

الفصل الدراسي الأول

الوحدة 1 الاقترانات والمقادير الجبرية

الدرس 1 نظريتنا الباقي والعوامل

الدرس 2 الكسور الجزئية

اختبار نهاية الوحدة

الوحدة 2 المتطابقات والمعادلات المثلثية

الدرس 1 المتطابقات المثلثية 1

الدرس 2 المتطابقات المثلثية 2

الدرس 3 حل المعادلات المثلثية

اختبار نهاية الوحدة

الوحدة 3 التفاضل وتطبيقاته

الدرس 1 مشتقة اقترانات خاصة

الدرس 2 مشتقتا الضرب والقسمة والمشتقات العليا

الدرس 3 قاعدة السلسلة

الدرس 4 الاشتقاق الضمني

الدرس 5 المعدلات المرتبطة

اختبار نهاية الوحدة

الوحدة 4 الأعداد المركبة

الدرس 1 الأعداد المركبة

الدرس 2 العمليات على الأعداد المركبة

الدرس 3 المحل الهندسي في المستوى المركب

اختبار نهاية الوحدة

الاستاذ حمزة ابو الفول

الملاذ في مهارات الرياضيات

الصف الثاني عشر - المسار الأكاديمي

الفصل الدراسي الأول



الوحدة 1 الاقترانات والمقادير الجبرية

الدرس 1 نظريتا الباقي والعوامل

الدرس 2 الكسور الجزئية

اختبار نهاية الوحدة



الصف الثاني عشر - المسار الأكاديمي

الفصل الدراسي الأول

الوحدة 1 الإقترانات والمقادير الجبرية



الدرس 1 نظريتا الباقي والعوامل

تمهيد ومراجعة

القسمه باستعمال الجدول

نظرية الباقي

نظرية العوامل

نظرية الأصفار النسبية

حلّ معادلات كثيرات الحدود

تطبيقات حياتية



القسمه باستعمال الجدول

مراجعة

الاقتران وحيد الحدِّ بمتغير واحد
هو اقتران قاعدته ناتج ضرب عدد حقيقي (يسمى المعامل) في متغير أسه عدد صحيح غير سالب
والجدول الآتي يعرض بعض الأمثلة على وحيد الحدِّ، وأسِّه، ومعامله:

وحيد الحدِّ	9	x	$\sqrt{7}x^3$	$-\frac{1}{2}x^5$	$3x^2$
الأسُّ	0	1	3	5	2
المعامل	9	1	$\sqrt{7}$	$-\frac{1}{2}$	3

الاقتران كثير الحدود بمتغير واحد
هو اقتران يتكوّن من وحيد حدٍّ واحد، أو مجموع عدّة اقتران وحيدة الحدِّ بمتغير واحد
ومن أمثلته الاقتران الآتية

$$f(x)=2 \quad , \quad f(x)=3x-4 \quad , \quad f(x)=x^2+4x-5 \quad , \quad g(x)=-3x^2+1.5x^4-3$$

الصورة العامة لكثير الحدود: $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x^1 + a_0$

حيث: n : عدد صحيح غير سالب.
 $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_1, a_0$: أعداد حقيقية تُسمّى معاملات حدود كثير الحدود.

لكتابة كثير الحدود بالصورة القياسية، يتم ترتيب حدوده من القوة الأعلى إلى القوة الأقل

ومن أمثلته الاقتران الآتية

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x \quad , \quad P(x) = 5 \quad , \quad P(x) = 2 - x$$

يسمى اقتران كثير الحدود أحياناً كثير حدود فقط اختصاراً.



القسمه باستعمال الجدول

مراجعة قسمه كثير حدود على كثير حدود آخر باستعمال القسمه الطويله

طرق قسمه كثيرات الحدود

- القسمه الطويله
- طريقه الجدول
- القسمه التركيبية

القسمه الطويله :

- طريقه موجوده في الصف العاشر الاساسي
- تستخدم لقسمه كثير حدود (المقسوم) على كثير حدود آخر (المقسوم عليه).
- يجب كتابه كل من المقسوم والمقسوم عليه بالصورة القياسية (من أعلى قوة إلى أقل قوة) قبل البدء بالقسمه

← لقسمه كثير حدود على آخر

- ← أكتب المقسوم والمقسوم عليه بالصورة القياسية
- ← وإذا كانت إحدى قوى المتغير في المقسوم مفقودة، فإني أضيفها في موقعها، وأكتب معاملها 0
- ← ثم قسمه الحد الرئيس (الذي يحتوي على أعلى درجة) في المقسوم على الحد الرئيس في المقسوم عليه
- ← ثم يتم ضرب الناتج بالكامل المقسوم عليه.
- ← بعد الضرب، يتم طرح الناتج من الجزء المقابل في المقسوم، أو يمكن عكس إشارات الناتج ثم الجمع.
- ← تتكرر عملية قسمه كثيرات الحدود حتى تصبح درجة الباقي أقل من درجة المقسوم عليه
- ← يكتب ناتج القسمه عادة بالصورة التالية : $\frac{\text{الباقى}}{\text{المقسوم عليه}} + \text{ناتج القسمه}$
- ← درجة ناتج القسمه تساوي الفرق بين درجتى المقسوم والمقسوم عليه.
- ← للتحقق من صحة الحل، يمكن استخدام العلاقة : (ناتج القسمه × المقسوم عليه) + الباقي = المقسوم

ادرس وطبق خطوات القسمه كما في الامثله التالية



الاستاذ حمزة ابو الفول

الدرس 1 نظريتنا الباقي والعوامل

الوحدة 1 الاقترانات والمقادير الجبرية

قسمة كثيرات الحدود

مثال أجد ناتج قسمة $f(x) = 2x^3 + 24x - 15$ على $g(x) = x + 5$ ، وباقيها.

$$\begin{array}{r}
 2x^2 - 10x + 74 \\
 x + 5 \overline{) 2x^3 + 0x^2 + 24x - 15} \\
 \underline{(-) 2x^3 + 10x^2} \\
 -10x^2 + 24x \\
 \underline{(-) -10x^2 - 50x} \\
 74x - 15 \\
 \underline{(-) 74x + 370} \\
 -385
 \end{array}$$

تنتهي عملية القسمة

بقسمة $2x^2$ على x ، وكتابة النتيجة $2x^2$ فوق الحد المشابه

بضرب المقسوم عليه $(x + 5)$ في $2x^2$

بالطرح، وإضافة الحد $(24x)$

بقسمة $-10x^2$ على x ، وكتابة النتيجة $-10x^2$ فوق الحد المشابه، ثم

ضرب المقسوم عليه $(x + 5)$ في $-10x$

بالطرح، وإضافة الحد (-15)

بقسمة $74x$ على x ، وكتابة النتيجة 74 فوق الحد الثابت، وضرب

المقسوم عليه $(x + 5)$ في 74

بالطرح

درجة باقي القسمة
أقل من درجة المقسوم عليه.

إذن، ناتج القسمة هو: $2x^2 - 10x + 74$ ، والباقي -385 ، ويمكن كتابة ذلك كما يأتي:

$$\frac{2x^3 + 24x - 15}{x + 5} = \left(2x^2 - 10x + 74 \right) + \left(\frac{-385}{x + 5} \right), \quad x \neq -5$$

أتحقق من صحة الحل: يمكن التحقق من صحة القسمة بضرب الناتج في المقسوم عليه، وإضافة الباقي

إذا كانت النتيجة مساوية للمقسوم كان الحل صحيحاً.

$$\left(\begin{array}{c} \text{الناتج} \\ \left(2x^2 - 10x + 74 \right) \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \text{المقسوم عليه} \\ (x + 5) \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} \text{الباقي} \\ (-385) \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \text{المقسوم} \\ 2x^3 + 24x - 15 \end{array} \right)$$

$$\begin{aligned}
 \left(\begin{array}{c} \text{الناتج} \\ \left(2x^2 - 10x + 74 \right) \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \text{المقسوم عليه} \\ (x + 5) \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} \text{الباقي} \\ (-385) \end{array} \right) &= 2x^3 - 10x^2 + 74x + 10x^2 - 50x + 370 - 385 \\
 &= 2x^3 + (-10 + 10)x^2 + (74 - 50)x - 15 \\
 &= \left(\begin{array}{c} \text{المقسوم} \\ 2x^3 + 24x - 15 \end{array} \right) \checkmark
 \end{aligned}$$



الاستاذ حمزة ابو الفول

الدرس 1 نظريتا الباقي والعوامل

الوحدة 1 الاقترانان والمقادير الجبرية

القسمة باستعمال الجدول

مراجعة قسمة كثير حدود على كثير حدود آخر باستعمال القسمة الطويلة

مثال استعمل القسمة الطويلة لإيجاد ناتج قسمة $(x^3 + 2x^2 - 11x - 12)$ على $(x + 4)$ كما يأتي:

قبل البدء بقسمة كثيرات الحدود، أكتب المقسوم والمقسوم عليه بالصورة القياسية

المقسوم	→	$x^2 - 2x - 3$	←	المقسوم عليه
$ \begin{array}{r} x^3 + 2x^2 - 11x - 12 \\ \underline{x^3 + 4x^2} \\ -2x^2 - 11x \\ \underline{-2x^2 - 8x} \\ -3x - 12 \\ \underline{-3x - 12} \\ 0 \end{array} $				
ناتج القسمة	→	$x^2 - 2x - 3$		
بالضرب في x^2 بالطرح بالضرب في $-2x$ بالطرح بالضرب في -3 بالطرح				
باقي القسمة	→	0		

تتوقَّف عملية قسمة كثيرات الحدود عندما تصبح درجة باقي القسمة أقل من درجة المقسوم عليه.



