المركز الوطني لتطوير المناهج
National Center for Curriculum Development

رياضيات الأعمال

الصف الثاني عشر- المسار الأكاديمي

الفصل الدراسي الثاني

إجابات كتاب الطالب

12

إجابات الوحدة الأولى

الناشر: المركز الوطني لتطوير المناهج

يسر المركز الوطني لتطوير المناهج استقبال آرائكم وملحوظاتكم على هذا الكتاب عن طريق العناوين الآتية:

06-5376262 / 237 06-5376266 P.O.Box: 2088 Amman 11941

@nccdjor feedback@nccd.gov.jo www.nccd.gov.jo

إجابات كتاب الطالب- مادة رياضيات الأعمال- الصف الثاني عشر الأكاديمي ف1

الوحدة الأولى: المصفوفات

الدرس الأول: مقدمة في المصفوفات

	أتحقق من فهمي صفحة 9
a	رتبة المصفوفة B هي 2×4
b	$b_{13} = 0 \ , \ b_{24} = -5$
c	-3 يقع في الصف الثاني والعمود الثالث
	أتحقق من فهمي صفحة 11
a	المصفوفة D هي مصفوفة مربعة ورتبتها 3×3
b	المصفوفة E هي مصفوفة صفرية ورتبتها 2×3
c	المصفوفة F هي مصفوفة صف ورتبتها 1×5
d	$3x - 2 = 13 \Rightarrow x = 5$ $2x + 4y = 18 \Rightarrow 2(5) + 4y = 18$ $\Rightarrow y = 2$
	أتحقق من فهمي صفحة 13
a	$\begin{bmatrix} 460 & 250 & 40 \\ 800 & 130 & 70 \\ 1300 & 700 & 200 \end{bmatrix}$
b	$460 + 250 + 40 = 750$ ويمثل مجموع الذين تم استطلاع آرائهم من القريةB.
c	$250 + 130 + 700 = 1080$ ويمثل عدد المعارضين لإقامة المشروع السياحي ممن تم استطلاع آرائهم في القرى الثلاث.
d	نعم، لأنه يدل على الوسط الحسابي لعدد المعارضين في القرى الثلاثة.
	أتدرب وأحل المسائل صفحة 13
1	1×2

2	3×3
3	4×1
4	1×1
5	$a_{31} = 7$
6	$a_{23} = 9$
7	$a_{14} = -2$
8	$a_{32} = 8$ يقع في الصف الثالث والعمود الثاني
9	مصفوفة مربعة رتبتها 4×4
10	مصفوفة عمود رتبتها 3×1
11	مصفوفة صف رتبتها 1×4
12	مصفوفة صفرية رتبتها 2×2
13	$z = 2$ $3x - 11 = 4 \Rightarrow x = 5$ $x + 2y = -1 \Rightarrow 5 + 2y = -1$ $\Rightarrow y = -3$
14	$2 - y = -5 \Rightarrow y = 7$ $x^2 = 2x + 3 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$ $\Rightarrow (x - 3)(x + 1) = 0$ $\Rightarrow x = 3 \ , \ x = -1$
15	$S = \begin{bmatrix} 11 & 25 & 13 \\ 14 & 20 & 9 \\ 8 & 15 & 7 \end{bmatrix}$ $s_{32} = 15$
16	$14 + 20 + 9 = 43$ ولا معنى له.
17	$13 + 9 + 7 = 29$ ويمثل عدد الأهداف المسجلة من قبل اللاعبين الثلاثة.
18	$\begin{bmatrix} 200 & 380 & 250 & 300 \\ 160 & 540 & 0 & 290 \\ 120 & 280 & 400 & 470 \end{bmatrix}$ رتبة المصفوفة هي 4×3

19	$1130 = 300 + 250 + 380 + 200$ ويمثل عدد الأجهزة الكهربائية في مستودع المدينة الأولى $990 = 290 + 0 + 540 + 160$ ويمثل عدد الأجهزة الكهربائية في مستودع المدينة الثانية $1270 = 470 + 400 + 280 + 120$ ويمثل عدد الأجهزة الكهربائية في مستودع المدينة الثالثة
20	$480 = 120 + 160 + 200$ ويمثل عدد الثلاجات في المستودعات الثلاثة $1200 = 380 + 540 + 280$ ويمثل عدد الغسالات في المستودعات الثلاثة $650 = 400 + 0 + 250$ ويمثل عدد الشاشات في المستودعات الثلاثة $1060 = 300 + 290 + 470$ ويمثل عدد المراوح في المستودعات الثلاثة
21	يمكن عرضها بصورة مصفوفة هكذا: $\begin{bmatrix} 3256 & 1678 & 4589 & 1253 \\ 4560 & 978 & 5874 & 2564 \end{bmatrix}$
22	العبارة صحيحة أحيانًا، فمثلًا: إذا كان $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}$ وكان $B = \begin{bmatrix} 8 & -1 \\ 6 & 9 \end{bmatrix}$ ، فنلاحظ أن للمصفوفتين العدد نفسه من العناصر، لكن المصفوفتين غير متساويتين لأن العناصر المتناظرة غير متساوية. أما إذا كان $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}$ وكان $B = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}$ ، فالمصفوفتان متساويتان لأن العناصر المتناظرة متساوية
23	إجابة محتملة: $\begin{bmatrix} 2 & 7 & 5 \\ 7 & 4 & 8 \\ 5 & 8 & 10 \end{bmatrix}$
24	عدد عناصر المصفوفة يساوي حاصل ضرب عدد صفوفها بعدد أعمدتها، بما أن عدد العناصر أولي، فهو يساوي العدد واحد ضرب العدد الأولي نفسه أو العكس. إذن، إذا كان عدد العناصر n وهو أولي، فإن رتبة المصفوفة إما أن تكون $n \times 1$ أو $1 \times n$
25	<table><tr><td></td><td>عمان</td><td>العقبة</td><td>إربد</td></tr><tr><td>إربد</td><td>88</td><td>408</td><td>0</td></tr><tr><td>عمان</td><td>0</td><td>324</td><td>88</td></tr><tr><td>العقبة</td><td>324</td><td>0</td><td>408</td></tr></table> $\begin{bmatrix} 88 & 408 & 0 \\ 0 & 324 & 88 \\ 324 & 0 & 408 \end{bmatrix}$

26	$b_{11} = 2(1) - (1) = 1$ $b_{12} = 2(1) - (2) = 0$ $b_{13} = 2(1) - (3) = -1$ $b_{14} = 2(1) - (4) = -2$ $b_{21} = 2(2) - (1) = 3$ $b_{22} = 2(2) - (2) = 2$ $b_{23} = 2(2) - (3) = 1$ $b_{24} = 2(2) - (4) = 0$ $b_{31} = 2(3) - (1) = 5$ $b_{32} = 2(3) - (2) = 4$ $b_{33} = 2(3) - (3) = 3$ $b_{34} = 2(3) - (4) = 2$ المصفوفة المطلوبة هي: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}$
27	$x + 2y = 13$ $x - y = 7$ $x + y + 3z = 2$ بطرح المعادلة الثانية من المعادلة الأولى ينتج: $3y = 6 \implies y = 2$ وبالتعويض في المعادلة الثانية نجد: $x - 2 = 7 \implies x = 9$ وبالتعويض في المعادلة الثالثة نجد: $9 + 2 + 3z = 2 \implies z = -3$

