منهاجي
متعة التعليم الهادف

دار المناهج والكتب المدرسية

إجابات وحلول أسئلة وتمارين وتدريبات

كتاب الرياضيات

للصف الثاني عشر (العلمي)

الفصل الدراسي الثاني

منهاجي
متعة التعليم الهادف

إدارة المناهج والكتب المدرسية
إجابات وحلول التدريبات والتمارين
الصف : الثاني الثانوي العلمي **الكتاب : الرياضيات** **الفصل : الثاني**
الوحدة : الرابعة / تطبيقات التكامل

الفصل الأول : التكامل

أولًا : معكوس المشتقة

تدريب (١) :-

هـ(س) متصل على ح لأنه طرح اقترانين متصلين

م(س) = ٤ س^{٣} - جتا س

∴ م (س) معكوس لمشتقة الاقتران هـ(س)

تدريب (٢) :-

م(س) معكوس لمشتقة هـ(س)

∴ م(س) = هـ(س)

هـ(س) معكوس لمشتقة هـ(س)

∴ هـ(س) = هـ(س)

ل(س) = ٣ م(س) - ٥ هـ(س)

ل(س) = ٣ هـ(س) - ٥ هـ(س)

= -٢ هـ(س)

تدريب (٣) :

هـ(س) $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}$ ٣ جتا^{٢} س دس = ١ + س^{٣} ، جد هـ(س)

هـ(س) × $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}$ ٣ جتا^{٢} س = ٣ س^{٢}

هـ(س) × ١ - ١ = ٣ جتا^{٢} س

∴ هـ(س) = -٣ جتا^{٢} س . جتا س

تدريب (٤)

هـ(س) = ٣ جاس جتا^{٢} س + ٩ جاس

هـ($\frac{\pi}{٤}$) = صفر ⇐ ١ + ٩ جا$\frac{\pi}{٤}$ = صفر

$\boxed{٩ = -٣٧}$

تمارين ومسائل صفحة ٢٢٧ :

١) هـ(س) متصل على ح - {-١} لأنه اقتران نسبي.

م(س) = $\frac{(س+١) - س}{(س+١)^{٢}}$

= $\frac{١}{(س+١)^{٢}}$ = هـ(س)

∴ م(س) معكوس لمشتقة الاقتران هـ(س)

٢) هـ(س) متصل لأنه اقتران مثلثي

م(س) = ٣ جاس جتا^{٢} س = جا٣س = هـ(س)

∴ م (س) معكوس لمشتقة الاقتران هـ(س)

٣) م(س) معكوس لمشتقة هـ(س)

م(س) = هـ(س)

م(س) = ٣س^{٢} + ١٠س - ٣ = هـ(س)

هـ(-٢) = ٣ × ٤ + ١٠ × -٢ - ٣

= ١١ -

٤) م(س) معكوس لمشتقة هـ(س)

م(س) = هـ(س)

هـ(س) = ٨ س^{٣} + $\frac{٣س^{٢}}{٢\sqrt{س^{٣}+٣}}$

هـ(١) = ٨ + $\frac{٣}{٢ \times ٢}$ = ٨,٥

منهاجي
متعة التعليم الهادف

٥) $هـ(س) = ٣س^{٣}$

$م(س) = س^{٣} + ﺟ$

$م(٢) = ٥ \Leftarrow ٥ = ٨ + ﺟ \Leftarrow ﺟ = -٣$

$\therefore م(س) = س^{٣} - ٣$

٦) بما أن $م_{١}(س)$ ، $م(س)$ معكوسين لمشتقة الاقتران $هـ$.

$\therefore م - م_{١} = ﺟ$

$٣س^{٢} - ٢س + ٥ - م_{١}(س) = ﺟ$

$م_{١}(س) = ٣س^{٣} - ٢س + ٥ - ﺟ$

وكذلك $م_{١}(٣) = ٤ \Leftarrow ١٣ - ٤ + ٥ - ﺟ = ٤$

$\boxed{ﺟ = ٩}$

$م_{١}(س) = ٣س^{٣} - ٢س - ٤$

٧) $ص = \sqrt[٥]{٣س^{٣} - ٤س + ١٣}$ ، $\left|\frac{دص}{دس}\right|_{س=-٢} = ؟$

نشتق الطرفين

$\frac{دص}{دس} = \frac{١}{٥\sqrt[٥]{(٣س^{٣} - ٤س + ١٣)^{٤}}}$

عندما $س = -٢ \Leftarrow \frac{دص}{دس} = \frac{١}{٥\sqrt[٥]{١٢ + ٨ + ١٣)^{٤}}}$

$= \frac{١}{٥\sqrt[٥]{٣٢}} = \frac{١}{٢}$

٨) $هـ(س)دس = س^{٣} - س^{٢} + ٣س + ١$ ، $هـ(-٣) = ٤$

نشتق الطرفين

$هـ(س) = ٣س^{٢} - ٢س + ٣$

$هـ'(س) = ٦س - ٢$

$هـ'(-٣) = -١٨ - ٢ = -٢٠$

٩) $\int هـ(س)دس = جاس - جتاس + ٣$

اثبت أن $هـ(\frac{\pi}{٢}) - هـ(\frac{\pi}{٤}) = ٢$

$هـ(س) = جاس + جتاس$

$هـ(\frac{\pi}{٤}) = ١$

$هـ'(س) = -جاس + جتاس$

$هـ'(\frac{\pi}{٤}) = -١$

$هـ(\frac{\pi}{٢}) - هـ'(\frac{\pi}{٤}) = ١ - (-١) = ٢$ ✱

١٠) أ) $هـ(س) = \frac{-١}{س^{٢}}$

$م(س) = \frac{١}{س} + ﺟ$

ب) $هـ(س) = ظاس جتاس$

$هـ(س) = ١$

$م(س) = س + ﺟ$

ج) $هـ(س) = \frac{١}{\sqrt{٣س}}$

$م(س) = \sqrt{س} + ﺟ$

د) $هـ(س) = ٥ + ٥ ظا^{٢}س = ٥(١ + ظا^{٢}س)$

$هـ(س) = ٥ قا^{٢}س$

$\therefore م(س) = ٥ ظاس + ﺟ$

١١) $م(س)$ معكوس لمشتقة الاقتران $هـ$

$م'(س) = هـ(س) = جتاس + ١$

$م''(س) = -قتا^{٢}س$

$م''(\frac{\pi}{٤}) = -قتا^{٢}\frac{\pi}{٤}$

$= -٢$

ثامناً: التكامل غير المحدود

تدريب (١)

١) $\int دس = س + جـ$

٢) $\int -\frac{١}{٤} دل = -\frac{١}{٤} ل + جـ$

تدريب (٢):

١) $\int ١٠ دس = ١٠س + جـ$

٢) $\int \frac{١}{\sqrt[٥]{س^٢}} دس = \int س^{-\frac{٢}{٥}} دس$

$= \frac{٥}{٣} س^{\frac{٣}{٥}} + جـ$

تدريب (٣):

١) $\int \frac{س^٢ - ٩س}{\sqrt{س}} دس$

$= \int \frac{س(س-٩)}{س^{\frac{١}{٢}}} دس = \int \frac{س(\sqrt{س}-٣)(\sqrt{س}+٣)}{(\sqrt{س}-٣)} دس$

$= \int س^{\frac{٣}{٢}} + ٣س دس$

$= \frac{٢}{٥} س^{\frac{٥}{٢}} + \frac{٣}{٢} س^٢ + جـ = \frac{٢}{٥} س^٢ \sqrt{س} + \frac{٣}{٢} س^٢ + جـ$

٢) $\int \frac{(٢ - س)^٣}{س \sqrt{س}} دس$

$= \int \frac{٨ + ٦س^٢ - ١٢س + س^٣}{س \sqrt{س}} دس$

$= \int ٨ س^{-\frac{٣}{٢}} + ٦ س^{-\frac{١}{٢}} - ١٢ س^{-\frac{١}{٢}} + س^{\frac{٣}{٢}} دس$

$= ٨ \times -٢ س^{-\frac{١}{٢}} + ٦ \times ٢ س^{\frac{١}{٢}} - ١٢ \times ٢ س^{\frac{١}{٢}} + \frac{٢}{٥} س^{\frac{٥}{٢}} + جـ$

$= -١٦ س^{-\frac{١}{٢}} + ٢٤ س^{\frac{١}{٢}} - \frac{٢}{٥} س^{\frac{٥}{٢}} + جـ$

تدريب (٤)

$\int \frac{٣}{(٥+٣س)^٤} دس = \int ٣ (٥+٣س)^{-٤} دس$

$= \frac{٣ (٥+٣س)^{-٣}}{-٣ \times ٧} + جـ$

$= \frac{-١}{٧ (٥+٣س)^٣} + جـ$

٣) $\int س^٤ (٥ - \frac{٣}{س})^٤ دس$

$= \int س^٤ (\frac{٥س - ٣}{س})^٤ دس = \int \frac{س^٤ (٥س-٣)^٤}{س^٤} دس$

$= \frac{(٥س-٣)^٥}{٥ \times ٥} + جـ = \frac{(٥س-٣)^٥}{٢٥} + جـ$

تدريب (٥):

١) $\int (قتا^٢ ٤س ظتا ٤س + قتا^٢ ٣س) دس$

$= -\frac{١}{٤} قتا ٤س - \frac{١}{٣} ظتا ٣س + جـ$

٢) $\int (جتا ٤س ظا ٤س + \frac{١}{جتا^٦ س}) دس$

$= \int جتا ٤س \times \frac{جا ٤س}{جتا ٤س} + قا^٦ س دس$

$= -\frac{١}{٤} جتا ٤س + \frac{١}{٦} ظا^٦ س + جـ$

منهاجي
متعة التعليم الهادف

تدريب (٦):

١) $\int (\text{قا}س + \text{ظا}س)^2 \, دس$

$= \int \text{قا}^2 س + 2 \text{قا}س \text{ظا}س + \text{ظا}^2 س \, دس$

$= \int \text{قا}^2 س \, دس + \int 2 \text{قا}س \text{ظا}س \, دس + \int \text{ظا}^2 س \, دس$

$= \text{ظا}س + 2 \text{قا}س + \int (\text{قا}^2 س - 1) \, دس$

$= \text{ظا}س + 2 \text{قا}س + \text{ظا}س - س + ج$

$2 \text{ظا}س + 2 \text{قا}س - س + ج$

٢) $\int \frac{3}{1 - \text{جتا}2س} \, دس$

$= \int \frac{3}{2 \text{جا}^2 س} \, دس = \int \frac{3}{2} \text{قتا}^2 س \, دس$

$= \frac{3}{2} - \text{ظتا}س + ج$

٣) $\int \frac{\text{جتا}2س}{\text{جا}^2 س \text{جتا}^2 س} \, دس$

$= \int \frac{\text{جتا}^2 س - \text{جا}^2 س}{\text{جا}^2 س \text{جتا}^2 س} \, دس = \int \left(\frac{1}{\text{جا}^2 س} - \frac{1}{\text{جتا}^2 س} \right) دس$

$= \int (\text{قتا}^2 س - \text{قا}^2 س) \, دس$

$= - \text{ظتا}س - \text{ظا}س + ج$

٤) $\int (\text{جتا}س - \text{جا}س)^2 \, دس$

$= \int \text{جتا}^2 س - 2 \text{جا}س \text{جتا}س + \text{جا}^2 س \, دس$

$= \int 1 - \text{جا}2س \, دس$

$= س + \frac{1}{2} \text{جتا}2س + ج$

تمارين ومسائل (صفحة ٢٣٦)

١) ٤١) $\int س^6 + \frac{3}{س^5} - 7 \sqrt[5]{س^2} \, دس$

$= \int س^6 + 3 س^{-5} - 7 س^{\frac{2}{5}} \, دس$

$= \frac{س^7}{7} + \frac{3 س^{-4}}{-4} - \frac{5}{7} \times 7 س^{\frac{7}{5}} + ج$

$= \frac{س^7}{7} - \frac{3}{4 س^4} - 5 \sqrt[5]{س^7} + ج$

٢) $\int (5 + 3 هـ س)^4 \, دهـ = \frac{(5 + 3 هـ س)^5}{15} + ج$

٣) $\int \frac{س^3 - 8}{س - 2} \, دس = \int \frac{(س - 2)(س^2 + 2س + 4)}{(س - 2)} \, دس$

$= \frac{س^3}{3} + س^2 + 4س + ج$

٤) $\int (4س^2 + 20س + 25)^5 \, دس$

$= \int ((2س + 5)^2)^5 \, دس = \int (2س + 5)^{10} \, دس$

$= \frac{(2س + 5)^{11}}{22} + ج$

٥) $\int \frac{(س + 3)^2 - 9}{س} \, دس$

$\int \frac{(س + 3 - 3)(س + 3 + 3)}{س} \, دس$

$= \int (س + 6) \, دس = \frac{س^2}{2} + 6س + ج$

٦) $\int (1 - 6هـ)(6هـ - 1)^5 \, دس$

$= - \int (6هـ - 1)^5 (6هـ - 1) \, دس = - \int (6هـ - 1)^6 \, دس$

$= - \frac{(6هـ - 1)^7}{7} + ج$

منهاجي
متعة التعليم الهادف

ز) $\int \text{س} \sqrt[3]{\frac{٥}{\text{س}^{٣}} - \frac{١}{\text{س}^{٢}}}\ \text{د س}$

$= \int \text{س} \sqrt[3]{\frac{٥ - \text{س}}{\text{س}^{٣}}}\ \text{د س}$

$= \int \frac{\text{س}}{\text{س}} (٥ - \text{س})^{\frac{١}{٣}}\ \text{د س}$

$\frac{(٥ - \text{س})^{\frac{٤}{٣}}}{\frac{٤}{٣} \times -١} + \text{جـ} = -\frac{٣}{٤} \sqrt[3]{(٥ - \text{س})^{٤}} + \text{جـ}$

ح) $\int \frac{\text{س} - \sqrt{\text{س}}}{\sqrt{\text{س}} - ١}\ \text{د س}$

$= \int \frac{\sqrt{\text{س}}\,(\sqrt{\text{س}} - ١)}{\sqrt{\text{س}} - ١}\ \text{د س} = \int \text{س}^{\frac{١}{٢}}\ \text{د س}$

$= \frac{٢}{٣} \text{س}^{\frac{٣}{٢}} + \text{جـ} = \frac{٢}{٣} \sqrt{\text{س}^{٣}} + \text{جـ}$

