10

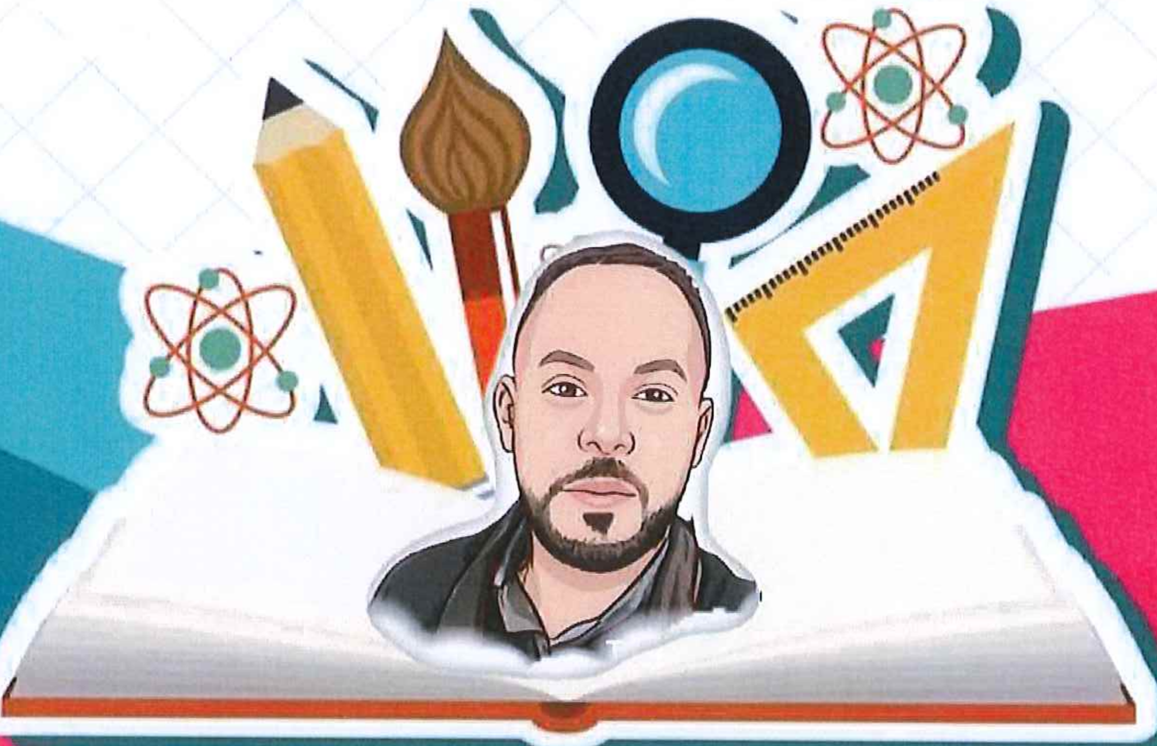
الرعد

في الرياضيات

الصف العاشر
الفصل الثاني

الوحدة الأولى

الأقترانات



0775052929

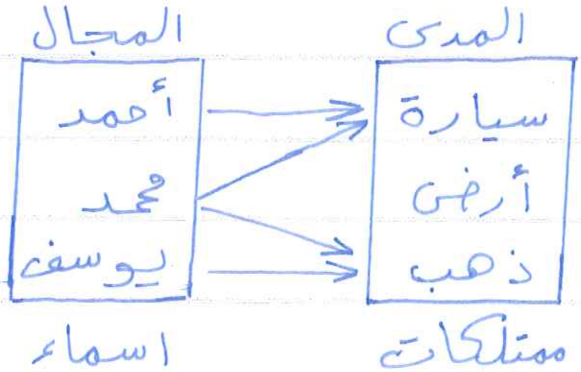
أ. رعد النحاية

الاستاذ : رعد الخمايسة

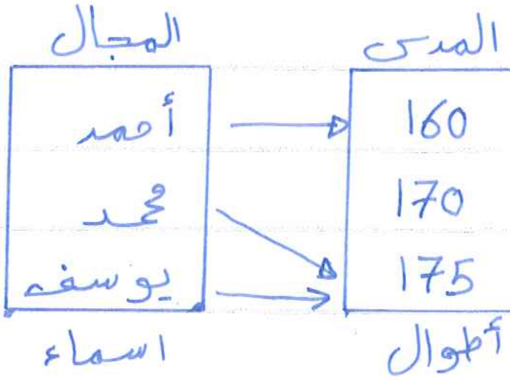
الهاتف : 0775052929

الأقترانات

الأقتران : هو علاقة بين مجموعتين تسمى المجموعة الأولى ب (المجال) = Domain ، والمجموعة الثانية تسمى (المدى) = Range ، بحيث يرتبط كل عنصر في المجال بعنصر واحد فقط في المدى .

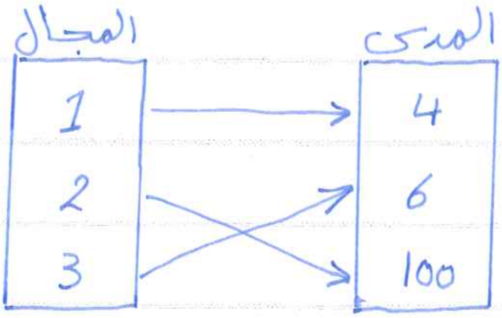


"علاقة"



"أقتران"

هذه العلاقة عبارة عن أقتران



* $\boxed{\text{الأقتران الخطي}}$

ق(س) = أ س + ب

$f(x) = a x + b$

$f(x)$ ← المدى

x ← القيم التي تعوضها في x هي المجال

a : معامل x

b : الحد الثابت

Ex : $f(x) = 2x - 3$ عبارة عن أقتران (خطي)

الاستاذ : رعد الخمايسة

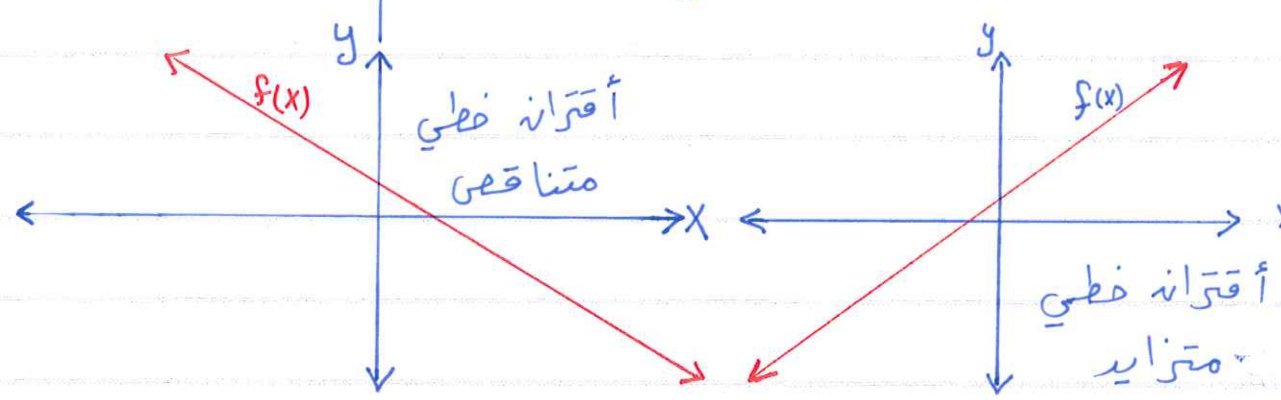
الهاتف : 0775052929

⊛ التمثيل البياني للأقتران الخطي $f(x) = ax + b$

أولاً : الأقتران الخطي يأخذ شكل خط مستقيم دائماً

ثانياً : الأقتران الخطي يكون متزايد أو متناقص حسب معامل x إذا كان موجب يكون متزايد وإذا كان سالب يكون متناقص

ثالثاً : لتحديد إذا كان الأقتران متزايد أو متناقص من الرسم ننظر دائماً من جهة اليسار إلى اليمين على المستوى البياني



رابعاً : المجال للأقتران الخطي هو مجموعة الأعداد الحقيقية والمدى أيضاً هو مجموعة الأعداد الحقيقية {ح}

∴ المجال = ح & المدى = ح

* $\boxed{\text{الأقتران الثابت}}$ ق(س) = ب $\equiv$ $f(x) = b$

وهو حالة خاصة من الأقتران الخطي $f(x) = ax + b$

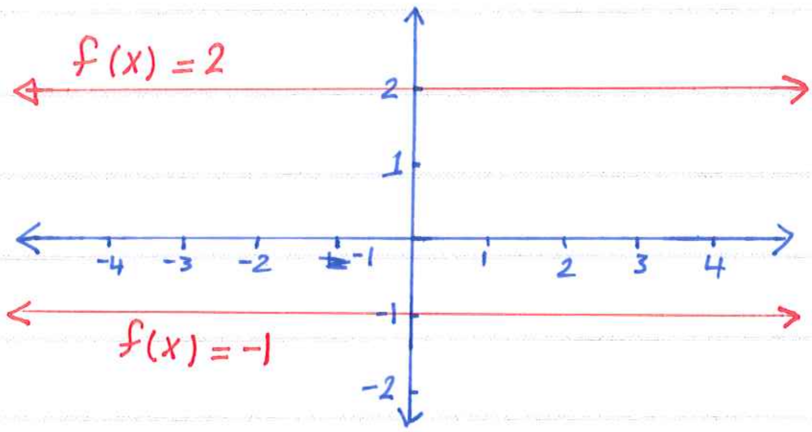
بحيث يكون معامل x يساوي صفر $a = 0$

<u>Ex</u> $f(x) = 4$ & $f(x) = -3$

الاستاذ : رعد الخمايسة

الهاتف : 0775052929

(*) التمثيل البياني للأقتران الثابت هو خط مستقيم يوازي محور x ويقطع محور y عند النقطة b



مجال الأقتران الثابت هو ح & مدى الأقتران الثابت هو b

* **الأقتران التربيعي**

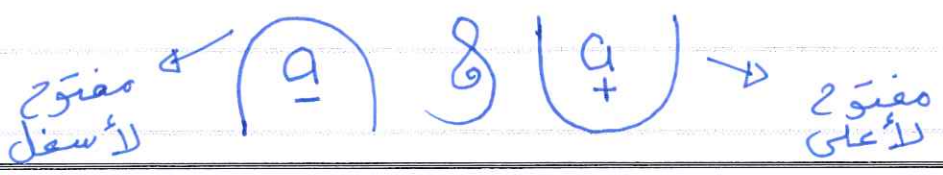
ق(س) = أ س^2 + ب س + جـ

$$f(x) = a x^2 + b x + c$$

معامل x^2 — معامل x — الحد الثابت

Ex: $f(x) = x^2 + 2x - 3$

* التمثيل البياني للأقتران التربيعي يكون على شكل قطع مكافئ مفتوح للأعلى أو مفتوح للأسفل وشكل الأقتران يعتمد على معامل x^2 حيث إذا كانت قيمة a موجبة يكون القطع المكافئ مفتوح لأعلى وإذا كانت قيمة a سالبة يكون القطع المكافئ مفتوح لأسفل



الاستاذ : رعد الخمايسة | | الهاتف : 0775052929

* نقطة الرأس لمنحنى الأقتران التربيعي هي

$$\left(\frac{-b}{2a}, f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$$

* المجال للأقتران التربيعي هو مجموعة الأعداد الحقيقية

* المدى للأقتران التربيعي هو

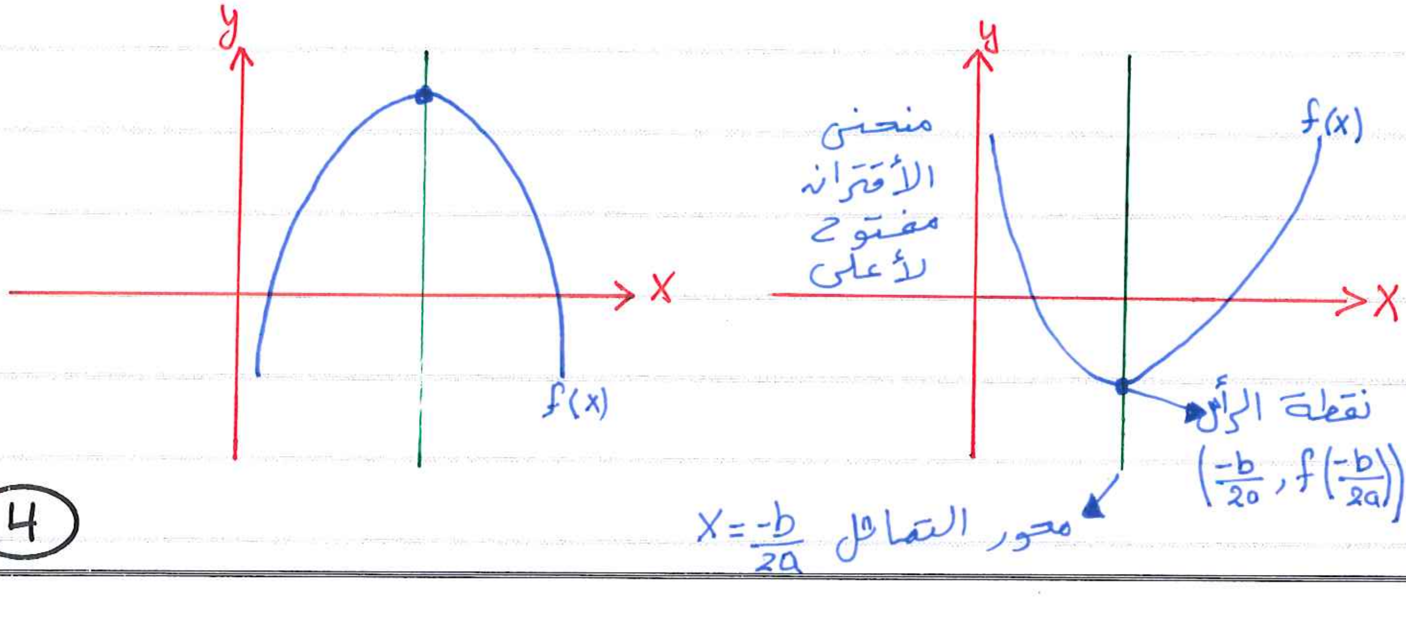
① إذا كان الأقتران مفتوح لأعلى أي أن a موجبة نعبر عنه بالمتباينة التالية

المدى : $y \geqslant f\left(\frac{-b}{2a}\right)$

② إذا كان الأقتران مفتوح للأسفل أي أن a سالبة نعبر عنه بالمتباينة التالية

المدى : $y \leqslant f\left(\frac{-b}{2a}\right)$

* محور تماثل الأقتران التربيعي هو $x = \frac{-b}{2a}$ وهو نفسه الأحداثي x لنقطة الرأس