منهاجي
متعة التعليم الهادف

الدرس الثاني: العمليات على المصفوفات

أتحقق من فهمي صفحة 17	
a	$C - A = \begin{bmatrix} 1 & -5 & -4 \\ 5 & 12 & 2 \end{bmatrix}$
b	$D + B = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 8 & 3 \\ -16 & 7 \end{bmatrix}$
c	بما أن C,D من رتبتين مختلفتين، فلا يمكن جمعهما.
أتحقق من فهمي صفحة 19	
a	$3D = \begin{bmatrix} 0 & 12 & -9 \\ 21 & -6 & 3 \\ 24 & 30 & 18 \end{bmatrix}$
b	$-2D = \begin{bmatrix} 0 & -8 & 6 \\ -14 & 4 & -2 \\ -16 & -20 & -12 \end{bmatrix}$
c	$1.5D = \begin{bmatrix} 0 & 6 & -4.5 \\ 10.5 & -3 & 1.5 \\ 12 & 15 & 9 \end{bmatrix}$
أتحقق من فهمي صفحة 20	
a	$4E - 3F = \begin{bmatrix} 2 \\ -36 \\ 0 \end{bmatrix}$
b	بما أن G,F من رتبتين مختلفتين، فلا يمكن إيجاد $2G + 6F$
c	$5(G + H) = [45 \quad -20 \quad 80]$
أتحقق من فهمي صفحة 21	
	$7(A + B) = 7 \times \begin{bmatrix} 330 & 600 & 400 \\ 500 & 730 & 420 \end{bmatrix}$ $= \begin{bmatrix} 2310 & 4200 & 2800 \\ 3500 & 5110 & 2940 \end{bmatrix}$
أتدرب وأحل المسائل صفحة 21	
1	$\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 9 & 6 \\ 14 & -5 \end{bmatrix}$

2	بما أن المصفوفتين من رتبتين مختلفتين، فلا يمكن جمعهما.
3	$\begin{bmatrix} 11 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$
4	$\begin{bmatrix} 18 & 2 \\ 13 & 5 \end{bmatrix}$
5	$\begin{bmatrix} -6 & 36 & 4 \\ 7 & 9 & 21 \end{bmatrix}$
6	$[38 \quad -55 \quad 15]$
7	$\begin{bmatrix} 27 & -6 \\ 12 & 3 \\ 18 & -9 \end{bmatrix}$
8	$\begin{bmatrix} 10 & -14 \\ 6 & \frac{10}{3} \end{bmatrix}$
9	$\begin{bmatrix} -2 & -6 & 16 \\ -\frac{9}{2} & -3 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$
10	$\begin{bmatrix} 14 & -4 \\ 13 & 3 \end{bmatrix}$
11	$\begin{bmatrix} 36 & 20 & 16 \\ 28 & -44 & -12 \\ 8 & -16 & 8 \end{bmatrix}$
12	$\begin{bmatrix} 17 & 19 \\ 27 & -7 \\ -18 & -1 \end{bmatrix}$
13	بما أن A,B من رتبتين مختلفتين، فلا يمكن إيجاد $4A + 3B$
14	$\begin{bmatrix} -6 & 10 \\ 9 & -48 \end{bmatrix}$
15	$B + 1.5B = 2.5B = \begin{bmatrix} 6 & -2.5 & -12.5 \\ 7.5 & 5 & 20 \end{bmatrix}$
16	بما أن C,B من رتبتين مختلفتين، فلا يمكن إيجاد $3B + 2C$
17	$\begin{bmatrix} 5 & -6 \\ -6 & 29 \end{bmatrix}$
18	$\begin{bmatrix} 25 & -2 \\ -12 & 13 \end{bmatrix}$

19	$A+B=\begin{bmatrix}38 & 57 & 33\\ 32 & 55 & 38\end{bmatrix}$
20	$0.4C=\begin{bmatrix}6 & 8 & 12\\ 8 & 10 & 16\end{bmatrix}$, $1.4C=\begin{bmatrix}21 & 28 & 42\\ 28 & 35 & 56\end{bmatrix}$
21	$12=3z \implies z=4$ $2x=3x-4z \implies x=4z \implies x=16$ $2y=-6-4x \implies 2y=-6-64=-70 \implies y=-35$
22	$1.2A=\begin{bmatrix}0.48 & 0.9\\ 0.72 & 1.2\\ 1.8 & 3\end{bmatrix}$
23	صحيحة أحيانًا، لأنه إذا كان عدد عناصر المصفوفتين متساويًا، فقد تكون الرتبتان متساويتين وعندها يمكن إيجاد ناتج جمع المصفوفتين. أما إذا كان عدد عناصر المصفوفتين متساويًا والرتبتان مختلفتان فلا يمكن إيجاد ناتج جمعهما.
24	المصفوفتان من رتبتين مختلفتين، فلا يمكن جمعهما.
25	$3\begin{bmatrix}4 & 2 & 3\\ 1 & -4 & 5\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}0 & 1 & 0.5\\ 1.5 & 3.5 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}12 & 8 & 10\\ 6 & -5 & 11\end{bmatrix}$

منهاجي
متعة التعليم الهادف

$$X - 2Y = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 9 \end{bmatrix} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (1)$$

$$3X + 4Y = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ -31 & 12 \end{bmatrix} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (2)$$

نضرب المعادلة الأولى بالعدد 2 ، نحصل على:

$$2X - 4Y = \begin{bmatrix} 2 & 10 \\ -4 & 18 \end{bmatrix} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (3)$$

ثم نجمع المعادلتين الثانية والثالثة، فنحصل على:

$$5X = \begin{bmatrix} 10 & 15 \\ -35 & 30 \end{bmatrix} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (4)$$

نقسم المعادلة الرابعة على العدد 5، فنحصل على:

26 $$X = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -7 & 6 \end{bmatrix}$$

