الوحدة 1 الاقترانات والمقادير الجبرية

الدرس 1 نظريتا الباقي والعوامل

أتحقق من فهمي صفحة 10

a

×	x^2	$+5x$	-14	
x	x^3	$+5x^2$	$-14x$	0
$+1$	$+x^2$	$+5x$	-14	

ناتج القسمة هو $x^2+5x-14$، والباقي 0

b

×	$2x^2$	$+5x$	$+15$	
x	$2x^3$	$+5x^2$	$+15x$	$+48$
-3	$-6x^2$	$-15x$	-45	

ناتج القسمة هو $2x^2+5x+15$، والباقي 48

أتحقق من فهمي صفحة 13

a

$P(x)=4x^4-7x^3+5x^2+2 \qquad ,h(x)=x-1$

$P(1)=4(1)^4-7(1)^3+5(1)^2+2=4$

إذن، باقي قسمة $P(x)$ على $h(x)$ يساوي 4

b

$P(x)=3x^3+8x^2-3x-6 \qquad ,h(x)=x+3$

$P(1)=3(-3)^3+8(-3)^2-3(-3)-6=-6$

إذن، باقي قسمة $P(x)$ على $h(x)$ يساوي -6

c

$P(x)=-2x^3-5x^2+10x+9 \qquad ,h(x)=2x+8$

$P(1)=-2(-4)^3-5(-4)^2+10(-4)+9=17$

إذن، باقي قسمة $P(x)$ على $h(x)$ يساوي 17

أتحقق من فهمي صفحة 14

a

$P(x)=x^3-2x^2-13x-10$

$P(5)=(5)^3-2(5)^2-13(5)-10=0$

إذن، $(x-5)$ عامل من عوامل $P(x)$

الوحدة 1 الاقترانات والمقادير الجبرية الدرس **1** نظريتا الباقي والعوامل

b

لتحليل $P(x)$ أقسمه على $(x-5)$

×	x^2	$+3x$	$+2$	
x	x^3	$+3x^2$	$+2x$	0
-5	$-5x^2$	$-15x$	-10	

$$P(x) = (x-5)(x^2+3x+2)$$
$$= (x-5)(x+2)(x+1)$$

أتحقق من فهمي صفحة 17

a

$P(x) = 5x^3 - x^2 - 5x + 1$

عوامل الحد الثابت هي ± 1، وعوامل المعامل الرئيس هي ± 1، و ± 5،

الأصفار النسبية المحتملة للاقتران $P(x)$ هي: $\pm 1, \pm\frac{1}{5}$

بالتعويض نجد أن $P(1) = 5 - 1 - 5 + 1 = 0$

إذن، $(x-1)$ هو أحد عوامل $P(x)$

أجد العوامل الأخرى بالقسمة وتحليل الناتج إن أمكن.

×	$5x^2$	$+4x$	-1	
x	$5x^3$	$+4x^2$	$-x$	0
-1	$-5x^2$	$-4x$	$+1$	

$$P(x) = (x-1)(5x^2+4x-1)$$
$$= (x-1)(5x-1)(x+1)$$

إذن، أصفار $P(x)$ هي: $1, -1, \frac{1}{5}$

الوحدة 1 الاقترانات والمقادير الجبرية الدرس **1** نظريتا الباقي والعوامل

b

$Q(x) = x^4 + 6x^3 + 7x^2 - 6x - 8$

معامل الحد الرئيس يساوي1، فالأصفار المحتملة هي عوامل الحد الثابت، و هي: $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8$

بالتعويض نجد أن $Q(1) = 1 + 6 + 7 - 6 - 8 = 0$

إذن، $(x - 1)$ هو أحد عوامل $Q(x)$

أجد العوامل الأخرى بالقسمة وتحليل الناتج إن أمكن.