الاستاذ : رعد الخمايسة | | الهاتف : 0775052929

اقترانات كثيرات الحدود

الحد الجبري :
- ثابت ← Ex : 3
- ثابت و متغير X ← Ex : $3x^2$

3 ← معامل
x^2 ← القسم الرمزي

الاقتران $\boxed{\text{وحيد الحد}}$ بمتغير واحد :
هو اقتران قاعدته ناتج ضرب عدد حقيقي يسمى المعامل في متغير أسه عدد صحيح غير سالب

Ex : $f(x) = 9$ المعامل 9 و الأس : صفر
$f(x) = x$ المعامل 1 و الأس : 1
$f(x) = \sqrt{7}x^3$ المعامل $\sqrt{7}$ و الأس : 3
$f(x) = \frac{-1}{2}x^5$ المعامل $\frac{-1}{2}$ و الأس : 5
$f(x) = 3x^2$ المعامل 3 و الأس : 2

الاقتران $\boxed{\text{كثير الحدود}}$ هو اقتران
1. يحتوي على متغير واحد
2. الأسس فيه أعداد صحيحة موجبة
3. يتكون من أكثر من حد أو حد واحد على الأقل وتفصل بين حدود إشارات الجمع و الطرح

Ex : $f(x) = 2$
$f(x) = 3x - 4$
$f(x) = x^2 + 4x - 5$
$f(x) = -3x^2 + 1.5x^4 - 3$

الصورة العامة للاقتران كثير الحدود

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a_1 x^1 + a_0$$

الأستاذ : رعد الخمايسة

الهاتف : 0775052929

ملاحظة : لكتابة كثير الحدود بالصورة القياسية نقوم بترتيب الحدود ترتيباً تنازلياً من أكبرها درجة إلى أصغرها درجة

VIN :-
① المعامل الرئيسي : هو معامل أعلى الحدود درجة
② درجة كثير الحدود : هي أكبر أس للمتغير في جميع حدود كثير الحدود
③ كثير الحدود الصفري : هو الذي جميع معاملاته 0 وليس له درجة $f(x)=0$
④ عند كتابة المعاملات يجب قبل استخراجها كتابة كثير الحدود بالصورة القياسية وعند الوصول إلى درجة غير موجودة نضع مكانها صفر في سلّم المعاملات

Ex $f(x) = 2x^2 - 4x^3 + 1$

$f(x) = -4x^3 + 2x^2 + 1$ (قمنا هنا بكتابة الصورة القياسية)

سلّم المعاملات $-4, 2, 0, 1$

معامل لـ x الغير مذكورة

المعامل الرئيسي هو -4 ودرجة الأقتران 3

Ex $g(x) = -2x^3 + x^4 + 2$

الصورة القياسية $g(x) = x^4 - 2x^3 + 2$

سلّم المعاملات $1, -2, 0, 0, 2$

المعامل الرئيسي $= 1$ درجة الأقتران $= 4$

الاستاذ : رعد الخمايسة

الهاتف : 0775052929

VIN : للتمييز بين كثير الحدود عن غيره من الأقترانات :

① يجب أن يكون أُس المتغيرات موجب وليس سالب وأن يكون عدد صحيح

② الحدود يفصل بينها إشارات جمع وطرح وعند وجود ضرب أو قسمة يجب التبسيط

③ المتغيرات دائماً موجودة في البسط وغير موجودة في المقام

Ex 1 $f(x) = \frac{x^2}{3} - \sqrt{3}\,x + 2$	كثير حدود من الدرجة (2)
2 $l(x) = \frac{x+1}{5} + 7x^2$ $= \frac{x}{5} + \frac{1}{5} + 7x^2$ $= 7x^2 + \frac{1}{5}x + \frac{1}{5}$	كثير حدود لمعرفة درجته نقوم بكتابته على الصورة القياسية ∴ من الدرجة (2)
3 $h(x) = x + \frac{1}{x^3}$ $= x + x^{-3}$ أس سالب	ليس كثير حدود لوجود متغير في المقام
4 $k(x) = \frac{x^4}{x^2} + 7x$ $= x^2 + 7x$	كثير حدود من الدرجة الثانية
5 $g(x) = \sqrt[3]{x} + 5$ $= x^{\frac{1}{3}} + 5$	ليس كثير حدود لوجود أس غير صحيح

Ex : $r(x) = \dfrac{x+1}{x^{-2}} + 7x$

$= (x+1)x^2 + 7x$

$= x^3 + x^2 + 7x$ ∴ كثير حدود من الدرجة (3)

أتحقق من فهمي ص

أحدد إذا كان كل مما يأتي كثير حدود أم لا . وفي حال كان كثير حدود أكتبه بالصورة القياسية ثم حدد المعامل الرئيس والدرجة والحد الثابت

$\boxed{a}$ $h(x) = 9 - 5x + \sqrt{2}x^5$

كثير حدود الصورة القياسية ← $h(x) = \sqrt{2}x^5 - 5x + 9$

درجة الاقتران (5) المعامل الرئيس ($\sqrt{2}$) الحد الثابت (9)

$\boxed{b}$ $f(x) = \dfrac{3x+5}{x^2+2} + 2x$ ليس كثير حدود لوجود متغير في المقام ولا يمكن تبسيطه

$\boxed{c}$ $g(x) = 2x(3-x)^3$

$= 2x(27 - 27x + 9x^2 - x^3)$

$= 54x - 54x^2 + 18x^3 - 2x^4$

كثير حدود من الدرجة الرابعة الصورة القياسية له

$-2x^4 + 18x^3 - 54x^2 + 54x$

والمعامل الرئيسي هو (-2)

الحد الثابت هو (0)

الاستاذ : رعد الخمايسة | الهاتف : 0775052929

تذكر بعض قواعد فك القوس

$$(a\pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

$$(a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$$

$\boxed{d}$ $\frac{x^3}{6} - 7x^5 + 2\pi$

كثير حدود من الدرجة الخامسة

الصورة القياسية $-7x^5 + \frac{1}{6}x^3 + 2\pi$

المعامل الرئيس هو $\boxed{-7}$ & الحد الثابت هو $\boxed{2\pi}$

تعريف : $\boxed{\text{المجال}}$ هو مجموعة القيم التي يأخذها المتغير x

$\boxed{\text{المدى}}$ هو مجموعة القيم التي يأخذها المتغير y

التمثيل البياني

- الاقتران الخطي $f(x)=ax+b$
- الاقتران الثابت $f(x)=b$
- الاقتران التربيعي $f(x)=ax^2+bx+c$
- الاقتران التكعيبي

1 الأقتران الخطي

$$f(x) = \boxed{a}x + b$$

b : هي عبارة عن الأحداثي الصادي الذي يقطع عنده منحنى الأقتران محور y

يكون الأقتران الخطي متناقص إذا كانت إشارة a سالبة

يكون الأقتران الخطي متزايد إذا كانت إشارة a موجبة

أصفار الأقتران الخطي هي عبارة عن نقطة تقاطع منحنى الأقتران مع محور X ☺

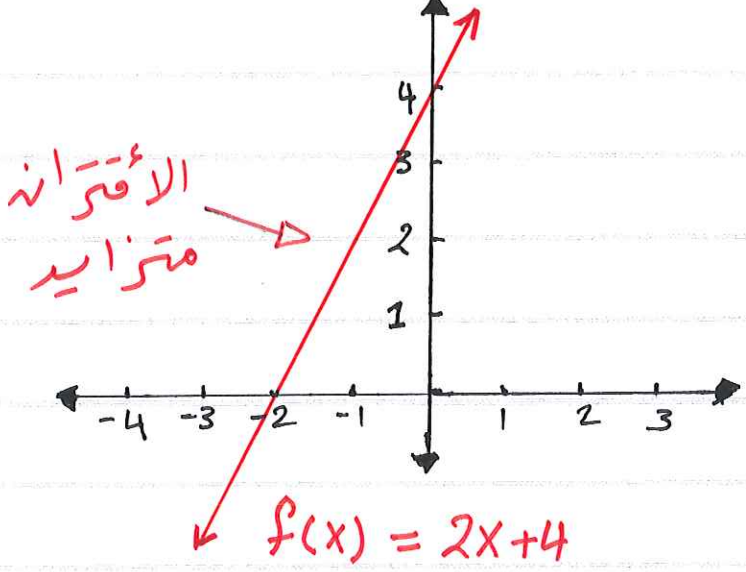
Ex : أرسم منحنى الأقتران

1. $f(x) = 2x + 4$

∴ يقطع منحنى الأقتران محور y عند $y=4$

الآن نجد أصفار الأقتران لإيجاد نقطة التقاطع مع محور X

$2x + 4 = 0 \rightarrow 2x = -4 \rightarrow \boxed{x = -2}$



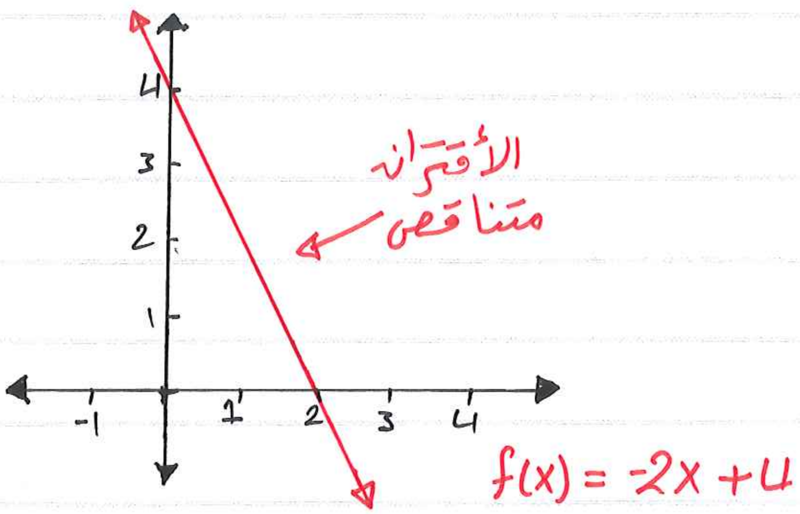
$\boxed{2}$ $f(x) = -2x + 4$

يمر بالنقطة $(0,4)$

ويمر بالنقطة $(2,0)$

$-2x + 4 = 0$

$\boxed{x = 2}$

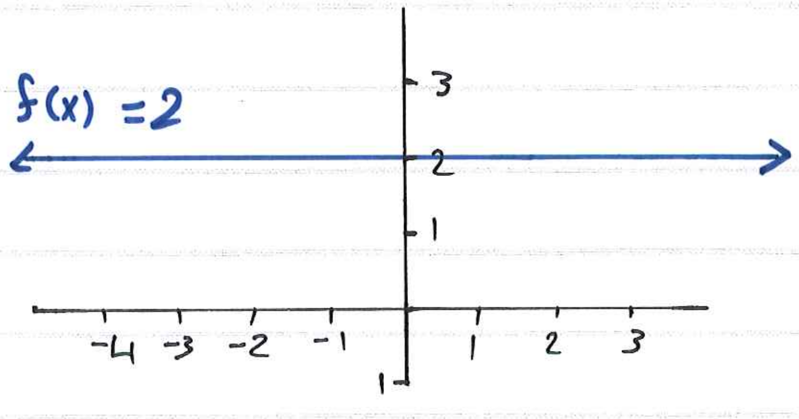


$\boxed{2}$ الأقتران الثابت $f(x) = b$

نقطة تقاطع منحنى الأقتران مع محور y

يكون عبارة عن خط مستقيم يوازي محور X ويقطع محور y عند $y = b$

Ex ارسم منحنى الأقتران $f(x) = 2$



الاستاذ : رعد الخمايسة

الهاتف : 0775052929

3 الأقتران التربيعي

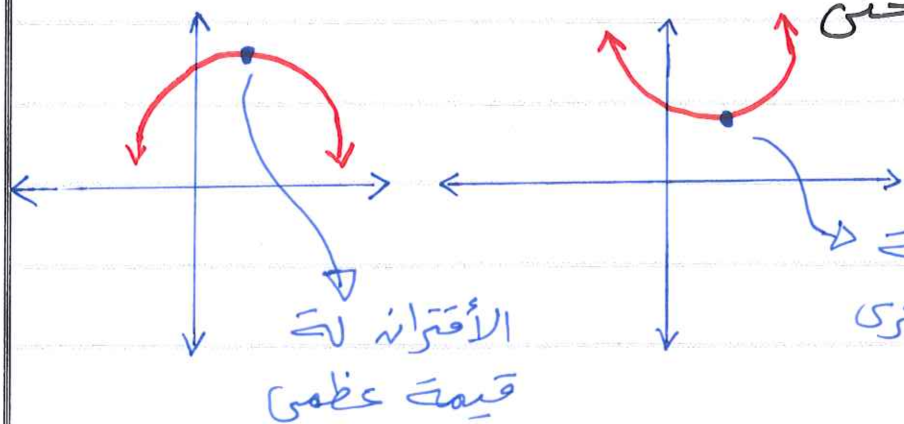
$$f(x) = a x^2 + bx + c$$

$-$ مفتوح لأسفل

$+$ مفتوح لأعلى

إحداثيات رأس المنحنى

$$\left(\frac{-b}{a\cdot 2} , f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$$



ملاحظات :- ① القيمة العظمى والصغرى للأقتران هي الإحداثي الصادي لنقطة الرأس أي $f\left(\frac{-b}{2a}\right)$

② نقطة تقاطع منحنى الأقتران مع محور y هي c ويمكن أستخراجها من العلاقة المعطاة

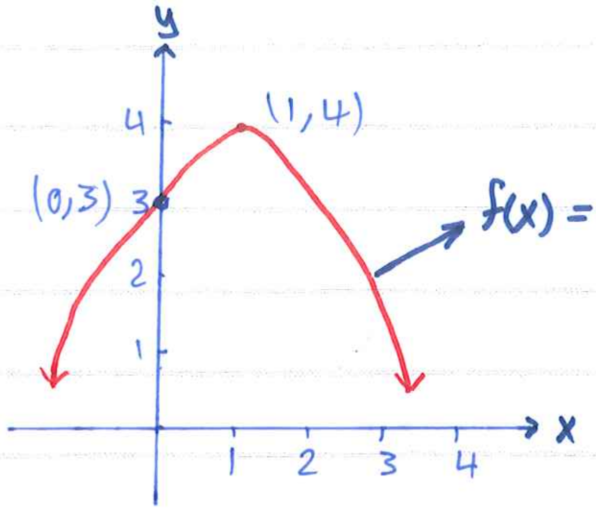
Ex مثل الأقتران $f(x) = -x^2 + 2x + 3$

الأقتران مفتوح لأسفل

نقطة تقاطع محور الأقتران مع محور y

نقطة الرأس $\left(\frac{-b}{2a} , f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right) = \left(1 , f(1)\right) = (1, 4)$

$\therefore$ رأس المنحنى هو $(1, 4)$



الأقتران مفتوح للأسفل
يقطع محور y عند 3
نقطة الرأس (1,4)