نعوض المصفوفة X في المعادلة الثانية، لإيجاد المصفوفة Y:

$$3\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -7 & 6 \end{bmatrix} + 4Y = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ -31 & 12 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 6 & 9 \\ -21 & 18 \end{bmatrix} + 4Y = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ -31 & 12 \end{bmatrix}$$

$$4Y = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ -31 & 12 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & 9 \\ -21 & 18 \end{bmatrix}$$

$$4Y = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -10 & -6 \end{bmatrix}$$

$$Y = \begin{bmatrix} 0.5 & -1 \\ -2.5 & -1.5 \end{bmatrix}$$

منهاجي
متعة التعليم الهادف

الدرس الثالث: ضرب المصفوفات

	أتحقق من فهمي صفحة 25
a	بما أن عدد أعمدة المصفوفة A لا يساوي عدد صفوف المصفوفة B، فإنه لا يمكن إيجاد $A \times B$
b	بما أن عدد أعمدة المصفوفة B يساوي عدد صفوف المصفوفة C، فإنه يمكن إيجاد $B \times C$ ورتبتها3×3
c	بما أن عدد أعمدة المصفوفة C لا يساوي عدد صفوف المصفوفة A، فإنه لا يمكن إيجاد $C \times A$
	أتحقق من فهمي صفحة 27
a	$MN = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 6 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 38 & -15 \end{bmatrix}$
b	$CD = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 1 & 6 \\ 8 & 1 & 9 \end{bmatrix}$
	أتحقق من فهمي صفحة 28
	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 10 \\ 4 \end{bmatrix}$
	أتحقق من فهمي صفحة 30
a	$(F+G)H = \left(\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 & 18 \\ 60 & 36 \end{bmatrix}$
b	$(FG)H = \left(\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 5 & 18 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -22 & -14 \\ 107 & 61 \end{bmatrix}$
c	$G(mH) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \times -4\begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -28 & -20 \\ -16 & -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -16 & -8 \\ -76 & -44 \end{bmatrix}$
	أتدرب وأحل المسائل صفحة 31
1	بما أن عدد أعمدة المصفوفة A لا يساوي عدد صفوف المصفوفة B، فإنه لا يمكن إيجاد $A \times B$
2	بما أن عدد أعمدة المصفوفة B يساوي عدد صفوف المصفوفة C، فإنه يمكن إيجاد $B \times C$ ورتبتها3×3
3	بما أن عدد أعمدة المصفوفة D لا يساوي عدد صفوف المصفوفة C، فإنه لا يمكن إيجاد $D \times C$
4	بما أن عدد أعمدة المصفوفة B يساوي عدد صفوف المصفوفة A، فإنه يمكن إيجاد $B \times A$ ورتبتها3×2
5	بما أن عدد أعمدة المصفوفة C يساوي عدد صفوف المصفوفة D، فإنه يمكن إيجاد $C \times D$ ورتبتها2×3
6	بما أن عدد أعمدة المصفوفة B لا يساوي عدد صفوف المصفوفة B، فإنه لا يمكن إيجاد $B \times B$
7	بما أن عدد أعمدة المصفوفة B يساوي عدد صفوف المصفوفة C، فإنه يمكن إيجاد $B \times C$ ورتبتها2×2

8	حسب السؤال الثاني فإن المصفوفة BC يمكن إيجادها ورتبتها 3×3 وبما أن عدد صفوف المصفوفة D يساوي عدد أعمدة المصفوفة BC ، فإنه يمكن إيجاد BCD ورتبتها3×3
9	بما أنه يمكن ضرب A في B للحصول على المصفوفة C=AB فإن عدد صفوف B يساوي عدد أعمدة A(أي 3)، ويكون عدد أعمدة B مساوٍ لعدد أعمدة C (أي5). إذن، رتبة B هي 3×5
10	بما أن عدد أعمدة المصفوفة اليسرى لا يساوي عدد صفوف المصفوفة اليمنى، فلا يمكن إيجاد ناتج الضرب
11	$\begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix} \times [2 \quad 5 \quad 3] = \begin{bmatrix} 6 & 15 & 9 \\ -8 & -20 & -12 \\ 2 & 5 & 3 \end{bmatrix}$
12	$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 5 \\ 4 & 7 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 22 & 5 \\ -4 & 14 & 18 \end{bmatrix}$
13	$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$
14	$[8 \quad 10 \quad -7] \times \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -5 \end{bmatrix} = [13]$
15	$\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 9 & -5 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -5 & 6 & -4 \\ 0 & 6 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & -18 & 11 \\ -45 & 24 & -21 \\ -15 & 12 & -9 \end{bmatrix}$
16	$\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} \times [-1 \quad 4] = \begin{bmatrix} -2 & 8 \\ -5 & 20 \end{bmatrix}$
17	$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 8 & -14 \\ -4 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -12 & 21 \end{bmatrix}$
18	$\left(\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}\right)^2 = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -8 \\ 16 & 23 \end{bmatrix}$
19	$\left(\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}\right)^2 = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ بما أن عدد أعمدة المصفوفة اليسرى لا يساوي عدد صفوف المصفوفة اليمنى، فلا يمكن إيجاد ناتج الضرب
20	$\begin{bmatrix} 12 & 10 & 0 \\ 4 & 4 & 20 \\ 8 & 9 & 12 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1000 \\ 2000 \\ 1500 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32000 \\ 42000 \\ 44000 \end{bmatrix}$ المصنع A يربح JD 32000، المصنع B يربح42000 JD، المصنع C يربح44000 JD.

21	$AB = \begin{bmatrix} 12 & 4 \\ 9 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 48 & 76 \\ 36 & 57 \end{bmatrix}$ $AC = \begin{bmatrix} 12 & 4 \\ 9 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ -3 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 48 & 76 \\ 36 & 57 \end{bmatrix}$ إذن، $AB = AC$
22	$(QR)P = \left(\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 9 & -5 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 12 & 4 \\ 9 & 3 \end{bmatrix}$ $= \begin{bmatrix} -9 & 0 \\ 10 & -14 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 12 & 4 \\ 9 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -108 & -36 \\ -6 & -2 \end{bmatrix}$
23	$n(PQ) = -2 \left(\begin{bmatrix} 12 & 4 \\ 9 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix} \right)$ $= -2 \times \begin{bmatrix} 52 & -4 & 24 \\ 39 & -3 & 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -104 & 8 & -48 \\ -78 & 6 & -36 \end{bmatrix}$
24	$R(PQ) = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 9 & -5 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 12 & 4 \\ 9 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix} \right)$ $= \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 9 & -5 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 52 & -4 & 24 \\ 39 & -3 & 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -143 & 11 & -66 \\ 273 & -21 & 126 \\ 117 & -9 & 54 \end{bmatrix}$
25	$(nR)P = \left(-2 \times \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 9 & -5 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \right) \times \begin{bmatrix} 12 & 4 \\ 9 & 3 \end{bmatrix}$ $= \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -18 & 10 \\ -6 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 12 & 4 \\ 9 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 66 & 22 \\ -126 & -42 \\ -54 & -18 \end{bmatrix}$
26	$AB = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ x & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ y & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ -2x + 3y & 12 \end{bmatrix}$
27	$BA = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ y & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ x & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 2y + 4x & 12 \end{bmatrix}$
28	$AB = BA \Longrightarrow -2x + 3y = 2y + 4x \Longrightarrow y = 6x$ أقل قيمة صحيحة موجبة للعدد x هي 1، وأقل قيمة صحيحة موجبة للعدد y هي 6
29	$\begin{bmatrix} 150 & 150 \\ 200 & 100 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 20 & 21 & 52 \\ 3 & 65 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3450 & 12900 & 7950 \\ 4300 & 10700 & 10500 \end{bmatrix}$
30	$\begin{bmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 3 & 5 & 9 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4.5 \\ 4 \\ 3.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 45.5 \\ 65 \end{bmatrix}$