ط) $\int \sqrt[3]{\text{س}} \left(\sqrt[3]{\text{س}} + \frac{٥}{\sqrt[3]{\text{س}}} \right) \text{د س}$

$= \int (\text{س}^{\frac{٢}{٣}} + ٥)\ \text{د س}$

$= \frac{٣}{٥} \text{س}^{\frac{٥}{٣}} + ٥\text{س} + \text{جـ} = \frac{٣}{٥} \sqrt[3]{\text{س}^{٥}} + ٥\text{س} + \text{جـ}$

ي) $\int \frac{٥\text{س}}{\sqrt{٧\text{س}+٣} + \sqrt{٢\text{س}+٣}}\ \text{د س}$

$= \int \frac{٥\text{س}}{\sqrt{٧\text{س}+٣} + \sqrt{٢\text{س}+٣}} \times \frac{\sqrt{٧\text{س}+٣} - \sqrt{٢\text{س}+٣}}{\sqrt{٧\text{س}+٣} - \sqrt{٢\text{س}+٣}}\ \text{د س}$

$= \int \frac{٥\text{س}}{٧\text{س}+٣-٢\text{س}-٣} \times \left((٧\text{س}+٣)^{\frac{١}{٢}} - (٢\text{س}+٣)^{\frac{١}{٢}}\right) \text{د س}$

$\int \frac{٥\text{س}}{٥\text{س}} \times \left((٧\text{س}+٣)^{\frac{١}{٢}} - (٢\text{س}+٣)^{\frac{١}{٢}}\right) \text{د س}$

$\frac{٢}{٢١} \sqrt{(٧\text{س}+٣)^{٣}} - \frac{١}{٣} \sqrt{(٢\text{س}+٣)^{٣}} + \text{جـ}$

س٣) $\text{ق}'(\text{س}) = ٣\text{س}^{٢} - ٣$

$\int \text{ق}'(\text{س})\ \text{د س} = \int (٣\text{س}^{٢} - ٣)\ \text{د س}$

$\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{٣} - ٣\text{س} + \text{جـ}$

$\text{ق}(٠) = ١ \Leftarrow ١ = \text{جـ}$

$\therefore \text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{٣} - ٣\text{س} + ١$

س٣) $\text{ق}''(\text{س}) = \frac{٦}{\sqrt{\text{س}}} = ٦\text{س}^{-\frac{١}{٢}}$

$\text{ق}(٤) = ٠ \qquad \text{ق}'(٤) = ١$

$\int \text{ق}''(\text{س})\ \text{د س} = \int ٦\text{س}^{-\frac{١}{٢}}\ \text{د س}$

$\text{ق}'(\text{س}) = ١٢\text{س}^{\frac{١}{٢}} + \text{جـ}_{١}$

$\text{ق}'(٤) = ١ \Leftarrow ١ = ١٢\sqrt{٤} + \text{جـ}_{١}$

$\text{جـ}_{١} = -٢٣$

$\int \text{ق}'(\text{س})\ \text{د س} = \int (١٢\text{س}^{\frac{١}{٢}} - ٢٣)\ \text{د س}$

$\text{ق}(\text{س}) = ٨\sqrt{\text{س}^{٣}} - ٢٣\text{س} + \text{جـ}$

$\text{ق}(٤) = ٠ \Leftarrow ٦٤ - ٩٢ + \text{جـ} = ٠ \Leftarrow \text{جـ} = ٢٨$

$\text{ق}(\text{س}) = ٨\sqrt{\text{س}^{٣}} - ٢٣\text{س} + ٢٨$

س٤) $\int (\text{ق}'(\text{س}) + ٢\text{س})\ \text{د س} = \text{س}^{٣} + \text{ب}\text{س}^{٢} + ١$

$\text{ق}'(١) = ٥ \text{ ، } \text{ق}(٢) = ٧ \qquad \text{ق}(-٢) = ؟$

نشتق الطرفين:

$\text{ق}'(\text{س}) + ٢\text{س} = ٣\text{س}^{٢} + ٢\text{ب}\text{س}$

$\text{ق}'(١) = ٥ \Leftarrow ٥ + ٢ = ٣ + ٢\text{ب} \Leftarrow \text{ب} = ٢$

$\text{ق}'(\text{س}) = ٣\text{س}^{٢} + ٤\text{س} - ٢\text{س}$

$\int \text{ق}'(\text{س}) = \int ٣\text{س}^{٢} + ٢\text{س}\ \text{د س}$

$\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{٣} + \text{س}^{٢} + \text{جـ}$

$\text{ق}(٢) = ٧ \Leftarrow ٨ + ٤ + \text{جـ} = ٧ \Leftarrow \text{جـ} = -٥$

$\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{٣} + \text{س}^{٢} - ٥$

$\text{ق}(-٢) = -٨ + ٤ - ٥$

$= -٩$

منهاجي
متعة التعليم الهادف

هـ) $هـ''(س) = -٤ جتا٢س$

$هـ'(\frac{\pi}{٣}) = صفر$ $\quad هـ(\frac{\pi}{٣}) = -٢$

$\int هـ''(س) = \int -٤ جتا٢س \, دس$

$هـ'(س) = -٢ جا٢س + ﺟ_١$

$هـ'(\frac{\pi}{٣}) = صفر \Leftarrow -٢ جا\pi + ﺟ = صفر$

$ﺟ = صفر$

$\int هـ'(س) = \int -٢ جا٢س \, دس$

$هـ(س) = جتا٢س + ﺟ$

$هـ(\frac{\pi}{٣}) = -٢ \Leftarrow جتا\pi + ﺟ = -٢$

$ﺟ = -١$

$هـ(س) = جتا٢س - ١$

ن) $\int \frac{٥}{جا^٢س} - \frac{٣}{جتا^٢س} \, دس$

$= \int ٥ قتا^٢س - ٣ قا^٢س \, دس$

$= -٥ ظتاس - ٣ ظاس + ﺟ$

و) $\int \frac{جا^٢س + جتا^٢س}{١ + جتا٢س} \, دس$

$= \int \frac{١}{٢ جتا^٢س} \, دس = \int \frac{١}{٢} قا^٢س \, دس$

$= \frac{١}{٢} ظاس + ﺟ$

ز) $\int (ظتاس - قتاس)^٢ \, دس$

$= \int (ظتا^٢س - ٢ ظتاس قتاس + قتا^٢س) دس$

$= \int (قتا^٢س - ١ - ٢ ظتاس قتاس + قتا^٢س) دس$

$= \int (٢ قتا^٢س - ٢ ظتاس قتاس - ١) دس$

$= -٢ ظتاس + ٢ قتاس - س + ﺟ$

د) $\int \frac{جاس + جتا^٢س}{١ - جا^٢س} \, دس$

$= \int \frac{جاس + جتا^٢س}{جتا^٢س} \, دس$

$= \int \frac{جاس}{جتا^٢س} + \frac{جتا^٢س}{جتا^٢س} \, دس$

$= \int ظاس قاس + ١ \, دس$

$= قاس + س + ﺟ$

هـ) $\int \frac{١ - جا^٢س}{جا^٢\frac{س}{٢} جتا^٢\frac{س}{٢}} \, دس$

$= \int \frac{جتا^٢س}{(\frac{١}{٢} جاس)^٢} \, دس = \int \frac{جتا^٢س}{(\frac{١}{٢} جاس)^٢} \, دس$

$= \int ٤ ظتا^٢س \, دس = \int ٤ (قتا^٢س - ١) \, دس$

$= ٤(- ظتاس - س) + ﺟ$

و) $\int \frac{١ - جا٢س}{جاس - جتاس} \, دس$

$= \int \frac{جا^٢س + جتا^٢س - جا٢س}{جاس - جتاس} \, دس$

$\int جا^٢س - ٢ جاس جتاس - جتا^٢س \, دس$

$جاس - جتاس$

$= \int \frac{(جاس - جتاس)^٢}{جاس - جتاس} \, دس$

$= \int جاس - جتاس \, دس$

$= -جتاس - جاس + ﺟ$

ز) $\int \frac{\text{جتا}3س}{\text{جتا}س}\ د س$

$= \int \frac{\text{جتا}(س+3س)}{\text{جتا}س}\ د س$

$= \int \frac{\text{جتا}س\ \text{جتا}3س - \text{جا}س\ \text{جا}3س}{\text{جتا}س}\ د س$

$= \int \frac{\text{جتا}س\ \text{جتا}3س}{\text{جتا}س} - \frac{\text{جا}س \times 3\text{جا}س\ \text{جتا}س}{\text{جتا}س}\ د س$

$\int \text{جتا}3س\ د س - \int 3\ \text{جا}^2س\ د س$

$\frac{1}{2}\text{جا}3س - \int 3 \times \frac{1}{2}(1-\text{جتا}2س)\ د س$

$\frac{1}{2}\text{جا}3س - (س - \frac{1}{2}\text{جا}2س) + ج$

$= \text{جا}3س - س + ج$

ح) $\int \frac{د س}{\text{جا}^2س - \text{جا}^4س}$

$= \int \frac{1}{\text{جا}^2س(1-\text{جا}^2س)}\ د س$

$= \int \frac{1}{\text{جا}^2س\ \text{جتا}^2س}\ د س = \int 4\ \text{قتا}^2 2س\ د س$

$= -3\ \text{ظتا}3س + ج$

ط) $\int \text{قا}س(\text{ظا}س + \text{جتا}س)\ د س$

$= \int \text{قا}س\text{ظا}س + 1\ د س$

$= \text{قا}س + س + ج$

ي) $\int \text{جا}6س\ \text{جا}4س\ د س$

$= \int \frac{1}{2}(\text{جتا}2س - \text{جتا}10س)\ د س$

$= \frac{1}{2}(\frac{1}{2}\text{جا}2س - \frac{1}{10}\text{جا}10س) + ج$

ك) $\int \text{جتا}^2س\ د س = \int \frac{1}{2}(1+\text{جتا}2س)\ د س$

$\frac{1}{2}(س + \frac{1}{2}\text{جا}2س) + ج$

ل) $\int \frac{\text{جتا}^3س - 5}{1-\text{جا}^2س}\ د س = \int \frac{\text{جتا}^2س - 5}{\text{جتا}^2س}\ د س$

$= \int \text{جتا}س - 5\ \text{قا}^2س\ د س$

$= \text{جا}س - 5\ \text{ظا}س + ج$

م) $\int \text{جا}3س\ \text{جتا}7س\ د س$

$= \int \frac{1}{2}(\text{جا}(-4س) + \text{جا}10س)\ د س$

$= \int \frac{1}{2}(\text{جا}4س + \text{جا}10س)\ د س$

$= \frac{1}{2}(\frac{1}{4}\text{جا}4س + \frac{1}{10}\text{جا}10س) + ج$

ن) $\int (\text{جتا}^4س - \text{جا}^4س)\ د س$

$= \int (\text{جتا}^2س - \text{جا}^2س)(\text{جتا}^2س + \text{جا}^2س)\ د س$

$= \int \text{جتا}2س\ د س = \frac{1}{2}\text{جا}2س + ج$

س) $\int \frac{1}{\text{قا}س - 1}\ د س \times \frac{\text{قا}س + 1}{\text{قا}س + 1} = \int \frac{\text{قا}س + 1}{\text{قا}^2س - 1}\ د س$

$= \int \frac{\text{قا}س + 1}{\text{ظا}^2س}\ د س = \int (\text{قا}س\ \text{ظا}^2س + \text{ظا}^2س)\ د س$

$= \int (\text{قا}س\ \text{ظا}س\ \text{ظا}س + \text{قا}^2س - 1)\ د س$

$= \int \frac{1}{\text{جتا}س} \times \frac{\text{جا}س}{\text{جتا}س}\ \text{ظا}س + \text{قا}^2س - 1\ د س$

$= \int \text{ظا}س\ \text{قا}س + \text{قا}^2س - 1\ د س$

$= \text{قا}س - \text{ظا}س - س + ج$

ع) $\int \frac{\text{جا}س}{1-\text{جا}س}\ د س \times \frac{1+\text{جا}س}{1+\text{جا}س} = \int \frac{\text{جا}س + \text{جا}^2س}{\text{جتا}^2س}$

$= \int (\text{ظا}س\ \text{قا}س + \text{ظا}^2س)\ د س = \text{قا}س + \text{ظا}س - س + ج$

ثالثاً: التكامل المحدود

تدريب (١)

$$\int_{1}^{2} P\,\text{هـ}'(س)\,دس = P\,\text{هـ}(س)\Big|_{1}^{2}$$

$$= P\,\text{هـ}(٢) - P\,\text{هـ}(١)$$

$$١٦ = ١٢P - ٤P \Leftarrow P = ٢$$

تدريب (٢)

$$\int_{٢}^{٧} ٤س\,دس = ٢س^{٢}\Big]_{٢}^{٧} = ٢\times(٧)^{٢} - ٢(٢)^{٢}$$

$$= ٩٠$$

$$٢)\ \int_{\frac{\pi}{٦}}^{\frac{\pi}{٤}} قا^{٢}س\,دس = ظاس\Big]_{\frac{\pi}{٦}}^{\frac{\pi}{٤}}$$

$$= ظا\frac{\pi}{٤} - ظا\frac{\pi}{٦} = ١ - \frac{١}{\sqrt{٣}}$$

تدريب (٣):

$$\int_{١+ب}^{٢+٣ب} ٥\,دس = ٤٠$$

$$٥(٢+٣ب-١-ب) = ٤٠ \Leftarrow ب = +\frac{٧}{٢}$$

تدريب (٤)

$$\int_{٠}^{\sqrt{٨}} \frac{س}{٢س^{٢}+١}\,دس = ٢$$

$$\therefore \int_{٠}^{\sqrt{٨}} \frac{س}{٢س^{٢}+١}\,دس = -٢\int_{٠}^{\sqrt{٨}} \frac{س}{٢س^{٢}+١}\,دس$$