×	x^3	$+7x^2$	$+14x$	$+8$	
x	x^4	$+7x^3$	$+14x^2$	$+8x$	0
-1	$-x^3$	$-7x^2$	$-14x$	-8	

$Q(x) = (x - 1)(x^3 + 7x^2 + 14x + 8)$

وبتعويض $x = -1$ في العامل التكعيبي نجد أن الناتج 0 ، نقسم $x^3 +7x^2 +14x +8$ على $(x+1)$

×	x^2	$+6x$	8	
x	x^3	$+6x^2$	$+8x$	0
+1	$+x^2$	$+6x$	$+8$	

فنجد أن:

$$Q(x) = (x - 1)(x + 1)(x^2 + 6x + 8)$$
$$= (x - 1)(x + 1)(x + 2)(x + 4)$$

إذن، أصفار Q(x) هي: $-1, 1, -2, -4$

أتحقق من فهمي صفحة 19

a

$x^3 - x^2 - 9x + 9 = 0$

$x^2(x - 1) - 9(x - 1) = 0$

$(x - 1)(x^2 - 9) = 0$

$(x - 1)(x - 3)(x + 3) = 0$

$x = 1, x = 3, x = -3$

إذن، حلول هذه المعادلة هي: $x = 1, x = 3, x = -3$

الوحدة 1 الاقترانات والمقادير الجبرية الدرس **1** نظريتا الباقي والعوامل

b

$x^3 + 3x^2 - 4 = 0$

الأصفار النسبية المحتملة هي: $\pm 1, \pm 2, \pm 4$

بتعويض $x = 1$ نجد: $1 + 3 - 4 = 0$

إذن، $x - 1$ عامل من عوامل كثير الحدود $x^3 + 3x^2 - 4$

×	x^2	$+4x$	$+4$	
x	$+x^3$	$+4x^2$	$+4x$	0
-1	$-x^2$	$-4x$	-4	

$x^3 + 3x^2 - 4 = 0 \implies (x-1)(x^2 + 4x + 4) = 0$

$\implies (x-1)(x+2)^2 = 0$

$\implies x = 1, x = -2$

حلول هذه المعادلة هي $x = 1, x = -2$

أتحقق من فهمي صفحة 20

ليكن طول نصف قطر قاعدة هذه الاسطوانة هو r وارتفاعها h وحجمها V.

$h = r + 5$

$V = \pi r^2 h = \pi r^2 (r + 5)$

$\implies \pi r^2 (r + 5) = 72\pi$

$\implies r^3 + 5r^2 - 72 = 0$

الأصفار النسبية المحتملة هي: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 8, \pm 9, \pm 12, \pm 18, \pm 24, \pm 36, \pm 72$

بتعويض $r = 3$ نجد: $27 + 45 - 72 = 0$

إذن، $r - 3$ عامل من عوامل كثير الحدود $r^3 + 5r^2 - 72$

×	r^2	$+8r$	$+24$	
r	r^3	$+8r^2$	$+24r$	0
-3	$-3r^2$	$-24r$	-72	

$r^3 + 5r^2 - 72 = 0 \implies (r-3)(r^2 + 8r + 24) = 0$

مميز $r^2 + 8r + 24$ سالب، إذن:

$\implies r = 3$

نصف قطر قاعدة الاسطوانة 3 cm، وارتفاعها 8 cm

أتدرب وأحل المسائل صفحة 21

الوحدة 1 الاقترانات والمقادير الجبرية

الدرس 1 نظريتا الباقي والعوامل

1

×	$2x^3$	$+x^2$	$+4x$	$+3$	
$3x$	$6x^4$	$+3x^3$	$+12x^2$	$+9x$	0
-4	$-8x^3$	$-4x^2$	$-16x$	-12	

الناتج: $2x^3 + x^2 + 4x + 3$

الباقي: 0

2

×	$-x^4$	$+2x^3$	$+x^2$	$-4x$	$+3$	
$-2x$	$2x^5$	$-4x^4$	$-2x^3$	$+8x^2$	$-6x$	12
$+1$	$-x^4$	$+2x^3$	$+x^2$	$-4x$	$+3$	

الناتج: $-x^4 + 2x^3 + x^2 - 4x + 3$

الباقي: 12

3

الباقي هو: $f(-1) = 8 - 2 - 53 - 37 - 6 = -90$

4

الباقي هو: $f(-\frac{4}{3}) = 4\left(-\frac{4}{3}\right)^3 + 2\left(-\frac{4}{3}\right)^2 - 6\left(-\frac{4}{3}\right) - 8 = -\frac{160}{27}$

5

$f(-7) = (-7)^3 - 37(-7) + 84 = 0$

إذن، $(x + 7)$ عامل من عوامل $f(x)$.

6

$f\left(\frac{3}{2}\right) = 2\left(\frac{3}{2}\right)^3 - 5\left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right) + 6 = 0$

إذن، $(2x - 3)$ عامل من عوامل $f(x)$.

