 = \pm\sqrt{49}$

$\Rightarrow x + 4 = \pm 7$

$\Rightarrow x = -4 \pm 7$

$\Rightarrow x = -4 + 7 \Rightarrow x = 3$

or $\Rightarrow x = -4 - 7 \Rightarrow x = -11$

إذنْ، الجذرانِ هُما: $3, -11$

المُعادلــةُ التربيعيّــةُ

c حلُّ المعادلة التربيعية بالقانون العام

اذا واجهت صعوبة في التحليل فالمنقذ هو المميز والقانون العام

يمكنُ حلُّ المُعادلةِ التربيعيَّةِ $ax^2 + bx + c = 0$ بالقانونِ العامِّ على النَّحوِ الآتي:

- اذا كان $a \neq 0$ و $b^2 - 4ac > 0$ فإن للمُعادلةِ حلّانِ حقيقيّانِ مختلفانِ $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
- واذا كان $a \neq 0$ و $b^2 - 4ac = 0$ فإن للمُعادلةِ حلٌّ حقيقيٌّ واحدٌ $x = \dfrac{-b}{2a}$
- واذا كان $a \neq 0$ و $b^2 - 4ac < 0$ فإنه ليسَ للمُعادلةِ أيُّ حلٍّ حقيقيٍّ.

مثال أَحُلُّ كُلًّا مِنَ المُعادلاتِ الآتيةِ بالقانونِ العامِّ

1 $2x^2 - 3x = 5$

أكتبُ المُعادلةَ بالصورةِ القياسيَّةِ

$\Rightarrow 2x^2 - 3x - 5 = 0$

أجد قِيَم المعاملات:

$\Rightarrow a = 2, b = -3, c = -5$

$\Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 49$

بما أنَّ $\Delta > 0$، إذنْ للمُعادلةِ حلّانِ حقيقيّانِ مختلفانِ.

أطبِّقُ القانونَ العامَّ.

$$\Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$= \frac{-(-3) \pm \sqrt{49}}{2(2)}$$

$$= \frac{3 \pm \sqrt{49}}{4} = \frac{3 \pm 7}{4}$$

$$\Rightarrow x = \frac{3-7}{4} \Rightarrow x = -1$$

$$\text{or} \Rightarrow x = \frac{3+7}{4} \Rightarrow x = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$$

إذنْ، جذرا المُعادلةِ هُما $-1, \frac{5}{2}$

2 $x^2 + 4x - 12 = 0$

أجد قِيَم المعاملات:

$\Rightarrow a = 1, b = 4, c = -12$

$\Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 64$

بما أنَّ $\Delta > 0$، إذنْ للمُعادلةِ حلّانِ حقيقيّانِ مختلفانِ.

أطبِّقُ القانونَ العامَّ.

$$\Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$= \frac{-4 \pm \sqrt{64}}{2}$$

$$\Rightarrow x = \frac{-4-8}{2} = -6$$

$$\Rightarrow x = \frac{-4+8}{2} = 2$$

إذن، حلّا المعادلة هما: $x = -6, x = 2$

المُعادلــةُ التربيعيَّــةُ

c حلُّ المعادلة التربيعية بالقانون العام

مثال أَحُلُّ كُلًّا مِنَ المُعادلاتِ الآتيةِ بالقانونِ العامِّ

2 $\boldsymbol{x^2 - 2x + 1 = 0}$

$\Delta = b^2 - 4ac \;= (-2)^2 - 4(1)(1) \;= 0$

بما أنَّ $\Delta = 0$، إذنْ للمُعادلةِ حلٌّ حقيقيٌّ واحدٌ.

$x = \dfrac{-b}{2a} \;=\; \dfrac{-(-2)}{2} \;=\; 1$

3 $\boldsymbol{x^2 - x + 1 = 0}$

$\Delta = b^2 - 4ac \;= (-1)^2 - 4(1)(1) = -3$

بما أنَّ $\Delta < 0$، إذنْ ليسَ للمُعادلةِ أيُّ حلٍّ حقيقيٍّ.

1 $2x^2 - 15x + 19 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac \;= (-15)^2 - 4(2)(19) = 73$

بما أنَّ $\Delta > 0$، إذنْ للمُعادلةِ حلّانِ حقيقيّانِ مختلفانِ.