تدريب (٥)

$$\int_{١}^{٣} ٤\,\text{هـ}(س)\,دس + \int_{١}^{٣} ٧\,\text{هـ}(س)\,دس = ١٩$$

$$\int_{١}^{٣} ٣\,\text{هـ}(س)\,دس = ٩ \Leftarrow \int_{١}^{٣} \text{هـ}(س)\,دس = ٣$$

$$\therefore ٤\times٣ + ٧\int_{١}^{٣} \text{هـ}(س)\,دس = ١٩$$

$$\int_{١}^{٣} \text{هـ}(س)\,دس = ١ \Leftarrow \int_{٣}^{١} ٥\,\text{هـ}(س)\,دس = ٥\times١-$$

$$= -٥$$

تدريب (٦)

$$ع = \int_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{٣\pi}{٤}} قتا^{٢}س\,دس \qquad ل = \int_{\frac{٣\pi}{٤}}^{\frac{\pi}{٤}} ظتا^{٢}س\,دس$$

$$ع + ل = \int_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{٣\pi}{٤}} قتا^{٢}س\,دس + \int_{\frac{٣\pi}{٤}}^{\frac{\pi}{٤}} ظتا^{٢}س\,دس$$

$$= \int_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{٣\pi}{٤}} قتا^{٢}س\,دس - \int_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{٣\pi}{٤}} ظتا^{٢}س\,دس$$

$$= \int_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{٣\pi}{٤}} قتا^{٢}س - ظتا^{٢}س\,دس = \int_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{٣\pi}{٤}} ١\,دس$$

$$= ١\left(\frac{٣\pi}{٤} - \frac{\pi}{٤}\right) = \frac{\pi}{٢}$$

تدريب (٧)

$$\int_{٩}^{٢} ٢\,\text{هـ}(س)\,دس + \int_{٩}^{٢} ٣\,دس = -١٧$$

$$٢\int_{٩}^{٢} \text{هـ}(س)\,دس + ٣(٢-٩) = -١٧$$

$$\int_{٩}^{٢} \text{هـ}(س)\,دس = ٣$$

$$\int_{٥}^{٢} \frac{\text{هـ}(س)}{٣}\,دس = -٢ \Leftarrow \int_{٢}^{٥} \text{هـ}(س)\,دس = -٦$$

$$\int_{٥}^{٩} (٤\,\text{هـ}(س) - ١)\,دس =$$

$$\int_{٥}^{٩} ٤\,\text{هـ}(س) - \int_{٥}^{٩} ١\,دس$$

$$= ٤\left(\int_{٥}^{٢} \text{هـ}(س)\,دس + \int_{٢}^{٩} \text{هـ}(س)\,دس\right) - ١(٩-٥)$$

$$= ٤\,(٦ + -٢) - ٤$$

$$= ١٢$$

منهاجي
متعة التعليم الهادف

تدريب (٨)

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{1-\cos 2s}{2}}\, ds$$

$$= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{2\sin^2 s}{2}}\, ds = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} |\sin s|\, ds$$

	0		π		2π
$\sin s$		$+$	0	$-$	

$$= \int_{0}^{\pi} \sin s\, ds + \int_{\pi}^{2\pi} -\sin s\, ds$$

$$= [-\cos s]_{0}^{\pi} + [+\cos s]_{\pi}^{2\pi}$$

$$(-\cos\pi + \cos 0) + \cos 2\pi - \cos\pi$$

$$(1+1) + (1-(-1))$$

$$= 4$$

تدريب (٩)

$\int_{1}^{3} g(s)\, ds$ موجبة لأن $g(s)$ أكبر من الصفر

إشارة $\int_{3}^{6} g(s)\, ds$ سالبة لأن $g(s) < 0$

تدريب (١٠)

١) $\int_{0}^{1} g(s)\, ds \geq \int_{0}^{1} h(s)\, ds$

لأن $g(s) \geq h(s)$ حسب الشكل

٢) من الشكل المجاور

$h(s) \geq g(s)$ لكل $s \in [0,1]$

$\therefore \int_{0}^{1} h(s)\, ds \geq \int_{0}^{1} g(s)\, ds$

أي أن $\int_{0}^{1} g(s)\, ds \leq \int_{0}^{1} h(s)\, ds$

تدريب (١١)

$$m \leq \int_{0}^{1} \frac{2}{s^2+1}\, ds \leq k$$

$0 \leq s \leq 1$

$0 \leq s^2 \leq 1$

$1 \leq s^2+1 \leq 2 \Leftarrow 1 \geq \frac{1}{s^2+1} \geq \frac{1}{2}$

$2 \geq \frac{2}{s^2+1} \geq \frac{2}{2}$

$$\int_{0}^{1} 1\, ds \leq \int_{0}^{1} \frac{2}{s^2+1}\, ds \leq \int_{0}^{1} 2\, ds$$

$$1 \leq \int_{0}^{1} \frac{2}{s^2+1}\, ds \leq 2$$

$m = 1$ ، $k = 2$

تمارين ومسائل صفحة (٢٥٠ - ٢٥١)

(٨) $\int_{2}^{8} \frac{1}{s^2}\, ds = \int_{2}^{8} s^{-2}\, ds$

$$= \left[\frac{-1}{s}\right]_{2}^{8} = -\frac{1}{8} + \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$$

ب) $\int_{0}^{3} (s^2 - |s-1|)\, ds$

$$= \int_{0}^{3} s^2\, ds - \int_{0}^{3} |s-1|\, ds$$

	0		1		3
$s-1$		$-$	0	$+$	

$$= \left[\frac{s^3}{3}\right]_{0}^{3} - \left(\int_{0}^{1} (1-s)\, ds + \int_{1}^{3} (s-1)\, ds\right)$$

$$9 - \left(\left[s - \frac{s^2}{2}\right]_{0}^{1} + \left[\frac{s^2}{2} - s\right]_{1}^{3}\right)$$

$$9 - \left(\left(1 - \frac{1}{2}\right) - \text{صفر} + \left(\frac{9}{2} - 3\right) - \left(\frac{1}{2} - 1\right)\right)$$

$$9 - \frac{5}{2} = \frac{13}{2}$$

جـ) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$ جا۲س دس

= $-\frac{1}{2}$ جتا۲س $\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$ = $-\frac{1}{2}$ جتاπ + $\frac{1}{2}$ جتا$\frac{\pi}{2}$

= $\frac{1}{2}$

د) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}$ (س + جتاس) دس

$\Big[\frac{س^2}{2}$ + جاس $\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{صفر}$

= (صفر + جاصفر) − ($\frac{(\frac{\pi}{4})^2}{2}$ + جا$\frac{\pi}{2}$)

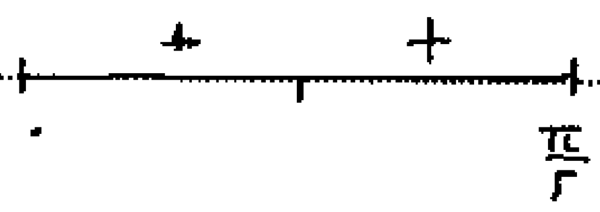
= $-\frac{\pi^2}{8} - 1$

هـ) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{1 + جا۲س}}{جاس + جتاس}$ دس

= $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{جا^2س + 2جاس جتاس + جتا^2س}}{جاس + جتاس}$ دس

= $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{(جاس + جتاس)^2}}{جاس + جتاس}$ دس

= $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{|جاس + جتاس|}{جاس + جتاس}$ دس



= $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{جاس + جتاس}{جاس + جتاس}$ دس = $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}$ 1 دس

= 1 ($\frac{\pi}{2}$ − ٠) = $\frac{\pi}{2}$.

و) $\int_{2}^{2} (9س - 7)^5$ دس = صفر

ز) $\int_{-1}^{3}$ (س − 1)(س² + س + 1) دس

$\int_{-1}^{3}$ (س³ − 1) دس

= $\Big[\frac{س^4}{4} - س\Big]_{-1}^{3}$

$(\frac{81}{4} - 3) - (\frac{1}{4} + 1) = 16$

ح) $\int_{0}^{1} \sqrt{س}\,(\sqrt{س} + 2)^2$ دس

= $\int_{0}^{1} \sqrt{س}\,(س + 4\sqrt{س} + 4)$ دس

= $\int_{0}^{1} س^{\frac{3}{2}} + 4س + 4س^{\frac{1}{2}}$ دس

$\Big[\frac{2}{5}س^{\frac{5}{2}} + 2س^2 + \frac{8}{3}س^{\frac{3}{2}}\Big]_{0}^{1}$

$(\frac{2}{5} + 2 + \frac{8}{3})$ − (صفر)

= $\frac{76}{15}$

ط) $\int_{2}^{4} \frac{1}{(س-1)^2}$ دس = $\int_{2}^{4} (س-1)^{-2}$ دس

$\Big[\frac{-1}{س-1}\Big]_{2}^{4} = \frac{-1}{3} + 1 = \frac{2}{3}$

ي) $\int_{1}^{3} \frac{2س^3 - 4س^2 + 5}{س^2}$ دس

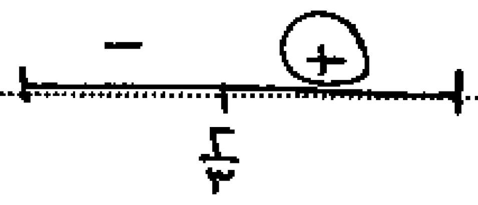
= $\int_{1}^{3} 2س - 4 + 5س^{-2}$ دس

$\Big[س^2 - 4س - \frac{5}{س}\Big]_{1}^{3}$

$(9 - 12 - \frac{5}{3}) - (1 - 4 - 5) = \frac{10}{3}$

ك) $\int_{2}^{3} \sqrt{9س^2 - 12س + 4}$ دس = $\int_{2}^{3} \sqrt{(3س-2)^2}$ دس

= $\int_{2}^{3} |3س - 2|$ دس



= $\int_{2}^{3} 3س - 2$ دس

$\Big[\frac{3س^2}{2} - 2س\Big]_{2}^{3}$

$(\frac{27}{2} - 6) - (6 - 4) = \frac{11}{2}$

ل) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (\text{جتاس} - \text{جاس})\ \text{دس}$

$= [\text{جاس} + \text{جتاس}]_{0}^{\frac{\pi}{2}}$

$= (١ + \text{صفر}) - (\text{صفر} + ١) = \text{صفر}$

س٢) $\text{ق}(\text{س}) = \int \left(\int_{0}^{-٢} ٤\ \text{دس} - ٣\text{س}^٢ \right) \text{دس}$

$\text{ق}'(-١) = ؟$

$\text{ق}'(\text{س}) = \int_{0}^{-٢} ٤\ \text{دس} - ٣\text{س}^٢$

$= ٤(-٢ - ٠) - ٣\text{س}^٢$

$\text{ق}'(\text{س}) = -٨ - ٣\text{س}^٢$

$\text{ق}'(-١) = -٨ - ٣ = -١١$

س٣) $\int_{\text{ب}}^{٢} ٢\text{ب}\ \text{دس} = -٣٠$

$٢\text{ب}(٢ - \text{ب}) = -٣٠$

$-٢\text{ب}^٢ + ٤\text{ب} + ٣٠ = \text{صفر}$

$\text{ب}^٢ - ٢\text{ب} - ١٥ = \text{صفر}$

$(\text{ب} - ٥)(\text{ب} + ٣) = \text{صفر} \Leftarrow$ $\boxed{\text{ب} = ٥}$ ، $\boxed{\text{ب} = -٣}$

س٤) $\int_{0}^{\text{جـ}} \text{س}(١ - \text{س})\ \text{دس} = \text{صفر}$

$\int_{0}^{\text{جـ}} (\text{س} - \text{س}^٢)\ \text{دس} = \left[\frac{\text{س}^٢}{٢} - \frac{\text{س}^٣}{٣}\right]_{0}^{\text{جـ}} = \text{صفر}$

$\frac{\text{جـ}^٢}{٢} - \frac{\text{جـ}^٣}{٣} - \text{صفر} = \text{صفر}$

$\frac{٣\text{جـ}^٢ - ٢\text{جـ}^٣}{٦} = \text{صفر} \Leftarrow \text{جـ}^٢(٣ - ٢\text{جـ}) = \text{صفر}$

$\text{جـ} = \text{صفر}$ ، $\text{جـ} = \frac{٣}{٢}$

س٥) $\int_{-١}^{٣} \left(٣\text{س}^٢ - ٢\int_{0}^{\text{جـ}} ٣\text{م}\ \text{دم}\right) \text{دس} = -٣٠$

$= \int_{-١}^{٣} \left(٣\text{س}^٢ - ٢ \times \frac{٣\text{جـ}^٢}{٢}\right) \text{دس} = -٣٠$

$[\text{س}^٣ - ٣\text{جـ}^٢\text{س}]_{-١}^{٣} = -٣٠$

$(٢٧ - ٩\text{جـ}^٢) - (-١ + ٣\text{جـ}^٢) = -٣٠$

$٢٨ - ١٢\text{جـ}^٢ = -٣٠$

$\text{جـ}^٢ = ٤ \Leftarrow \text{جـ} = \pm ٢$

س٦) $\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} -\text{س} & ، -٣ < \text{س} \leq ٠ \\ \text{س} & ، ٠ < \text{س} \leq ٤ \end{cases}$

$\int_{-٣}^{٤} \text{ق}(\text{س})\ \text{دس} = \int_{-٣}^{0} -\text{س}\ \text{دس} + \int_{0}^{٤} \text{س}\ \text{دس}$

$= \left[-\frac{\text{س}^٢}{٢}\right]_{-٣}^{0} + \left[\frac{\text{س}^٢}{٢}\right]_{0}^{٤}$

$= (\text{صفر} + \frac{٩}{٢}) + (٨ - \text{صفر}) = ١٢,٥$

س٧) $\int_{٢}^{\text{ب}} (٢\text{س} - ٣)\ \text{دس} = ٣٠$

$[\text{س}^٢ - ٣\text{س}]_{٢}^{\text{ب}} = ٣٠$

$\text{ب}^٢ - ٣\text{ب} - ٤ + ٦ - ٣٠ = \text{صفر}$

$\text{ب}^٢ - ٣\text{ب} - ١٨ = \text{صفر}$

$(\text{ب} - ٦)(\text{ب} + ٣) = \text{صفر}$ $\boxed{\text{ب} = ٦}$ ، $\boxed{\text{ب} = -٣}$

س٨) $\int_{١}^{٣} ٢\text{ق}(\text{س})\ \text{دس} + \int_{١}^{٣} \text{س}^{-٢}\ \text{دس} - \int_{١}^{٣} ٦\ \text{دس} = ١٢$

$٢\int_{١}^{٣} \text{ق}(\text{س})\ \text{دس} + \left[\frac{-١}{\text{س}}\right]_{١}^{٣} - ٦(٣ - ١) = ١٢$