أتحقق من فهمي ص

أمثل بيانياً كل أقتران مما يأتي , محدداً مجاله ومداه :

(b) $f(x) = -0.5x^2 + 3x + 3.5$

الأقتران مفتوح ~~للأعلى~~ للأسفل

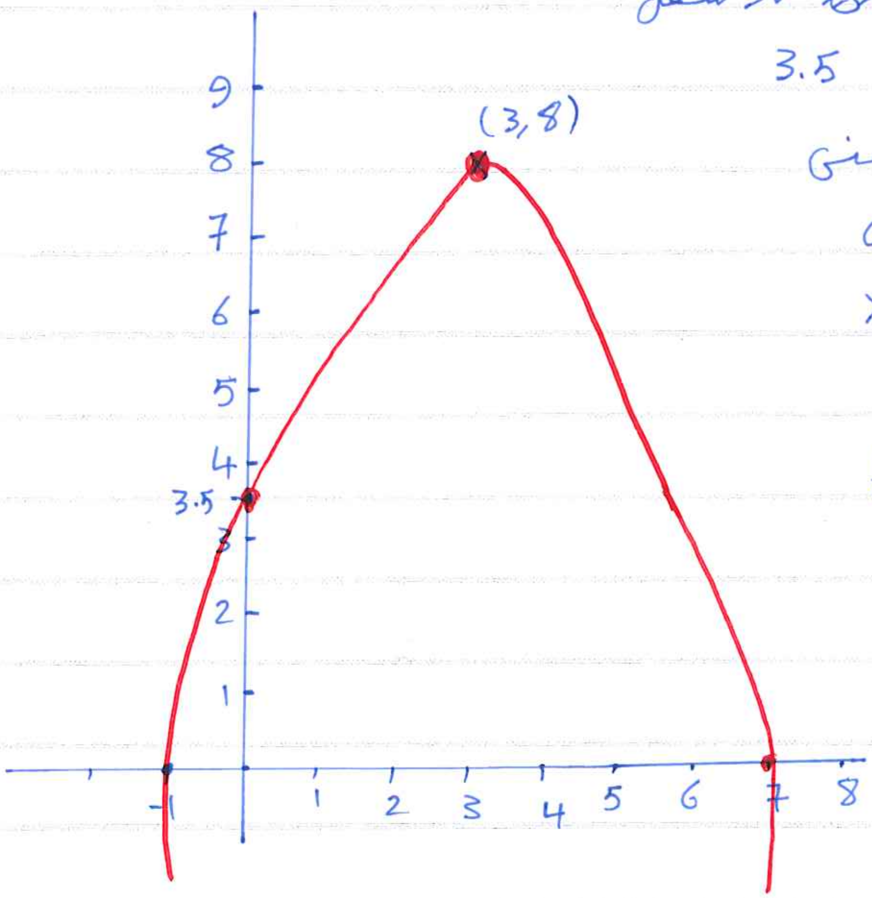
المقطع الصادي 3.5

احداثيات رأس المنحنى

$a = -0.5 \qquad b = 3$

$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-3}{2 \times -0.5} = 3$

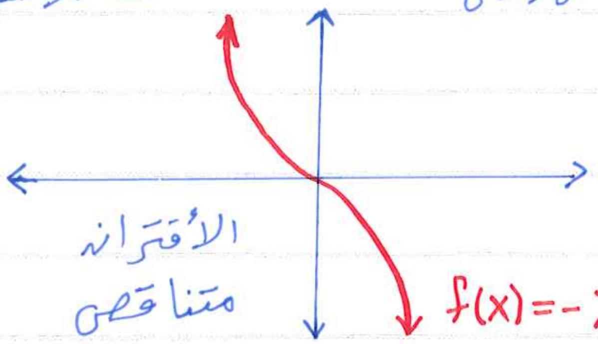
$f(3) = 8$

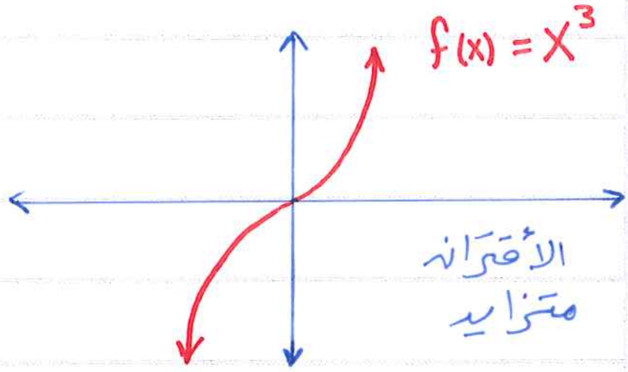


4 الأقتران التكعيبي

$$f(x) = a x^3 + b x^2 + c x + d$$

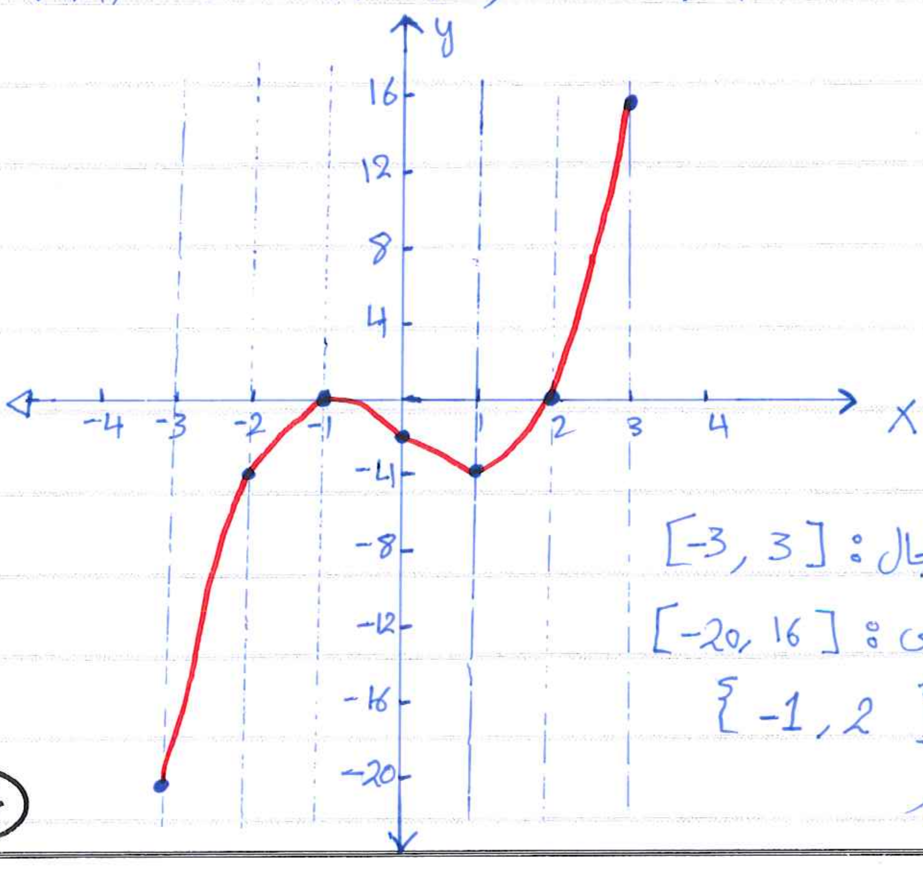
$-$	$+$
المنحنى للأسفل	المنحنى للأعلى
اول انحناء له للأسفل	أول انحناء له للأعلى





Ex : أمثل بيانياً الأقتران التالي محدداً مجالة ومداة

$f(x) = x^3 - 3x - 2 \quad , \quad -3 \leq x \leq 3$



x	y
-3	-20
-2	-4
-1	0
0	-2
1	-4
2	0
3	16

المجال : $[-3, 3]$

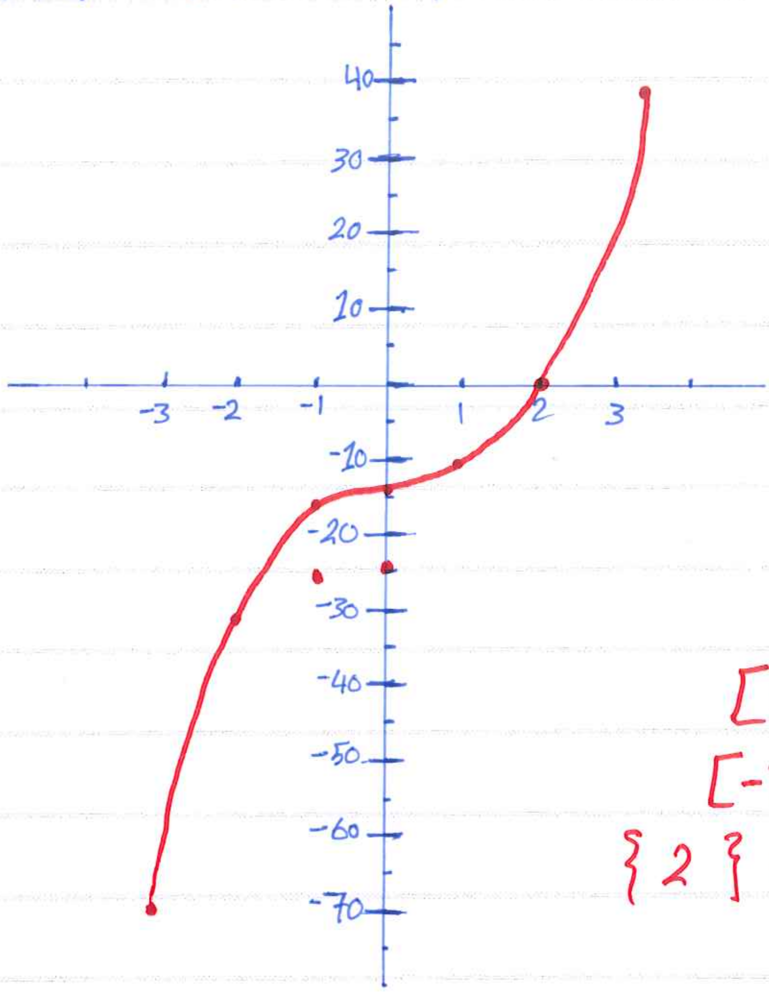
المدى : $[-20, 16]$

أصفار الأقتران : $\{-1, 2\}$

الأقتران متزايد

أتحقق من فهمي ص ١١

a) $f(x) = 2x^3 - 16 \quad , -3 \leqslant x \leqslant 3$



y	x
-70	-3
-32	-2
-18	-1
-16	0
-14	1
0	2
38	3

المجال : $[-3 , 3]$

المدى : $[-70 , 38]$

اصفار الاقتران : $\{2\}$

ثلاثية التفوق الدراسي

← " التركيز - التلخيص - التحضير "

جمع كثيرات الحدود

لجمع كثيرات الحدود، أجمع الحدود المتشابهة التي لها الدرجة نفسها، وأجمع معاملاتها.

Ex : إذا كان $g(x) = 7x^3 + 6x + 4$ ، $f(x) = 2x^2 - 5x^3 + 4x - 9$

فأجد $f(x) + g(x)$

الحل :- $f(x) + g(x) = -5x^3 + 2x^2 + 4x - 9 + 7x^3 + 6x + 4$

$= 2x^3 + 2x^2 + 10x - 5$

طريقة أخرى :

$$\begin{array}{lrrrr} f: & -5x^3 & +2x^2 & +4x & -9 \\ \boxed{+}\ g: & 7x^3 & & +6x & +4 \\ \hline & 2x^3 & +2x^2 & +10x & -5 \end{array}$$

أتحقق من فهمي

إذا كان $g(x) = -4x^3 + 6x^2 - 5$ ، $f(x) = 3x^2 + 8x^3 + 2x + 13$

فأجد $f(x) + g(x)$

$f(x) + g(x) = 8x^3 + 3x^2 + 2x + 13 - 4x^3 + 6x^2 - 5$

$= 4x^3 + 9x^2 + 2x + 8$

Ex : إذا كان $g(x) = 6x - 7x^2 - 8$ ، $f(x) = 2x^2 - 5x - 3$ فأجد $f(x) - g(x)$ ؟

$f(x) - g(x) = 2x^2 - 5x - 3 - (-7x^2 + 6x - 8)$

$= 2x^2 - 5x - 3 + 7x^2 - 6x + 8$

$= 9x^2 - 11x + 5$

أتحقق من فهمي

إذا كان $g(x) = x^3 + 6x^2 - 14$ ، $f(x) = 5x^3 - 12x^2 + 3x + 20$

فأجد $g(x) - f(x)$

$$g(x) - f(x) = x^3 + 6x^2 - 14 - 5x^3 + 12x^2 - 3x - 20$$
$$= -4x^3 + 18x^2 - 3x - 34$$

ضرب كثيرات الحدود

لضرب كثيرات الحدود أستعمل خاصية توزيع الضرب على الجمع

Ex : أجد ناتج ضرب $f(x) \cdot g(x)$ في كل مما يأتي

① $f(x) = 3x^3$, $g(x) = 2x^2 - 5x - 4$

$$f(x) \cdot g(x) = 3x^3 \cdot (2x^2 - 5x - 4)$$
$$= (3x^3) \cdot (2x^2) + (3x^3) \cdot (-5x) + (3x^3) \cdot (-4)$$
$$= 6x^5 - 15x^4 - 12x^3$$

ملاحظة : ← في الجمع و الطرح نحافظ على القسم الرمزي ونجمع المعاملات

← في الضرب نضرب المعاملات ونجمع الأسس

② $f(x) = 3x^4 - 5x^2 + x - 5$, $g(x) = 4x^2 - 7$

$f(x) \cdot g(x)$

$$= 4x^2 - 7 \ (3x^4 - 5x^2 + x - 5)$$
$$= 12x^6 - 20x^4 + 4x^3 - 20x^2 - 21x^4 - 35x^2 - 7x + 35$$
$$= 12x^6 - 41x^4 + 4x^3 + 15x^2 - 7x + 35$$

الاستاذ : رعد الخمايسة | الهاتف : 0775052929

أتحقق من فهمي

أجد ناتج ضرب $f(x) \cdot g(x)$ في كل مما يأتي

a) $f(x) = 5x^2 + 4 \quad , \quad g(x) = 7x + 6$

$f(x) \cdot g(x) = (5x^2 + 4) * (7x + 6)$

$(f \cdot g)(x) = 35x^3 + 30x^2 + 28x + 24$

b) $f(x) = 2x^3 + x - 8 \quad , \quad g(x) = 5x^2 + 4x$

$(f \cdot g)(x) = (2x^3 + x - 8)(5x^2 + 4x)$

$= 10x^5 + 8x^4 + 5x^3 + 4x^2 - 40x^2 - 32x$

$= 10x^5 + 8x^4 + 5x^2 - 36x^2 - 32x$

VIN

ملاحظة ① عملية الضرب عملية تبديلية أي أن

$f * g = g * f$

② عند ضرب كثير حدود من الدرجة (n) بكثير حدود من الدرجة (m) فإن درجة كثير الحدود الناتج هي $(n+m)$

