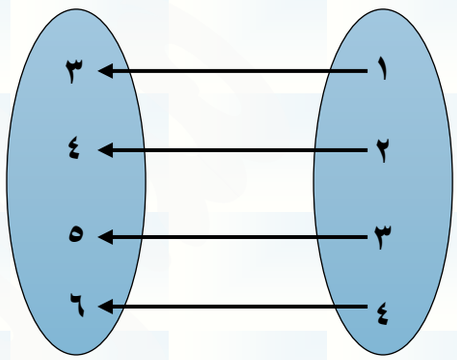
الوحدة الثالثة : الاقتران التربيعي

الاقتران : هو علاقة بين مجموعتين من الأعداد ، بحيث يرتبط كل عنصر من المجموعة الأولى بعنصر واحد فقط في المجموعة الثانية

وتسمّى المجموعة الأولى (المجال) ويرمز لها بالرمز س

والمجموعة الثانية (المدى) ويرمز لها بالرمز ص

مثال :



* ولكل اقتران قاعدة تربط بين عناصر المجال مع عناصر المدى وتكتب على الصورة مثلاً:

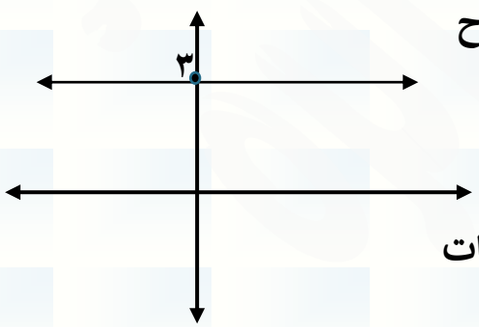
ق(س) = س + ٢

أنواع الاقترانات

١) الاقتران الثابت الصورة العامّة لقاعدته ق(س) = أ ، حيث أ ∈ ح

مجاله الأعداد الحقيقية ، ومداه { أ }

مثال : ق(س) = ٣



وعند تمثيله بيانيّاً ، يمثّل خطّاً مستقيماً يوازي محور السينات ويمر بالنقطة (أ)

---

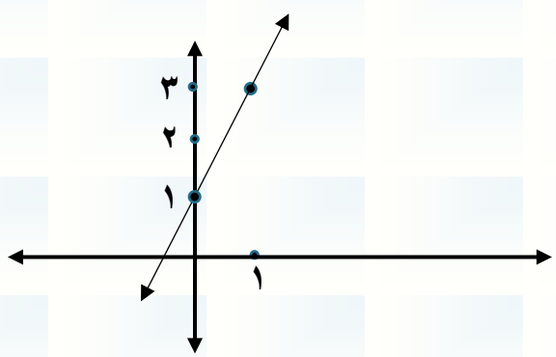
٢) الاقتران الخطي الصورة العامّة لقاعدته ق(س) = أ س + ب ، حيث أ ، ب ∈ ح ، أ ≠ صفر

مجاله ومداه الأعداد الحقيقية

مثال : ق(س) = ٢س + ١

وعند تمثيله بيانيّاً ، يمثّل خطّاً مستقيماً مائلاً

س	١	٠
ص	٣	١

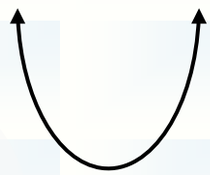
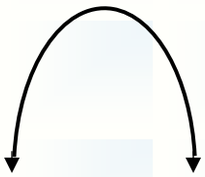


٣) **الاقتران التربيعي** الصورة العامّة لقاعدته ق(س) = أ س^{٢} + ب س + جـ

حيث أ ، ب ، جـ ∋ ح ، أ ≠ صفر

ويسمّى العدد أ معامل س^{٢} ، والعدد ب معامل س ، والعدد جـ الحد المُطلق أو الحد الثابت