$٢\int_{١}^{٣} \text{ق}(\text{س})\ \text{دس} = \frac{٧٠}{٣} \Leftarrow \int_{١}^{٣} \text{ق}(\text{س})\ \text{دس} = \frac{٣٥}{٣}$

$\int_{١}^{٣} \frac{\text{ق}(\text{س})}{٢}\ \text{دس} - \int_{١}^{٣} \text{س}^٢\ \text{دس} = \frac{٣٥}{٦} - \left[\frac{\text{س}^٣}{٣}\right]_{١}^{٣}$

$= \frac{٣٥}{٦} - (٩ - \frac{١}{٣}) = -\frac{١٧}{٦}$

س٩) $\int_{9}^{2} 2\,\text{ق}(\text{س})\,\text{دس} + 3(2-9) = -17$

$\int_{9}^{2} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = 2$

$\int_{2}^{5} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = -6$

$\int_{5}^{9} (4\,\text{ق}(\text{س}) - 1)\,\text{دس} =$

$\left(\int_{5}^{2} 4\,\text{ق}(\text{س})\,\text{دس} + \int_{2}^{9} 4\,\text{ق}(\text{س})\right) - 1(9-5)$

$24 - 8 - 4 = 12$

س١٠) $-1 \leq \text{جتاس} \leq 1$ لكل $\text{س} \in [0 ، \pi]$

$\text{صفر} \leq \text{جتا}^2\text{س} \leq 1$

$\text{صفر} \leq 3\,\text{جتا}^2\text{س} \leq 3$

$2 \leq 2 + 3\,\text{جتا}^2\text{س} \leq 5$

$\frac{1}{5} \leq \frac{1}{2 + 3\,\text{جتا}^2\text{س}} \leq \frac{1}{2}$

$\int_{0}^{\pi} \frac{1}{5}\,\text{دس} \leq \int_{0}^{\pi} \frac{1}{2 + 3\,\text{جتا}^2\text{س}}\,\text{دس} \leq \int_{0}^{\pi} \frac{1}{2}\,\text{دس}$

$\frac{\pi}{5} \leq \int_{0}^{\pi} \frac{1}{2 + 3\,\text{جتا}^2\text{س}}\,\text{دس} \leq \frac{\pi}{2}$

س١١) $-3 \leq \text{س} \leq 3$

$(0 \leq \text{س}^2 \leq 9) \times -1$

$-9 \leq -\text{س}^2 \leq \text{صفر}$

$\text{صفر} \leq 9 - \text{س}^2 \leq 9$

$\text{صفر} \leq \sqrt{9 - \text{س}^2} \leq \sqrt{9}$

$\int_{-3}^{3} \text{صفر}\,\text{دس} \leq \int_{-3}^{3} \sqrt{9 - \text{س}^2}\,\text{دس} \leq \int_{-3}^{3} 3\,\text{دس}$

$\text{صفر} \leq \int_{-3}^{3} \sqrt{9 - \text{س}^2}\,\text{دس} \leq 18$

م = صفر ، ك = 18

س١٢) $\text{ق}(\text{س}) = \text{أ}\text{س}^2 + \text{ب}\,\text{س} + \text{جـ}$

$\text{ق}'(\text{س}) = 2\text{أ}\text{س} + \text{ب}$

$\text{ق}''(\text{س}) = 2\text{أ}$

$\text{ق}''(\text{س}) = 4 \Leftarrow 2\text{أ} = 4 \Leftarrow \boxed{\text{أ} = 2}$

$\text{ق}(0) = 5 \Leftarrow \boxed{\text{جـ} = 5}$

$\int_{0}^{1} \text{ق}'(\text{س})\,\text{دس} = 3 \Leftarrow \int_{0}^{1} 4\text{س} + \text{ب}\,\text{دس}$

$[2\text{س}^2 + \text{ب}\text{س}]_{0}^{1} = 3$

$2 + \text{ب} = 3 \Leftarrow \boxed{\text{ب} = 1}$

$\therefore \text{ق}(\text{س}) = 2\text{س}^2 + \text{س} + 5$

س١٣) $\text{ق}(\text{س}) = \text{أ}\,\text{س} + \text{ب}$

$\int_{-1}^{1} (\text{أ}\text{س} + \text{ب})\,\text{دس} = \left[\frac{\text{أ}\text{س}^2}{2} + \text{ب}\text{س}\right]_{-1}^{1}$

$= \left(\frac{\text{أ}}{2} + \text{ب}\right) - \left(\frac{\text{أ}}{2} - \text{ب}\right) = 4$

$2\text{ب} = 4 \Leftarrow \boxed{\text{ب} = 2}$

$\int_{1}^{3} (\text{أ}\text{س} + \text{ب})\,\text{دس} = \left[\frac{\text{أ}\text{س}^2}{2} + 2\text{س}\right]_{1}^{3}$

$= \left(\frac{9\text{أ}}{2} + 6\right) - \left(\frac{\text{أ}}{2} + 2\right) = 2$

$4\text{أ} + 4 = 2 \Leftarrow \boxed{\text{أ} = -\frac{1}{2}}$

$\text{ق}(\text{س}) = -\frac{1}{2}\text{س} + 2$

رابعاً: اقتران اللوغاريتم الطبيعي:

تدريب (١)

١) $هـ(س) = \log_{هـ}(٢ - جتاس)$

$هـ'(س) = \frac{جاس}{٢ - جتاس}$

٢) $هـ(س) = \log_{هـ}|٣س + ١٥|$

$هـ'(س) = \frac{٣}{٣س + ٥}$

تدريب (٢):

١) $\int_{٢}^{٤} \frac{١}{٩ - ٢س}\, دس$

$= -\frac{١}{٢}\int_{٢}^{٤} \frac{-٢}{٩ - ٢س}\, دس = -\frac{١}{٢}\log_{هـ}|٩ - ٢س|_{٢}^{٤}$

$= -\frac{١}{٢}\log_{هـ}١ + \frac{١}{٢}\log_{هـ}٥ = \frac{١}{٢}\log_{هـ}٥$

٢) $\int_{-\frac{\pi}{٤}}^{\frac{\pi}{٤}} \frac{جاس}{٢ + ظاس}\, دس = \log_{هـ}|٢ + ظاس|_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{\pi}{٤}}$

$= \log_{هـ}٣ - \log_{هـ}١ = \log_{هـ}٣$

تمارين ومسائل صفحة (٢٥٦ - ٢٥٧)

سؤال

أ) $هـ(س) = \log_{هـ}٣س$

$هـ'(س) = \frac{٣}{٣س} = \frac{١}{س}$

ب) $هـ(س) = \log_{هـ}جا^{٣}س = ٣\log_{هـ}جاس$

$هـ'(س) = ٣ \times \frac{جتاس}{جاس} = ١٥ ظتاس$

جـ) $هـ(س) = \log_{هـ}(س^{٢} + ٤س - ١٥)$

$هـ'(س) = \frac{٢س + ٤}{س^{٢} + ٤س - ١٥}$

د) $هـ(س) = \log_{هـ}(س^{٢} + ٥س + ٣)$

$هـ'(س) = \frac{٢س + ٥}{س^{٢} + ٥س + ٣}$

هـ) $هـ(س) = س^{٣}\log_{هـ}س$

$هـ'(س) = س^{٣} \times \frac{١}{س} + \log_{هـ}س \times ٣س^{٢}$

$هـ'(س) = س^{٢}(١ + ٣\log_{هـ}س)$

و) $هـ(س) = \log_{هـ}(٢ + ٧\sqrt{س})$

$هـ'(س) = \frac{\frac{٧}{٢\sqrt{س}}}{٢ + ٧\sqrt{س}} = \frac{١}{٤\sqrt{س} + ٢س}$

ز) $هـ(س) = \log_{هـ}س^{٣} ظاس$

$هـ'(س) = \log_{هـ}س^{٣} + \log_{هـ}ظاس$

$هـ'(س) = \frac{٣}{س} + \frac{قا^{٢}س}{ظاس}$

$= \frac{٣}{س} + \frac{قا^{٢}س}{ظاس}$

ح) $هـ(س) = \log_{هـ}\left(\frac{س}{س^{٢}+١}\right)$

$هـ(س) = \log_{هـ}س - \log_{هـ}(س^{٢}+١)$

$هـ'(س) = \frac{١}{س} - \frac{٢س}{س^{٢}+١}$

ط) $هـ(س) = (\log_{هـ}س)^{٣}$

$هـ'(س) = ٣(\log_{هـ}س)^{٢} \times \frac{١}{س}$

ي) $ق(س) = \log_{هـ} \frac{(٤س^٣ + ٥)^٦}{(٧ - ٣س)^٥}$

$ق(س) = ٦ \log_{هـ}(٤س^٣ + ٥) - ٥ \log_{هـ}(٧ - ٣س)$

$ق'(س) = \frac{٦ \times ٨س^٢}{٤س^٣ + ٥} - \frac{٥ \times -٣}{٧ - ٣س}$

$= \frac{٤٨س^٢}{٤س^٣ + ٥} + \frac{١٥}{٧ - ٣س}$

ك) $ق(س) = \log_{هـ} \sqrt[٣]{٥س^٣ + ٤س}$

$ق(س) = \frac{١}{٣} \log_{هـ}(٥س^٣ + ٤س)$

$ق'(س) = \frac{١}{٣} \times \frac{١٥س^٢ + ٤}{٥س^٣ + ٤س}$

ل) $ق(س) = ظا(\log_{هـ} س)$

$ق'(س) = \frac{١}{س} قا^٢(\log_{هـ} س)$.

م) $ق(س) = \log_{هـ}(س + \sqrt{٧س^٢ - ١})$

$ق'(س) = \frac{١ + \frac{١٤س}{٢\sqrt{٧س^٢ - ١}}}{س + \sqrt{٧س^٢ - ١}}$

$ق'(س) = \frac{\sqrt{٧س^٢ - ١} + س}{(س + \sqrt{٧س^٢ - ١})(\sqrt{٧س^٢ - ١})}$

$ق'(س) = \frac{١}{\sqrt{٧س^٢ - ١}}$

ن) $\int (ق'(س) - س)\, دس = \log_{هـ}|قاس + ظاس| + س^٣$

نشتق الطرفين

$ق'(س) - س = \frac{قاس ظاس + قا^٢س}{قاس + ظاس} + ٣س^٢$

$ق'(س) = قاس + ٣س^٢$

س) $م(س) = \log_{هـ}|جاس|$ $\quad ق(س) = ظتاس$

$ق(س)$ متصل على مجاله

$م'(س) = \frac{جتاس}{جاس} = ظتاس$ $\quad (ق(س) = ظتاس)$

$\therefore م(س)$ هو معكوس لمشتقة الاقتران $ق$

ع) $\int \frac{٣س^٢}{س^٣ + ٥} دس = \log_{هـ}|س^٣ + ٥| + ج$

ب) $\int \frac{١ + جتاس}{س + جاس} دس = \log_{هـ}|س + جاس| + ج$

ه) $\int \frac{٥ + ٥ظتا^٢س}{ظتاس} دس$

$= \int \frac{٥(١ + ظتا^٢س)}{ظتاس} دس$

$= \int ٥ \frac{قتا^٢س}{ظتاس} دس = -٥ \log_{هـ}|ظتاس| + ج$

د) $\int \frac{٣س^٢}{س^٣ + ٥} دس = \log_{هـ}|س^٣ + ١٥| + ج$

هـ) $\int \frac{س + ٥}{س} دس = \int ١ + \frac{٥}{س} دس$

$= س + ٥ \log_{هـ}|س| + ج$

منهاجي
متعة التعليم الهادف

و) $\int_{3}^{5} \frac{س-2}{س^2-4}$ دس

$= \int_{3}^{5} \frac{س-2}{(س-2)(س+2)}$ دس $= \left[\text{لو}_{هـ} |س+2| \right]_{3}^{5}$

$\text{لو}_{هـ} 7 - \text{لو}_{هـ} 5$

ز) $\int_{-1}^{2} \frac{|3س|}{س^2+1}$ دس

$س$	-1		0		2
$3س$	$-$	$-$	0	$+$	$+$

$= \int_{-1}^{0} \frac{-3س}{س^2+1}$ دس $+ \int_{0}^{2} \frac{3س}{س^2+1}$ دس

$- \left[\text{لو}_{هـ} |س^2+1| \right]_{-1}^{0} + \left[\text{لو}_{هـ} |س^2+1| \right]_{0}^{2}$

$- \text{لو}_{هـ} 1 + \text{لو}_{هـ} 2 + \text{لو}_{هـ} 5 - \text{لو}_{هـ} 1$

$= \text{لو}_{هـ} 2 + \text{لو}_{هـ} 5$

ح) $\int \frac{\text{ظا}3س}{1 + \text{جتا}3س}$ دس

$= -\frac{1}{3} \int \frac{-3 \text{ظا}3س}{1 + \text{جتا}3س}$ دس $= -\frac{1}{3} \text{لو}_{هـ} |1 + \text{جتا}3س| + ثـ$

$= -\frac{1}{3} \text{لو}_{هـ} |1 + \text{جتا}3س| + ثـ$

ط) $\int \frac{2س-1}{س(س-1)}$ دس

$= \int \frac{2س-1}{س^2-س}$ دس

$= \text{لو}_{هـ} |س^2-س| + ثـ$

ي) $\int \text{ظا}3س$ دس

$= -\int \frac{-3 \text{جا}3س}{\text{جتا}3س}$ دس $= -\text{لو}_{هـ} |\text{جتا}3س| + ثـ$

س)

أ) $م(س) = \int وهـ(س)$ دس

$= \int \frac{3س^2}{س^3+4}$ دس $= \text{لو}_{هـ} |س^3+4| + ثـ$

ب) $م(س) = \int \frac{3 \text{جا}3س}{5 + 3 \text{جتا}3س}$ دس

$= \text{لو}_{هـ} |5 + 3 \text{جتا}3س| + ثـ$

خامساً: مشتقة وتكامل الاقتران الأسي الطبيعي

تدريب (١):

١) $هـ(س) = هـ^{جاس}$

$هـ'(س) = جتاس \times هـ^{جاس}$

٢) $هـ(س) = س^{٤} هـ^{س^{٣}}$

$هـ'(س) = س^{٤} \times ٣هـ^{س^{٣}} + هـ^{س^{٣}} \times ٤س^{٣}$

$٣هـ^{س^{٣}}(س + ٣)$

تدريب (٢)