القسمة باستعمال الجدول

طريقة الجدول (grid method)

هي طريقة لقسمة كثيرات الحدود تعتمد بشكل أساسي على ضرب كثيرات الحدود، بوصفها عملية عكسية لعملية القسمة. وهذه الطريقة هي تشبه كثيرا القسمة الطويلة حيث يمكن اعتبارها صورة ثانية للقسمة الطويلة وإعادة ترتيب على شكل جدول وخطواتها الاساسية باختصار (قسمة أعلى درجة على أعلى درجة، ضرب، طرح (عكس اشارة ثم جمع) ثم تكرار كما في القسمة الطويلة

خطوات طريقة الجدول في قسمة كثيرات الحدود

1. تحديد حجم الجدول :

- عدد الصفوف يساوي درجة المقسوم عليه + 2
 - عدد الأعمدة يساوي درجة الناتج + 2
- درجة كثير الحدود الناتج = درجة المقسوم - درجة المقسوم عليه

2. إنشاء الجدول وتحديد الأجزاء :

- رسم جدول بالعدد المحدد من الأعمدة والصفوف.
- العمود الأول يخصص لحدود المقسوم عليه.
- الصف الأول يخصص للناتج (الناتج النهائي للقسمة).
- الخلية العلوية اليسرى (الصف الأول، العمود الأول) لا تستخدم
- تكتب حدود المقسوم بجانب الجدول او فوقه
- تكتب حدود المقسوم عليه في العمود الأول، بدءاً من الصف الثاني
- يخصص مكان في الصف الأول من منطقة العمل (المربعات المتبقية) للباقي
- تمثل بقية المربعات منطقة العمل



الإستاذ حمزة ابو الفول

الدرس I نظريتا الباقي والعوامل

الوحدة 1 الاقترانات والمقادير الجبرية

القسمه باستعمال الجدول

3. تنفيذ عملية القسمة التكرارية : (مثل القسمة الطويلة)

- القسمة: يتم قسمة أعلى درجة في منطقة العمل (التي تكون دائماً في الصف الأول منها) على أعلى درجة في المقسوم عليه (وهي الحد الأول في العمود الأول)

يُكتب ناتج هذه القسمة في الصف الأول المخصص للنواتج

- الضرب : يتم ضرب ناتج القسمة الذي حصلت عليه (في الصف الأول) في كل حد من حدود المقسوم عليه المكتوبة في العمود الأول

تُكتب نتاج عمليات الضرب هذه في المربعات المقابلة في منطقة العمل

- عكس الإشارة والجمع : (مكافئة للطرح في القسمة الطويلة)

يتم عكس إشارات نتائج الضرب التي كتبتها في منطقة العمل. ثم يتم جمع الحدود المتشابهة (التي لها نفس الدرجة). يتم الجمع بين الحدود المتبقية من المقسوم (التي لم يتم استخدامها بعد) والحدود المناظرة لها في منطقة العمل بعد عكس إشاراتها

- يُكتب ناتج الجمع (الحدود المتشابهة) في الصف الأول من منطقة العمل

- يُشطب الحد الذي تم استخدامه من المقسوم المكتوب بجانب او فوق الجدول

- التكرار: تُكرر الخطوات (القسمة، الضرب، عكس الإشارة، الجمع) حتى تصبح درجة الحد المتبقي في الصف الأول من منطقة العمل أقل من درجة المقسوم عليه

4. النتيجة النهائية :

- الحدود المكتوبة في الصف الأول (غير خلية الباقي) هي معاملات حدود ناتج القسمة مرتبة حسب الدرجة تنازلية

- الحد النهائي المكتوب في الخلية المخصصة للباقي هو الباقي النهائي للقسمة

- يُكتب الناتج النهائي على صورة: $\frac{\text{الباقي}}{\text{المقسوم عليه}} + \text{ناتج القسمة}$

- درجة ناتج القسمة تساوي الفرق بين درجتي المقسوم والمقسوم عليه.

- للتحقق من صحة الحل، يمكن استخدام العلاقة : (ناتج القسمة \times المقسوم عليه) + الباقي = المقسوم



الاستاذ حمزة ابو الفول

الدرس 1 نظريتا الباقي والعوامل

الوحدة 1 الاقترانات والمقادير الجبرية

القسمه باستعمال الجدول

طريقة الجدول باختصار

- انشاء الجدول بالعدد المحدد من الأعمده والصفوف.
- القسمة بالتعامل مع أعلى درجة في المقسوم، قسمتها على أعلى درجة في المقسوم عليه وكتابة الناتج في الصف الأول المخصص للنواتج.
- تُضرب النتيجة في حدود المقسوم عليه وتُكتب في منطقة العمل بعد ذلك، تُعكس إشارات نواتج الضرب ويتم جمعها مع الحدود المتشابهة في المقسوم، مع الانتقال درجة بدرجة.
- تتكرر العملية حتى الوصول إلى الباقي

تابع وتدرّب على طريقة الجدول من خلال الامثلة التالية

مثال 1 أستمعل طريقة الجدول لإيجاد ناتج: $(9x^3 - x + 3) \div (3x - 2)$ ، ثمّ أتحدّق من صحّة الحلّ.

$9x^3 + 0x^2 - x + 3$					الباقي
$9x^3$	$+ 6x^2$	$- x$	$+ 4x$	$+ 3$	$+ 2$
$+ 0x$	$+ 6x^2$	$- x$	$+ 4x$	$+ 3$	$+ 2$
$3x$	$9x^3$	$6x^2$	$3x$	5	
-2	$-6x^2$	$-4x$	-2		

إذن، ناتج القسمة هو: $3x^2 + 2x + 1$ ، والباقي 5، ويُمكنني كتابة ذلك كما يأتي:

$$\frac{9x^3 - x + 3}{3x - 2} = 3x^2 + 2x + 1 + \frac{5}{3x - 2}$$

أتحدّق من صحّة الحلّ:

يُمكنني التحدّق من صحّة الحلّ بإيجاد مجموع الحدود في منطقة العمل، والتحدّق من مساواتها للمقسوم.

$$9x^3 - 6x^2 + 6x^2 - 4x + 3x - 2 + 5 = 9x^3 - x + 3$$



الاستاذ حمزة ابو الفول

الدرس 1 نظريتا الباقي والعوامل

الوحدة 1 الاقترانات والمقادير الجبرية

القسمة باستعمال الجدول

(a) أستعمل طريقة الجدول لإيجاد ناتج $(x^3 + 6x^2 - 9x - 14) \div (x + 1)$ **أتحقق من فهمي 1**

$$\begin{array}{r} x^3 \\ + 6x^2 - x^2 \\ - 9x - 5x \\ - 14 + 14 \end{array}$$

$$x^3 + 6x^2 - 9x - 14$$

×	x^2	$+5x$	-14	
x	x^3	$5x^2$	$-14x$	0
$+1$	$+x^2$	$+5x$	-14	

ناتج القسمة هو $(x^2 + 5x - 14)$ والباقي (0)

ويمكنني كتابة ذلك كما يأتي:

$$\frac{x^3 + 6x^2 - 9x - 14}{x + 1} = x^2 + 5x - 14$$

(b) أستعمل طريقة الجدول لإيجاد ناتج $(2x^3 - x^2 + 3) \div (x - 3)$ **أتحقق من فهمي 1**

$$\begin{array}{r} + 2x^3 \\ - x^2 + 5x^2 \\ + 0x + 15x \\ - 3 + 48 \end{array}$$

$$2x^3 - x^2 + 0x + 3$$

×	$2x^2$	$+5x$	$+15$	
x	$2x^3$	$+5x^2$	$+15x$	48
-3	$-6x^2$	$-15x$	-45	

ناتج القسمة هو $(2x^2 + 5x - 45)$ والباقي (48)

ويمكنني كتابة ذلك كما يأتي:

$$\frac{2x^3 - x^2 + 3}{x - 3} = 2x^2 + 5x + 15 + \frac{48}{x - 3}$$



نظرية الباقي

باقي قسمة كثير الحدود $P(x)$ على $(x - c)$ هو $P(c)$.
 بوجه عام، فإن باقي قسمة $P(x)$ على $(ax - b)$ هو $P(\frac{b}{a})$ ، حيث: $a \neq 0$.
 باقي قسمة كثير حدود على خطي تساوي صورة صفر الخطي في كثير الحدود

تتيح نظرية الباقي إمكانية معرفة باقي قسمة كثير حدود على كثير حدود خطي دون الحاجة لإجراء عملية القسمة الطويلة

ملاحظة

نظرية الباقي تطبق فقط عندما يكون المقسوم عليه كثير حدود خطي (من الدرجة الأولى)
 وإذا كان المقسوم عليه من درجة أعلى، فلا يمكن استخدام نظرية الباقي لإيجاد الباقي مباشرة
 بل يجب اللجوء إلى القسمة الطويلة

خطوات تطبيق نظرية الباقي :

- نجد صفر المقسوم عليه بمساواته بالصفر وحل المعادلة
- نعوض قيمة صفر المقسوم عليه في المقسوم
- الباقي يساوي ناتج التعويض





الاستاذ حمزة ابو الفول

الدرس 1 نظريتا الباقي والعوامل

الوحدة 1 الاقترانان والمقادير الجبرية

نظرية الباقي

أستعمل نظرية الباقي لإيجاد باقي قسمة $P(x)$ على $h(x)$ في كل ممّا يأتي:

مثال 2

1 $P(x) = x^3 + 7x^2 - 6x + 2, h(x) = x - 3$

$$\begin{aligned} \text{الباقي} = P(3) &= (3)^3 + 7(3)^2 - 6(3) + 2 \\ &= 27 + 63 - 18 + 2 = 74 \end{aligned}$$

إذن، باقي قسمة $P(x)$ على $h(x)$ يساوي 74

$$\begin{aligned} h(x) = x - 3 &= 0 \\ x &= +3 \end{aligned}$$

2 $P(x) = 2x^3 - 5x^2 - 4x + 9, h(x) = x + 2$

$$\begin{aligned} \text{الباقي} = P(-2) &= 2(-2)^3 - 5(-2)^2 - 4(-2) + 9 \\ &= -16 - 20 + 8 + 9 = -19 \end{aligned}$$

إذن، باقي قسمة $P(x)$ على $h(x)$ يساوي -19

$$\begin{aligned} h(x) = x + 2 &= 0 \\ x &= -2 \end{aligned}$$

3 $P(x) = 2x^3 - 4x^2 - 2x + 1, h(x) = 2x - 1$

$$\begin{aligned} \text{الباقي} = P\left(\frac{1}{2}\right) &= 2\left(\frac{1}{2}\right)^3 - 4\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{2}\right) + 1 \\ &= \frac{1}{4} - 1 - 1 + 1 = -\frac{3}{4} \end{aligned}$$

إذن، باقي قسمة $P(x)$ على $h(x)$ يساوي $-\frac{3}{4}$

$$\begin{aligned} h(x) = 2x - 1 &= 0 \\ x &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$



الاستاذ حمزة ابو الفول

الدرس I نظريتا الباقي والعوامل

الوحدة 1 الاقترانات والمقادير الجبرية

نظرية الباقي

أستعمل نظرية الباقي لإيجاد باقي قسمة $P(x)$ على $h(x)$ في كلِّ ممَّا يأتي: **تحقق من فهمي 2**

a) $P(x) = 4x^4 - 7x^3 + 5x^2 + 2, h(x) = x-1$

$$\text{الباقي} = P(1) = 4(1)^4 - 7(1)^3 + 5(1)^2 + 2 = 4$$

b) $P(x) = 3x^3 + 8x^2 - 3x - 6, h(x) = x+3$

$$\text{الباقي} = P(-3) = 3(-3)^3 + 8(-3)^2 - 3(-3) - 6 = -6$$

c) $P(x) = -2x^3 - 5x^2 + 10x + 9, h(x) = 2x + 8$

$$\text{الباقي} = P\left(-\frac{8}{2}\right) = P(-4) = -2(-4)^3 - 5(-4)^2 + 10(-4) + 9 = 17$$



الاستاذ حمزة ابو الفول

الدرس I نظريتا الباقي والعوامل

الوحدة 1 الاقترانات والمقادير الجبرية

نظرية العوامل (factor theorem) حالة خاصة من نظرية الباقي.

يكون $(x-c)$ عاملاً من عوامل $P(x)$ إذا وفقط إذا كان: $P(c) = 0$
 بوجه عام، يكون $(ax - b)$ عاملاً من عوامل $P(x)$ إذا وفقط إذا كان: $P\left(\frac{b}{a}\right) = 0$ ، حيث: $a \neq 0$
 يكون الخطي عامل من عوامل كثير حدود اذا كان قسمة كثير الحدود عليه تساوي صفر
 اي اذا كان ناتج تعويض صفره (الخطي) في كثير الحدود يساوي صفر

ملاحظات

- تعتمد نظرية العوامل على نظرية الباقي لتحديد ما اذا كان كثير حدود خطي عامل لكثير حدود اخر
- حيث تنص على أن كثير الحدود الخطي $(ax - b)$ عاملاً لكثير الحدود $P(x)$ إذا وفقط إذا كان باقي قسمة $P(x)$ على $(ax - b)$ يساوي صفراً.
- وبصيغة اخرى يكون $(ax - b)$ عاملاً لـ $P(x)$ إذا كان $P\left(\frac{b}{a}\right) = 0$
- وهذا يشبه مفهوم العوامل في الاعداد حيث يكون العدد B من عوامل العدد A اذا كان باقي قسمة A على B يساوي صفر وبالمثل اذا كان باقي قسمة $P(x)$ على $(ax - b)$ يساوي صفر فان $(ax - b)$ هو احد عوامل $P(x)$
- لتحديد ما إذا كان الباقي صفراً أم لا
- اذا كان المقسوم عليه ليس خطياً نستعمل **طريقة القسمة** (خوارزمية القسمة الطويلة او طريقة الجدول)
- اذا كان المقسوم عليه خطياً (من الدرجة الاولى) نستعمل **طريقة القسمة**
- أو **نظرية الباقي** وهي الافضل والاسرع
- خطوات تحليل كثير حدود $P(x)$ تحليلاً كاملاً إذا علمنا أحد عوامله الخطية $(ax - b)$ ؟
- نتأكد ان العامل المعطى هو بالفعل عامل من عوامل $P(x)$
- يجب ان يكون باقي قسمة $P(x)$ على هذا العامل المعطى يساوي صفراً
- نقسم $P(x)$ على العامل الخطي باستخدام القسمة الطويلة او طريقة الجدول
- لينتج كثير حدود درجته اقل بواحد من درجة وليكن $h(x)$
- نحلل كثير الحدود $h(x)$ الناتج عن من القسمة (ان امكن) لنصل الى التحليل الكامل
- والتحليل الكامل هو الوصول الى حاصل ضرب مجموعة من كثيرات الحدود التي لا يمكن تحليلها أي تكون اما
- عوامل خطية من الدرجة الاولى
- أو تربيعية من الدرجة الثانية وليس لها اصفار ويكون المميز يساوي صفراً



الاستاذ حمزة ابو الفول

الدرس 1 نظريتا الباقي والعوامل

الوحدة 1 الاقترانات والمقادير الجبرية

نظرية العوامل

مثال 3

إذا كان: $P(x) = x^3 + 6x^2 + 5x - 12$ ، فأجيب عن السؤالين الآتيين:

1 أُبَيِّنُ أَنَّ $(x + 4)$ عامل من عوامل $P(x)$.

يكون $(x + 4)$ عاملاً من عوامل $P(x)$ إذا كان: $P(-4) = 0$ ؛ لذا أجد $P(-4)$.

$$\begin{aligned} P(-4) &= (-4)^3 + 6(-4)^2 + 5(-4) - 12 \\ &= -64 + 96 - 20 - 12 = 0 \end{aligned}$$

إذن، $(x + 4)$ عامل من عوامل $P(x)$.

$$x^3 + 6x^2 + 5x - 12$$

×	x^2	$2x$	-3	
x	x^3	$2x^2$	$-3x$	0
+4	$4x^2$	$8x$	-12	

$$\begin{aligned} P(x) &= x^3 + 6x^2 + 5x - 12 \\ &= (x + 4)(x^2 + 2x - 3) \\ &= (x + 4)(x + 3)(x - 1) \end{aligned}$$

2 أحلّل $P(x)$ تحليلاً كاملاً.

بما أن $(x + 4)$ عامل من عوامل $P(x)$ ، فإنه يُمكن إيجاد العوامل الأخرى بقسمة $P(x)$ على $(x + 4)$ ، ثمّ تحليل كثير الحدود الناتج (إن أمكن):

$$P(x) = (x + 4)(x + 3)(x - 1)$$

(التحليل الكامل)

تذكر التحليل الكامل لكثير الحدود يعني كتابته

في صورة حاصل ضرب مجموعة من كثيرات الحدود التي لا يمكن تحليلها

(من الدرجة 1 او من الدرجة 2 وليس لها اصفار)



الاستاذ حمزة ابو الفول

الدرس I نظريتا الباقي والعوامل

الوحدة 1 الاقترانات والمقادير الجبرية

أنتحقق من فهمي

إذا كان: $P(x) = x^3 - 2x^2 - 13x - 10$ ، فأجيب عن السؤالين الآتيين:

(a) أبين أن $(x-5)$ عامل من عوامل $P(x)$. (b) أحلل $P(x)$ تحليلًا كاملاً.

$$P(5) = 5^3 - 2(5)^2 - 13(5) - 10$$

$$= 125 - 50 - 65 - 10 = 0$$

إذن، $(x-5)$ عامل من عوامل $P(x)$

لتحليل $P(x)$ أقسم $P(x)$ على $(x-5)$

×	x^2	$+3x$	$+2$	
x	x^3	$+3x^2$	$+2x$	0
-5	$-5x^2$	$-15x$	-10	

$$P(x) = (x-5)(x^2 + 3x + 2)$$

$$= (x-5)(x+2)(x+1)$$

نظرية الأصفار النسبية

مقدمة

صفر كثير الحدود هو قيمة المتغير x التي تجعل قيمة كثير الحدود تساوي صفر.

وعند التمثيل البياني فإن نقاط تقاطع منحنى كثير الحدود مع محور x تمثل أصفاره.

ذلك لأن عند أي نقطة على محور x تكون قيمة y التي تمثل قيمة كثير الحدود $P(x)$ تساوي صفر.

وعدد أصفار كثير الحدود الحقيقية **على الأكثر** يساوي درجة كثير الحدود.