* **تمثيل الاقتران التربيعي بيانيّاً :**

عندما أ > ٠	عندما أ < ٠
يكون منحنى الاقتران التربيعي مفتوحاً للأعلى	يكون منحنى الاقتران التربيعي مفتوحاً للأسفل
	
له قيمة صغرى = ق $(\frac{-ب}{٢أ})$	له قيمة عظمى = ق $(\frac{-ب}{٢أ})$
مداه = ص ≥ ق $(\frac{-ب}{٢أ})$	مداه = ص ≤ ق $(\frac{-ب}{٢أ})$
معادلة محور التماثل هي س = $\frac{-ب}{٢أ}$	معادلة محور التماثل هي س = $\frac{-ب}{٢أ}$
رأس المنحنى $(\frac{-ب}{٢أ}$ ، ق $(\frac{-ب}{٢أ}))$	رأس المنحنى $(\frac{-ب}{٢أ}$ ، ق $(\frac{-ب}{٢أ}))$

مثال (١) : مثّل الاقتران التالي بيانيّاً

ق (س) = س^{٢} + ٢س – ٣

إحداثيا الرأس (س ، ص)

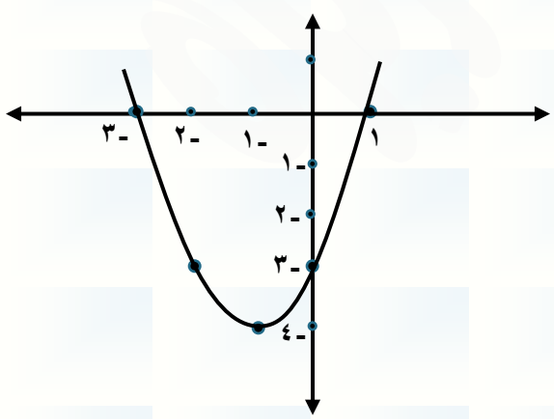
س = $\frac{-ب}{٢أ}$ = $\frac{-٢}{٢}$ = -١

ق(-١) = (-١)^{٢} + ٢ × -١ – ٣

= ١ + -٢ – ٣ = -٤

الرأس (-١ ، -٤)

س	١	٠	-١	-٢	-٣
ص	٠	-٣	-٤	-٣	٠



١) المجال : ح ، ٢) المدى : ص ≤ -٤

٣) معادلة محور التماثل س = -١

٤) له قيمة صغرى = -٤

مثال (٢) : مثّل الاقتران التالي بيانياً

هـ (س) = ٤س – س^{٢} – ١

إحداثيا الرأس (س ، ص)

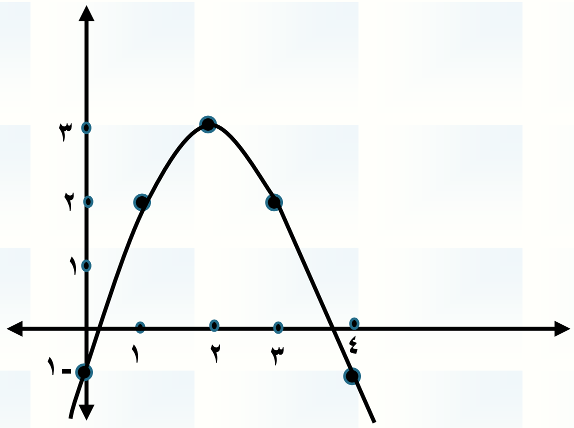
س = -ب / ٢ أ = -٤ / -٢ = ٢

ق(٢) = ٤ ×٢ – (٢)^{٢} – ١

= ٨ – ٤ – ١ = ٣

الرأس (٢ ، ٣)

س	٤	٣	٢	١	٠
ص	-١	٢	٣	٢	-١



١) المجال : ح ، ٢) المدى : ص ≤ ٣

٣) معادلة محور التماثل س = ٢

٤) له قيمة عظمى = ٣

.*.

