

10

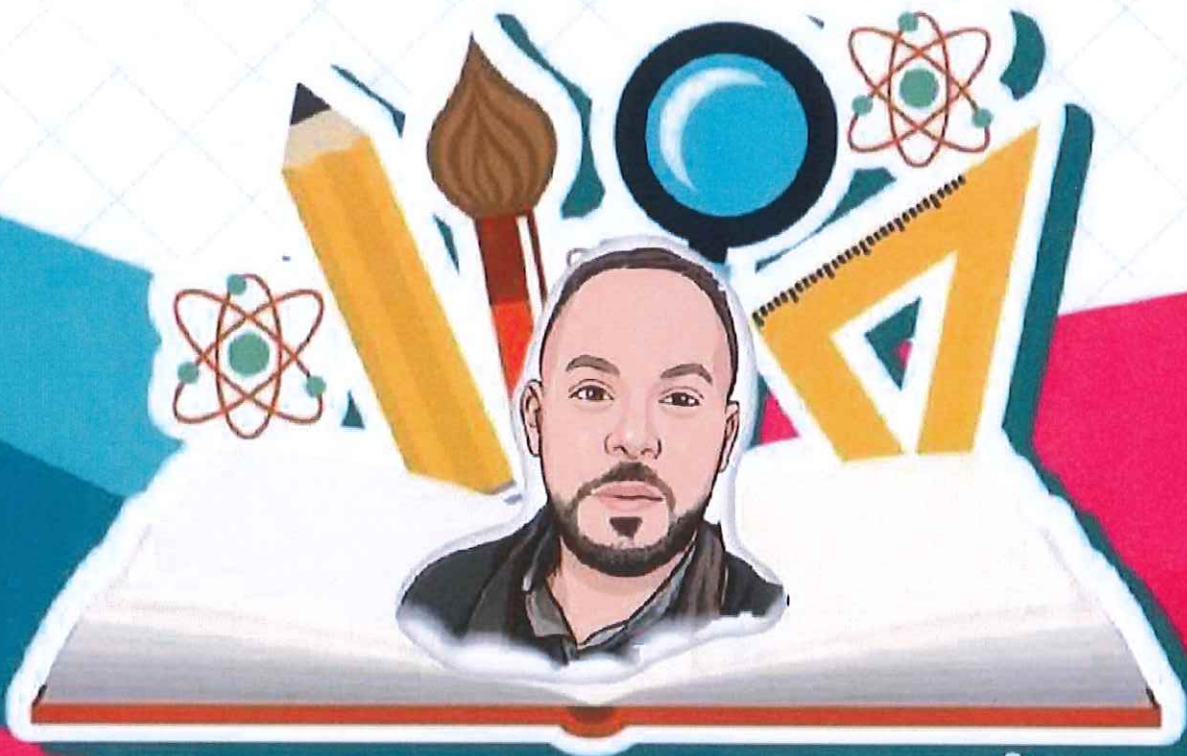
الزهد

في الرياضيات

الصف العاشر
الفصل الثاني

الوحدة الثانية

الأشكال



0775052929

أ. زهد النخراية

بسم الله الرحمن الرحيم

المقدمة

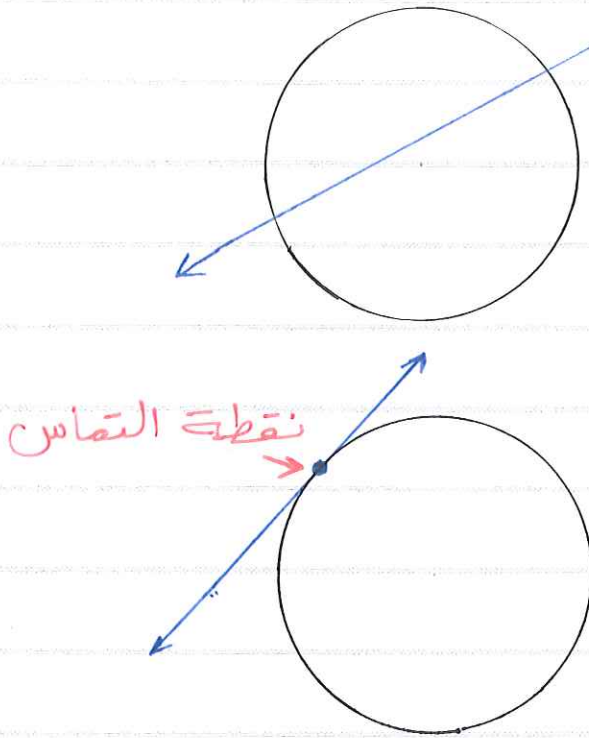
الحمد لله رب العالمين والصلاة والسلام على سيدنا محمد وآله وصحبه أجمعين .
الحمد لله الذي وفقني في اعداد هذا العمل من تلاخيص الرعد في الرياضيات
للسف العاشر الأساسي منهاج (كولينز) لنقدمها الى طلابنا الأعزاء لتكون لهم
عونا على الفهم والاستيعاب والتطبيق لنصل بهم الى اعلى مراتب التوفيق
والنجاح .

وقد حاولنا في هذه السلسلة الى تبسيط المعلومة مع شرح ما يلزم من معارف
ومفاهيم أساسية وقواعد تتعلق بالمادة داعمين ذلك بالأمثلة والرسوم التوضيحية
حيث وفقنا بإذن الله إلى تغطية مسافات هذا المنهاج الجديد لوزارة التربية والتعليم

الأستاذ رعد الخمايسة

هاتف 0775052929

تمهيد لدراسة الوحدة (2)

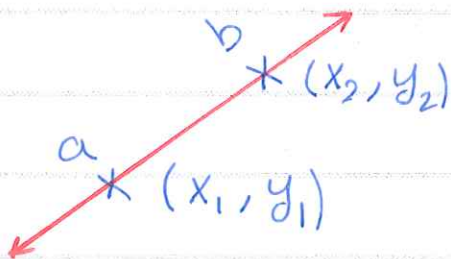


في الشكل المجاور يسمى
المستقيم بـ المستقيم القاطع
حيث أنه يقطع الأفتزان
بنقطة أو أكثر

أما المستقيم في الشكل
الثاني فيسمى بالمستقيم
الماس بحيث أنه يشترك
مع الأفتزان بنقطة واحدة
يسمى عندها وتسمى نقطة التماس

ميل المستقيم

* قانون حساب الميل للمستقيم المار بنقطتين



$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

* ميل المستقيم يكون

[A] موجب : إذا كان الأفتزان أو المستقيم متزايد

⇒ m : موجب

لأنه متزايد

B) سالبه : إذا كان الأقران أو المستقيم متناقص

m : سالبه

لأنه متناقص

C) صفر : إذا كان الأقران أو المستقيم مرسوم بشكل أفقي

$m = \text{صفر}$

لأنه أفقي

D) قيمة غير معروفة : إذا كان الأقران أو المستقيم مرسوم

m : غير معروفة

بشكل عامودي

لأنه عامودي

Rem

ميل المستقيم هو مقدار ثابتة لذلك يمكن حساب ميله من خلال أي نقطتين تقعان عليه (يسر بهما)

VIN) : إنه ميل المنحني عند نقطة واقعة عليه يساوي ميل المماس عند تلك النقطة ؛ لذلك فإنه ميل المنحني يختلف من نقطة إلى أخرى عليه .