إذا كان كثير الحدود من الدرجة n ، فإن عدد أصفاره على الأكثر هو n

فمثلا اذا كان كثير الحدود من الدرجة 3 فإن عدد اصفاره يمكن ان يساوي 3 أو 2 أو 1 أو لا يوجد أصفار حقيقية

وكثير الحدود من الدرجة 2 فإن عدد اصفاره يمكن ان يساوي 2 أو 1 أو لا يوجد أصفار حقيقية

وكثير الحدود من الدرجة 1 فإن عدد اصفاره يمكن ان يساوي 1 أو لا يوجد أصفار حقيقية وهكذا

وبالنسبة لكثير الحدود التربيعي $(ax^2 + bx + c)$ ، يحدد مميز المعادلة $(\Delta = b^2 - 4ac)$ عدد الأصفار الحقيقية

• إذا كان $\Delta > 0$ يوجد صفران حقيقيان.

• إذا كان $\Delta = 0$ يوجد صفر واحد حقيقي (مكرر).

• إذا كان $\Delta < 0$ لا يوجد أصفار حقيقية.

تختلف طرق إيجاد أصفار كثير الحدود حسب درجته وشكله حيث نساوي كثير الحدود بالصفر ونحل المعادلة الناتجة

بالتحليل الى حاصل ضرب عوامل خطية أو تربيعية لا تحلل (مميزها سالب)

بعد التحليل، نساوي كل عامل بالصفر لإيجاد الأصفار

• تحليل كثير الحدود من الدرجة الثانية نستخدم طرق التحليل البسيطة وإذا واجهنا صعوبة

نستخدم المميز لتحديد عدد الاصفار ونطبق القانون العام

• تحليل كثير الحدود من الدرجة الثالثة فما فوق نستخدم نظرية الاصفار النسبية

التي نحن بصدد دراستها ان شاء الله



الاستاذ حمزة ابو الفول

الدرس I نظريتا الباقي والعوامل

الوحدة 1 الاقترانات والمقادير الجبرية

نظرية الأصفار النسبية

مراجعة

• اوجد اصفار كثير الحدود التالي : $P(x) = 2x - 14$

$$2x - 14 = 0 \Rightarrow 2x = 14 \Rightarrow x = 7$$

المعادلة خطية

اذن حل المعادلة $x = 7$

اصفار كثير الحدود 7

• اوجد اصفار كثير الحدود التالي : $P(x) = x^2 - x$

$$x^2 - x = 0 \Rightarrow x(x - 1) = 0$$

تربيعية - عامل مشترك

$$\Rightarrow x = 0$$

$$\text{or } \Rightarrow x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$$

اذن حل المعادلة $x = 0, 1$

اصفار كثير الحدود 0, 1

• اوجد اصفار كثير الحدود التالي : $P(x) = x^2 - 49$

$$x^2 - 49 = 0 \Rightarrow (x - 7)(x + 7) = 0$$

تربيعية - فرق بين مربعين

$$\Rightarrow x - 7 = 0 \Rightarrow x = 7$$

$$\text{or } \Rightarrow x + 7 = 0 \Rightarrow x = -7$$

اذن حل المعادلة $x = -7, 7$

اصفار كثير الحدود -7, 7





الاستاذ حمزة ابو الفول

الدرس 1 نظريتا الباقي والعوامل

الوحدة 1 الاقترانات والمقادير الجبرية

نظرية الأصفار النسبية

مراجعة

• اوجد اصفار كثير الحدود التالي : $P(x) = x^2 - 8x + 12$

$$x^2 - 8x + 12 = 0 \Rightarrow (x - 6)(x - 2) = 0$$

$$\Rightarrow x - 6 = 0 \Rightarrow x = 6$$

$$\text{or } \Rightarrow x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

اذن حل المعادلة $x = 6, 2$

اصفار كثير الحدود $6, 2$

• اوجد اصفار كثير الحدود التالي : $P(x) = 3x^2 - 4x + 1$

$$3x^2 - 4x + 1 = 0 \Rightarrow (3x - 1)(x - 1) = 0$$

$$\Rightarrow 3x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$$

$$\text{or } \Rightarrow x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$$

اذن حل المعادلة $x = \frac{1}{3}, 1$

اصفار كثير الحدود $\frac{1}{3}, 1$

• اوجد اصفار كثير الحدود التالي : $P(x) = x^2 + 4x + 4$

$$x^2 + 4x + 4 = 0 \Rightarrow x^2 + 2(x)(2) + 2^2 = 0$$

$$\Rightarrow (x + 2)(x + 2) = 0$$

$$\Rightarrow x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$$

اذن حل المعادلة $x = -2$ حل واحد

اصفار كثير الحدود -2 صفر واحد



الاستاذ حمزة ابو الفول

الدرس I نظريتا الباقي والعوامل

الوحدة 1 الاقتنانات والمقادير الجبرية

نظرية الأصفار النسبية

مراجعة

• اوجد اصفار كثير الحدود التالي : $P(x) = 2x^2 - 15x + 19$

إذا واجهت صعوبة في التحليل
فالمنقذ هو المميز والقانون العام

تربيعية - ثلاثي حدود - تحليله صعب $\Rightarrow 2x^2 - 15x + 19 = 0$

ميز موجب $\Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = (-15)^2 - 4(2)(19) = 73$

بما أن $\Delta > 0$ إذن للمعادلة حلان حقيقيان مختلفان.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-15) \pm \sqrt{73}}{2(2)} = \frac{15 \pm \sqrt{73}}{4}$$

$$x = \frac{15 - \sqrt{73}}{4} \quad \text{or} \quad x = \frac{15 + \sqrt{73}}{4}$$

إذن، جذرا المعادلة $\frac{15 - \sqrt{73}}{4}, \frac{15 + \sqrt{73}}{4}$

اصفار كثير الحدود $\frac{15 - \sqrt{73}}{4}, \frac{15 + \sqrt{73}}{4}$

• اوجد اصفار كثير الحدود التالي : $P(x) = x^2 - x + 1$

إذا واجهت صعوبة في التحليل
فالمنقذ هو المميز والقانون العام

تربيعية - ثلاثي حدود - تحليله صعب $\Rightarrow x^2 - x + 1 = 0$

ميز سالب $\Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4(1)(1) = -3$

بما أن $\Delta < 0$ ، إذن ليس للمعادلة أي حل حقيقي.

اصفار كثير الحدود لا يوجد

• اوجد اصفار كثير الحدود التالي : $P(x) = x^2 - 2x + 1$

تربيعية - ثلاثي حدود $\Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0$

$\Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4(1)(1) = 0$

بما أن $\Delta = 0$ ، إذن للمعادلة حل حقيقي واحد.

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{2}{2} = 1$$

الاستاذ حمزة ابو الفول

الدرس I نظريتا الباقي والعوامل

الوحدة 1 الاقترانات والمقادير الجبرية

نظرية الأصفار النسبية

مراجعة

$$P(x) = x^3 - 8$$

• اوجد اصفار كثير الحدود التالي :

$$(تكميبي - فرق مكعبين) \quad x^3 - 8 = 0 \Rightarrow (x - 2)(x^2 + 2x + 4) = 0$$

$$\Rightarrow x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

$$\text{or} \Rightarrow x^2 + 2x + 4 = 0$$

لا يوجد حل حقيقي للشعادلة \Rightarrow

اصفار كثير الحدود لا يوجد

$$P(x) = x^3 + 8$$

• اوجد اصفار كثير الحدود التالي :

$$(تكميبي - مجموع مكعبين) \quad x^3 + 8 = 0 \Rightarrow (x + 2)(x^2 - 2x + 4) = 0$$

$$\Rightarrow x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$$

$$\text{or} \Rightarrow x^2 - 2x + 4 = 0$$

مميزه سالب لا يوجد حل حقيقي للشعادلة \Rightarrow

اصفار كثير الحدود $x = -2$

المعادلات من الدرجة 3 فما فوق نستخدم نظرية الاصفار النسبية في تحليلها

وهذه النظرية موضوع درسنا القادم ان شاء الله

الاستاذ حمزة ابو الفول

الدرس I نظريتا الباقي والعوامل

الوحدة 1 الاقترانات والمقادير الجبرية

نظرية الأصفار النسبية

إذا كان: $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ كثير حدود معاملاته أعداد صحيحة فإن كل صفر نسبي لـ $P(x)$ يكون في صورة $\frac{p}{q}$ ، حيث p أحد عوامل الحد الثابت (a_0) ، و q أحد عوامل المعامل الرئيس (a_n) .

نتيجة من نظرية الأصفار النسبية إذا كان: $a_n = 1$ ، فإن كل صفر نسبي لـ $P(x)$ يكون أحد عوامل الحد الثابت (a_0) .

ملاحظات

- عند إيجاد أحد الأصفار النسبية لكثير الحدود فإنه يمكن إيجاد أصفاره الأخرى باستعمال القسمة والتحليل.
- عدد أصفار كثير الحدود أقل من أو يساوي درجته.