$x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \;= \dfrac{-(-15) \pm \sqrt{73}}{2(2)}$

$= \dfrac{15 \pm \sqrt{73}}{4}$

$x = \dfrac{15 - \sqrt{73}}{4}$ or $x = \dfrac{15 + \sqrt{73}}{4}$

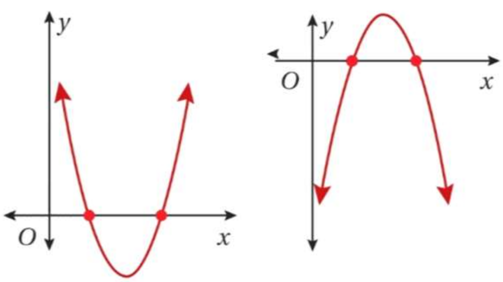
إذنْ، جذرا المُعادلةِ $\dfrac{15 + \sqrt{73}}{4}, \dfrac{15 - \sqrt{73}}{4}$

D حلُّ المُعادلة التربيعيَّة بيانيًّا

قِيَمَ x التي يقطع عندها منحنى الاقترانِ المُرتبطِ المحورَ x إن وجِدَتْ هي أصفارُ الاقترانِ المُرتبطِ، التي تُعَدُّ حلولَ المُعادلةِ.

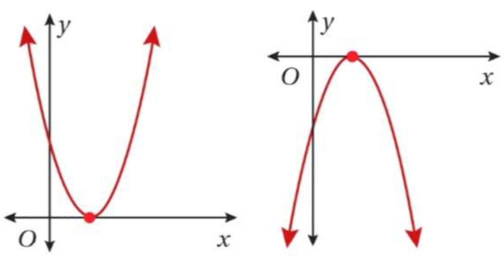
حلُّ المُعادلة التربيعيَّة بيانيًّا: حلّان حقيقيانِ مختلفانِ

يكونُ للمُعادلةِ التربيعيَّةِ حلّانِ حقيقيانِ، إذا قطعَ مُنحنى الاقترانِ التربيعيِّ المُرتبطِ المحورَ x في نقطتَيْنِ، كما في الشكلِ المُجاورِ.



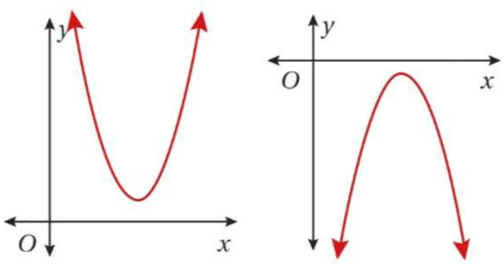
حلُّ المُعادلة التربيعيَّة بيانيًّا: حلٌّ حقيقيٌّ واحدٌ.

يكونُ للمُعادلةِ التربيعيَّةِ حلٌّ حقيقيٌّ واحدٌ إذا قطعَ مُنحنى الاقترانِ التربيعيِّ المُرتبطِ المحورَ x في نقطةٍ واحدةٍ فقط، كما في الشكلِ المُجاورِ.



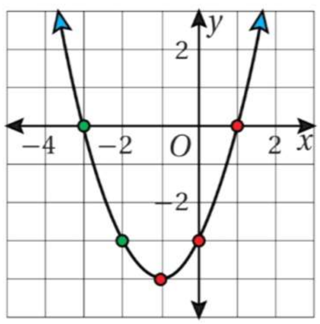
حلُّ المُعادلة التربيعيَّة بيانيًّا: لا توجدُ حلولٌ حقيقيَّةٌ.

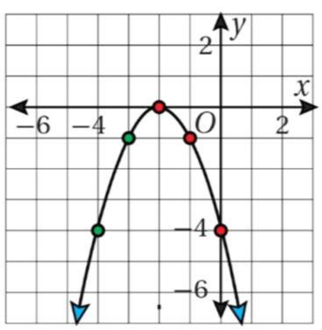
لا يكونُ للمُعادلةِ التربيعيَّةِ حلٌّ حقيقيٌّ إذا لمْ يقطَعْ مُنحنى الاقترانِ التربيعيِّ المُرتبطِ بالمُعادلةِ التربيعيَّةِ المحورَ x، كما في الشكلِ المُجاورِ.