المقذوفات :

عند قذف جسيم إلى أعلى فإن ارتفاع الجسيم عند لحظة ما يكون مرتبطاً بزمن تلك اللحظة أي أن الارتفاع يكون اقتراناً متغيّره الزمن ويكون الاقتران تربيعيّاً

مثال : قذف جسيم إلى أعلى حسب العلاقة ف(ن) = ٢٤ن – ٤ن^{٢}+ ١٥ ، حيث ف: المسافة بالأمتار ن : الزمن بالثواني ، ما أقصى ارتفاع يمكن أن يصله الجسم ؟

الحل : ن = -ب / ٢ أ = -٢٤ / -٨ = ٣ ث

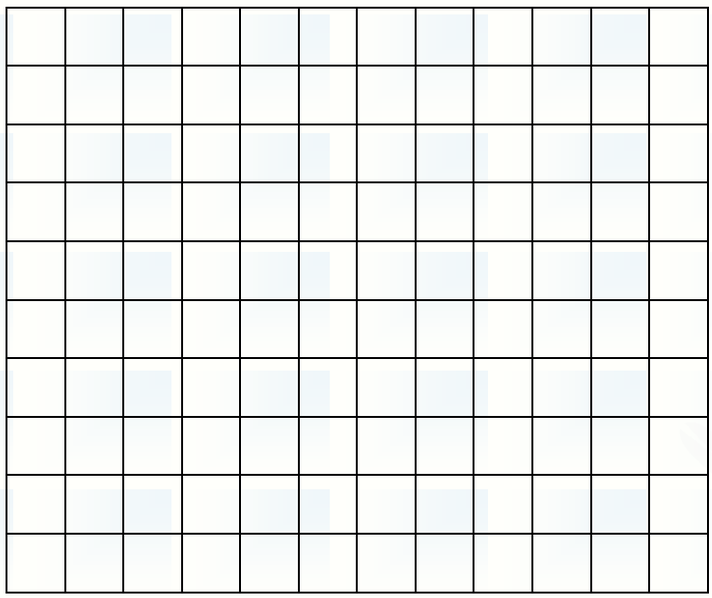
أقصى ارتفاع يصل إليه الجسم = ف (٣) = ٢٤ × ٣ – ٤ × (٣)^{٢} + ١٥

= ٧٢ – ٣٦ + ١٥

= ٥١ م

تدريب : ١) مثّل الاقترانات الأتية بيانيّاً ثمّ أكمل ما يلي :

أ) ق(س) = ٢س^{٢} + ٤س – ٥



المجال : .....

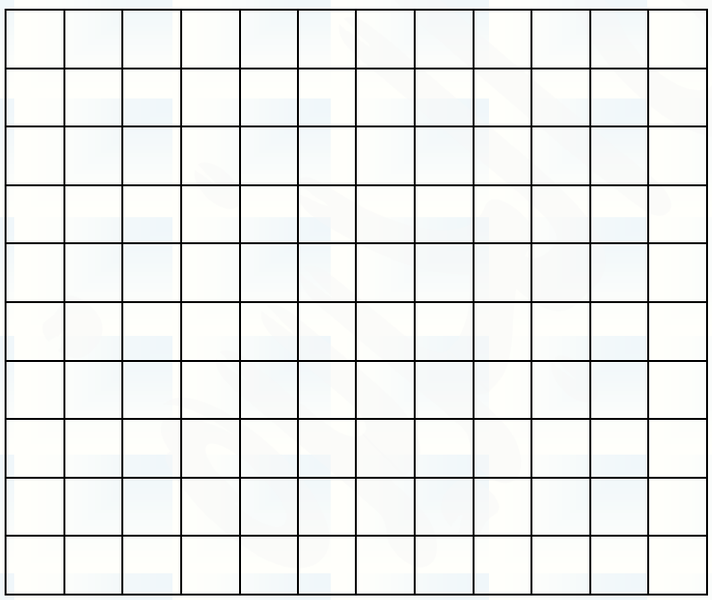
المدى : .....