إذا كان: $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ كثير حدود

وعلم العدد الحقيقي c صفر للاقتران كثير الحدود $P(x)$ فإن العبارات الرياضية التالية صحيحة

- ناتج تعويض العدد c في كثير الحدود يساوي صفر أي ان $P(c) = 0$
- $x = c$ هو احد حلول (جذور) معادلة كثير الحدود أي ان $P(c) = 0$
- العامل $(x - c)$ هو احد عوامل كثير الحدود $P(x)$ أي ان (كثير حدود $f(x)$) $P(x) = (x - c) f(x)$
- نجد $f(x)$ بقسمة $P(x)$ على $(x - c)$
- النقطة $(c, 0)$ هي نقطة تقاطع منحنى كثير الحدود $P(x)$ مع محور x

خطوات إيجاد اصفار كثير الحدود

- أجد الأصفار النسبية المحتملة لكثير الحدود.
- اجد احد الاصفار بالتجريب بتعويض الاصفار النسبية المحتملة في كثير الحدود
- أحلّل كثير الحدود تحليلاً كاملاً باستعمال القسمة والتحليل.
- أجد أصفار كثير الحدود بمساواة كل عامل من عوامله بالصفر

في البداية أعوض من عوامل الحد الثابت



الاستاذ حمزة ابو الفول

الدرس 1 نظريتا الباقي والعوامل

الوحدة 1 الاقترانات والمقادير الجبرية

نظرية الأصفار النسبية

مثال 4 1 أجد جميع أصفار كثير الحدود: $P(x) = 2x^3 + x^2 - 13x + 6$.

أجد الأصفار النسبية المُحتملة لكثير الحدود.

أجد عوامل الحدّ الثابت (6)، وهي: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$

أجد عوامل المعامل الرئيس (2)، وهي: $\pm 1, \pm 2$

إذن، الأصفار النسبية المُحتملة لكثير الحدود $P(x)$ هي: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}$

اعوض لاختبار بعض الأصفار النسبية المُحتملة. في البداية أعوض من عوامل الحد الثابت

$$P(-1) = 2(-1)^3 + (-1)^2 - 13(-1) + 6 = 18 \quad \times$$

$$P(1) = 2(1)^3 + (1)^2 - 13(1) + 6 = -4 \quad \times$$

$$P(2) = 2(2)^3 + (2)^2 - 13(2) + 6 = 0 \quad \checkmark$$

أتوقّف عن التعويض عندما أجد أوّل صفر لكثير الحدود.

بما أن: $P(2) = 0$ ، فإنّه يوجد لكثير الحدود صفر عندما $x = 2$. إذن، $(x-2)$ عامل من عوامل $P(x)$.

أحلّل كثير الحدود تحليلًا كاملاً باستعمال القسمة والتحليل.

\times	$2x^2$	$5x$	-3	
x	$2x^3$	$5x^2$	$-3x$	0
-2	$-4x^2$	$-10x$	6	

$$\begin{aligned} P(x) &= 2x^3 + x^2 - 13x + 6 \\ &= (x-2)(2x^2 + 5x - 3) \\ &= (x-2)(2x-1)(x+3) \end{aligned}$$

أجد أصفار كثير الحدود بمساواة كل عامل من عوامله بالصفر

$$x-2 = 0 \rightarrow x = 2$$

$$\text{or } 2x-1 = 0 \rightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$\text{or } x+3 = 0 \rightarrow x = -3$$

أصفار $P(x)$ الناتجة من تحليله هي: $2, \frac{1}{2}, -3$



نظرية الأصفار النسبية

مثال 4 2 أجد جميع أصفار كثير الحدود: $P(x) = x^3 - 3x + 2$.

أجد الأصفار النسبية المُحتملة لكثير الحدود.

بما أن معامل الحد الرئيس 1، فإن الأصفار النسبية المُحتملة هي عوامل الحد الثابت الذي يساوي (2).

إذن، الأصفار النسبية المُحتملة لكثير الحدود $P(x)$ هي: $\pm 1, \pm 2$

اعوض لاختبار بعض الأصفار النسبية المُحتملة. في البداية أعوض من عوامل الحد الثابت

$$P(-1) = (-1)^3 - 3(-1) + 2 = 4 \quad \times$$

$$P(1) = (1)^3 - 3(1) + 2 = 0 \quad \checkmark$$

أتوقف عن التعويض عندما أجد أول صفر لكثير الحدود.

بما أن: $P(1) = 0$ ، فإنه يوجد لكثير الحدود صفر عندما $x = 1$. إذن، $(x-1)$ عامل من عوامل $P(x)$.

أحلل كثير الحدود تحليلاً كاملاً.

\times	x^2	x	-2	
x	x^3	x^2	$-2x$	0
-1	$-x^2$	$-x$	2	

ناتج القسمة يساوي $(x^2 + x - 2)$. ومنه، يُمكن تحليل كثير الحدود كما يأتي:

$$\begin{aligned} P(x) &= x^3 - 3x + 2 \\ &= (x - 1)(x^2 + x - 2) \\ &= (x - 1)(x + 2)(x - 1) \end{aligned}$$

أجد أصفار كثير الحدود بمساواة كل عامل من عوامله بالصفر

$$x - 1 = 0 \rightarrow x = 1$$

$$\text{or } x + 2 = 0 \rightarrow x = -2$$

أصفار $P(x)$ الناتجة من تحليله هي: $-2, 1$




الاستاذ حمزة ابو الفول

الدرس 1 نظريتا الباقي والعوامل

الوحدة 1 الاقترانات والمقادير الجبرية

نظرية الأصفار النسبية

أجد جميع أصفار كثير الحدود (a) **تحقق من فهمي** 

$$P(x) = 5x^3 - x^2 - 5x + 1$$

أجد الأصفار النسبية المُحتملة لكثير الحدود.

أجد عوامل الحدّ الثابت (1)، وهي: ± 1

أجد عوامل المعامل الرئيس (5)، وهي: $\pm 1, \pm 5$

إذن، الأصفار النسبية المُحتملة لكثير الحدود $P(x)$ هي: $\pm 1, \pm \frac{1}{5}$

اعوض لاختبار بعض الأصفار النسبية المُحتملة. في البداية أعوض من عوامل الحد الثابت

$$P(1) = 5(1)^3 - (1)^2 - 5(1) + 1 = 0 \quad \checkmark$$

أتوقّف عن التعويض عندما أجد أوّل صفر لكثير الحدود.

بما أن: $P(1) = 0$ ، فإنه يوجد لكثير الحدود صفر عندما $x = 1$. إذن، $(x-1)$ عامل من عوامل $P(x)$.

أحلل كثير الحدود تحليلاً كاملاً باستعمال القسمة والتحليل.

\times	$5x^2$	$4x$	1	
x	$5x^3$	$4x^2$	x	0
-1	$-5x^2$	$-4x$	-1	

$$P(x) = 2x^3 + x^2 - 13x + 6$$

$$= (x-1)(5x^2 + 4x + 1)$$

$$= (x-1)(5x-1)(x+1)$$

أجد أصفار كثير الحدود بمساواة كل عامل من عوامله بالصفر

$$x-1 = 0 \rightarrow x = 1$$

$$\text{or } 5x-1 = 0 \rightarrow x = \frac{1}{5}$$

$$\text{or } x+1 = 0 \rightarrow x = -1$$

أصفار $P(x)$ الناتجة من تحليله هي: $1, \frac{1}{5}, -1$

الإستاذ حمزة أبو الفول

الدرس I نظريتا الباقي والعوامل

الوحدة 1 الاقترانات والمقادير الجبرية

نظرية الأصفار النسبية

(b) أجد جميع أصفار كثير الحدود $Q(x) = x^4 + 6x^3 + 7x^2 - 6x - 8$ **أتحقق من فهمي**

أجد الأصفار النسبية المُحتملة لكثير الحدود.

بما أن معامل الحد الرئيس 1، فإن الأصفار النسبية المُحتملة هي عوامل الحد الثابت الذي يساوي (8).

إذن، الأصفار النسبية المُحتملة لكثير الحدود $Q(x)$ هي: $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8$

اعوض لاختبار بعض الأصفار النسبية المُحتملة.

$$Q(1) = 1^4 + 6(1)^3 + 7(1)^2 - 6(1) - 8 = 0 \quad \checkmark$$

أتوقف عن التعويض عندما أجد أول صفر لكثير الحدود.

بما أن: $Q(1) = 0$ ، فإنه يوجد لكثير الحدود صفر عندما $x = 1$. إذن، $(x-1)$ عامل من عوامل $Q(x)$.

\times	x^3	$7x^2$	14	8	
x	x^4	$7x^3$	$14x^2$	$8x$	0
-1	$-x^3$	$-7x^2$	$-14x$	-8	

$$Q(x) = x^4 + 6x^3 + 7x^2 - 6x - 8$$

$$= (x-1)(x^3 + 7x^2 + 14x + 8)$$

أحلل كثير الحدود تحليلًا كاملاً $x^3 + 7x^2 + 14x + 8$ باستعمال القسمة والتحليل.

بما أن معامل الحد الرئيس 1، فإن الأصفار النسبية المُحتملة هي عوامل الحد الثابت الذي يساوي (8).

إذن، الأصفار النسبية المُحتملة لكثير الحدود $Q(x)$ هي: $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8$

اعوض لاختبار بعض الأصفار النسبية المُحتملة.

$$(-1)^3 + 7(-1)^2 + 14(-1) + 8 = 0 \quad \checkmark$$

\times	x^2	$+6x$	$+8$	
x	x^3	$6x^2$	x	0
+1	x^2	$+6x$	$+8$	

إذن، $(x+1)$ عامل من عوامل $x^3 + 7x^2 + 14x + 8$

$$x^3 + 7x^2 + 14x + 8 = (x+1)(x^2 + 6x + 8)$$

$$= (x+1)(x+4)(x+2)$$

$$Q(x) = x^4 + 6x^3 + 7x^2 - 6x - 8$$

$$= (x-1)(x^3 + 7x^2 + 14x + 8)$$

$$= (x-1)(x+1)(x^2 + 6x + 8)$$

$$= (x-1)(x+1)(x+4)(x+2)$$

$$x-1 = 0 \rightarrow x = 1$$

$$\text{or } x+1 = 0 \rightarrow x = -1$$

$$\text{or } x+4 = 0 \rightarrow x = -4$$

$$\text{or } x+2 = 0 \rightarrow x = -2$$

أصفار $Q(x)$ الناتجة من تحليله هي: $1, -1, -4, -2$

حلُ معادلات كثيرات الحدود

معادلة كثير الحدود هي معادلة يمكن كتابتها في صورة: $P(x) = 0$ حيث $P(x)$ كثير حدود من أيّ درجة ويسمى كثير الحدود المرتبط بالمعادلة.

