طرق التكامل

ل. ك .م .أ (لكما)

$\int ودهـ = و.هـ - \int هـ دو$

L.I.A.T.E

$\int udv = u\,v - \int v\,du$

عبدالقادر الحسنات 078 531 88 77

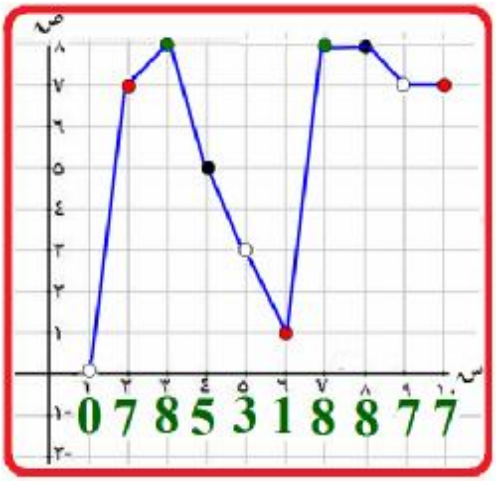
للصف الثاني الثانوي

العلمي والصناعي

٢٠١٧/٢٠١٦

إعداد الأستاذ: عبدالقادر الحسنات 078 531 88 77

$y = e^x$



π

I ♥ Maths

$\sqrt{16}$ Ever

$2 \infty \& >$

I LOVE MATH

SAID NO ONE EVER!

طرق التكامل

هناك عدة طرق للتكامل منها :

١) التحليل إلى العوامل أو المتطابقات : والهدف منه تحويل الضرب والقسمة إلى جمع أو طرح ، لأن التكامل يمكن توزيعه في حالتي الجمع والطرح ولا يمكن ذلك في حالتي الضرب و القسمة

مثلاً

٢ $\int \frac{س^٢ - ٩}{س - ٣}$ دس $= \int \frac{(س - ٣)(س+٣)}{س - ٣}$ دس $= \int$ (س+٣)دس $= \frac{١}{٢}$ س^٢ +٣س + جـ

٢ (٢س+١)(٣س- ٤) دس $= \int$(٦س^٢- ٨س + ٣س – ٤) دس $= \int$(٦س^٢-٥س – ٤) دس = ٣س^٣ - $\frac{٥}{٢}$ س^٢-٤س +جـ

٣ $\int \frac{س^٢ + س هـ^{-س} + ١}{س}$ دس $= \int$ (س + $هـ^{-س}$ + $\frac{١}{س}$) دس $= \frac{١}{٢}$ س^٢ - $هـ^{-س}$ + لوس + جـ

٤ $\int$ ٢ جا٣س جتا٣س دس $= \int$ جا٦س دس $= -\frac{١}{٦}$ جتا ٦س + جـ (استخدام المتطابقة : جا٢س = ٢جاس جتاس)

٥ $\int$ جا^{٢}س دس $= \int \frac{١}{٢}$ (١ – جتا٢س)دس $= \frac{١}{٢}$ (س– $\frac{١}{٢}$ جا٢س)+ جـ (استخدام المتطابقة : جا^{٢}س $= \frac{١}{٢}$ (١– جتا٢س)

٦ $\int$ جتا^{٢}س دس $= \int \frac{١}{٢}$ (١+ جتا٢س)دس $= \frac{١}{٢}$ (س+ $\frac{١}{٢}$ جا٢س)+ جـ (استخدام المتطابقة : جا^{٢}س $= \frac{١}{٢}$ (١+ جتا٢س)

٧ $\int$ جا٤س جتا٨س دس $= \int \frac{١}{٢}$ (جا١٢س + جا(-٤س))دس $= \frac{١}{٢}$ (-$\frac{١}{١٢}$ جتا١٢س + $\frac{١}{٤}$ جتا(-٤س))+ جـ

(استخدام المتطابقة : جاس جتاص= $\frac{١}{٢}$ (جا(س+ص) + جا(س-ص)))

٨ $\int$ جا٦س جا٤س دس $= \int \frac{١}{٢}$ (جتا٢س – جتا١٠س)دس $= \frac{١}{٢}$ ($\frac{١}{٢}$ جا٢س – $\frac{١}{١٠}$ جا١٠س)+ جـ

(استخدام المتطابقة : جاس جاص= $\frac{١}{٢}$ (جتا(س- ص) – جتا(س+ص)))

٩ $\int$ جتا٥س جتا٣س دس $= \int \frac{١}{٢}$ (جتا٨س + جتا٢س)دس $= \frac{١}{٢}$ ($\frac{١}{٨}$ جا٨س + $\frac{١}{٢}$ جا٢س)+ جـ

(استخدام المتطابقة : جتاس جتاص= $\frac{١}{٢}$ (جتا(س+ ص) + جتا(س- ص)))

١٠ $\int \frac{ظاس}{جتاس}$ دس $= \int$ ظاس $\times \frac{١}{جتاس}$ دس $= \int$ ظاس قاس دس = قاس + جـ

١١ $\int$ (قتاس + ظتاس)^٢ دس $= \int$ (قتا^{٢}س +٢قتاس ظتاس + ظتا^{٢}س) دس $= \int$ (قتا^{٢}س+٢قتاس ظتاس + قتا^{٢}س – ١) دس

$= \int$ (٢قتا^{٢}س+٢قتاس ظتاس – ١) دس = - ٢ ظتاس -٢ قتاس – س + جـ

١٢ $\int \frac{جتا٣س}{جتاس}$ دس $= \int \frac{جتا(٢س+س)}{جتاس}$ دس $= \int \frac{جتا٢س جتاس – جا٢س جاس}{جتاس}$ دس