١) $هـ(س) = س لو_{هـ} س^{٢}$

$= س \times ٢س لو_{هـ}$

$هـ(س) = س^{٣} \Leftarrow هـ'(س) = ٣س^{٢}$

٢) $هـ(س) = لو_{هـ}(١ + جاس)^{٣}$

$= ٣ لو_{هـ}(١ + جاس)$

$هـ(س) = (١ + جاس)^{٣}$

$هـ'(س) = ٣(١ + جاس)^{٢} \times جتاس$

$= ٣جتاس(١ + جاس)^{٢}$

تدريب (٣)

أ) $\int (١ + هـ^{س})^{٢} دس$

$= \int ١ + ٢هـ^{س} + هـ^{٢س} دس$

$= س + ٢هـ^{س} + \frac{١}{٢}هـ^{٢س}]$

$(١ + ٢هـ + \frac{١}{٢}هـ^{٢}) - (صفر + ٢ + \frac{١}{٢})$

$= -\frac{٣}{٢} + ٢هـ + \frac{١}{٢}هـ^{٢}$

٢) $\int \frac{هـ^{٢س}}{\sqrt{١ + هـ^{٢س}}} دس$

$= \frac{١}{٢} \int \frac{٢هـ^{٢س}}{\sqrt{١ + هـ^{٢س}}} دس$

$= \frac{١}{٢} \int (١ + هـ^{٢س})^{-\frac{١}{٢}} دس$

$= \frac{١}{٢} \times \frac{(١ + هـ^{٢س})^{\frac{١}{٢}}}{\frac{١}{٢}} + ج$

$= \sqrt{١ + هـ^{٢س}} + ج$

تمارين ومسائل صفحة (٢٦٢ - ٢٦٣)

حل)

٩) أ) $ص = س + هـ^{٩س}$

$\frac{دص}{دس} = ١ + ٩هـ^{٩س}$

ب) $ص = س^{٣} + هـ^{-٥س^{٤}}$

$ص' = ٣س^{٢} - ٢٠س^{٣} هـ^{-٥س^{٤}}$

جـ) $ص = جا هـ^{٣س}$

$ص' = ٣هـ^{٣س} جتا هـ^{٣س}$

د) $ص = \sqrt{١ + هـ^{٣س}}$

$\frac{دص}{دس} = \frac{٣هـ^{٣س}}{٢\sqrt{١ + هـ^{٣س}}} = \frac{هـ^{٣س}}{\sqrt{١ + هـ^{٣س}}}$

هـ) $ص = هـ^{\frac{١}{س}} + لو_{هـ} \sqrt{س}$

$ص = هـ^{\frac{١}{س}} + \frac{١}{٢} لو_{هـ} س$

$ص' = -\frac{١}{س^{٢}} هـ^{\frac{١}{س}} + \frac{١}{٢س}$

و) $ص = هـ^{ظاس} + لو_{هـ} قاس$

$ص' = صفر + \frac{قاس ظاس}{قاس}$

$= ظاس$.

ز) $ص = هـ^{٤ لو_{هـ}(س^{٣} + ٢)}$ $\Leftarrow ص = (س^{٣} + ٢)^{٤}$

$\frac{دص}{دس} = ٤(س^{٣} + ٢)^{٣} \times ٣س^{٢} \Rightarrow ص' = ١٢س^{٢}(س^{٣} + ٢)^{٣}$

ج) $ص = \frac{1 + هـ^{ص^٢}}{هـ^{ص^٥}}$

$ص = هـ^{-٥س} - ٣ص^{-٣}$

$ص' = -٥هـ^{-٥س} - ٣(-٣)ص^{-٤}$

ط ١) $ص = هـ^{س^٢} + س^{٣ جا س}$

$ص' = صفر + س^{٣ جا س} \times جتا س \times هـ^{٣ جا س} \times ٣س^{٢}$

$ص' = س^{٣ جا س}(س جتا س + ٣)$

ك) $ص = (هـ^{٤س+٥})^{٦}$

$ص = هـ^{٢٤س+٣٠}$

$ص' = ٢٤هـ^{٢٤س+٣٠}$

س٢) $ص = هـ^{ظا س} + ٢ لو_{هـ} جتا س + \int_{٣}^{\frac{\pi}{٣}} \frac{دس}{١+ظا^{٢}س}$

$ص' = قا^{٢}س هـ^{ظا س} + ٢ \times \frac{-جا س}{جتا س} + صفر$

عندما $س = \frac{\pi}{٤} \Leftarrow$

$٢هـ + ١ = قا^{٢}\frac{\pi}{٤} هـ' + -٢ \times ظا\frac{\pi}{٤}$

$٢هـ + ١ = ٢هـ - ٢$

$\boxed{٢ = -١}$

س٣) $ق''(س) = جا س + هـ^{س^٢}$

$\int ق''(س) دس = \int (جا س + هـ^{س^٢}) دس$

$ق'(س) = -جتا س + \frac{١}{٢}هـ^{س^٢} + ب_{١}$

$ق'(٠) = \frac{١}{٢} \Leftarrow \frac{١}{٢} = -١ + \frac{١}{٢} + ب_{١}$

$ب_{١} = ١$

$ق'(س) = -جتا س + \frac{١}{٢}هـ^{س^٢} + ١$

$\int ق''(س) دس = \int (-جتا س + \frac{١}{٢}هـ^{س^٢} + ١) دس$

$ق(س) = -جا س + \frac{١}{٤}هـ^{س^٢} + س + ب_{٢}$

$ق(٠) = \frac{١}{٤} \Leftarrow صفر + \frac{١}{٤} + صفر + ب_{٢} = صفر$

$ب_{٢} = صفر$

$\therefore ق(س) = -جا س + \frac{١}{٤}هـ^{س^٢} + س$

س٤) $هـ^{ص ص} = س - ص$

$(ص + س ص ص') هـ^{س ص ص} = ١ - ص'$

$هـ^{س ص ص} ص + س ص ص' هـ^{س ص ص} + ص' = ١$

$ص'(س هـ^{س ص ص} + ١) = ١ - ص هـ^{س ص ص}$

$ص' = \frac{١ - ص(س - ص)}{س(س - ص) + ١}$

$ص = \frac{ص^{٢} - س ص + ١}{س^{٢} - س ص + ١}$ *

س٥) $ص = هـ^{س^٣}$

$ص' = ٣هـ^{س^٣}$

$ص'' = ٩هـ^{س^٣} + ٦هـ^{س^٣} = صفر$

$٩(ص^{٢} + ٦ص + ٦) = صفر$

$(ص - ٣)(ص - ٢) = صفر$

$\boxed{ص = ٢}$ ، $\boxed{ص = ٣}$

س٦) $ل(س) = ٣$ $\Leftarrow$ $لو_{هـ} ق(س) = لو_{هـ} ٣$

$لو_{هـ} ق(س) = ل(س) \times لو_{هـ} ٣$

$\frac{ق'(س)}{ق(س)} = ل'(س) \times لو_{هـ} ٣$ $\Leftarrow$ $ق'(س) = ٣ \times ل'(س) \times لو_{هـ} ٣$

*

الفصل الثانى : طرائق التكامل

أولاً : التكامل بالتعويض

تدريب (١)

١) $\int س^{٢}(٦س^{٣}+٥)^{٣}\,د س$

$ص = ٦س^{٣}+٥ \qquad د ص = ١٨ س^{٢}\,د س$

$\int س^{٢}(٦س^{٣}+٥)^{٣}\,د س = \int \frac{١}{١٨}(٦س^{٣}+٥)^{٣}(١٨س^{٢}\,د س)$

$= \int \frac{١}{١٨} ص^{٣}\,د ص = \frac{١}{١٨}\cdot\frac{ص^{٤}}{٤} + ج$

$= \frac{١}{٧٢}(٦س^{٣}+٥)^{٤} + ج$

٢) $\int (س+٣)\sqrt[٥]{س^{٢}+٦س-٤}\,د س$

$ص = س^{٢}+٦س-٤ \qquad د ص = (٢س+٦)\,د س$

$\int (س+٣)(س^{٢}+٦س-٤)^{\frac{١}{٥}}\,د س$

$= \int \frac{١}{٢}(س^{٢}+٦س-٤)^{\frac{١}{٥}}((٢س+٦)\,د س)$

$= \int \frac{١}{٢} ص^{\frac{١}{٥}}\,د ص = \frac{١}{٢}\times\frac{٥}{٦} ص^{\frac{٦}{٥}} + ج$

$= \frac{٥}{١٢}\sqrt[٥]{(س^{٢}+٦س-٤)^{٦}} + ج$

٣) $\int \frac{١٠س-٥}{\sqrt[٣]{(س^{٢}-س+١)^{٢}}}\,د س$

$ص = س^{٢}-س+١ \qquad د ص = (٢س-١)\,د س$

$\int (١٠س-٥)(س^{٢}-س+١)^{-\frac{٢}{٣}}\,د س$

$= \int ٥(س^{٢}-س+١)^{-\frac{٢}{٣}}((٢س-١)\,د س)$

$= \int ٥\, ص^{-\frac{٢}{٣}}\,د ص = ٥\times٣ ص^{\frac{١}{٣}} + ج$

تدريب (٢)

١) $\int س^{٧}\sqrt[٣]{٨س^{٤}-٣}\,د س$

$ص = س^{٤}-٣ \qquad د ص = ٤س^{٣}\,د س$

$\int س^{٧}(س^{٤}-٣)^{\frac{١}{٣}}\,د س = \int \frac{١}{٤} س^{٤}\, ص^{\frac{١}{٣}}(٤س^{٣}\,د س)$

$= \int \frac{١}{٤} س^{٤} ص^{\frac{١}{٣}}\,د ص$

$= \int \frac{١}{٤}(ص+٣) ص^{\frac{١}{٣}}\,د ص$

$= \int \frac{١}{٤}(ص^{\frac{٤}{٣}}+٣ ص^{\frac{١}{٣}})\,د ص$

$= \frac{١}{٤}(\frac{٣}{٧} ص^{\frac{٧}{٣}} + ٣\times\frac{٣}{٤} ص^{\frac{٤}{٣}}) + ج$

$= \frac{١}{٤}(\frac{٣}{٧}\sqrt[٣]{(س^{٤}-٣)^{٧}} + ٣\sqrt[٣]{(س^{٤}-٣)^{٤}}) + ج$

٢) $\int ٢س^{٥}(س^{٢}+٥)^{٤}\,د س$

$ص = س^{٢}+٥ \qquad د ص = ٢س\,د س$

$\int س^{٤} ص^{٤}(٢س)\,د س$

$\int (ص-٥)^{٢} ص^{٤}\,د ص$

$\int (ص^{٢}-١٠ص+٢٥) ص^{٤}\,د ص$

$\int ص^{٦} - ١٠ ص^{٥} + ٢٥ ص^{٤}\,د ص$

$\frac{ص^{٧}}{٧} - \frac{١٠ ص^{٦}}{٦} + \frac{٢٥ ص^{٥}}{٥} + ج$

$= \frac{(س^{٢}+٥)^{٧}}{٧} - \frac{٥(س^{٢}+٥)^{٦}}{٣} + ٥(س^{٢}+٥)^{٥} + ج$

تدريب (٣)

١) $\int \frac{(٢س+١)^{٥}}{س^{٧}}\, دس$

$= \int \frac{(٢س+١)^{٥}}{س^{٥} \times س^{٢}}\, دس$

$= \int \frac{١}{س^{٢}} \left(\frac{٢س+١}{س}\right)^{٥} دس$

$ص = \frac{٢س+١}{س}$ ، $ص = ٢ + \frac{١}{س}$

$دص = \frac{-١}{س^{٢}}\, دس$

$\int \frac{١}{س^{٢}} (ص)^{٥}\, دس = -\int ص^{٥}\, دص$

$= -\frac{ص^{٦}}{٦} + جـ$

$= -\frac{١}{٦} \left(\frac{٢س+١}{س}\right)^{٦} + جـ$

٢) $\int س^{٢} \sqrt[٣]{س^{٧}+٥س^{٣}}\, دس$

إخراج $س^{٣}$ عامل مشترك.

$\int س^{٢} \sqrt[٣]{س^{٣}} \sqrt[٣]{س^{٤}+٥}\, دس$

$\int س^{٣} \sqrt[٣]{س^{٤}+٥}\, دس$

$ص = س^{٤}+٥$ $\quad$ $دص = ٤س^{٣}\, دس$

$\int س^{٣} (س^{٤}+٥)^{\frac{١}{٣}}\, دس = \int \frac{١}{٤} ص^{\frac{١}{٣}}\, دص$

$= \frac{١}{٤} \times \frac{٣}{٤} ص^{\frac{٤}{٣}} + جـ$

$= \frac{٣}{١٦} \sqrt[٣]{(س^{٤}+٥)^{٤}} + جـ$

٣) $\int \sqrt[٣]{٤س^{٥}+٢س^{٣}}\, دس$

إخراج $س^{٣}$ عامل مشترك.