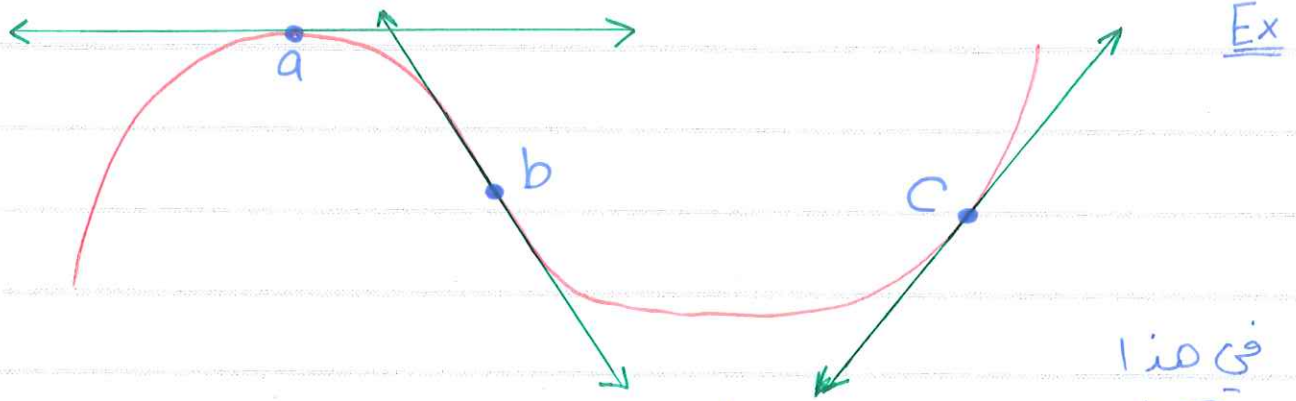
ركز معي هونه !!

ميل المستقيم

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

ميل المنحني ← هو ميل المستقيم الذي يمس

المنحنى عند نقطة معينة f لهيئة ركن بين منحنى
و مستقيم الله يرضى عليك (الله)



في هذا الشكل يوجد عندي ثلاثة نقاط، حتى اوجد الميل عند كل نقطة يجب أن أرسم مماس لمس المنحنى عند كل نقطة لاصح الآن كيفه أنه يوجد لكل نقطة على المنحنى قيمة ميل مختلفة عن الأخرى
← لاحظ أنه المماس المرسوم عند النقطة C هو مستقيم متزايد ولذلك فإنه الميل عند النقطة C هو موجب

← لاحظ أنه المماس المرسوم عند النقطة B هو مستقيم متناقص ولذلك فإنه الميل عند النقطة B هو سالب

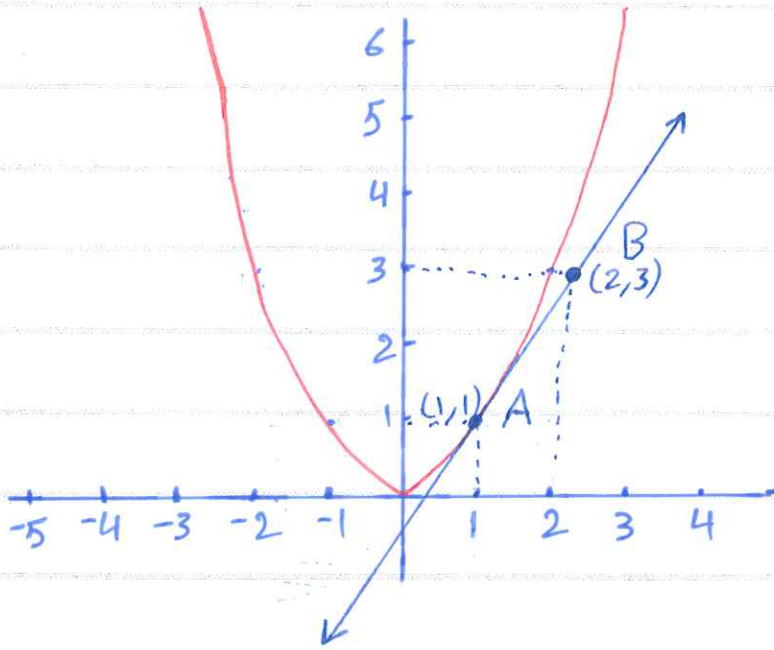
← لاحظ أنه المماس المرسوم عند النقطة A هو أفقي ولذلك فإنه الميل عند A هو صفر

Rem

إحداثيات أي نقطة تقع على المستوى الإحداثي تتصل
بالزوج المرتب (x, y)

مفردات مهمة

Tangent : مماس
 slope : ميل
 Line : مستقيم



Ex : يمثل المستقيم في الشكل
 المجاور مماساً لمنحني
 الأقران $y = x^2$ عند النقطة
 $A(1,1)$ أجد ميل منحني
 الأقران عند النقطة A

الحل :

ميل المنحني عند النقطة $A(1,1)$ = ميل المماس المرسوم عند هذه النقطة

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

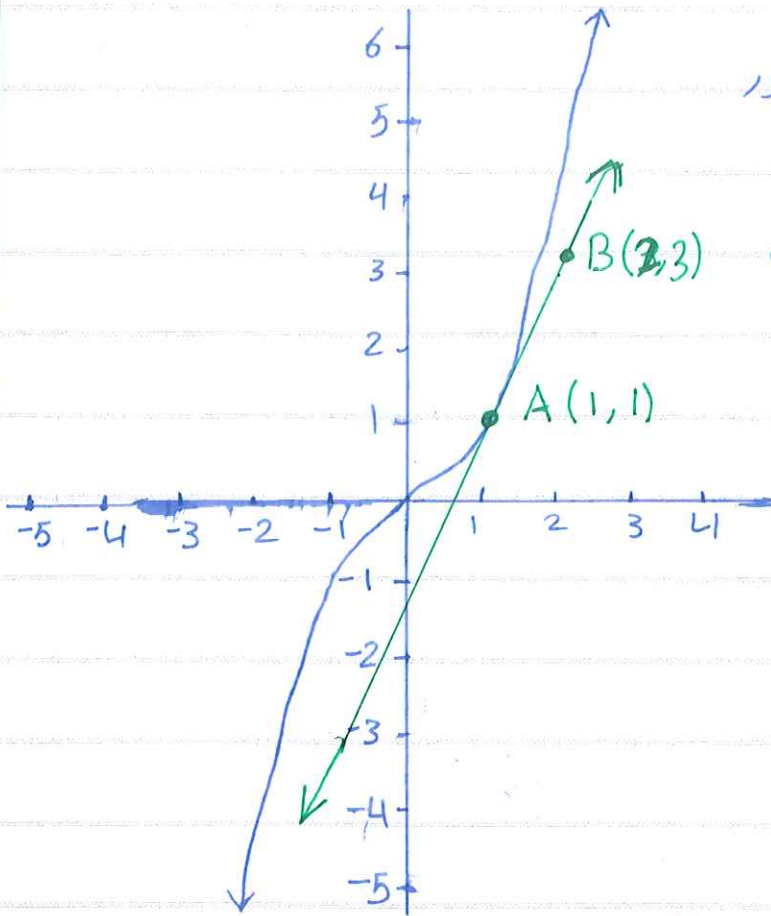
$$= \frac{3 - 1}{2 - 1} = \frac{2}{1} = 2$$