$= \int ($ $\frac{جتا٢س \cancel{جتاس}}{\cancel{جتاس}}$ - $\frac{٢\cancel{جاس جتاس} جاس}{\cancel{جتاس}}$) دس $= \int$(جتا٢س– ٢جا^{٢}س) دس $= \int$(جتا٢س – ٢ × $\frac{١}{٢}$(١– جتا٢س)) دس

$= \int$(جتا٢س – ١+ جتا٢س) دس $= \int$(٢جتا٢س – ١) دس=٢ × $\frac{١}{٢}$ جا٢س – س + جـ = جا٢س – س + جـ

٢)طريقة التعويض: تستخدم عندما يكون هناك حاصل ضرب أو قسمة مقدارين ،وأحد هذين المقدارين أو جزء منه مشتقة للآخر أو عند وجود زاوية غير خطية في الاقترانات المثلثية أو الاقتران الأسي مرفوع لقوة غير خطية مثلاً

٢

١٣] ٥س جا٤س٢ دس : نفرض أن ص=٤س٢ ⇐ $\frac{د ص}{د س}$ = ٨س ⇐ دس = $\frac{د ص}{٨س}$

] ٥س جا٤س٢ دس =] ٥س جا ص $\frac{د ص}{٨س}$ =] $\frac{٥}{٨}$ جا ص دص = - $\frac{٥}{٨}$ جتا ص +جـ = - $\frac{٥}{٨}$ جتا (٤س٢) +جـ

١٤] س٣√س٢ -١ دس : نفرض أن ص= س٢-١ ⇐ $\frac{د ص}{د س}$ = ٢س

] س٣√ص $\frac{د ص}{٢س}$ =]س٢√ص دص = $\frac{١}{٢}$] (ص-١)√ص دص= $\frac{١}{٢}$] (ص-١)ص$^{\frac{١}{٢}}$ دص= $\frac{١}{٢}$] (ص$^{\frac{٣}{٢}}$ -ص$^{\frac{١}{٢}}$) دص

= $\frac{١}{٢}$ ($\frac{٢}{٥}$ ص$^{\frac{٥}{٢}}$ - $\frac{٢}{٣}$ ص$^{\frac{٣}{٢}}$)+جـ = $\frac{١}{٢}$ ($\frac{٢}{٥}$ (س٢-١)$^{\frac{٥}{٢}}$ - $\frac{٢}{٣}$ (س٢-١)$^{\frac{٣}{٢}}$) +جـ

١٥] جا٣س دس=] جاس ×جا٢س دس=] جاس ×(١- جتا٢س) دس : نفرض أن ص=جتاس ⇐ $\frac{د ص}{د س}$ = - جاس

=]جاس ×(١- ص٢) $\frac{د ص}{- جاس}$ = - (ص - $\frac{١}{٣}$ ص٣)+جـ = - (جتاس - $\frac{١}{٣}$ جتا٣س)+جـ

١٦] ظا٢س قا٢س دس : نفرض مثلاً أن ص=قاس ⇐ $\frac{د ص}{د س}$ = قاس ظاس ولكن بعد الاختصار تبقى ظاس

لذلك نعكس العملية ونفرض أن ص=ظاس ⇐ $\frac{د ص}{د س}$ = قا٢س

] ص٢ دص= $\frac{١}{٣}$ ص٣ +جـ = $\frac{١}{٣}$ ظا٣س+جـ

عبدالقادر الحسنات 078 531 88 77

١٧] ظا٣س قا٣س دس : لو فرضنا مثلاً أن ص=ظاس فإن $\frac{د ص}{د س}$ = قا٢س وسيبقى (قاس) بعد الاختصار

لذلك نعكس العملية ونفرض أن ص=قاس فتكون $\frac{د ص}{د س}$ = قا س ظاس

] ظا٣س قا٣س دس =]ظا٣س ص٣ $\frac{د ص}{قاس ظاس}$ =]ظا٢س ص٣ $\frac{د ص}{ص}$ =](قا٢س-١) ص٢ دص

=](ص٢-١) ص٢ دص =](ص٤- ص٢)دص = $\frac{١}{٥}$ ص٥ - $\frac{١}{٣}$ ص٣+جـ = $\frac{١}{٥}$ قا٥ س- $\frac{١}{٣}$ قا٣س+ جـ

١٨] ظا٣س قا٢س دس : نفرض أن ص=قاس ⇐ $\frac{د ص}{د س}$ = قاس ظاس

] ظا٣س ص٢ $\frac{د ص}{قاس ظاس}$ =]ظا٢س ص دص =](قا٢س-١) ص دص=](ص٢-١) ص دص

=](ص٣- ص)دص = $\frac{١}{٤}$ ص٤ - $\frac{١}{٢}$ ص٢+جـ = $\frac{١}{٤}$ قا٤ س- $\frac{١}{٢}$ قا٢س + جـ

عبدالقادر الحسنات 078 531 88 77

ملاحظة] ظا٢س قا٣س دس : يمكن حله بطريقة الأجزاء (فيما بعد)

وبهذا نكون قد استعرضنا جميع احتمالات(قاس ظاس) من حيث القوى الفردية والزوجية

١٩ $\int_{1}^{2} س^{٤} \sqrt{\frac{(٢-س)}{س^{٢}}}^{٣}$ دس (وزارة ٢٠١٧ شتوية / ٦علامات)

$$\int_{1}^{2} س^{٤} \sqrt{\frac{(٢-س)^{٣}}{س^{٦}}} \text{ دس} = \int_{1}^{2} س^{٤} \times \frac{١}{|س^{٣}|} \sqrt{(٢-س)^{٣}} \text{ دس} = \int_{1}^{2} س \sqrt{(٢-س)^{٣}} \text{ دس}$$

