المركز الوطني
لتطوير المناهج
National Center
for Curriculum
Development

رياضيات الأعمال

الصف الثاني عشر- المسار الأكاديمي

الفصل الدراسي الأول

12

إجابات الطالب

الناشر: المركز الوطني لتطوير المناهج

يسر المركز الوطني لتطوير المناهج استقبال آرائكم وملحوظاتكم على هذا الكتاب عن طريق العناوين الآتية:

06-5376262 / 237 06-5376266 P.O.Box: 2088 Amman 11941

@nccdjor feedback@nccd.gov.jo www.nccd.gov.jo

إجابات كتاب الطالب- مادة رياضيات الأعمال- الصف الثاني عشر الأكاديمي ف1

الوحدة الأولى: المصفوفات

الدرس الأول: مقدمة في المصفوفات

	أتحقق من فهمي صفحة 9
a	رتبة المصفوفة B هي 2×4
b	$b_{13} = 0 \ , \ b_{24} = -5$
c	-3 يقع في الصف الثاني والعمود الثالث
	أتحقق من فهمي صفحة 11
a	المصفوفة D هي مصفوفة مربعة ورتبتها 3×3
b	المصفوفة E هي مصفوفة صفرية ورتبتها 2×3
c	المصفوفة F هي مصفوفة صف ورتبتها 1×5
d	$3x - 2 = 13 \Rightarrow x = 5$ $2x + 4y = 18 \Rightarrow 2(5) + 4y = 18$ $\Rightarrow y = 2$
	أتحقق من فهمي صفحة 13
a	$\begin{bmatrix} 460 & 250 & 40 \\ 800 & 130 & 70 \\ 1300 & 700 & 200 \end{bmatrix}$
b	$460 + 250 + 40 = 750$ ويمثل مجموع الذين تم استطلاع آرائهم من القريةB.
c	$250 + 130 + 700 = 1080$ ويمثل عدد المعارضين لإقامة المشروع السياحي ممن تم استطلاع آرائهم في القرى الثلاث.
d	نعم، لأنه يدل على الوسط الحسابي لعدد المعارضين في القرى الثلاثة.
	أتدرب وأحل المسائل صفحة 13
1	1×2

2	3×3
3	4×1
4	1×1
5	$a_{31} = 7$
6	$a_{23} = 9$
7	$a_{14} = -2$
8	$a_{32} = 8$ يقع في الصف الثالث والعمود الثاني
9	مصفوفة مربعة رتبتها 4×4
10	مصفوفة عمود رتبتها 3×1
11	مصفوفة صف رتبتها 1×4
12	مصفوفة صفرية رتبتها 2×2
13	$z = 2$ $3x - 11 = 4 \Rightarrow x = 5$ $x + 2y = -1 \Rightarrow 5 + 2y = -1$ $\Rightarrow y = -3$
14	$2 - y = -5 \Rightarrow y = 7$ $x^2 = 2x + 3 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$ $\Rightarrow (x - 3)(x + 1) = 0$ $\Rightarrow x = 3 \ , \ x = -1$
15	$S = \begin{bmatrix} 11 & 25 & 13 \\ 14 & 20 & 9 \\ 8 & 15 & 7 \end{bmatrix}$ $s_{32} = 15$
16	$14 + 20 + 9 = 43$ ولا معنى له.
17	$13 + 9 + 7 = 29$ ويمثل عدد الأهداف المسجلة من قبل اللاعبين الثلاثة.
18	$\begin{bmatrix} 200 & 380 & 250 & 300 \\ 160 & 540 & 0 & 290 \\ 120 & 280 & 400 & 470 \end{bmatrix}$ رتبة المصفوفة هي 3×4

19	$1130 = 300 + 250 + 380 + 200$ ويمثل عدد الأجهزة الكهربائية في مستودع المدينة الأولى $990 = 290 + 0 + 540 + 160$ ويمثل عدد الأجهزة الكهربائية في مستودع المدينة الثانية $1270 = 470 + 400 + 280 + 120$ ويمثل عدد الأجهزة الكهربائية في مستودع المدينة الثالثة
20	$480 = 120 + 160 + 200$ ويمثل عدد الثلاجات في المستودعات الثلاثة $1200 = 380 + 540 + 280$ ويمثل عدد الغسالات في المستودعات الثلاثة $650 = 400 + 0 + 250$ ويمثل عدد الشاشات في المستودعات الثلاثة $1060 = 300 + 290 + 470$ ويمثل عدد المراوح في المستودعات الثلاثة
21	يمكن عرضها بصورة مصفوفة هكذا: $\begin{bmatrix} 3256 & 1678 & 4589 & 1253 \\ 4560 & 978 & 5874 & 2564 \end{bmatrix}$
22	العبارة صحيحة أحيانًا، فمثلًا: إذا كان $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}$ وكان $B = \begin{bmatrix} 8 & -1 \\ 6 & 9 \end{bmatrix}$ ، فنلاحظ أن للمصفوفتين العدد نفسه من العناصر، لكن المصفوفتين غير متساويتين لأن العناصر المتناظرة غير متساوية. أما إذا كان $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}$ وكان $B = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}$ ، فالمصفوفتان متساويتان لأن العناصر المتناظرة متساوية
23	إجابة محتملة: $\begin{bmatrix} 2 & 7 & 5 \\ 7 & 4 & 8 \\ 5 & 8 & 10 \end{bmatrix}$
24	عدد عناصر المصفوفة يساوي حاصل ضرب عدد صفوفها بعدد أعمدتها، بما أن عدد العناصر أولي، فهو يساوي العدد واحد ضرب العدد الأولي نفسه أو العكس. إذن، إذا كان عدد العناصر n وهو أولي، فإن رتبة المصفوفة إما أن تكون $n \times 1$ أو $1 \times n$
25	<table><tr><td></td><td>عمان</td><td>العقبة</td><td>إربد</td></tr><tr><td>إربد</td><td>88</td><td>408</td><td>0</td></tr><tr><td>عمان</td><td>0</td><td>324</td><td>88</td></tr><tr><td>العقبة</td><td>324</td><td>0</td><td>408</td></tr></table> $\begin{bmatrix} 88 & 408 & 0 \\ 0 & 324 & 88 \\ 324 & 0 & 408 \end{bmatrix}$

26	$b_{11} = 2(1) - (1) = 1$ $b_{12} = 2(1) - (2) = 0$ $b_{13} = 2(1) - (3) = -1$ $b_{14} = 2(1) - (4) = -2$ $b_{21} = 2(2) - (1) = 3$ $b_{22} = 2(2) - (2) = 2$ $b_{23} = 2(2) - (3) = 1$ $b_{24} = 2(2) - (4) = 0$ $b_{31} = 2(3) - (1) = 5$ $b_{32} = 2(3) - (2) = 4$ $b_{33} = 2(3) - (3) = 3$ $b_{34} = 2(3) - (4) = 2$ المصفوفة المطلوبة هي: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}$
27	$x + 2y = 13$ $x - y = 7$ $x + y + 3z = 2$ بطرح المعادلة الثانية من المعادلة الأولى ينتج: $3y = 6 \implies y = 2$ وبالتعويض في المعادلة الثانية نجد: $x - 2 = 7 \Rightarrow x = 9$ وبالتعويض في المعادلة الثالثة نجد: $9 + 2 + 3z = 2 \Rightarrow z = -3$

الدرس الثاني: العمليات على المصفوفات

أتحقق من فهمي صفحة 17	
a	$C - A = \begin{bmatrix} 1 & -5 & -4 \\ 5 & 12 & 2 \end{bmatrix}$
b	$D + B = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 8 & 3 \\ -16 & 7 \end{bmatrix}$
c	بما أن C,D من رتبتين مختلفتين، فلا يمكن جمعهما.
أتحقق من فهمي صفحة 19	
a	$3D = \begin{bmatrix} 0 & 12 & -9 \\ 21 & -6 & 3 \\ 24 & 30 & 18 \end{bmatrix}$
b	$-2D = \begin{bmatrix} 0 & -8 & 6 \\ -14 & 4 & -2 \\ -16 & -20 & -12 \end{bmatrix}$
c	$1.5D = \begin{bmatrix} 0 & 6 & -4.5 \\ 10.5 & -3 & 1.5 \\ 12 & 15 & 9 \end{bmatrix}$
أتحقق من فهمي صفحة 20	
a	$4E - 3F = \begin{bmatrix} 2 \\ -36 \\ 0 \end{bmatrix}$
b	بما أن G,F من رتبتين مختلفتين، فلا يمكن إيجاد $2G + 6F$
c	$5(G + H) = [45 \quad -20 \quad 80]$
أتحقق من فهمي صفحة 21	
	$7(A + B) = 7 \times \begin{bmatrix} 330 & 600 & 400 \\ 500 & 730 & 420 \end{bmatrix}$ $= \begin{bmatrix} 2310 & 4200 & 2800 \\ 3500 & 5110 & 2940 \end{bmatrix}$
أتدرب وأحل المسائل صفحة 21	
1	$\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 9 & 6 \\ 14 & -5 \end{bmatrix}$

2	بما أن المصفوفتين من رتبتين مختلفتين، فلا يمكن جمعهما.
3	$\begin{bmatrix} 11 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$
4	$\begin{bmatrix} 18 & 2 \\ 13 & 5 \end{bmatrix}$
5	$\begin{bmatrix} -6 & 36 & 4 \\ 7 & 9 & 21 \end{bmatrix}$
6	$[38 \quad -55 \quad 15]$
7	$\begin{bmatrix} 27 & -6 \\ 12 & 3 \\ 18 & -9 \end{bmatrix}$
8	$\begin{bmatrix} 10 & -14 \\ 6 & \frac{10}{3} \end{bmatrix}$
9	$\begin{bmatrix} -2 & -6 & 16 \\ -\frac{9}{2} & -3 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$
10	$\begin{bmatrix} 14 & -4 \\ 13 & 3 \end{bmatrix}$
11	$\begin{bmatrix} 36 & 20 & 16 \\ 28 & -44 & -12 \\ 8 & -16 & 8 \end{bmatrix}$
12	$\begin{bmatrix} 17 & 19 \\ 27 & -7 \\ -18 & -1 \end{bmatrix}$
13	بما أن A,B من رتبتين مختلفتين، فلا يمكن إيجاد $4A + 3B$
14	$\begin{bmatrix} -6 & 10 \\ 9 & -48 \end{bmatrix}$
15	$B + 1.5B = 2.5B = \begin{bmatrix} 10 & -2.5 & -12.5 \\ 7.5 & 5 & 20 \end{bmatrix}$
16	بما أن C,B من رتبتين مختلفتين، فلا يمكن إيجاد $3B + 2C$
17	$\begin{bmatrix} 5 & -6 \\ -6 & 29 \end{bmatrix}$
18	$\begin{bmatrix} 25 & -2 \\ -12 & 13 \end{bmatrix}$

19	$A+B=\begin{bmatrix}38 & 57 & 33\\ 32 & 55 & 38\end{bmatrix}$
20	$0.4C=\begin{bmatrix}6 & 8 & 12\\ 8 & 10 & 16\end{bmatrix}$, $1.4C=\begin{bmatrix}21 & 28 & 42\\ 28 & 35 & 56\end{bmatrix}$
21	$12=3z \implies z=4$ $2x=3x-4z \implies x=4z \implies x=16$ $2y=-6-4x \implies 2y=-6-64=-70 \implies y=-35$
22	$1.2A=\begin{bmatrix}0.48 & 0.9\\ 0.72 & 1.2\\ 1.8 & 3\end{bmatrix}$
23	صحيحة أحيانًا، لأنه إذا كان عدد عناصر المصفوفتين متساويًا، فقد تكون الرتبتان متساويتين وعندها يمكن إيجاد ناتج جمع المصفوفتين. أما إذا كان عدد عناصر المصفوفتين متساويًا والرتبتان مختلفتان فلا يمكن إيجاد ناتج جمعهما.
24	المصفوفتان من رتبتين مختلفتين، فلا يمكن جمعهما.
25	$3\begin{bmatrix}4 & 2 & 3\\ 1 & -4 & 5\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}0 & 1 & 0.5\\ 1.5 & 3.5 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}12 & 8 & 10\\ 6 & -5 & 11\end{bmatrix}$

$$X - 2Y = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 9 \end{bmatrix} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (1)$$

$$3X + 4Y = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ -31 & 12 \end{bmatrix} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (2)$$

نضرب المعادلة الأولى بالعدد 2 ، نحصل على:

$$2X - 4Y = \begin{bmatrix} 2 & 10 \\ -4 & 18 \end{bmatrix} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (3)$$

ثم نجمع المعادلتين الثانية والثالثة، فنحصل على:

$$5X = \begin{bmatrix} 10 & 15 \\ -35 & 30 \end{bmatrix} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (4)$$

نقسم المعادلة الرابعة على العدد 5، فنحصل على:

26 $$X = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -7 & 6 \end{bmatrix}$$

نعوض المصفوفة X في المعادلة الثانية، لإيجاد المصفوفة Y:

$$3\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -7 & 6 \end{bmatrix} + 4Y = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ -31 & 12 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 6 & 9 \\ -21 & 18 \end{bmatrix} + 4Y = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ -31 & 12 \end{bmatrix}$$

$$4Y = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ -31 & 12 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & 9 \\ -21 & 18 \end{bmatrix}$$

$$4Y = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -10 & -6 \end{bmatrix}$$

$$Y = \begin{bmatrix} 0.5 & -1 \\ -2.5 & -1.5 \end{bmatrix}$$

الدرس الثالث: ضرب المصفوفات

	أتحقق من فهمي صفحة 25
a	بما أن عدد أعمدة المصفوفة A لا يساوي عدد صفوف المصفوفة B، فإنه لا يمكن إيجاد $A \times B$
b	بما أن عدد أعمدة المصفوفة B يساوي عدد صفوف المصفوفة C، فإنه يمكن إيجاد $B \times C$ ورتبتها3×3
c	بما أن عدد أعمدة المصفوفة C لا يساوي عدد صفوف المصفوفة A، فإنه لا يمكن إيجاد $C \times A$
	أتحقق من فهمي صفحة 27
a	$MN = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 6 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 38 & -15 \end{bmatrix}$
b	$CD = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 1 & 6 \\ 8 & 1 & 9 \end{bmatrix}$
	أتحقق من فهمي صفحة 28
	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 10 \\ 4 \end{bmatrix}$
	أتحقق من فهمي صفحة 30
a	$(F+G)H = \left(\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 & 18 \\ 60 & 36 \end{bmatrix}$
b	$(FG)H = \left(\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 5 & 18 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -22 & -14 \\ 107 & 61 \end{bmatrix}$
c	$G(mH) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \times -4\begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -28 & -20 \\ -16 & -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -16 & -8 \\ -76 & -44 \end{bmatrix}$
	أتدرب وأحل المسائل صفحة 31
1	بما أن عدد أعمدة المصفوفة A لا يساوي عدد صفوف المصفوفة B، فإنه لا يمكن إيجاد $A \times B$
2	بما أن عدد أعمدة المصفوفة B يساوي عدد صفوف المصفوفة C، فإنه يمكن إيجاد $B \times C$ ورتبتها3×3
3	بما أن عدد أعمدة المصفوفة D لا يساوي عدد صفوف المصفوفة C، فإنه لا يمكن إيجاد $D \times C$
4	بما أن عدد أعمدة المصفوفة B يساوي عدد صفوف المصفوفة A، فإنه يمكن إيجاد $B \times A$ ورتبتها3×2
5	بما أن عدد أعمدة المصفوفة C يساوي عدد صفوف المصفوفة D، فإنه يمكن إيجاد $C \times D$ ورتبتها2×3
6	بما أن عدد أعمدة المصفوفة B لا يساوي عدد صفوف المصفوفة B، فإنه لا يمكن إيجاد $B \times B$
7	بما أن عدد أعمدة المصفوفة B يساوي عدد صفوف المصفوفة C، فإنه يمكن إيجاد $B \times C$ ورتبتها2×2

8	حسب السؤال الثاني فإن المصفوفة BC يمكن إيجادها ورتبتها 3×3 وبما أن عدد صفوف المصفوفة D يساوي عدد أعمدة المصفوفة BC ، فإنه يمكن إيجاد BCD ورتبتها3×3
9	بما أنه يمكن ضرب A في B للحصول على المصفوفة C=AB فإن عدد صفوف B يساوي عدد أعمدة A(أي 3)، ويكون عدد أعمدة B مساوٍ لعدد أعمدة C (أي5). إذن، رتبة B هي 3×5
10	بما أن عدد أعمدة المصفوفة اليسرى لا يساوي عدد صفوف المصفوفة اليمنى، فلا يمكن إيجاد ناتج الضرب
11	$\begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix} \times [2 \quad 5 \quad 3] = \begin{bmatrix} 6 & 15 & 9 \\ -8 & -20 & -12 \\ 2 & 5 & 3 \end{bmatrix}$
12	$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 5 \\ 4 & 7 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 22 & 5 \\ -4 & 14 & 18 \end{bmatrix}$
13	$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$
14	$[8 \quad 10 \quad -7] \times \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -5 \end{bmatrix} = [13]$
15	$\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 9 & -5 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -5 & 6 & -4 \\ 0 & 6 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & -18 & 11 \\ -45 & 24 & -21 \\ -15 & 12 & -9 \end{bmatrix}$
16	$\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} \times [-1 \quad 4] = \begin{bmatrix} -2 & 8 \\ -5 & 20 \end{bmatrix}$
17	$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 8 & -14 \\ -4 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -12 & 21 \end{bmatrix}$
18	$\left(\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}\right)^2 = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -8 \\ 16 & 23 \end{bmatrix}$
19	$\left(\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}\right)^2 = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ بما أن عدد أعمدة المصفوفة اليسرى لا يساوي عدد صفوف المصفوفة اليمنى، فلا يمكن إيجاد ناتج الضرب
20	$\begin{bmatrix} 12 & 10 & 0 \\ 4 & 4 & 20 \\ 8 & 9 & 12 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1000 \\ 2000 \\ 1500 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32000 \\ 42000 \\ 44000 \end{bmatrix}$ المصنع A يربح JD 32000، المصنع B يربح42000 JD، المصنع C يربح44000 JD.

21	$AB = \begin{bmatrix} 12 & 4 \\ 9 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 48 & 76 \\ 36 & 57 \end{bmatrix}$ $AC = \begin{bmatrix} 12 & 4 \\ 9 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ -3 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 48 & 76 \\ 36 & 57 \end{bmatrix}$ إذن، $AB = AC$
22	$(QR)P = \left(\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 9 & -5 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 12 & 4 \\ 9 & 3 \end{bmatrix}$ $= \begin{bmatrix} -9 & 0 \\ 10 & -14 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 12 & 4 \\ 9 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -108 & -36 \\ -6 & -2 \end{bmatrix}$
23	$n(PQ) = -2 \left(\begin{bmatrix} 12 & 4 \\ 9 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix} \right)$ $= -2 \times \begin{bmatrix} 52 & -4 & 24 \\ 39 & -3 & 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -104 & 8 & -48 \\ -78 & 6 & -36 \end{bmatrix}$
24	$R(PQ) = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 9 & -5 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 12 & 4 \\ 9 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix} \right)$ $= \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 9 & -5 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 52 & -4 & 24 \\ 39 & -3 & 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -143 & 11 & -66 \\ 273 & -21 & 126 \\ 117 & -9 & 54 \end{bmatrix}$
25	$(nR)P = \left(-2 \times \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 9 & -5 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \right) \times \begin{bmatrix} 12 & 4 \\ 9 & 3 \end{bmatrix}$ $= \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -18 & 10 \\ -6 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 12 & 4 \\ 9 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 66 & 22 \\ -126 & -42 \\ -54 & -18 \end{bmatrix}$
26	$AB = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ x & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ y & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ -2x + 3y & 12 \end{bmatrix}$
27	$BA = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ y & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ x & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 2y + 4x & 12 \end{bmatrix}$
28	$AB = BA \Longrightarrow -2x + 3y = 2y + 4x \Longrightarrow y = 6x$ أقل قيمة صحيحة موجبة للعدد x هي 1، وأقل قيمة صحيحة موجبة للعدد y هي 6
29	$\begin{bmatrix} 150 & 150 \\ 200 & 100 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 20 & 21 & 52 \\ 3 & 65 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3450 & 12900 & 7950 \\ 4300 & 10700 & 10500 \end{bmatrix}$
30	$\begin{bmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 3 & 5 & 9 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4.5 \\ 4 \\ 3.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 45.5 \\ 65 \end{bmatrix}$

31	ينتج العنصر C_{23} عن طريق ضرب الصف الثاني من المصفوفة الأولى بالعمود الثالث من المصفوفة الثانية. فتكون إجابة رنا هي الصحيحة.
32	$(A+B)^2 = (A+B) \times (A+B) = A^2 + AB + BA + B^2$ لكن ، بشكل عام: $AB \neq BA$ ، إذن، $(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$
33	إجابات محتملة: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ $AB = BA = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ $AB = BA = \begin{bmatrix} 4 & 11 \\ 0 & 15 \end{bmatrix}$ $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$ $AB = BA = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 35 \end{bmatrix}$
34	$3e + 4g = 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$ $3f + 4h = 12 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$ $-e + 5g = 6 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$ $-f + 5h = 15 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$ نضرب المعادلة الثالثة بـ 3 ونجمع الناتج إلى المعادلة الأولى: $-3e + 15g = 18$ $3e + 4g = 1$ $19g = 19 \implies g = 1$ نعوض قيمة g في المعادلة الأولى، فنجد: $e = -1$ نضرب المعادلة الرابعة بـ 3 ونجمع الناتج إلى المعادلة الثانية: $-3f + 15h = 45$ $3f + 4h = 12$ $19h = 57 \implies h = 3$ نعوض قيمة h في المعادلة الثانية، فنجد: $f = 0$