معادلة محور التماثل : .....

الاقتران له قيمة ..... = ...

.....

ب) هـ(س) = ٨س – ٢س^{٢}



المجال : .....

المدى : .....

معادلة محور التماثل : .....

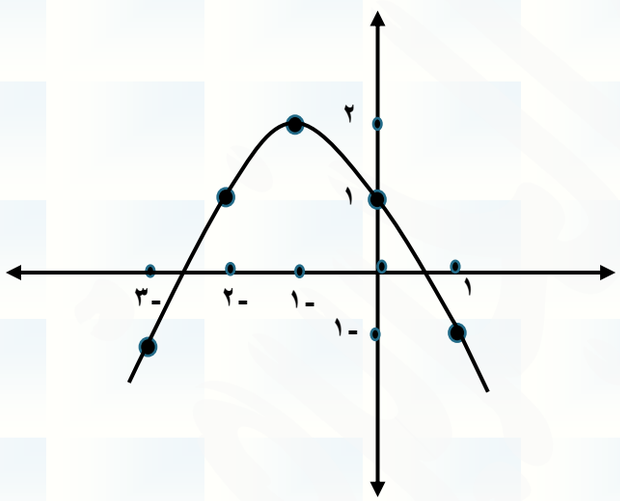
الاقتران له قيمة ..... = ...

٢) قذف سهم من قوس إلى أعلى بسرعة ابتدائية قدرها ٣٠متراً/ ثانية وفق العلاقة

ف(ن) = ٣٥ + ٢٠ن – ٢ن^{٢} ، حيث ن الزمن بالثواني ، ف الارتفاع بالأمتار ،

ما أقصى ارتفاع يمكن أن يصله السهم ، وما هو الارتفاع الذي يصل اليه السهم بعد ١٠ ثوان ؟

٣) اكتب قاعدة الاقتران التربيعي معتمداً على الرسم



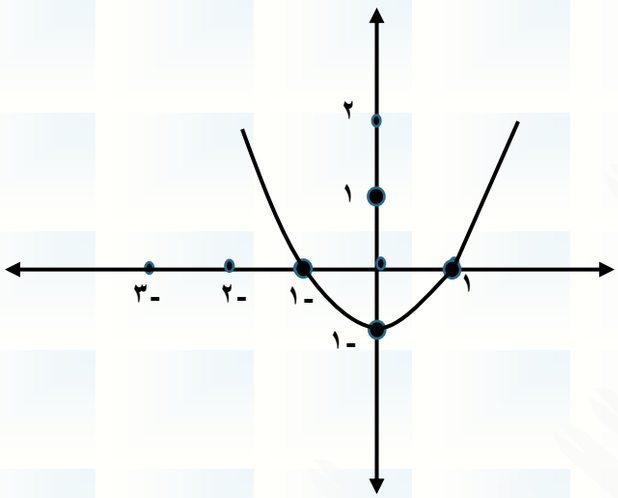
أصفار الاقتران التربيعي

الإحداثي السيني لنقط تقاطع منحنى الاقتران ق مع محور السينات تمثّل أصفار هذا الاقتران

أي أن العدد (أ) يسمّى صفراً للاقتران ق إذا كان ق(أ) = صفر

* يمكن إيجاد أصفار الاقتران التربيعي من الرسم

مثال : من الشكل أصفار الاقتران هما { ١ ، -١ }



* أو يمكن إيجاد الأصفار إذا عُلمت قاعدة الاقتران

مثال : جد أصفار الاقتران ق(س) = س^{٢} + ٤س – ١٢

إحداثيا الرأس (س ، ص)

س = $\frac{-ب}{٢أ}$ = $\frac{-٤}{٢}$ = -٢

ق(٢) = (-٢)^{٢} + ٤ × -٢ – ١٢

= ٤ + -٨ – ١٢ = -١٦

الرأس (-٢ ، -١٦)