31	ينتج العنصر C_{23} عن طريق ضرب الصف الثاني من المصفوفة الأولى بالعمود الثالث من المصفوفة الثانية. فتكون إجابة رنا هي الصحيحة.
32	$(A+B)^2 = (A+B) \times (A+B) = A^2 + AB + BA + B^2$ لكن ، بشكل عام: $AB \neq BA$ ، إذن، $(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$
33	إجابات محتملة: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ $AB = BA = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ $AB = BA = \begin{bmatrix} 4 & 11 \\ 0 & 15 \end{bmatrix}$ $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$ $AB = BA = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 35 \end{bmatrix}$
34	$3e + 4g = 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$ $3f + 4h = 12 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$ $-e + 5g = 6 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$ $-f + 5h = 15 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$ نضرب المعادلة الثالثة بـ 3 ونجمع الناتج إلى المعادلة الأولى: $-3e + 15g = 18$ $3e + 4g = 1$ $19g = 19 \implies g = 1$ نعوض قيمة g في المعادلة الأولى، فنجد: $e = -1$ نضرب المعادلة الرابعة بـ 3 ونجمع الناتج إلى المعادلة الثانية: $-3f + 15h = 45$ $3f + 4h = 12$ $19h = 57 \implies h = 3$ نعوض قيمة h في المعادلة الثانية، فنجد: $f = 0$

الدرس الرابع: المحددات وقاعدة كريمر

أتحقق من فهمي صفحة 35	
a	$\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 0 + 3 = 3$
b	$\begin{vmatrix} 5 & 20 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 40 - 40 = 0$
c	$\begin{vmatrix} 9 & 5 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -18 - 15 = -33$
أتحقق من فهمي صفحة 37	
a	الطريقة الأولى: قاعدة الأقطار: $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 9 \\ -2 & 3 & 4 \\ -5 & 7 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 3 \\ -2 & 3 \\ -5 & 7 \end{matrix}$ $(1 \times 3 \times 2) + (3 \times 4 \times -5) + (9 \times -2 \times 7) = -180$ $(9 \times 3 \times -5) + (1 \times 4 \times 7) + (3 \times -2 \times 2) = -119$ $-180 + 119 = -61$ الطريقة الثانية: باستعمال محددة المصفوفة 2×2: $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 9 \\ -2 & 3 & 4 \\ -5 & 7 & 2 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} - 3 \times \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} + 9 \times \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -5 & 7 \end{vmatrix}$ $= (6 - 28) - 3(-4 + 20) + 9(-14 + 15) = -22 - 48 + 9 = -61$

منهاجي
متعة التعليم الهادف

b

الطريقة الأولى: قاعدة الأقطار:

$$\begin{vmatrix} 0 & -5 & -1 \\ 4 & 1 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \begin{matrix} 0 & -5 \\ 4 & 1 \\ 7 & 8 \end{matrix}$$

$$(0 \times 1 \times 9) + (-5 \times 6 \times 7) + (-1 \times 4 \times 8) = -242$$

$$(-1 \times 1 \times 7) + (0 \times 6 \times 8) + (-5 \times 4 \times 9) = -187$$

$$-242 + 187 = -55$$

الطريقة الثانية: باستعمال محددة المصفوفة 2×2:

$$\begin{vmatrix} 0 & -5 & -1 \\ 4 & 1 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 0 \times \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} + 5 \times \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} - 1 \times \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}$$

$$= 0 + 5(36 - 42) - 1(32 - 7) = -30 - 25 = -55$$

أتحقق من فهمي صفحة 39

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 80 & 1 \\ 20 & 50 & 1 \\ 10 & 10 & 1 \end{vmatrix} = 0 \times \begin{vmatrix} 50 & 1 \\ 10 & 1 \end{vmatrix} - 80 \times \begin{vmatrix} 20 & 1 \\ 10 & 1 \end{vmatrix} + 1 \times \begin{vmatrix} 20 & 50 \\ 10 & 10 \end{vmatrix}$$

$$= 0 - 80(20 - 10) + 1(200 - 500) = -800 - 300 = -1100$$

$$Area = \frac{1}{2}|A| = \frac{1}{2} \times 1100 = 550\ km^2$$

طريقة أخرى:

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 8 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \times \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 8 \times \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 1 \times \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 0 - 8(1) + 1(-3) = -11$$

مساحة المثلث في المستوى الإحداثي هي: $\frac{1}{2}|A| = \frac{1}{2} \times 11 = 5.5\ unit^2$

المساحة الحقيقية تساوي $5.5 \times (10\text{km})^2 = 550\ \text{km}^2$

أتحقق من فهمي صفحة 41

a

$$C = \begin{bmatrix} -2 & 7 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad D = |C| = \begin{vmatrix} -2 & 7 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 - 7 = -9$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 12 & 7 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}}{-9} = \frac{12 - 21}{-9} = \frac{-9}{-9} = 1$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} -2 & 12 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}}{-9} = \frac{-6 - 12}{-9} = \frac{-18}{-9} = 2$$

إذن، حل النظام هو: $(1,2)$

b

$$4x - 3y = 29$$

$$5x + 2y = -5$$

$$C = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \quad , \quad D = |C| = \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 8 + 15 = 23$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 29 & -3 \\ -5 & 2 \end{vmatrix}}{23} = \frac{58 - 15}{23} = \frac{43}{23}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 29 \\ 5 & -5 \end{vmatrix}}{23} = \frac{-20 - 145}{23} = \frac{-165}{23}$$

إذن، حل النظام هو: $\left(\frac{43}{23}, \frac{-165}{23}\right)$

أتدرب وأحل المسائل صفحة 41

1

$$\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 6 + 5 = 11$$

2

$$\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} = 0 + 20 = 20$$

3

$$\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 12 - 12 = 0$$

4

$$\begin{vmatrix} -5 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -20 - 3 = -23$$

5	الطريقة الأولى: قاعدة الأقطار: $\begin{vmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 5 & 8 & -2 \\ 4 & 7 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} 0 & -3 \\ 5 & 8 \\ 4 & 7 \end{matrix}$ $(0 \times 8 \times 3) + (-3 \times -2 \times 4) + (1 \times 5 \times 7) = 24 + 35 = 59$ $(1 \times 8 \times 4) + (0 \times -2 \times 7) + (-3 \times 5 \times 3) = 32 - 45 = -13$ $D = 59 + 13 = 72$ الطريقة الثانية: باستعمال محددة المصفوفة 2×2: $\begin{vmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 5 & 8 & -2 \\ 4 & 7 & 3 \end{vmatrix} = 0 \times \begin{vmatrix} 8 & -2 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} + 3 \times \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} + 1 \times \begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 4 & 7 \end{vmatrix}$ $= 0 + 3(15 + 8) + 1(35 - 32) = 69 + 3 = 72$
6	الطريقة الأولى: قاعدة الأقطار: $\begin{vmatrix} -4 & 3 & 2 \\ 6 & 5 & 1 \\ -4 & 3 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} -4 & 3 \\ 6 & 5 \\ -4 & 3 \end{matrix}$ $(-4 \times 5 \times 2) + (3 \times 1 \times -4) + (2 \times 6 \times 3) = -40 - 12 + 36 = -16$ $(2 \times 5 \times -4) + (-4 \times 1 \times 3) + (3 \times 6 \times 2) = -40 - 12 + 36 = -16$ $D = -16 + 16 = 0$ الطريقة الثانية: باستعمال محددة المصفوفة 2×2: $\begin{vmatrix} -4 & 3 & 2 \\ 6 & 5 & 1 \\ -4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -4 \times \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - 3 \times \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} + 2 \times \begin{vmatrix} 6 & 5 \\ -4 & 3 \end{vmatrix}$ $= -4(10 - 3) - 3(12 + 4) + 2(18 + 20) = -28 - 48 + 76 = 0$