نفرض أن ص =٢- س ⇐ دص = - دس كذلك س = ٢- ص : عندما س=١فإن ص=١ وعندما س=٢ فإن ص=٠

$$= \int_{1}^{0} (٢-ص) \sqrt{ص^{٣}}(- \text{دص}) = \int_{1}^{0} (ص-٢) ص^{\frac{٣}{٢}} \text{دص} = \int_{1}^{0} (ص^{\frac{٥}{٢}} - ٢ص^{\frac{٣}{٢}}) \text{دص} = [(\frac{٢}{٧} ص^{\frac{٧}{٢}} - ٢ \times \frac{٢}{٥} ص^{\frac{٥}{٢}})]_{1}^{0}$$

$$= (٠-٠) - (\frac{٢}{٧} - ٢ \times \frac{٢}{٥}) = - (\frac{٢}{٧} - \frac{٤}{٥}) = - (- \frac{١٨}{٣٥}) = \frac{١٨}{٣٥}$$

٢٠ $\int_{1}^{0} \frac{- س}{(س+١) - \sqrt{س+١}}$ دس (وزارة ٢٠١٤ صيفية / ٧علامات)

نفرض أن ص=$\sqrt{س+١}$ ⇐ ٢ص دص = دس كذلك س+١ = ص^{٢} ⇐ - س=١- ص^{٢} وعندما س=٠، ص=١ وعندما س=٢ ، ص=$\sqrt{٢}$

$$\int_{1}^{\sqrt{٢}} \frac{١ - ص^{٢}}{ص^{٢} - ص} ٢ص \text{ دص} = \int_{1}^{\sqrt{٢}} \frac{(١-ص)(١+ص)}{ص(ص-١)} ٢ص \text{ دص} = - \int_{1}^{\sqrt{٢}} (٢+٢ص) \text{ دص} = - [(٢ص+ص^{٢})]_{1}^{\sqrt{٢}} = ١- ٢\sqrt{٢}$$

٢١ $\int \frac{\text{لو}_{هـ} (\text{ظاس})}{\text{جا}^{٢}س}$ دس (وزارة ٢٠١٦ صيفية / ٦علامات)

نفرض أن ص= لو ظاس ⇐ $\frac{\text{ع ص}}{\text{ع س}} = \frac{\text{قا}^{٢}س}{\text{ظاس}}$ ⇐ دس = $\frac{\text{ظاس}}{\text{قا}^{٢}س}$ دص = $\frac{\text{جاس جتا}^{٢}س}{\text{جتاس}}$ دص = جاس جتاس دص

$$\int \frac{\text{لو}_{هـ} (\text{ظاس})}{\text{جا}^{٢}س} \text{دس} = \int \frac{ص}{٢\text{جاس جتاس}} \text{جاس جتاس دص} = \int \frac{١}{٢} ص \text{ دص} = \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢} ص^{٢} + \text{جـ} = \frac{١}{٤} (\text{لو}_{هـ} \text{ظاس})^{٢} + \text{جـ}$$

٢٢ $\int (٤س- ٦) هـ^{٣س- س^{٢}}$ دس

نفرض أن ص= ٣س- س^{٢} ⇐ $\frac{\text{ع ص}}{\text{ع س}}$ = ٣ – ٢س ⇐ دس = $\frac{\text{د ص}}{٣ - ٢س}$

$$\int ٢(٢س- ٣) هـ^{ص} \frac{\text{د ص}}{٣ - ٢س} = \int (-٢) هـ^{ص} \text{ دص} = - ٢ هـ^{ص} + \text{جـ} = - ٢ هـ^{٣س- س^{٢}} + \text{جـ}$$

٢٣ $\int \frac{\text{ظاس}}{\text{جتا}^{٢}س} هـ^{\text{قا}^{٢}س}$ دس : نفرض أن ص= قا^{٢}س ⇐ $\frac{\text{ع ص}}{\text{ع س}}$ = ٢ قاس × قاس ظاس ⇐ دس = $\frac{\text{د ص}}{٢ \text{ قا}^{٢}س \text{ ظاس}}$

$$= \int \frac{\cancel{\text{ظاس}}}{\text{جتا}^{٢}س} هـ^{ص} \frac{\text{د ص}}{٢ \text{ قا}^{٢}س \cancel{\text{ظاس}}} = \int \frac{١}{٢} هـ^{ص} \text{ دص} = \frac{١}{٢} هـ^{ص} + \text{جـ} = \frac{١}{٢} هـ^{\text{قا}^{٢}س} + \text{جـ}$$

٢٤ $\int \frac{\text{قتا}^{٢}\sqrt{س}}{\sqrt{س}}$ دس : نفرض ص =$\sqrt{س}$ ⇐ $\frac{\text{ع ص}}{\text{ع س}} = \frac{١}{٢\sqrt{س}}$ ⇐ دس = ٢ص دص

$$\int \frac{\text{قتا}^{٢} ص}{ص} ٢ ص \text{ دص} = \int ٢ \text{ قتا}^{٢} ص \text{ دص} = - ٢ \text{ ظتاص} + \text{جـ} = - ٢ \text{ ظتا}\sqrt{س} + \text{جـ}$$

٤

٣) طريقة الأجزاء: تستخدم عندما يكون هناك حاصل ضرب أو قسمة مقدارين وأحدهما ليس مشتقة للآخر ، وخصوصاً عند وجود (لـو س) أو(∫ س جتاس دس) أو(∫ س٢ لـوس دس) ،(∫ س هـ^س دس)

وتقوم طريقة التكامل بالأجزاء على القاعدة :∫ و دهـ = و × هـ – ∫ هـ دو

حيث يتم تقسيم المقدار المراد إجراء التكامل له إلى جزأين أحدهما (ق) وعادة يكون سهل الاشتقاق والآخر (دهـ) وعادة يكون سهل التكامل