٢	١	س	٠	-١	-٢	-٣	-٤	-٥	-٦
٠	-٧	ص	-١٢	-١٥	-١٦	-١٥	-١٢	-٧	٠

* نلاحظ أن قيم ص تتزايد ، لذلك نعوّض نقاطاً أخرى حتى نصل إلى أصفار الاقتران

إذاً أصفار الاقتران هما : س = ٢ ، س = -٦ ، لأن ق(٢) = ٠ ، ق(-٦) = ٠

تدريب : ١) جد أصفار الاقترانات الآتية :

١) ق(س) = ٥س – س^{٢}

٢) ل(س) = (٢ – س)^{٢} – ١

---

٢) إذا كان العدد ٣ صفراً للإقتران ق(س) = ٢س^{٢} – ب س + ٩ ، جد قيمة ب ؟

---

٣) إذا كان العدد -٥ صفراً للإقتران هـ(س) = أس^{٢} – ٧س + جـ ، وكان هـ (٢) = ١٤
جد قيمة كل من العددين الحقيقيين أ ، جـ ؟

المعادلات

* الصورة العامّةللمعادلة الخطيّة بمتغيّر واحد : أ س + ب = صفر ، أ ≠ ٠

مثال : ٥س + ٣ = -٧

لحلّ المعادلة : ٥س + ٣ = -٧

-٣ -٣

$\frac{٥س}{٥} = \frac{-١٠}{٥}$

س = -٢

* الصورة العامّةللمعادلة التربيعيّة بمتغيّر واحد : أ $س^{٢}$ + ب س + جـ = صفر ، أ ≠ ٠

ويسمّى العدد $س_{١}$ حلّاً أو جذراً للمعادلة إذا كان أ $س_{١}^{٢}$ + ب $س_{١}$ + جـ = ٠

حلّ المعادلة التربيعيّة

١) بيانيّاً | ٢) بالتحليل إلى العوامل | ٣) بإكمال المربّع | ٤) بالقانون العام

أوّلاً : بيانيّاً :

مثال : لحل المعادلة $س^{٢}$ + ٤س + ٣ = ٠ بيانيّا

١) كتابة قاعدة الاقتران التربيعي المرافقة للمعادلة التربيعيّة : ق(س) = $س^{٢}$ + ٤س + ٣

٢) إيجاد أصفار الاقتران التربيعي ، فتكون الأصفار هي جذوراً للمعادلة التربيعيّة

إحداثيا الرأس (س ، ص)

$س = \frac{-ب}{٢أ} = \frac{-٤}{٢} = -٢$

ق(٢) = $(-٢)^{٢}$ + ٤ × -٢ +٣

= ٤ + -٨ + ٣ = -١

الرأس (-٢ ، -١)

س	٠	-١	-٢	-٣	-٤
ص		٠	-١	٠	

الاقتران له صفران هما : س = -١ ، س = -٣

إذاً جذرا المعادلة هما -١ ، -٣

إذاً مجموعة حل المعادلة = { -١ ، -٣ }

تدريب : ١) حلّ المعادلات الآتية بيانيّاً :

أ) س(٢ – س) = -١٠

ب) $س^{٢}$ + ٢س + ٥ = ١

٢) جد نقطة تقاطع منحنى كل من الاقترانين بيانيّاً :

ق(س) = $س^{٢}$ + ١ ، هـ(س) = ٦س – ٨

ثانياً) بالتحليل إلى العوامل :

مثال: * لحلّ المعادلة التربيعيّة $س^{٢} + ٦س = ٧$ بالتحليل إلى العوامل ، اتّبع الخطوات الآتية :

إذا كان أ ، ب عددين حقيقيين وكان أ × ب = ٠
فإن أ = ٠ أو ب = ٠ أو كليهما = ٠

١) اكتب المعادلة بالصورة العامّة : $س^{٢} + ٦س - ٧ = ٠$

٢) حلّل الطرف الأيمن إلى العوامل : (س + ٧) (س – ١) = ٠

٣) ساوي كل عامل بالصفر وجد قيمة س

س + ٧ = ٠ أو س – ١ = ٠

س = -٧ ، س = ١ ، مجموعة الحل = { -٧ ، ١ }

.....