7	الطريقة الأولى: قاعدة الأقطار: $\begin{vmatrix} -6 & -1 & -2 \\ 2 & 5 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} -6 & -1 \\ 2 & 5 \\ 4 & 3 \end{matrix}$ $(-6 \times 5 \times 1) + (-1 \times 0 \times 4) + (-2 \times 2 \times 3) = -30 + 0 - 12 = -42$ $(-2 \times 5 \times 4) + (-6 \times 0 \times 3) + (-1 \times 2 \times 1) = -40 + 0 - 2 = -42$ $D = -42 + 42 = 0$ الطريقة الثانية: باستعمال محددة المصفوفة 2×2: $\begin{vmatrix} -6 & -1 & -2 \\ 2 & 5 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -6 \times \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 1 \times \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} - 2 \times \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}$ $= -6(5-0) + 1(2-0) - 2(6-20) = -30 + 2 + 28 = 0$
8	الطريقة الأولى: قاعدة الأقطار: $\begin{vmatrix} 6 & 0 & 4 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 6 & 0 \\ 0 & -3 \\ 1 & 0 \end{matrix}$ $(6 \times -3 \times 2) + (0 \times 0 \times 1) + (4 \times 0 \times 0) = -36$ $(4 \times -3 \times 1) + (6 \times 0 \times 0) + (0 \times 0 \times 2) = -12$ $D = -36 + 12 = -24$ الطريقة الثانية: باستعمال محددة المصفوفة 2×2: $\begin{vmatrix} 6 & 0 & 4 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 6 \times \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} - 0 \times \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 4 \times \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$ $= 6(-6-0) - 0 + 4(0+3) = -36 + 12 = -24$
9	$A = \begin{vmatrix} 6 & 8 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ -5 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 6 \times \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - 8 \times \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} + 1 \times \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -5 & 3 \end{vmatrix}$ $= 6(4-3) - 8(2+5) + 1(6+20) = 6 - 56 + 26 = -24$ $Area = \frac{1}{2}\lvert A \rvert = \frac{1}{2} \times 24 = 12$

10	$A = \begin{vmatrix} 60 & 100 & 1 \\ 140 & 0 & 1 \\ 100 & 180 & 1 \end{vmatrix} = 60 \times \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 180 & 1 \end{vmatrix} - 100 \times \begin{vmatrix} 140 & 1 \\ 100 & 1 \end{vmatrix} + 1 \times \begin{vmatrix} 140 & 0 \\ 100 & 180 \end{vmatrix}$ $= 60(0 - 180) - 100(140 - 100) + 1(25200 - 0)$ $= -10800 - 4000 + 25200 = 10400$ $Area = \frac{1}{2}\|A\| = \frac{1}{2} \times 10400 = 5200\ m^2$ ويمكن حله بالطريقة الثانية كما في أتحقق من فهمي في المثال 3.
11	$x + 5y = -17$ $3x - 4y = 6$ $C = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$, $D = \|C\| = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = -4 - 15 = -19$ $x = \frac{\begin{vmatrix} -17 & 5 \\ 6 & -4 \end{vmatrix}}{-19} = \frac{68 - 30}{-19} = \frac{38}{-19} = -2$ $y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -17 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}}{-19} = \frac{6 + 51}{-19} = \frac{57}{-19} = -3$ إذن، حل النظام هو: $(-2, -3)$
12	$2x - 3y = 29$ $-4x + 6y = 12$ $C = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 6 \end{bmatrix}$, $D = \|C\| = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 6 \end{vmatrix} = 12 - 12 = 0$ إذن، لا يوجد حل لهذا النظام إذ أن المعادلتين تمثلان مستقيمين متوازيين.

13	$5x-4y=22$ $4x+3y=-1$ $C=\begin{bmatrix}5 & -4\\ 4 & 3\end{bmatrix}$, $D=\lvert C\rvert=\begin{vmatrix}5 & -4\\ 4 & 3\end{vmatrix}=15+16=31$ $x=\dfrac{\begin{vmatrix}22 & -4\\ -1 & 3\end{vmatrix}}{31}=\dfrac{66-4}{31}=\dfrac{62}{31}=2$ $y=\dfrac{\begin{vmatrix}5 & 22\\ 4 & -1\end{vmatrix}}{31}=\dfrac{-5-88}{31}=\dfrac{-93}{31}=-3$ إذن، حل النظام هو: $(2,-3)$
14	$C=\begin{bmatrix}6 & -7\\ 5 & 4\end{bmatrix}$, $D=\lvert C\rvert=\begin{vmatrix}6 & -7\\ 5 & 4\end{vmatrix}=24+35=59$ $x=\dfrac{\begin{vmatrix}-11 & -7\\ 40 & 4\end{vmatrix}}{59}=\dfrac{-44+280}{59}=\dfrac{236}{59}=4$ $y=\dfrac{\begin{vmatrix}6 & -11\\ 5 & 40\end{vmatrix}}{59}=\dfrac{240+55}{59}=\dfrac{295}{59}=5$ إذن، حل النظام هو: $(4,5)$
15	$2x+y=6$ $x+cy=3$ $\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & c\end{vmatrix}=0 \implies 2c-1=0 \implies c=\dfrac{1}{2}$
16	$A=\begin{vmatrix}0 & 0 & 1\\ 6 & 50 & 1\\ 56 & 116 & 1\end{vmatrix}=0\times\begin{vmatrix}50 & 1\\ 116 & 1\end{vmatrix}-0\times\begin{vmatrix}6 & 1\\ 56 & 1\end{vmatrix}+1\times\begin{vmatrix}6 & 50\\ 56 & 116\end{vmatrix}$ $=0-0+1(696-2800)=-2104$ $Area=\dfrac{1}{2}\lvert A\rvert=\dfrac{1}{2}\times 2104=1052\ km^2$
17	إجابة محتملة: $A=\begin{bmatrix}6 & 12\\ 2 & 4\end{bmatrix}$
18	إجابة محتملة: $A=\begin{bmatrix}5 & 3\\ 7 & 4\end{bmatrix}$