الوحدة 1 الاقترانات والمقادير الجبرية الدرس **1** نظريتا الباقي والعوامل

7

$f(x) = x^3 + 3x^2 - 13x - 15$

عوامل الحد الثابت هي: $\pm1, \pm3, \pm5, \pm15$

$f(-1) = -1 + 3 + 13 - 15 = 0 \implies (x+1)$ عامل

×	x^2	2x	-15	
x	x^3	$2x^2$	-15x	0
1	x^2	2x	-15	

$f(x) = (x+1)(x^2 + 2x - 15)$

$f(x) = (x+1)(x-3)(x+5)$

8

$g(x) = x^4 - 7x^3 + 13x^2 + 3x - 18$

عوامل الحد الثابت هي: $\pm1, \pm2, \pm3, \pm6, \pm9, \pm18$

$g(2) = 16 - 56 + 52 + 6 - 18 = 0 \implies (x-2)$ عامل

×	x^3	$-5x^2$	3x	9	
x	x^4	$-5x^3$	$3x^2$	+9x	0
-2	$-2x^3$	$10x^2$	-6x	-18	

$g(x) = (x-2)(x^3 - 5x^2 + 3x + 9)$

عوامل الحد الثابت هي: $\pm1, \pm3, \pm9$

$(-1)^3 - 5(-1)^2 + 3(-1) + 9 = 0 \implies (x+1)$ عامل

×	x^2	-6x	9	
x	x^3	$-6x^2$	9x	0
1	x^2	-6x	9	

$g(x) = (x-2)(x+1)(x^2 - 6x + 9)$

$g(x) = (x-2)(x+1)(x-3)^2$

الوحدة 1 الاقترانات والمقادير الجبرية الدرس 1 نظريتا الباقي والعوامل

9

$h(x) = 2x^3 - 13x^2 + 17x + 12$

عوامل الحد الثابت هي: $\pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm6, \pm12$