تدريب : ١) حلّ المعادلات الآتية بالتحليل إلى العوامل :

أ) ٢س (١ – س) + ٥ = -٧

ب) $٣س^{٢} - ١٥س + ٢١ = ٣$

ج) $(٣ - س)^{٢} + (س + ١)^{٢} = ٤$

د) $\frac{س + ٥}{س - ١} = \frac{١٤}{س}$

٢) حلّ المسائل الآتية مستخداً طريقة التحليل إلى العوامل :

١) عددان طبيعيّان يزيد أحدهما عن الآخر بمقدار ٣ ، وحاصل ضربهما = ٢٨ ، فما هما العددان ؟

٢) مثلّث متساوي الساقين ، طول قاعدته تقل عن مثلي ارتفاعه بمقدار ٤ سم ، جد طول كل من قاعدته وارتفاعه ، إذا كانت مساحته = ٣٠ سم^{٢} ؟

٣) مستطيل محيطه = ١٤ سم ، وطول قطره = ٥ سم ، جد بُعديه ؟

ثالثاً) بإكمال المربّع:

مثال (١): * لحلّ المعادلة التربيعيّة ٢س^{٢} + ١٢س + ١٤ = ٠ بإكمال المربّع ، اتّبع الخطوات الآتية :

١) اقسم المعادلة على ٢ لجعل معامل س^{٢} = ١ : س^{٢} + ٦س – ٧ = ٠

٢) انقل الحد الثابت إلى الطرف الأيسر : س^{٢} + ٦س = ٧

٣) أضف مربّع نصف معامل س ($\frac{١}{٢}$ ب)^{٢} لكل من الطرفين : س^{٢} + ٦س + ٩ = ٧ + ٩

س^{٢} + ٦س + ٩ = ١٦

٤) حلّل المقدار في الطرف الأيمن ، ثم اكتبه على شكل (س + ثابت)^{٢} : (س + ٣)^{٢} = ١٦

(س + ٣)^{٢} = ١٦

٥) خذ الجذر التربيعي للطرفين : $\sqrt{\quad}$ (س + ٣)^{٢} = $\sqrt{\quad}$ ١٦

س + ٣ = ± ٤

س + ٣ = ٤ ⟵ ⟶ س + ٣ = -٤

س = ١ ⟵ ⟶ س = -٧

مجموعة الحل = { -٧ ، ١ }

مثال (٢): س^{٢} – ٤س + ٩ = ٠

س^{٢} – ٤س = -٩

س^{٢} – ٤س + ٤ = -٩ + ٤

(س – ٢) (س – ٢) = -٥

(س – ٢)^{٢} = -٥

$\sqrt{\quad}$ (س – ٢)^{٢} = $\sqrt{\quad}$ -٥

إذاً مجموعة الحل = Ø

مثال (٣): س^{٢} + ٢س = ٥

س^{٢} + ٢س + ١ = ٥ + ١

(س + ١) (س + ١) = ٦

(س + ١)^{٢} = ٦

$\sqrt{\quad}$ (س + ١)^{٢} = $\sqrt{\quad}$ ٦

س + ١ = ± $\sqrt{\quad}$ ٦

إمّا س + ١ = $\sqrt{\quad}$ ٦

س = $\sqrt{\quad}$ ٦ – ١

أو س + ١ = - $\sqrt{\quad}$ ٦

س = - $\sqrt{\quad}$ ٦ – ١

تدريب : حُلّ المعادلات الآتية بإكمال المربّع:

١) $٣س^{٢} + ٣س - ٦ = ٠$

٢) $١٢س - ٢س^{٢} - ٢٠ = ٠$

٣) $٢س^{٢} + ٣س - ٧ = ٠$

٤) $س (س - ٥) = ٠$

رابعاً) بالقانون العام:

القانون العام لحل المعادلة التربيعية $أ س^{٢} + ب س + جـ = ٠$ هو :

$$س = \frac{- ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤ أ جـ}}{٢ أ}$$

$$\text{المميّز} = \Delta = ب^{٢} - ٤ أ جـ$$

يمكن استعمال المميّز للكشف عن إمكانيّة تحليل المعادلات التربيعيّة وتحديد عدد الحلول الحقيقيّة لها (إن وُجدت) ، فإذا كان :

أ) المميّز > ٠ ، فإن للمعادلة التربيعيّة جذرين حقيقيّين مختلفين

ب) المميّز < ٠ ، فإنه لا يوجد للمعادلة التربيعية جذور حقيقيّة

جـ) المميّز = ٠ ، فإن للمعادلة التربيعيّة جذراً حقيقيّا واحداً هو $س = \frac{- ب}{٢ أ}$

مثال (١): * لحلّ المعادلة التربيعيّة $٢س^{٢} + ٣س = ٥$ بالقانون العام، اتّبع الخطوات الآتية :

١) انقل الحد الثابت إلى الطرف الأيمن : $٢س^{٢} + ٣س - ٥ = ٠$

٢) حدّد المعاملات $أ = ٢$ ، $ب = ٣$ ، $جـ = -٥$

٣) جد المميّز $= (٣)^{٢} - (٤ \times ٢ \times -٥) = ٩ - -٤٠ = ٤٩$

٤) بما أن المميّز > ٠ ، يوجد للمعادلة التربيعيّة جذران مختلفان

٥) عوّض بالقانون العام وجد هذين الجذرين

$$س_{١} = \frac{-٣ + \sqrt{٤٩}}{٤} = \frac{-٣ + ٧}{٤} = \frac{٤}{٤} = ١$$

$$س_{٢} = \frac{-٣ - ٧}{٤} = \frac{-١٠}{٤} = \frac{-٥}{٢}$$

مجموعة الحل $= \{ ١ ، \frac{-٥}{٢} \}$

مثال (٢): * إذا كان للمعادلة التربيعيّة ٢س^{٢} + ٤س – جـ = ٠ جذران حقيقيّان مختلفان فما مجموعة قيم (جـ) ؟

الحل : بما أن للمعادلة جذرين ، فإن مميّز المعادلة التربيعيّة موجب

أي أن المميّز ب^{٢} – ٤ أ جـ > ٠

(٤)^{٢} – (٤ × ٢ × - جـ) > ٠

١٦ + ٨ جـ > ٠

٨ جـ > -١٦

جـ > -٢ ، مجموعة قيم (جـ) هي : { جـ : جـ > -٢ } ، (-٢ ، ∞)

.....

تدريب : ١) حُلّ المعادلات الآتية بالقانون العام:

١) ٢س^{٢} + ٥س – ٧ = ٠

٢) ٣س^{٢} – ٢س + ٥ = ٠

٣) س^{٢} + ٨س + ١٦ = ٠

٤) س (س – ٩) = ٠

٢) عددان صحيحان يزيد أحدهما عن الآخر بمقدار ٥ ، وحاصل ضربهما ٣٦ ، جد العددين .

٣) مستطيل مساحته ٤٠ سم^{٢} ، ومثلي عرضه يقل عن طوله بمقدار ٢ ، جد بعديه ؟

٤) إذا كانت المعادلة التربيعيّة أ س^{٢} + ٤س – ٥ = ٠ ليس لها جذور حقيقية
فما مجموعة قيم (أ) ؟

٥) إذا كان للمعادلة التربيعيّة ٣س^{٢} – ب س + ١٢ = ٠ جذرٌ حقيقيٌ واحدٌ
فما مجموعة قيم (ب) ؟