19	إجابة محتملة: $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 6 \end{bmatrix}$
20	عناصر العمود الأول في محددة x هي الثوابت في نظام المعادلات، وهو نفسه العمود الثاني في محددة y $a = 1 \quad , \quad c = 3$ عناصر العمود الأول في مصفوفة المعاملات هي معاملات x وهي موجودة في العمود الأول في محددة y ، وعناصر العمود الثاني في مصفوفة المعاملات هي معاملات y وهي موجودة في العمود الثاني في محددة x ، محددة مصفوفة المعاملات قيمتها تساوي 5، إذن: $\begin{vmatrix} 7 & 2 \\ b & 4 \end{vmatrix} = 5 \implies 28 - 2b = 5 \implies b = \frac{23}{2}$

الدرس الخامس: النظير الضربي للمصفوفة

	أتحقق من فهمي صفحة 45
a	$AB = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ بما أن $AB = I$ ، فإن كلًّا من المصفوفة A والمصفوفة B تمثل نظيرًا ضربيًا للأخرى.
b	$CD = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 6 & 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2.5 & 1.5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 & 12 \\ 30 & 19 \end{bmatrix}$ بما أن $CD \neq I$ ، فإن كلًّا من المصفوفة C والمصفوفة D لا تمثل نظيرًا ضربيًا للأخرى.
	أتحقق من فهمي صفحة 46
a	$H = \begin{bmatrix} -2 & 6 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ ، $\lvert H \rvert = -6 + 6 = 0$ بما أن $\lvert H \rvert = 0$، فإن المصفوفة H منفردة، ولا نظير ضربي لها.
b	$J = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ ، $\lvert J \rvert = -2$ بما أن $\lvert J \rvert \neq 0$، فإن المصفوفة J غير منفردة، ولها نظير ضربي هو J^{-1} $J^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$
c	$K = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ -8 & -7 \end{bmatrix}$ ، $\lvert K \rvert = -49 + 48 = -1$ بما أن $\lvert K \rvert \neq 0$، فإن المصفوفة K غير منفردة، ولها نظير ضربي هو K^{-1} $K^{-1} = -\begin{bmatrix} -7 & -6 \\ 8 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ -8 & -7 \end{bmatrix}$

أتحقق من فهمي صفحة 49

$$AX = B \implies \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$|A| = 9 - 2 = 7$$

$$A^{-1} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{2}{7} & \frac{3}{7} \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} \frac{3}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{2}{7} & \frac{3}{7} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 13 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{43}{7} \\ \frac{38}{7} \end{bmatrix}$$

إذن، حل هذا النظام هو $\left(\frac{43}{7}, \frac{38}{7}\right)$

أتحقق من فهمي صفحة 51

نفرض أن الطاهي سيستعمل x لترًا تركيزالسكر فيه 12% ، و y لترًا تركيزالسكر فيه 20%

$$x + y = 20$$

$$0.12x + 0.2y = 0.15 \times 20 = 3$$

$$AX = B \implies \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0.12 & 0.2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$|A| = 0.2 - 0.12 = 0.08$$

$$A^{-1} = \frac{1}{0.08}\begin{bmatrix} 0.2 & -1 \\ -0.12 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.5 & -12.5 \\ -1.5 & 12.5 \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} 2.5 & -12.5 \\ -1.5 & 12.5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 20 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12.5 \\ 7.5 \end{bmatrix}$$

إذن، سيستعمل الطاهي $12.5L$ من المحلول الذي تركيز السكر فيه 12%، و $7.5L$ من الثاني.

أتدرب وأحل المسائل صفحة 52

1

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

بما أن $AB \neq I$ ، فإن كلًّا من المصفوفة A والمصفوفة B لا تمثل نظيرًا ضربيًا للأخرى.

2

$$CD = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

بما أن $CD = I$ ، فإن كلًّا من المصفوفة C والمصفوفة D تمثل نظيرًا ضربيًا للأخرى.

3	$LM = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ بما أن $LM = I$ ، فإن كلًّا من المصفوفة L والمصفوفة M تمثل نظيرًا ضربيًا للأخرى.
4	$GH = \begin{bmatrix} -3 & -11 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1.5 & 5.5 \\ -0.5 & -1.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ بما أن $GH = I$ ، فإن كلًّا من المصفوفة G والمصفوفة H تمثل نظيرًا ضربيًا للأخرى.
5	$P = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ ، $\lvert P \rvert = 10 - 12 = -2$ بما أن $\lvert P \rvert \neq 0$، فإن المصفوفة P غير منفردة، ولها نظير ضربي هو P^{-1} $P^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2.5 & 1.5 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$
6	$Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$ ، $\lvert Q \rvert = \frac{1}{6} - 0 = \frac{1}{6}$ بما أن $\lvert Q \rvert \neq 0$، فإن المصفوفة Q غير منفردة، ولها نظير ضربي هو Q^{-1} $Q^{-1} = 6\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$
7	$S = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$ ، $\lvert S \rvert = -6 + 6 = 0$ بما أن $\lvert S \rvert = 0$، فإن المصفوفة S منفردة، ولا نظير ضربي لها.
8	$V = \begin{bmatrix} 8 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ ، $\lvert V \rvert = 8 + 2 = 10$ بما أن $\lvert V \rvert \neq 0$، فإن المصفوفة V غير منفردة، ولها نظير ضربي هو V^{-1} $V^{-1} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{10} & \frac{1}{10} \\ -\frac{1}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix}$

9

$3x + 5y = 13$

$x - 2y = -3$

$$AX = B \implies \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$|A| = -6 - 5 = -11$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{11}\begin{bmatrix} -2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{11} & \frac{5}{11} \\ \frac{1}{11} & -\frac{3}{11} \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} \frac{2}{11} & \frac{5}{11} \\ \frac{1}{11} & -\frac{3}{11} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 13 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

إذن، حل هذا النظام هو $(1,2)$

10

$-2x + 4y = 6$

$x + 2y = 7$

$$AX = B \implies \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$|A| = -4 - 4 = -8$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{8}\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ \frac{5}{2} \end{bmatrix}$$

إذن، حل هذا النظام هو $\left(2, \frac{5}{2}\right)$

11

$5x - 8y = 31$

$-3x + 2y = -13$

$$AX = B \implies \begin{bmatrix} 5 & -8 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 31 \\ -13 \end{bmatrix}$$

$$|A| = 10 - 24 = -14$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{-2}{14} & \frac{-8}{14} \\ \frac{-3}{14} & \frac{-5}{14} \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} \frac{-2}{14} & \frac{-8}{14} \\ \frac{-3}{14} & \frac{-5}{14} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 31 \\ -13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-62+104}{14} \\ \frac{-93+65}{14} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{42}{14} \\ \frac{-28}{14} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

إذن، حل هذا النظام هو $(3, -2)$

12

$x + y = 20$

$x - 2y = -1$

$$AX = B \implies \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$|A| = -2 - 1 = -3$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{3}\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 20 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 7 \end{bmatrix}$$

إذن، حل هذا النظام هو $(13,7)$

13

$3x + 2y = 8$

$x - y = 1$

$$AX = B \implies \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$|A| = -3 - 2 = -5$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{5}\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