$h(3) = 54 - 117 + 51 + 12 = 0 \implies (x-3)$ عامل

×	$2x^2$	$-7x$	-4	
x	$2x^3$	$-7x^2$	$-4x$	0
-3	$-6x^2$	$21x$	12	

$h(x) = (x-3)(2x^2 - 7x - 4)$

$h(x) = (x-3)(x-4)(2x+1)$

10

$q(x) = 3x^3 - 18x^2 + 2x - 12$

$= 3x^2(x-6) + 2(x-6)$

$= (3x^2 + 2)(x-6)$

11

$x^3 - 4x^2 - 7x + 10 = 0$

عوامل الحد الثابت هي: $\pm1, \pm2, \pm5, \pm10$

$1 - 4 - 7 + 10 = 0 \implies (x-1)$ عامل

×	x^2	$-3x$	-10	
x	x^3	$-3x^2$	$-10x$	0
-1	$-x^2$	$3x$	10	

$(x-1)(x^2 - 3x - 10) = 0$

$(x-1)(x-5)(x+2) = 0$

$x = 1, x = 5, x = -2$

الوحدة 1 الاقترانات والمقادير الجبرية الدرس 1 نظريتا الباقي والعوامل

12

$5x^3 - 15x^2 - 47x - 15 = 2x^3 - 10x^2$

$3x^3 - 5x^2 - 47x - 15 = 0$

عوامل الحد الثابت هي: $\pm1, \pm3, \pm5, \pm15$

$-81 - 45 + 141 - 15 = 0 \implies (x+3)$ عامل

×	$3x^2$	$-14x$	-5	
x	$3x^3$	$-14x^2$	$-5x$	0
3	$9x^2$	$-42x$	-15	

$(x+3)(3x^2 - 14x - 5) = 0$

$(x+3)(3x+1)(x-5) = 0$

$x = -3, x = -\frac{1}{3}, x = 5$

13

$3x^3 + 3x^2 - 14x - 8 = 0$

عوامل الحد الثابت هي: $\pm1, \pm2, \pm4, \pm8$

$24 + 12 - 28 - 8 = 0 \implies (x-2)$ عامل

×	$3x^2$	$9x$	4	
x	$3x^3$	$9x^2$	$4x$	0
-2	$-6x^2$	$-18x$	-8	

$(x-2)(3x^2 + 9x + 4) = 0$

$x = 2, \quad x = \frac{-9 \pm \sqrt{81-48}}{2(3)}$

$x = 2, x = \frac{-9+\sqrt{33}}{6}, x = \frac{-9-\sqrt{33}}{6}$

الوحدة 1 الاقترانات والمقادير الجبرية الدرس **1** نظريتا الباقي والعوامل

14

$6x^3 - 13x^2 + x + 2 = 0$

عوامل الحد الثابت هي: $\pm 1, \pm 2$

$48 - 52 + 2 + 2 = 0 \implies (x-2)$ عامل

×	$6x^2$	$-x$	-1	
x	$6x^3$	$-x^2$	$-x$	0
-2	$-12x^2$	$2x$	2	

$(x-2)(6x^2 - x - 1) = 0$

$(x-2)(3x+1)(2x-1) = 0$

$x = 2, x = -\frac{1}{3}, x = \frac{1}{2}$

15

$f(x) = 4x^3 - 20x + 16$

أحد أصفار الاقتران هو $x = 1$، إذن، $(x-1)$ عامل من عوامل $f(x)$

×	$4x^2$	$4x$	-16	
x	$4x^3$	$4x^2$	$-16x$	0
-1	$-4x^2$	$-4x$	16	

$f(x) = (x-1)(4x^2 + 4x - 16)$

صفراه الآخران هما جذرا المعادلة $4x^2 + 4x - 16 = 0$

$x^2 + x - 4 = 0$

$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+16}}{2}$

$x \approx 1.56, \quad x \approx -2.56$

الوحدة 1 الاقترانات والمقادير الجبرية الدرس **1** نظريتا الباقي والعوامل

16

$f(x) = 4x^3 - 12x^2 - x + 15$

أحد أصفار الاقتران هو $x = -1$، إذن، $(x+1)$ عامل من عوامل $f(x)$

×	$4x^2$	$-16x$	15	
x	$4x^3$	$-16x^2$	$15x$	0
1	$4x^2$	$-16x$	15	

$f(x) = (x+1)(4x^2 - 16x + 15)$

صفراه الآخران هما جذرا المعادلة $4x^2 - 16x + 15 = 0$

$$(2x-3)(2x-5) = 0$$

$$x = 1.5, x = 2.5$$

17

$x^3 - 3x^2 + ax + b = 0$

نفرض أن الحل الثالث هو $x = c$،

فتكون $(x-1), (x-4), (x-c)$ عوامل للمقدار $x^3 - 3x^2 + ax + b$

$$x^3 - 3x^2 + ax + b = (x-1)(x-4)(x-c)$$

$$x^3 - 3x^2 + ax + b = (x^2 - 5x + 4)(x-c)$$

$$x^3 - 3x^2 + ax + b = x^3 - cx^2 - 5x^2 + 5cx + 4x - 4c$$

$$x^3 - 3x^2 + ax + b = x^3 - (c+5)x^2 + (4+5c)x - 4c$$

بمقارنة معاملات الحدود المتشابهة في الطرفين نجد أن:

معامل x^2 : $-3 = -(c+5)$

$$c + 5 = 3 \Rightarrow c = -2$$

إذن، الحل الثالث هو $x = -2$

18

هذا يعني أن $f(1) = 2f(-1)$

$$1 + a + 1 + 5 = 2(-1 + a - 1 + 5)$$

$$a + 7 = 2a + 6$$

$$a = 1$$

الوحدة 1 الاقترانات والمقادير الجبرية الدرس **1** نظريتا الباقي والعوامل

19

حجم الهرم = ثلث مساحة قاعدته مضروبًا في ارتفاعه،

افرض أن طول ضلع القاعدة هو x، فيكون الارتفاع $x+1$

$$V = \frac{1}{3}x^2(x+1)$$

$$4 = \frac{1}{3}x^2(x+1)$$

$$12 = x^3 + x^2$$

$$x^3 + x^2 - 12 = 0$$

$(2)^3 + (2)^2 - 12 = 0 \implies (x-2)$ عامل

×	x^2	$3x$	6	
x	x^3	$3x^2$	$6x$	0
-2	$-2x^2$	$-6x$	-12	

$$(x-2)(x^2+3x+6) = 0$$

$$x-2=0, x^2+3x+6=0$$

المعادلة $x^2+3x+6=0$ ليس لها حل لأن مميزها سالب(-15)،

فالحل الوحيد للمعادلة $x^3 + x^2 - 12 = 0$ هو $x=2$

إذن، طول ضلع قاعدة المنحوتة هو $2\ m$، وارتفاعها $3\ m$

20

$(x-3)$ عامل من عوامل $f(x) = ax^3 + bx^2 - 9x - 9$

إذن، $f(3) = 0$

$$27a + 9b - 27 - 9 = 0$$

$$27a + 9b = 36$$

بقسمة الطرفين على 9 ينتج أن: $3a + b = 4$

الوحدة 1 الاقترانات والمقادير الجبرية الدرس **1** نظريتا الباقي والعوامل

21

باقي قسمة $f(x)$ على $(x-2)$ يساوي -15، يعني أن $f(2) = -15$

$$8a + 4b - 18 - 9 = -15$$

$$8a + 4b = 12$$

بقسمة الطرفين على 4 ينتج أن: $2a + b = 3$

22

بطرح المعادلة الناتجة في السؤال21 من المعادلة الناتجة في السؤال 20 نجد أن $a = 1$،

وبتعويض قيمة a في إحدى المعادلتين نجد أن $b = 1$

23

حجم الصندوق يساوي $2(x)(x^2 + 6x - 19)$، وهذا يساوي $48\ m^3$

$$2(x)(x^2 + 6x - 19) = 48$$

بقسمة الطرفين على 2، والتوزيع ينتج أن:

$$x^3 + 6x^2 - 19x = 24$$

$$x^3 + 6x^2 - 19x - 24 = 0$$

$(-3)^3 + 6(-3)^2 - 19(-3) - 24 = 0 \Rightarrow (x-3)$ عامل

×	x^2	$9x$	8	
x	x^3	$9x^2$	$8x$	0
-3	$-3x^2$	$-27x$	-24	

$$(x-3)(x^2 + 9x + 8) = 0$$

$$(x-3)(x+1)(x+8) = 0$$

$$x = 3, x = -1, x = -8$$

الحلان السالبان مرفوضان لأن x أحد أبعاد الصندوق ولا يمكن أن يكون سالبًا.

إذن، قيمة x التي تجعل حجم الصندوق $48\ m^3$ هي $3\ m$

الوحدة 1 الاقترانات والمقادير الجبرية الدرس 1 نظريتا الباقي والعوامل

24	بما أن $(x-3)$ عامل لاقتران من الدرجة الثالثة فإن العامل الثاني يكون تربيعيًا، ليكن هذا العامل الثاني: ax^2+bx+c $f(x)=(x-3)(ax^2+bx+c)$ باقي قسمة $f(x)$ على $(x+1)$ هو -8، فإن $f(-1)=-8$ $(-1-3)(a-b+c)=-8$ $a-b+c=2$ لذلك أختار أي قيم تحقق هذه المعادلة مثل $a=1, b=1, c=2$ فيكون الاقتران المطلوب هو: $f(x)=(x-3)(x^2+x+2)$ $f(x)=x^3-2x^2-x-6$
25	قسمت سهام عوامل الحد الرئيس على عوامل الحد الثابت بعد إخراج العامل المشترك في حدود الاقتران وهو x. الحل الصحيح هو: $f(x)=x(-8x^5+7x^4-3x^3+45x^2-1500x+16)$ عوامل الحد الثابت (16) هي: $\pm1, \pm2, \pm4, \pm8, \pm16$ عوامل المعامل الرئيس(-8) هي: $\pm1, \pm2, \pm4, \pm8$ الأصفار النسبية المحتملة هي: $\pm1, \pm2, \pm4, \pm8, \pm16, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{4}, \pm\frac{1}{8}$
26	بما أن المقسوم عليه كثير حدود من الدرجة الثانية، فإن الباقي سيكون من الدرجة الأولى على الأكثر. لنفرض هذا الباقي هو: $ax+b$، وناتج القسمة هو $Q(x)$. $f(x)=(x-3)(x+2)Q(x)+ax+b$ $f(3)=4 \Rightarrow (3-3)(3+2)Q(3)+3a+b=4$ $\Rightarrow 3a+b=4 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$ $f(-2)=9 \Rightarrow (-2-3)(-2+2)Q(-2)-2a+b=9$ $\Rightarrow -2a+b=9 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$ بطرح المعادلة (2) من المعادلة (1) ينتج: $5a=-5 \Rightarrow a=-1$ وبالتعويض في إحدى المعادلتين نجد: $b=7$ إذن، باقي قسمة $f(x)$ على $(x-3)(x+2)$ يساوي $-x+7$