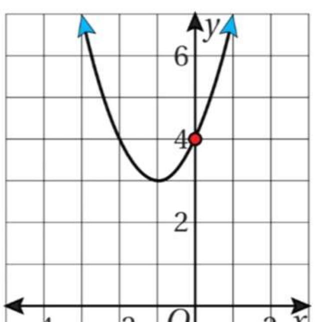
D حلُّ المُعادلة التربيعيَّة بيانيًّا

قِيَمَ x التـــي يقطع عندها منحنـــى الاقترانِ المُرتبـــطِ المحورَ x إن وجِدَتْ هي أصفار الاقترانِ المُرتبطِ، التي تعَدُّ حلولَ المُعادلة





HAMZEH ABU ALFOUL
ALMALATH
0772259503



HAMZEH ABU ALFOUL
ALMALATH
0772259503

E حلُّ المُعادلات التربيعيَّة بإكمال المُرَبَّع

لإكمالِ مُرَبَّعِ أيِّ مقدارٍ تربيعيٍّ على الصورةِ $x^2 + bx$، أتّبعُ الخُطواتِ الآتيةَ:

أجد نصف b $\Longrightarrow$ أُربّع الناتجَ $\Longrightarrow$ أضيف الناتجَ إلى $x^2 + bx$

$$x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2$$

مثال أجعلُ كلَّ مقدارٍ ممّا يأتي مُرَبَّعًا كاملًا، ثمَّ أحلّلُ المُرَبَّعَ الكاملَ ثُلاثيَّ الحدودِ الناتجَ:

1 $x^2 + 12x$

أجد نصف b $\Longrightarrow$ أُربّع الناتجَ $\Longrightarrow$ أضيف الناتجَ إلى $x^2 + bx$

$$\frac{12}{2} = 6 \Longrightarrow 6^2 = 36 \Longrightarrow x^2 + 12x + 36 \Longrightarrow x^2 + 12x + 36 = (x+6)^2$$

2 $x^2 - 14x$

أجد نصف b $\Longrightarrow$ أُربّع الناتجَ $\Longrightarrow$ أضيف الناتجَ إلى $x^2 + bx$

$$\frac{14}{2} = 7 \Longrightarrow 7^2 = 49 \Longrightarrow x^2 - 14x + 49 \Longrightarrow x^2 - 14x + 49 = (x-7)^2$$

حلُّ المُعادلات التربيعيَّة على الصورة $x^2 + bx + c = 0$ بإكمالِ المُرَبَّعِ

يمكِنني استعمال إكمالِ المُرَبَّع لحلِّ أيِّ مُعادلةٍ تربيعيَّةٍ على الصورةِ $x^2 + bx + c = 0$
وذلكَ يتطلَّب فصل المقدارِ $x^2 + bx$ في الطرفِ الأيسرِ أوَّلًا، ثمَّ أكمِل المُرَبَّعَ.

مثال أَحُلُّ كُلًّا مِنَ المُعادلاتِ الآتيةِ بإكمالِ المُرَبَّعِ

1 $x^2 + 4x - 12 = 0$

$$x^2 + 4x - 12 = 0 \Longrightarrow x^2 + 4x = 12 \Longrightarrow x^2 + 4x + 4 = 12 + 4$$

$$\Longrightarrow (x+2)^2 = 16 \Longrightarrow x + 2 = \pm 4 \Longrightarrow x = -2 \pm 4$$

$$\Longrightarrow x = -2 + 4 \Rightarrow x = 2$$

$$\text{or } x = -2 - 4 \Rightarrow x = -6$$

إذنْ، جذرا المُعادلةِ 2, -6

E حلُّ المُعادلات التربيعيَّة بإكمال المُرَبَّع

حلُّ المُعادلات التربيعيَّة علَى الصورة $x^2 + bx + c = 0$ بإكمالِ المُرَبَّعِ

يمكِنني استعمال إكمالِ المُرَبَّع لحلِّ أيِّ مُعادلةٍ تربيعيَّةٍ على الصورةِ $x^2 + bx + c = 0$

وذلكَ يتطلَّب فصل المقدارِ $x^2 + bx$ في الطرفِ الأيسرِ أوَّلًا، ثمَّ أكمِل المُرَبَّعَ.