الدرس الرابع: المحددات وقاعدة كريمر

	أتحقق من فهمي صفحة 35
a	$\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 0 + 3 = 3$
b	$\begin{vmatrix} 5 & 20 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 40 - 40 = 0$
c	$\begin{vmatrix} 9 & 5 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -18 - 15 = -33$
	أتحقق من فهمي صفحة 37
a	الطريقة الأولى: قاعدة الأقطار: $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 9 \\ -2 & 3 & 4 \\ -5 & 7 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 3 \\ -2 & 3 \\ -5 & 7 \end{matrix}$ $(1 \times 3 \times 2) + (3 \times 4 \times -5) + (9 \times -2 \times 7) = -180$ $(9 \times 3 \times -5) + (1 \times 4 \times 7) + (3 \times -2 \times 2) = -119$ $-180 + 119 = -61$ الطريقة الثانية: باستعمال محددة المصفوفة 2×2: $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 9 \\ -2 & 3 & 4 \\ -5 & 7 & 2 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} - 3 \times \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} + 9 \times \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -5 & 7 \end{vmatrix}$ $= (6 - 28) - 3(-4 + 20) + 9(-14 + 15) = -22 - 48 + 9 = -61$

b

الطريقة الأولى: قاعدة الأقطار:

$$\begin{vmatrix} 0 & -5 & -1 \\ 4 & 1 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \begin{matrix} 0 & -5 \\ 4 & 1 \\ 7 & 8 \end{matrix}$$

$$(0 \times 1 \times 9) + (-5 \times 6 \times 7) + (-1 \times 4 \times 8) = -242$$

$$(-1 \times 1 \times 7) + (0 \times 6 \times 8) + (-5 \times 4 \times 9) = -187$$

$$-242 + 187 = -55$$

الطريقة الثانية: باستعمال محددة المصفوفة 2×2:

$$\begin{vmatrix} 0 & -5 & -1 \\ 4 & 1 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 0 \times \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} + 5 \times \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} - 1 \times \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}$$

$$= 0 + 5(36 - 42) - 1(32 - 7) = -30 - 25 = -55$$

أتحقق من فهمي صفحة 39

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 80 & 1 \\ 20 & 50 & 1 \\ 10 & 10 & 1 \end{vmatrix} = 0 \times \begin{vmatrix} 50 & 1 \\ 10 & 1 \end{vmatrix} - 80 \times \begin{vmatrix} 20 & 1 \\ 10 & 1 \end{vmatrix} + 1 \times \begin{vmatrix} 20 & 50 \\ 10 & 10 \end{vmatrix}$$

$$= 0 - 80(20 - 10) + 1(200 - 500) = -800 - 300 = -1100$$

$$Area = \frac{1}{2}|A| = \frac{1}{2} \times 1100 = 550\ km^2$$

طريقة أخرى:

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 8 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \times \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 8 \times \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 1 \times \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 0 - 8(1) + 1(-3) = -11$$

مساحة المثلث في المستوى الإحداثي هي: $\frac{1}{2}|A| = \frac{1}{2} \times 11 = 5.5\ unit^2$

المساحة الحقيقية تساوي $5.5 \times (10\text{km})^2 = 550\ \text{km}^2$

أتحقق من فهمي صفحة 41

a

$$C = \begin{bmatrix} -2 & 7 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad D = |C| = \begin{vmatrix} -2 & 7 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 - 7 = -9$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 12 & 7 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}}{-9} = \frac{12 - 21}{-9} = \frac{-9}{-9} = 1$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} -2 & 12 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}}{-9} = \frac{-6 - 12}{-9} = \frac{-18}{-9} = 2$$

إذن، حل النظام هو: $(1,2)$

b

$$4x - 3y = 29$$

$$5x + 2y = -5$$

$$C = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \quad , \quad D = |C| = \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 8 + 15 = 23$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 29 & -3 \\ -5 & 2 \end{vmatrix}}{23} = \frac{58 - 15}{23} = \frac{43}{23}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 29 \\ 5 & -5 \end{vmatrix}}{23} = \frac{-20 - 145}{23} = \frac{-165}{23}$$

إذن، حل النظام هو: $\left(\frac{43}{23}, \frac{-165}{23}\right)$

أتدرب وأحل المسائل صفحة 41

1

$$\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 6 + 5 = 11$$

2

$$\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} = 0 + 20 = 20$$

3

$$\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 12 - 12 = 0$$

4

$$\begin{vmatrix} -5 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -20 - 3 = -23$$

5	الطريقة الأولى: قاعدة الأقطار: $\begin{vmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 5 & 8 & -2 \\ 4 & 7 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} 0 & -3 \\ 5 & 8 \\ 4 & 7 \end{matrix}$ $(0 \times 8 \times 3) + (-3 \times -2 \times 4) + (1 \times 5 \times 7) = 24 + 35 = 59$ $(1 \times 8 \times 4) + (0 \times -2 \times 7) + (-3 \times 5 \times 3) = 32 - 45 = -13$ $D = 59 + 13 = 72$ الطريقة الثانية: باستعمال محددة المصفوفة 2×2: $\begin{vmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 5 & 8 & -2 \\ 4 & 7 & 3 \end{vmatrix} = 0 \times \begin{vmatrix} 8 & -2 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} + 3 \times \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} + 1 \times \begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 4 & 7 \end{vmatrix}$ $= 0 + 3(15 + 8) + 1(35 - 32) = 69 + 3 = 72$
6	الطريقة الأولى: قاعدة الأقطار: $\begin{vmatrix} -4 & 3 & 2 \\ 6 & 5 & 1 \\ -4 & 3 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} -4 & 3 \\ 6 & 5 \\ -4 & 3 \end{matrix}$ $(-4 \times 5 \times 2) + (3 \times 1 \times -4) + (2 \times 6 \times 3) = -40 - 12 + 36 = -16$ $(2 \times 5 \times -4) + (-4 \times 1 \times 3) + (3 \times 6 \times 2) = -40 - 12 + 36 = -16$ $D = -16 + 16 = 0$ الطريقة الثانية: باستعمال محددة المصفوفة 2×2: $\begin{vmatrix} -4 & 3 & 2 \\ 6 & 5 & 1 \\ -4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -4 \times \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - 3 \times \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} + 2 \times \begin{vmatrix} 6 & 5 \\ -4 & 3 \end{vmatrix}$ $= -4(10 - 3) - 3(12 + 4) + 2(18 + 20) = -28 - 48 + 76 = 0$

7	الطريقة الأولى: قاعدة الأقطار: $\begin{vmatrix} -6 & -1 & -2 \\ 2 & 5 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} -6 & -1 \\ 2 & 5 \\ 4 & 3 \end{matrix}$ $(-6 \times 5 \times 1) + (-1 \times 0 \times 4) + (-2 \times 2 \times 3) = -30 + 0 - 12 = -42$ $(-2 \times 5 \times 4) + (-6 \times 0 \times 3) + (-1 \times 2 \times 1) = -40 + 0 - 2 = -42$ $D = -42 + 42 = 0$ الطريقة الثانية: باستعمال محددة المصفوفة 2×2: $\begin{vmatrix} -6 & -1 & -2 \\ 2 & 5 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -6 \times \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 1 \times \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} - 2 \times \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}$ $= -6(5-0) + 1(2-0) - 2(6-20) = -30 + 2 + 28 = 0$
8	الطريقة الأولى: قاعدة الأقطار: $\begin{vmatrix} 6 & 0 & 4 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 6 & 0 \\ 0 & -3 \\ 1 & 0 \end{matrix}$ $(6 \times -3 \times 2) + (0 \times 0 \times 1) + (4 \times 0 \times 0) = -36$ $(4 \times -3 \times 1) + (6 \times 0 \times 0) + (0 \times 0 \times 2) = -12$ $D = -36 + 12 = -24$ الطريقة الثانية: باستعمال محددة المصفوفة 2×2: $\begin{vmatrix} 6 & 0 & 4 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 6 \times \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} - 0 \times \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 4 \times \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$ $= 6(-6-0) - 0 + 4(0+3) = -36 + 12 = -24$
9	$A = \begin{vmatrix} 6 & 8 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ -5 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 6 \times \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - 8 \times \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} + 1 \times \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -5 & 3 \end{vmatrix}$ $= 6(4-3) - 8(2+5) + 1(6+20) = 6 - 56 + 26 = -24$ $Area = \frac{1}{2}\lvert A \rvert = \frac{1}{2} \times 24 = 12$

10	$A = \begin{vmatrix} 60 & 100 & 1 \\ 140 & 0 & 1 \\ 100 & 180 & 1 \end{vmatrix} = 60 \times \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 180 & 1 \end{vmatrix} - 100 \times \begin{vmatrix} 140 & 1 \\ 100 & 1 \end{vmatrix} + 1 \times \begin{vmatrix} 140 & 0 \\ 100 & 180 \end{vmatrix}$ $= 60(0 - 180) - 100(140 - 100) + 1(25200 - 0)$ $= -10800 - 4000 + 25200 = 10400$ $Area = \frac{1}{2}\|A\| = \frac{1}{2} \times 10400 = 5200\ m^2$ ويمكن حله بالطريقة الثانية كما في أتحقق من فهمي في المثال 3.
11	$x + 5y = -17$ $3x - 4y = 6$ $C = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$, $D = \|C\| = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = -4 - 15 = -19$ $x = \frac{\begin{vmatrix} -17 & 5 \\ 6 & -4 \end{vmatrix}}{-19} = \frac{68 - 30}{-19} = \frac{38}{-19} = -2$ $y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -17 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}}{-19} = \frac{6 + 51}{-19} = \frac{57}{-19} = -3$ إذن، حل النظام هو: $(-2, -3)$
12	$2x - 3y = 29$ $-4x + 6y = 12$ $C = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 6 \end{bmatrix}$, $D = \|C\| = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 6 \end{vmatrix} = 12 - 12 = 0$ إذن، لا يوجد حل لهذا النظام إذ أن المعادلتين تمثلان مستقيمين متوازيين.

13	$5x-4y=22$ $4x+3y=-1$ $C=\begin{bmatrix}5 & -4\\ 4 & 3\end{bmatrix}$, $D=\lvert C\rvert=\begin{vmatrix}5 & -4\\ 4 & 3\end{vmatrix}=15+16=31$ $x=\dfrac{\begin{vmatrix}22 & -4\\ -1 & 3\end{vmatrix}}{31}=\dfrac{66-4}{31}=\dfrac{62}{31}=2$ $y=\dfrac{\begin{vmatrix}5 & 22\\ 4 & -1\end{vmatrix}}{31}=\dfrac{-5-88}{31}=\dfrac{-93}{31}=-3$ إذن، حل النظام هو: $(2,-3)$
14	$C=\begin{bmatrix}6 & -7\\ 5 & 4\end{bmatrix}$, $D=\lvert C\rvert=\begin{vmatrix}6 & -7\\ 5 & 4\end{vmatrix}=24+35=59$ $x=\dfrac{\begin{vmatrix}-11 & -7\\ 40 & 4\end{vmatrix}}{59}=\dfrac{-44+280}{59}=\dfrac{236}{59}=4$ $y=\dfrac{\begin{vmatrix}6 & -11\\ 5 & 40\end{vmatrix}}{59}=\dfrac{240+55}{59}=\dfrac{295}{59}=5$ إذن، حل النظام هو: $(4,5)$
15	$2x+y=6$ $x+cy=3$ $\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & c\end{vmatrix}=0 \implies 2c-1=0 \implies c=\dfrac{1}{2}$
16	$A=\begin{vmatrix}0 & 0 & 1\\ 6 & 50 & 1\\ 56 & 116 & 1\end{vmatrix}=0\times\begin{vmatrix}50 & 1\\ 116 & 1\end{vmatrix}-0\times\begin{vmatrix}6 & 1\\ 56 & 1\end{vmatrix}+1\times\begin{vmatrix}6 & 50\\ 56 & 116\end{vmatrix}$ $=0-0+1(696-2800)=-2104$ $Area=\dfrac{1}{2}\lvert A\rvert=\dfrac{1}{2}\times 2104=1052\ km^2$
17	إجابة محتملة: $A=\begin{bmatrix}6 & 12\\ 2 & 4\end{bmatrix}$
18	إجابة محتملة: $A=\begin{bmatrix}5 & 3\\ 7 & 4\end{bmatrix}$

19	إجابة محتملة: $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 6 \end{bmatrix}$
20	عناصر العمود الأول في محددة x هي الثوابت في نظام المعادلات، وهو نفسه العمود الثاني في محددة y $a = 1 \quad , \quad c = 3$ عناصر العمود الأول في مصفوفة المعاملات هي معاملات x وهي موجودة في العمود الأول في محددة y ، وعناصر العمود الثاني في مصفوفة المعاملات هي معاملات y وهي موجودة في العمود الثاني في محددة x ، محددة مصفوفة المعاملات قيمتها تساوي 5، إذن: $\begin{vmatrix} 7 & 2 \\ b & 4 \end{vmatrix} = 5 \implies 28 - 2b = 5 \implies b = \frac{23}{2}$

الدرس الخامس: النظير الضربي للمصفوفة

	أتحقق من فهمي صفحة 45
a	$AB = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ بما أن $AB = I$ ، فإن كلًّا من المصفوفة A والمصفوفة B تمثل نظيرًا ضربيًا للأخرى.
b	$CD = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 6 & 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2.5 & 1.5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 & 12 \\ 30 & 19 \end{bmatrix}$ بما أن $CD \neq I$ ، فإن كلًّا من المصفوفة C والمصفوفة D لا تمثل نظيرًا ضربيًا للأخرى.
	أتحقق من فهمي صفحة 46
a	$H = \begin{bmatrix} -2 & 6 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ ، $\lvert H \rvert = -6 + 6 = 0$ بما أن $\lvert H \rvert = 0$، فإن المصفوفة H منفردة، ولا نظير ضربي لها.
b	$J = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ ، $\lvert J \rvert = -2$ بما أن $\lvert J \rvert \neq 0$، فإن المصفوفة J غير منفردة، ولها نظير ضربي هو J^{-1} $J^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$
c	$K = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ -8 & -7 \end{bmatrix}$ ، $\lvert K \rvert = -49 + 48 = -1$ بما أن $\lvert K \rvert \neq 0$، فإن المصفوفة K غير منفردة، ولها نظير ضربي هو K^{-1} $K^{-1} = -\begin{bmatrix} -7 & -6 \\ 8 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ -8 & -7 \end{bmatrix}$

أتحقق من فهمي صفحة 49

$$AX = B \implies \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$|A| = 9 - 2 = 7$$

$$A^{-1} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{2}{7} & \frac{3}{7} \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} \frac{3}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{2}{7} & \frac{3}{7} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 13 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{43}{7} \\ \frac{38}{7} \end{bmatrix}$$

إذن، حل هذا النظام هو $\left(\frac{43}{7}, \frac{38}{7}\right)$

أتحقق من فهمي صفحة 51

نفرض أن الطاهي سيستعمل x لترًا تركيزالسكر فيه 12% ، و y لترًا تركيزالسكر فيه 20%

$$x + y = 20$$

$$0.12x + 0.2y = 0.15 \times 20 = 3$$

$$AX = B \implies \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0.12 & 0.2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$|A| = 0.2 - 0.12 = 0.08$$

$$A^{-1} = \frac{1}{0.08}\begin{bmatrix} 0.2 & -1 \\ -0.12 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.5 & -12.5 \\ -1.5 & 12.5 \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} 2.5 & -12.5 \\ -1.5 & 12.5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 20 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12.5 \\ 7.5 \end{bmatrix}$$

إذن، سيستعمل الطاهي $12.5L$ من المحلول الذي تركيز السكر فيه 12%، و $7.5L$ من الثاني.

أتدرب وأحل المسائل صفحة 52

1

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

بما أن $AB \neq I$ ، فإن كلًّا من المصفوفة A والمصفوفة B لا تمثل نظيرًا ضربيًا للأخرى.

2

$$CD = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

بما أن $CD = I$ ، فإن كلًّا من المصفوفة C والمصفوفة D تمثل نظيرًا ضربيًا للأخرى.

3	$LM = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ بما أن $LM = I$ ، فإن كلًّا من المصفوفة L والمصفوفة M تمثل نظيرًا ضربيًا للأخرى.
4	$GH = \begin{bmatrix} -3 & -11 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1.5 & 5.5 \\ -0.5 & -1.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ بما أن $GH = I$ ، فإن كلًّا من المصفوفة G والمصفوفة H تمثل نظيرًا ضربيًا للأخرى.
5	$P = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ ، $\lvert P \rvert = 10 - 12 = -2$ بما أن $\lvert P \rvert \neq 0$، فإن المصفوفة P غير منفردة، ولها نظير ضربي هو P^{-1} $P^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2.5 & 1.5 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$
6	$Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$ ، $\lvert Q \rvert = \frac{1}{6} - 0 = \frac{1}{6}$ بما أن $\lvert Q \rvert \neq 0$، فإن المصفوفة Q غير منفردة، ولها نظير ضربي هو Q^{-1} $Q^{-1} = 6\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$
7	$S = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$ ، $\lvert S \rvert = -6 + 6 = 0$ بما أن $\lvert S \rvert = 0$، فإن المصفوفة S منفردة، ولا نظير ضربي لها.
8	$V = \begin{bmatrix} 8 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ ، $\lvert V \rvert = 8 + 2 = 10$ بما أن $\lvert V \rvert \neq 0$، فإن المصفوفة V غير منفردة، ولها نظير ضربي هو V^{-1} $V^{-1} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{10} & \frac{1}{10} \\ -\frac{1}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix}$

9

$3x + 5y = 13$

$x - 2y = -3$

$$AX = B \implies \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$|A| = -6 - 5 = -11$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{11}\begin{bmatrix} -2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{11} & \frac{5}{11} \\ \frac{1}{11} & -\frac{3}{11} \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} \frac{2}{11} & \frac{5}{11} \\ \frac{1}{11} & -\frac{3}{11} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 13 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

إذن، حل هذا النظام هو $(1,2)$

10

$-2x + 4y = 6$

$x + 2y = 7$

$$AX = B \implies \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$|A| = -4 - 4 = -8$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{8}\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ \frac{5}{2} \end{bmatrix}$$

إذن، حل هذا النظام هو $\left(2, \frac{5}{2}\right)$

11

$5x - 8y = 31$

$-3x + 2y = -13$

$$AX = B \implies \begin{bmatrix} 5 & -8 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 31 \\ -13 \end{bmatrix}$$

$$|A| = 10 - 24 = -14$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{-2}{14} & \frac{-8}{14} \\ \frac{-3}{14} & \frac{-5}{14} \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} \frac{-2}{14} & \frac{-8}{14} \\ \frac{-3}{14} & \frac{-5}{14} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 31 \\ -13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-62+104}{14} \\ \frac{-93+65}{14} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{42}{14} \\ \frac{-28}{14} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

إذن، حل هذا النظام هو $(3, -2)$

12

$x + y = 20$

$x - 2y = -1$

$$AX = B \implies \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$|A| = -2 - 1 = -3$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{3}\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 20 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 7 \end{bmatrix}$$

إذن، حل هذا النظام هو $(13,7)$

13

$3x + 2y = 8$

$x - y = 1$

$$AX = B \implies \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$|A| = -3 - 2 = -5$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{5}\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

إذن، حل هذا النظام هو $(2,1)$

14

$2x + 7y = 24$

$4x + 13y = 46$

$$AX = B \implies \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 4 & 13 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 \\ 46 \end{bmatrix}$$

$$|A| = 26 - 28 = -2$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 13 & -7 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{13}{2} & \frac{7}{2} \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} -\frac{13}{2} & \frac{7}{2} \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 24 \\ 46 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

إذن، حل هذا النظام هو $(5,2)$

15	نفرض أن الصيدلي سيستعمل x لترًا تركيز الملح فيه 2% ، و y لترًا تركيز الملح فيه 12% $x + y = 10$ $0.02x + 0.12y = 0.1 \times 10 = 1$ $AX = B \implies \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0.02 & 0.12 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\lvert A \rvert = 0.12 - 0.02 = 0.1$ $A^{-1} = 10 \begin{bmatrix} 0.12 & -1 \\ -0.02 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.2 & -10 \\ -0.2 & 10 \end{bmatrix}$ $X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} 1.2 & -10 \\ -0.2 & 10 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 10 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \end{bmatrix}$ إذن، سيستعمل الصيدلي $2L$ من المحلول الذي تركيز الملح فيه 2%، و $8L$ من الثاني.
16	ليكن x عدد الأوراق النقدية من فئة JD 10 ، y عدد الأوراق النقدية من فئة JD 20. $10x + 20y = 750$ $y = 2x - 5 \implies 2x - y = 5$ $AX = B \implies \begin{bmatrix} 10 & 20 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 750 \\ 5 \end{bmatrix}$ $\lvert A \rvert = -10 - 40 = -50$ $A^{-1} = -\frac{1}{50} \begin{bmatrix} -1 & -20 \\ -2 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{50} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{50} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}$ $X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} \frac{1}{50} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{50} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 750 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 \\ 29 \end{bmatrix}$ عدد الأوراق النقدية من فئة JD 10 هو 17، وعدد الأوراق النقدية من فئة JD 20 هو 29.
17	$\begin{vmatrix} 5 & x \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0 \implies 20 - 2x = 0 \implies x = 10$
18	$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \implies a = \pm 1$

19

$$(B+C)^{-1}=A \implies (B+C)(B+C)^{-1}=(B+C)A$$
$$\implies I=(B+C)A$$
$$\implies IA^{-1}=(B+C)AA^{-1}$$
$$\implies A^{-1}=B+C$$
$$\implies C=A^{-1}-B$$

$$A=\begin{bmatrix}4 & 3\\ 1 & 1\end{bmatrix} \implies |A|=4-3=1 \implies A^{-1}=\begin{bmatrix}1 & -3\\ -1 & 4\end{bmatrix}$$

$$A^{-1}-B=\begin{bmatrix}1 & -3\\ -1 & 4\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2 & -1\\ -3 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & -2\\ 2 & -1\end{bmatrix}$$

$$C=\begin{bmatrix}-1 & -2\\ 2 & -1\end{bmatrix}$$

20

$$A^2=2A-3I \implies A^3=A(A^2)=A(2A-3I)$$
$$=2A^2-3A$$
$$=2(2A-3I)-3A$$
$$=4A-6I-3A$$
$$=A-6I$$

21

ليكن x عدد القوارب التي حمولتها 4 أشخاص، y عدد القوارب التي حمولتها 7 أشخاص.

$$x+y=8$$
$$4x+7y=50$$

$$AX=B \implies \begin{bmatrix}1 & 1\\ 4 & 7\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8\\ 50\end{bmatrix}$$

$$|A|=7-4=3$$

$$A^{-1}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}7 & -1\\ -4 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{7}{3} & -\frac{1}{3}\\ -\frac{4}{3} & \frac{1}{3}\end{bmatrix}$$

$$X=A^{-1}B=\begin{bmatrix}\frac{7}{3} & -\frac{1}{3}\\ -\frac{4}{3} & \frac{1}{3}\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}8\\ 50\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\ 6\end{bmatrix}$$

عدد القوارب التي حمولتها 4 أشخاص هو2، وعدد القوارب التي حمولتها 7 أشخاص هو 6.

22	$\|A\| = ad - cb$ $A^{-1} = \frac{1}{ad-cb}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ العدد $\frac{1}{ad-cb}$ قد يكون موجبًا أو سالبًا، وجميع عناصر المصفوفة $\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ هي أعداد موجبة، إذن، إما أن تكون جميع عناصر المصفوفة A^{-1} موجبة إذا كانت $\|A\| > 0$، أو جميعها سالبة إذا كانت $\|A\| < 0$.
23	$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\|A\| = 2$, $A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$, $\|B\| = 3 - 1 = 2$, $B^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ $AB = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -11 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$, $\|AB\| = 15 - 11 = 4$ $(AB)^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 3 & 11 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{11}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{5}{4} \end{bmatrix}$ $B^{-1} \times A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{11}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{5}{4} \end{bmatrix} = (AB)^{-1}$
24	المصفوفة المختلفة هي المصفوفة $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ لأنها غير منفردة، بينما بقية المصفوفات في المجموعة منفردة.