خطوات حل معادلة كثير حدود

يمكن حلُّ بعض معادلات كثيرات الحدود باستعمال طرائق التحليل البسيطة التي درست سابقا مثل التحليل بإخراج عامل مشترك أو باستعمال التجميع لكن عندما لا توجد طريقة واضحة للتحليل بالاعتماد على طرق التحليل البسيطة السابقة (مثل إخراج العامل المشترك أو استعمال التجميع) طبق ما يلي لحل المعادلة

■ نكتب كثير الحدود المرتبط بالمعادلة

■ نستخدم نظرية الأصفار النسبية لتحليل كثير الحدود

(طريقة التجميع طريقة أسرع وأسهل مع المعادلات ذات الأربعة حدود)

■ أجد الأصفار النسبية المُحتملة لكثير الحدود المرتبط بالمعادلة

■ اعوض لاختبار بعض الأصفار النسبية المُحتملة.

— يتم تجريب أعداد من عوامل الحد الثابت في كثير الحدود او لا

— العدد الذي يجعل قيمة كثير الحدود صفر هو أول صفر (حل) للمعادلة

■ أحلّل كثير الحدود باستعمال الأصفار النسبية

— بمجرد إيجاد الصفر الأول يتم قسمة كثير الحدود الأصلي على هذا العامل باستخدام

طريقة الجدول او القسمة الطويلة للحصول على كثير حدود من درجة أقل

— يتم تحليل كثير الحدود الناتج عن القسمة (غالبا ما يكون عبارة تربيعية) لإيجاد باقي الأصفار

■ نجد حلول المعادلة

— يتم مساواة كل عامل من عوامل كثير الحدود (بعد التحليل الكامل) بالصفر لإيجاد جميع حلول المعادلة

سنطبق هذه الخطوات والحالات في الامثلة التالية ان شاء الله

ونذكر ان حل معادلات كثيرات الحدود يشبه تماما إيجاد الأصفار حيث أن أصفار كثيرات الحدود هي نفسها حلول معادلتها

وفي التمثيل البياني فإن اصفار الاقتران نجدها عند نقطة التقاطع مع محور x .

حل معادلات كثيرات الحدود

طريقة التجميع (لتحليل بعض المعادلات الرباعية الحدود)

تعتمد الطريقة على إخراج العامل المشترك من كل حددين متجاورين

إذا نتج أقواس متشابهة نخرج عامل مشترك مرة أخرى ونكمل عملية التحليل

طريقة التجميع طريقة أسرع وأسهل مع المعادلات ذات الأربعة حدود

ملاحظة: إذا كانت المعادلة من اربعة حدود عند التحليل بالتجميع ليس بالضرورة ان ينتج اقواس متشابهة

عندها تفشل هذه الطريقة ونعود لطريقة الاصفار النسبية بالتجريب والقسمة

$$x^3 - x^2 - 16x + 16 = 0 \quad \text{أحل المعادلة:}$$

مثال

يمكن تحليل $x^3 - x^2 - 16x + 16$ بتجميع الحدود ثم عامل مشترك

$$x^2(x - 1) - 16(x - 1) = 0$$

$$(x - 1)(x^2 - 16) = 0$$

$$(x - 1)(x - 4)(x + 4) = 0$$

$$x - 1 = 0 \rightarrow x = 1$$

■ نجد حلول المعادلة

$$\text{or } x + 4 = 0 \rightarrow x = -4$$

$$\text{or } x - 4 = 0 \rightarrow x = 4$$

إذن، حلول المعادلة هي: $x = 1, x = -1$.

$$x^3 - x^2 - x + 1 = 0 \quad \text{أحل المعادلة:}$$

مثال

يمكن تحليل $x^3 - x^2 - x + 1$ بتجميع الحدود ثم عامل مشترك

$$x^2(x - 1) - (x - 1) = 0$$

$$(x - 1)(x^2 - 1) = 0$$

$$(x - 1)(x - 1)(x + 1) = 0$$

$$x - 1 = 0 \rightarrow x = 1$$

■ نجد حلول المعادلة

$$\text{or } x + 1 = 0 \rightarrow x = -1$$

إذن، حلول المعادلة هي: $x = 1, x = -1$.

المعادلة من اربعة حدود
نتج اقواس متشابهة
يمكن التحليل بالتجميع

المعادلة من اربعة حدود
نتج اقواس متشابهة
يمكن التحليل بالتجميع



الاستاذ حمزة ابو الفول

الدرس I نظريتا الباقي والعوامل

الوحدة 1 الاقترانان والمقادير الجبرية

حل معادلات كثيرات الحدود

مثال 5 أحل المعادلة: $x^3 - x^2 - 14x + 24 = 0$

■ لاحظ لا توجد طريقة واضحة للتحليل بالاعتماد على طرق التحليل البسيطة السابقة

■ نكتب كثير الحدود المرتبط بالمعادلة $P(x) = x^3 - x^2 - 14x + 24$

■ نستخدم نظرية الاصفار النسبية لتحليل كثير الحدود

■ أجد الأصفار النسبية المُحتملة لكثير الحدود المرتبط بالمعادلة.

بما أن معامل الحد الرئيس هو (1)، فإن الأصفار النسبية المُحتملة هي عوامل الحد الثابت الذي يساوي (24).

إذن، الأصفار النسبية المُحتملة لكثير الحدود $P(x)$ هي: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 8, \pm 12, \pm 24$

■ اعوض لاختبار بعض الأصفار النسبية المُحتملة.

$$P(1) = (1)^3 - (1)^2 - 14(1) + 24 = 10 \quad \times$$

$$P(2) = (2)^3 - (2)^2 - 14(2) + 24 = 0 \quad \checkmark$$

بما أن: $P(2) = 0$ ، فإنه يوجد لكثير الحدود صفر عندما $x = 2$. إذن، $(x-2)$ عامل من عوامل $P(x)$.

■ أحل كثير الحدود باستعمال الأصفار النسبية

\times	x^2	x	-12	
x	x^3	x^2	$-12x$	0
-2	$-2x^2$	$-2x$	24	

$$x^3 - x^2 - 14x + 24 = 0$$

$$(x-2)(x^2 + x - 12) = 0$$

$$(x-2)(x+4)(x-3) = 0$$

■ نجد حلول المعادلة

$$x-2 = 0 \rightarrow x = 2$$

$$\text{OR } x+4 = 0 \rightarrow x = -4$$

$$\text{OR } x-3 = 0 \rightarrow x = 3$$

إذن، حلول المعادلة هي: $x = 2, x = -4, x = 3$.

ملاحظة: لاحظ أن المعادلة $x^3 - x^2 - 14x + 24 = 0$ من اربعة حدود فهل يمكن التحليل بتجميع الحدود

$$x^2(x-1) - 14(x-2) = 0$$

لم ينتج اقواس متشابهة لذلك تفشل هذه الطريقة ونعود لطريقة الاصفار النسبية بالتجريب والقسمة

إذا كانت المعادلة من اربعة حدود عند التحليل بالتجميع ليس بالضرورة ان ينتج اقواس متشابهة عندها تفشل هذه الطريقة ونعود لطريقة الاصفار النسبية بالتجريب والقسمة



الإستاذ حمزة أبو الفول

الدرس I نظريتا الباقي والعوامل

الوحدة 1 الاقترانات والمقادير الجبرية

حل معادلات كثيرات الحدود

أتحقق من فهمي (a) أحل المعادلة: $x^3 - x^2 - 9x + 9 = 0$

يمكن تحليل $x^3 - x^2 - 9x + 9$ بتجميع الحدود ثم عامل مشترك

$$x^2(x - 1) - 9(x - 1) = 0$$

$$(x - 1)(x^2 - 9) = 0$$

$$(x - 1)(x - 3)(x + 3) = 0$$

■ نجد حلول المعادلة

$$x - 1 = 0 \rightarrow x = 1$$

$$\text{or } x + 3 = 0 \rightarrow x = -3$$

$$\text{or } x - 3 = 0 \rightarrow x = 3$$

إذن، حلول المعادلة هي: $x = 1, x = -3, x = 3$.

■ لاحظ يمكن تحليل $x^3 - x^2 - 9x + 9$ باستخدام نظرية الاصفار النسبية

■ نكتب كثير الحدود المرتبط بالمعادلة

$$P(x) = x^3 - x^2 - 9x + 9$$

■ نستخدم نظرية الاصفار النسبية لتحليل كثير الحدود

أجد الأصفار النسبية المُحتملة لكثير الحدود المرتبط بالمعادلة.

بما أن معامل الحدّ الرئيس هو (1)، فإنّ الأصفار النسبية المُحتملة هي عوامل الحدّ الثابت الذي يساوي (9).