مثال أَحُلُّ كُلًّا مِنَ المُعادلاتِ الآتيةِ بإكمالِ المُرَبَّعِ

1 $x^2 + 4x - 12 = 0$

$$x^2 + 4x - 12 = 0 \Longrightarrow x^2 + 4x = 12 \Longrightarrow x^2 + 4x + 4 = 12 + 4$$

$$\Longrightarrow (x+2)^2 = 16 \Longrightarrow x + 2 = \pm 4 \Longrightarrow x = -2 \pm 4$$

$$\Longrightarrow x = -2+4 \Rightarrow x = 2$$

$$\text{or } x = -2 - 4 \Rightarrow x = -6$$

إذنْ، جذرا المُعادلةِ 2 ,6−

2 $x^2 + 4x - 12 = 0$

$$x^2 - 3x - 1 = 0 \Longrightarrow x^2 - 3x = 1 \Longrightarrow x^2 - 3x + \frac{9}{4} = 1 + \frac{9}{4}$$

$$\Longrightarrow (x - \frac{3}{2})^2 = \frac{13}{4} \Longrightarrow x - \frac{3}{2} = \pm \frac{\sqrt{13}}{2} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow x = \frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{13}}{2}$$

$$\Longrightarrow x = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2} \Rightarrow x = \frac{3 + \sqrt{13}}{2} \Rightarrow x \approx 3.3$$

$$\text{or } x = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{13}}{2} \Rightarrow x = \frac{3 - \sqrt{13}}{2} \Rightarrow x \approx -0.3$$

إذنْ، جذرا المُعادلةِ -0.3 ، 0.3

E حلُّ المُعادلات التربيعيَّة بإكمال المُرَبَّع

حلُّ المُعادلات التربيعيَّة على الصورة $ax^2 + bx + c = 0$ بإكمالِ المُرَبَّعِ.

لحلِّ المُعادلةِ التربيعيَّةِ على الصورةِ $ax^2 + bx + c = 0$؛ حيثُ $a \neq 1$، أقسِمُ كلَّ حدٍّ في المُعادلةِ على a، ثمَّ أفصِلُ الحدَّيْنِ اللذَيْنِ يحتويانِ على x^2 و x في الطرفِ الأيسرِ أوَّلًا، ثمَّ أُكمِلُ المُرَبَّعَ.

مثال أَحُلُّ كُلًّا مِنَ المُعادلاتِ الآتيةِ بإكمالِ المُرَبَّعِ

1) $2x^2 - 12x + 8 = 0$

$$2x^2 - 12x + 8 = 0 \Longrightarrow x^2 - 6x + 4 = 0 \Longrightarrow x^2 - 6x = -4$$

$$\Longrightarrow x^2 - 6x + 9 = -4 + 9 \Longrightarrow (x-3)^2 = 5$$

$$\Longrightarrow x - 3 = \pm\sqrt{5} \Longrightarrow x = 3 \pm \sqrt{5}$$

$$\Longrightarrow x = 3 + \sqrt{5} \text{ or } x = 3 - \sqrt{5}$$

إذنْ، جذرا المُعادلةِ $3 + \sqrt{5}$, $3 - \sqrt{5}$

2) $3x^2 + 6x + 15 = 0$

$$3x^2 + 6x + 15 = 0 \Longrightarrow x^2 + 2x + 5 = 0 \Longrightarrow x^2 + 2x = -5$$

$$\Longrightarrow x^2 + 2x + 1 = -5 \Longrightarrow (x+1)^2 = -4$$

بما أنَّهُ لا توجدُ أعدادٌ حقيقيَّةٌ مُرَبَّعاتُها سالبةٌ، فالمُعادلةُ ليسَ لها حُلولٌ حقيقيَّةٌ.

مقارنة بين طرائق حل المعادلات التربيعية

الطريقةُ	الإيجابياتُ	السلبياتُ
التمثيلُ البيانيُّ	• يمكنُ استعمالُها لحلِّ أيِّ مُعادلةٍ تربيعيَّةٍ. • يمكنُ بسهولةٍ تحديدُ الحُلولِ مِنَ التمثيلِ.	• قد لا تُعطي حلولًا دقيقةً.
التحليلُ إلى العواملِ	• مِنْ أفضلِ الطرائقِ لتجربتِها أوَّلًا. • تُعطي إجابةً مباشــرةً إذا كانَتِ المُعادلةُ قابلةً للتحليلِ أو كانَ الحدُّ الثابتُ صِفرًا.	• ليستْ جميعُ المُعادلاتِ التربيعيَّةِ قابلةً للتحليلِ.
استعمالُ الجُذورِ التربيعيَّةِ	• تُســتعمَلُ لحــلِّ المُعادلاتِ علــى الصورةِ $(x+a)^2=c$، حيثُ $c \geq 0$	• لا تُســتعمَلُ إذا كانَ الحــدُّ bx موجودًا.
إكمالُ المُربَّعِ	• يمكنُ استعمالُها لحلِّ أيِّ مُعادلةٍ تربيعيَّةٍ على الصورةِ $ax^2+bx+c=0$. • مِــنَ الأســهلِ اســتعمالُها إذا كانَ $a=1$، وَb عددًا زوجيًّا.	• فــي بعــضِ الأحيــانِ تكــونُ الحساباتُ مُعَقَّدَةً.
القانونُ العامُّ	• يمكنُ استعمالُها لحلِّ أيِّ مُعادلةٍ تربيعيَّةٍ على الصورةِ $ax^2+bx+c=0$. • تُعطي حُلولًا دقيقةً.	• قد تســتغرقُ وقتًا أطولَ مِنْ باقي الطرائقِ لإجراءِ الحساباتِ.