والتحدي الذي يواجه الطالب في هذه الطريقة هو تحديد و (الاقتران أو المقدار الذي سنقوم باشتقاقه) و (دهـ) (الاقتران الذي سنقوم بتكامله)

ولتسهيل ذلك نستخدم قاعدة ((لكما)) أو (ل ك م أ) حيث

ل : اقتران لوغاريتمي
ك : كثير حدود أو مقدار كسري
م : اقتران مثلثي (دائري)
أ : اقتران أسي

فعندما يكون هناك حاصل ضرب مقدارين فالذي يكون حرفه أولاً في ((لكما)) نفرضه و والآخر دهـ

مثلاً :١) ∫س٢ لـو^هـ (س +١) دس : كثير حدود ولوغاريتمي وحرف اللام يأتي قبل الكاف في(لكما) لذلك و = لـو^هـ (س +١)

٢) ∫ س هـ^س جا ٥س دس : أسي ومثلثي وحرف الميم يأتي أولاً في (لكما) لذلك و = جا٥س

٣) ∫ (٤س / ٣س-١) قا٢س دس : كسري ومثلثي وحرف الكاف يأتي أولاً في (لكما) لذلك و = ٤س / ٣س-١

٤) ∫ جاس جتاس دس : كلاهما مثلثي لذلك أي منهما يمكن أن يكون و

٢٥ ∫س لـو^هـ س دس : مقداران ليس أحدهما مشتقة للآخر لذلك نستخدم طريقة الأجزاء

كثير حدود (س) ولوغاريتمي : اللام قبل الكاف في لكما ئ و = لـو^هـ س

و = لـو^هـ س ، دهـ = س

دو = ١/س ← هـ = ½ س٢

∫ و دهـ = و × هـ – ∫ هـ دو

∫س لـو^هـ س دس = (½ س٢)(لـو^هـ س) – ∫ ½ س٢ (١/س) دس

= (½ س٢)(لـو^هـ س) – ½ ∫ س دس

= (½ س٢)(لـو^هـ س) – ½ × ½ س٢ دس + جـ

٢٦ ∫ لـو^هـ س دس = س لـو^هـ س - ∫ س (١/س) دس

= س لـو^هـ س - س +جـ

و = لـو^هـ س ، دهـ = دس

دو = ١/س ← هـ = س

٢٧ $\int (٥س+٣)(٢س+١)^{٤}$ دس

وه = (٥س+٣) ، دهـ = (٢س+١)^٤

دوه = ٥ ، هـ = $\frac{١}{١٠}$ (٢س+١)^٥

= (٥س+٣) × $\frac{١}{١٠}$ (٢س+١)^٥ - $\int \frac{١}{١٠}$ (٢س+١)^٥ (٥) دس

= (٥س+٣) × $\frac{١}{١٠}$ (٢س+١)^٥ - $\frac{٥}{١٠}$ × $\frac{١}{١٢}$ (٢س+١)^٦ + جـ

٢٨ $\int س^{٢}\sqrt{٣س-٢}$ دس

وه = س^٢ ، دهـ = $\sqrt{٣س-٢}$ = (٣س-٢)^$\frac{١}{٢}$

دوه = ٢س ، هـ = $\frac{٢}{٩}$ (٣س-٢)^$\frac{٣}{٢}$

= س^٢ $\frac{٢}{٩}$ (٣س-٢)^$\frac{٣}{٢}$ - $\int$ ٢س $\frac{٢}{٩}$ (٣س-٢)^$\frac{٣}{٢}$ دس

= $\frac{٢}{٩}$ س^٢ (٣س-٢)^$\frac{٣}{٢}$ - $\frac{٤}{٩}$ $\int$ س (٣س-٢)^$\frac{٣}{٢}$ دس

نستخدم طريقة الأجزاء مرة أخرى للإيجاد التكامل : $\int$ س (٣س-٢)^$\frac{٣}{٢}$ دس

وه = س ، دهـ = (٣س-٢)^$\frac{٣}{٢}$

دوه = دس ، هـ = $\frac{٢}{١٥}$ (٣س-٢)^$\frac{٥}{٢}$

$\int$ س (٣س-٢)^$\frac{٣}{٢}$ دس = س × $\frac{٢}{١٥}$ (٣س-٢)^$\frac{٥}{٢}$ - $\int \frac{٢}{١٥}$ (٣س-٢)^$\frac{٥}{٢}$ دس

= $\frac{٢}{١٥}$ س (٣س-٢)^$\frac{٥}{٢}$ - $\frac{٢}{١٥}$ × $\frac{٢}{٢١}$ (٣س-٢)^$\frac{٧}{٢}$ + جـ

$\int س^{٢}\sqrt{٣س-٢}$ دس = $\frac{٢}{٩}$ س^٢ (٣س-٢)^$\frac{٣}{٢}$ - $\frac{٤}{٩}$ ($\frac{٢}{١٥}$ س (٣س-٢)^$\frac{٥}{٢}$ - $\frac{٢}{١٥}$ × $\frac{٢}{٢١}$ (٣س-٢)^$\frac{٧}{٢}$) + جـ

٢٩ $\int$ س هـ^س دس

وه = س ، دهـ = هـ^س دس

دوه = دس ، هـ = هـ^س

س كثير حدود ، هـ^س اقتران أسي :وه قبل أ في (لكما) ⇐ وه=س

= س هـ^س - $\int$ هـ^س دس = س هـ^س - هـ^س + جـ

٣٠ $\int$ جاس جتاس دس :