25	$BA^2 = A \implies BAA = A$ $\implies (BAA)A^{-1} = AA^{-1}$ $\implies BA(AA^{-1}) = AA^{-1}$ $\implies (BA)I = I$ $\implies BA = I$ $\implies (BA)A^{-1} = IA^{-1}$ $\implies B(AA^{-1}) = A^{-1}$ $\implies BI = A^{-1}$ $\implies B = A^{-1}$ $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$, $\lvert A \rvert = 4 - 3 = 1$, $A^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ $\implies B = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

	اختبار نهاية الوحدة صفحة 54
1	a
2	D
3	d
4	b
5	a
6	D
7	$\|A\| = (a-3)(a+2)+4 = a^2 - a - 2$
8	$\|A\| = 0 \implies a^2 - a - 2 = 0$ $\implies (a-2)(a+1) = 0$ $\implies a = 2 \ , \ a = -1$
9	$a = 3$ $A = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \ , \ \|A\| = 0 + 4 = 4 \ , \ A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.25 & 0.5 \\ -0.5 & 0 \end{bmatrix}$
10	$C(B+D) = \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ -4 & 1 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} \times \left(\begin{bmatrix} 6 & 2 & -5 \\ 3 & 7 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 4 & 2 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \right)$ $= \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ -4 & 1 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 12 & 6 & -3 \\ 4 & 5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 72 & 63 & 0 \\ -44 & -19 & 13 \\ 32 & 40 & 8 \end{bmatrix}$
11	$AB = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 6 & 2 & -5 \\ 3 & 7 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & -8 & -23 \\ -3 & -7 & -4 \end{bmatrix}$
12	بما أن C,B من رتبتين مختلفتين، فلا يمكن إيجاد $B + C$
13	بما أن C,B من رتبتين مختلفتين، فلا يمكن إيجاد $2B - 3C$
14	$\begin{vmatrix} 3 & -7 & 6 \\ 1 & 0 & 8 \\ -2 & 11 & 9 \end{vmatrix} = 3 \times \begin{vmatrix} 0 & 8 \\ 11 & 9 \end{vmatrix} + 7 \times \begin{vmatrix} 1 & 8 \\ -2 & 9 \end{vmatrix} + 6 \times \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 11 \end{vmatrix}$ $= 3(0 - 88) + 7(9 + 16) + 6(11 + 0)$ $= -264 + 175 + 66 = -23$

15	$\begin{bmatrix}71 & 66\\ 68 & 59\\ 32 & 22\\ 11 & 14\end{bmatrix}$ رتبة هذه المصفوفة هي 4×2
16	$AB = \begin{bmatrix}x & 6\\ 4 & 3\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}2 & 3\\ 2 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2x+12 & 3x+6\\ 14 & 15\end{bmatrix}$ $BA = \begin{bmatrix}2 & 3\\ 2 & 1\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}x & 6\\ 4 & 3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2x+12 & 21\\ 2x+4 & 15\end{bmatrix}$ $AB = BA \implies 3x+6 = 21 \implies x = 5$
17	$A^2 + kI = hA \implies \begin{bmatrix}3 & 2\\ 7 & 5\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}3 & 2\\ 7 & 5\end{bmatrix} + k\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} = h\begin{bmatrix}3 & 2\\ 7 & 5\end{bmatrix}$ $\implies \begin{bmatrix}23 & 16\\ 56 & 39\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}k & 0\\ 0 & k\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3h & 2h\\ 7h & 5h\end{bmatrix}$ $16 = 2h \implies h = 8$ $23 + k = 3h = 24 \implies k = 1$
18	$BA - 2C^2 = \begin{bmatrix}3\\ 2\end{bmatrix} \times [2 \quad -2] - 2\begin{bmatrix}1 & -2\\ 4 & -1\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}1 & -2\\ 4 & -1\end{bmatrix}$ $= \begin{bmatrix}6 & -6\\ 4 & -4\end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix}-7 & 0\\ 0 & -7\end{bmatrix}$ $= \begin{bmatrix}6 & -6\\ 4 & -4\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}14 & 0\\ 0 & 14\end{bmatrix}$ $= \begin{bmatrix}20 & -6\\ 4 & 10\end{bmatrix}$
19	$2X - \begin{bmatrix}5 & -3\\ 6 & 3\end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix}-1 & 7\\ 2 & 5\end{bmatrix} \implies 2X = \begin{bmatrix}-3 & 21\\ 6 & 15\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}5 & -3\\ 6 & 3\end{bmatrix}$ $\implies 2X = \begin{bmatrix}2 & 18\\ 12 & 18\end{bmatrix}$ $\implies X = \begin{bmatrix}1 & 9\\ 6 & 9\end{bmatrix}$

20

$$A=\begin{vmatrix}-3 & 1 & 1\\ 1 & 5 & 1\\ 5 & 2 & 1\end{vmatrix}=-3\times\begin{vmatrix}5 & 1\\ 2 & 1\end{vmatrix}-1\times\begin{vmatrix}1 & 1\\ 5 & 1\end{vmatrix}+1\times\begin{vmatrix}1 & 5\\ 5 & 2\end{vmatrix}$$

$$=-3(5-2)-1(1-5)+1(2-25)$$

$$=-9+4-23=-28$$

$$Area=\frac{1}{2}|A|=\frac{1}{2}\times 28=14$$

21

$$3x-2y=8$$

$$5x+3y=13$$

$$C=\begin{bmatrix}3 & -2\\ 5 & 3\end{bmatrix}\ ,\ D=|C|=\begin{vmatrix}3 & -2\\ 5 & 3\end{vmatrix}=9+10=19$$

$$x=\frac{\begin{vmatrix}8 & -2\\ 13 & 3\end{vmatrix}}{19}=\frac{24+26}{19}=\frac{50}{19}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}3 & 8\\ 5 & 13\end{vmatrix}}{19}=\frac{39-40}{19}=\frac{-1}{19}$$

إذن، حل النظام هو: $\left(\frac{50}{19},-\frac{1}{19}\right)$

22

$$x-5y=14$$

$$3x-8y=28$$

$$AX=B\ \Rightarrow\ \begin{bmatrix}1 & -5\\ 3 & -8\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}14\\ 28\end{bmatrix}$$

$$|A|=-8+15=7$$

$$A^{-1}=\frac{1}{7}\begin{bmatrix}-8 & 5\\ -3 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{8}{7} & \frac{5}{7}\\ -\frac{3}{7} & \frac{1}{7}\end{bmatrix}$$

$$X=A^{-1}B=\begin{bmatrix}-\frac{8}{7} & \frac{5}{7}\\ -\frac{3}{7} & \frac{1}{7}\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}14\\ 28\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\ -2\end{bmatrix}$$

إذن، حل هذا النظام هو $(4,-2)$

23

$$B = \begin{bmatrix} 2 & a \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \ , \ |B| = -2 + a$$

$$B^{-1} = \frac{1}{a-2}\begin{bmatrix} -1 & -a \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{a-2} & \frac{-a}{a-2} \\ \frac{1}{a-2} & \frac{2}{a-2} \end{bmatrix}$$

$$B + B^{-1} = I \implies \begin{bmatrix} 2 & a \\ -1 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{-1}{a-2} & \frac{-a}{a-2} \\ \frac{1}{a-2} & \frac{2}{a-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\implies 2 + \frac{-1}{a-2} = 1 \implies \frac{-1}{a-2} = -1 \implies a - 2 = 1 \implies a = 3$$

24

أفترض أن عائشة تستعمل $x\ ml$ من المحلول الذي تركيزه 40%، فسوف تستعمل $4x\ ml$ من المحلول الذي تركيزه 10%، وليكن ما تستعمله من المحلول الذي تركيزه 20% هو $y\ ml$.

المعادلة الأولى هي: مجموع ما تستعمله من المحاليل الثلاثة هو $100\ ml$

$$x + 4x + y = 100 \implies 5x + y = 100$$

المعادلة الثانية هي: كمية الحمض في المزيج تساوي $18\ \text{mL}$

$$18\%(100) = 18$$

$$0.40x + 4x(0.10) + 0.20y = 18 \implies 0.4x + 0.1y = 9$$

المعادلة المصفوفية التي تمثل هاتين المعادلتين هي:

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 0.4 & 0.1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$|A| = 5(0.1) - 0.4(1) = 0.1$$

$$A^{-1} = \frac{1}{0.1}\begin{bmatrix} 0.1 & -1 \\ -0.4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -10 \\ -4 & 50 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -10 \\ -4 & 50 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 100 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 100 - 90 \\ -400 + 450 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 50 \end{bmatrix}$$

إذن سوف تستعمل عائشة $10\ \text{mL}$ من المحلول الذي تركيزه 40%، و $50\ \text{mL}$ من الذي تركيزه 20%، و $40\ \text{mL}$ من الذي تركيزه 10%.

الوحدة الثانية: الخوارزميات ونظرية المخططات

الدرس الأول: الخوارزميات

أتحقق من فهمي صفحة 59

a

1. $7 + 8 = 15$
2. $9 + 6 = 15$
3. $15 - 15 = 0$

يقبل العدد 9768 القسمة على 11، لأن الفرق المطلق يساوي 0

b

1. $3 + 8 + 2 = 13$
2. $7 + 4 + 5 = 16$
3. $16 - 13 = 3$

لا يقبل العدد 734852 القسمة على 11، لأن 3 لا يقبل القسمة على 11

أتحقق من فهمي صفحة 61

a

step	n	A	B	C	Print
1	1	1	2		
2					2
3				4	
4					4
5	2		4		
6 → 3				6	
4					6
5	3		6		
6 → 3				8	
4					8
5	4		8		
6 → 3				10	
4					10
5	5		10		
6 → 7	Stop				

b

تمثل مخرجات الخوارزمية الأعداد الزوجية الموجبة التي تقل عن 12

أتحقق من فهمي صفحة 63

a

N	A	Print	Is n>7?
1			
2	4	4	no
3	6	6	no
4	8	8	no
5	10	10	no
6		12	No
7	14	14	no
8	16	16	yes

b

تمثل مخرجات الخوارزمية مضاعفات العدد 2 التي تزيد على أو تساوي 4 ، وتقل عن 18

أتحقق من فهمي صفحة 64

a

$x^2 + 4x - 12 = 0$

a	b	c	d	$d < 0$?	$d = 0$?	x_1	x_2
1	4	−12	64	No	No	−6	2

المُخرج: $x_2 = 2$ ، $x_1 = -6$

b

$3x^2 + 8x + 15 = 0$

a	b	c	d	$d < 0$?
3	8	15	−116	yes

المُخرج: لا توجد حلول حقيقية للمعادلة.

c

$2x^2 + 12x + 18 = 0$

a	b	c	d	$d < 0$?	$d = 0$?	x
2	12	18	0	No	yes	−3

المُخرج: $x = -3$

أتدرب وأحل المسائل صفحة 64

1

1. $7 + 1 + 0 + 4 = 12$
2. 12 يقبل القسمة على 3 $\longrightarrow$ 3
3. 04 يقبل القسمة على 4

يقبل العدد 7104 القسمة على 12.

2	1. $3+2+4+8+9+4+0=30$ 2. 3 يقبل القسمة على $30 \longrightarrow 3$ 3. 4 يقبل القسمة على 40 يقبل العدد 3248940 القسمة على 12.
3	1. $5+7+6+2=20$ 2. 3 لا يقبل القسمة على 20 لا يقبل العدد 5762 القسمة على 12.
4	1. $8+1+4+5+6=24$ 2. 3 يقبل القسمة على $24 \longrightarrow 3$ 3. 4 يقبل القسمة على 56 يقبل العدد 81456 القسمة على 12.
5	19 1. 1,81 2. $1+81=82$ 3. 82 4. 4,64 5. $4+64=68$ 6. 68 7. 36,64 8. $36+64=100$ 9. 100 10. 1,0,0 11. $1+0+0=1$ العدد 19 سعيد.

6	42 1. 4,16 2. $4 + 16 = 20$ 3. 20 4. 0,4 5. $0 + 4 = 4$ العدد 42 ليس سعيدًا.
7	49 1. 16,81 2. $16 + 81 = 97$ 3. 97 4. 49,81 5. $49 + 81 = 130$ 6. 130 7. 0,1,9 8. $0 + 1 + 9 = 10$ 9. 10 10. 1,0 11. $1 + 0 = 1$ العدد 49 سعيد.

8	25 1. 4,25 2. $4 + 25 = 29$ 3. 29 4. 4,81 5. $4 + 81 = 85$ 6. 85 7. 25,64 8. $25 + 64 = 89$ 9. 89 10. 64,81 11. $64 + 81 = 145$ 12. 145 13. 1,16,25 14. $1 + 16 + 25 = 42$ 15. 42 16. 16, 4 17. $16 + 4 = 20$ 18. 20 19. 4,0 20. $4 + 0 = 4$ العدد 25 ليس سعيدًا.

9

step	n	x	y	Print
1	0	0	1	
2		1	1	
3				1
4	1			
5 → 2		2	2	
3				2
4	2			
5 → 2		3	6	
3				6
4	3			
5 → 2		4	24	
3				24
4	4			
5 → 6	Stop			

مُخرجات الخوارزمية هي: 1,2,6,24

10 مُخرجات الخوارزمية هي حدود متتالية عددية حدها الأول 1 وقيمة كل حد منها بعد ذلك يساوي رتبته مضروبة بقيمة الحد السابق له.
أو: هي مضروبات الأعداد من 1 إلى 4

11 تُستخدم هذه الخوارزمية في حساب معدل طالب بجمع علاماته في 4 مواد ، ثم تصنيفه إلى ناجح إذا كان معدله أكبر من أو يساوي 50 أو راسب إذا كان معدله أقل من 50.

12 a

M1	M2	M3	M4	G	Is G<50?	Print
48	52	46	49	48.75	yes	راسب
Stop						

مُخرج الخوارزمية هو(راسب).

b

M1	M2		M4	G	Is G<50?	Print
71	85	62	45	65.75	no	ناجح
Stop						

مُخرج الخوارزمية هو(ناجح).

13 هذه الخوارزمية تستخدم لمعرفة إن كان عدد ما مربعًا كاملًا أم لا.

14

a

n	k	p	Is p>n?	Is p=n?	Print
24					
	1	1	no	no	
	2	4	No	no	
	3	9	no	no	
	4	16	no	no	
	5	25	yes		24 ليس مربعًا كاملًا
Stop					

مخرج الخوارزمية هو: 24 ليس مربعًا كاملًا

b

n	k	p	Is p>n?	Is p=n?	Print
16					
	1	1	no	no	
	2	4	no	no	
	3	9	no	no	
	4	16	no	yes	16 مربع كامل
Stop					

مخرج الخوارزمية هو: 16 مربع كامل.

15

c	R	Is c>5?	Print
0	1		1
1	2	no	2
2	4	no	4
3	8	no	8
4	16	no	16
5	32	no	32
6	64	yes	
Stop			

مخرجات الخوارزمية هي: 1,2,4,8,16,32

16

مخرجات الخوارزمية هي قوى العدد 2 من 2^0 إلى 2^5

17

n	A	Print	Is A>16?
1	0		
	1	1	no
3	4	4	no
5	9	9	no
7	16	16	no
9	25	25	Yes
Stop			

مخرجات الخوارزمية هي: 1,4,9,16,25

18

مخرجات الخوارزمية هي مربعات الأعداد من 1إلى 5، لأن كل واحد منها هو المجموع التراكمي لقيم n (أعداد فردية متتالية)؛ فالأول هو أول عدد فردي 1، والثاني هو مجموع 1 مع 3، والثالث هو مجموع 1 و 3 و 5، وهكذا.

19

A	B	Is A<B?	Print
27		no	
23		no	
19		no	
15		no	
11		no	
7		no	
3		yes	3
Stop			

مخرج الخوارزمية هو: 3

20

المخرج النهائي لهذه الخوارزمية هو باقي قسمة العدد A على العدد B

الدرس الثاني: خوارزميات تعبئة الصندوق

	أتحقق من فهمي صفحة 69
	$\frac{0.5+0.7+0.5+0.2+0.4+0.2+0.5+0.1+0.6}{1} = 3.7 \approx 4$ الحد الأدنى من عدد الصناديق اللازمة لتعبئة العلب هو 4 صناديق.
	أتحقق من فهمي صفحة 72
a	$\frac{11+2+15+5+6+17+7}{20} = 3.15 \approx 4$ الحد الأدنى من عدد الصناديق اللازمة لتعبئة العلب هو 4 صناديق. B_1: 11,2,5 B_2: 15 B_3: 6,7 B_4: 17 عدد الصناديق اللازمة لتعبئة العلب باستعمال خوارزمية الملاءمة الأولى هو 4 صناديق.
b	نعم، لأن عدد الصناديق المستعملة في هذا الحل يساوي الحد الأدنى من عدد الصناديق اللازمة.
c	$2+5+7+3=17$ الارتفاع المهدور في الصناديق جميعها هو 17 وحدة طول.

أتحقق من فهمي صفحة 74

الارتفاعات مرتبة تنازليًا: 0.9 0.8 0.7 0.6 0.6 0.6 0.5 0.5 0.4 0.3

$$\frac{0.9 + 0.8 + 0.7 + 0.6 + 0.6 + 0.6 + 0.5 + 0.5 + 0.4 + 0.3}{1.5} = 3.93 \approx 4$$

الحد الأدنى من عدد الصناديق اللازمة لتعبئة العلب هو 4 صناديق.

B_1: 0.9,0.6

B_2: 0.8,0.7

B_3: 0.6,0.6,0.3

B_4: 0.5 , 0.5 , 0.4

عدد الصناديق اللازمة لتعبئة العلب باستعمال خوارزمية الملاءمة الأولى المتناقصة هو 4 صناديق.

توصلنا إلى الحل الأمثل لأن عدد الصناديق المستعملة في هذا الحل يساوي الحد الأدنى من عدد الصناديق اللازمة.

الارتفاع المهدور في الصناديق جميعها هو 0.1 وحدة طول.

ألاحظ أن هذا الحل أفضل لأن عدد الصناديق المستعملة يساوي الحد الأدنى من عدد الصناديق اللازمة، والجزء المهدور أقل.

أتحقق من فهمي صفحة 76

$$0.6\ \ 1.5\ \ 1.6\ \ 0.2\ \ 0.4\ \ 0.5\ \ 0.7\ \ 0.1\ \ 0.9\ \ 0.3$$

$$\frac{0.6 + 1.5 + 1.6 + 0.2 + 0.4 + 0.5 + 0.7 + 0.1 + 0.9 + 0.3}{2} = 3.4 \approx 4$$

الحد الأدنى من عدد الصناديق اللازمة لتعبئة العلب هو 4 صناديق.

B_1: 1.5 , 0.5

B_2: 1.6 , 0.4

B_3: 0.7 , 0.3 , 0.9 , 0.1

B_4: 0.6 , 0.2

عدد الصناديق اللازمة لتعبئة العلب باستعمال خوارزمية الصندوق الكامل هو 4 صناديق.

توصلنا إلى الحل الأمثل لأن عدد الصناديق المستعملة في هذا الحل يساوي الحد الأدنى من عدد الصناديق اللازمة.

الارتفاع المهدور في الصناديق جميعها هو 1.2 وحدة طول.

ونلاحظ أن حل هذا السؤال بخوارزمية الملاءمة المتناقصة يعطي نفس الحل بخوارزمية الصندوق الكامل.

أتحقق من فهمي صفحة 79

a

$$29\ \ 52\ \ 73\ \ 87\ \ 74\ \ 47\ \ 38\ \ 61\ \ 41$$

$$\frac{29 + 52 + 73 + 87 + 74 + 47 + 38 + 61 + 41}{100} = 5.02 \approx 6$$

الحد الأدنى من عدد أقراص التخزين اللازمة لحفظ الملفات هو 6 أقراص.

b

B_1: 29 , 52

B_2: 73

B_3: 87

B_4: 74

B_5: 47 , 38

B_6: 61

B_7: 41

عدد أقراص التخزين اللازمة لحفظ الملفات باستخدام خوارزمية الملاءمة الأولى هو 7 أقراص.

مساحة التخزين المهدورة هي $7 \times 100 - 502 = 198GB$

c	الحد الأدنى هو 6 أقراص، ونلاحظ من البحث في القيم المعطاة أنه لا يمكن تعبئة قرص كامل ؛ ولذلك يجب تطبيق خوارزمية الملاءمة الأولى على هذه القيم كما في الفرع السابق b: B_1: 29 , 52 B_2: 73 B_3: 87 B_4: 74 B_5: 47 , 38 B_6: 61 B_7: 41 عدد أقراص التخزين اللازمة لحفظ الملفات باستخدام خوارزمية الصندوق الكامل هو 7 أقراص. مساحة التخزين المهدورة هي $7 \times 100 - 502 = 198\ GB$
d	لم نتوصل إلى الحل الأمثل لا باستخدام خوارزمية الملاءمة الأولى ولا باستخدام خوارزمية الصندوق الكامل.
	أتدرب وأحل المسائل صفحة 79
1	$\frac{1.8 + 1.4 + 2.6 + 1.6 + 2.8 + 0.9 + 3.1 + 0.8 + 1.2 + 2.4 + 0.6}{5} = 3.84 \approx 4$ الحد الأدنى من عدد الصناديق اللازمة لتعبئة العلب هو 4 صناديق. B_1: 1.8 , 1.4 , 1.6 B_2: 2.6 , 0.9 , 0.8 , 0.6 B_3: 2.8 , 1.2 B_4: 3.1 B_5: 2.4 عدد الصناديق اللازمة لتعبئة العلب باستعمال خوارزمية الملائمة الأولى هو 5 صناديق.
2	لم نتوصل إلى الحل الأمثل لأن عدد الصناديق المستعملة في هذا الحل لا يساوي الحد الأدنى من عدد الصناديق اللازمة.
3	الارتفاع المهدور هو $5 \times 5 - 19.2 = 5.8$

	$\frac{31+10+38+45+19+47+35+28+12}{60} = 4.42 \approx 5$ الحد الأدنى من عدد الصناديق اللازمة لتعبئة العلب هو 5 صناديق.
4	الارتفاعات مرتبة تنازليًا: 47 45 38 35 31 28 19 12 10 $B_1: 47, 12$ $B_2: 45, 10$ $B_3: 38, 19$ $B_4: 35$ $B_5: 31, 28$ عدد الصناديق اللازمة لتعبئة العلب باستعمال خوارزمية الملاءمة الأولى المتناقصة هو 5 صناديق.
5	نعم، توصلنا إلى الحل الأمثل لأن عدد الصناديق المستعملة في هذا الحل يساوي الحد الأدنى من عدد الصناديق اللازمة.
6	الارتفاع المهدور في الصناديق جميعها هو $5 \times 60 - 265 = 35$ وحدة طول.
	$\frac{42+21+15+16+35+10+31+11+27+39}{65} = 3.8 \approx 4$ الحد الأدنى من عدد الصناديق اللازمة لتعبئة العلب هو 4 صناديق.
7	$B_1: 16, 10, 39$ $B_2: 42, 21$ $B_3: 15, 35, 11$ $B_4: 31, 27$ عدد الصناديق اللازمة لتعبئة العلب باستعمال خوارزمية الصندوق الكامل هو 4 صناديق.
8	نعم، توصلنا إلى الحل الأمثل لأن عدد الصناديق المستعملة في هذا الحل يساوي الحد الأدنى من عدد الصناديق اللازمة.
9	الارتفاع المهدور في الصناديق جميعها هو $4 \times 65 - 247 = 13$ وحدة طول.
10	$\frac{41+28+42+31+36+32+29}{60} = \frac{239}{60} = 3.98 \approx 4$ الحد الأدنى من عدد الصناديق اللازمة لشحن الأجهزة هو 4 صناديق.