Ex : ما هي درجة كثير الحدود الناتج من ضرب كثيري الحدود $f(x) \cdot g(x)$ فيما يأتي

$f(x) = 2x^3 - 5x^4 - 3$

$g(x) = -7x^2 + \sqrt{8}\, x^5 + 1$

درجة كثير الحدود الناتج من الضرب = درجة الأول + درجة الثاني

$5 + 4 =$

$9 =$

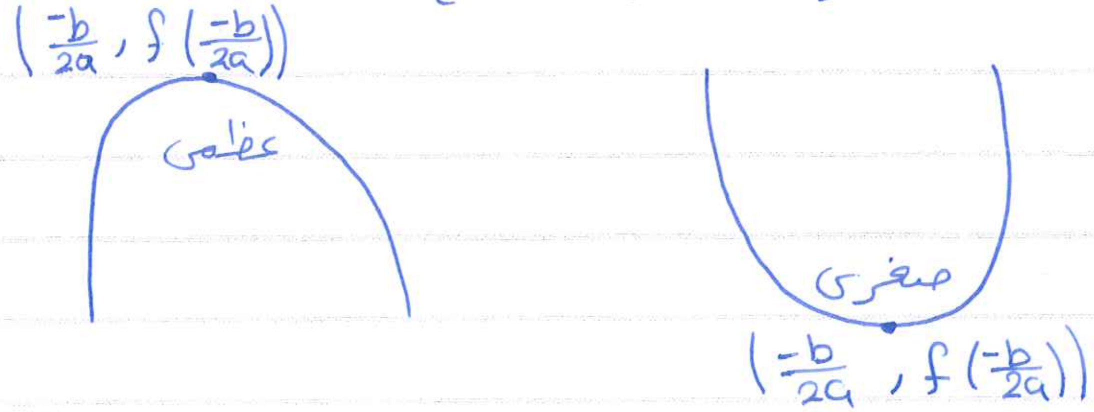
خطوات ضرب كثيرات الحدود

1. أضرب الإشارات
2. أضرب المعاملات
3. أضرب القسم الرمزي "حافظ على الأساس واجمع الأسس"
4. أكتب بأبسط صورة "جمّع الحدود المتشابهة"

* عدد مرات الضرب = عدد حدود الأول x عدد حدود الثاني

* تطبيقات القيم القصوى *
باستخدام الاقتران التربيعي

* إذا طلب السؤال أكبر قيمة ممكنة، أو أصغر قيمة ممكنة
تذكر أحداثيات رأس القطع



الاستاذ : رعد الخمايسة | الهاتف : 0775052929

قسمة كثيرات الحدود & الإقترانات النسبية

* خوارزمية القسمة

1. أقسم
2. أضرب
3. أطرح
4. انزل منزلة
5. نقوم بإعادة الخطوات حتى نستخدم جميع المنازل

خارج القسمة (الناتج)

$$\begin{array}{r|l} & 77 \\ \hline 3 & 231 \\ & -21 \\ \hline & 21 \\ & -21 \\ \hline & 00 \end{array}$$

المقسوم عليه: 3

المقسوم: 231

الباقي: 00

نعبر عن عملية القسمة بالشكل التالي

$$\frac{231}{3} = 77$$

ولو كان هناك باقي تكتب بالشكل التالي

$$\frac{\text{الباقي}}{\text{المقسوم عليه}} + \text{الناتج}$$

* خطوات أستخدام القسمة الطويلة لقسمة كثيرات الحدود

1. أقسم أعلى درجة على أعلى درجة
2. أضرب بجميع حدود المقسوم علية
3. اعكس الإشارات ثم أجمع
4. كرر الخطوات حتى تصبح درجة الباقي أقل من درجة المقسوم عليه

تكتب الجواب على الشكل

$$\frac{\text{الباقي}}{\text{المقسوم علية}} + \text{الناتج}$$

Ex : أجد ناتج قسمة $f(x)=2x^3+24x-15$ على $g(x)=x+5$ وباقيها

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2x^2-10x+74 \\
\hline
x+5 & 2x^3+24x-15 \\
\boxed{+} & -2x^3-10x^2 \\
\hline
 & -10x^2+24x \\
\boxed{+} & +10x^2+50x \\
\hline
 & 74x-15 \\
\boxed{+} & -74x-370 \\
\hline
 & -385
\end{array}
$$

∴ الناتج : $2x^2-10x+74$

الباقي : -385

$$\underbrace{\boxed{2x^2-10x+74}}_{\text{الناتج}} + \frac{-385 \longrightarrow \text{الباقي}}{x+5 \longrightarrow \text{المقسوم عليه}}$$

ملاحظات :

$\boxed{1}$ درجة كثير الحدود في المقسوم يجب أن تكون اكبر من أو تساوي درجة كثير الحدود في المقسوم عليه

$\boxed{2}$ $\dfrac{\text{المقسوم}}{\text{المقسوم عليه}} = \text{الناتج} + \dfrac{\text{الباقي}}{\text{المقسوم عليه}}$

$\boxed{3}$ للتحقق

الناتج × المقسوم عليه + الباقي = يجب أن يساوي المقسوم

الاستاذ : رعد الخمايسة		الهاتف : 0775052929

أتحقق من فهمي ص18

أجد ناتج قسمة $f(x) = 4x^4 - 7x^3 + 12x - 25$ على $h(x) = x - 4$

$$\begin{array}{r|l} & 4x^3 + 9x^3 + 36x + 156 \\ \hline x-4 & 4x^4 - 7x^3 + 12x - 25 \\ & \underline{-4x^4 + 16x^3} \\ & 9x^3 + 12x - 25 \\ & \underline{-9x^3 + 36x^2} \\ & 36x^2 + 12x - 25 \\ & \underline{-36x^2 + 144x} \\ & 156x - 25 \\ & \underline{-156x + 624} \\ & 599 \end{array}$$

الناتج : $4x^3 + 9x^3 + 36x + 156$

الباقي : 599

VIN: إذا كان باقي القسمة يساوي صفراً فإن المقسوم يقبل القسمة على المقسوم عليه بدون باقي ويسمى المقسوم عليه عامل من عوامل المقسوم

∴ يمكن استعمال خوارزمية القسمة للتأكد أن كثير الحدود $h(x)$ هو أحد عوامل كثير حدود آخر $f(x)$ أم لا

$$\begin{array}{r|l} h(x) & f(x) \\ \hline & \\ & \text{الباقي صفر} \end{array}$$

$h(x) \longrightarrow$ يكون عامل من عوامل كثير الحدود $f(x)$ لأن الباقي $= 0$

Ex : أثبت أن $(2x^2+x+7)$ هو أحد عوامل الاقتران

$$f(x) = 6x^4 - 7x^3 + 10x^2 - 38x - 21$$

الحل : بما أن $(2x^3+x+7)$ هو أحد عوامل $f(x)$ فإنه

باقي قسمة $\frac{f(x)}{2x^3+x+7}$ يجب أن يساوي صفر

$$\begin{array}{r|l} & 3x^2 - 5x - 3 \\ \hline 2x^2 + x + 7 & 6x^4 - 7x^3 + 10x^2 - 38x - 21 \\ & \underline{-6x^4 - 3x^3 - 21x^2} \\ & -10x^3 - 11x^2 - 38x - 21 \\ & \underline{+10x^3 + 5x^2 + 35x} \\ & -6x^2 - 3x - 21 \\ & \underline{+6x^2 + 3x + 21} \\ & 0 \end{array}$$

∴ بما أن باقي قسمة $f(x)$ على هذا المقدار يساوي صفر

فإنه أحد عوامل $f(x)$ #

أتحقق من فهمي

أثبت أن $h(x)$ هو أحد عوامل $f(x)$ في كل مما يأتي :

a) $f(x) = 2x^3 + 9x^2 - 12x - 55$, $h(x) = 2x + 5$

b) $f(x) = 5x^3 + 12x^2 - 14x + 3$, $h(x) = x^2 + 3x - 1$

الأستاذ : رعد الخمايسة

الهاتف : 0775052929

الحل :

a) $f(x) = 2x^3 + 9x^2 - 12x - 55$, $h(x) = 2x + 5$

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2 + 2x - 11 \\
\hline
2x + 5 & 2x^3 + 9x^2 - 12x - 55 \\
 & \underline{-2x^3 - 5x^2} \\
 & 4x^2 - 12x - 55 \\
 & \underline{-4x^2 - 10x} \\
 & -22x - 55 \\
 & \underline{+22x + 55} \\
 & 0
\end{array}
$$

∴ بما أنه باقي قسمة $\frac{f(x)}{h(x)}$ يساوي صفر فإنه $h(x)$ أحد عوامل $f(x)$.

b) $f(x) = 5x^3 + 12x^2 - 14x + 3$, $h(x) = x^2 + 3x - 1$

$$
\begin{array}{r|l}
 & 5x - 3 \\
\hline
x^2 + 3x - 1 & 5x^3 + 12x^2 - 14x + 3 \\
 & \underline{-5x^3 - 15x^2 + 5x} \\
 & -3x^2 - 9x + 3 \\
 & \underline{+3x^2 + 9x - 3} \\
 & 0
\end{array}
$$

∴ بما أنه باقي قسمة $\frac{f(x)}{h(x)}$ يساوي صفر فإنه $h(x)$ أحد عوامل $f(x)$ #

* $\boxed{\text{استنتاج}}$ عند قسمة كثير الحدود $f(x)$ من الدرجة n على كثير الحدود $g(x)$ من الدرجة m فإن درجة كثير الحدود الناتج تساوي $n-m$ #

Ex: إذا كان $f(x) = x^7 - 6x + 3$ ، $g(x) = x^3 + 4x - 7$
وكان $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ فإن درجة كثير الحدود $h(x)$ تساوي؟

الحل: درجة h = درجة f - درجة g
$= 7 - 3$
$= 4$

الأقترانات النسبية

هي أقترانات يمكن كتابتها بصورة نسبية؛ أي نسبة بين كثيري حدود $\frac{f(x)}{g(x)}$ ؛ بشرط أنه $g(x) \neq 0$

ومن الأمثله عليها

① $y = \frac{x+4}{2x^3 - 5x^2 - 3x}$

② $h(x) = \frac{x+2}{x^2 - 9}$

③ $f(x) = \frac{1}{x}$

الاستاذ : رعد الخمايسة | الهاتف : 0775052929

مفهوم أساسي

الاقتران النسبي : اقتران تكون قاعدته (معادلته) بصورة $q(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ ، حيث أن $f(x)$ و $g(x)$ كثيرا حدود ، و $g(x) \neq 0$

مجال الاقتران النسبي : مجموعة الأعداد الحقيقية باستثناء الأعداد التي تجعل المقام يساوي صفر

المجال باختصار $\mathbb{R} - \{$أصفار المقام$\}$

Ex : اجد مجال كل اقتران نسبي في ما يأتي

خطوات الحل :

① صفّر المقام وأوجد أصفاره

② استثني الأصفار من المجال

① $q(x) = \frac{x+2}{x^2-9}$

الحل : المجال $q(x)$ هو $\mathbb{R} - \{$أصفار المقام$\}$

$x^2 - 9 = 0$

طريقة ①

$\sqrt{x^2} = \sqrt{9}$

$x = \pm\sqrt{9}$

$x = 3 , -3$

أصفار المقام هي $x = \{-3, 3\}$

مجال الاقتران هو $\mathbb{R} - \{-3, 3\}$

$\{x \mid x \neq -3 , x \neq 3\}$

طريقة ②

$x^2 - 9 = 0$

تحليل فرق بين مربعين

$(x+3)(x-3) = 0$

$x = -3 , x = 3$

مجال $q(x)$ هو $\mathbb{R} - \{-3, 3\}$

② $y = \dfrac{x+4}{2x^3-5x^2-3x}$

الحل:

مجال الأقتران $\mathbb{R} - \{$ أصفار المقام $\}$

باستخدام إخراج عامل مشترك

$2x^3-5x^2-3x=0 \longrightarrow$

$x(2x^2-5x-3)=0$

$x(2x+1)(x-3)=0$

$x=0$

$2x+1=0 \longrightarrow x=\frac{-1}{2}$

$x-3=0 \longrightarrow x=3$

* أصفار المقام هي $x=\{\frac{-1}{2}, 0, 3\}$

* مجال الأقتران النسبي y هو $\longleftarrow \mathbb{R}-\{\frac{-1}{2}, 0, 3\}$

فكر : هل مجال الأقتران $f(x)=\dfrac{x^2-9}{x+3}$ يساوي مجال الأقتران $g(x)=x-3$ ؟

$f(x)=\dfrac{x^2-9}{x+3}$

$g(x)=x-3$

كثير حدود مجاله $\mathbb{R}$

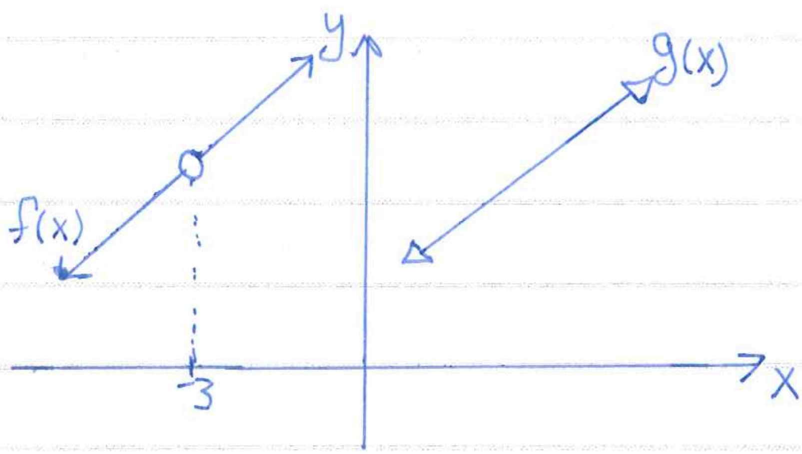
$x+3=0$

$x=-3$

$\boxed{\text{مجال } f(x) \neq \text{مجال } g(x)}$

مجاله $\mathbb{R}-\{-3\}$

$f(x)=\dfrac{(x-3)\cancel{(x+3)}}{\cancel{(x+3)}}$



انتبه : لا يجوز تحديد المجال بعد الأختصار

س أتحقق من فهمي

أجد مجال كل مما يأتي

الحل :-

a) $h(x) = \dfrac{x^3+8}{x^2-5x+6}$

تذكر: عندما يصعب تحليل العبارة التربيعية ألجأ للقانون العام

$x^2-5x+6=0$

$(x-2)(x-3)=0$

$x-2=0 \rightarrow x=2$

$x-3=0 \rightarrow x=3$

∴ المجال هو $\mathbb{R}-\{2,3\}$

$\{x \mid x \neq 2, x \neq 3\}$

b) $y = \dfrac{x^2-4}{6x-3x^2}$

$6x-3x^2=0$

$3x(2-x)=0$

$3x=0 \rightarrow x=0$

$2-x=0 \rightarrow x=2$

∴ المجال هو $\mathbb{R}-\{0,2\}$

$\{x \mid x \neq 0, x \neq 2\}$

حل خاطئ :