نفرض أن وه=جاس ، دهـ = جتاس

$\int$ جاس جتاس دس =جاس ×جاس – $\int$ جاس جتاس دس

دوه = جتاس ، هـ = جاس

$\int$ جاس جتاس دس + $\int$ جاس جتاس دس =جا^٢س

٢$\int$ جاس جتاس دس =جا^٢س ⇐ $\int$ جاس جتاس دس = $\frac{١}{٢}$ جا^٢س + جـ

٣١ $\int$ جا$\sqrt{س}$ دس : زاوية غير خطية ⇐ تعويض ثم أجزاء:

نفرض أن ص=$\sqrt{س}$ ⇐ د س= ٢ص دص

$\int$ جا$\sqrt{س}$ دس = $\int$ ٢ص جا ص دص

نفرض أن وه = ص ، دهـ = جاص

= ٢$\int$ جا ص دص = ٢(- ص جتاص – $\int$ - جتاص دص

⇐ دوه=دص ، هـ = - جتاص

= ٢(- $\sqrt{س}$ جتا$\sqrt{س}$ + جا$\sqrt{س}$) +جـ

٣٢ ∫ ظا٢س قا٣س دس : (أعتقد أن هذا السؤال أعلى من مستوى التوجيهي وسأحله للعلم فقط)

بما أن: ظا٢س= قا٢س – ١ فإن ∫ ظا٢س قا٣س دس=∫(قا٢س – ١) قا٣س دس =∫ قا٥ س دس – ∫ قا٣س دس

الآن نجد∫ قا٥ س دس = ∫ قا٣س قا٢س دس:

نستخدم الأجزاء :وهـ = قا٣س ⇐ دوهـ=٣ قا٣س ظاس ، دهـ = قا٢س ⇐ هـ = ظاس

∫ قا٥ س دس=(قا٣س)(ظاس) – ∫ ظاس×٣ قا٣س ظاس دس

=(ظاس)(٣ قا٣س ظاس) – ٣∫ ظا٢س قا٣س دس

=(ظاس)(٣ قا٣س ظاس) – ٣∫ (قا٢س – ١) قا٣س دس

=(ظاس)(٣ قا٣س ظاس) – ٣∫ قا٥س دس + ٣∫ قا٣س دس

٤∫ قا٥ س دس=(ظاس)(٣ قا٣س ظاس) + ٣∫ قا٣س دس

∫ قا٥ س دس= $\frac{١}{٤}$ (ظاس)(٣ قا٣س ظاس) + $\frac{٣}{٤}$∫ قا٣س دس

⇐ ∫ ظا٢س قا٣س دس = ∫ قا٥ س دس – ∫ قا٣س دس

= $\frac{١}{٤}$ (ظاس)(٣ قا٣س ظاس) + $\frac{٣}{٤}$∫ قا٣س دس–∫ قا٣س دس

=$\frac{١}{٤}$ (ظاس)(٣ قا٣س ظاس) – $\frac{١}{٤}$∫ قا٣س دس

∫ قا٣س دس=∫ قاس قا٢س دس : نستخدم الأجزاء : :وهـ = قاس ⇐ دوهـ=قاس ظاس ، دهـ = قا٢س ⇐ هـ = ظاس

⇐ ∫ قا٣س دس= (قاس)(ظاس) - ∫ ظاس قاس ظاس دس

= (قاس)(ظاس) - ∫ ظا٢س قاس دس

= (قاس)(ظاس) - ∫ (قا٢س – ١) قاس دس

∫ قا٣س دس = (قاس)(ظاس) -∫ قا٣س دس +∫ قاس دس

٢∫ قا٣س دس = (قاس)(ظاس) +∫ قاس دس

٢∫ قا٣س دس = (قاس)(ظاس) +∫ قاس $\frac{\text{قاس + ظاس}}{\text{قاس + ظاس}}$ دس (الضرب في المرافق الخاص)

٢∫ قا٣س دس = (قاس)(ظاس) +∫ $\frac{\text{قا٢س + قاس ظاس}}{\text{قاس + ظاس}}$ دس : البسط مشتقة للمقام ⇐ لوغاريتم

∫ قا٣س دس = $\frac{١}{٢}$ (قاس)(ظاس)+ $\frac{١}{٢}$ لـو هـ (قاس+ظاس) +جـ

ولكن ∫ ظا٢س قا٣س دس=∫ قا٥ س دس – ∫ قا٣س دس

=$\frac{١}{٤}$ (ظاس)(٣ قا٣س ظاس) – $\frac{١}{٤}$∫ قا٣س دس

=$\frac{٣}{٤}$ ظا٢س قا٣س – $\frac{١}{٤}$ ($\frac{١}{٢}$ (قاس)(ظاس)+ $\frac{١}{٢}$ لـو هـ (قاس+ظاس)) +جـ

٧

٤) طريقة الكسور الجزئية: تستخدم عندما يكون هناك اقتران نسب (مكون من بسط ومقام وكل منهما كثير حدود) والمقام عبارة تربيعية يمكن تحليلها إلى عاملين مختلفين ودرجة البسط أصغر من درجة المقام عندها نحلل المقام ونكتب الكسر كمجموع مقدارين بسطاهما(أ) و (ب) ونجد قيم (أ) و(ب) ثم نجزئ التكامل

مثلاً: $\frac{٢س+٥}{س^{٢}-٢س-٣} = \frac{٢س+٥}{(س-٣)(س+١)} = \frac{أ}{(س-٣)} + \frac{ب}{(س+١)} = \frac{أ(س+١)+ب(س-٣)}{(س-٣)(س+١)}$

إذاً : $٢س+٥ = أ(س+١)+ب(س-٣)$: نفرض س=-١ ثم س=٣

عندما س=-١ فإن $-٢+٥ = -٤ب \Leftarrow ب = -\frac{٣}{٤}$

عندما س=٣ فإن $٦+٥ = ٤أ \Leftarrow ب = \frac{١١}{٤}$

$\Leftarrow \frac{٢س+٥}{س^{٢}-٢س-٣} = \frac{\frac{١١}{٤}}{(س-٣)} + \frac{-\frac{٣}{٤}}{(س+١)}$