Rem

يرمز للفرق بين الأعدادي y لنقطتين ب Δy
 يرمز للفرق بين الأعدادي x لنقطتين ب Δx

أتحققه من فهمي

يمثل المستقيم في الشكل المجاور مماساً لمنحنى الأقران $y = x^3$ عند النقطة $A(1, 1)$ أم ميل منحنى الأقران عند النقطة A



الحل :

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$= \frac{3 - 1}{2 - 1} = \frac{2}{1}$$

$$= 2$$

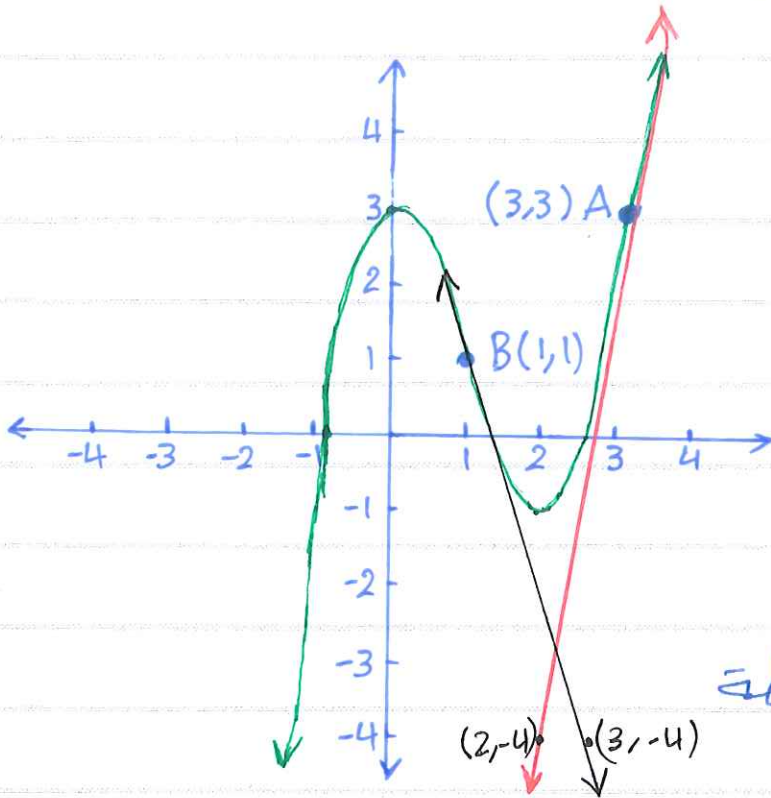
الإجابة الدقيقة هي 3 ولكن بناءً على هذا الرسم تم قبول الإجابة 2 وسيتم التوضيح في الدرس القادم

Note

إذا لم يكن المماس مرسوم عند النقطة التي يراد إيجاد ميل المنحنى عندها فإنه يرسم باستخدام المسطرة

وبما أنه الرسم اليدوي ليس دقيقاً فإنه ميل المماس المرسوم قد يختلف قليلاً عن القيمة الدقيقة لميل المنحنى عندئذٍ يكون الناتج قيمة تقريبية لميل المنحنى

Ex : أقدر ميل منحنى الأقرانه $y = x^3 - 3x^2 + 3$ عند كل نقطة مما يأتي



- ① النقطة $A(3, 3)$
- ② النقطة $B(1, 1)$
- ③ أكتب معادلة المماس
المر بالنقطة $B(1, 1)$

نقوم برسح مماسين
عند النقط A, B
ونجد الميل عند كل نقطة

الحل :

$$\boxed{1} \quad m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-4 - 3}{2 - 3} = \frac{-7}{-1} = 7$$

$$\boxed{2} \quad m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-4 - 1}{3 - 1} = \frac{-5}{2} = -2.5$$

Rem : معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطة (x_1, y_1) وميله يساوي (m) هي :

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

بحيث أنه هذه المعادلة تمثل العلاقة بين الأعدادي x والأصلي y لأي نقطة تقع على المستقيم .

$$\boxed{3} \quad m = -2.5 \quad \begin{matrix} x_1 & y_1 \\ B(1, 1) \end{matrix} \quad y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$\boxed{6} \quad \Rightarrow y - 1 = -2.5(x - 1) \Rightarrow y = -2.5x + 3.5$$

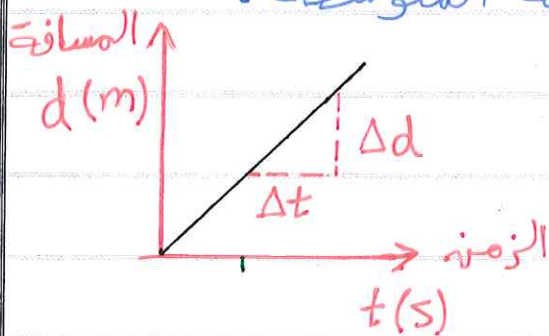
* مراجعة *

→ السرعة المتوسطة: هي سرعة الجسم خلال فترة زمنية $[t_1, t_2]$ ويرمز لها بالرمز (\bar{v}) أو (V_{avg})

→ السرعة اللحظية: هي سرعة الجسم عند لحظة زمنية محددة (عند $t=t_1$)

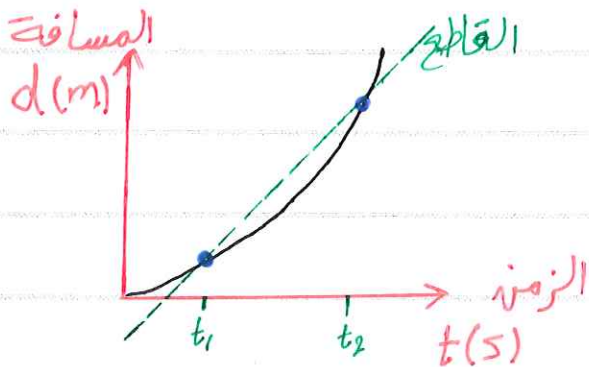
* من خلال منحنى (المسافة - الزمن)

إذا كان المنحنى عبارة عن مستقيم فإنه ميله يساوي السرعة المتوسطة & بما أنه ميل المستقيم هو مقدار ثابت فإنه السرعة اللحظية هنا تساوي السرعة المتوسطة.