11	$B_1: 41$ $B_2: 28, 31$ $B_3: 42$ $B_4: 36$ $B_5: 32$ $B_6: 29$ عدد الصناديق اللازمة لشحن الأجهزة باستعمال خوارزمية الملاءمة الأولى هو 6 صناديق.
12	الكتل مرتبة تنازليًا: 42 41 36 32 31 29 28 $B_1: 42$ $B_2: 41$ $B_3: 36$ $B_4: 32, 28$ $B_5: 31, 29$ عدد الصناديق اللازمة لشحن الأجهزة باستعمال خوارزمية الملاءمة الأولى المتناقصة هو 5 صناديق.
13	$B_1: 28, 32$ $B_2: 31, 29$ $B_3: 41$ $B_4: 42$ $B_5: 36$ عدد الصناديق اللازمة لشحن الأجهزة باستعمال خوارزمية الصندوق الكامل هو 5 صناديق.
14	جميع الخوارزميات لم تتوصل إلى الحل الأمثل، لأن عدد الصناديق المستعملة لا يساوي الحد الأدنى.

	$\frac{58+45+18+55+47+12+63+30+19+42}{100}=\frac{389}{100}=3.89\approx 4$ الحد الأدنى من عدد الأسلاك اللازمة هو 4 أسلاك.
15	$B_1: 58, 18, 12$ $B_2: 45, 55$ $B_3: 47, 30, 19$ $B_4: 63$ $B_5: 42$ عدد الأسلاك اللازمة باستعمال خوارزمية الملاءمة الأولى هو 5 أسلاك. طول الجزء المهدور هو $5\times 100-389=111\ cm$
16	الأطوال مرتبة تنازليًا: 63 58 55 47 45 42 30 19 18 12 $B_1: 63, 30$ $B_2: 58, 42$ $B_3: 55, 45$ $B_4: 47, 19, 18, 12$ عدد الأسلاك اللازمة باستعمال خوارزمية الملاءمة الأولى المتناقصة هو 4 أسلاك. طول الجزء المهدور هو $4\times 100-389=11\ cm$
17	$B_1: 58, 42$ $B_2: 45, 55$ $B_3: 18, 63, 19$ $B_4: 47, 12, 30$ عدد الأسلاك اللازمة باستعمال خوارزمية الصندوق الكامل هو 4 أسلاك. طول الجزء المهدور هو $4\times 100-389=11\ cm$
18	توصلنا إلى الحل الأمثل باستخدام خوارزمية الملاءمة الأولى المتناقصة و خوارزمية الصندوق الكامل ، لأن عدد الأسلاك المستعملة يساوي الحد الأدنى.

	$\frac{18+16+24+16+20+10+12+8+16+12+10+4+12+6+13}{40}=\frac{197}{40}=4.925$ ≈ 5
19	الحد الأدنى من عدد الرفوف اللازمة هو 5 رفوف. $B_1: 18, 16, 4$ $B_2: 24, 16$ $B_3: 20, 10, 8$ $B_4: 12, 16, 12$ $B_5: 10, 12, 6$ $B_6: 13$ عدد الرفوف اللازمة باستعمال خوارزمية الملاءمة الأولى هو 6 رفوف.
20	$B_1: 18, 16, 6$ $B_2: 24, 16$ $B_3: 20, 10, 10$ $B_4: 12, 16, 12$ $B_5: 8, 4, 12, 13$ عدد الرفوف اللازمة باستعمال خوارزمية الصندوق الكامل هو 5 رفوف.
21	الأطوال مرتبة تنازليًا: 75 70 60 50 35 20 20 20 $B_1: 75, 20$ $B_2: 70, 20$ $B_3: 60, 35$ $B_4: 50, 20$ عدد الألواح اللازمة باستعمال خوارزمية الملاءمة الأولى المتناقصة هو 4 ألواح. التكلفة الكلية لصنع الخزانة باستعمال خوارزمية الملائمة الأولى المتناقصة هي: $4 \times 3 = 12\ JD$ الكمية المهدورة من الخشب هي: $400 - 350 = 50\ cm$

22	$B_1: 75, 70$ $B_2: 60, 50, 35$ $B_3: 20, 20, 20$ عدد الألواح اللازمة باستعمال خوارزمية الملاءمة الأولى المتناقصة هو 3 ألواح. التكلفة الكلية لصنع الخزانة باستعمال خوارزمية الملاءمة الأولى المتناقصة هي: $3 \times 4 = 12\ JD$ الكمية المهدورة من الخشب هي: $3 \times 150 - 350 = 100\ cm$
23	التكلفة بالطريقتين متساوية.
24	أقل تكلفة لصنع الخزانة هي $11\ JD$ ، وذلك باستعمال لوحين اثنين (الأول والثاني) طول كل منهما $1.5\ m$ والثالث طوله $1\ m$ بالتوزيع الآتي: $B_1: 75, 70$ $B_2: 60, 50, 35$ $B_3: 20, 20, 20$
25	$B_1: 24, 14, 8$ $B_2: x, 19, 6$ $B_3: 25, 17$ $B_4: 9$ عدد الحاويات اللازمة باستعمال خوارزمية الملاءمة الأولى هو 4 حاويات.
26	الكتل مرتبة تنازليًا: $25, 24, x, 19, 17, 14, 9, 8, 6$ الطريقة الأولى: إذا كانت $x = 23$ $B_1: 25, 24$ $B_2: 23, 19, 8$ $B_3: 17, 14, 9, 6$ عدد الحاويات اللازمة باستعمال خوارزمية الملاءمة الأولى المتناقصة هو 3 حاويات. الطريقة الثانية: إذا كانت $19 < x < 23$ $B_1: 25, 24$ $B_2: x, 19, 9$ $B_3: 17, 14, 8, 6$ عدد الحاويات اللازمة باستعمال خوارزمية الملاءمة الأولى المتناقصة هو 3 حاويات.

27	قيمة x في الطريقة الأولى هي $x = 23$ قيم x في الطريقة الثانية هي $22, 21, 20$

الدرس الثالث: المخططات

أتحقق من فهمي صفحة 85

a

نعم، لأنه يحتوي على رؤوس، وعلى حافات بين هذه الرؤوس.

b

تمثل الرؤوس المحطات أو المطارات التي ستهبط فيها الطائرات خلال رحلتها، وتمثل الحافات مسارات الطائرة في الجو.

c

المحطات التي ستمر بها الطائرة من الرأس M_1 إلى الرأس M_6 هي:

M_2 و M_3 و M_4

أو M_4 و M_5

(توجد عدة حلول)

أتحقق من فهمي صفحة 86

a

الزمن الذي تستغرقه السيارة في قطع المسار المباشر بين المدينة B والمدينة E هو: 3 ساعات

b

المسار	الزمن المُستغرق في المسار
ABCF	$4+3+2=9\,h$
ABEF	$4+3+1=8\,h$
ADEF	$2+3+1=6\,h$
ADEBCF	$2+3+3+3+2=13\,h$

أقل زمن تستغرقه السيارة في الوصول من المدينة A إلى المدينة F هو 6 ساعات متبعة المسار ADEF

أتحقق من فهمي صفحة 88

a

مجموعة الرؤوس هي: (A, B, C, D, E)

مجموعة الحافات هي: (AB, BC, CD, DE, BE, CE)

b

الرأس	الدرجة	نوع الدرجة
A	1	فردية
B	3	فردية
C	3	فردية
D	2	زوجية
E	3	فردية

c

مجموعة الدرجات للمخطط: $\deg G = (1,2,3,3,3)$

أتحقق من فهمي صفحة 90

للمخطط 7 حافات، إذن، مجموع درجات رؤوسه يساوي:

a $$\sum_{k=1}^{6} \deg V_k = 2 \times 7 = 14$$

b
$$\sum_{k=1}^{n} \deg V_k = 2E$$
$$x + x^2 + 2 + 3x - 1 + 3x + 2x + 1 = 2(6)$$
$$x^2 + 9x + 2 = 12$$
$$x^2 + 9x - 10 = 0$$
$$(x + 10)(x - 1) = 0$$
$$x = -10 \ , \quad x = 1$$

بما أن x يمثل درجة أحد الرؤوس، فإنه من غير الممكن أن يكون x سالبًا. إذن: $x = 1$

أتحقق من فهمي صفحة 92

ممشى لا يمثل ممرًا: VWZSWV

ممر لا يمثل طريقًا: YXVWSX

طريق: ZSWV

دارة: XYSX

دارة هاملتون: XYSZWVX

دارة أويلر: لا يمكن إيجاد دارة أويلر في هذا المخطط؛ وذلك لوجود رؤوس درجتها فردية في المخطط.

أتدرب وأحل المسائل صفحة 92

1 نعم، لأنه يحتوي على رؤوس، وعلى حافات بين بعض هذه الرؤوس.

2 تمثل الرؤوس أسماء مجموعة من الفتيات اللواتي تربطهن علاقة صداقة على أحد مواقع التواصل الاجتماعي.
وتمثل الحافات روابط الصداقة بين هؤلاء الفتيات.

3 لانا لها 3 صديقات

4 الصديقات المشتركات بين عبير ودانية هما: نور وهديل.

5 $190 + 126 =$ JD 316

6	<table><tr><th>المسار</th><th>تكلفة تنقل المندوب من B إلى D</th></tr><tr><td>BD</td><td>JD 155</td></tr><tr><td>BCD</td><td>$126 + 179 =$ JD 305</td></tr><tr><td>BAD</td><td>$190 + 157 =$ JD 347</td></tr><tr><td>BCAD</td><td>$126 + 124 + 157 =$ JD 307</td></tr><tr><td>BACD</td><td>$190 + 124 + 179 =$ JD 493</td></tr></table> أقل تكلفة للذهاب من المحافظة B إلى المحافظة D هي 155 دينارًا على المسار المباشر BD
7	مجموعة الرؤوس هي: (A, B, C, D, E, F) مجموعة الحافات هي: $(AB, AC, AE, AF, BF, CE, DE, DF, FE)$
8	<table><tr><th>الرأس</th><th>الدرجة</th><th>نوع الدرجة</th></tr><tr><td>A</td><td>4</td><td>زوجية</td></tr><tr><td>B</td><td>2</td><td>زوجية</td></tr><tr><td>C</td><td>2</td><td>زوجية</td></tr><tr><td>D</td><td>2</td><td>زوجية</td></tr><tr><td>E</td><td>4</td><td>زوجية</td></tr><tr><td>F</td><td>4</td><td>زوجية</td></tr></table>
9	مجموعة الدرجات للمخطط: $\deg = (2,2,2,4,4,4)$
10	للمخطط 15 حافة، إذن، مجموع درجات رؤوسه يساوي: $\sum_{k=1}^{6} \deg V_k = 2 \times 15 = 30$

11	$\sum_{k=1}^{n} \deg V_k = 2E$ $x + 2x + x^2 + 3 + x + 1 + 2x + 1 = 2(6)$ $x^2 + 6x + 5 = 12$ $x^2 + 6x - 7 = 0$ $(x + 7)(x - 1) = 0$ $x = -7 \quad , \quad x = 1$ بما أن x يمثل درجة أحد الرؤوس، فإنه من غير الممكن أن يكون x سالبًا. إذن: $x = 1$
12	مجموعة الرؤوس هي: (P, Q, R, S, T, U) مجموعة الحافات هي: $(PQ, PU, PU, UQ, UT, QR, RT, RS, TS, SS)$
13	للمخطط 10 حافات، إذن، مجموع درجات رؤوسه يساوي: $\sum_{k=1}^{6} \deg V_k = 10 \times 2 = 20$
14	ممشى لا يمثل ممرًا: STRQUTS ممر لا يمثل طريقًا: PQRSTUQ طريق: RST دارة: PUQP دارة هاملتون: PQRSTUP دارة أويلر: لا يمكن إيجاد دارة أويلر في هذا المخطط؛ وذلك لوجود رؤوس درجتها فردية في المخطط.
15	ممشى لا يمثل ممرًا: GBCFBG
16	ممر لا يمثل طريقًا: HGBFCBA
17	خمسة طرق من B إلى D: BCD BFCD BFED BGFCD BGFED
18	دارة: IJHI

19

المسار	طول المسار من A إلى Z
ABDZ	$2 + 5 + 2 = 9\ km$
ABEZ	$2 + 2 + 4 = 8\ km$
ABDEZ	$2 + 5 + 1 + 4 = 12\ km$
ABEDZ	$2 + 2 + 1 + 2 = 7\ km$
ACEZ	$3 + 5 + 4 = 12\ km$
ACEDZ	$3 + 5 + 1 + 2 = 11\ km$
ACEBDZ	$3 + 5 + 2 + 5 + 2 = 17\ km$
ACEBDEZ	$3 + 5 + 2 + 5 + 1 + 4 = 20\ km$

طول أقصر مساربين المنطقة A والمنطقة Z هو 7 km وهو المسار ABEDZ

20

مثال على دارة: BDEB

طول هذه الدارة هو: $5 + 1 + 2 = 8\ km$

21

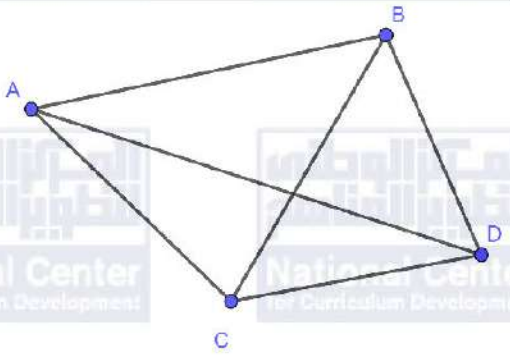
مثال على دارة هاملتون: ACEZDBA

طول هذه الدارة هو: $3 + 5 + 4 + 2 + 5 + 2 = 21\ km$

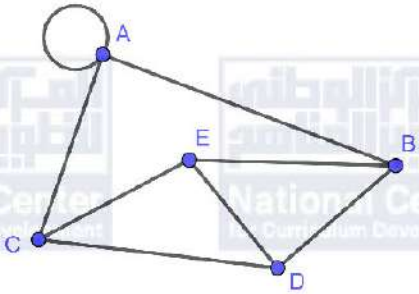
22

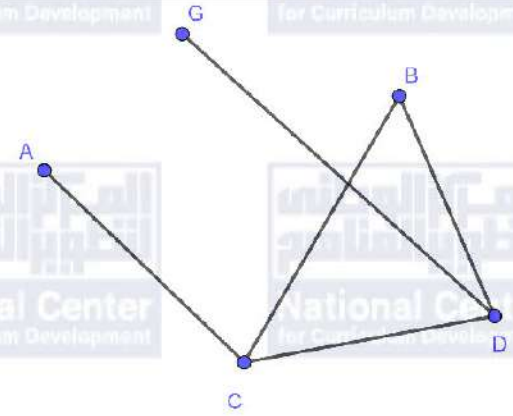
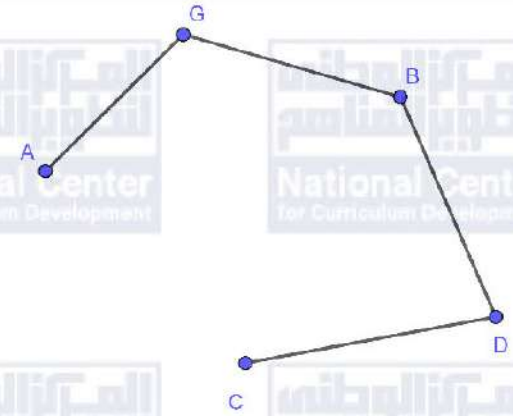
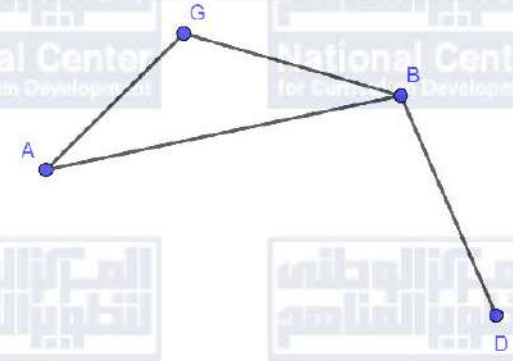
جميع الرؤوس في هذا المخطط درجتها فردية، لذا لا يمكن إيجاد دارة أويلر.

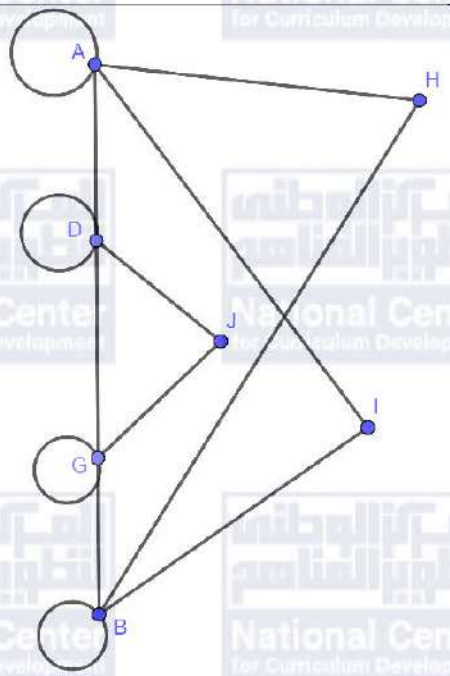
23



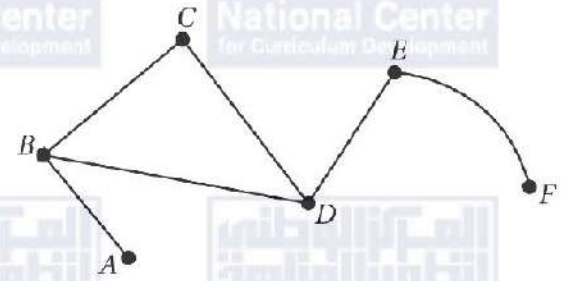
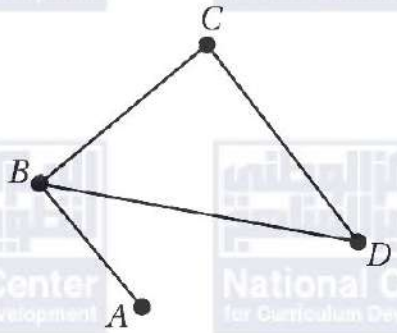
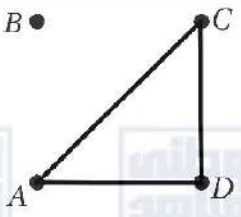
24



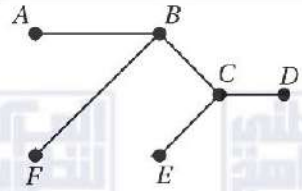
25	
26	
27	

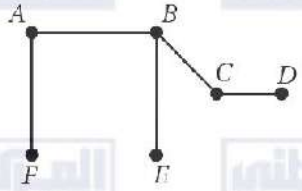
28	
29	دارة هاملتون: XYTZWRSX
30	دارة أويلر: XYSTYZTRZWRSX

الدرس الرابع: أنواع خاصة من المخططات

	أتحقق من فهمي صفحة 97
a	المخطط ليس بسيطًا، لأنه يحتوي حافات متعددة
b	نعم، لأنه يمكن إيجاد طريق يصل بين كل رأسين من رؤوسه.
c	 
	أتحقق من فهمي صفحة 98
a	المخطط الكامل من بين هذه المخططات هو المخطط D، لأن كل رأسين من رؤوسه متصلان بحافة واحدة فقط. ويرمز إلى هذا المخطط بالرمز K_5. أما المخططات A و B و C فهي غير كاملة لأن فيها رؤوسًا غير متصلة بحافات.
b	

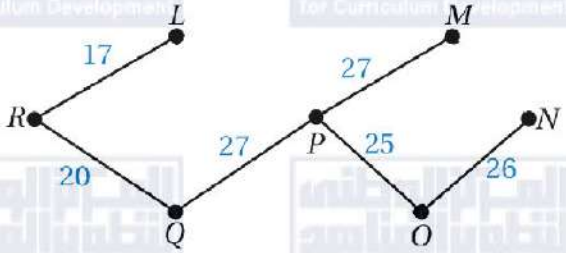
أتحقق من فهمي صفحة 100





أتحقق من فهمي صفحة 102

a



الحافات التي أضيفت بالترتيب هي: LR,RQ,QP,PO,OM,PM

b

أقل طول من الأنابيب يلزم لربط جميع المحطات في المدينة هو:

$$17 + 20 + 27 + 25 + 26 + 27 = 142\ km$$

أتحقق من فهمي صفحة 103

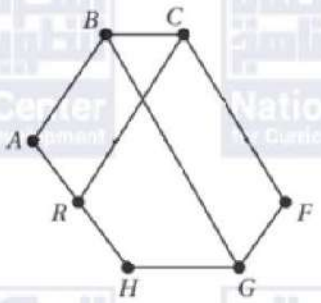
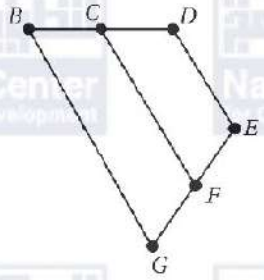
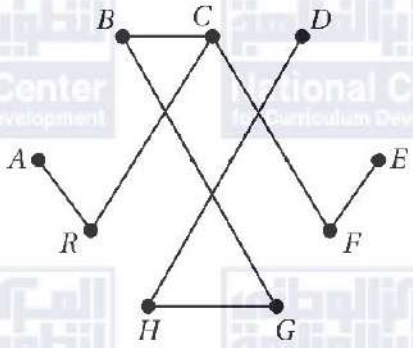
a

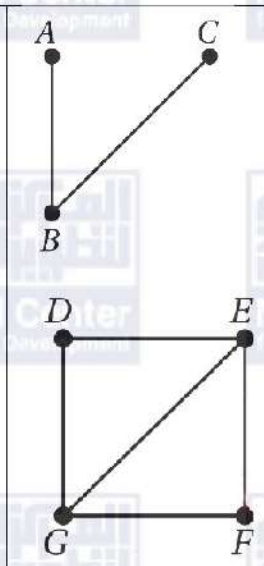
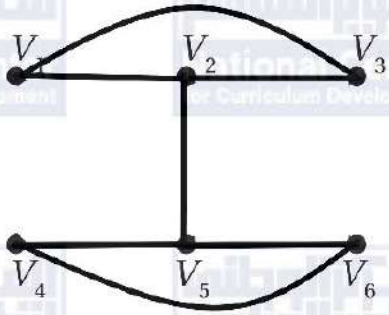
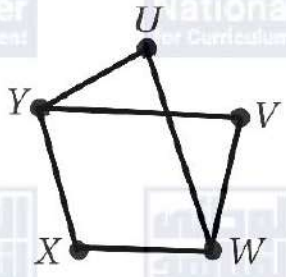
$$\begin{array}{c} \\ V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} V_1 & V_2 & V_3 & V_4 & V_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

b

$$\begin{array}{c} \\ V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} V_1 & V_2 & V_3 & V_4 & V_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} - & 10 & - & 19 & - \\ 10 & - & 18 & - & - \\ - & 18 & - & 12 & - \\ 19 & - & 12 & - & 14 \\ - & - & - & 14 & - \end{bmatrix} \end{array}$$

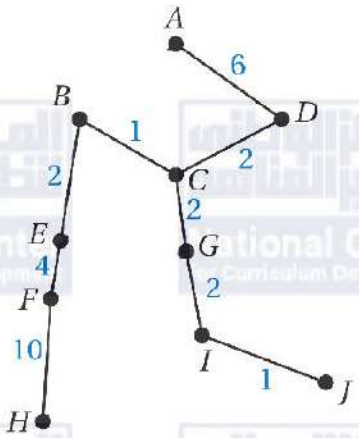
أتدرب وأحل المسائل صفحة 104

1	نعم، المخطط بسيط لأنه لا يحوي حلقات ولا حواف متعددة.
2	نعم، لأنه يمكن إيجاد طريق يصل بين كل رأسين من رؤوسه.
3	هذا المخطط غير كامل، لأن بعض رؤوسه غير متصلة بحواف.
4	 
5	
6	نعم، المخطط بسيط لأنه لا يحوي حلقات ولا حواف متعددة.
7	لا، لأنه لا يوجد طريق يصل بين بعض رؤوسه مثل C، وD.