إذن، الأصفار النسبية المُحتملة لكثير الحدود $P(x)$ هي: $\pm 1, \pm 2, \pm 3$

اعوض لاختبار بعض الأصفار النسبية المُحتملة.

$$P(1) = 0 \leftarrow (x-1) \text{ عامل من عوامل } P(x)$$

أحلل كثير الحدود باستعمال الأصفار النسبية

$$x^3 - x^2 - 9x + 9 = (x - 1)(x^2 - 9)$$

$$= (x - 1)(x - 3)(x + 3)$$

×	x^2	-9	
x	x^3	-9x	0
-1	$-x^2$	9	

المعادلة من أربعة حدود
تتبع القواسم متشابهة
يمكن التخطي بالتجميع



الإستاذ حمزة أبو الفول

الدرس I نظريتا الباقي والعوامل

الوحدة 1 الاقترانات والمقادير الجبرية

حلُّ معادلات كثيرات الحدود

(b) أحلُّ المعادلة: $x^3 + 3x^2 - 4 = 0$ **أتحقّق من فهمي**

كثير الحدود المرتبط بالمعادلة هو: $P(x) = x^3 + 3x^2 - 4$

$P(1) = 0$ ← عامل $(x-1)$ من عوامل $P(x)$

×	x^2	$4x$	4	
x	x^3	$4x^2$	$4x$	0
-1	$-x^2$	$-4x$	-4	

$$x^3 + 3x^2 - 4 = 0$$

$$(x - 1)(x^2 + 4x + 4) = 0$$

$$(x - 1)(x + 2)(x + 2) = 0$$

$$x - 1 = 0 \rightarrow x = 1$$

$$\text{or } x + 2 = 0 \quad x = -2$$

إذن، حلول المعادلة هي: $x = 1, x = -2$.

يمكن الحل بالطريقة التالية

$$x^3 + 3x^2 - 4 = 0 \rightarrow x^3 + 3x^2 - 1 - 3 = 0$$

$$\rightarrow (x^3 - 1) + (3x^2 - 3) = 0$$

$$\rightarrow (x^3 - 1) + 3(x^2 - 1) = 0$$

$$\rightarrow (x - 1)(x^2 + x + 1) + 3(x - 1)(x + 1) = 0$$

$$\rightarrow (x - 1) \left((x^2 + x + 1) + 3(x + 1) \right) = 0$$

$$\rightarrow (x - 1) \left(x^2 + x + 1 + 3x + 3 \right) = 0$$

$$\rightarrow (x - 1)(x^2 + 4x + 4) = 0$$

$$\rightarrow (x - 1)(x + 2)(x + 2) = 0$$

$$x - 1 = 0 \rightarrow x = 1$$

$$\text{or } x + 2 = 0 \rightarrow x = -2$$

إذن، حلول المعادلة هي: $x = 1, x = -2$.

حل معادلات كثيرات الحدود

ملاحظات

- أصفار كثيرات الحدود هي نفسها حلول معادلاتها، وهي أيضاً جذور المعادلة وإحداثيات نقاط تقاطع منحنى كثير الحدود مع محور x
- يمكن إيجاد الحل الأول (أو الصفر الأول) لمعادلة كثير الحدود
- نساوي المعادلة بالصفر ثم نجرب أعداد من عوامل الحد الثابت في كثير الحدود أولاً وإذا لم نجد نلجأ إلى تجريب باقي الأصفار المحتملة
- العدد الذي يجعل قيمة كثير الحدود تساوي صفر عند التعويض به هو الحل الأول للمعادلة (أو الصفر الأول)
- إيجاد باقي حلول المعادلة بعد الحل الأول
- إذا كان الحل الأول $x=a$ ، فإن $(x-a)$ هو عامل من عوامل كثير الحدود
- بما أننا وجدنا العامل الأول وهو $(x-a)$ نقوم بقسمة كثير الحدود الأصلي على $(x-a)$ باستخدام القسمة الطويلة أو طريقة الجدول
- ناتج القسمة سيكون كثير حدود من درجة أقل وغالباً ما يكون عبارة تربيعية يمكن تحليلها لإيجاد باقي الحلول
- طريقة "تجميع الحدود" في حل معادلات كثيرات الحدود
- طريقة تجميع الحدود تُستخدم لتحليل كثيرات الحدود ذات الأربعة حدود بشكل أساسي
- تعتمد على تقسيم كثير الحدود إلى مجموعتين كل حدين مع بعض ثم اخراج عامل مشترك من كل مجموعة
- إذا نتج قوس مشترك بين المجموعتين نخرجه كعامل مشترك جديد ونكمل التحليل
- إذا لم ينتج قوس مشترك بين المجموعتين تفشل هذه الطريقة ونعود إلى طريقة الأصفار النسبية
- تعتبر هذه الطريقة أسرع من طريقة الأصفار النسبية
- التعامل مع العبارة التربيعية الناتجة عن القسمة
- العبارة التربيعية الناتجة عن القسمة تحلل عادةً باستخدام طرق تحليل العبارة التربيعية
- يمكن أيضاً استخدام المميز للتأكد مما إذا كانت العبارة التربيعية قابلة للتحليل إلى جذور حقيقية

الاستاذ حمزة ابو الفول

الدرس 1 نظريتا الباقي والعوامل

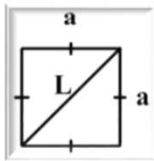
الوحدة 1 الاقترانان والمقادير الجبرية

تطبيقات حياتية

- يمكن نمذجة كثير من المواقف الحياتية والعلمية باستعمال معادلات كثيرات حدود يتطلَّب حلُّها استعمال نظرية الأصفار النسبية.
- عند حل المسائل الحياتية المتعلقة بالحجوم التي تقود إلى معادلات تكعيبية أو من درجات أعلى، يتم اتباع نفس خطوات حل معادلات كثيرات الحدود
- مع الانتباه إلى أن الأبعاد الفيزيائية (مثل الطول، العرض، الارتفاع، نصف القطر) يجب أن تكون قيمًا موجبة لذلك لا نجرب قيمًا سالبة ونرفض القيم السالبة الناتجة من الحل

قوانين متعلقة ببعض الاشكال الهندسية

المربع

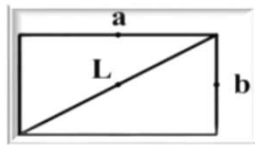


$$A = a^2$$

$$P = 4a$$

$$L = \sqrt{2} a$$

المستطيل

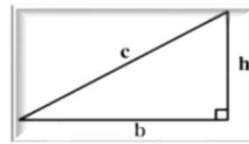


$$A = ab$$

$$P = 2a + 2b$$

$$L = \sqrt{a^2 + b^2}$$

المثلث قائم الزاوية

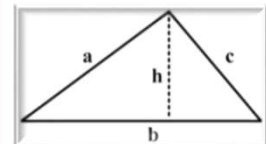


$$A = \frac{1}{2}bh$$

$$P = b + h + c$$

$$c = \sqrt{b^2 + h^2}$$

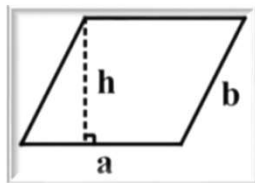
المثلث



$$A = \frac{1}{2}bh$$

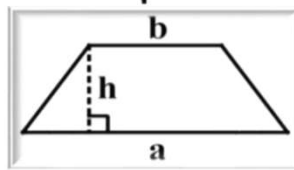
$$P = a + b + c$$

متوازي الاضلاع



$$A = ah$$

شبه المنحرف

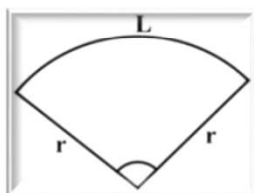


$$A = \frac{1}{2}(a + b)h$$

المثلث متطابق الضلعين



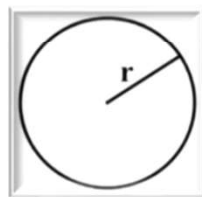
القطاع الدائري



$$A = \frac{1}{2}r^2\theta$$

$$L = r\theta \quad \theta \text{ بالراديان}$$

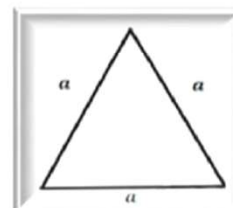
الدائرة



$$A = \pi r^2$$

$$C = 2\pi r$$

المثلث متطابق الاضلاع



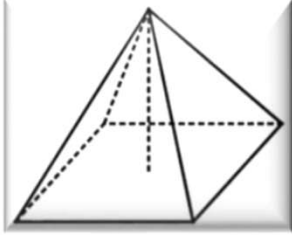
$$A = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$$