٣٣ $\int \frac{٢س+٥}{س^{٢}-٢س-٣}$ دس $= \int (\frac{\frac{١١}{٤}}{(س-٣)} + \frac{-\frac{٣}{٤}}{(س+١)})$ دس $= \frac{١١}{٤}$ لـو$_{هـ}$ (س-٣) $- \frac{٣}{٤}$ لـو$_{هـ}$ (س+١) + جـ

٣٤ $\int \frac{٢س^{٢}+٥}{س^{٢}+س-٢}$ دس : درجة البسط تساوي درجة المقام لذلك نقسم البسط على المقام (قسمة خوارزمية)

٢

$س^{٢}+س-٢ \overline{)\ ٢س^{٢}+٥}$

$٢س^{٢}+٢س-٤$

$-٢س+٩$

$= \int \frac{٢س^{٢}+٥}{س^{٢}+س-٢}$ دس $= \int ٢$ دس $+ \int \frac{-٢س+٩}{س^{٢}+س-٢}$ دس

$\frac{-٢س+٩}{س^{٢}+س-٢} = \frac{أ}{س+٢} + \frac{ب}{س-١} \Leftarrow أ = -\frac{١٣}{٣}$ ، $ب = \frac{٧}{٣}$

$\int \frac{٢س^{٢}+٥}{س^{٢}+س-٢}$ دس $= ٢س - \frac{١٣}{٣}$ لـو$_{هـ}$ (س+٢) $+ \frac{٧}{٣}$ لـو$_{هـ}$ (س-١) + جـ

٣٥ $\int \frac{٢س^{٣}+٢س^{٢}+١}{س^{٢}-٤}$ دس : درجة البسط أكبر من درجة المقام لذلك نقسم البسط على المقام (قسمة خوارزمية)

$٢س+٢$

$س^{٢}-٤ \overline{)\ ٢س^{٣}+٢س^{٢}+١}$

$٢س^{٣}-٨س$

$٢س^{٢}+٨س+١$

$٢س^{٢}-٨$

$٨س+٩$

$= \int \frac{٢س^{٣}+٢س^{٢}+١}{س^{٢}-٤}$ دس $= \int (٢س+٢)$ دس $+ \int \frac{٨س+٩}{س^{٢}-٤}$ دس

$\frac{٨س+٩}{س^{٢}-٤} = \frac{أ}{س+٢} + \frac{ب}{س-٢} \Leftarrow أ = -\frac{١}{٤}$ ، $ب = \frac{٢٥}{٤}$

$\int \frac{٢س^{٣}+٢س^{٢}+١}{س^{٢}-٤}$ دس $= س^{٢}+٢س - \frac{١}{٤}$ لـو$_{هـ}$ (س+٢) $+ \frac{٢٥}{٤}$ لـو$_{هـ}$ (س-٢) + جـ

٨

٣٦ $\int \frac{٣جتاس}{جا^{٢}س - جاس - ٢}$ دس : تعويض ثم كسور جزئية : ص = جاس ومنها $\frac{ع ص}{ع س}$ = جتاس

$\int \frac{٣}{ص^{٢} - ص - ٢}$ دص = $\int \frac{أ}{ص - ٢}$ دص + $\int \frac{ب}{ص + ١}$ دص : أ = ١ ، ب = - ١

= لـو$_{هـ}$ (ص – ٢) - لـو$_{هـ}$ (ص+١) + جـ = لـو$_{هـ}$ (جاس – ٢) - لـو$_{هـ}$ (جاس+١) + جـ

٣٧ $\int \frac{هـ^{س}}{هـ^{٢س} - ٣هـ^{س} - ٤}$ دس : تعويض ثم كسور جزئية : ص = $هـ^{س}$ ومنها $\frac{ع ص}{ع س}$ = $هـ^{س}$

$\int \frac{١}{ص^{٢} - ٣ص - ٤}$ دص = $\int \frac{أ}{ص - ٤}$ دص + $\int \frac{ب}{ص + ١}$ دص : أ = $\frac{١}{٥}$ ، ب = - $\frac{١}{٥}$

= $\frac{١}{٥}$ لـو$_{هـ}$ (ص – ٤) - $\frac{١}{٥}$ لـو$_{هـ}$ (ص+١) + جـ = $\frac{١}{٥}$ لـو$_{هـ}$ ($هـ^{س}$ – ٤) - $\frac{١}{٥}$ لـو$_{هـ}$ ($هـ^{س}$ + ١) + جـ

٣٨ $\int \frac{٥}{س^{٢} - ٨س + ١٦}$ دس = $\int \frac{٥}{(س - ٤)(س - ٤)}$ دس = $\int \frac{٥}{(س - ٤)^{٢}}$ دس = $\int ٥ \times (س - ٤)^{-٢}$ دس

= - $\frac{٥}{٣}$ (س – ٤)$^{-١}$ + جـ

٣٩ $\int \frac{٢س+٣}{س^{٢} + ١٠س + ٢٥}$ دس = $\int \frac{٢س+٣}{(س+٥)(س+٥)}$ دس = $\int \frac{٢س+٣}{(س+٥)^{٢}}$ دس : عوامل غير مختلفة

= $\int (٢س+٣) \times (س+٥)^{-٢}$ دس = $\int (٢س) \times (س+٥)^{-٢}$ دس + $\int (٢) \times (س+٥)^{-٢}$ دس