8	
9	المخطط الكامل من بين هذه المخططات هو المخطط A، لأن كل رأسين من رؤوسه متصلان بحافة واحدة فقط. ويرمز إلى هذا المخطط بالرمز K_4. أما المخططان D و C فهما غير كاملين لأن فيهما رؤوسًا غير متصلة بحافات. والمخطط B غير كامل لأنه غير بسيط لاحتوائه على حلقات.
10	
11	

إجابة ممكنة:

12



الحافات التي أضيفت بالترتيب هي: JI, IG,GC,CD,DA,CB,BE,EF,FH

13

أقل تكلفة تلزم لربط جميع الحواسيب في المكتبة هو:

$$(1+2+2+2+6+1+2+4+10)\times 3 = 90\ JD$$

14

$$\begin{array}{c} \\ V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} V_1 & V_2 & V_3 & V_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

15

$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} A & B & C & D \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

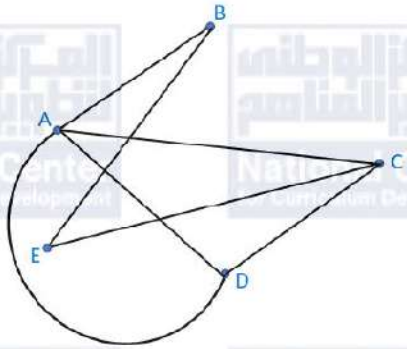
16

$$\begin{array}{c} \\ F \\ G \\ H \\ M \\ N \\ S \\ W \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} F & G & H & M & N & S & W \end{array} \\ \begin{bmatrix} - & 0.5 & - & - & - & - & - \\ 0.5 & - & 0.3 & - & 0.3 & - & 0.2 \\ - & 0.3 & - & - & 0.4 & - & - \\ - & - & - & - & 0.4 & 0.5 & - \\ - & 0.3 & 0.4 & 0.4 & - & 0.6 & 0.1 \\ - & - & - & 0.5 & 0.6 & - & - \\ - & 0.2 & - & - & 0.1 & - & - \end{bmatrix} \end{array}$$

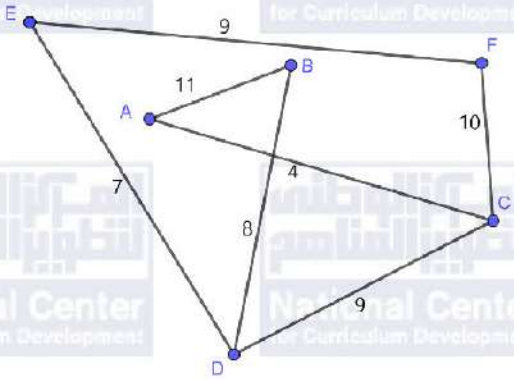
17

	A	B	C	D	E	F	G	H
A	–	4	–	7	–	–	–	–
B	4	–	1	–	–	–	–	2
C	–	1	–	–	–	–	–	1
D	7	–	–	–	6	–	–	–
E	–	–	–	6	–	5	–	3
F	–	–	–	–	5	–	5	2
G	–	–	–	–	–	5	–	–
H	–	2	1	–	3	2	–	–

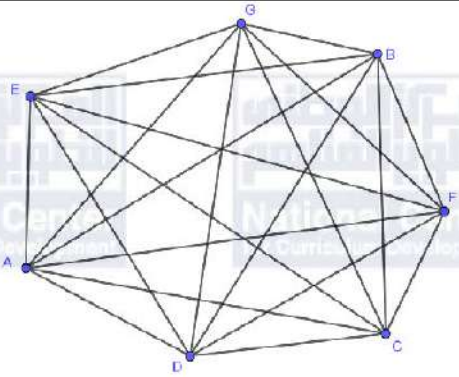
18

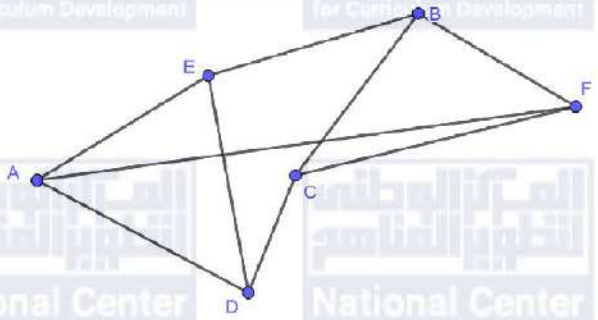
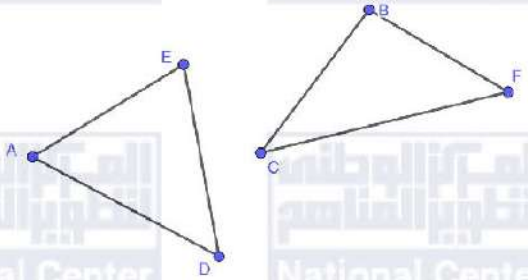


19

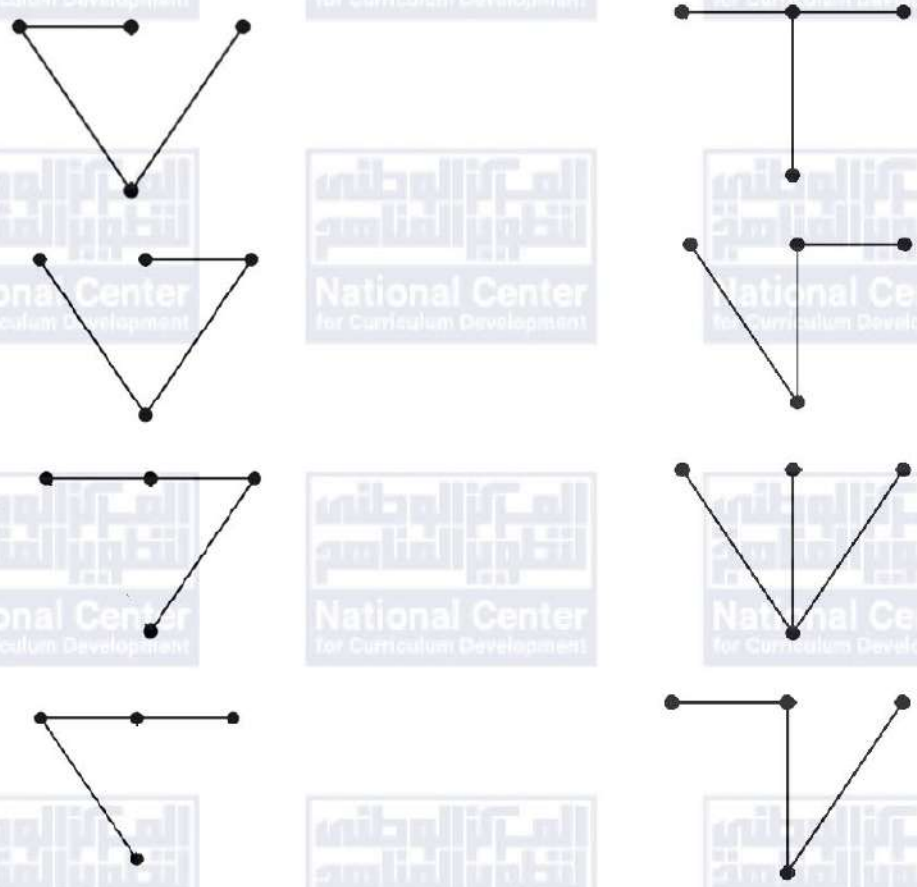


20



21	
22	
23	في ضوء تعريف المخطط المكمل للمخطط البسيط G أنه مخطط بسيط عدد رؤوسه مساوٍ لعدد رؤوس المخطط البسيط G، والذي تكون حافاته جميع الحافات الموجودة في K_n وغير الموجودة في المخطط فإن هذا يعني أن المخطط المكمل للمخطط الموجود في السؤال هو مخطط يحتوي على رؤوس المخطط الوارد في السؤال فقط ولا يحتوي أي حافات لأنه مخطط كامل، كما يظهر في الشكل الآتي:

24



الدرس الخامس: مخططات أويلر

أتحقق من فهمي صفحة 109

a

المخطط متصل، إذن يمكن البحث في نوعه (أويلري، شبه أويلري، أو غير ذلك)

نحدد درجة كل رأس من رؤوس المخطط، ونوعها.

الرأس	الدرجة	نوع الدرجة
A	4	زوجية
B	2	زوجية
C	4	زوجية
D	4	زوجية
E	4	زوجية
F	4	زوجية

بما أن جميع درجات رؤوس المخطط زوجية، فإن المخطط أويلري.

b

المخطط متصل، إذن يمكن البحث في نوعه (أويلري، شبه أويلري، أو غير ذلك)

نحدد درجة كل رأس من رؤوس المخطط، ونوعها.

الرأس	الدرجة	نوع الدرجة
M	3	فردية
N	4	زوجية
P	2	زوجية
Q	3	فردية
S	4	زوجية
T	2	زوجية

بما أنه يوجد رأسان فقط، درجة كل منهما فردية، فإن المخطط شبه أويلري.

أتحقق من فهمي صفحة 111

a

نلاحظ من المخطط أن درجة كل رأس من رؤوسه زوجية، ما يعني أن المخطط أويلري، ومنه، فإن طول أقصر مسار أويلري في المخطط يساوي الوزن الكلي للمخطط.

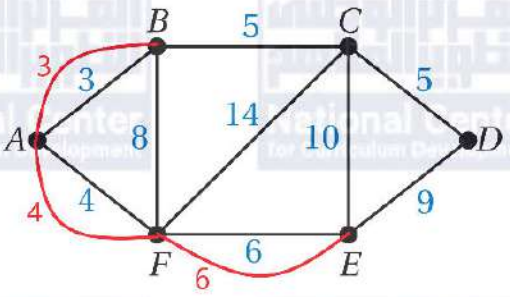
$$1 + 2 + 2 + 2 + 1 + 1 = 9$$

إذن، طول أقصر مسار أويلري في المخطط، يبدأ بالرأس D، وينتهي به، هو: 9 وحدات.

b

نلاحظ من المخطط وجود رأسين فقط، درجة كل منهما فردية، ما يعني أن المخطط شبه أويلري.

الرأسان اللذان درجتهما فردية هما: E و B، وأقصر طريق يصل بينهما هو: EFAB، لذا نكرر حافات هذا الطريق في المخطط.



نجد الوزن الكلي للمخطط الناتج:

$$4 + 4 + 3 + 3 + 5 + 14 + 8 + 10 + 6 + 6 + 5 + 9 = 77$$

إذن، طول أقصر مسار أويلري في المخطط، يبدأ بالرأس F، وينتهي به، هو: 77 وحدة.

أتحقق من فهمي صفحة 113

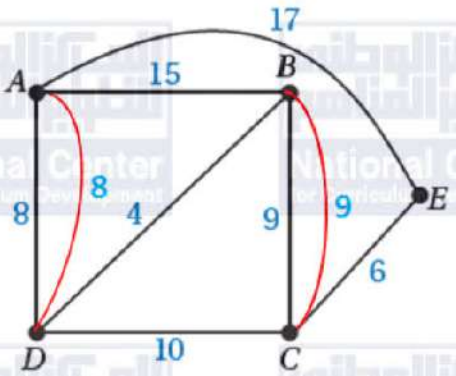
نلاحظ من المخطط وجود أكثر من رأسين درجة كل منهما فردية، ما يعني أن المخطط ليس أويلريًا ولا شبه أويلري.

الرؤوس ذات الدرجة الفردية في المخطط هي: A, B, C,D

نحدد الطرائق المختلفة لإضافة حافات بين الرؤوس ذات الدرجات الفردية لتصبح جميع الرؤوس ذات درجات زوجية، ثم نجد مجموع أوزان الحافات المضافة في كل طريقة.

	الحافات المضافة	مجموع أوزان الحافات المضافة
الطريقة الأولى	AB, DC	$12 + 10 = 22$
الطريقة الثانية	AD, BC	$8 + 9 = 17$
الطريقة الثالثة	AC, BD	$18 + 4 = 22$

الطريقة التي أضيفت فيها حافات إلى المخطط وزنها أقل ما يمكن هي الطريقة الثانية، لذا نكرر حافات هذه الطريقة.



ونجد الوزن الكلي للمخطط الناتج:

$$8 + 8 + 4 + 10 + 15 + 9 + 9 + 17 + 6 = 86$$

إذن، طول أقصر مسار يبدأ بالمنطقة A، وينتهي بها ويشمل كل حافة في المخطط هو: 86 km.

أتدرب وأحل المسائل صفحة 114

1

المخطط متصل، إذن يمكن البحث في نوعه (أويلري، شبه أويلري، أو غير ذلك)

نحدد درجة كل رأس من رؤوس المخطط، ونوعها.

الرأس	الدرجة	نوع الدرجة
A	2	زوجية
B	4	زوجية
C	4	زوجية
D	2	زوجية
E	3	فردية
F	4	زوجية
G	3	فردية

بما أنه يوجد رأسان فقط، درجة كل منهما فردية، فإن المخطط شبه أويلري.

2

المخطط متصل، إذن يمكن البحث في نوعه (أويلري، شبه أويلري، أو غير ذلك)

نحدد درجة كل رأس من رؤوس المخطط، ونوعها.

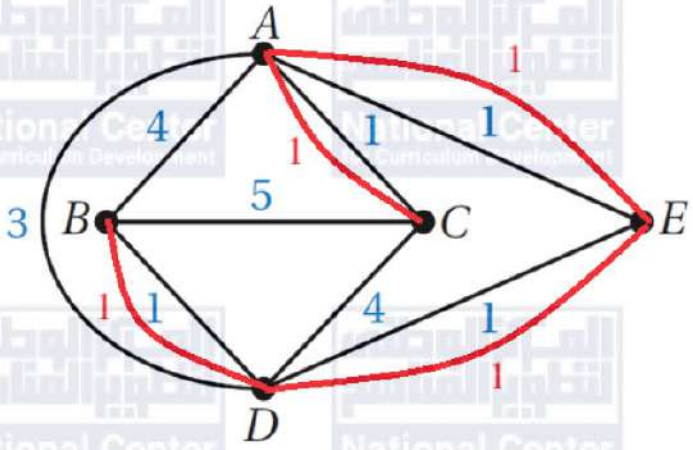
الرأس	الدرجة	نوع الدرجة
L	2	زوجية
M	3	فردية
N	3	فردية
P	2	زوجية
Q	2	زوجية
R	2	زوجية

بما أنه يوجد رأسان فقط، درجة كل منهما فردية، فإن المخطط شبه أويلري.

3	المخطط متصل، إذن يمكن البحث في نوعه (أويلري، شبه أويلري، أو غير ذلك) نحدد درجة كل رأس من رؤوس المخطط، ونوعها. بما أنه يوجد رأسان فقط، درجة كل منهما فردية، فإن المخطط شبه أويلري.
4	المخطط متصل، إذن يمكن البحث في نوعه (أويلري، شبه أويلري، أو غير ذلك) نحدد درجة كل رأس من رؤوس المخطط، ونوعها. بما أن جميع درجات رؤوس المخطط زوجية، فإن المخطط أويلري.

الرأس	الدرجة	نوع الدرجة
A	2	زوجية
B	3	فردية
C	3	فردية
D	2	زوجية
E	2	زوجية
F	2	زوجية

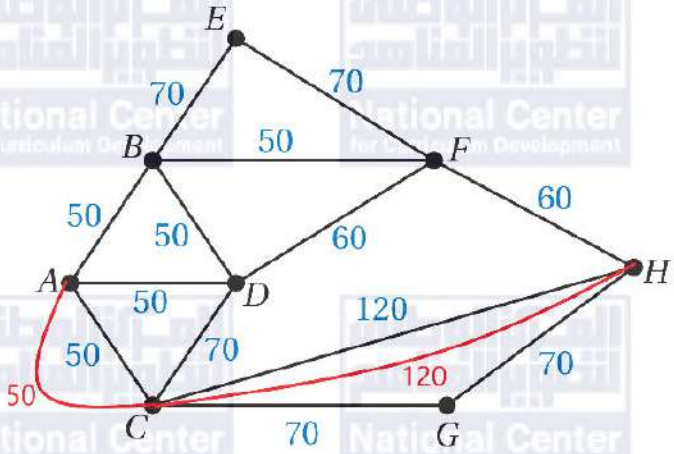
الرأس	الدرجة	نوع الدرجة
V_1	4	زوجية
V_2	2	زوجية
V_3	2	زوجية
V_4	4	زوجية
V_5	2	زوجية
V_6	2	زوجية
V_7	2	زوجية
V_8	2	زوجية
V_9	2	زوجية
V_{10}	2	زوجية

5	نلاحظ من المخطط أن درجة كل رأس من رؤوسه زوجية، ما يعني أن المخطط أويلري، ومنه، فإن طول أقصر مسار أويلري في المخطط يساوي الوزن الكلي للمخطط. $6 + 5 + 9 + 7 + 2 + 6 + 4 + 8 + 3 + 8 = 58$ إذن، طول أقصر مسار أويلري في المخطط، يبدأ بالرأس A، وينتهي به، هو: 58 وحدة.
6	نلاحظ من المخطط وجود رأسين فقط، درجة كل منهما فردية، ما يعني أن المخطط شبه أويلري. الرأسان اللذان درجتهما فردية هما: C و B، وأقصر طريق يصل بينهما هو: BDEAC، لذا أكرر حافات هذا الطريق في المخطط كما في الشكل المجاور.  نجد الوزن الكلي للمخطط الناتج: $1 + 1 + 3 + 1 + 4 + 1 + 4 + 5 + 4 = 24$ إذن، طول أقصر مسار أويلري في المخطط، يبدأ بالرأس B، وينتهي به، هو: 24 وحدة.

نلاحظ من المخطط وجود رأسين فقط، درجة كل منهما فردية، ما يعني أن المخطط شبه أويلري.

الرأسان اللذان درجتهما فردية هما: H و A، وأقصر طريق يصل بينهما هو: ACH، لذا نكرر حافات هذا الطريق في المخطط.

7



نجد الوزن الكلي للمخطط الناتج:

$$50 + 50 + 70 + 70 + 60 + 70 + 70 + 50 + 50 + 50 + 50 + 70 + 60 + 120 + 120 = 1010$$

إذن، طول أقصر مسار أويلري يبدأ بالمدينة A، وينتهي بها، هو: 1010 km

نلاحظ من المخطط وجود أكثر من رأسين درجة كل منهما فردية، ما يعني أن المخطط ليس أويلريًا ولا شبه أويلري.

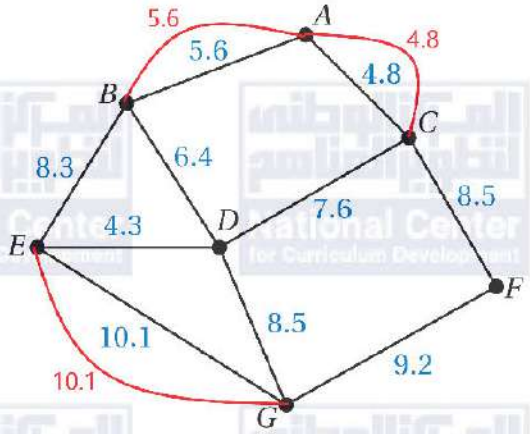
الرؤوس ذات الدرجة الفردية في المخطط هي: B, C, G,E

نحدد الطرائق المختلفة لإضافة حافات بين الرؤوس ذات الدرجات الفردية لتصبح جميع الرؤوس ذات درجات زوجية، ثم نجد مجموع أوزان الحافات المضافة في كل طريقة.