5 طرائق حل المعادلات التكعيبية البسيطة (من الدرجة الثالثة)

تحليلُ مجموع مُكَعَّبَيْن أو تحليلُ الفرق بينَهُما، وحلُّ معادلتهما

تحليلُ مجموعِ مُكَعَّبَيْنِ	تحليلُ الفرقِ بينَ مكعّبَينِ
$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$	$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$
$x^3 + 27 = (x+3)(x^2 - 3x + 9)$	$x^3 - 64 = (x-4)(x^2 + 4x + 16)$

يمكـــنُ حلُّ مُعادلاتٍ تحتوي على مجمـــوعِ مكعّبَينِ أوْ على الفرقِ بينَهُما باســـتعمالِ طرائقِ التحليلِ الخاصَّةِ بكلٍّ منهما وخاصيَّةِ الضَّربِ الصِّفريِّ.

مثال أَحُلُّ كُلًّا مِنَ المُعادلاتِ الآتيةِ:

2 $8x^3 + 1 = 0$

$\Longrightarrow 8x^3 + 1 = 0$

$\Longrightarrow (2x)^3 + 1^3 = 0$

$\Longrightarrow (2x+1)(4x^2 - 2x + 1) = 0$

$\Longrightarrow 2x + 1 = 0 \Longrightarrow x = -\frac{1}{2}$

or $\Longrightarrow 4x^2 - 2x + 1 = 0 \Longrightarrow$ لا يوجدُ حل حقيقيٌّ للمُعادلةِ

1 $x^3 + 1 = 0$

$\Longrightarrow x^3 + 1 = 0$

$\Longrightarrow (x+1)(x^2 - 2x + 1) = 0$

$\Longrightarrow x + 1 = 0 \Longrightarrow x = -1$

or $\Longrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Longrightarrow$ لا يوجدُ حل حقيقيٌّ للمُعادلةِ

---

4 $8x^3 - 27 = 0$

$\Longrightarrow 8x^3 - 27 = 0$

$\Longrightarrow (2x)^3 - 3^3 = 0$

$\Longrightarrow (2x-3)(4x^2 + 24x + 9) = 0$

$\Longrightarrow 2x - 3 = 0 \Longrightarrow x = \frac{3}{2}$

or $\Longrightarrow 4x^2 + 24x + 9 = 0 \Longrightarrow$ لا يوجدُ حل حقيقيٌّ للمُعادلةِ

3 $x^3 - 8 = 0$

$\Longrightarrow x^3 - 8 = 0$

$\Longrightarrow (x-2)(x^2 + 8x + 4) = 0$

$\Longrightarrow x - 2 = 0 \Longrightarrow x = -2$

or $\Longrightarrow x^2 + 8x + 4 = 0 \Longrightarrow$ لا يوجدُ حل حقيقيٌّ للمُعادلةِ

المعادلات من الدرجة 3 فما فوق نستخدم نظرية الاصفار النسبية في تحليلها
وهـذه النظرية سوف ندرسها قريبـا ان شـاء الله

6 حلُّ مُعادلات خاصَّة

1 حلُّ المُعادلات بإخراج العامل المُشترَك

2 حلُّ المُعادلات بالتجميع (اربعة حدود)

3 تحليلُ مُعادلات على الصورة التربيعيَّة (شبه التربيعية)

1 حلُّ المُعادلات بإخراج العامل المُشترَك

يمكنُ الإفادةُ مِنْ إخراج العاملِ المُشــتـرَكِ في تبســيطِ وحلِّ مُعادلاتٍ أُسُّ المُتغيِّرِ فيها عددٌ صحيحٌ أكبرُ مِنْ 2.