$\int س \sqrt[٣]{٤س^{٢}+٢}\, دس$

$ص = ٤س^{٢}+٢$ $\quad$ $دص = ٨س\, دس$

$\int س (٤س^{٢}+٢)^{\frac{١}{٣}}\, دس = \int \frac{١}{٨} ص^{\frac{١}{٣}}\, دص$

$= \frac{١}{٨} \times \frac{٣}{٤} ص^{\frac{٤}{٣}} + جـ$

$= \frac{٣}{٣٢} \sqrt[٣]{(٤س^{٢}+٢)^{٤}} + جـ$

٤) $\int (٧س^{٥} - ٢س)^{٣}\, دس$

$\int س^{٣} (٧س^{٤} - ٢)^{٣}\, دس$

$ص = ٧س^{٤} - ٢$ $\quad$ $دص = ٢٨س^{٣}$

$\int \frac{١}{٢٨} ص^{٣}\, دص = \frac{١}{٢٨} \frac{ص^{٤}}{٤} + جـ$

$= \frac{١}{١١٢} (٧س^{٤} - ٢)^{٤} + جـ$

تدريب (٤)

١) $\int_{٠}^{٤} س \sqrt{س^{٢}+٩}\, دس$

$ص = س^{٢}+٩$ $\quad$ $دص = ٢س\, دس$

$\int_{٩}^{٢٥} \frac{١}{٢} ص^{\frac{١}{٢}}\, دص$ $\quad$ $س = ٠$ ، $ص = ٩$ $\quad$ $س = ٤$ ، $ص = ٢٥$

$\frac{١}{٢} \times \frac{٢}{٣} \left[\sqrt{ص^{٣}}\right]_{٩}^{٢٥}$

$\frac{١}{٣} (١٢٥ - ٢٧) = \frac{٩٨}{٣}$

٢) $\int_{1}^{2} \frac{(س+1)^5}{س^7}\, دس$

$\int_{1}^{2} \frac{(س+1)^5}{س^5\, س^2}\, دس$

$= \int_{1}^{2} \frac{1}{س^2} \left(\frac{س+1}{س}\right)^5 دس$

$ص = \frac{س+1}{س}$ ، $ص = 1 + \frac{1}{س}$ ، $دص = \frac{-1}{س^2}\, دس$

$\int_{2}^{\frac{3}{2}} -ص^5\, دص$ — $س=1$ ، $ص=2$ ؛ $س=2$ ، $ص=\frac{3}{2}$

$- \left[\frac{ص^6}{6}\right]_{2}^{\frac{3}{2}}$

$-\frac{1}{6}\left(\left(\frac{3}{2}\right)^6 - (2)^6\right) = \frac{3367}{384}$

__تدريب (٥)__

١) $\int (س^2+1)\, جا(س^3+3س+1)\, دس$

$ص = س^3+3س+1$ — $دص = (3س^2+3)\, دس$

$\int \frac{1}{3}\, جا ص\, دص = -\frac{1}{3}\, جتا ص + جـ$

$= -\frac{1}{3}\, جتا(س^3+3س+1) + جـ$

٢) $\int س\, ظا^2(س^2+5)\, دس$

$ص = س^2+5$ — $دص = 2س\, دس$

$\int \frac{1}{2}\, ظا^2 ص\, دص = \int \frac{1}{2}(قا^2 ص - 1)\, دص$

$\frac{1}{2}(ظا ص - ص) + جـ = \frac{1}{2}\left(ظا(س^2+5) - (س^2+5)\right) + جـ$

٣) $\int_{1}^{2} \frac{هـ^{\frac{3}{س}}}{س^2}\, دس$

$ص = \frac{3}{س}$ — $دص = -\frac{3}{س^2}\, دس$

$س = 1 \leftarrow ص = 3$

$س = 2 \leftarrow ص = \frac{3}{2}$

$\int_{3}^{\frac{3}{2}} \frac{-1}{3}\, هـ^{ص}\, دص$

$= -\frac{1}{3}\left[هـ^{ص}\right]_{3}^{\frac{3}{2}} = -\frac{1}{3}\left(هـ^{\frac{3}{2}} - هـ^{3}\right)$

__تدريب (٦) :__

١) $\int ظا^5 3س\, قا^2 3س\, دس$

$ص = ظا 3س$ — $دص = 3\, قا^2 3س\, دس$

$\int \frac{1}{3}\, ص^5\, دص = \frac{1}{3}\, \frac{ص^6}{6} + جـ$

$= \frac{1}{18}\, ظا^6 3س + جـ$

٢) $\int \frac{جتا 2س}{قتا^5 2س}\, دس = \int جا^5 2س\, جتا 2س\, دس$

$ص = جا 2س$ — $دص = 2\, جتا 2س\, دس$

$\int \frac{1}{2}\, ص^5\, دص = \frac{1}{2}\, \frac{ص^6}{6} + جـ$

$\frac{1}{12}\, جا^6 2س + جـ$

٣) $\int جا^3 س\, دس = \int جا س \times جا^2 س\, دس$

$\int جا س\, (1 - جتا^2 س)\, دس$ — $ص = جتا س$

$\int -(1 - ص^2)\, دص$ — $دص = -جا س\, دس$

$= -ص + \frac{ص^3}{3} + جـ = -جتا س + \frac{جتا^3 س}{3} + جـ$

٤) $\int$ حا^{٤}س حتا^{٣}س دس

ص = حاس ، دص = حتاس دس

$\int \frac{١}{٥}$ ص^{٤} × حتا^{٢}س دص

← (١ − حا^{٢}س)

$\frac{١}{٥}\int$ ص^{٤}(١ − ص^{٢}) دص

$= \frac{١}{٥}\int$ (ص^{٤} − ص^{٦}) دص

$\frac{١}{٥}\left(\frac{ص^{٥}}{٥} - \frac{ص^{٧}}{٧}\right) + ثـ$

$= \frac{حا^{٥}س}{٢٥} - \frac{حا^{٧}س}{٣٥} + ثـ$

تمارين ومسائل صفحة (٢٧٣ ، ٢٧٤)

س١)

ب) $\int \frac{٣ - ٢س}{٥ - ٦س - ٣س^{٢}}$ دس

ص = ٣س^{٢} − ٦س − ٥ ، دص = (٦س − ٤) دس

$= \int \frac{-دص}{ص}$

$= -$ لو$_{هـ}$ |ص| + ثـ

$= -$ لو$_{هـ}$ |٣س^{٢} − ٦س − ٥| + ثـ

ج) $\int$ (س + ٣) $\sqrt{س^{٢} + ٦س}$ دس

ص = س^{٢} + ٦س ، دص = (٢س + ٦) دس

س = ٠ ⇐ ص = ٠

س = ٢ ⇐ ص = ١٦

$\int_{٠}^{١٦} \frac{١}{٢}$ ص$^{\frac{١}{٢}}$ دص

$= \frac{١}{٢} \times \frac{٢}{٣}\left[ص^{\frac{٣}{٢}}\right]_{٠}^{١٦}$

$\frac{١}{٣}\left(\sqrt{١٦}^{٣} - \sqrt{٠}^{٣}\right) = \frac{٦٤}{٣}$

د) $\int$ $\frac{٣ - ٢س}{٥ - ٦س - ٣س^{٢}}$ دس

ص = ٣س^{٢} − ٦س − ٥ ، دص = (٦س − ٤) دس

$= \frac{١}{٢}\int \frac{دص}{ص}$

$= \frac{١}{٢}$ لو$_{هـ}$ |ص| + ثـ

$= \frac{١}{٢}$ لو$_{هـ}$ |٣س^{٢} − ٦س − ٥| + ثـ

هـ) $\int \frac{٢}{(٤س^{٢} - ٢٠س + ٢٥)^{٧}}$ دس

$= \int \frac{٢}{((٢س - ٥)^{٢})^{٧}}$ دس

$= \int ٢(٢س - ٥)^{-١٤}$ دس

$= ٢\left[\frac{(٢س - ٥)^{-١٣}}{-١٣ \times ٢}\right] + ثـ = \frac{-١}{١٣(٢س - ٥)^{١٣}} + ثـ$

د) $\int_{٣}^{٤} \frac{٧}{س^{٢} - ٤س + ٤}$ دس

$\int_{٣}^{٤} \frac{٧}{(س - ٢)^{٢}}$ دس $= \int_{٣}^{٤} ٧(س - ٢)^{-٢}$ دس

$\left[\frac{-٧}{س - ٢}\right]_{٣}^{٤} = \frac{-٧}{٢} + \frac{٧}{١} = \frac{٧}{٢}$

هـ) $\int \frac{ظتا^{٢}\frac{١}{س}}{س^{٢}}$ دس

ص = $\frac{١}{س}$ ، دص = $\frac{-١}{س^{٢}}$ دس

$= -\int$ ظتا^{٢}ص دص

$= -\int$ (قتا^{٢}ص − ١) دص

$= -$ (− ظتاص − ص) + ثـ

$=$ ظتا$\frac{١}{س} + \frac{١}{س} + ثـ$

و) $\int \frac{(٥ + ٧\sqrt{س})^{٧}}{\sqrt{س}}$ دس

ص = ٧$\sqrt{س}$ + ٥ ، دص = $\frac{١}{٢\sqrt{س}}$ دس

$= \int ٢ص^{٧}$ دص $= \frac{٢ص^{٨}}{٨} + ثـ$

$= \frac{(٥ + ٧\sqrt{س})^{٨}}{٤} + ثـ$

منهاجي
متعة التعليم الهادف

ن) $\int \frac{1}{\text{س}^{2}} \sqrt{\frac{2\text{س}+1}{\text{س}}}\ \text{د س}$

$\text{ص} = \frac{2\text{س}+1}{\text{س}}$ ، $\text{ص} = 2 + \frac{1}{\text{س}}$ ، $\text{د ص} = \frac{-1}{\text{س}^{2}}\ \text{د س}$

$\int \frac{1}{\text{س}^{2}}\ \text{ص}^{\frac{1}{2}}\ .\ \text{د س} = -\int \text{ص}^{\frac{1}{2}}\ \text{د ص}$

$= -\frac{2}{3}\ \text{ص}^{\frac{3}{2}} + \text{جـ}$

$= -\frac{2}{3} \sqrt{\left(\frac{2\text{س}+1}{\text{س}}\right)^{3}} + \text{جـ}$

ع) $\int_{1}^{\text{هـ}^{3}} \frac{1}{\text{س}\sqrt{1+\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}}}\ \text{د س}$

$\text{ص} = 1 + \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}$ ، $\text{د ص} = \frac{1}{\text{س}}\ \text{د س}$

$\text{س} = 1$ ، $\text{ص} = 1$

$\text{س} = \text{هـ}^{3}$ ، $\text{ص} = 4$

$\int_{1}^{4} \text{ص}^{-\frac{1}{2}}\ \text{د ص} = \left[2\ \text{ص}^{\frac{1}{2}}\right]_{1}^{4}$

$2(\sqrt{4} - \sqrt{1}) = 2$

ط) $\int \text{هـ}^{\text{س}^{3} + 2\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}}\ \text{د س}$

$= \int \text{هـ}^{\text{س}^{3}} \times \text{هـ}^{2\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}}\ \text{د س} = \int \text{هـ}^{\text{س}^{3}} \times \text{هـ}^{\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}^{2}}\ \text{د س}$

$= \int \text{س}^{2}\ \text{هـ}^{\text{س}^{3}}\ \text{د س}$

$\text{ص} = \text{س}^{3}$ ، $\text{د ص} = 3\text{س}^{2}\ \text{د س}$

$\int \frac{1}{3}\ \text{هـ}^{\text{ص}}\ \text{د ص} = \frac{1}{3}\ \text{هـ}^{\text{ص}} + \text{جـ}$

$= \frac{1}{3}\ \text{هـ}^{\text{س}^{3}} + \text{جـ}$

ي) $\int \frac{\text{س}^{3}}{(\text{س}+1)^{5}}\ \text{د س}$

$= \int \frac{1}{(\text{س}+1)^{2}} \times \frac{\text{س}^{3}}{(\text{س}+1)^{3}}\ \text{د س}$

$= \int \frac{1}{(\text{س}+1)^{2}} \left(\frac{\text{س}}{\text{س}+1}\right)^{3}\ \text{د س}$

$\text{ص} = \frac{\text{س}}{\text{س}+1}$ ، $\text{د ص} = \frac{1}{(\text{س}+1)^{2}}\ \text{د س}$

$= \int \text{ص}^{3}\ \text{د ص} = \frac{\text{ص}^{4}}{4} + \text{جـ}$

$\frac{1}{4}\left(\frac{\text{س}}{1+\text{س}}\right)^{4} + \text{جـ}$

ك) $\int \sqrt[3]{\text{س}^{-\frac{3}{4}} + 1}\ \text{د س}$

$= \int \sqrt[3]{\frac{1}{\text{س}^{\frac{3}{4}}} + 1}\ \text{د س} = \int \sqrt[3]{\frac{1 + \text{س}^{\frac{3}{4}}}{\text{س}^{\frac{3}{4}}}}\ \text{د س}$

$= \int \frac{1}{\text{س}^{\frac{1}{4}}} \sqrt[3]{1+\text{س}^{\frac{3}{4}}}\ \text{د س}$

$\text{ص} = 1 + \text{س}^{\frac{3}{4}}$ ، $\text{د ص} = +\frac{3}{4}\ \text{س}^{-\frac{1}{4}}\ \text{د س}$

$= \int +\frac{4}{3}\ \text{ص}^{\frac{1}{3}}\ \text{د ص} = +\frac{4}{3} \times \frac{3}{4}\ \text{ص}^{\frac{4}{3}} + \text{جـ}$

$= \sqrt[3]{\left(\frac{3}{4}\text{س}+1\right)^{4}} + \text{جـ}$

ل) $\int \text{جتا}^{3}\text{س}\ (1+\text{جا س})^{7}\ \text{د س}$

$\text{ص} = 1 + \text{جا س}$ ، $\text{د ص} = \text{جتا س}\ \text{د س}$

$\int \text{جتا}^{2}\text{س}\ \text{ص}^{7}\ \text{د ص} = \int (1 - \text{جا}^{2}\text{س})\ \text{ص}^{7}\ \text{د ص}$

$= \int \left(1 - (\text{ص}-1)^{2}\right)\text{ص}^{7}\ \text{د ص}$

$= \int 2\text{ص}^{8} - \text{ص}^{9}\ \text{د ص} = \frac{2\text{ص}^{9}}{9} - \frac{\text{ص}^{10}}{10} + \text{جـ}$

$= \frac{2(1+\text{جا س})^{9}}{9} - \frac{(1+\text{جا س})^{10}}{10} + \text{جـ}$

$$\int_{1}^{2} \left(\frac{w^{3}}{w^{2}+1}\right)^{2} dw = \int_{1}^{2} \frac{w^{6}}{w^{4}+2w^{2}+1}\, dw$$

$$= \int_{1}^{2} \left(w^{2} - 2 + \frac{2w^{2}+1}{w^{4}+2w^{2}+1}\right) dw$$

$$= \left[\frac{w^{3}}{3} - 2w + \int_{1}^{2} \frac{2w^{2}+1}{(w^{2}+1)^{2}}\, dw\right]$$

$$\int_{1}^{2} \frac{2w^{2}+1}{(w^{2}+1)^{2}}\, dw \quad \text{نفرض } w = \tan\theta \text{ ، } dw = \sec^{2}\theta\, d\theta$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\arctan 2} \frac{2\tan^{2}\theta + 1}{\sec^{4}\theta} \sec^{2}\theta\, d\theta$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\arctan 2} \frac{2\tan^{2}\theta + 1}{\sec^{2}\theta}\, d\theta = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\arctan 2} (2\sin^{2}\theta + \cos^{2}\theta)\, d\theta$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\arctan 2} (1 + \sin^{2}\theta)\, d\theta = \left[\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\arctan 2}$$

$$\sin 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1+\tan^{2}\theta} = \frac{4}{5} \quad \text{و} \quad \cos 2\theta = \frac{1-\tan^{2}\theta}{1+\tan^{2}\theta} = -\frac{3}{5}$$

$$= \arctan 2 - \frac{1}{2}\sin 2\theta - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$$

$$= \arctan 2 - \frac{2}{5} - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} = \arctan 2 - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{10}$$

$$\int_{1}^{2} \left(\frac{w^{3}}{w^{2}+1}\right)^{2} dw = \arctan 2 - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{10}$$