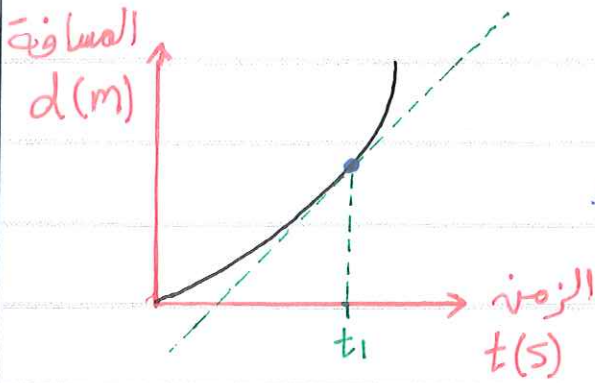
$$\Rightarrow v = \bar{v} = \frac{\Delta d}{\Delta t}$$

* لكن: إذا كان المنحنى ميله متغير من نقطة إلى أخرى فإنه السرعة المتوسطة تساوي ميل القاطع المار بحدود الفترة الزمنية المطلوبة.



$$\Rightarrow \bar{v} = V_{avg} = \frac{\Delta d}{\Delta t}$$

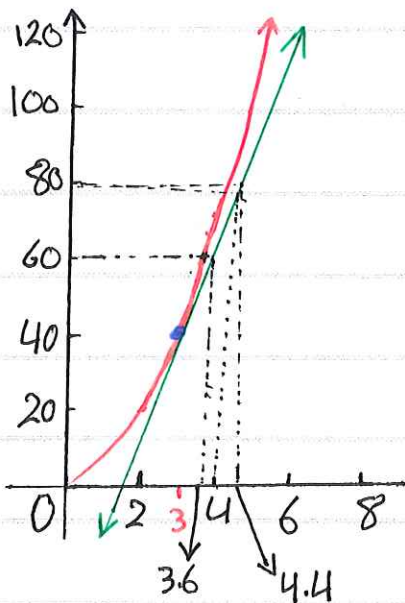
* أما السرعة اللحظية فيمكن إيجادها من خلال مسابه ميل المماس المرسوم عند اللحظة الزمنية المطلوبة



السرعة عند t_1 = ميل المماس عند t_1 \Rightarrow

* تذكر أيضاً : يمكن حساب التسارع المتوسط والتسارع اللحظي من منحنى (السرعة - الزمن) حيث : التسارع المتوسط يساوي ميل القاطع التسارع اللحظي يساوي ميل المماس

Ex : يمثل الأقران $d(t) = 4.9t^2$ العلاقة بين المسافة المقطوعة d بالمتر والزمن t بالثانية (منحنى المسافة - الزمن) لكرة تسقط سقوطاً حراً من وضع السكون . أوجد سرعة الكرة بعد 3 ثوانٍ من سقوطها .



السرعة عند $t = 3$ تساوي ميل المماس عند

هذه اللحظة الزمنية

$$x_1, y_1 \\ (3.6, 60)$$

$$x_2, y_2 \\ (4.4, 80)$$

$$V = \text{slope} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$= \frac{80 - 60}{4.4 - 3.6} = \frac{20}{0.8}$$

$$= \frac{200}{8} = \frac{100}{4} = \frac{50}{2} = 25$$

$$\therefore V = 25 \text{ m/s}$$

* الفرق بين الأقران f مشتقة الأقران
 ← قاعدة الأقران $(f(x))$ تعطي قيمة الأقران عند أي نقطة تقع على منحنى .

← مشتقة الأقران $(f'(x))$ هي قاعدة تعطي ميل المماس عند أي نقطة تقع على منحنى . أي ميل المنحنى عند تلك النقطة

صورة (قيمة الأقران) $f(x) \rightarrow$
 ميل المماس $f'(x) \rightarrow$

* قواعد الاشتقاق *

قاعدة (١)

$$f(x) = x^n \rightarrow f'(x) = n x^{n-1}$$

* مشتقة x مرفوع لقوة ← نزل القوة واطرح منها واحد

Ex : من اشتق كل من الأقرانات التالية

1] $f(x) = x^8$

Sol: $\rightarrow f'(x) = 8x^{8-1} = 8x^7$

2] $f(x) = x^5$

Sol: $\rightarrow f'(x) = 5x^{5-1} = 5x^4$

$$\boxed{3} \quad f(x) = x^7$$

$$\text{Sol} : \rightarrow f'(x) = 7x^{7-1} = 7x^6$$

$$\boxed{4} \quad f(x) = x^{11}$$

$$\text{Sol} : \rightarrow f'(x) = 11x^{11-1} = 11x^{10}$$

$$\boxed{5} \quad f(x) = x$$

$$\text{Sol} : \rightarrow f'(x) = 1x^{1-1} = 1x^0 = 1$$

$$\boxed{6} \quad f(x) = x^{100}$$

$$\text{Sol} : \rightarrow f'(x) = 100x^{100-1} = 100x^{99}$$

قاعدة (٢)

$$f(x) = ax^n \rightarrow f'(x) = anx^{n-1}$$

حيث (a) ثابتة " أي حافظ على الثابتة واستعمل x^n "

Ex : جد مشتقة كل من الأقرانات التالية :

$$\boxed{1} \quad f(x) = 2x^4 \rightarrow f'(x) = 2(4)x^{4-1} = 8x^3$$

$$\boxed{2} \quad f(x) = \frac{1}{4}x^3 \rightarrow f'(x) = \frac{1}{4}(3)x^2 = \frac{3}{4}x^2$$

$$\boxed{3} \quad f(x) = 5x^{12} \rightarrow f'(x) = 5(12)x^{11} = 60x^{11}$$

$$\boxed{4} \quad f(x) = -7x^8 \rightarrow f'(x) = -7(8)x^7 = -56x^7$$

$$\boxed{5} \quad f(x) = 0.5x^6 \rightarrow f'(x) = 0.5(6)x^5 = 3x^5$$

$$\boxed{6} \quad f(x) = -2x \rightarrow f'(x) = -2(1)x^0 = -2$$

$$\boxed{7} \quad f(x) = 3x \rightarrow f'(x) = 3$$

$$\boxed{8} \quad f(x) = 9x \rightarrow f'(x) = 9$$

$$\boxed{9} \quad f(x) = \sqrt{3}x \rightarrow f'(x) = \sqrt{3}$$

قاعدة (3)

$$f(x) = c \rightarrow f'(x) = 0$$

حيث (c) عدد حقيقي ثابت " مشتقة العدد الثابت = صفر "