أجزاء تكامل مباشر

ف = ٢س ، دهـ = (س+٥)$^{-٢}$ ⇐ دف = ٢ دس ، هـ = (س+٥)$^{-١}$

$\int (٢س+٣) \times (س+٥)^{-٢}$ دس = (٢س)(س+٥)$^{-١}$ - $\int (٢) \times (س+٥)^{-١}$ دس - (٢)×(س+٥)$^{-١}$ + جـ

= (٢س)(س+٥)$^{-١}$ - (٢)× لـو$_{هـ}$ (س+٥) - (٢)×(س+٥)$^{-١}$ + جـ

٤٠ $\int$ لـو$_{هـ}$ (س^{٢}+٤س) دس : أولاً أجزاء : ف = لـو$_{هـ}$ (س^{٢}+٤س) ، دهـ = دس ⇐ دف = $\frac{٢س+٤}{س^{٢}+٤س}$ ، هـ = س

= س× لـو$_{هـ}$ (س^{٢}+٤س) - $\int س \times \frac{٢س+٤}{س^{٢}+٤س}$ دس = س× لـو$_{هـ}$ (س^{٢}+٤س) - $\int \frac{٢س+٤}{س+٤}$ دس

٢
٢س + ٤ | س + ٤
٢س + ٨
- ٤

$\int \frac{٢س+٤}{س+٤}$ دس = $\int$ (٢ + $\frac{-٤}{س+٤}$)دس = ٢س – ٤ لـو$_{هـ}$ (س^{٢}+٤س) + جـ

$\int$ لـو$_{هـ}$ (س^{٢}+٤س)دس = س× لـو$_{هـ}$ (س^{٢}+٤س) - ٢س + ٤ لـو$_{هـ}$ (س^{٢}+٤س) + جـ

٤١ $\int \frac{٣ \text{ لو}_{هـ} س}{(س+١)^{٢}}$ دس $= \int ٣ \text{ لو}_{هـ} س \, (س+١)^{-٢}$ دس : أجزاء : ف = ٣ لو$_{هـ}$ س ، دف = (س+١)$^{-٢}$

د ف = $\frac{٤}{س}$ ، هـ = - (س+١)$^{-١}$

$$\int \frac{٣ \text{ لو}_{هـ} س}{(س+١)^{٢}} \text{ دس} = ٣ \text{ لو}_{هـ} س \, (-(س+١)^{-١}) - \int -(س+١)^{-١} \frac{٤}{س} \text{ دس}$$

$$= ٣ \text{ لو}_{هـ} س \, (-(س+١)^{-١}) + \int \frac{٤}{س(س+١)} \text{ دس}$$

$\int \frac{٤}{س(س+١)}$ دس $= \int (\frac{أ}{س} + \frac{ب}{س+١})$ دس : أ = ٤ ، ب = ١

$= ٤ \text{ لو}_{هـ} س + \text{ لو}_{هـ} (س+١) + جـ$

٤٢ $\int \frac{١}{هـ^{س} - ٤}$ دس : تعويض ثم كسور جزئية : ص = هـ^{س} ومنها $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = هـ^{س} ⇐ دص = ص دس = ص دس

$\int \frac{١}{ص(ص-٤)} \text{دص} = \int \frac{أ}{ص-٤} \text{دص} + \int \frac{ب}{ص} \text{دص}$: أ = $\frac{١}{٤}$ ، ب = $-\frac{١}{٤}$

$= \frac{١}{٤} \text{ لو}_{هـ} (ص-٤) - \frac{١}{٤} \text{ لو}_{هـ} (ص) + جـ = \frac{١}{٤} \text{ لو}_{هـ} (هـ^{س} - ٤) - \frac{١}{٤} \text{ لو}_{هـ} هـ^{س} + جـ$

٤٣ $\int \frac{\text{جتاس}}{\text{جتا}^{٢}س + ٨}$ دس : متطابقات ثم تعويض ثم كسور جزئية :

$\int \frac{\text{جتاس}}{١ - \text{جا}^{٢}س + ٨} \text{دس} = \int \frac{\text{جتاس}}{٩ - \text{جا}^{٢}س} \text{دس}$: ص = جاس ومنها $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = جتاس

$\int \frac{١}{٩ - ص^{٢}} \text{دص} = \int \frac{١}{(٣-ص)(٣+ص)} \text{دس} = \int \frac{أ}{٣-ص} \text{دص} + \int \frac{ب}{٣+ص} \text{دص}$: أ = $\frac{١}{٦}$ ، ب = $-\frac{١}{٦}$

$= \frac{١}{٦} \text{ لو}_{هـ} (٣-ص) - \frac{١}{٦} \text{ لو}_{هـ} (٣+ص) + جـ = \frac{١}{٦} \text{ لو}_{هـ} (٣ - \text{جاس}) - \frac{١}{٦} \text{ لو}_{هـ} (٣ + \text{جاس}) + جـ$

٤٤ $\int \frac{\sqrt{\text{س}+٤}}{س}$ دس : تعويض ثم كسور جزئية : ص = $\sqrt{\text{س}+٤}$ ، ص^{٢} = س + ٤ ⇐ ٢ص دص = دس ، س = ص^{٢} - ٤

$\int \frac{ص}{ص^{٢}-٤} ٢ص \text{ دص} = \int \frac{٢ص^{٢}}{ص^{٢}-٤} \text{دص} = \int (٢ + \frac{٨}{ص^{٢}-٤}) \text{دص}$

$= \int (٢ + \frac{أ}{ص-٢} + \frac{ب}{ص+٢})$ دص : أ = ٢ ، ب = - ٢

	٢
٢ص^{٢}	ص^{٢} - ٤
	٢ص^{٢} - ٨
	٨

$= ٢ص + ٢ \text{ لو}_{هـ} (ص-٢) - ٢ \text{ لو}_{هـ} (ص+٢) + جـ = ٢\sqrt{\text{س}+٤} + ٢ \text{ لو}_{هـ} (\sqrt{\text{س}+٤} - ٢) - ٢ \text{ لو}_{هـ} (\sqrt{\text{س}+٤} + ٢) + جـ$