(ب) $\int_{1}^{2} \frac{w^{3}}{\sqrt{(w^{2}+2)^{3}}}\, dw$

$w = \sqrt{2}\tan\theta$ ، $dw = \sqrt{2}\sec^{2}\theta\, d\theta$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\arctan\sqrt{2}} \frac{2\sqrt{2}\tan^{3}\theta \cdot \sqrt{2}\sec^{2}\theta\, d\theta}{\sqrt{(2\sec^{2}\theta)^{3}}} = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\arctan\sqrt{2}} \frac{4\tan^{3}\theta}{2\sqrt{2}\sec^{3}\theta}\, d\theta$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\arctan\sqrt{2}} \frac{2\sin^{3}\theta}{\sqrt{2}\cos^{3}\theta}\, d\theta = \sqrt{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\arctan\sqrt{2}} \frac{\sin\theta(1-\cos^{2}\theta)}{\cos^{3}\theta}\, d\theta$$

$$= \sqrt{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\arctan\sqrt{2}} (\sec^{2}\theta\tan\theta - \tan\theta\sec\theta)\, d\theta$$

$$= \sqrt{2}\left[\frac{1}{2}\tan^{2}\theta - \sec\theta\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\arctan\sqrt{2}}$$

$$= \sqrt{2}\left(\frac{1}{2}\times 2 - \sqrt{3} - \frac{1}{2} + \sqrt{2}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{1}{2} - \sqrt{3} + \sqrt{2}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{6} + 2$$

(ج) $\int_{0}^{2} \frac{w^{3}}{\sqrt{w+1}}\, dw$

$w+1 = u^{2}$ ، $dw = 2u\, du$ ، $w = u^{2}-1$

$$\int_{1}^{\sqrt{3}} \frac{(u^{2}-1)^{3}}{u} \cdot 2u\, du = 2\int_{1}^{\sqrt{3}} (u^{6} - 3u^{4} + 3u^{2} - 1)\, du$$

$$= 2\left[\frac{1}{7}u^{7} - \frac{3}{5}u^{5} + u^{3} - u\right]_{1}^{\sqrt{3}}$$

$$= 2\left(\frac{1}{7}\times 27\sqrt{3} - \frac{3}{5}\times 9\sqrt{3} + 3\sqrt{3} - \sqrt{3} - \frac{1}{7} + \frac{3}{5} - 1 + 1\right)$$

$$= 2\left(\frac{27\sqrt{3}}{7} - \frac{27\sqrt{3}}{5} + 2\sqrt{3} + \frac{1}{35}\right) = \frac{2}{35}\left(-\frac{108\sqrt{3}}{35} + 2\right)$$

$$= \frac{4}{35}\left(1 - \frac{54\sqrt{3}}{35}\right)$$

$$\int_{0}^{3} \frac{w^{3}}{\sqrt{w+1}}\, dw = \int_{1}^{2} \frac{(u^{2}-1)^{3}}{u} \cdot 2u\, du$$

$$= 2\int_{1}^{2} (u^{6} - 3u^{4} + 3u^{2} - 1)\, du$$

$$= 2\left[\frac{1}{7}u^{7} - \frac{3}{5}u^{5} + u^{3} - u\right]_{1}^{2}$$

$$= 2\left(\frac{128}{7} - \frac{96}{5} + 8 - 2 - \frac{1}{7} + \frac{3}{5} - 1 + 1\right)$$

$$= 2\left(\frac{127}{7} - \frac{93}{5} + 6\right) = 2\left(\frac{193}{35}\right) = \frac{386}{35}$$

$$\int_{0}^{3} \frac{w^{3}}{\sqrt{w+1}}\, dw = \frac{386}{35}$$

(د) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{w}{\sqrt{7+\cos w}}\, dw$

$w = \pi - u$ ، $dw = -du$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{\pi - u}{\sqrt{7+\cos u}} \cdot -du = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\pi - u}{\sqrt{7+\cos u}}\, du$$

$$= \pi\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{7+\cos u}}\, du - \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{u}{\sqrt{7+\cos u}}\, du$$

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{u}{\sqrt{7+\cos u}}\, du = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{w}{\sqrt{7+\cos w}}\, dw$$

$$2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{w}{\sqrt{7+\cos w}}\, dw = \pi\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{7+\cos w}}\, dw$$

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{w}{\sqrt{7+\cos w}}\, dw = \frac{\pi}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{7+\cos w}}\, dw$$

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{7+\cos w}}\, dw \quad \text{نفرض } \tan\frac{w}{2} = u \text{ ، } dw = \frac{2}{1+u^{2}}\, du$$

$$\cos w = \frac{1-u^{2}}{1+u^{2}}$$

$$\int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{7+\frac{1-u^{2}}{1+u^{2}}}} \cdot \frac{2}{1+u^{2}}\, du = \int_{0}^{1} \frac{2}{\sqrt{8+6u^{2}}}\, du$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{3}{4}u^{2}}}\, du$$

$$\frac{3}{4}u^{2} = \tan^{2}\theta \text{ ، } u = \frac{2}{\sqrt{3}}\tan\theta \text{ ، } du = \frac{2}{\sqrt{3}}\sec^{2}\theta\, d\theta$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{0}^{\arctan\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{1}{\sqrt{1+\tan^{2}\theta}} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}}\sec^{2}\theta\, d\theta = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\int_{0}^{\arctan\frac{\sqrt{3}}{2}} \sec\theta\, d\theta$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\left[\ln|\sec\theta + \tan\theta|\right]_{0}^{\arctan\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\left(\ln\left|\frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right| - \ln|1+0|\right) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\ln\left|\frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right|$$

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{w}{\sqrt{7+\cos w}}\, dw = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\ln\left|\frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right|$$

(هـ) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin w}{1+\cos^{2} w}\, dw$

$u = \cos w$ ، $du = -\sin w\, dw$

$$\int_{1}^{0} \frac{\sin w}{1+u^{2}} \cdot -du = \int_{0}^{1} \frac{1}{1+u^{2}}\, du$$

$$= \left[\arctan u\right]_{0}^{1} = \frac{\pi}{4}$$

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin w}{1+\cos^{2} w}\, dw = \frac{\pi}{4}$$

(و) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sec^{2} w}{\sqrt{1+\tan w}}\, dw$

$u = 1+\tan w$ ، $du = \sec^{2} w\, dw$

$$\int_{1}^{2} \frac{1}{\sqrt{u}}\, du = \left[2\sqrt{u}\right]_{1}^{2} = 2\sqrt{2} - 2$$

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sec^{2} w}{\sqrt{1+\tan w}}\, dw = 2\sqrt{2} - 2$$

(ز) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin w}{\cos^{3} w}\, dw$

$u = \cos w$ ، $du = -\sin w\, dw$

$$\int_{1}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{\sin w}{u^{3}} \cdot -du = \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} \frac{1}{u^{3}}\, du$$

$$= \left[-\frac{1}{2u^{2}}\right]_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$$

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin w}{\cos^{3} w}\, dw = \frac{1}{2}$$

(ح) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \sec^{4} w\, dw$

$$= \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \sec^{2} w(1+\tan^{2} w)\, dw$$

$u = \tan w$ ، $du = \sec^{2} w\, dw$

$$\int_{0}^{1} (1+u^{2})\, du = \left[u + \frac{1}{3}u^{3}\right]_{0}^{1} = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$$

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \sec^{4} w\, dw = \frac{4}{3}$$

(ط) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \tan^{4} w\, dw$

$$= \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2} w(\sec^{2} w - 1)\, dw$$

$$= \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2} w\sec^{2} w\, dw - \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2} w\, dw$$

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2} w\sec^{2} w\, dw \quad \text{نفرض } u = \tan w \text{ ، } du = \sec^{2} w\, dw$$

$$\int_{0}^{1} u^{2}\, du = \left[\frac{1}{3}u^{3}\right]_{0}^{1} = \frac{1}{3}$$

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2} w(\sec^{2} w - 1)\, dw = \frac{1}{3} - \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2} w\, dw$$

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2} w\, dw = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} (\sec^{2} w - 1)\, dw = \left[\tan w - w\right]_{0}^{\frac{\pi}{4}} = 1 - \frac{\pi}{4}$$

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \tan^{4} w\, dw = \frac{1}{3} - 1 + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{3}$$

(ي) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^{5} w\, dw$

$$= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^{4} w\sin w\, dw = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^{2} w)^{2}\sin w\, dw$$

$u = \cos w$ ، $du = -\sin w\, dw$

$$\int_{1}^{0} (1-u^{2})^{2} \cdot -du = \int_{0}^{1} (1-2u^{2}+u^{4})\, du$$

$$= \left[u - \frac{2}{3}u^{3} + \frac{1}{5}u^{5}\right]_{0}^{1} = 1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5} = \frac{8}{15}$$

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^{5} w\, dw = \frac{8}{15}$$

(ك) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \sec^{6} w\, dw$

$$= \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \sec^{4} w\sec^{2} w\, dw = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} (1+\tan^{2} w)^{2}\sec^{2} w\, dw$$

$u = \tan w$ ، $du = \sec^{2} w\, dw$

$$\int_{0}^{1} (1+u^{2})^{2}\, du = \int_{0}^{1} (1+2u^{2}+u^{4})\, du$$

$$= \left[u + \frac{2}{3}u^{3} + \frac{1}{5}u^{5}\right]_{0}^{1} = 1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{5} = \frac{28}{15}$$

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \sec^{6} w\, dw = \frac{28}{15}$$

(ل) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2} w\cos^{4} w\, dw$

$$= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2} w(\cos^{2} w)^{2}\, dw = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2} w\left(\frac{1+\cos 2w}{2}\right)^{2} dw$$

$$= \frac{1}{4}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2} w(1+2\cos 2w+\cos^{2} 2w)\, dw$$

$$= \frac{1}{4}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2} w\, dw + \frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2} w\cos 2w\, dw + \frac{1}{4}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2} w\cos^{2} 2w\, dw$$

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2} w\, dw = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 2w}{2}\, dw = \left[\frac{w}{2} - \frac{1}{4}\sin 2w\right]_{0}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$$

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2} w\cos 2w\, dw = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 2w}{2}\cos 2w\, dw = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2w - \cos^{2} 2w}{2}\, dw$$

$$= \left[\frac{1}{4}\sin 2w - \frac{1}{4}w - \frac{1}{8}\sin 4w\right]_{0}^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{\pi}{8}$$

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2} w\cos^{2} 2w\, dw = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 4w}{2}\cdot\frac{1+\cos 4w}{2}\, dw = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos^{2} 4w}{4}\, dw$$

$$= \left[\frac{1}{4}w - \frac{1}{16}\sin 8w\right]_{0}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{8}$$

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2} w\cos^{4} w\, dw = \frac{1}{4}\cdot\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\left(-\frac{\pi}{8}\right) + \frac{1}{4}\cdot\frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{16}$$

(م) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \sin^{2} w\cos^{2} w\, dw$

$$= \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1-\cos 2w}{2}\right)\left(\frac{1+\cos 2w}{2}\right) dw = \frac{1}{4}\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} (1-\cos^{2} 2w)\, dw$$

$$= \frac{1}{4}\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \sin^{2} 2w\, dw = \frac{1}{4}\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1-\cos 4w}{2}\, dw$$

$$= \frac{1}{8}\left[w - \frac{1}{4}\sin 4w\right]_{0}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{8}\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{32}$$

(ن) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^{4} w\cos^{4} w\, dw$

$$= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (\sin^{2} w\cos^{2} w)^{2}\, dw = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1-\cos 4w}{4}\right)^{2} dw$$

$$= \frac{1}{16}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (1-2\cos 4w+\cos^{2} 4w)\, dw$$

$$= \frac{1}{16}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} dw - \frac{1}{8}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos 4w\, dw + \frac{1}{16}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2} 4w\, dw$$

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} dw = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos 4w\, dw = \left[\frac{1}{4}\sin 4w\right]_{0}^{\frac{\pi}{2}} = 0$$

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2} 4w\, dw = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 8w}{2}\, dw = \left[\frac{1}{2}w + \frac{1}{16}\sin 8w\right]_{0}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$$

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^{4} w\cos^{4} w\, dw = \frac{1}{16}\cdot\frac{\pi}{2} - 0 + \frac{1}{16}\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{128}$$

(س) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \tan^{3} w\sec^{4} w\, dw$

$$= \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \tan^{3} w\sec^{2} w\sec^{2} w\, dw = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \tan^{3} w(1+\tan^{2} w)\sec^{2} w\, dw$$

$u = \tan w$ ، $du = \sec^{2} w\, dw$

$$\int_{0}^{1} u^{3}(1+u^{2})\, du = \int_{0}^{1} (u^{3}+u^{5})\, du$$

$$= \left[\frac{1}{4}u^{4} + \frac{1}{6}u^{6}\right]_{0}^{1} = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{5}{12}$$

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \tan^{3} w\sec^{4} w\, dw = \frac{5}{12}$$

(ع) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \tan^{3} w\sec^{3} w\, dw$

$$= \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2} w\sec^{2} w\sec w\tan w\, dw = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} (\sec^{2} w - 1)\sec^{2} w\sec w\tan w\, dw$$

$u = \sec w$ ، $du = \sec w\tan w\, dw$

$$\int_{1}^{\sqrt{2}} (u^{2}-1)u^{2}\, du = \int_{1}^{\sqrt{2}} (u^{4}-u^{2})\, du$$

$$= \left[\frac{1}{5}u^{5} - \frac{1}{3}u^{3}\right]_{1}^{\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{5} - \frac{2\sqrt{2}}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{3}$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{15} + \frac{2}{15}$$

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \tan^{3} w\sec^{3} w\, dw = \frac{2\sqrt{2}}{15} + \frac{2}{15}$$