إذن، حل هذا النظام هو $(2,1)$

14

$2x + 7y = 24$

$4x + 13y = 46$

$$AX = B \implies \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 4 & 13 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 \\ 46 \end{bmatrix}$$

$$|A| = 26 - 28 = -2$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 13 & -7 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{13}{2} & \frac{7}{2} \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} -\frac{13}{2} & \frac{7}{2} \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 24 \\ 46 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

إذن، حل هذا النظام هو $(5,2)$

15	نفرض أن الصيدلي سيستعمل x لترًا تركيز الملح فيه 2% ، و y لترًا تركيز الملح فيه 12% $x + y = 10$ $0.02x + 0.12y = 0.1 \times 10 = 1$ $AX = B \implies \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0.02 & 0.12 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\lvert A \rvert = 0.12 - 0.02 = 0.1$ $A^{-1} = 10 \begin{bmatrix} 0.12 & -1 \\ -0.02 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.2 & -10 \\ -0.2 & 10 \end{bmatrix}$ $X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} 1.2 & -10 \\ -0.2 & 10 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 10 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \end{bmatrix}$ إذن، سيستعمل الصيدلي $2L$ من المحلول الذي تركيز الملح فيه 2%، و $8L$ من الثاني.
16	ليكن x عدد الأوراق النقدية من فئة JD 10 ، y عدد الأوراق النقدية من فئة JD 20. $10x + 20y = 750$ $y = 2x - 5 \implies 2x - y = 5$ $AX = B \implies \begin{bmatrix} 10 & 20 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 750 \\ 5 \end{bmatrix}$ $\lvert A \rvert = -10 - 40 = -50$ $A^{-1} = -\frac{1}{50} \begin{bmatrix} -1 & -20 \\ -2 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{50} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{50} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}$ $X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} \frac{1}{50} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{50} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 750 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 \\ 29 \end{bmatrix}$ عدد الأوراق النقدية من فئة JD 10 هو 17، وعدد الأوراق النقدية من فئة JD 20 هو 29.
17	$\begin{vmatrix} 5 & x \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0 \implies 20 - 2x = 0 \implies x = 10$
18	$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \implies a = \pm 1$

19

$$(B+C)^{-1}=A \implies (B+C)(B+C)^{-1}=(B+C)A$$
$$\implies I=(B+C)A$$
$$\implies IA^{-1}=(B+C)AA^{-1}$$
$$\implies A^{-1}=B+C$$
$$\implies C=A^{-1}-B$$

$$A=\begin{bmatrix}4 & 3\\ 1 & 1\end{bmatrix} \implies |A|=4-3=1 \implies A^{-1}=\begin{bmatrix}1 & -3\\ -1 & 4\end{bmatrix}$$

$$A^{-1}-B=\begin{bmatrix}1 & -3\\ -1 & 4\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2 & -1\\ -3 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & -2\\ 2 & -1\end{bmatrix}$$

$$C=\begin{bmatrix}-1 & -2\\ 2 & -1\end{bmatrix}$$

20

$$A^2=2A-3I \implies A^3=A(A^2)=A(2A-3I)$$
$$=2A^2-3A$$
$$=2(2A-3I)-3A$$
$$=4A-6I-3A$$
$$=A-6I$$

21

ليكن x عدد القوارب التي حمولتها 4 أشخاص، y عدد القوارب التي حمولتها 7 أشخاص.

$$x+y=8$$
$$4x+7y=50$$

$$AX=B \implies \begin{bmatrix}1 & 1\\ 4 & 7\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8\\ 50\end{bmatrix}$$

$$|A|=7-4=3$$

$$A^{-1}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}7 & -1\\ -4 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{7}{3} & -\frac{1}{3}\\ -\frac{4}{3} & \frac{1}{3}\end{bmatrix}$$

$$X=A^{-1}B=\begin{bmatrix}\frac{7}{3} & -\frac{1}{3}\\ -\frac{4}{3} & \frac{1}{3}\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}8\\ 50\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\ 6\end{bmatrix}$$

عدد القوارب التي حمولتها 4 أشخاص هو2، وعدد القوارب التي حمولتها 7 أشخاص هو 6.

22	$\|A\| = ad - cb$ $A^{-1} = \frac{1}{ad-cb}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ العدد $\frac{1}{ad-cb}$ قد يكون موجبًا أو سالبًا، وجميع عناصر المصفوفة $\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ هي أعداد موجبة، إذن، إما أن تكون جميع عناصر المصفوفة A^{-1} موجبة إذا كانت $\|A\| > 0$، أو جميعها سالبة إذا كانت $\|A\| < 0$.
23	$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\|A\| = 2$, $A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$, $\|B\| = 3 - 1 = 2$, $B^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ $AB = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -11 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$, $\|AB\| = 15 - 11 = 4$ $(AB)^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 3 & 11 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{11}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{5}{4} \end{bmatrix}$ $B^{-1} \times A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{11}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{5}{4} \end{bmatrix} = (AB)^{-1}$
24	المصفوفة المختلفة هي المصفوفة $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ لأنها غير منفردة، بينما بقية المصفوفات في المجموعة منفردة.

25	$BA^2 = A \implies BAA = A$ $\implies (BAA)A^{-1} = AA^{-1}$ $\implies BA(AA^{-1}) = AA^{-1}$ $\implies (BA)I = I$ $\implies BA = I$ $\implies (BA)A^{-1} = IA^{-1}$ $\implies B(AA^{-1}) = A^{-1}$ $\implies BI = A^{-1}$ $\implies B = A^{-1}$ $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$, $\lvert A \rvert = 4 - 3 = 1$, $A^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ $\implies B = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

	اختبار نهاية الوحدة صفحة 54
1	a
2	D
3	d
4	b
5	a
6	D
7	$\|A\| = (a-3)(a+2)+4 = a^2 - a - 2$
8	$\|A\| = 0 \implies a^2 - a - 2 = 0$ $\implies (a-2)(a+1) = 0$ $\implies a = 2 \ , \ a = -1$
9	$a = 3$ $A = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \ , \ \|A\| = 0 + 4 = 4 \ , \ A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.25 & 0.5 \\ -0.5 & 0 \end{bmatrix}$
10	$C(B+D) = \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ -4 & 1 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} \times \left(\begin{bmatrix} 6 & 2 & -5 \\ 3 & 7 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 4 & 2 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \right)$ $= \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ -4 & 1 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 12 & 6 & -3 \\ 4 & 5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 72 & 63 & 0 \\ -44 & -19 & 13 \\ 32 & 40 & 8 \end{bmatrix}$
11	$AB = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 6 & 2 & -5 \\ 3 & 7 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & -8 & -23 \\ -3 & -7 & -4 \end{bmatrix}$
12	بما أن C,B من رتبتين مختلفتين، فلا يمكن إيجاد $B + C$
13	بما أن C,B من رتبتين مختلفتين، فلا يمكن إيجاد $2B - 3C$
14	$\begin{vmatrix} 3 & -7 & 6 \\ 1 & 0 & 8 \\ -2 & 11 & 9 \end{vmatrix} = 3 \times \begin{vmatrix} 0 & 8 \\ 11 & 9 \end{vmatrix} + 7 \times \begin{vmatrix} 1 & 8 \\ -2 & 9 \end{vmatrix} + 6 \times \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 11 \end{vmatrix}$ $= 3(0 - 88) + 7(9 + 16) + 6(11 + 0)$ $= -264 + 175 + 66 = -23$