أحذر أن تقسم على المتغير (المجهول) عند حل المعادلة لأنك ستلغي أحد الحلول

$6x-3x^2=0$

$\dfrac{6\cancel{x}}{\cancel{x}} = \dfrac{3x^{\cancel{2}}}{\cancel{x}}$

$6=3x$

$\boxed{x=2}$

$\therefore \mathbb{R}-\{2\}$ ✗ حل خطأ

تذكر :- في الكسور كلما زادت قيمة المقام } كقيمة مطلقة
← كلما قلت قيمة الكسر

وكلما قلت قيمة المقام } كقيمة مطلقة
← كلما زادت قيمة الكسر

$\frac{1}{0.1} = 10$

$\frac{1}{0.01} = 100$

$\frac{1}{0.001} = 1000$

الأستنتاج

$f(x) = \frac{1}{x}$

$x \to 0$

$f(x) \to \infty$

$\frac{1}{10} = 0.1$

$\frac{1}{100} = 0.01$

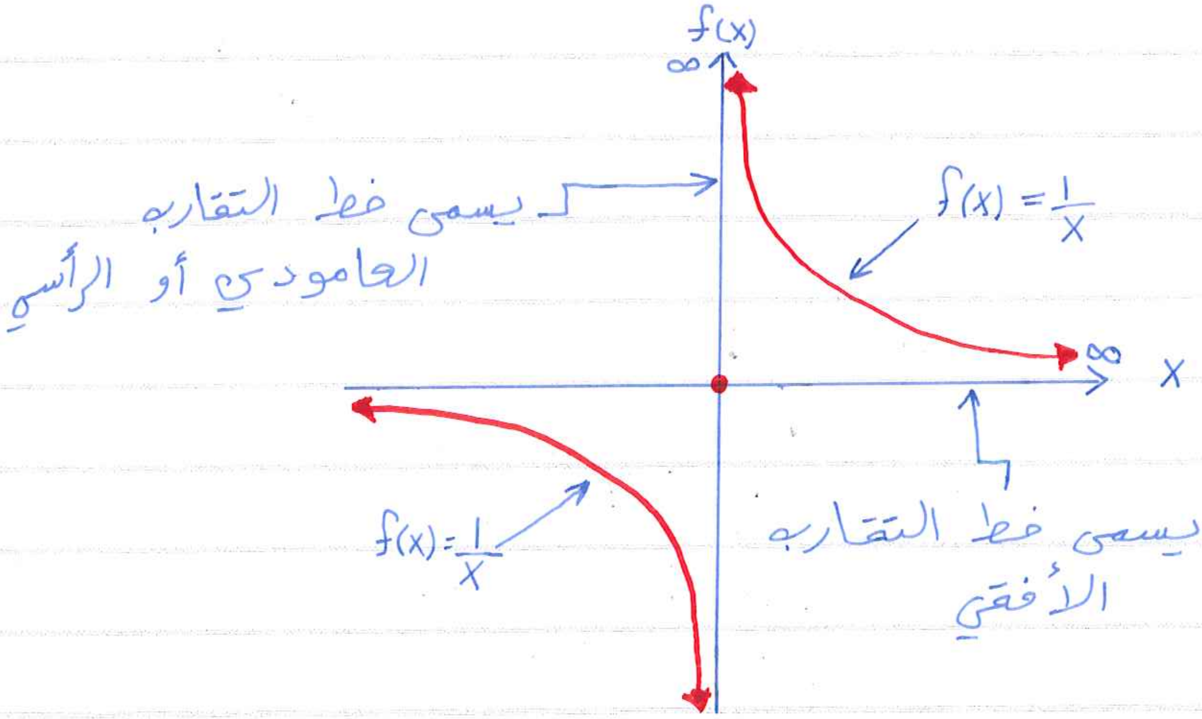
$\frac{1}{1000} = 0.001$

الأستنتاج

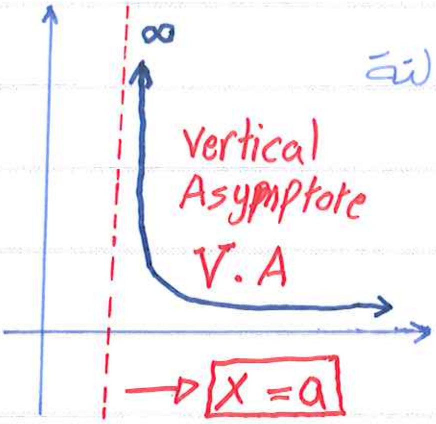
$f(x) = \frac{1}{x}$

$x \to \infty$

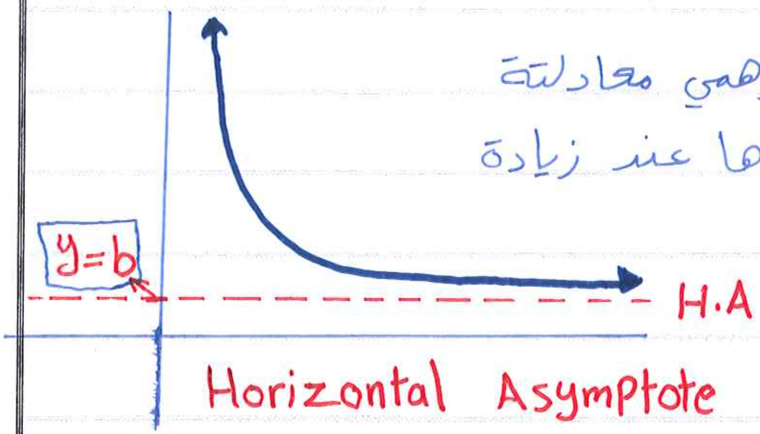
$f(x) \to 0$



* خطوط التقارب الرأسي وخطوط التقارب الأفقي في الاقتران النسبي



* خط التقارب الرأسي: هو خط وهي معادلته $x=a$ حيث (a) هي أصفار المقام بعد الإختصار إن وجد . ويحدث عندما $y \to \infty$



* خط التقارب الأفقي : هو خط وهي معادلته $y=b$ حيث (b) يمكن ايجادها عند زيادة القيمة المطلقة لـ $|x|$ ويحدث عندما $x \to \infty$

* كيف نجد معادلة خط التقارب الأفقي ؟؟

① إذا كانت درجة البسط أقل من درجة المقام

$$f(x) = \frac{a x^n + \cdots}{b x^m + \cdots} + c \quad , a<b$$

فإن خط التقارب الأفقي يكون عند الحد الثابت c

$$\boxed{y=c}$$

② إذا كانت درجة البسط تساوي درجة المقام

$$f(x) = \frac{a x^n + \cdots}{b x^m + \cdots} + c$$

الاستاذ : رعد الخمايسة
الهاتف : 0775052929

فإنه خط التقارب الأفقي يكون عند :

$y = \dfrac{\text{المعامل الرئيس في البسط}}{\text{المعامل الرئيس في المقام}} +$ الحد الثابت

$$\boxed{y = \frac{a}{b} + C}$$

Ex $f(x) = \dfrac{4x^3+3}{2x^3-5}$

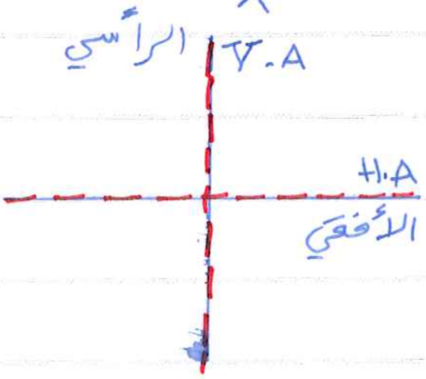
(3) إذا كانت درجة البسط أكبر من درجة المقام فإنه لا يوجد خطوط تقارب أفقي

Ex $f(x) = \dfrac{x^2-3}{x+1}$

Ex : حدد معادلة كل من خطوط التقارب الرأسي والأفقي في كل من الاقترانات الآتية إن وجدت

[1] $f(x) = \dfrac{1}{x}$

الحل :



خط التقارب الرأسي ← $\boxed{x=0}$

خط التقارب الأفقي ← $\boxed{x \to \infty}$

$y = \dfrac{1}{\infty} \longrightarrow \boxed{y=0}$

[2] $f(x) = \dfrac{-3}{x^2} + 7$

الحل :

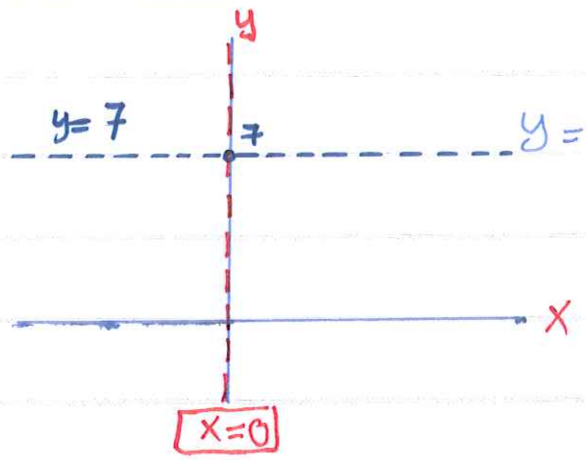
خط التقارب الرأسي = أصفار المقام

$\to \sqrt{x^2} = \sqrt{0}$

$\to \boxed{x=0}$

الاستاذ : رعد الخمايسة

الهاتف : 0775052929



خط التقارب الأفقي : $x \to \infty$

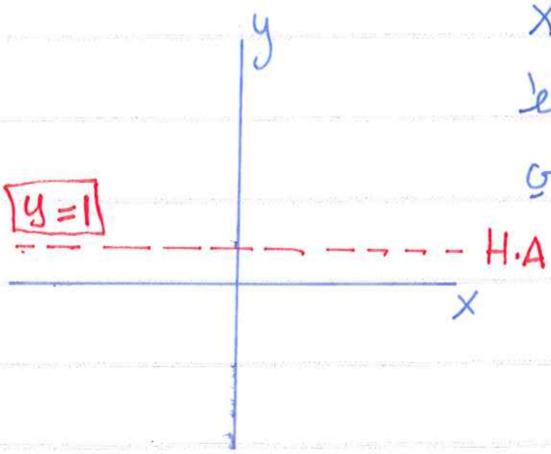
$y = \frac{-3}{\infty^2} + 7 \to \boxed{y = 7}$

$\boxed{3}$ $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 3}$

التقارب الرأسي : أصفار المقام

$x^3 + 3 = 0 \to x^2 = -3$

$\sqrt{x^2} = \sqrt{-3}$ ∴ لا يوجد خط تقارب رأسي



التقارب الأفقي : $x \to \infty$

$y = \frac{1}{1} \to \boxed{y = 1}$

الإثبات :

$$\begin{array}{r|l} & 1 \\ \hline x^2+3 & x^2 - 1 \\ & -x^2 - 3 \\ \hline & -4 \end{array}$$

$\Rightarrow y = 1 - \frac{4}{x^2 + 3}$

$\to y = 1 - \frac{4}{\infty^2}$

$\boxed{y = 1}$

الاستاذ : رعد الخمايسة
الهاتف : 0775052929

$\boxed{4}$ $f(x) = \dfrac{x^3+3}{x-5} = \dfrac{\infty^3}{\infty} = \infty$

الحل :

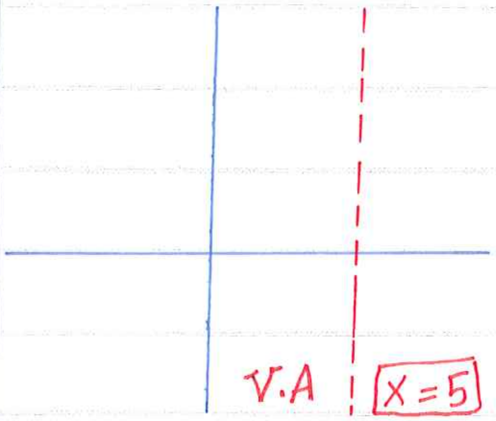
التقارب الرأسي : أصفار المقام

$x-5=0 \longrightarrow \boxed{x=5}$

التقارب الأفقي : $x \longrightarrow \infty$

بما أن درجة البسط > درجة المقام

فإنه لا يوجد خط تقارب أفقي



$\boxed{5}$ $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$

الحل : أنتبه درجة البسط > درجة المقام

$\dfrac{x^2-1}{x-1} = \dfrac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{(x-1)}} = \boxed{x+1}$

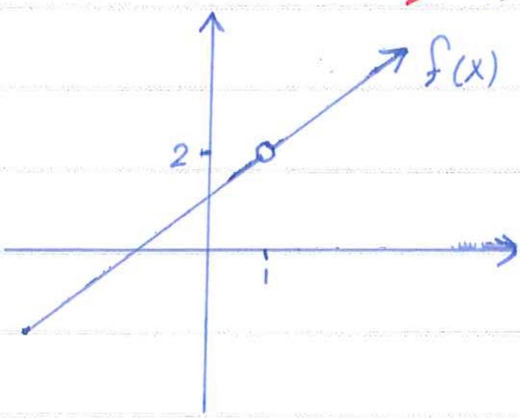
التقارب الرأسي : أصفار المقام

لا يوجد خط تقارب رأسي لأنه

لا يوجد x في المقام بعد التبسيط

التقارب الأفقي : $x \longrightarrow \infty$

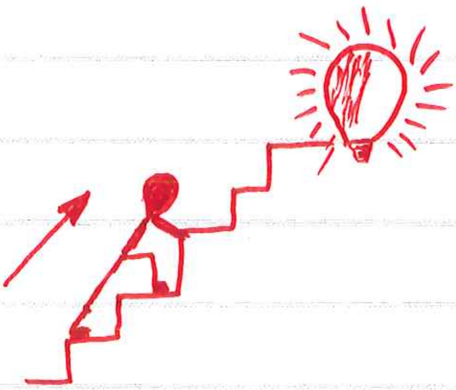
لا يوجد خط تقارب أفقي



بالطبع ستتعب ....

لو كان النجاح سهلاً

لوصل إلية الجميع !