	الحافات المضافة	مجموع أوزان الحافات المضافة
الطريقة الأولى	BC, GE	$10.4 + 10.1 = 20.5$
الطريقة الثانية	BG, CE	$14.9 + 11.9 = 26.8$
الطريقة الثالثة	BE, CG	$8.3 + 16.1 = 24.4$

الطريقة التي أضيفت فيها حافات إلى المخطط وزنها أقل ما يمكن هي الطريقة الأولى، لذا نكرر حافات هذه الطريقة،

8



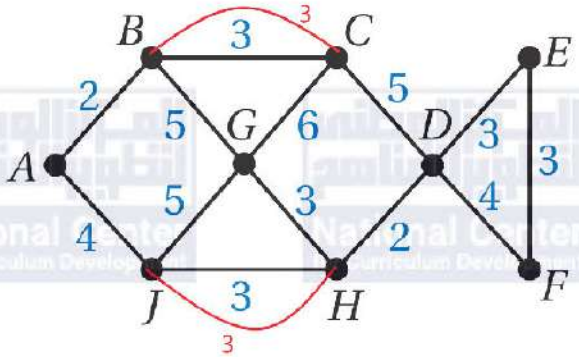
ونجد الوزن الكلي للمخطط الناتج:

$$4.8 + 4.8 + 8.5 + 9.2 + 10.1 + 10.1 + 8.3 + 5.6 + 5.6 + 6.4 + 4.3 + 7.6 + 8.5 = 93.8$$

إذن، طول أقصر مسار يمكن أن يمر به الفريق لإنجاز مهمته هو: 93.8 km

9	نلاحظ من المخطط وجود أكثر من رأسين درجة كل منهما فردية، ما يعني أن المخطط ليس أويلريًا ولا شبه أويلري. الرؤوس ذات الدرجة الفردية في المخطط هي: B, C, J,H نحدد الطرائق المختلفة لإضافة حافات بين الرؤوس ذات الدرجات الفردية لتصبح جميع الرؤوس ذات درجات زوجية، ثم نجد مجموع أوزان الحافات المضافة في كل طريقة. الطريقة التي أضيفت فيها حافات إلى المخطط وزنها أقل ما يمكن هي الطريقة الأولى، لذا نكرر حافات هذه الطريقة،
10	قول سلمى غير صحيح، لأن المخطط الكامل K_4 جميع رؤوسه درجتها فردية، فهو ليس أويلريًا. والصواب أن المخطط الكامل K_n حيث $n > 2$ يكون أويلريًا إذا كان n عددًا فرديًا.

	الحافات المضافة	مجموع أوزان الحافات المضافة
الطريقة الأولى	BC, JH	$3 + 3 = 6$
الطريقة الثانية	BJ, CH	$6 + 7 = 13$
الطريقة الثالثة	BH, CJ	$8 + 9 = 17$



ونجد الوزن الكلي للمخطط الناتج:

$2 + 3 + 3 + 5 + 3 + 3 + 4 + 2 + 3 + 3 + 4 + 5 + 5 + 6 + 3 = 54$

إذن، أقل تكلفة للوقود المستهلك على المسار الذي يبدأ بالمنطقة A وينتهي بها ويشمل كل حافة في المخطط هي: 54 JD

11	نعم، المخطط متصل، لأنه يوجد طريق يصل بين كل رأسين من رؤوسه. إذ توجد حافة تربط الرأس A بالرأس B، وتوجد حافة تربط الرأس B بالرأس C، وتوجد حافة تربط الرأس C بالرأس E، وتوجد حافة تربط الرأس E بالرأس D، وتوجد حافة تربط الرأس D بالرأس A. $\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} A & B & C & D & E \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$
12	نلاحظ أن مجموع كل صف يُعطي درجة رأس من الرؤوس. درجة الرأس A هي: 3 درجة الرأس B هي: 3 درجة الرأس C هي: 2 درجة الرأس D هي: 2 درجة الرأس E هي: 4 نلاحظ وجود رأسين فقط، درجة كل منهما فردية، ما يعني أن المخطط شبه أويلري.

الخطوة الأولى:

نعلم أن الأوزان المكتوبة على المخطط هي مسافات، والمسافات لا تكون سالبة، لذا فقيمة x يجب أن تحقق الشروط الآتية جميعها:

$x-3\geq 0$ و $x-1\geq 0$ و $2x-14\geq 0$ و $x-4\geq 0$ و $x-5\geq 0$ و $x\geq 0$

هذه المتباينات جميعها تتحقق عندما يكون $x\geq 7$.

الخطوة الثانية:

نلاحظ من المخطط وجود رأسين فقط، درجة كل منهما فردية، ما يعني أن المخطط شبه أويلري.

الرأسان اللذان درجتهما فردية هما: B و C، وأقصر طريق يصل بينهما هو: إما BC، أو BAC ، أو BDEC.

الحالة الأولى: BC هو أقصر طريق، إذن:

$x\leq x-5+x-4 \implies x\geq 9$

$x\leq x+1+0.5x+2x-14 \implies x\geq 5.2$

أي إن: $x\geq 9$

13

الحالة الثانية: BAC هو أقصر طريق، إذن:

$2x-9\leq x \implies x\leq 4.5$

$2x-9\leq x+1+0.5x+2x-14 \implies x\geq 2.67$

أي إن: $2.67\leq x\leq 4.5$ ، لكن هذا الشرط يخالف الشرط $x\geq 7$ ، فهذه الحالة مرفوضة.

الحالة الثالثة: BDEC هو أقصر طريق، إذن:

$x+1+0.5x+2x-14\leq x \implies x\leq 5.2$

$x+1+0.5x+2x-14\leq 2x-9 \implies x\leq 2.67$

أي إن: $x\leq 2.67$ ، لكن هذا الشرط يخالف الشرط $x\geq 7$ ، فهذه الحالة مرفوضة.

ومنه نستنتج أن الحالة الأولى هي الصحيحة.

نجد الوزن الكلي للمخطط قبل الإضافة:

$x-5+x-4+x+x+1+2x-14+0.5x+x-3+x-1+x=9.5x-26$

الوزن الكلي بعد الإضافة: $9.5x-26+x=10.5x-26$

$10.5x-26=100 \implies x=12km$

اختبار نهاية الوحدة صفحة 116

1

a	c	Is c ≤ 5?	Print
a	1	yes	a
	2	yes	a
	3	yes	a
	4	yes	a
	5	yes	a
	6	no	
Stop			

(b) مخرجات الخوارزمية هي: a, a, a, a, a

2

$B_1: 11, 2, 5$

$B_2: 15$

$B_3: 6, 7$

$B_4: 17$

$B_5: 12$

(c) عدد الصناديق اللازمة باستعمال خوارزمية الملائمة الأولى هو 5 صناديق.

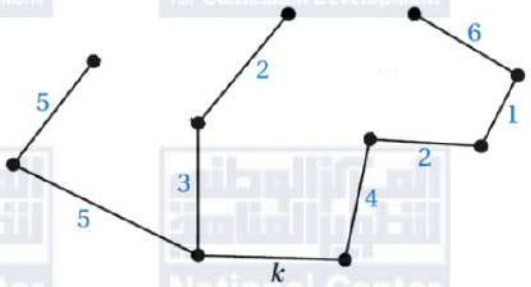
3 C

4 C

5 C

6 A

7 D



8 B

9

n	S	Is n=8?	Print S
0	0		
1	1	no	
2	9	no	
3	36	no	
4	100	no	
5	225	no	
6	441	no	
7	784	No	
8	1296	yes	1296
Stop			

مخرج الخوارزمية هو: 1296

10

مخرج الخوارزمية هو مجموع مكعبات الأعداد الكلية الأقل من 9

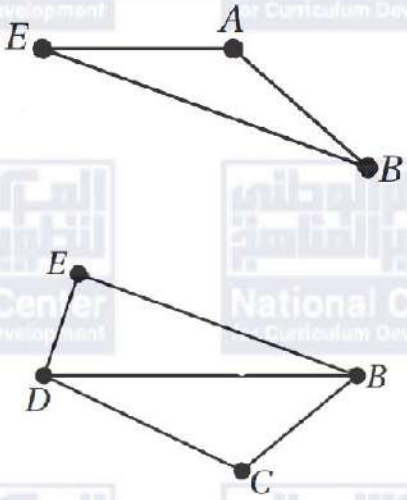
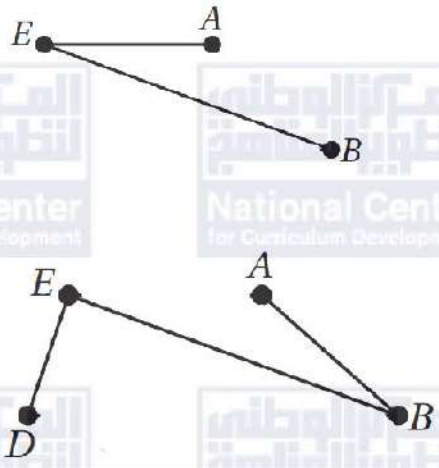
11

step	P	R	T	A	K	I	M	Print
1	400	5	3					
2				400	0			
3					1			
4						20		
5				420				
6 ⟶ 3					2			
4						21		
5				441				
6 ⟶ 3					3			
4						22.05		
5				463.05				
6 ⟶ 7							12.8625	
8								12.8625
9	Stop							

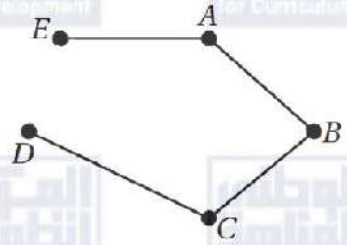
مخرج هذه الخوارزمية هو 12.8625

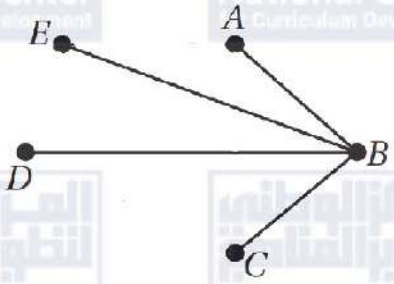
12	$B_1: 175, 105, 20$ $B_2: 135, 100, 60$ $B_3: 210, 70$ $B_4: 150, 125$ عدد الشاحنات اللازمة باستعمال خوارزمية الملائمة الأولى هو 4 شاحنات.
13	الكتل مرتبة تنازليًا: 210 175 150 135 125 105 100 70 60 20 $B_1: 210, 70, 20$ $B_2: 175, 125$ $B_3: 150, 135$ $B_4: 105, 100, 60$ عدد الشاحنات اللازمة باستعمال خوارزمية الملائمة الأولى المتناقصة هو 4 شاحنات.
14	$B_1: 210, 70, 20$ $B_2: 175, 125$ $B_3: 135, 105, 60$ $B_4: 150, 100$ عدد الشاحنات اللازمة باستعمال خوارزمية الصندوق الكامل هو 4 شاحنات.
15	$\frac{210 + 175 + 150 + 135 + 125 + 105 + 100 + 70 + 60 + 20}{300} = 3.83 \approx 4$ الحد الأدنى من الشاحنات اللازمة هو 4 شاحنات. جميع الخوارزميات أوصلتنا إلى الحل الأمثل وهو الحد الأدنى من الشاحنات.
16	$B_1: 2.6, 0.8, 1.2, 0.3$ $B_2: 2.1, 0.9, 1.7$ $B_3: 2.3, 1.8$ $B_4: 2.7$ عدد الصناديق اللازمة باستعمال خوارزمية الملائمة الأولى هو 4 صناديق. الارتفاع المهدور هو $4 \times 5 - 16.4 = 3.6$

17	2.7 2.6 2.3 2.1 1.8 1.7 1.2 0.9 0.8 0.3 B_1: 2.7 , 2.3 B_2: 2.6 , 2.1 , 0.3 B_3: 1.8 , 1.7 , 1.2 B_4: 0.9 , 0.8 عدد الصناديق اللازمة باستعمال خوارزمية الملائمة الأولى المتناقصة هو 4 صناديق. الارتفاع المهدور هو $4 \times 5 - 16.4 = 3.6$
18	B_1: 2.7 , 2.3 B_2: 2.6 , 2.1 , 0.3 B_3: 0.8 , 1.2 , 0.9 , 1.7 B_4: 1.8 عدد الصناديق اللازمة باستعمال خوارزمية الصندوق الكامل هو 4 صناديق. الارتفاع المهدور هو $4 \times 5 - 16.4 = 3.6$
19	$\frac{2.7 + 2.6 + 2.3 + 2.1 + 1.8 + 1.7 + 1.2 + 0.9 + 0.8 + 0.3}{5} = 3.28 \approx 4$ الحد الأدنى من الصناديق اللازمة هو 4 صناديق. جميع الخوارزميات أوصلتنا إلى الحل الأمثل و هو الحد الأدنى من الصناديق.
20	مجموعة الرؤوس هي: (A, B, C, D, E) مجموعة الحافات هي: $(AB, AC, AE, BD, BC, BE, CD, DE)$
21	<table><tr><th>الرأس</th><th>الدرجة</th><th>نوع الدرجة</th></tr><tr><td>A</td><td>3</td><td>فردية</td></tr><tr><td>B</td><td>4</td><td>زوجية</td></tr><tr><td>C</td><td>3</td><td>فردية</td></tr><tr><td>D</td><td>3</td><td>فردية</td></tr><tr><td>E</td><td>3</td><td>فردية</td></tr></table>
22	مجموعة الدرجات للمخطط: $Deg = (3,3,3,3,4)$

23	
24	ممشى لا يمثل ممرًا: ABCAEBA ممر لا يمثل طريقًا: ABCDBE طريق: ABE دارة: DBC دارة هاملتون: ABCDEA دارة أويلر: لا يمكن إيجاد دارة أويلر في هذا المخطط
25	المخطط متصل، لأنه يمكن إيجاد طريق يصل بين كل رأسين من رؤوسه.
26	المخطط بسيط، لأنه لا يحتوي حافات متعددة ولا حلقات.
27	

28

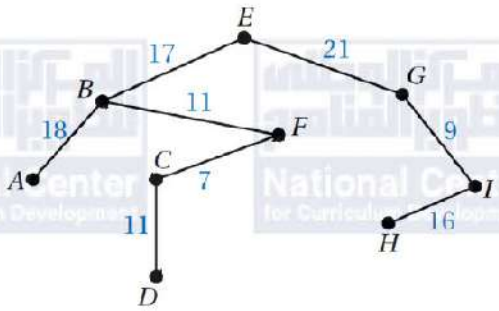




29 طول المسار المباشر بين المنزل E والمنزل D هو طول الحافة DE وهو $850\ m$

30 طول أقصر مسار بين المنزل B والمنزل D هو BCD وطوله $600 + 500 = 1100\ m$

31



الحافات التي أضيفت بالترتيب هي: HI,IG,GE,EB,BF,FC,CD,BA

32

$$\begin{array}{c} \\ V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} V_1 & V_2 & V_3 & V_4 & V_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

33

$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} A & B & C & D & E \end{array} \\ \begin{bmatrix} - & 5 & - & - & 10 \\ 5 & - & 8 & - & 2 \\ - & 8 & - & 1 & - \\ - & - & 1 & - & 5 \\ 10 & 2 & - & 5 & - \end{bmatrix} \end{array}$$

نلاحظ من المخطط وجود أكثر من رأسين درجة كل منهما فردية، ما يعني أن المخطط ليس أويلريًا ولا شبه أويلري.

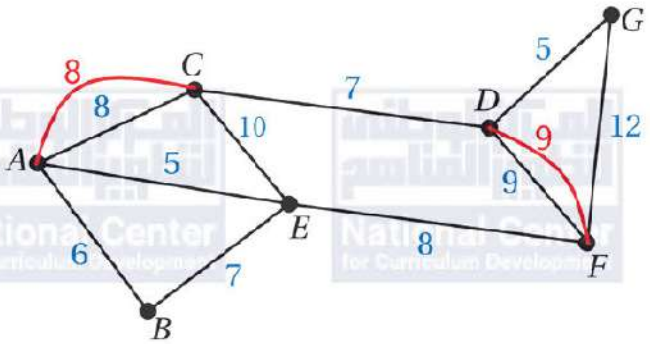
الرؤوس ذات الدرجة الفردية في المخطط هي: A,C,D,F

نحدد الطرائق المختلفة لإضافة حافات بين الرؤوس ذات الدرجات الفردية لتصبح جميع الرؤوس ذات درجات زوجية، ثم نجد مجموع أوزان الحافات المضافة في كل طريقة.

	الحافات المضافة	مجموع أوزان الحافات المضافة
الطريقة الأولى	AC, DF	$8 + 9 = 17$
الطريقة الثانية	AD, CF	$15 + 16 = 31$
الطريقة الثالثة	AF, CD	$13 + 7 = 20$

الطريقة التي أضيفت فيها حافات إلى المخطط وزنها أقل ما يمكن هي الطريقة الأولى، لذا نكرر حافات هذه الطريقة،

34



ونجد الوزن الكلي للمخطط الناتج:

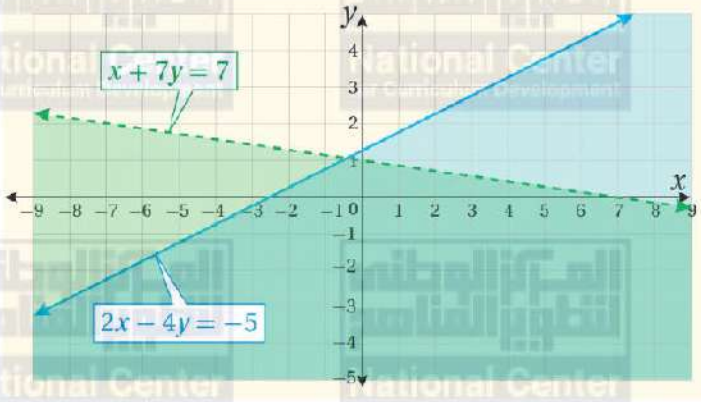
$$8 + 8 + 9 + 9 + 7 + 5 + 12 + 8 + 10 + 6 + 7 + 5 = 94$$

إذن، طول أقصر مسار أويلري يبدأ بالمنطقة A وينتهي بها هو: 94 كيلومترًا.

الوحدة الثالثة: البرمجة الخطية

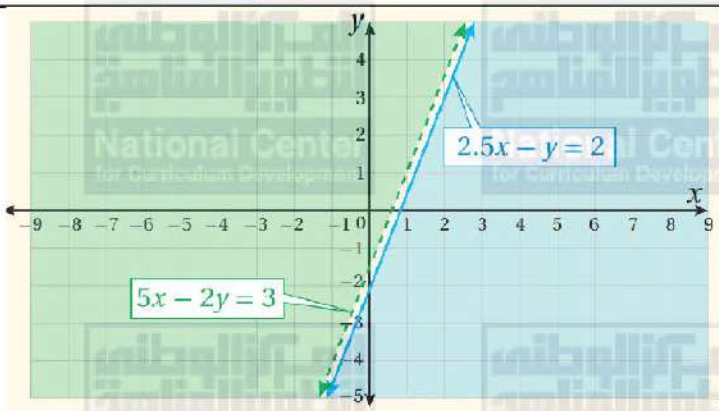
الدرس الأول: حل نظام متباينات خطية بمتغيرين بيانيا

أتحقق من فهمي صفحة 124



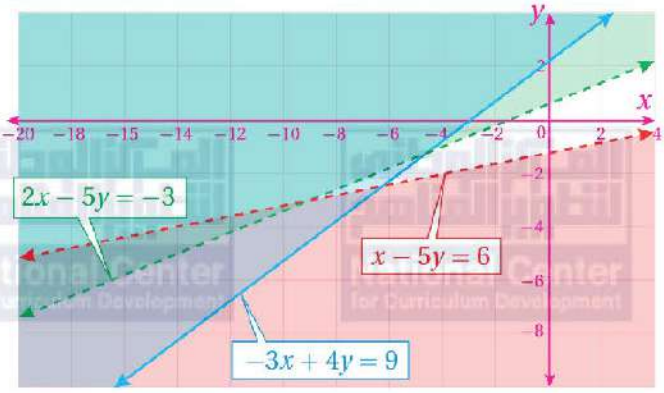
منطقة الحل هي المنطقة المظللة بمزيج من اللونين الأخضر والأزرق.

أتحقق من فهمي صفحة 124



مجموعة الحل هي Φ

أتحقق من فهمي صفحة 125



منطقة الحل هي المنطقة المحصورة بين المستقيمين $2x - 5y = -3, x - 5y = 6$ الواقعة على يسار النقطة (-9, -3).

أتحقق من فهمي صفحة 127

نفرض x عدد الغزلان، و y عدد الأيائل.

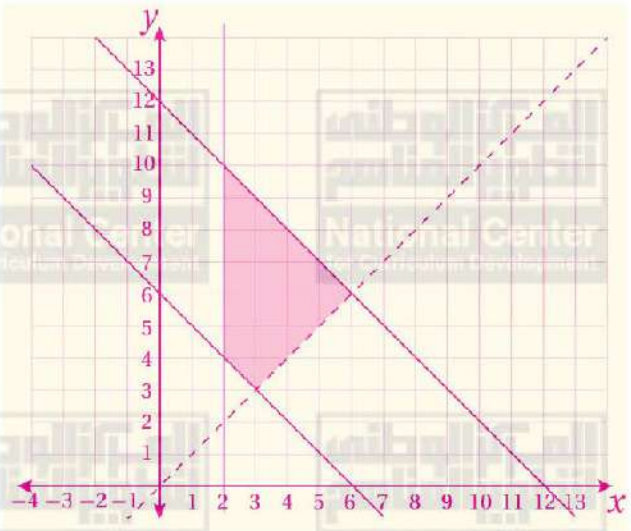
a

$x + y \geq 6$

$x + y \leq 12$

$x < y$

$x \geq 2$



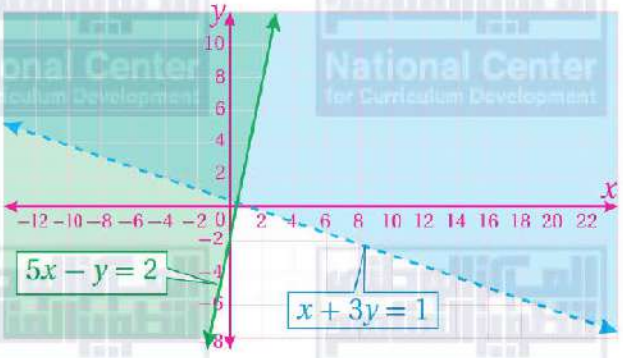
أقل عدد ممكن من الأيائل هو أقل قيمة صحيحة للمتغير y ضمن منطقة الحل، بحيث تكون قيمة x المقابلة لها صحيحة. و هذا يتحقق عندما $y = 4$

b

أكثر عدد ممكن من الغزلان هو 5

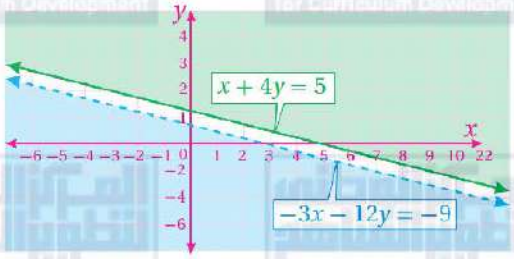
أتدرب وأحل المسائل صفحة 128

1



منطقة الحل هي المنطقة المظللة بمزيج من اللونين الأخضر والأزرق.