تمارين

٤٥ ⌠ $\frac{س^{٢}\sqrt{س^{٣}+٣س}}{\sqrt{س}}$ دس

٤٦ ⌠ $\frac{٩-س^{٢}}{٢س-٦}$ دس

٤٧ ⌠ جا^{٢}٤س دس

٤٨ ⌠ جا٦س جتا٦س دس

٤٩ ⌠ $\frac{٣}{١+جاس}$ دس

٥٠ ⌠ $\frac{جتا٢س}{جا^{٢}س\ جتا^{٢}س}$ دس

٥١ ⌠ $\frac{جتا^{٣}س-٥}{١-جا^{٢}س}$ دس

٥٢ ⌠ $\frac{جا^{٢}س+جتا^{٢}س}{جا^{٢}س}$ دس

٥٣ ⌠ قا٤س ظا٤س دس

٥٤ ⌠ جا٤س جا٨س دس

٥٥ ⌠ جتا٢س جتا٦س دس

٥٦ ⌠ جا٤س جتا٦س دس

٥٧ ⌠ جا^{٤}س دس

٥٨ ⌠ جتا^{٤}س دس

عبدالقادر الحسنات 078 531 88 77

---

٥٩ ⌠ جا^{٦}س جتاس دس

٦٠ ⌠ ظا^{٤}س قا^{٢}س دس

٦١ ⌠ $\frac{س}{\sqrt{س^{٢}+١}}$ دس

٦٢ ⌠ $\frac{جاس\ جتاس}{\sqrt{١+جا^{٢}س}}$ دس

٦٣ ⌠ جتا^{٣}س دس

٦٤ ⌠ $\frac{٦}{س^{٢}-٨س+٦}$ دس

٦٥ ⌠ $\frac{س}{س\sqrt{س}-٤}$ دس

٦٦ ⌠ جا^{٣}س جتا^{٢}س دس

٦٧ ⌠ $\frac{قتا^{٢}\sqrt{س}}{\sqrt{س}}$ دس

٦٨ ⌠ $\frac{١٦-٦س^{٢}}{س^{٣}-٨س+١}$ دس

٦٩ ⌠ $س^{٢}\sqrt[٣]{س^{٧}-س^{٣}}$ دس

٧٠ ⌠ $\frac{٧}{س\ لو\ س}$ دس
هـ

٧١ ⌠ $\frac{جا^{٥}س}{١+جتا^{٥}س}$ دس

٧٢ ⌠ قا^{٤}س لو (ظاس) دس
هـ

٧٣ $\int$ ٥جتا س $هـ^{٢جاس}$ دس

٧٤ $\int \frac{هـ^{٥س}}{س^{٢}}$ دس

٧٥ $\int$ (س-٣)^{٢} جتا (س+٢)دس

٧٦ $\int$ جتا$\sqrt{٥س}$ دس

٧٧ $\int$ قتا^{٢} س $هـ^{ظتاس}$ دس

٧٨ $\int \frac{٥س\ جا٢س}{قا٢س}$ دس

٧٩ $\int$ س^{٣} جتا س^{٢} دس

٨٠ $\int$ س^{٥} لو$_{هـ}$ س^{٣} دس

٨١ $\int$ $هـ^{٢س+هـ^{س}}$ دس

٨٢ $\int \frac{\sqrt{س}^{٣}}{٥ - س\sqrt{س}^{٣}}$ دس

٨٣ $\int$ ظتا ٥س دس

٨٤ $\int \frac{هـ^{س}}{٩+هـ^{س}}$ دس

٨٥ $\int \frac{٣}{س^{٢}- ٤س - ٣}$ دس

٨٦ $\int \frac{٥}{س^{٢}- ١}$ دس

٨٧ $\int \frac{س^{٢} - س}{س - ١}$ دس

٨٨ $\int \frac{٢س^{٣} - س^{٢} +٣س}{س^{٢}- ٤س - ٣}$ دس

٨٩ $\int \frac{٧}{س - \sqrt{س} - ٢}$ دس

٩٠ $\int \frac{٢هـ^{س}}{هـ^{٢س} - ٢هـ^{س} - ٣}$ دس

٩١ $\int \frac{جا\ س}{جتا^{٢}س - ٥\ جتاس - ٦}$ دس

٩٢ $\int \frac{\sqrt{س-٢}+١}{\sqrt{س-٢} - ١}$ دس

٩٣ $\int \frac{قا^{٢}س}{٥ظا^{٢}س - ٣\ ظاس - ٢}$ دس

٩٤ $\int \frac{٣س}{س^{٤} + س^{٢}}$ دس

٩٥ $\int \frac{س\ جا\sqrt{س}}{\sqrt{س}}$ دس

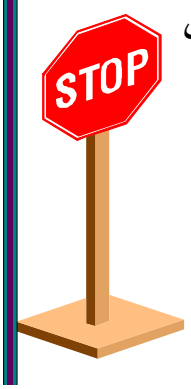
٩٦ $\int \frac{س}{\sqrt{٢٥ - ٤س^{٢}}}$ دس

٩٧ $\int$ $هـ^{س}$ جاس دس

٩٨ $\int$ (٤س^{٢} - ٨س)^{٥} (س - ١) دس

٩٩ $\int \frac{جتا٢س}{جا٢س}$ دس

١٠٠ $\int \frac{س^{٣}}{\sqrt{س^{٢}+١}}$ دس



مع تمنياتي للجميع بالتوفيق والنجاح

ملاحظة : سأقوم بإذن الله بإعادة نشرها مع حل التمارين في أقرب وقت ممكن