الاستاذ : رعد الخمايسة | الهاتف : 0775052929

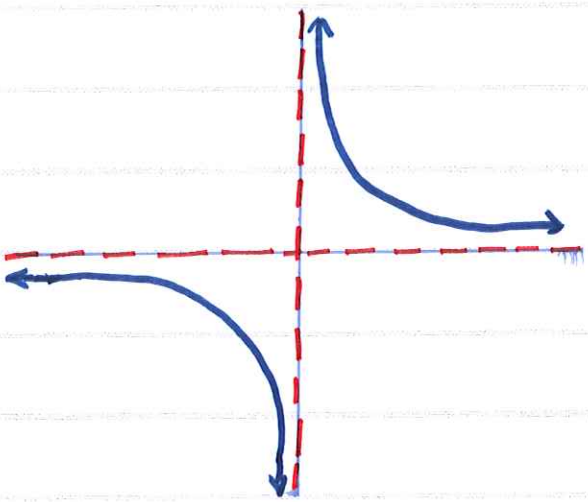
تمثيل الاقتران النسبي بيانياً

الخطوات

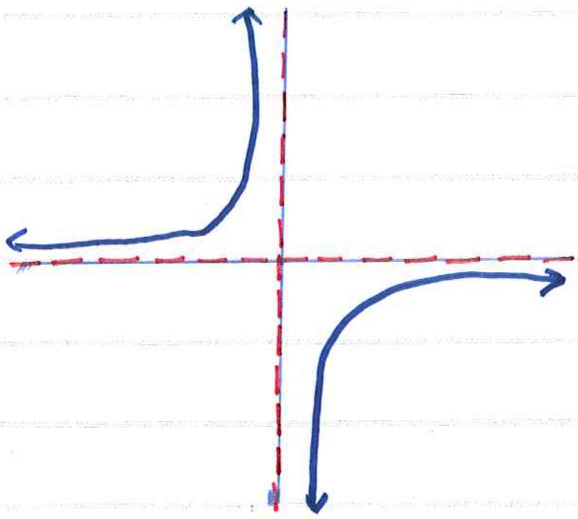
1) حدد مجال الاقتران
2) اختصر إن وجدت اختصاراً
3) حدد خطوط التقارب الرأسي والأفقي
4) اختر عدد كبير من النقاط لتعويضها في الاقتران وتمثيلها بيانياً

Ex: مثل بيانياً

① $f(x) = \frac{1}{x}$



② $f(x) = \frac{-1}{x}$



تعلم

① إذا كانت إشارة الاقتران موجبة نرسم الاقتران في الربع الأول & الثالث

② إذا كانت إشارة الاقتران سالبة نرسم الاقتران في الربع الثاني & الرابع

الاستاذ : رعد الخمايسة

الهاتف : 0775052929

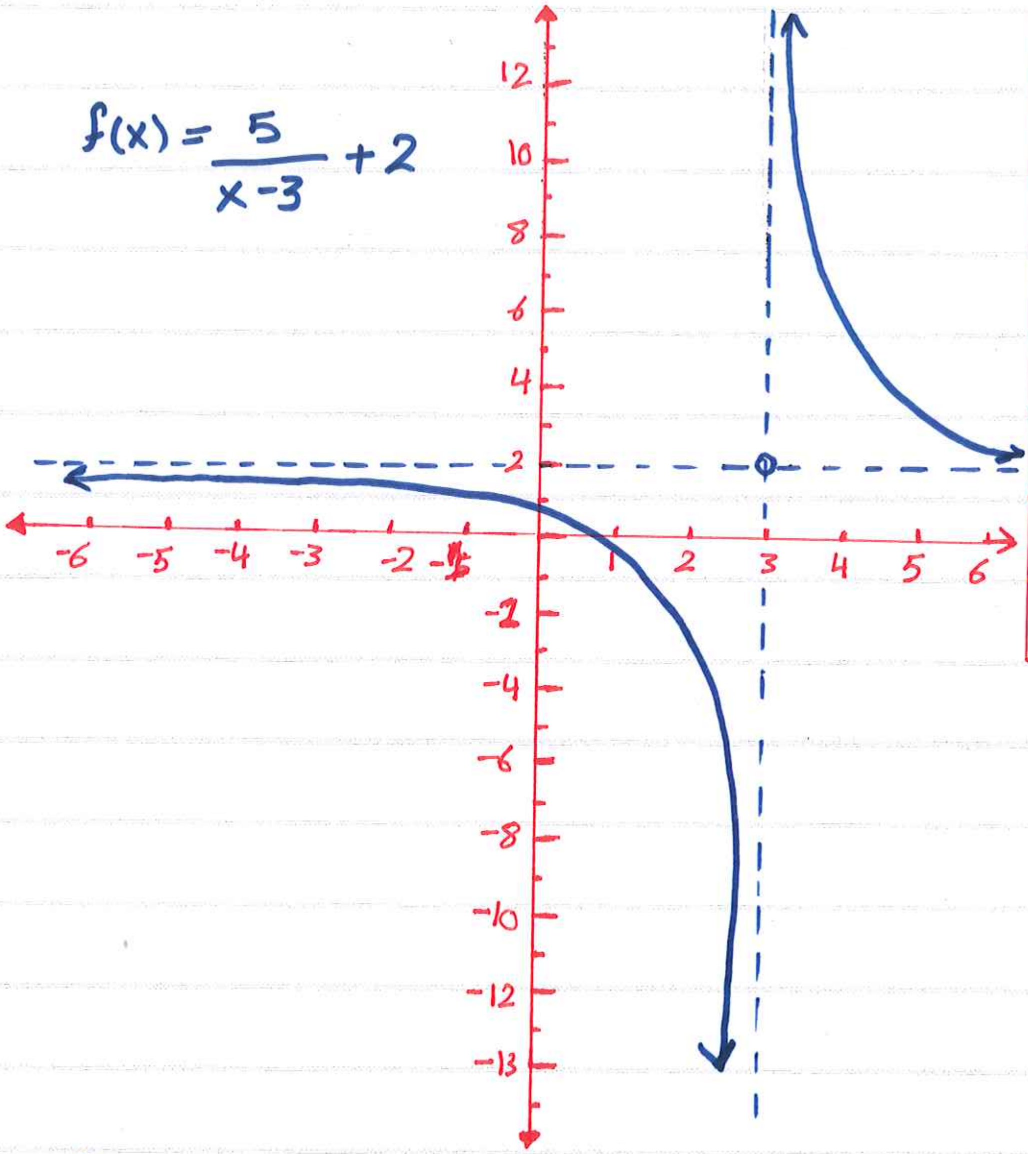
Ex : أجد خطوط التقارب للاقتران $f(x) = \frac{5}{x-3} + 2$ وأمثلة بيانياً وأجد مجاله ومداه

الحل : المجال هو $\mathbb{R}$ - { أصفار المقام }

$x - 3 = 0 \rightarrow x = 3 \quad \therefore \mathbb{R} - \{3\}$

التقارب الرأسي (أصفار المقام) $\Leftarrow x = 3$

التقارب الأفقي $(x \rightarrow \infty) \Leftarrow y = 2$



X	y
0	$\frac{1}{3}$
1	$\frac{-1}{2}$
2	-3
3	$\times$
4	7
5	$\frac{9}{2}$
6	$\frac{11}{3}$

المجال $\leftarrow \mathbb{R} - \{3\} = \{x \mid x \neq 3\}$

المدى $\leftarrow \mathbb{R} - \{2\} = \{y \mid y \neq 2\}$

تركيب الاقترانات

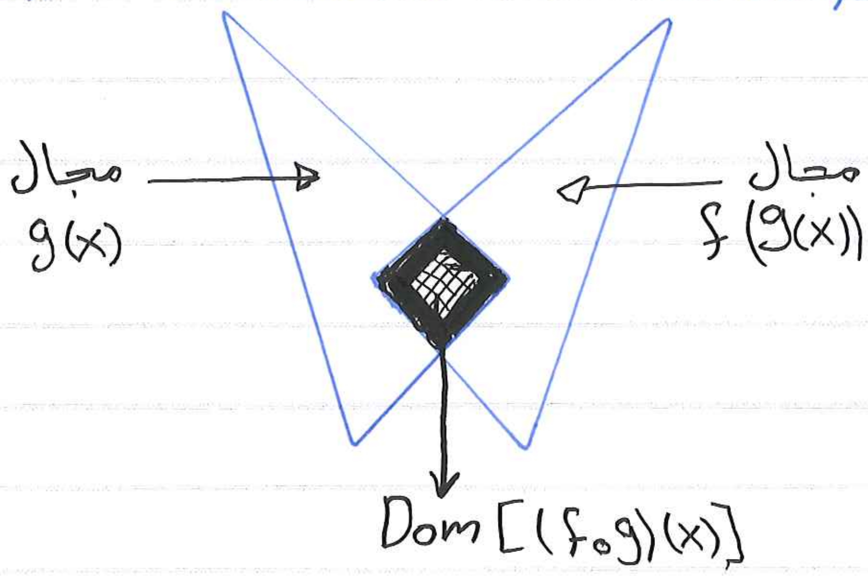
مفهوم أساسي

إذا كان $f(x)$ و $g(x)$ اقترانين ، فإن الاقتران الناتج من تركيب g ، f هو $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ ويقرأ : f بعد g .

يكون مجال الاقتران المركب $(f \circ g)$ هو مجموعة قيم x من مجال g التي تكون مخرجاتها $g(x)$ في مجال f .

مجال الاقتران المركب = مجموعة جزئية من مجال الاقتران الداخلي

$$Dom[(f \circ g)(x)] = Dom[g(x)] \cap Dom[f(g(x))]$$



Ex : إذا كان $g(x) = x + 4$ و $f(x) = x^2$ فأجد

① $(g \circ f)(3) = g(f(3))$

$\boxed{f(3) = 3^2 = 9}$

$= g(9)$

$= 9 + 4 = 13$

هنا عوضنا ب f فقط

$\therefore (g \circ f)(3) = 13$

Ex : إذا كان $g(x) = x + 4$ ، $f(x) = x^2$ ، فأجد

② $(g \circ f)(-2) = g(f(-2))$ $\quad f(-2) = (-2)^2 = 4$

$= g(4)$

$= 4 + 4 = 8$

$\therefore (g \circ f)(-2) = 8$

③ $(f \circ g)(5) = f(g(5))$ $\quad g(5) = 5 + 4 = 9$

$= f(9)$

$= 9^2 = 81$

$\therefore (f \circ g)(5) = 81$

أتحقق من فهمي

إذا كان $j(x) = 2x + 1$ ، $h(x) = \sqrt{x}$ فأجد كلاً مما يلي

① $(h \circ j)(4) = h(j(4))$ $\quad j(4) = 2 * 4 + 1$

$= h(9)$ $\quad = 9$

$(h \circ j)(4) = \sqrt{9} = 3$ #

② $(j \circ h)(4) = j(h(4))$ $\quad h(4) = \sqrt{4} = 2$

$= j(2)$

$(j \circ h)(4) = 2 * 2 + 1 = 5$ #

③ $(h \circ h)(16) = h(h(16))$ $\quad h(16) = \sqrt{16}$

$= h(4)$ $\quad = 4$

$= \sqrt{4} = 2$

$\therefore (h \circ h)(16) = 2$ #

④ $(j \circ j)(-8) \longrightarrow$ **H.W**

أفكر

إذا كان $j(x) = 2x+1$, $h(x) = \sqrt{x}$

هل توجد أي قيم للمتغير x لا يمكن حساب $(h \circ j)(x)$ عندها ؟

الحل :

$$(h \circ j)(x) = h(j(x)) = h(2x+1) = \sqrt{2x+1}$$

∴ يجب تعويض قيم x بحيث تجعل ما تحت الجذر موجب القيمة

* يمكن إيجاد قاعدة الاقتران المركب بدلالة المتغير x ثم حساب قيمة الاقتران المركب عند أي قيمة عددية معطاة

<u>Ex</u> : إذا كان $g(x) = 2x^2-6$ & $f(x) = 3x+5$ فأجد قاعدة كل من $(f \circ g)(x)$ و $(g \circ f)(x)$ ثم أجد $(f \circ g)(-2)$ و $(g \circ f)(0)$

الحل :

① $(f \circ g)(x) = f(g(x))$
$= f(2x^2-6)$
$= 3(2x^2-6)+5$
$= 6x^2-18+5$
$\therefore (f \circ g)(x) = 6x^2-13$

② $(g \circ f)(x) = g(f(x))$
$= g(3x+5)$
$= 2(3x+5)^2-6$
$= 2(9x^2+30x+25)-6$
$= 18x^2+60x+50-6$
$\therefore (g \circ f)(x) = 18x^2+60x+44$

③ $f \circ g(-2) = 6(-2)^2-13$
$= 6*4-13$
$= 24-13$
$= 11$

④ $(g \circ f)(0) = 18*0+60*0+44$
$= 0+0+44$
$= 44$

* نستنتج أن تركيب الاقترانات ليست عملية تبديلية حيث :

$$(f\circ g)(x) \neq (g\circ f)(x)$$

أتحقق من فهمي

إذا كان $g(x) = 2-3x$ و $f(x) = x^2+4x$ فأجد قاعدة كل من $(f\circ g)(x)$ و $(g\circ f)(x)$ ثم أجد $(f\circ g)(3)$ و $(g\circ f)(-1)$

<u>Sol</u> :- $(f\circ g)(x) = f(g(x))$

$= f(2-3x) = (2-3x)^2 + 4(2-3x)$

$= (2)^2 - 2(2)(3x) + (3x)^2 + 8 - 12x$

$= 4 - 12x + 9x^2 + 8 - 12x$

$= 4 - 12x + 9x^2 + 8 - 12x$

$\therefore (f\circ g)(x) = 9x^2 - 24 + 12$

$(g\circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2+4x)$

$= 2 - 3(x^2+4x)$

$= 2 - 3x^2 - 12x$

$(g\circ f)(x) = -3x^2 - 12x + 2$

$(f\circ g)(3) = 9(3)^2 - 24(3) + 12$

$= 81 - 72 + 12$

$= 9 + 12$

$= 21$

$(g\circ f)(-1) =$

$-3(-1)^2 - 12(-1) + 2$

$= -3 + 14$

$= 11$

الاستاذ : رعد الخمايسة
الهاتف : 0775052929

تفكيك الاقترانات المركبة

لو اعتبرنا الاقتران $f(x)=\sqrt{4x^2+9}$ اقترانا مركبا

داخلي
$h(x)$
$=4x^2+9$

خارجي
$g(x)$
$=\sqrt{x}$

لو أعدنا تركيب الاقتران

$$(g\circ h)(x) = g(h(x)) = g(4x^2+9)$$
$$= \sqrt{4x^2+9}$$

وهكذا نعود للاقتران $f(x)$

Ex : أجد الاقترانين $f(x)$ & $g(x)$ ، بحيث يمكن التعبير عن كل من الاقترانين الآتيين بالصورة $h(x)=f(g(x))$

① $h(x)=\dfrac{1}{x+3}$

$g(x)=x+3$ & $f(x)=\dfrac{1}{x}$

خطوات تفكيك الاقتران المركب

① حدد الاقتران الداخلي بحيث يجب أن يحتوي على المتغير x

② استبدل ما فرضته للاقتران الداخلي بـ x وشكّل الاقتران الخارجي

ملاحظات

① يمكن أن يكون هناك عدة حلول صحيحة

② يجب أن يكون مجال الاقتران المركب مجموعة جزئية من الاقتران الداخلي

الاستاذ : رعد الخمايسة | الهاتف : 0775052929

② $h(x) = (2+x^2)^{10}$

$g(x) = 2+x^2$

$f(x) = x^{10}$

س أتحقق من فهمي

أجد الأقترانين $f(x)$ و $g(x)$ بحيث يمكن التعبير عن كلٍّ من الأقترانين الآتيين بالصورة $h(x) = f(g(x))$

a) $h(x) = 4x^2 - 1$

$h(x) = (2x)^2 - 1$

$g(x) = 2x$ و $f(x) = x^2 - 1$

b) $h(x) = \dfrac{2}{(x+2)^2} + 5$

عند تشكيل الأقتران احرص على أن تكون x ضمن الأقتران الداخلي

$g(x) = x+2$ و $f(x) = \dfrac{2}{x^2} + 5$

... إذا أردت النجاح و التفوق فعليك بالإجتهاد و المذاكرة فما خاب من ذاكر دروسة ..