$$P = 3a$$

قياس كل زاوية في المثلث المتطابق الاضلاع 60

قوانين متعلقة ببعض المجسمات

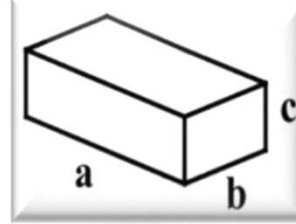
الهزم الرباعي



الحجم = ثلث × م القاعدة × الارتفاع

$$V = \frac{1}{3} A h$$

متوازي المستطيلات

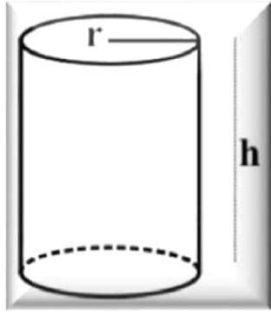


$$V = a \cdot b \cdot c$$

$$A_{\text{الكلية}} = 2ab + 2bc + 2ac$$

$$A_{\text{القاعدة}} = ab$$

الاسطوانة

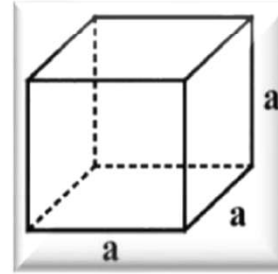


$$V = \pi r^2 h$$

$$A_{\text{الجانبية}} = 2\pi r h$$

$$A_{\text{الكلية}} = 2\pi r h + 2\pi r^2$$

المكعب

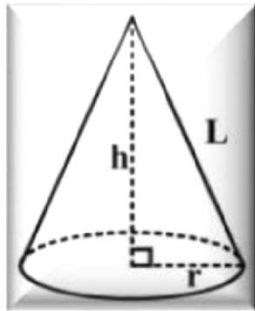


$$V = a^3$$

$$A_{\text{الكلية}} = 6a^2$$

$$A_{\text{القاعدة}} = a^2$$

المخروط الدائري



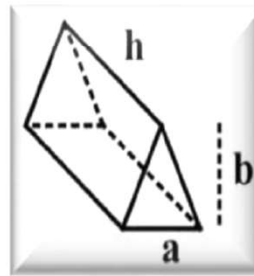
$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

$$A_{\text{الجانبية}} = \pi r L$$

$$A_{\text{الكلية}} = \pi r^2 + \pi r L$$

$$L = \sqrt{r^2 + h^2}$$

المنشور الثلاثي

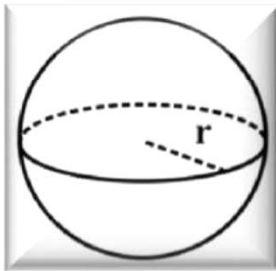


الحجم - مساحة القاعدة × الارتفاع

المساحة الجانبية - محيط القاعدة × ارتفاع المنشور

المساحة الكلية - الجانبية + القاعدتين

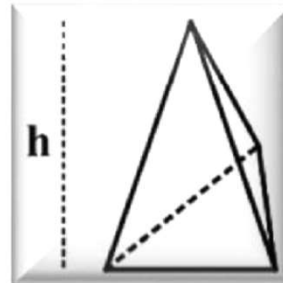
الكرة



$$V = \frac{4}{3} \pi r^3$$

$$A_{\text{السطح}} = 4\pi r^2$$

الهزم الثلاثي



الحجم = ثلث × م القاعدة × الارتفاع

$$V = \frac{1}{3} A h$$

الاستاذ حمزة ابو الفول

الدرس 1 نظريتا الباقي والعوامل

الوحدة 1 الاقترانان والمقادير الجبرية

تطبيقات حياتية

مثال 6 هندسة العمارة: صنع مهندس معماري نموذجًا لبنانية على هيئة هرم قاعدته مُربَّعة الشكل باستعمال طابعة ثلاثية الأبعاد. إذا كان ارتفاع النموذج يقل 2 dm عن طول ضلع قاعدته، وكان حجمه 25 dm^3 ، فما أبعاد النموذج؟



أستعمل قانون حجم الهرم لكتابة معادلة.

بما أن قاعدة الهرم مُربَّعة، فإنني أفترض أن طول ضلعها $x \text{ dm}$. ومنه، فإن مساحتها x^2 .
وبما أن ارتفاع الهرم يقل 2 dm عن طول ضلع القاعدة، فإن ارتفاع الهرم هو $(x-2) \text{ dm}$.

$$V = \frac{1}{3} \times \text{مساحة القاعدة} \times \text{الارتفاع} = \frac{1}{3} \times B \times h$$

$$25 = \frac{1}{3} \times x^2 \times (x-2)$$

$$x^3 - 2x^2 = 75 \rightarrow x^3 - 2x^2 - 75 = 0$$

حجم الهرم (V) يساوي
ثلث مساحة قاعدته B في
ارتفاعه (h).

أجد الأصفار النسبية المُحتملة لكثير الحدود المرتبط بالمعادلة، وهو: $P(x) = x^3 - 2x^2 - 75$.
الأصفار النسبية المُحتملة لكثير الحدود $P(x)$ هي: $\pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 15, \pm 25, \pm 75$.

اعوض لاختبار بعض الأصفار النسبية المُحتملة.

$$P(3) = (3)^3 - 2(3)^2 - 75 = -66 \quad \times$$

$$P(5) = (5)^3 - 2(5)^2 - 75 = 0 \quad \checkmark$$

بما أن الارتفاع $(x-2)$ ،
فهذا يدل على أن $x > 2$ ؛
لذا، أختبر الأصفار
النسبية التي تزيد على 2

بما أن الطول لا يُمكن أن
يكون سالبًا، فإنني أختبر
الأصفار النسبية الموجبة فقط.

أحلل المعادلة باستعمال الأصفار النسبية، ثم أحلها.

$$x^3 - 2x^2 - 75 = 0$$

$$(x-5)(x^2 + 3x + 15) = 0$$

$$x-5 = 0 \quad \text{or} \quad x^2 + 3x + 15 = 0$$

بما أن العامل التربيعي $(x^2 + 3x + 15)$ مُميَّزه سالب فإنه لا توجد له أصفار
إذن $x = 5$ هو الحل الوحيد للمعادلة.

إذن، طول قاعدة النموذج 5 dm، وارتفاعه 3 dm

\times	x^2	$3x$	15	
x	x^3	$3x^2$	$15x$	0
-5	$-5x^2$	$-15x$	-75	

مُميِّز المعادلة التربيعية
 $ax^2 + bx + c = 0$ هو:
 $\Delta = b^2 - 4ac$



الاستاذ حمزة ابو الفول

الدرس I نظريتا الباقي والعوامل

الوحدة 1 الاقترانات والمقادير الجبرية

أدرّب وأحلّ المسائل

7 احلّ الاقتران $f(x) = x^3 + 3x^2 - 13x - 15$ تحليلا كاملا

7





الاستاذ حمزة ابو الفول

الدرس I نظريتا الباقي والعوامل

الوحدة 1 الاقترانات والمقادير الجبرية

أدرّب وأحلّ المسائل

8 احلّ الاقتران $g(x) = x^4 - 7x^3 + 13x^2 + 3x - 18$ تحليلا كاملا



الاستاذ حمزة ابو الفول

الدرس I نظريتا الباقي والعوامل

الوحدة 1 الاقترانات والمقادير الجبرية

أدرّب وأحلّ المسائل

حل المعادلة التالية $3x^3 + 3x^2 - 14x - 8 = 0$

13





الاستاذ حمزة ابو الفول

الدرس I نظريتا الباقي والعوامل

الوحدة 1 الاقترانات والمقادير الجبرية

أدرّب وأحلّ المسائل



$$6x^3 - 13x^2 + x + 2 = 0$$

حل المعادلة التالية

14

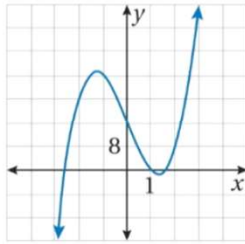


الاستاذ حمزة ابو الفول

الدرس I نظريتا الباقي والعوامل

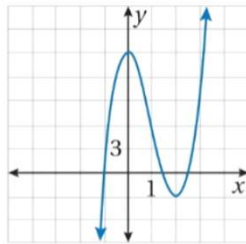
الوحدة 1 الاقترانات والمقادير الجبرية

أدرّب وأحلّ المسائل



15 أستعمل التمثيل البياني لمنحنى الاقتران $f(x) = 4x^3 - 20x + 16$

لإيجاد أحد أصفاره النسبية، ثمّ إيجاد جميع أصفار الاقتران $f(x)$



16 أستعمل التمثيل البياني لمنحنى الاقتران $f(x) = 4x^3 - 12x^2 - x + 15$

لإيجاد أحد أصفاره النسبية، ثمّ إيجاد جميع أصفار الاقتران $f(x)$



الاستاذ حمزة ابو الفول

الدرس 1 نظريتا الباقي والعوامل

الوحدة 1 الاقترانات والمقادير الجبرية

أدرّب وأحلّ المسائل



17 إذا كان: $x = 1, x = 4$ هما حلين للمعادلة: $x^3 - 3x^2 + ax + b = 0$ ، فأجد الحلّ الثالث لها.

18 إذا كان باقي قسمة: $f(x) = x^3 + ax^2 + x + 5$ على $x-1$ يساوي مثلي باقي قسّمته على $x + 1$ ، فما قيمة a ؟





19 منحوتات جليدية: تُصنَع بعض المنحوتات الجليدية عن طريق مِلء قالب بالماء ثمّ تجميده. إذا كانت إحدى المنحوتات الجليدية على شكل هرم قاعدته مُربّعة الشكل، وارتفاعها يزيد 1 m على طول قاعدتها، فأجد أبعاد المنحوتة إذا كان حجمها 4 m^3

الاستاذ حمزة ابو الفول

الدرس 1 نظريتا الباقي والعوامل

الوحدة 1 الاقترانات والمقادير الجبرية

أدرب وأحل المسائل



23 أحل المسألة الواردة في بداية الدرس.



صندوق شاحنة على شكل متوازي مستطيلات، أبعاده بالأمتار:

مسألة اليوم

2. ما قيمة x التي تجعل حجم الصندوق 48 m^3 ؟
 $x^2 + 6x - 19$