Ex : من مشتقة كل من الأقرانات التالية :

$$\boxed{1} \quad f(x) = -3 \rightarrow f'(x) = 0$$

$$\boxed{2} \quad f(x) = 7 \rightarrow f'(x) = 0$$

$$\boxed{3} \quad f(x) = \pi \rightarrow f'(x) = 0$$

$$\boxed{4} \quad f(x) = \pi^2 \rightarrow f'(x) = 0$$

$$\boxed{5} \quad q(x) = \frac{\sqrt{3}}{0.7} \rightarrow q'(x) = 0$$

قاعدة (4)

$$f(x) = g(x) \pm h(x) \rightarrow f'(x) = g'(x) \pm h'(x)$$

أي أن المشتقة تنوزع على الجمع والطرح

Ex : جد مشتقة كل من الأقرانات التالية

$$\boxed{1} \quad f(x) = x^2 - 6x$$

$$\text{sol: } f'(x) = 2x - 6$$

$$\boxed{2} \quad f(x) = 5x^7 + 3x^4 - \frac{3}{2}x^2 + 8$$

$$\text{sol: } f'(x) = 5(7)x^6 + 3(4)x^3 - \frac{3}{2}(2)(x) + 0$$

$$\therefore f'(x) = 35x^6 + 12x^3 - 3x$$

$$\boxed{3} \quad f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 4x - 1$$

$$\text{sol: } f'(x) = \frac{1}{2}(2)(x) + 4 \rightarrow f'(x) = x + 4$$

$$\boxed{4} \quad g(x) = 9x - 7x^5 - 6 + \sqrt{3}x^2$$

$$\text{sol: } g'(x) = 9 - 7(5)x^4 - 0 + \sqrt{3}(2)x$$

$$g'(x) = 9 - 35x^4 + 2\sqrt{3}x$$

VIN : يمكن التعبير عن المشتقة بالرموز التالية

$$f(x) \longrightarrow f'(x)$$

$$y \longrightarrow y'$$

$$y \longrightarrow \frac{dy}{dx}$$

Ex : $\frac{dy}{dx}$ لكل من التالية

$$\boxed{1} \quad y = \frac{1}{5} x^5 - \frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{2} x^2 - 0.6$$

Sol :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cancel{5}} (\cancel{5}) x^4 - \frac{1}{\cancel{3}} (\cancel{3}) x^2 + \frac{1}{\cancel{2}} (\cancel{2}) x - 0$$

$$\frac{dy}{dx} = x^4 - x^2 + x$$

$$\boxed{2} \quad y = 3x^2 - \sqrt{3}x + \pi^2$$

Sol :

$$\frac{dy}{dx} = y' = 3(2)x - \sqrt{3} + 0$$

$$y' = 6x - \sqrt{3}$$

Rem * ميل المنحني عند نقطة يساوي مشتقة الأقرانه عند هذه النقطة

* ميل المماس يساوي مشتقة الأقرانه عند نقطة التماس

Ex : إذا كان $f(x) = 3x^2 - 18x + 5$ ، فأستعمل المشتقة لأيجاد كل مما يأتي :

□ ميل منحنى $f(x)$ عند النقطة $(1, -10)$

Sol : ميل المنحني عند النقطة $(1, -10)$ يساوي المشتقة عند هذه النقطة

$$f'(x) = 3(2)x - 18 \rightarrow f'(x) = 6x - 18$$

$$f'(1) = 6(1) - 18 \Rightarrow f'(1) = -12$$

□ قيمة x التي يكون عندها ميل منحنى الأقرانه صفراً

الميل يساوي صفر عندما تكون المشتقة تساوي صفر : Sol

$$f'(x) = 6x - 18$$

$$0 = 6x - 18 \rightarrow 6x = 18$$

$$\rightarrow x = \frac{18}{6} = 3$$

$$\therefore x = 3$$

أي أنه يوجد مماس أفقي عند $x = 3$

أتحققه من فهمي 

إذا كان $f(x) = 5x^2 + 25x - 9$ فأستعمل المشتقة لإيجاد كل من

1] ميل المنحنى $f(x)$ عند $x = -2$

2] قيمة x التي يكون عندها ميل منحنى الأفتراض صفراً

1] ميل المنحنى عند $x = -2$ يساوي المشتقة عند $x = -2$ Sol:

$$f'(x) = 10x + 25$$

$$f'(-2) = 10(-2) + 25 = -20 + 25 = 5$$

$$\therefore f'(-2) = 5$$

2] ميل المنحنى يساوي صفراً عند المشتقة تساوي صفراً

$$f'(x) = 10x + 25$$

$$0 = 10x + 25 \rightarrow 10x = -25 \rightarrow x = -2.5$$

\therefore أي أنه يوجد مماس أفقي عند $x = -2.5$

Rem: * ميل منحنى (المسافة) - (الزمن) عند أي لحظة

زمنية يعطي السرعة اللحظية .

§ بما أنه المشتقة تُعبر عن ميل المماس للمنحنى فإنه

مشتقة معادلة المسافة تُعطي معادلة السرعة اللحظية

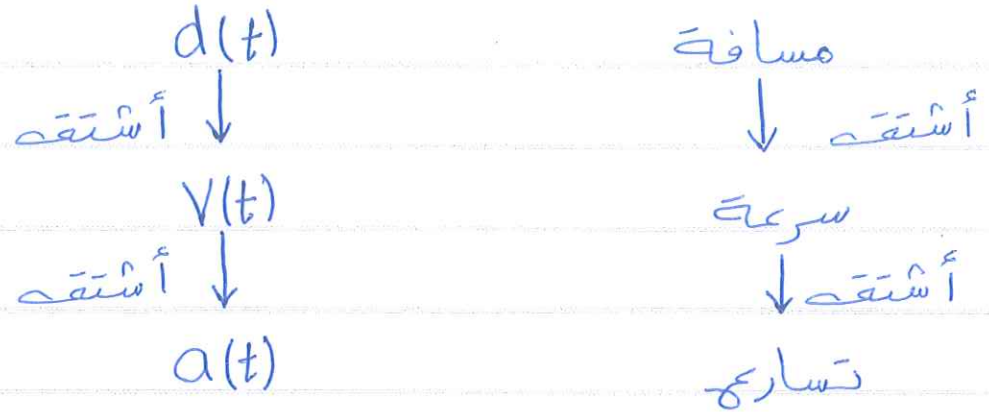
$$d(t) \xrightarrow{\text{أشتق}} v(t)$$

$$\therefore v(t) = d'(t)$$

§ للوصول إلى معادلة التسارع اللحظي نشتق معادلة

$$a(t) = v'(t)$$

السرعة



Ex : يمثل الأقران $d(t) = 0.6t^3 - 1.5t - 0.9$ المسافة (بالمتر) التي يقطعها جسم متحرك ، حيث t الزمن بالثانية :

1] أجد سرعة الجسم بعد 3 ثوانٍ من بدء حركته .

Sol : مشتقة معادلة المسافة ← معادلة السرعة

$$v(t) = d'(t)$$

$$v(t) = (0.6)(3)t^2 - 1.5$$

$$v(t) = 1.8t^2 - 1.5$$

$$v(3) = 1.8(3)^2 - 1.5 = 9(1.8) - 1.5 = 16.2 - 1.5$$

$$= 14.7 \text{ m/s} \#$$

2] أجد تسارع الجسم بعد 5 ثوانٍ من بدء حركته

Sol : $v(t) = 1.8t^2 - 1.5$

$$a(t) = v'(t)$$

$$a(t) = 1.8(2)t$$

$$a(t) = 3.6t$$

$$a(5) = 3.6 * (5) = 18.0$$

$$= 18 \text{ m/s}^2$$

أتحققه من فهمي 

يمثل الأقران $d(t) = 2.5t^2 + 0.1t - 0.3$ المسافة (بالمتر) التي يقطعها جسم متحرك حيث t الزمن بالثانية .
أجد سرعة الجسم وتسارعه عندما $t = 3$.