واجتهد ♡

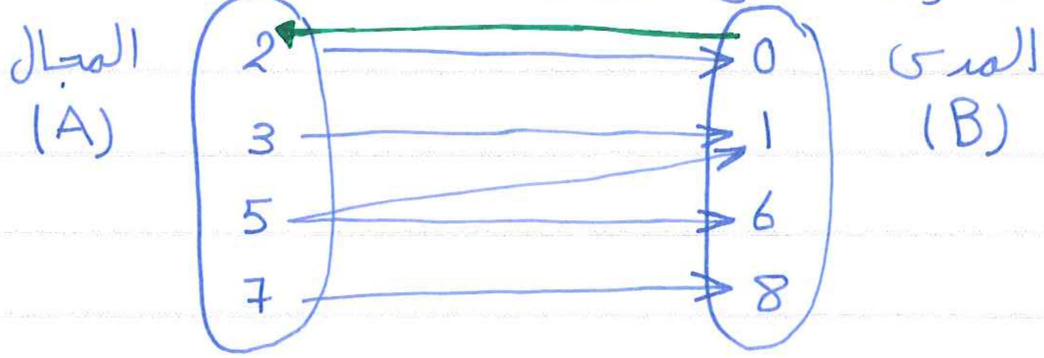
الاستاذ : رعد الخمايسة

الهاتف : 0775052929

الأقتران العكسي

* العلاقة و العلاقة العكسية لها *

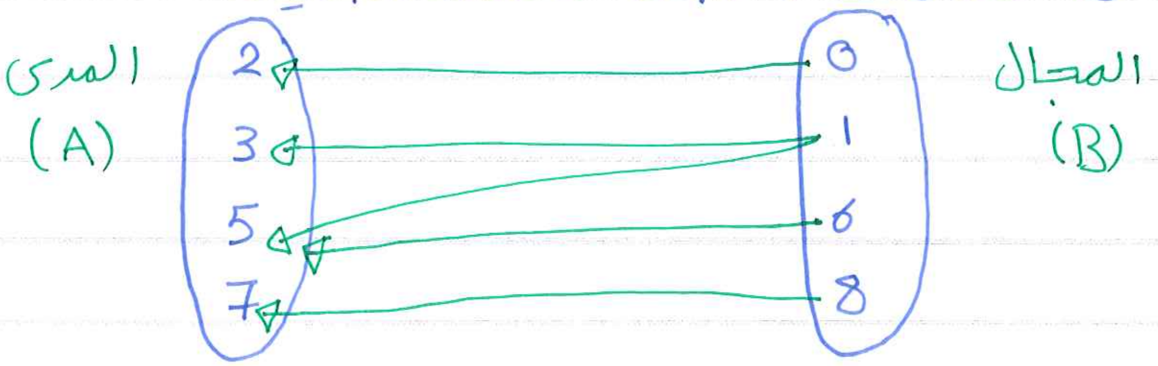
* العلاقة تربط بين مجموعتين من العناصر أحدهما تسمى المجال والأخرى تسمى المدى



يمكن ايجاد علاقة عكسية للعلاقة السابقة بعكس المجموعات

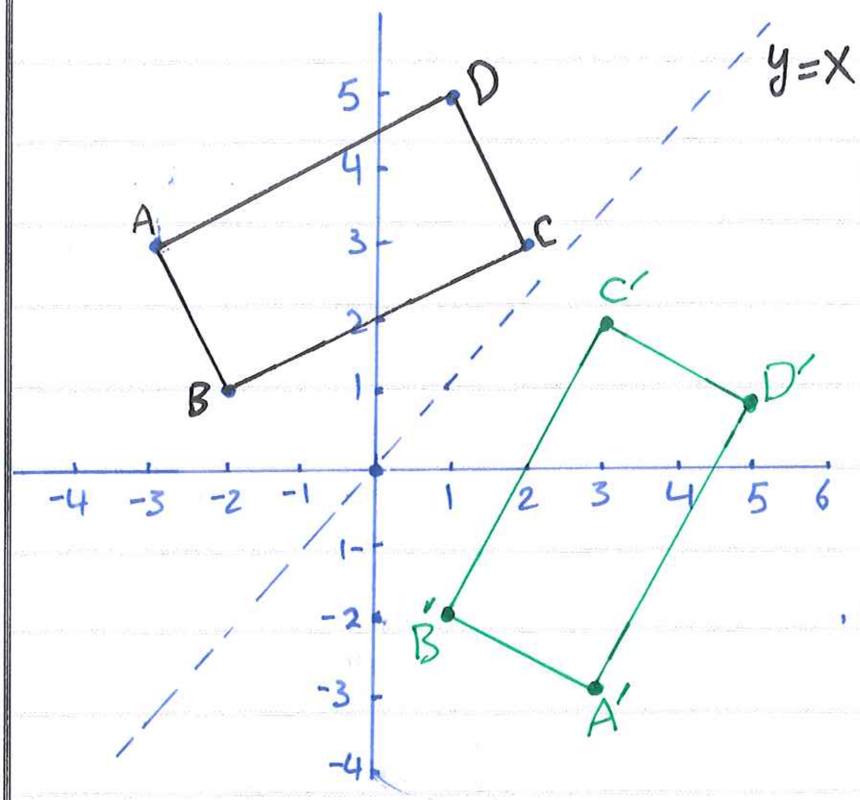
حيث يصبح المجال ← مدى العلاقة الجديدة

و المدى ← مجال العلاقة الجديدة



* وعلى المستوى الأحداثي عند عكس العلاقة يتم التبديل بين المساقط (x) ، (y) على النحو الآتي

$$\underset{x\quad y}{(a, b)} \longrightarrow \underset{y\ ,\ x}{(b, a)}$$

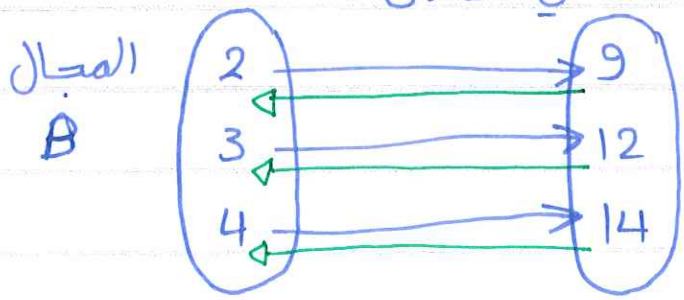


Ex: تمثل الأزواج المرتبة للعلاقة
$\{(-3,3),(-2,1),(2,3),(1,5)\}$
احداثيات رؤوس المستطيل ABCD . أجد العلاقة العكسية ، ثم أمثل بيانياً العلاقة والعلاقة العكسية على المستوى الإحداثي نفسه .

العلاقة العكسية
$\{(3,-3),(1,-2),(3,2),(5,1)\}$

* الاقتران و الاقتران العكسي *

* الاقتران : نوع خاص من العلاقات حيث انه علاقة تربط كل عنصر في المجال بعنصر واحد فقط في المدى .



* عند عكس الاقتران ستنتج علاقة عكسية له ، فإذا كانت هذه العلاقة العكسية تحقق شرط الاقتران تسمى بالاقتران العكسي .

* يرمز للاقتران العكسي للاقتران f(x) بالرمز : $\boxed{f^{-1}(x)}$

الاستاذ : رعد الخمايسة | الهاتف : 0775052929

* يُسمى الأقتران الذي تكون علاقته العكسية أقترانا" أيضاً" بأسم " أقتران واحد لواحد " لأن كل عنصر في المجال يرتبط بعنصر واحد فقط في المدى وكل عنصر في المدى يرتبط بعنصر واحد فقط في المجال

* سؤال أي من الأقترانات الآتية هو أقتران واحد لواحد

$2 \to 5$
$0 \to 7$
$1 \to 7$
$3 \to 8$

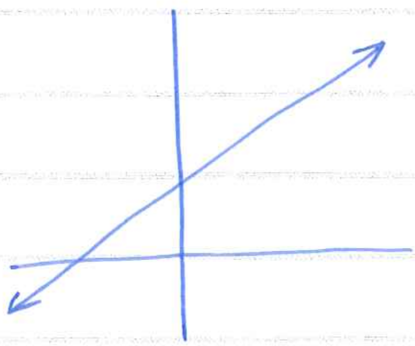
أقتران ليس واحد لواحد

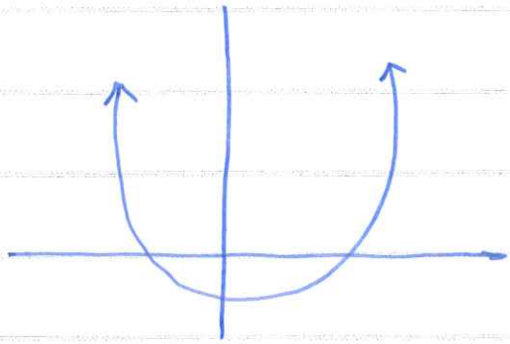
$2 \to 7$
$3 \to 5$
$6 \to 1$
$8 \to 6$

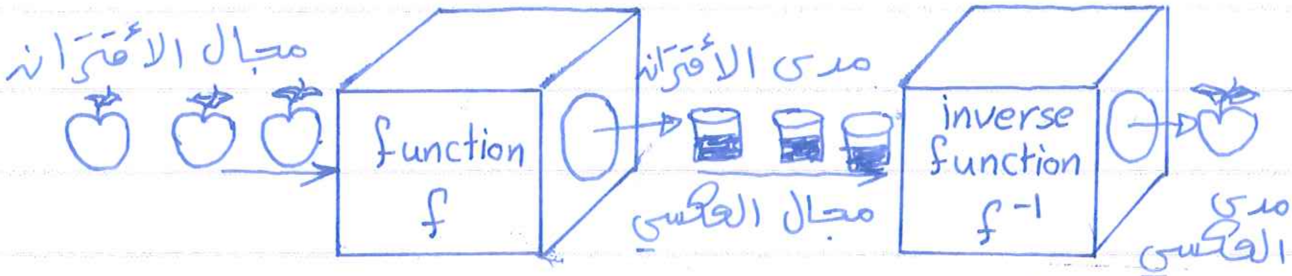
أقتران واحد لواحد

لأنه يوجد عنصر في المدى أرتبط بعنصرين في المجال

* يمكن معرفة إذا ما كان الأقتران يمثل أقتران واحد لواحد أم لا يمثل من الرسم البياني عن طريق أختبار الخط الأفقي فإذا قطع الخط الأفقي منحنى الأقتران في نقطة واحدة فقط فإنه أقتران واحد لواحد ، و إذا قطعه في أكثر من نقطة فإنه لا يمثل أقتران واحد لواحد







* بناءً على كل مما سبق نستنتج أنه :

← مدى الأقتران $f(x)$ هو مجال الأقتران العكسي له $f^{-1}(x)$

لذلك كثيراً ما نستخدم الأقتران العكسي في تحديد مدى بعض الأقترانات مثل الأقتران النسبي .

Ex : أجد الأقتران العكسي $f^{-1}(x)$ لكل أقتران مما يأتي

الخطوات

① استبدل

$f(x) \longrightarrow x$

$x \longrightarrow y$

② اجعل y موضوعاً للقانون

③ أستبدل

$y \longrightarrow f^{-1}(x)$

① $f(x) = 4(x-5)$

sol: $x = 4(y-5)$

$$\frac{x}{4} = y-5$$

$$\frac{x}{4} + 5 = y$$

$$f^{-1}(x) = \frac{x}{4} + 5$$

② $f(x) = 3x^2 - 4 \ , \ x \geq 0$

sol: $x = 3y^2 - 4$

$$3y^2 = x + 4$$

$$y^2 = \frac{x+4}{3} \longrightarrow y = \sqrt{\frac{x+4}{3}} \longrightarrow f^{-1}(x) = \sqrt{\frac{x+4}{3}}$$

أتحقق من فهمي

أجد الاقتران العكسي لكل من الاقترانين الآتيين :

a) $h(x) = 7x + 5$

sol: $x = 7y + 5 \rightarrow 7y = x - 5$

$\rightarrow y = \dfrac{x-5}{7} \rightarrow h^{-1}(x) = \dfrac{x-5}{7}$

b) $g(x) = x^2 + 2 \;,\; x \geq 0$

sol: $x = y^2 + 2 \rightarrow y^2 = x - 2$

$\rightarrow y = \sqrt{x-2} \rightarrow g^{-1}(x) = \sqrt{x-2}$

* من خصائص أي اقترانين متعاكسين أن كلاً منهما يعكس أثر الآخر ، لذا ينتج من تركيبهما الاقتران الذي يبقي كل عنصر في مجالهما على حالة ، وهو الاقتران المحايد الذي يربط كل عنصر بنفسه وقاعدته هي $f(x) = x$

* يكون $f^{-1}(x)$ الاقتران العكسي للاقتران $f(x)$ ، إذا وفقط إذا كان :

$(f \circ f^{-1})(x) = x$ لجميع قيم x في المجال $f^{-1}(x)$ و

$(f^{-1} \circ f)(x) = x$ لجميع قيم x في المجال $f(x)$.

$$\xrightarrow{5} \boxed{f(x)} \xrightarrow{7} \boxed{f^{-1}(x)} \xrightarrow{5}$$

$$\xrightarrow{5} \boxed{f(f^{-1}(x))} \xrightarrow{5}$$

الاستاذ : رعد الخمايسة | الهاتف : 0775052929

* إذا أعطى السؤال أقترانين $f(x)$ ، $g(x)$ وطلب إثبات أن كل منهما هو أقتران عكسي للآخر نستخدم قاعدة التركيب لتكوين $(g \circ f)(x)$ ، $(f \circ g)(x)$
حيث يجب أن ينتج في كل من الحالتين $\boxed{X}$
لأن : $(f \circ f^{-1})(x) = X$ & $(f^{-1} \circ f)(x) = X$