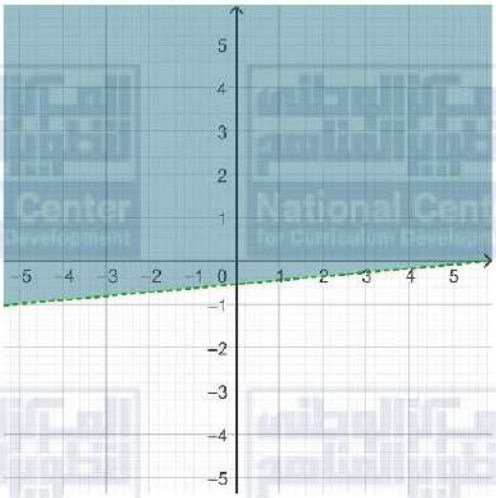
2



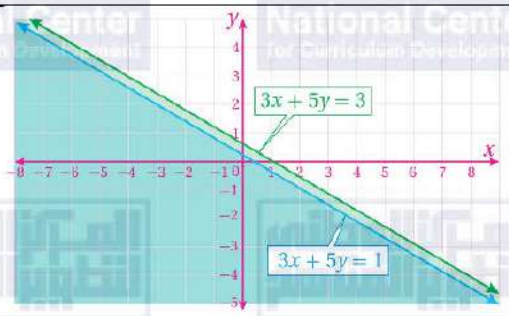
لا توجد منطقة مشتركة، إذن لا يوجد حل للنظام.

المتباينتان هما نفس المتباينة، فالحل هو المنطقة المظللة.

3



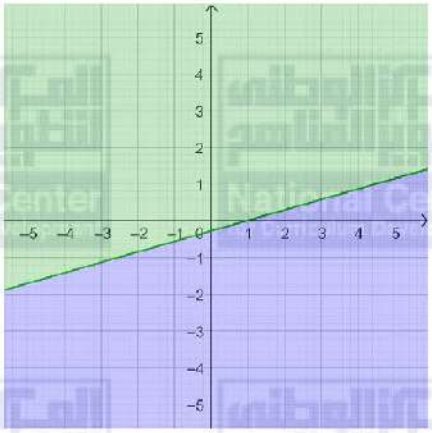
4

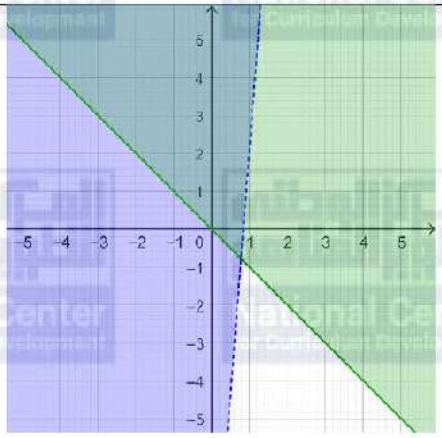
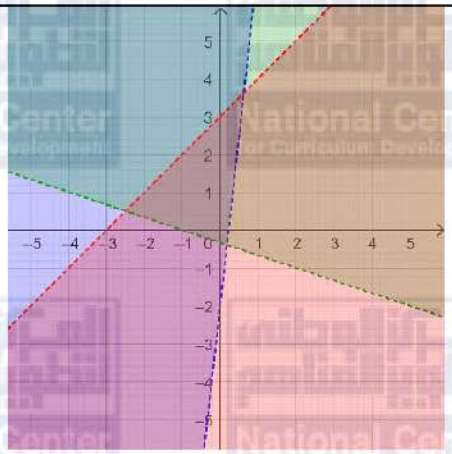
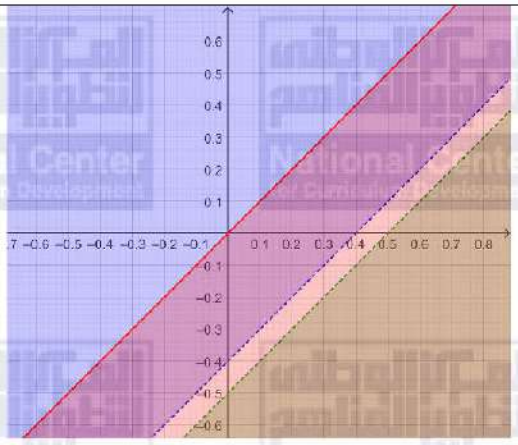


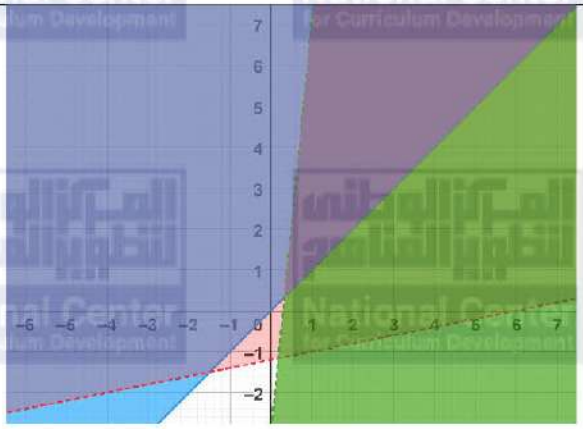
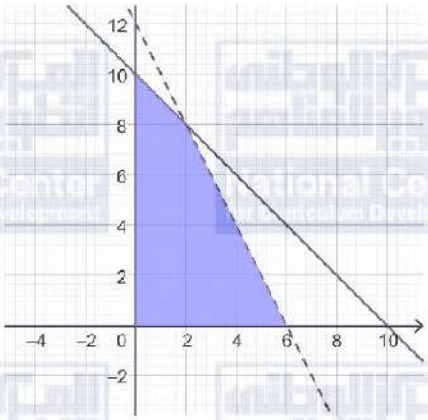
منطقة الحل هي المنطقة المظللة بمزيج من اللونين الأخضر والأزرق.

لا يوجد حل لهذا النظام، لأنه لا توجد منطقة مشتركة.

5



6	 منطقة الحل هي المنطقة المظللة بمزيج من اللونين الأخضر والأزرق.
7	 منطقة الحل هي المنطقة المظللة بمزيج من الألوان الثلاثة الأخضر والأزرق والزهري وهي المثلث الذي تحده المستقيمات الثلاث الظاهر في وسط الشكل.
8	 لا توجد منطقة مشتركة، إذن، لا حل لهذا النظام.

9	 منطقة الحل هي المنطقة المظللة بمزيج من الألوان الثلاثة الأخضر والأزرق والأحمر وهي المثلث الظاهر في أعلى يمين الرسم.
10	$x + y \leq 10$ $2x + y < 12$ $x \geq 0 , y \geq 0$  الحلول المحتملة لهذه المسألة هي: جميع الأزواج المرتبة الواقعة ضمن المنطقة المظللة، التي إحداثياها أعداد صحيحة غير سالبة، لأنها تمثل عدد أشخاص. قد يوجد على القارب 4 من البالغين و2 من الأطفال لأن النقطة (4, 2) تقع في منطقة الحل؛ أو 3 من البالغين و2 من الأطفال أو 4 أو 5 من الأطفال لأن النقاط (3, 5), (3, 4), (3, 2), واقعة في منطقة الحل، وهناك إجابات محتملة أخرى.

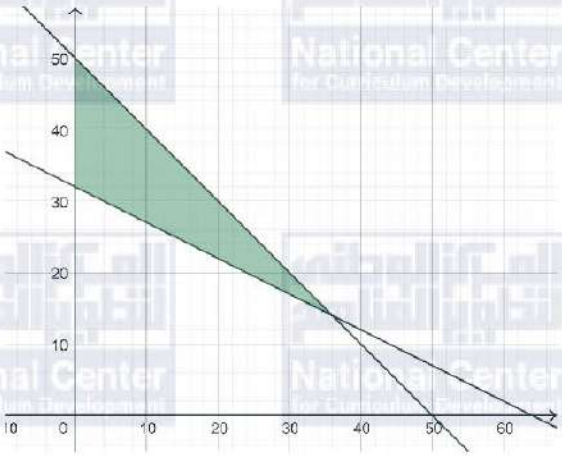
11

نفرض x عدد تذاكر الدرجة السياحية، y عدد تذاكر الدرجة الخاصة.

$$25x + 50y \geq 1600$$

$$x + y \leq 50$$

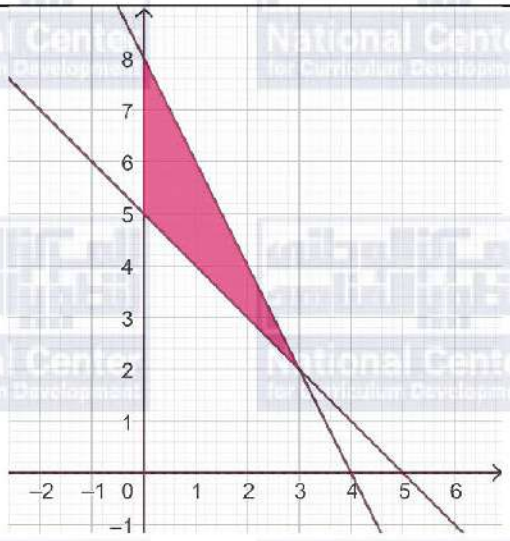
$$x \geq 0 , y \geq 0$$



الحلول المحتملة لهذه المسألة هي: جميع الأزواج المرتبة الواقعة ضمن المنطقة المظللة، التي إحداثياها أعداد صحيحة لأنها تمثل عدد تذاكر، مثل:

(10, 30), (10, 35),(10, 40), (15, 30), (15,35), (20, 25) وكثير غيرها.

12



حلول هذا النظام هي: (3,2), (2,4), (2,3), (1,6), (1,5), (1,4)

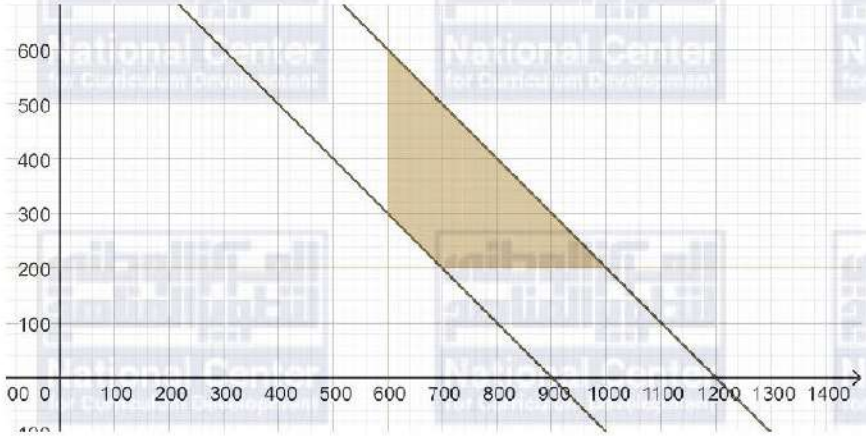
13

نفرض x مجموع الرياضيات، y مجموع اللغة الإنجليزية.

$x + y \geq 900$

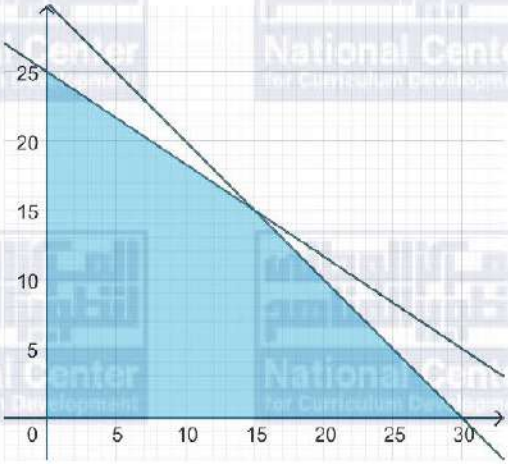
$x + y \leq 1200$

$x \geq 600, y \geq 200$



الحلول المحتملة لهذه المسألة هي: جميع الأزواج المرتبة الواقعة ضمن المنطقة المظللة، التي إحداثياها أعداد صحيحة من مضاعفات المئة، لأنها تمثل علامات، وهي:

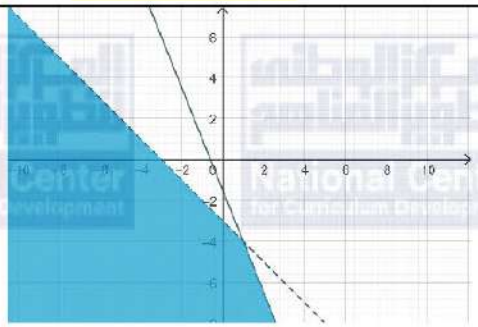
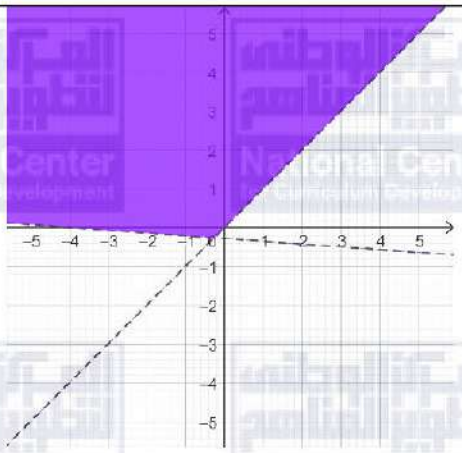
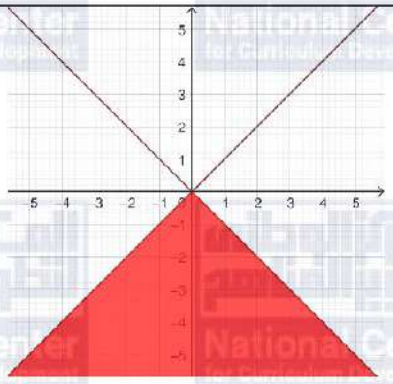
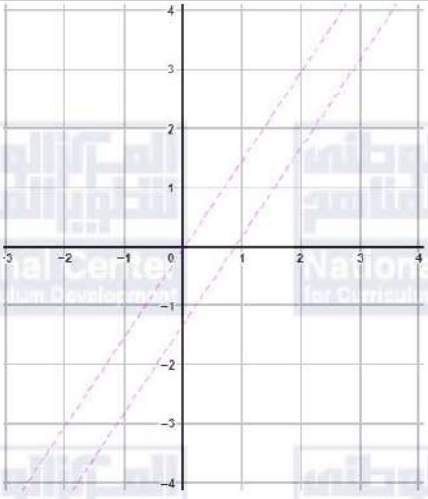
(600, 300), (600, 400), (600,500), (600,600), (700, 200), (700, 300), (700, 400), (700, 500), (800, 200), (800, 300), (800, 400), (900, 200), (900, 300), (1000, 200)

14	نفرض x عدد السيارات الصغيرة، y عدد السيارات الكبيرة. $x + y \leq 30$ $2x + 3y \leq 75$ $x \geq 0 , y \geq 0$  الحلول المحتملة لهذه المسألة هي: جميع الأزواج المرتبة الواقعة ضمن المنطقة المظللة، التي إحداثياها أعداد صحيحة لأنها تمثل عدد سيارات، مثل: (25, 5), (20, 10), (15, 15), (5, 21), (1, 24), (0, 25), (0, 20)، وكثير غيرها.
15	حل هذا النظام هو مجموعة النقاط الواقعة على المستقيم الحدودي الذي معادلته $2x + y = 7$
16	إجابة محتملة: $y - x \leq 0$ $y - 0.5x \geq 0$
17	إجابة محتملة: $y + x \leq 6$ $y + x > 6$

أجد معادلة المستقيمات التي تحد المنطقة المظللة. معادلة المستقيم الأفقي هي: $y = 6$. ومعادلة المستقيم الرأسي هي: $x = 5$. معادلة المستقيم المار بالنقطتين (5, 2), (4, 0) الذي ميله يساوي 2 هي: $y - 0 = 2(x - 4) \Rightarrow y - 2x = -8$ معادلة المستقيم المار بالنقطتين (4, 0), (0, 3) الذي ميله يساوي $\frac{-3}{4}$ هي: $y - 0 = \frac{-3}{4}(x - 4) \Rightarrow 4y + 3x = 12$ النقطة (2, 3) واقعة في منطقة الحل وبتعويضها في المعادلة $y - 2x = -8$ ينتج أن: $-8 = 2(2) - 3$ أو: $-8 = -1$ وهذا غير صحيح، والصحيح هو أن $-8 < -1$، فالمتباينة التي حدها المستقيم المتصل $y - 2x = -8$ هي: $y - 2x \geq -8$. وبتعويض (2, 3) في المعادلة $4y + 3x = 12$ ينتج أن: $4(3) + 3(2) = 12$ أو 18=12 وهذا غير صحيح، والصحيح هو أن $18 > 12$، فالمتباينة التي حدها المستقيم المتصل $4y + 3x = 12$ هي: $4y + 3x \geq 12$ ، كما نلاحظ أن x في منطقة الحل تنحصر بين صفر و خمسة، وأن y تنحصر بين صفر وستة، ولذا فإن نظام المتباينات الذي تمثل حله المنطقة المظللة في التمثيل البياني المعطى هو: $0 \leq y \leq 6$ $0 \leq x \leq 5$ $y - 2x \geq -8$ $3x + 4y \geq 12$	18

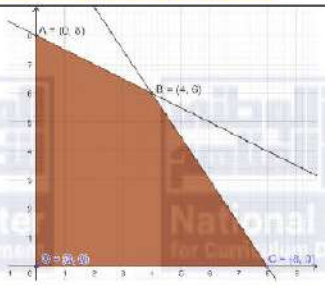
معمل جيوجبرا: تمثيل نظام متباينات خطية بمتغيرين بيانيا

أتدرب صفحة 131

1	
2	
3	
4	هذا الرسم جديد ليس لهذا النظام حل. 

الدرس الثاني: البرمجة الخطية

أتحقق من فهمي صفحة 133



رؤوس منطقة الحلول الممكنة	$P = 4x + 5y$
$A(0,8)$	$P = 4(0) + 5(8) = 40$
$O(0,0)$	$P = 4(0) + 5(0) = 0$
$B(4,6)$	$P = 4(4) + 5(6) = 46$
$C(8,0)$	$P = 4(8) + 5(0) = 32$

إذن، النقطة التي تجعل اقتران الهدف أكبر ما يمكن هي $(4,6)$.

أتحقق من فهمي صفحة 135

نفرض x عدد الخزائن من النوع A، y عدد الخزائن من النوع B.

$$x + y \leq 36$$
$$x \geq 3y$$
$$x \geq 0\,, y \geq 0$$
$$P = 35x + 45y$$

رؤوس منطقة الحلول الممكنة	$P = 35x + 45y$
$A(27,9)$	$P = 35(27) + 45(9) = 1350$
$O(0,0)$	$P = 35(0) + 45(0) = 0$
$C(36,0)$	$P = 35(36) + 45(0) = 1260$

إذن، لتحقيق أكبر ربح ممكن، على المشغل أن ينتج 27 خزانة من النوع A و9 خزائن من النوع B.

أتحقق من فهمي صفحة 137

نفرض x عدد العلب من النوع 1، y عدد العلب من النوع 2.

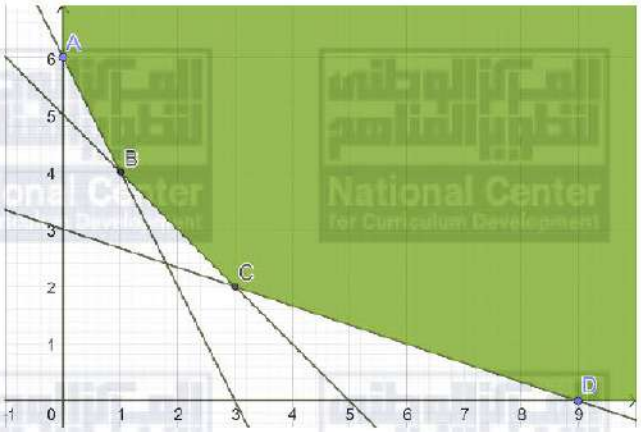
$60x + 60y \geq 300 \Rightarrow x + y \geq 5$

$12x + 6y \geq 36 \Rightarrow 2x + y \geq 6$

$10x + 30y \geq 90 \Rightarrow x + 3y \geq 9$

$x \geq 0 , y \geq 0$

$P = 0.25x + 0.3y$

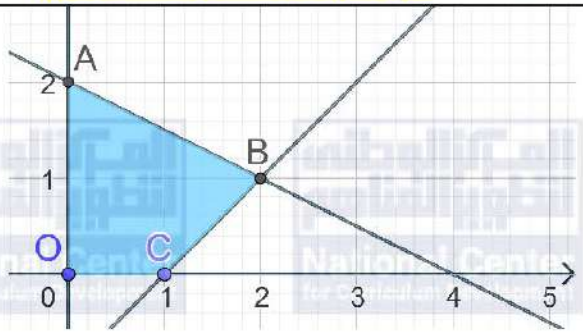


رؤوس منطقة الحلول الممكنة	$P = 0.25x + 0.3y$
$A(0,6)$	$P = 0.25(0) + 0.3(6) = 1.8$
$B(1,4)$	$P = 0.25(1) + 0.3(4) = 1.45$
$C(3,2)$	$P = 0.25(3) + 0.3(2) = 1.35$
$D(9,0)$	$P = 0.25(9) + 0.3(0) = 2.25$

إذن، لتحقيق الشروط بأقل تكلفة ممكنة، على الشخص أن يستهلك 3 علب من النوع 1 وعلبتين من النوع 2.

أتدرب وأحل المسائل صفحة 137

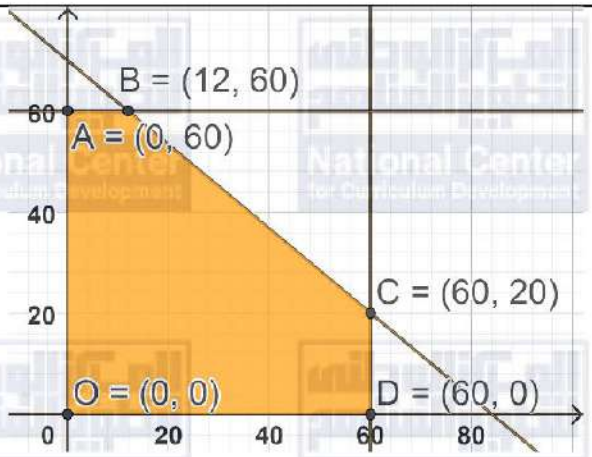
1



رؤوس منطقة الحلول الممكنة	$P = 4x + 3y$
$A(0,2)$	$P = 4(0) + 3(2) = 6$
$B(2,1)$	$P = 4(2) + 3(1) = 11$
$C(1,0)$	$P = 4(1) + 3(0) = 4$
$O(0,0)$	$P = 4(0) + 3(0) = 0$

إذن، النقطة التي تجعل اقتران الهدف أكبر ما يمكن هي $(2,1)$.