مثال أحلُّ كُلًّا مِنَ المُعادلاتِ الآتيةِ:

1 $x^3 + 4x^2 = 5x$

$\Longrightarrow x^3 + 4x^2 = 5x \Longrightarrow x^3 + 4x^2 - 5x = 0$

$\Longrightarrow x(x^2 + 4x - 5) = 0 \Longrightarrow x(x+5)(x-1) = 0$

$\Longrightarrow x = 0$

or $\Longrightarrow x+5 = 0 \Rightarrow x = -5$

or $\Longrightarrow x-1 = 0 \Rightarrow x = 1$

إذنْ، جذورُ المُعادلةِ $-5, 0, 1$

2 $2x^3 = 18x$

$\Longrightarrow 2x^3 = 18x \Longrightarrow 2x^3 - 18x = 0$

$\Longrightarrow 2x(x^2 - 9) = 0 \Longrightarrow 2x(x-3)(x+3) = 0$

$\Longrightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = 0$

or $\Longrightarrow x-3 = 0 \Rightarrow x = 3$

or $\Longrightarrow x+3=0 \Rightarrow x = -3$

إذنْ، جذورُ المُعادلةِ $-3, 0, 3$

---

3 $x^4 - x^2 = 0$

$\Longrightarrow x^4 - x^2 = 0 \Longrightarrow x^4 - x^2 = 0$

$\Longrightarrow x^2(x^2 - 1) = 0 \Longrightarrow x^2(x-1)(x+1) = 0$

$\Longrightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$

or $\Longrightarrow x-1 = 0 \Rightarrow x = 1$

or $\Longrightarrow x+1 = 0 \Rightarrow x = -1$

إذنْ، جذورُ المُعادلةِ $-1, 0, 1$

4 $3x^3 + x = 4x^2$

$\Longrightarrow 3x^3 - 4x^2 + x = 0$

$\Longrightarrow x(3x-1)(x-1) = 0$

$\Longrightarrow x = 0$

$\Longrightarrow 3x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$

or $\Longrightarrow x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$

إذنْ، جذورُ المُعادلةِ $\frac{1}{3}, 1, 0$

6 حلُّ مُعادلات خاصَّة

2 حلُّ المُعادلات بالتجميع يمكنُ حلُّ المُعادلاتِ التي تحتوي على أربعةِ حُدودٍ جبريَّةٍ أوْ أكثرَ باستعمالِ طريقةِ التجميع، وذلكَ بتجميعِ الحُدودِ التي تحتوي على عواملَ مُشـتـرَكَةٍ بينها، ثمَّ استعمالُ خاصيَّةِ الضَّربِ الصِّفريِّ لحلِّ المُعادلةِ.

مثال أَحُلُّ كُلًّا منَ المُعادلات الآتية:

1 $x^3-2x^2+9x-18=0$

$\Longrightarrow x^3-2x^2+9x-18=0 \quad \Longrightarrow (x^3-2x^2)+(9x-18)=0$

$\Longrightarrow x^2(x-2)+9(x-2)=0 \quad \Longrightarrow (x-2)(x^2+9)=0$

$\Longrightarrow x-2=0 \Longrightarrow x=2$

or $\Longrightarrow x^2+9=0 \Longrightarrow$ لا يوجدُ حلٌّ حقيقيٌّ للمُعادلةِ

للمعادلة الأصليَّةِ جذرًا وحيدا هو 2

---

2 $4x^3+8x^2-5x-10=0$

$\Longrightarrow 4x^3+8x^2-5x-10=0 \quad \Longrightarrow (4x^3+8x^2)+(-5x-10)=0$

$\Longrightarrow 4x^2(x+2)-5(x+2)=0 \quad \Longrightarrow (x+2)(4x^2-5)=0$

$\Longrightarrow x+2=0 \Longrightarrow x=-2$

or $\Longrightarrow 4x^2-5=0 \Longrightarrow x=\pm\frac{\sqrt{5}}{2}$

إذن، جذور المعادلة $-2, -\frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{\sqrt{5}}{2}$

6 حلُّ مُعادلات خاصَّة

3 تحليلُ مُعادلات على الصورة التربيعيَّة

يُسَمّى المقدارُ الجبريُّ المكتوبُ على الصورةِ $au^2 + bu + c$؛ حيثُ u مقدارٌ جبريٌّ، مقدارًا على **الصورةِ التربيعيَّةِ** ويمكنُ استعمالُ طرائقِ التحليل التي تعلَّمتُها سابقًا في حلِّ مُعادلاتٍ تحوي مقاديرَ على الصورةِ التربيعيَّةِ.