Sol: $d(t) \xrightarrow{\text{أشتق}} v(t) \xrightarrow{\text{أشتق}} a(t)$

$$v(t) = d'(t)$$

$$v(t) = 5t + 0.1 \rightarrow v(3) = 5(3) + 0.1 = 15.1 \text{ m/s}$$

$$a(t) = v'(t)$$

$$a(t) = 5 \rightarrow a(3) = 5 \text{ m/s}^2 \#$$

$$f(x) = 3x^2 - 6x + 2$$

Ex : إذا كان

جد كل من التالية :

$$\boxed{1} \quad f'(2)$$

Sol: اشتق $f(x)$ ثم عوض 2 في المشتقة

$$f'(x) = 6x - 6$$

$$f'(2) = 6(2) - 6 = 12 - 6 = 6 \#$$

$$\boxed{2} \quad (f(2))'$$

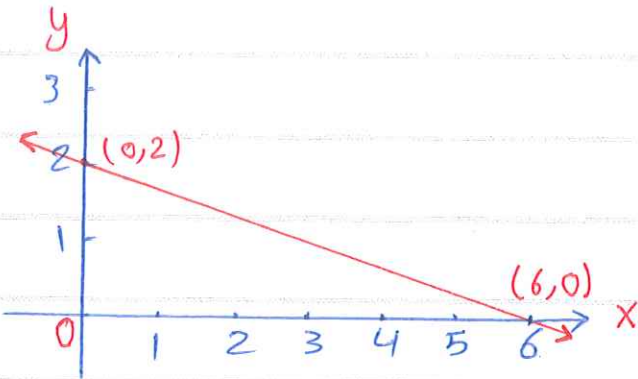
Sol: عوض في $f(x)$ $x=2$ ثم اشتق

$$f(2) = 3*4 - 6*2 + 2$$

$$f(2) = 2$$

$$(f(2))' = \text{صفر}$$

Ex : إذا كان المستقيم في الشكل المجاور هو منحنى
الأقترانه $f(x)$ فأوجد $f'(x)$



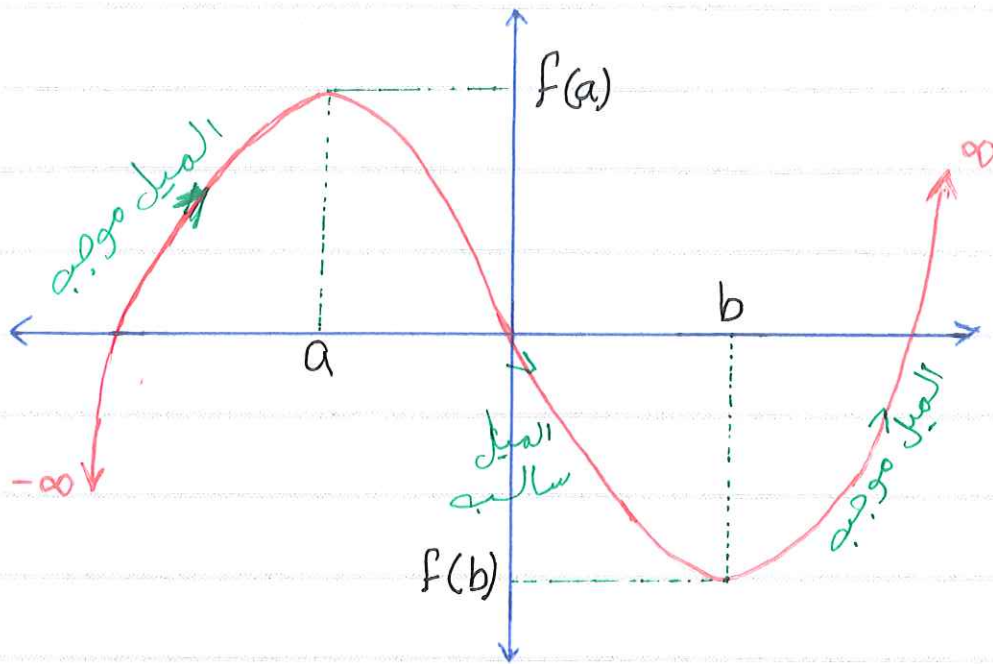
: Sol

المشتقة هي الميل

$$f'(x) = m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0 - 2}{6 - 0} = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3}$$

* القيع العظمى والصغرى *

مقدمة



* الأقران متزايد في الفترة $(-\infty, a]$, $[b, \infty)$

* الأقران متناقص في الفترة $[a, b]$

* عند $x=a$ يوجد قيمة عظمى محلية وقيمتها $f(a)$

* عند $x=b$ يوجد قيمة صغرى محلية وقيمتها $f(b)$

* المشتقة تساوي الميل

الأقران متزايد ← الميل موجب ← المشتقة موجبة

الأقران متناقص ← الميل سالب ← المشتقة سالبة

* عند القمة و القاع يكون المماس أفقي وبالتالي ميله صفر

وبالتالي المشتقة عند كل منهما تساوي صفر

* يطلقه على أصفار المشتقة اسم النقاط الحرجة وهي
النقط التي يكون عندها المماس أفقي ، في الرسم السابقه
النقط الحرجة هي
 $(a, f(a))$ و $(b, f(b))$

Note : النقط الحرجة هي (x, y)
أما القيمة الحرجة فهي الأعداد x و y للنقط الحرجة



* كيف يمكن إيجاد القيع العظمى المحلية والصغرى
المحلية للأقتران من دون رسم ؟؟

بما أنه الأقتران له قيمة عظمى محلية عند القمة و المماس
عندها أفقي وميل المماس يساوي صفر فإننا نستنتج
الأقتران ونساوية بالصفر لتحديد هذه النقطة
وكذلك الأمر تماماً للقيع الصغرى المحلية عند القاع
* الفرق بين قاعدة كل من $f(x)$ و $f'(x)$ *

قاعدة $f(x)$	قاعدة $f'(x)$
* التعويض فيها يعطي قيمة الأقتران عند نقطة معينة	* التعويض فيها يعطي ميل المنحني (ميل المماس) عند نقطة معينة
أصفار الأقتران تسمى جذور وعندها $y=0$	أصفار المشتقة تسمى حرجة

VIN : إذا طلب السؤال تحديد القيع القصوى (العظمى) والصغرى (المحلية) للإقتران فإننا :

- 1] نشتق قاعدة الأقتران ونساويها بالصفر .
- 2] نجد قيع x الحرجة
- 3] نعين الحرجة على خط الأعداد وندرس إشارة المشتقة
- 4] نحدد التزايد والتناقص
- 5] نحدد العظمى والصغرى ونجد قيمتها من قاعدة الأقتران $f(x)$

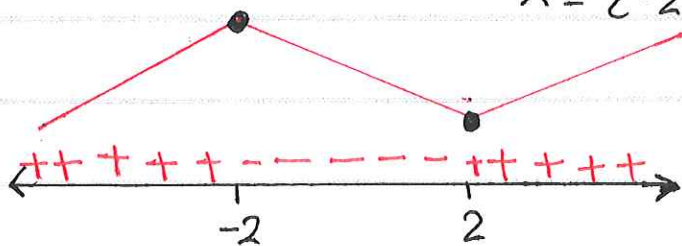
Ex : أستعمل المشتقة لإيجاد القيع العظمى والقيع الصغرى للإقتران $f(x) = x^3 - 12x + 4$ (إنه وحدت)