15	$\begin{bmatrix}71 & 66\\ 68 & 59\\ 32 & 22\\ 11 & 14\end{bmatrix}$ رتبة هذه المصفوفة هي 4×2
16	$AB = \begin{bmatrix}x & 6\\ 4 & 3\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}2 & 3\\ 2 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2x+12 & 3x+6\\ 14 & 15\end{bmatrix}$ $BA = \begin{bmatrix}2 & 3\\ 2 & 1\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}x & 6\\ 4 & 3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2x+12 & 21\\ 2x+4 & 15\end{bmatrix}$ $AB = BA \implies 3x+6 = 21 \implies x = 5$
17	$A^2 + kI = hA \implies \begin{bmatrix}3 & 2\\ 7 & 5\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}3 & 2\\ 7 & 5\end{bmatrix} + k\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} = h\begin{bmatrix}3 & 2\\ 7 & 5\end{bmatrix}$ $\implies \begin{bmatrix}23 & 16\\ 56 & 39\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}k & 0\\ 0 & k\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3h & 2h\\ 7h & 5h\end{bmatrix}$ $16 = 2h \implies h = 8$ $23 + k = 3h = 24 \implies k = 1$
18	$BA - 2C^2 = \begin{bmatrix}3\\ 2\end{bmatrix} \times [2 \quad -2] - 2\begin{bmatrix}1 & -2\\ 4 & -1\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}1 & -2\\ 4 & -1\end{bmatrix}$ $= \begin{bmatrix}6 & -6\\ 4 & -4\end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix}-7 & 0\\ 0 & -7\end{bmatrix}$ $= \begin{bmatrix}6 & -6\\ 4 & -4\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}14 & 0\\ 0 & 14\end{bmatrix}$ $= \begin{bmatrix}20 & -6\\ 4 & 10\end{bmatrix}$
19	$2X - \begin{bmatrix}5 & -3\\ 6 & 3\end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix}-1 & 7\\ 2 & 5\end{bmatrix} \implies 2X = \begin{bmatrix}-3 & 21\\ 6 & 15\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}5 & -3\\ 6 & 3\end{bmatrix}$ $\implies 2X = \begin{bmatrix}2 & 18\\ 12 & 18\end{bmatrix}$ $\implies X = \begin{bmatrix}1 & 9\\ 6 & 9\end{bmatrix}$

20

$$A=\begin{vmatrix}-3 & 1 & 1\\ 1 & 5 & 1\\ 5 & 2 & 1\end{vmatrix}=-3\times\begin{vmatrix}5 & 1\\ 2 & 1\end{vmatrix}-1\times\begin{vmatrix}1 & 1\\ 5 & 1\end{vmatrix}+1\times\begin{vmatrix}1 & 5\\ 5 & 2\end{vmatrix}$$

$$=-3(5-2)-1(1-5)+1(2-25)$$

$$=-9+4-23=-28$$

$$Area=\frac{1}{2}|A|=\frac{1}{2}\times 28=14$$

21

$$3x-2y=8$$

$$5x+3y=13$$

$$C=\begin{bmatrix}3 & -2\\ 5 & 3\end{bmatrix}\ ,\ D=|C|=\begin{vmatrix}3 & -2\\ 5 & 3\end{vmatrix}=9+10=19$$

$$x=\frac{\begin{vmatrix}8 & -2\\ 13 & 3\end{vmatrix}}{19}=\frac{24+26}{19}=\frac{50}{19}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}3 & 8\\ 5 & 13\end{vmatrix}}{19}=\frac{39-40}{19}=\frac{-1}{19}$$

إذن، حل النظام هو: $\left(\frac{50}{19},-\frac{1}{19}\right)$

22

$$x-5y=14$$

$$3x-8y=28$$

$$AX=B\ \Rightarrow\ \begin{bmatrix}1 & -5\\ 3 & -8\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}14\\ 28\end{bmatrix}$$

$$|A|=-8+15=7$$

$$A^{-1}=\frac{1}{7}\begin{bmatrix}-8 & 5\\ -3 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{8}{7} & \frac{5}{7}\\ -\frac{3}{7} & \frac{1}{7}\end{bmatrix}$$

$$X=A^{-1}B=\begin{bmatrix}-\frac{8}{7} & \frac{5}{7}\\ -\frac{3}{7} & \frac{1}{7}\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}14\\ 28\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\ -2\end{bmatrix}$$

إذن، حل هذا النظام هو $(4,-2)$

23

$$B = \begin{bmatrix} 2 & a \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \ , \ |B| = -2 + a$$

$$B^{-1} = \frac{1}{a-2}\begin{bmatrix} -1 & -a \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{a-2} & \frac{-a}{a-2} \\ \frac{1}{a-2} & \frac{2}{a-2} \end{bmatrix}$$

$$B + B^{-1} = I \implies \begin{bmatrix} 2 & a \\ -1 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{-1}{a-2} & \frac{-a}{a-2} \\ \frac{1}{a-2} & \frac{2}{a-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\implies 2 + \frac{-1}{a-2} = 1 \implies \frac{-1}{a-2} = -1 \implies a - 2 = 1 \implies a = 3$$

24

أفترض أن عائشة تستعمل $x\ ml$ من المحلول الذي تركيزه 40%، فسوف تستعمل $4x\ ml$ من المحلول الذي تركيزه 10%، وليكن ما تستعمله من المحلول الذي تركيزه 20% هو $y\ ml$.

المعادلة الأولى هي: مجموع ما تستعمله من المحاليل الثلاثة هو $100\ ml$

$$x + 4x + y = 100 \implies 5x + y = 100$$

المعادلة الثانية هي: كمية الحمض في المزيج تساوي $18\ \text{mL}$

$$18\%(100) = 18$$

$$0.40x + 4x(0.10) + 0.20y = 18 \implies 0.4x + 0.1y = 9$$

المعادلة المصفوفية التي تمثل هاتين المعادلتين هي:

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 0.4 & 0.1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$|A| = 5(0.1) - 0.4(1) = 0.1$$

$$A^{-1} = \frac{1}{0.1}\begin{bmatrix} 0.1 & -1 \\ -0.4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -10 \\ -4 & 50 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -10 \\ -4 & 50 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 100 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 100 - 90 \\ -400 + 450 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 50 \end{bmatrix}$$

إذن سوف تستعمل عائشة $10\ \text{mL}$ من المحلول الذي تركيزه 40%، و $50\ \text{mL}$ من الذي تركيزه 20%، و $40\ \text{mL}$ من الذي تركيزه 10%.