مثال أحلُّ المُعادلةَ: $x^6 - 3x^3 - 40 = 0$

الطريقةُ 2: التعويضُ

$\Rightarrow$ أفترضُ أنَّ $u = x^3$

$\Rightarrow x^6 - 3x^3 - 40 = 0$

$\Rightarrow (x^3)^2 - 3x^3 - 40 = 0$

$\Rightarrow u^2 - 3u - 40 = 0$

$\Rightarrow (u-8)(u+5) = 0$

$\Rightarrow u - 8 = 0 \Rightarrow u = 8 \Rightarrow x^3 = 8 \Rightarrow x = 2$

or $\Rightarrow u + 5 = 0 \Rightarrow u = -5 \Rightarrow x^3 = -5 \Rightarrow x = \sqrt[3]{-5}$

إذنْ، جذرا المُعادلة $2, \sqrt[3]{-5}$

الطريقةُ 1: التحليلُ

$\Rightarrow x^6 - 3x^3 - 40 = 0$

$\Rightarrow (x^3)^2 - 3x^3 - 40 = 0$

$\Rightarrow (x^3 - 8)(x^3 + 5) = 0$

$\Rightarrow x^3 - 8 = 0 \Rightarrow x = 2$

or $\Rightarrow x^3 + 5 = 0 \Rightarrow x = \sqrt[3]{-5}$

إذنْ، جذرا المُعادلة $2, \sqrt[3]{-5}$

مثال أحلُّ المُعادلةَ: $x^{10} - 2x^5 - 24 = 0$

الطريقةُ 2: التعويضُ

$\Rightarrow$ أفترضُ أنَّ $u = x^{10}$

$\Rightarrow x^{10} - 2x^5 - 24 = 0$

$\Rightarrow (x^5)^2 - 2x^5 - 24 = 0$

$\Rightarrow u^2 - 2u - 24 = 0$

$\Rightarrow (u-6)(u+4) = 0$

$\Rightarrow u - 6 = 0 \Rightarrow u = 6 \Rightarrow x^3 = 6 \Rightarrow x = \sqrt[3]{6}$

or $\Rightarrow u + 4 = 0 \Rightarrow u = -4 \Rightarrow x^3 = -4 \Rightarrow x = \sqrt[3]{-4}$

إذنْ، جذرا المُعادلة $\sqrt[3]{-4}$ ، $\sqrt[3]{6}$

الطريقةُ 1: التحليلُ

$\Rightarrow x^{10} - 2x^5 - 24 = 0$

$\Rightarrow (x^5)^2 - 2x^5 - 24 = 0$

$\Rightarrow (x^5 - 6)(x^3 + 4) = 0$

$\Rightarrow x^3 - 6 = 0 \Rightarrow x = \sqrt[3]{6}$

or $\Rightarrow x^3 + 4 = 0 \Rightarrow x = \sqrt[3]{-4}$

إذنْ، جذرا المُعادلة $\sqrt[3]{-4}$ ، $\sqrt[3]{6}$

7 تبسيط المقادير النسبية

1 تبسيط المقادير النسبية

هو تحويل الكسر الجبري إلى صورة مختصرة دون تغيير قيمته، عن طريق تحليل البسط والمقام وحذف العوامل المشتركة، مع مراعاة القيود على المتغيرات

المقدارُ الجبريُّ النسبيُّ هوَ مقدارٌ جبريٌّ يُمكِنُ كتابتُهُ في صورةِ كسرٍ بسطُهُ ومقامُهُ مقدارانِ جبريانِ، ومنْ أمثلتِهِ:

$$\frac{6}{x} \;,\; \frac{2y+1}{y^2-3y+2} \;,\; \frac{r^3+1}{r-4}$$

يكونُ المقدارُ الجبريُّ النسبيُّ في أبسطِ صورةٍ إذا كانَ العددُ 1 هوَ العاملَ المشتركَ الأكبرَ لكلٍّ منْ بسطِهِ ومقامِهِ

خطوات التبسيط : 1 تحليل البسط إلى عوامله 2 تحليل المقام إلى عوامله

3 حذف العوامل المشتركة بين البسط والمقام

4 كتابة الكسر في أبسط صورة

مثال أكتبُ كُلًّا ممّا يأتي في أبسطِ صورةٍ:

1) $$\frac{2x-10}{2x^2-11x+5} = \frac{2(x-5)}{(2x-1)(x-5)} = \frac{2\cancel{(x-5)}}{(2x-1)\cancel{(x-5)}} = \frac{2}{2x-1}$$

2) $$\frac{x+4}{x^2-16}$$

3) $$\frac{x^2-4x-5}{x+1}$$

7 تبسيط المقادير النسبية

2 جمع المقادير الجبرية النسبية وطرحها

هو عملية دمج كسرين جبريين أو أكثر في كسر نسبي واحد، عن طريق توحيد المقامات وقد يُتبع ذلك بتبسيط الناتج إن أمكن

خطوات الجمع (الطرح):

⟸ تحليل مقامات الكسور (إن أمكن) لتحديد المضاعف المشترك الأصغر للمقامات (LCM)

⟸ توحيد المقامات بضرب كل كسر بما يُكمل مقامه إلى المقام المشترك

⟸ جمع (طرح) البسوط مع الحفاظ على المقام الموحد

⟸ تبسيط الكسر الناتج (إن وُجدت عوامل مشتركة)

> عند **جمع** مقدارينِ جبريينِ نسبيينِ لهُما المقامُ نفسُهُ أوْ طرحِهِما، يُجمَعُ البسطانِ أوْ يُطرَحانِ ويبقى المقامُ نفسُهُ.

مثال أكتبُ كُلًّا ممّا يأتي في أبسطِ صورةٍ:

1) $\frac{3x}{y+2} + \frac{x}{y+2} = \frac{3x+x}{y+2} = \frac{4x}{y+2}$

2) $\frac{2}{x-5} + \frac{3}{x-5} = \frac{2+3}{x-5} = \frac{5}{x-5}$

3) $\frac{4}{x+7} - \frac{3}{x+7} = \frac{4-3}{x+7} = \frac{1}{x+7}$

7 تبسيط المقادير النسبية

2 جمع المقادير الجبرية النسبية وطرحها

مثال أكتبُ كُلًّا ممّا يأتي في أبسطِ صورةٍ:

1 $$\frac{2}{x+6}+\frac{3}{x-5}=\frac{2}{x+6}\left(\frac{x-5}{x-5}\right)+\frac{3}{x-5}\left(\frac{x+6}{x+6}\right)$$

$$=\frac{2(x-5)}{(x+6)(x-5)}+\frac{3(x+6)}{(x-5)(x+6)} \quad =\frac{2(x-5)+3(x+6)}{(x+6)(x-5)}$$

$$=\frac{2x-10+3x+18}{x^2-5x+6x-30} \quad =\frac{5x+8}{x^2+x-30}$$

2 $$\frac{2}{x+1}+\frac{5}{x-3}$$

3 $$\frac{4}{x-3}-\frac{5}{x+2}$$

7 تبسيط المقادير النسبية

3 ضرب المقادير الجبرية النسبية

لضربِ مقدارينِ جبريينِ نســبيينِ، يُضرَبُ البســطُ في البسطِ، ثمَّ يُضرَبُ المقامُ في المقامِ.

مثال أكتبُ كُلًّا ممّا يأتي في أبسطِ صورةٍ:

1) $\frac{3x}{x-1} \times \frac{x+4}{6x}$

2) $\frac{4x}{y} \times \frac{5}{y+1} = \frac{4x \times 5}{y(y+1)} = \frac{40x}{y^2+y}$

4 قسمةُ المقادير الجبرية النسبية

لقسمةِ مقدارٍ جبريٍّ نسبيٍّ على آخرَ، يُضرَبُ في النظيرِ الضربيِّ للمقسومِ عليْهِ.

مثال أكتبُ كُلًّا ممّا يأتي في أبسطِ صورةٍ:

1) $\frac{5x+2}{6x} \div \frac{x+1}{2x} = \frac{5x+2}{6x} \times \frac{2x}{x+1} = \frac{2x(5x+2)}{6x(x+1)} = \frac{5x+2}{3(x+1)}$

2) $\frac{4x}{y} \div \frac{5}{y+1} = \frac{4x}{y} \times \frac{y+1}{5} = \frac{4x\,(y+1)}{5y}$

3) $\frac{x}{x+1} \div \frac{x+4}{2x+2}$