Sol : $f'(x) = 3x^2 - 12$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 12 = 0 \Rightarrow 3x^2 = 12$$

$$\Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow |x| = 2 \Rightarrow x = \pm 2$$

∴ قيع x الحرجة هي $x = \{-2, 2\}$



إشارة $f'(x)$

* عند $x = -2$ يوجد ~~قيع~~ عظمى محلية وقيمتها $f(-2)$

$$f(x) = x^3 - 12x + 4$$

$$f(-2) = (-2)^3 - 12(-2) + 4 = 20$$

* عند $x = 2$ يوجد صغرى محلية وقيمتها $f(2)$

$$f(2) = (2)^3 - 12(2) + 4 = -12$$

∴ القِيم العظمى والصغرى هي :

→ يوجد عظمى محلية عند $(-2, 20)$ وهي نقطة عرجة
→ يوجد صغرى محلية عند $(2, -12)$ وهي نقطة عرجة

أتحققه من فوهي

أجد القِيم العظمى والقِيم الصغرى للأقرآن (إنه وجدت) :

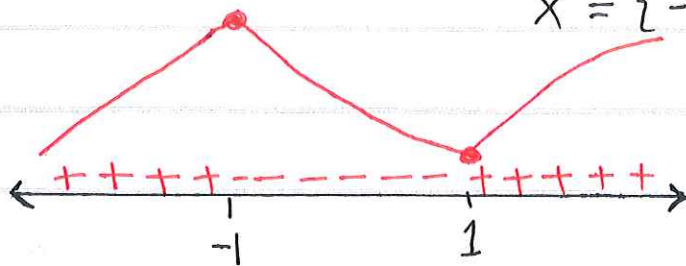
$$g(x) = 2x^3 - 6x - 15$$

حل: $g'(x) = 6x^2 - 6$

$$g'(x) = 0 \rightarrow 6x^2 - 6 = 0 \rightarrow 6x^2 = 6$$

$$\rightarrow x^2 = 1 \rightarrow |x| = 1 \rightarrow x = \pm 1$$

∴ قِيم x العرجة هي $x = \{-1, 1\}$



إشارة $f'(x)$

* عند $x = -1$ يوجد عظمى محلية وقِيمتها $g(-1)$

$$g(x) = 2x^3 - 6x - 15$$

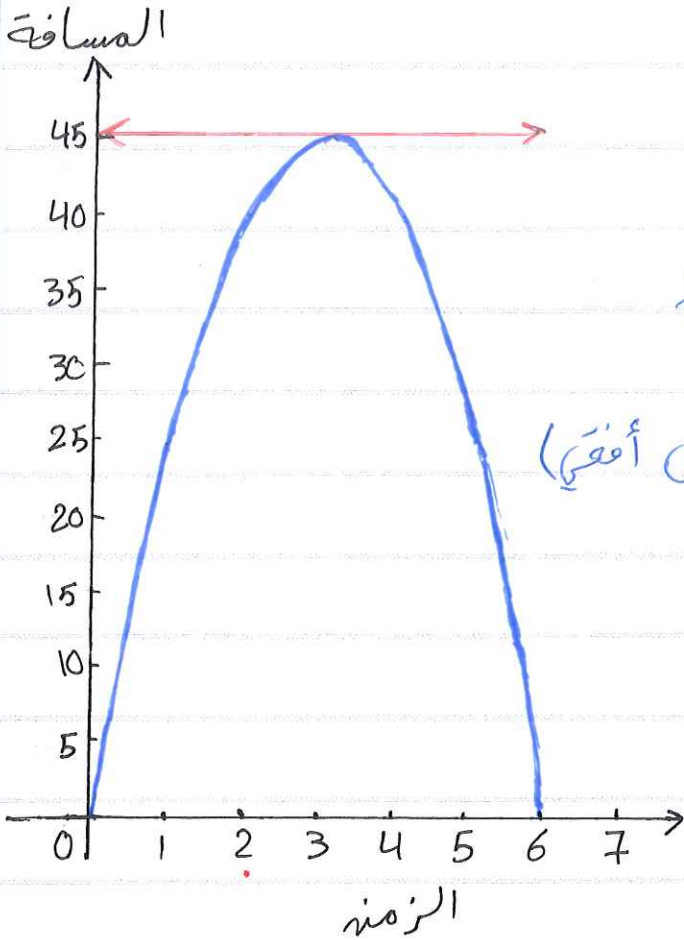
$$g(-1) = 2(-1)^3 - 6(-1) - 15 = -11$$

* عند $x = 1$ يوجد صغرى محلية وقِيمتها $g(1)$

$$g(1) = 2(1)^3 - 6(1) - 15 = -19$$

∴ يوجد عظمى محلية عند $(-1, -11)$ وهي نقطة عرجة

يوجد صغرى محلية عند $(1, -19)$ وهي نقطة عرجة



يمثل الإحداثي الصادي y للنقطة التي يتغير عندها اتجاه حركة الجسم من الصعود إلى الهبوط قيمة عظمى لمسافة - الزمن لأن مشتقة المنحنى عند تلك النقطة يساوي صفراً (المماس أفقي) لذا يمكن استعمال المشتقة لتقدير النقطة التي يبلغ عندها الجسم أقصى ارتفاعه.

Ex : يمثل الأقران $h(t) = 1 + 25t - 5t^2$ ارتفاع كرة عن سطح الأرض بالمتر بعد t ثانية من ركلها
 □ أوجد سرعة الكرة بعد 3 ثوانٍ من ركلها

sol : السرعة مشتقة الارتفاع $v(t) = h'(t)$

$$v(t) = 25 - 10t$$

$$v(3) = 25 - 10(3) = 25 - 30 = -5 \text{ m/s}$$

□ أوجد أقصى ارتفاع نقطة الكرة

sol نشتق معادلة الارتفاع ونساويها بالصفر

$$h'(t) = 25 - 10t$$

$$\Rightarrow 25 - 10t = 0 \rightarrow 25 = 10t \rightarrow t = \frac{25}{10}$$

$$\Rightarrow t = 2.5$$

الآن نعو في الزمن $t=2.5$ في معادلة الارتفاع لإيجاد أقصى ارتفاع يصله الجسم

$$h(t) = 1 + 25t - 5t^2$$

$$h(2.5) = 1 + 25(2.5) - 5(2.5)^2 = 32.25 \text{ m}$$

أقصى ارتفاع

أنتصفه من فوهي

يمثل الأقران $h(t) = 20t - 5t^2$ ارتفاع حجر عن سطح الأرض بعد t ثانية من قذفة إلى الأعلى
 أ) أمد سرعة الحجر بعد ثانيتين
 ب) أمد أقصى ارتفاع يصله الحجر

sol:

$$a) v(t) = h'(t)$$

$$= 20 - 10t$$

$$v(2) = 20 - 10(2) = 0$$

أي أن الجسم سيكون في حالة سكون عند $t=2$ وهو أقصى ارتفاع

$$b) h'(t) = 20 - 10t$$

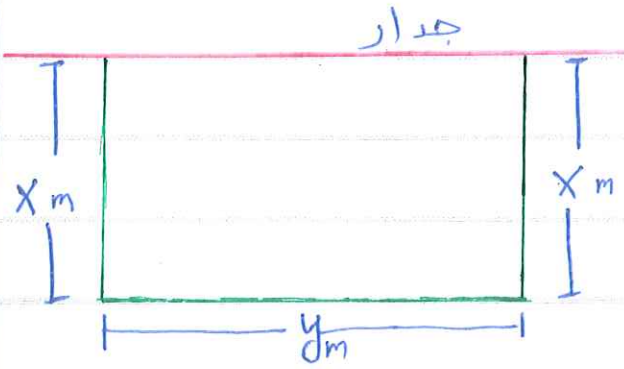
$$h'(t) = 0 \Rightarrow 20 - 10t = 0 \Rightarrow t = \frac{20}{10} = 2 \text{ sec}$$

زمن أقصى ارتفاع هو $t = 2 \text{ sec}$

$$h(2) = 20(2) - 5(2)^2$$

$$= 40 - 20 = 20 \text{ m}$$

أقصى ارتفاع



Ex : لدى مزارع 32 m من السياج
أراد أن يسيج به حظيرة مستطيلة
طولها y متراً وعرضها x متراً
بجانب جدار يكون أم أفضل هذه
الحظيرة .

1] أبين أن الأقرانه $A(x) = x(32 - 2x)$ يعقل مساحة الحظيرة ؟

Sol: محيط السياج $x + y + x = 32 \rightarrow 2x + y = 32$

$\Rightarrow y = 32 - 2x$

المساحة

$A = xy \Rightarrow A(x) = x(32 - 2x)$

Sol: $A(x) = x(32 - 2x)$

2] أم $A'(x)$

$A(x) = 32x - 2x^2$

$A'(x) = 32 - 4x$

3] أستعمل المشتقة لإيجاد قيمة x التي تجعل مساحة الحظيرة أكبر ما يمكن .

Sol: $A'(x) = 0$

$32 - 4x = 0 \rightarrow 4x = 32 \rightarrow x = 8$ m

$A = x(32 - 2x)$


$A = 8(32 - 2(8))$

$A = 8(32 - 16)$

$A = 8(16)$

25 $A = 128 \text{ m}^2$



أنتقده من فهمي 

بين الشكل المجاور صورة مستطيلة الشكل

مساحتها 72 cm^2 ومساحتها $A \text{ cm}^2$:

(a) أبين أنه الأقرانه $A(x) = 36x - x^2$ يمثل مساحة

الصورة

(b) أم $A'(x)$

(c) أستعمل المشتقة لإيجاد قيمة x التي تجعل مساحة الصورة

أكبر ما يمكن

(d) أم أكبر مساحة ممكنة للصورة

Sol: [a] $2x + 2y = 72 \rightarrow x + y = 36$ (2) بالقسمة على

$\rightarrow y = 36 - x$

$A = xy \Rightarrow A(x) = x(36 - x) = 36x - x^2$ #

[b] $A'(x) = 36 - 2x$

[c] $A'(x) = 0$

$36 - 2x = 0 \Rightarrow 2x = 36 \rightarrow x = 18 \text{ cm}$

[d] $A(x) = 36x - x^2$

$A(18) = 36(18) - (18)^2$

$= 18(36 - 18)$

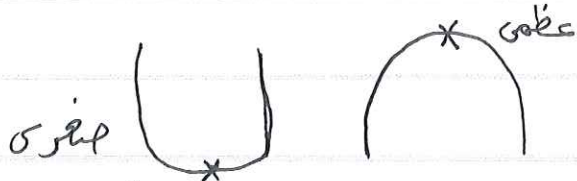
$= 18 * 18$

$= 324 \text{ cm}^2$

أكبر مساحة للصورة

أثبتت أنه اهدائيات , رأس منحني الأقران التربيعي

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$



$$\left(\frac{-b}{2a}, f\left(\frac{-b}{2a}\right) \right)$$

Sol : نقطة الرأس للأقران التربيعي تكون قيمة عظمى أو مفرد لـ

$$f'(x) = a(2x) + b + 0$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 2ax + b = 0$$

$$\rightarrow 2ax = -b \rightarrow x = \frac{-b}{2a}$$

$$\left(\frac{-b}{2a}, f\left(\frac{-b}{2a}\right) \right)$$



مجموع عدد مع ثلاثة أمثال عدد آخر أصغر منه يساوي 45
جد العددين بحيث يكون ناتج ضرب مربع العدد الصغير في
العدد الكبير أكبر ما يمكن

Sol : لنفرض عدد كبير x

عدد صغير y

$$f = xy^2$$

أقران ناتج ضربه

$$\therefore x + 3y = 45$$

* من المعادلة $x + 3y = 45$ ينتج أنه $x = 45 - 3y$

* عوض قيمة x في الأقران f فينتج

$$f = (45 - 3y)y^2$$

$$f = 45y^2 - 3y^3$$

$$f' = 45(2)y - 3(3)y^2 = 90y - 9y^2$$

$$\rightarrow f' = 0 \Rightarrow 90y - 9y^2 = 0 \Rightarrow 9y(10 - y) = 0$$

$$9y = 0$$

أو

$$10 - y = 0$$

$$y = 0$$

$$y = 10$$

نعمل قيمة $y=0$ لأننا بحاجة إلى عدد أكبر ما يمكنه

$$X = 45 - 3(10) \Rightarrow X = 15$$

\therefore العدد الأكبر = 15 العدد الأصغر = 10

Ex: أوجد كل من القيع العظمى والصغرى للأقترانه إنه وجدت

$$f(x) = 3x - 5$$

$$\text{Sol: } f'(x) = 3$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 3 \neq 0$$

\therefore لا يوجد أصفار للمشتقة وبالتالي لا يوجد نقطة صرجة وبالتالي
لا يوجد قيمة عظمى أو صغرى

Ex: مصنع للأجهزة الكهربائية ينتج (x) جهازاً سنوياً يبيع كل
جهاز بسعر $(200 - 0.01x)$ دينار ، فإذا كان تكلفته إنتاج
هذه الأجهزة $(50x + 20)$ دينار ، فكم جهازاً ينتج المصنع
لتحقيقه أكبر ربح ممكن سنوياً

Sol: الربح = الإيرادات - التكلفة

$$P(x) = R(x) - C(x)$$

$$P(x) = x(200 - 0.01x) - (50x + 20)$$

$$P(x) = 200x - 0.01x^2 - 50x - 20$$

$$P(x) = -0.01x^2 + 150x - 20$$

$$P'(x) = -0.02x + 150$$

$$P'(x) = 0 \rightarrow -0.02x + 150 = 0 \rightarrow x = 7500 \text{ جهاز}$$