* تذكر : الأقتران المحايد هو $f(x) = X$

Ex : أثبت أن كلاً من الأقترانين $f(x) = \frac{X+5}{3}$ وَ $g(x) = 3X-5$ هو أقتران عكسي للآخر بإيجاد

① $(f \circ g)(x)$ ② $(g \circ f)(x)$

sol ① $(f \circ g)(x) = f(g(x))$
$= f(3x-5)$
$= \frac{\cancel{3}X \cancel{-5} \cancel{+5}}{\cancel{3}} = X$
أقتران محايد

② $(g \circ f)(x) = g(f(x))$
$= g\left(\frac{X+5}{3}\right)$
$= 3\left(\frac{X+5}{3}\right) - 5$
$= X + 5 - 5 = X$

* بما أن $(g \circ f)(x) = (f \circ g)(x) = X$ فإن $f(x)$ & $g(x)$ كل منهما عبارة عن أقتران عكسي للآخر

الاستاذ : رعد الخمايسة
الهاتف : 0775052929

* الأقتران الجذري *

$\sqrt[n]{\quad}$

إذا كان دليل الجذر زوجي $\sqrt{\quad}$ ، $\sqrt[4]{\quad}$ يكون مجاله
ما تحت الجذر ≥ 0
لأنه لا يوجد جذر زوجي للأعداد السالبة كعدد حقيقي
ويكون مداه : $y \geq 0$
لأن ناتج الجذر الزوجي بناءً على المجال دائماً موجب أو صفر

إذا كان دليل الجذر فردي $\sqrt[5]{\quad}$, $\sqrt[3]{\quad}$
يكون المجال $\mathbb{R}$
المدى $\mathbb{R}$

$+ \quad - \quad 0$

* تمثيل الأقتران $f(x) = \sqrt{x}$ بيانياً

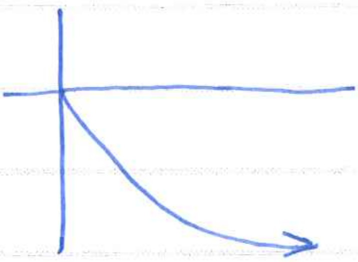
المجال : $x \geq 0$

المدى : $y \geq 0$

* تمثيل الأقتران $f(x) = -\sqrt{x}$ بيانياً

المجال : $x \geq 0$

المدى : $y \leq 0$



الاستاذ : رعد الخمايسة | | الهاتف : 0775052929

Ex: أجد مجال الأقتران $f(x) = \sqrt{2x-6}$ ومداه ، ثم أجد الأقتران العكسي له

الحل: المجال : ما تحت الجذر ≥ 0

$2x - 6 \geq 0$

$2x \geq 6$

$x \geq 3$ $\quad \{x \mid x \geq 3\}$ أو $x \in [3, \infty)$

المدى : $y \in [0, \infty)$ أو $\{y \mid y \geq 0\}$

الأقتران العكسي $f(x) = \sqrt{2x-6}$

$x = \sqrt{2y-6}$

$x^2 = 2y - 6 \rightarrow 2y = x^2 + 6$

$\rightarrow y = \dfrac{x^2+6}{2}$ $\quad \boxed{\therefore f^{-1}(x) = \dfrac{x^2+6}{2}}$

أتحقق من فهمي

أجد مجال $g(x) = \sqrt{3x+12} - 2$ ومداه ، ثم أجد الأقتران العكسي له

الحل :- ما تحت الجذر ≥ 0

$3x + 12 \geq 0$

$3x \geq -12$

$x \geq -4$ $\quad$ المجال : $\{x \mid x \geq -4\} = [-4, \infty)$

المدى : $y \geq 0 - 2$

$\{y \mid y \geq -2\} = [-2, \infty) \leftarrow y \geq -2$

الأقتران العكسي

$x = \sqrt{3y+12} - 2$

$x + 2 = \sqrt{3y+12}$

$(x+2)^2 = 3y + 12 \rightarrow \dfrac{(x+2)^2 - 12}{3} = y$

* سؤال : إذا كان الأقتران $f(x)$ مجاله هو $\{x \mid x \neq 2\}$ ومداه هو $\{y \mid y \geq 1\}$ جد كل من مجال ومدى الأقتران العكسي لـ $f(x)$ ؟

الحل : مجال $f^{-1}(x)$ = مدى $f(x) = [1, \infty)$

مدى $f^{-1}(x)$ = مجال $f(x) = \mathbb{R} - \{2\}$

* سؤال تميّز

مجال الأقتران $f(x) = \sqrt{x^2 + 5x + 6}$

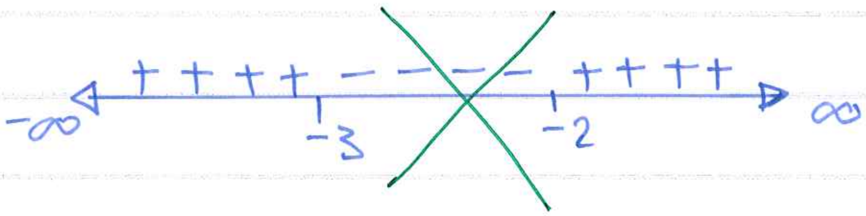
الحل :

$$x^2 + 5x + 6 = 0$$

$$(x+3)(x+2) = 0$$

$$x + 3 = 0 \longrightarrow \boxed{x = -3}$$

$$x + 2 = 0 \longrightarrow \boxed{x = -2}$$



المجال :

$$(-\infty, -3] , [-2, \infty)$$

المتتاليات

تعريف : المتتالية هي مجموعة من الأعداد تتبع ترتيب معيناً ، ويسمى كل عدد فيها الحد

* تعد المتتالية أقتراناً مجاله مجموعة الأعداد الطبيعية أو مجموعة جزئية منها ، ومداه مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية .

رتبة الحد ← 1 2 3 4 5 ----- n

حدود المتتالية ← $1 \quad 3 \quad 5 \quad 7 \quad 9 \quad \ldots\ldots \quad T(n)$

$1 \xrightarrow{+2} 3 \xrightarrow{+2} 5 \xrightarrow{+2} 7 \xrightarrow{+2} 9$

المجال (أعداد طبيعية) $\longrightarrow \boxed{T(n)} \longrightarrow$ المدى (أعداد حقيقية)

Ex : أجد الحدود الثلاثة لكل متتالية مما يأتي

① $2 \xrightarrow{+3} 5 \xrightarrow{+3} 8 \xrightarrow{+3} 11 , \boxed{14} , \boxed{17} , \boxed{20}$

② $3 \xrightarrow{\times 2} 6 \xrightarrow{\times 2} 12 \xrightarrow{\times 2} 24 , \boxed{48} , \boxed{96} , \boxed{192}$

③ $80 \xrightarrow{-7} 73 \xrightarrow{-7} 66 \xrightarrow{-7} 59 , \boxed{52} , \boxed{45} , \boxed{38}$

④ $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \boxed{\frac{1}{243}}, \boxed{\frac{1}{729}}, \boxed{\frac{1}{2187}}$

$\times\frac{1}{3}$ $\times\frac{1}{3}$ $\times\frac{1}{3}$

أتحقق من فهمي

أجد الحدود الثلاثة التالية لكل متتالية مما يأتي :

a) $\frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \frac{9}{2}, \frac{11}{2}, \ldots, \boxed{\frac{13}{2}}, \boxed{\frac{15}{2}}, \boxed{\frac{17}{2}}$

$+\frac{2}{2}$ $+\frac{2}{2}$ $+\frac{2}{2}$

b) $5, 10, 20, 40, \boxed{80}, \boxed{160}, \boxed{320}$

$\times 2$ $\times 2$ $\times 2$

c) $150, 141, 132, 123, \boxed{114}, \boxed{105}, \boxed{96}$

-9 -9 -9

d) $400, 200, 100, 50, \boxed{25}, \boxed{12.5}, \boxed{6.25}$

$\div 2$ $\div 2$ $\div 2$

* الحد العام لمتتالية هو الذي يمثل العلاقة بين أي حد ورتبته ويرمز له بالرمز $T(n)$

يسهل الحد العام إيجاد أي حد في المتتالية باستعمال رتبته .

الحد العام

أعداد حقيقية ⟵ $\boxed{T(n)}$ ⟵ أعداد طبيعية

$$T(n) = 5n+1$$

n : 1 2 3 4 , ... , 1000

6 11 16 21 , ... , $\boxed{}$

+5 +5 +5

$$T(1000) = 5(1000) + 1 = 5001$$

Ex : أبين إذا كان المقدار الجبري المعطى بجانب كل متتالية مما يأتي يمثل حداً "عاماً" لها أم لا ، ثم أصنف المتتاليات إلى خطية أو تربيعية أو تكعيبية أو أسية ثم أجد الحد الخامس والسبعين في كل منها

① $4, 7, 10, 13, \ldots\ldots, 3n+1$

$n=1 \longrightarrow T(1) = 3(1)+1 = 4$ ✓

$n=2 \longrightarrow T(2) = 3(2)+1 = 7$ ✓

$n=3 \longrightarrow T(3) = 3(3)+1 = 10$ ✓

$n=4 \longrightarrow T(4) = 3(4)+1 = 13$ ✓

$n=75 \longrightarrow T(75) = 3(75)+1 = 226$

نعم الحد العام لهذه المتتالية هو المعطى $3n+1$ وتصنف متتالية خطية

② $4, 7, 12, 19, \ldots\ldots, n^2+3$

نعم الحد العام لهذه المتتالية هو المعطى n^2+3 وتصنف متتالية تربيعية

$n=1 \longrightarrow T(1) = (1)^2+3 = 4$ ✓

$n=2 \longrightarrow T(2) = (2)^2+3 = 7$ ✓

⋮ $n=75$ $T(75) = (75)^2+3 = 5628$

③ $2, 9, 28, 65, \ldots, n^3+1$ متتالية تكعيبية

$n=1 \rightarrow T(1) = (1)^3+1 = 2$ ✓

$n=2 \rightarrow T(2) = (2)^3+1 = 9$ ✓

$n=3 \rightarrow T(3) = (3)^3+1 = 28$ ✓

$n=4 \rightarrow T(4) = (4)^3+1 = 65$ ✓

$n=75 \rightarrow T(75) = (75)^3+1 = 421876$

∴ نعم الحد العام لهذه المتتالية هو المعطى (n^3+1)

④ $2, 4, 8, 16, \ldots, 2^n$ متتالية أسية

$n=1 \rightarrow T(1) = 2^1 = 2$ ✓

$n=2 \rightarrow T(2) = 2^2 = 4$ ✓

$n=3 \rightarrow T(3) = 2^3 = 8$ ✓

$n=4 \rightarrow T(4) = 2^4 = 16$ ✓

$n=75 \rightarrow T(75) = 2^{75} = 3.78 * 10^{22}$

∴ نعم الحد العام لهذه المتتالية هو المعطى (2^n)

* أكتشاف الحد العام للمتتاليات .

بصورة عامة يتم إيجاد الحد العام للمتتالية بالتجريب والأختبار لكن هذه بعض الملاحظات للمساعدة :

1) رقم حدود المتتالية أولاً

2) ادرس حدود المتتالية على الترتيب الآتي

← هل مقدار الزيادة أو النقصان بين كل حدّين متتاليين ثابتة ؟

إذا كانت الإجابة نعم ، فإن المتتالية خطية وقاعدتها

$$T(n) = \text{الحد الأول} \pm \left(\text{مقدار الزيادة}\right)(n-1)$$

Ex : أوجد الحد العام للمتتالية

n: 1 , 2 , 3 , 4

12 , 15 , 18 , 21 , ...

$\xrightarrow{+3}$ $\xrightarrow{+3}$ $\xrightarrow{+3}$

$$T(n) = 12 + 3(n-1)$$

$$= 12 + 3n - 3 = 9 + 3n$$

← إذا كان مقدار الزيادة أو النقصان غير ثابتة ، لكن مقدار الزيادة أو النقصان التي تليها ثابتة فإن المتتالية تربيعية ويتم أستنتاجها بالتجريب والاختبار

Ex أوجد الحد العام للمتتالية

n: 1 , 2 , 3 , 4 , 5

0 , 3 , 8 , 15 , 24 , ...

$\xrightarrow{+3}$ $\xrightarrow{+5}$ $\xrightarrow{+7}$ $\xrightarrow{+9}$

$\xrightarrow{+2}$ $\xrightarrow{+2}$ $\xrightarrow{+2}$

$$T(n) = n^2 - 1$$

← إذا كانت النسبة بين كل حدين متتاليين ثابتة فإن المتتالية أسية وصورتها بشكل عام :

$$T(n) = a(b)^n$$

حيث (b) هو مقدا النسبة الثابتة .

ويتم إيجاد (a) من خلال تعويض أحد الحدود في المتتالية ويفضل أن يكون الأول حيث $\boxed{n=1}$

Ex

$n:\ 1\quad 2\quad 3\quad 4$

$16, 32, 64, 128, \dots$

$\times 2\quad \times 2\quad \times 2$

النسبة ثابتة

∴ متتالية أسية

$T(n) = a(b)^n$

$16 = a(2)^1 \Longrightarrow \boxed{a=8}$

$\therefore T(n) = 8(2)^n$

← ما غير ذلك لا بد من التجريب والأختبار مع وجود بعض الملاحظات المساعدة خلال حل الأمثلة

Ex : أجد الحد العام لكل متتالية مما يأتي

$1\quad 2\quad 3\quad 4\quad 5$

① $5, 12, 19, 26, 33, \dots$

$+7\quad +7\quad +7\quad +7$

$\therefore T(n) = 5 + 7(n-1)$

$T(n) = 7n - 2$

$1\quad 2\quad 3\quad 4\quad 5$

② $5, 8, 13, 20, 29, \dots$

$3\quad 5\quad 7\quad 9$

$2\quad 2\quad 2$ ⟶ متتالية تربيعية

$T(n) = n^2 + 4$

$1\quad 2\quad 3\quad 4\quad 5$

③ $0, 7, 26, 63, 124, \dots$

$T(n) = n^3 - 1$

④ $11 \xrightarrow{\times 1.1} 12.1 \xrightarrow{\times 1.1} 13.31 \xrightarrow{\times 1.1} 14.641, \ldots$

النسبة ثابتة ← متتالية أسية

$\Downarrow$

$b = 1.1$

$T(n) = a\, b^n$

$T(n) = a\,(1.1)^n$

$\frac{11}{1.1} = \frac{a\,(1.1)}{1.1} \Rightarrow \boxed{a = 10}$ $\quad T(n) = 10\,(1.1)^n$

نهاية الوحدة الأولى