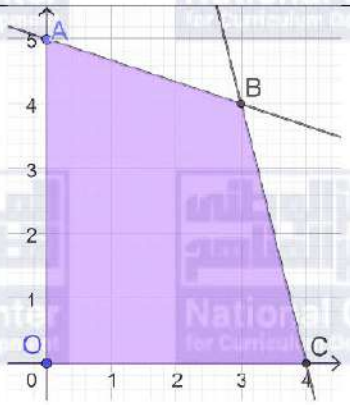
2



رؤوس منطقة الحلول الممكنة	$R = 10x + 7y$
$A(0,60)$	$R = 10(0) + 7(60) = 420$
$B(12,60)$	$R = 10(12) + 7(60) = 540$
$C(60,20)$	$R = 10(60) + 7(20) = 740$
$D(60,0)$	$R = 10(60) + 7(0) = 600$
$O(0,0)$	$R = 10(0) + 7(0) = 0$

إذن، النقطة التي تجعل اقتران الهدف أكبر ما يمكن هي $(60,20)$.

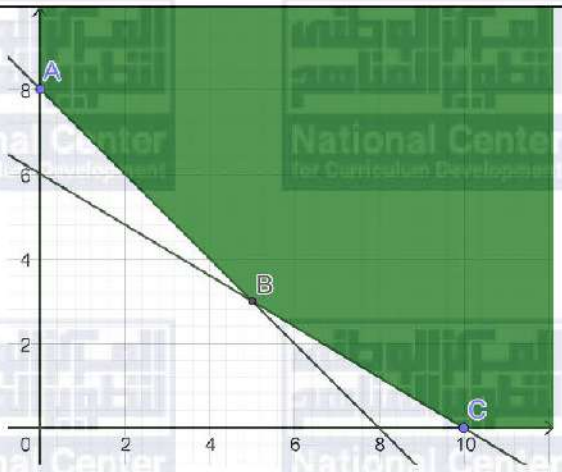
3



رؤوس منطقة الحلول الممكنة	$Z = 1.5x + y$
$A(0,5)$	$Z = 1.5(0) + (5) = 5$
$B(3,4)$	$Z = 1.5(3) + (4) = 8.5$
$C(4,0)$	$Z = 1.5(4) + (0) = 6$
$O(0,0)$	$Z = 1.5(0) + (0) = 0$

إذن، النقطة التي تجعل اقتران الهدف أكبر ما يمكن هي $(3,4)$.

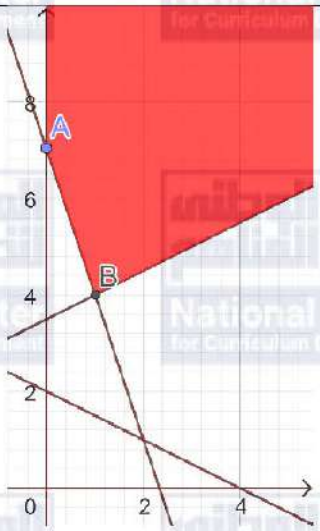
4



رؤوس منطقة الحلول الممكنة	$Q = 4x + 5y$
$A(0,8)$	$Q = 4(0) + 5(8) = 40$
$B(5,3)$	$Q = 4(5) + 5(3) = 35$
$C(10,0)$	$Q = 4(10) + 5(0) = 40$

إذن، النقطة التي تجعل اقتران الهدف أصغر ما يمكن هي $(5,3)$.

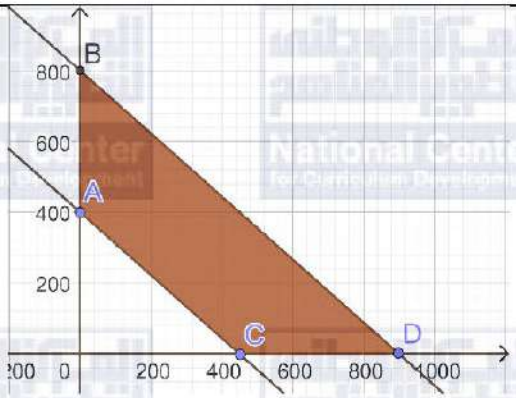
5



رؤوس منطقة الحلول الممكنة	$C = 8x + 4y$
$A(0,7)$	$C = 8(0) + 4(7) = 28$
$B(1,4)$	$C = 8(1) + 4(4) = 24$

إذن، النقطة التي تجعل اقتران الهدف أصغر ما يمكن هي $(1,4)$.

6



رؤوس منطقة الحلول الممكنة	$K = 25x + 35y$
$A(0,400)$	$K = 25(0) + 35(400) = 14000$
$B(0,800)$	$K = 25(0) + 35(800) = 28000$
$C(450,0)$	$K = 25(450) + 35(0) = 11250$
$D(900,0)$	$K = 25(900) + 35(0) = 22500$

إذن، النقطة التي تجعل اقتران الهدف أصغر ما يمكن هي $(450,0)$.

7

نفرض x كتلة السماد بالكيلوغرام من النوع A، y كتلة السماد بالكيلوغرام من النوع B.

$6x + 4y \geq 36$

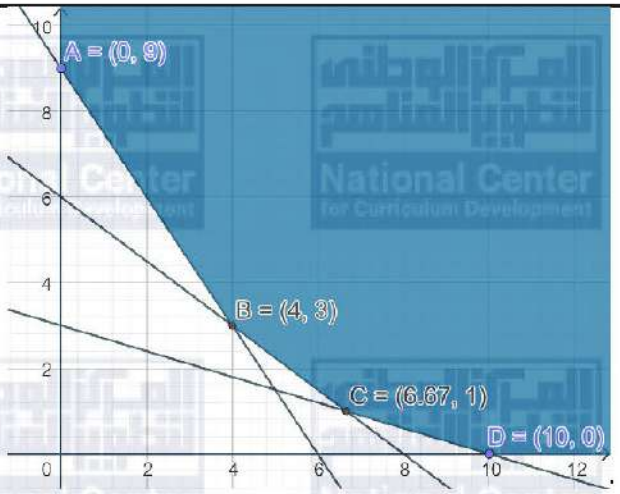
$3x + 4y \geq 24$

$3x + 10y \geq 30$

$x \geq 0 , y \geq 0$

$P = x + 1.5y$

8



9

رؤوس منطقة الحلول الممكنة	$P = x + 1.5y$
$A(0,9)$	$P = (0) + 1.5(9) = 13.5$
$B(4,3)$	$P = (4) + 1.5(3) = 8.5$
$C(6.67,1)$	$P = (6.67) + 1.5(1) = 8.17$
$D(10,0)$	$P = (10) + 1.5(0) = 10$

إذن، لتحقيق غايته بأقل تكلفة ممكنة ، على المزارع أن يشتري 6.67 كيلوغرامًا من النوع A وكيلوغرامًا واحدًا من النوع B.

نفرض x عدد الكتيبات، y عدد النشرات.

$3x + 2y \leq 600$

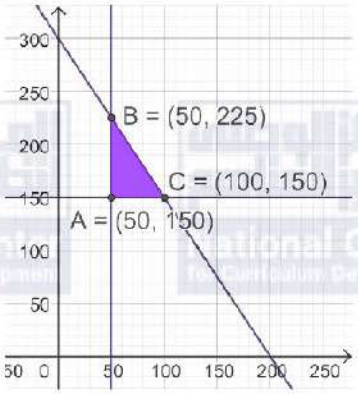
$x \geq 50$

$y \geq 150$

$x \geq 0 , y \geq 0$

$P = 0.2x + 0.1y$

10



رؤوس منطقة الحلول الممكنة	$P = 0.2x + 0.1y$
$A(50,150)$	$P = 0.2(50) + 0.1(150) = 25$
$B(50,225)$	$P = 0.2(50) + 0.1(225) = 32.5$
$C(100,150)$	$P = 0.2(100) + 0.1(150) = 35$

إذن، لتحقيق حاجته بأقل تكلفة ممكنة، يجب طباعة 50 كتيب و 150 نشرة.

11

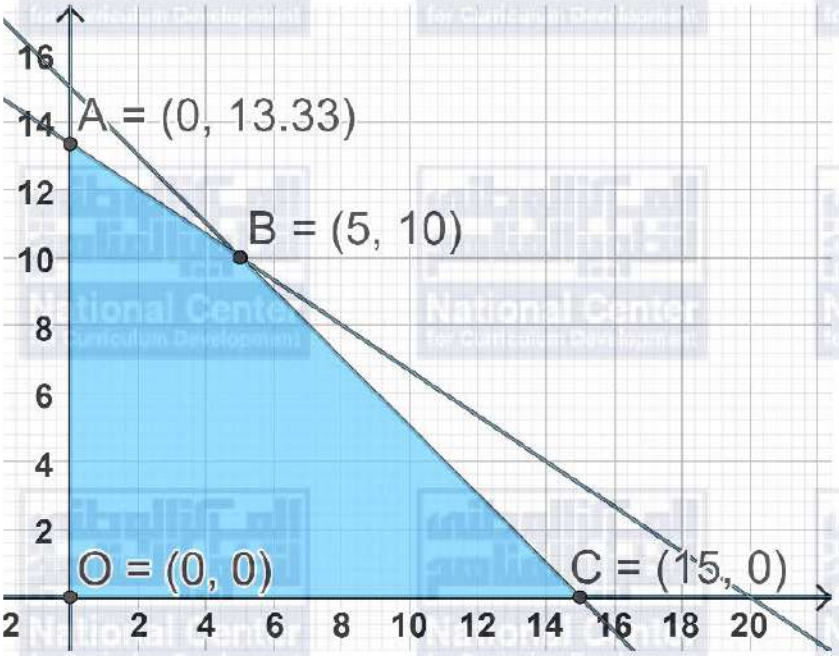
نفرض x عدد شتلات البندورة من النوع A، y عدد شتلات البندورة من النوع B.

$0.2x + 0.3y \leq 4$

$x + y \leq 15$

$x \geq 0 , y \geq 0$

$P = 4x + 5y$

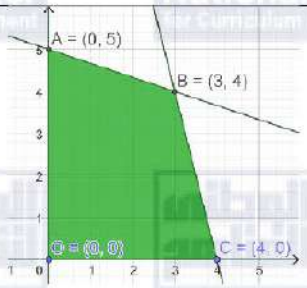


رؤوس منطقة الحلول الممكنة	$P = 4x + 5y$
$A(0,13.33)$	$P = 4(0) + 5(13.33) = 66.65$
$B(5,10)$	$P = 4(5) + 5(10) = 70$
$C(15,0)$	$P = 4(15) + 5(0) = 60$

إذن، لإنتاج أكبر كم ممكن من البندورة، يجب شراء 5 شتلات من النوع A و10 شتلات من النوع B.

12	<table><tr><td>رؤوس منطقة الحلول الممكنة</td><td>$P = 5x + 6y$</td></tr><tr><td>$A(0,45)$</td><td>$P = 5(0) + 6(45) = 270$</td></tr><tr><td>$B(30,45)$</td><td>$P = 5(30) + 6(45) = 420$</td></tr><tr><td>$C(60,20)$</td><td>$P = 5(60) + 6(20) = 420$</td></tr><tr><td>$D(60,0)$</td><td>$P = 5(60) + 6(0) = 300$</td></tr><tr><td>$O(0,0)$</td><td>$P = 5(0) + 6(0) = 0$</td></tr></table> أكبر قيمة ممكنة لاقتران الهدف هي: 420 عند جميع نقاط القطعة المستقيمة التي طرفاها B وC ؛ وذلك لأن هذه القطعة المستقيمة توازي المستقيم $5x + 6y = C$ حيث Cهي قيمة اقتران الهدف.
13	$G = a(2) + b(3) = 18$ $2a + 3b = 18$ يوجد لهذه المعادلة عدد لا نهائي من الحلول، منها: $(4.5,3), (1.5,5), (3,4), (6,2)$ لذلك يمكن أن يكون اقتران الهدف: $G = 6x + 2y, or\ G = 3x + 4y, or\ G = 1.5x + 5y$ وصور أخرى غيرها كثيرة.

14



رؤوس منطقة الحلول الممكنة	$D = 3x + ny$
$A(0,5)$	$D = 3(0) + n(5) = 5n$
$B(3,4)$	$D = 3(3) + n(4) = 9 + 4n$
$C(4,0)$	$D = 3(4) + n(0) = 12$
$O(0,0)$	$D = 3(0) + n(0) = 0$

حتى يكون للاقتران الهدف أكبر قيمة ممكنة عند النقطة $(3,4)$، يجب أن تتحقق الشروط الآتية:

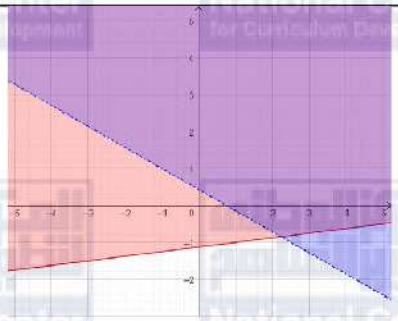
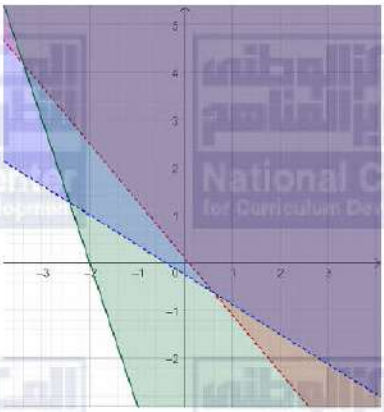
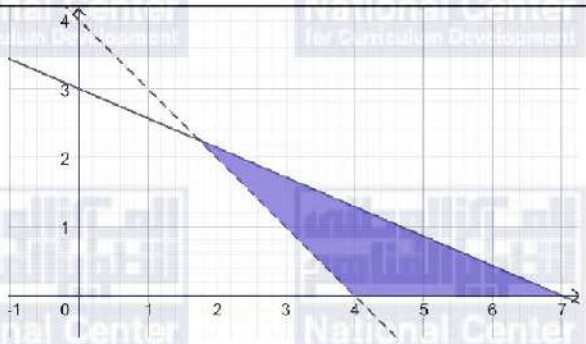
$$9 + 4n \geq 12 \quad \text{و} \quad 9 + 4n \geq 5n$$

و هذا يتحقق عندما:

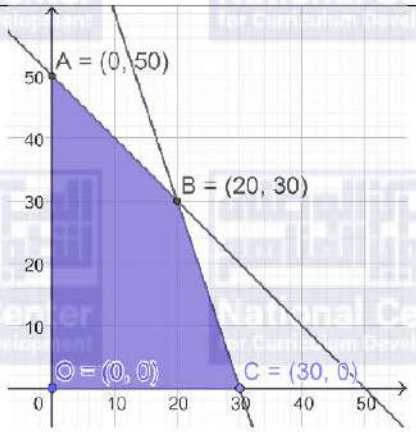
$$n \geq \frac{3}{4} \quad \text{و} \quad n \leq 9$$

أي: $1 \leq n \leq 9$

قيم n هي: $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

	اختبار نهاية الوحدة صفحة 139
1	B
2	C
3	B
4	A
5	 منطقة الحل هي المنطقة المظللة بمزيج من اللونين الزهري والأزرق
6	 منطقة الحل هي المنطقة المظللة بمزيج من الألون الأخضر والأزرق والبني على يمين الرسم.
7	 الزوج المرتب الوحيد الواقع في منطقة الحل الذي إحداثياه عددان صحيحان موجبان هو: (4,1)وهو يمثل حل هذا النظام.

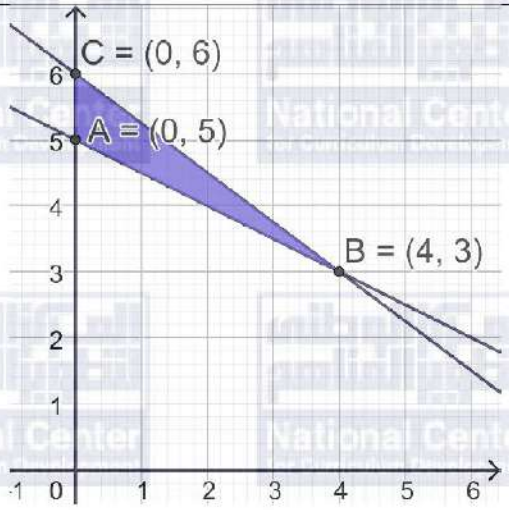
8



رؤوس منطقة الحلول الممكنة	$P = 4x + y$
$A(0,50)$	$P = 4(0) + (50) = 50$
$B(20,30)$	$P = 4(20) + (30) = 110$
$C(30,0)$	$P = 4(30) + (0) = 120$
$O(0,0)$	$P = 4(0) + (0) = 0$

إذن، أكبر قيمة لاقتران الهدف هي 120.

9



رؤوس منطقة الحلول الممكنة	$P = 200x + 500y$
$A(0,5)$	$P = 200(0) + 500(5) = 2500$
$B(4,3)$	$P = 200(4) + 500(3) = 2300$
$C(0,6)$	$P = 200(0) + 500(6) = 3000$

إذن، أصغر قيمة لاقتران الهدف هي 2300

نفرض x عدد العمال المهرة، y عدد العمال المبتدئين.

10

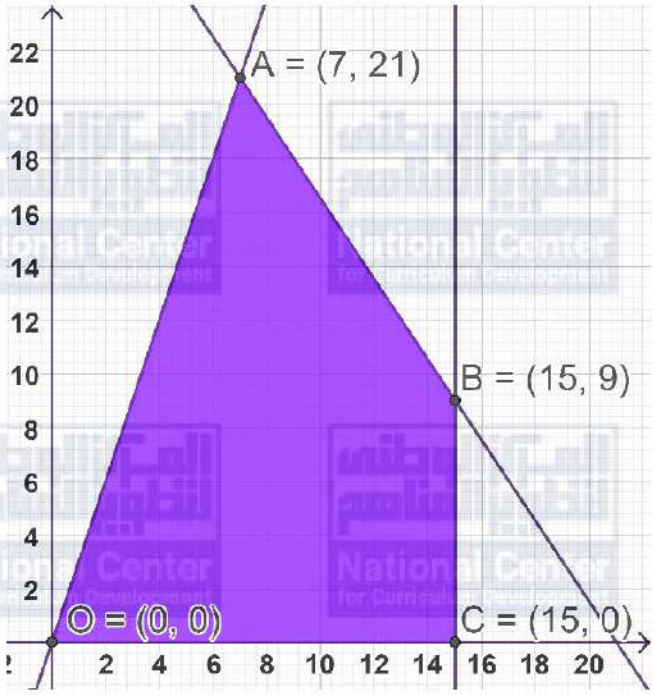
$$30x + 20y \leq 630 \Longrightarrow 3x + 2y \leq 63$$

$$y \leq 3x$$

$$x \leq 15$$

$$x \geq 0 , y \geq 0$$

$$P = 25x + 18y$$



11

رؤوس منطقة الحلول الممكنة	$P = 25x + 18y$
$A(7,21)$	$P = 25(7) + 18(21) = 553$
$B(15,9)$	$P = 25(15) + 18(9) = 537$
$C(15,0)$	$P = 25(15) + 18(0) = 375$
$O(0,0)$	$P = 25(0) + 18(0) = 0$

إذن، لتجهيز أكبر عدد ممكن من الطرود، يجب تشغيل 7 عمال مهرة و 21 عاملًا مبتدئًا.

12

عدد الطالبات لا يزيد عن مثلي عدد الطلاب.

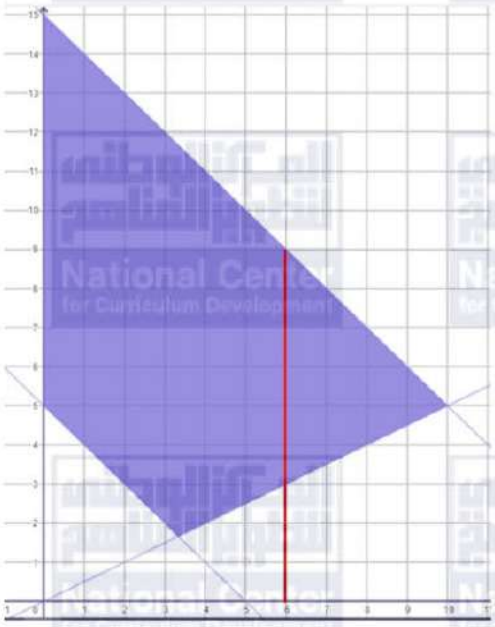
أو: عدد الطلاب لا يقل عن نصف عدد الطالبات.

13

$5 \leq x + y \leq 15$

$y \geq 0.5x$

$x \geq 0 , y \geq 0$



نلاحظ من التمثيل البياني لمنطقة حل المتباينات عندما تكون x = 6، أن قيم y الصحيحة المقابلة لها في منطقة الحل هي: 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 وهي القيم الممكنة لعدد الطلاب المتدربين.

نفرض x عدد القطع من النوع الأول، y عدد القطع من النوع الثاني.

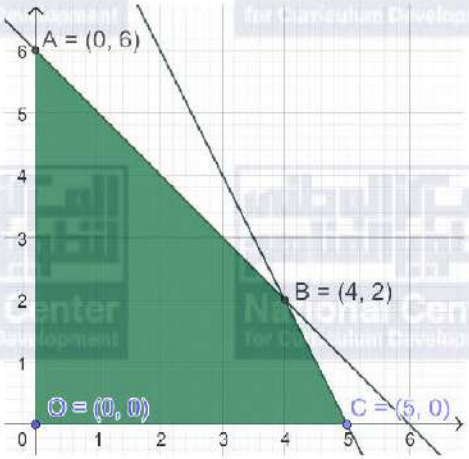
14

$2x + y \leq 10$

$x + y \leq 6$

$x \geq 0 , y \geq 0$

$P = 10x + 15y$



رؤوس منطقة الحلول الممكنة	$P = 10x + 15y$
$A(0,6)$	$P = 10(0) + 15(6) = 90$
$B(4,2)$	$P = 10(4) + 15(2) = 70$
$C(5,0)$	$P = 10(5) + 15(0) = 50$
$O(0,0)$	$P = 10(0) + 15(0) = 0$

إذن، لتحقيق أكبر ربح ممكن، يجب أن ينتج المصنع 6 قطع من النوع الثاني ولا ينتج أي قطعة من النوع الأول.