(ف) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^{3} w\cos^{3} w\, dw$

$$= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2} w\cos^{3} w\sin w\, dw = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^{2} w)\cos^{3} w\sin w\, dw$$

$u = \cos w$ ، $du = -\sin w\, dw$

$$\int_{1}^{0} (1-u^{2})u^{3} \cdot -du = \int_{0}^{1} (u^{3}-u^{5})\, du$$

$$= \left[\frac{1}{4}u^{4} - \frac{1}{6}u^{6}\right]_{0}^{1} = \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$$

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^{3} w\cos^{3} w\, dw = \frac{1}{12}$$

(ق) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^{3} w\cos^{5} w\, dw$

$$= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2} w\cos^{5} w\sin w\, dw = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^{2} w)\cos^{5} w\sin w\, dw$$

$u = \cos w$ ، $du = -\sin w\, dw$

$$\int_{1}^{0} (1-u^{2})u^{5} \cdot -du = \int_{0}^{1} (u^{5}-u^{7})\, du$$

$$= \left[\frac{1}{6}u^{6} - \frac{1}{8}u^{8}\right]_{0}^{1} = \frac{1}{6} - \frac{1}{8} = \frac{1}{24}$$

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^{3} w\cos^{5} w\, dw = \frac{1}{24}$$

(ر) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^{5} w\cos^{3} w\, dw$

$$= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^{5} w\cos^{2} w\cos w\, dw = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^{5} w(1-\sin^{2} w)\cos w\, dw$$

$u = \sin w$ ، $du = \cos w\, dw$

$$\int_{0}^{1} u^{5}(1-u^{2})\, du = \int_{0}^{1} (u^{5}-u^{7})\, du$$

$$= \left[\frac{1}{6}u^{6} - \frac{1}{8}u^{8}\right]_{0}^{1} = \frac{1}{6} - \frac{1}{8} = \frac{1}{24}$$

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^{5} w\cos^{3} w\, dw = \frac{1}{24}$$

(ش) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^{5} w\cos^{5} w\, dw$

$$= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^{4} w\cos^{5} w\sin w\, dw = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^{2} w)^{2}\cos^{5} w\sin w\, dw$$

$u = \cos w$ ، $du = -\sin w\, dw$

$$\int_{1}^{0} (1-u^{2})^{2}u^{5} \cdot -du = \int_{0}^{1} (u^{5}-2u^{7}+u^{9})\, du$$

$$= \left[\frac{1}{6}u^{6} - \frac{1}{4}u^{8} + \frac{1}{10}u^{10}\right]_{0}^{1} = \frac{1}{6} - \frac{1}{4} + \frac{1}{10} = \frac{1}{60}$$

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^{5} w\cos^{5} w\, dw = \frac{1}{60}$$

(ت) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \tan^{5} w\sec^{3} w\, dw$

$$= \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \tan^{4} w\sec^{2} w\sec w\tan w\, dw = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} (\sec^{2} w - 1)^{2}\sec^{2} w\sec w\tan w\, dw$$

$u = \sec w$ ، $du = \sec w\tan w\, dw$

$$\int_{1}^{\sqrt{2}} (u^{2}-1)^{2}u^{2}\, du = \int_{1}^{\sqrt{2}} (u^{6}-2u^{4}+u^{2})\, du$$

$$= \left[\frac{1}{7}u^{7} - \frac{2}{5}u^{5} + \frac{1}{3}u^{3}\right]_{1}^{\sqrt{2}} = \frac{8\sqrt{2}}{7} - \frac{4\sqrt{2}}{5} + \frac{2\sqrt{2}}{3} - \frac{1}{7} + \frac{2}{5} - \frac{1}{3}$$

$$= \frac{58\sqrt{2}}{105} - \frac{8}{105}$$

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \tan^{5} w\sec^{3} w\, dw = \frac{58\sqrt{2}}{105} - \frac{8}{105}$$

(ث) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \tan^{5} w\sec^{4} w\, dw$

$$= \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \tan^{5} w\sec^{2} w\sec^{2} w\, dw = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \tan^{5} w(1+\tan^{2} w)\sec^{2} w\, dw$$

$u = \tan w$ ، $du = \sec^{2} w\, dw$

$$\int_{0}^{1} u^{5}(1+u^{2})\, du = \int_{0}^{1} (u^{5}+u^{7})\, du$$

$$= \left[\frac{1}{6}u^{6} + \frac{1}{8}u^{8}\right]_{0}^{1} = \frac{1}{6} + \frac{1}{8} = \frac{7}{24}$$

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \tan^{5} w\sec^{4} w\, dw = \frac{7}{24}$$

(ج) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \tan^{5} w\sec^{5} w\, dw$

$$= \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \tan^{4} w\sec^{4} w\sec w\tan w\, dw = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} (\sec^{2} w - 1)^{2}\sec^{4} w\sec w\tan w\, dw$$

$u = \sec w$ ، $du = \sec w\tan w\, dw$

$$\int_{1}^{\sqrt{2}} (u^{2}-1)^{2}u^{4}\, du = \int_{1}^{\sqrt{2}} (u^{8}-2u^{6}+u^{4})\, du$$

$$= \left[\frac{1}{9}u^{9} - \frac{2}{7}u^{7} + \frac{1}{5}u^{5}\right]_{1}^{\sqrt{2}} = \frac{16\sqrt{2}}{9} - \frac{16\sqrt{2}}{7} + \frac{4\sqrt{2}}{5} - \frac{1}{9} + \frac{2}{7} - \frac{1}{5}$$

$$= \frac{68\sqrt{2}}{315} - \frac{8}{315}$$

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \tan^{5} w\sec^{5} w\, dw = \frac{68\sqrt{2}}{315} - \frac{8}{315}$$

(ح) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \tan^{6} w\sec^{4} w\, dw$

$$= \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \tan^{6} w\sec^{2} w\sec^{2} w\, dw = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \tan^{6} w(1+\tan^{2} w)\sec^{2} w\, dw$$

$u = \tan w$ ، $du = \sec^{2} w\, dw$

$$\int_{0}^{1} u^{6}(1+u^{2})\, du = \int_{0}^{1} (u^{6}+u^{8})\, du$$

$$= \left[\frac{1}{7}u^{7} + \frac{1}{9}u^{9}\right]_{0}^{1} = \frac{1}{7} + \frac{1}{9} = \frac{16}{63}$$

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \tan^{6} w\sec^{4} w\, dw = \frac{16}{63}$$

(خ) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \tan^{6} w\sec^{5} w\, dw$

$$= \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \tan^{6} w\sec^{4} w\sec w\tan w\, dw = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} (\sec^{2} w - 1)^{3}\sec^{4} w\sec w\tan w\, dw$$

$u = \sec w$ ، $du = \sec w\tan w\, dw$

$$\int_{1}^{\sqrt{2}} (u^{2}-1)^{3}u^{4}\, du = \int_{1}^{\sqrt{2}} (u^{10}-3u^{8}+3u^{6}-u^{4})\, du$$

$$= \left[\frac{1}{11}u^{11} - \frac{1}{3}u^{9} + \frac{3}{7}u^{7} - \frac{1}{5}u^{5}\right]_{1}^{\sqrt{2}} = \frac{32\sqrt{2}}{11} - \frac{16\sqrt{2}}{3} + \frac{8\sqrt{2}}{7} - \frac{4\sqrt{2}}{5} - \frac{1}{11} + \frac{1}{3} - \frac{3}{7} + \frac{1}{5}$$

$$= \frac{136\sqrt{2}}{1155} - \frac{16}{1155}$$

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \tan^{6} w\sec^{5} w\, dw = \frac{136\sqrt{2}}{1155} - \frac{16}{1155}$$

(د) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{3} w}{1+\cos w}\, dw$

$$= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2} w\sin w}{1+\cos w}\, dw = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1-\cos^{2} w)\sin w}{1+\cos w}\, dw$$

$u = \cos w$ ، $du = -\sin w\, dw$

$$\int_{1}^{0} \frac{(1-u^{2})}{1+u} \cdot -du = \int_{0}^{1} (1-u)\, du$$

$$= \left[u - \frac{1}{2}u^{2}\right]_{0}^{1} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{3} w}{1+\cos w}\, dw = \frac{1}{2}$$

(ذ) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{3} w}{1+\cos^{2} w}\, dw$

$$= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2} w\sin w}{1+\cos^{2} w}\, dw = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1-\cos^{2} w)\sin w}{1+\cos^{2} w}\, dw$$

$u = \cos w$ ، $du = -\sin w\, dw$

$$\int_{1}^{0} \frac{(1-u^{2})}{1+u^{2}} \cdot -du = \int_{0}^{1} \left(-1 + \frac{2}{1+u^{2}}\right) du$$

$$= \left[-u + 2\arctan u\right]_{0}^{1} = -1 + \frac{\pi}{2}$$

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{3} w}{1+\cos^{2} w}\, dw = \frac{\pi}{2} - 1$$

(ر) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{3} w}{\cos w}\, dw$

$$= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2} w\sin w}{\cos w}\, dw = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1-\cos^{2} w)\sin w}{\cos w}\, dw$$

$u = \cos w$ ، $du = -\sin w\, dw$

$$\int_{1}^{0} \frac{(1-u^{2})}{u} \cdot -du = \int_{0}^{1} \left(\frac{1}{u} - u\right) du$$

$$= \left[\ln|u| - \frac{1}{2}u^{2}\right]_{0}^{1} = \text{غير معرف}$$

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{3} w}{\cos w}\, dw \text{ غير معرف}$$

(ز) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^{3} w}{\cos^{5} w}\, dw$

$$= \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^{2} w\sin w}{\cos^{5} w}\, dw = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{(1-\cos^{2} w)\sin w}{\cos^{5} w}\, dw$$

$u = \cos w$ ، $du = -\sin w\, dw$

$$\int_{1}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{(1-u^{2})}{u^{5}} \cdot -du = \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} (u^{-5}-u^{-3})\, du$$

$$= \left[-\frac{1}{4}u^{-4} + \frac{1}{2}u^{-2}\right]_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} - 1 + 1 = \frac{1}{4}$$

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^{3} w}{\cos^{5} w}\, dw = \frac{1}{4}$$

(س) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^{3} w}{\cos^{4} w}\, dw$

$$= \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^{2} w\sin w}{\cos^{4} w}\, dw = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{(1-\cos^{2} w)\sin w}{\cos^{4} w}\, dw$$

$u = \cos w$ ، $du = -\sin w\, dw$

$$\int_{1}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{(1-u^{2})}{u^{4}} \cdot -du = \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} (u^{-4}-u^{-2})\, du$$

$$= \left[-\frac{1}{3}u^{-3} + u^{-1}\right]_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} = -\frac{1}{3} + 1 - \frac{2\sqrt{2}}{3} + \sqrt{2} = \frac{2}{3} + \frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^{3} w}{\cos^{4} w}\, dw = \frac{2}{3} + \frac{\sqrt{2}}{3}$$

(ع) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^{3} w}{\cos^{3} w}\, dw$

$$= \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^{2} w\sin w}{\cos^{3} w}\, dw = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{(1-\cos^{2} w)\sin w}{\cos^{3} w}\, dw$$

$u = \cos w$ ، $du = -\sin w\, dw$

$$\int_{1}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{(1-u^{2})}{u^{3}} \cdot -du = \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} (u^{-3}-u^{-1})\, du$$

$$= \left[-\frac{1}{2}u^{-2} - \ln|u|\right]_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} = -\frac{1}{2} + 1 - \ln 1 + \ln\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln 2$$

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^{3} w}{\cos^{3} w}\, dw = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln 2$$

(ف) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^{3} w}{\cos^{2} w}\, dw$

$$= \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^{2} w\

منهاجي
متعة التعليم الهادف

د) $\int \frac{\text{جا}س \sqrt{\text{حا}^2 س + ٤}}{\text{قا}س} \, د س$

$= \int \text{حا}س \text{جتا}س \sqrt{\text{حا}^2 س + ٤} \, د س$

ص $= \text{حا}^2 س + ٤$ ، د ص $= ٢ \text{حا}س \text{جتا}س \, د س$

$\int \frac{١}{٢} ص^{\frac{١}{٢}} \, د ص = \frac{١}{٢} \times \frac{٢}{٣} ص^{\frac{٣}{٢}} + ج$

$= \frac{١}{٣} \sqrt{(\text{حا}^2 س + ٤)^3} + ج$

هـ) $\int \text{قتا}^4 ٦س \, \text{ظتا}^3 ٦س \, د س$

ص $= \text{ظتا} ٦س$ ، د ص $= -٦ \text{قتا}^2 ٦س \, د س$

$= \int -\frac{١}{٦} \text{قتا}^2 ٦س \, ص^3 \, د ص$

$= -\frac{١}{٦} \int (\text{ظتا}^2 ٦س + ١) ص^3 \, د ص$

$= -\frac{١}{٦} \int (ص^5 + ص^3) \, د ص$

$= -\frac{١}{٦} (\frac{ص^6}{٦} + \frac{ص^4}{٤}) + ج$

$= -\frac{١}{٦} (\frac{\text{ظتا}^6 ٦س}{٦} + \frac{\text{ظتا}^4 ٦س}{٤}) + ج$

و) $\int \text{جتا}^4 س \, د س$

$\int (\text{جتا}^2 س)^2 \, د س = \int (\frac{١}{٢}(١ + \text{جتا}٢س))^2 \, د س$

$= \frac{١}{٤} \int (١ + ٢ \text{جتا}٢س + \text{جتا}^2 ٢س) \, د س$

$= \frac{١}{٤} \int (١ + ٢ \text{جتا}٢س + \frac{١}{٢}(١ + \text{جتا}٤س)) \, د س$

$= \frac{١}{٤} (س + \text{حا}٢س + \frac{١}{٤} (س + \frac{١}{٤} \text{حا}٤س)) + ج$

ز) $\int \frac{\text{حا}^2 ٢س}{(١ + \text{جتا}^2 س)^5} \, د س$

$\int \text{حا}^2 ٢س \, (١ + \text{جتا}^2 س)^{-5} \, د س$

ص $= ١ + \text{جتا}^2 س$ ، د ص $= -٢ \text{جتا}س \text{حا}س \, د س$

$\int -ص^{-5} \, د ص = -\frac{ص^{-4}}{-٤} + ج$

$= \frac{١}{٤(١ + \text{جتا}^2 س)^4} + ج$

ح) $\int \text{حا}^2 ٢س \, \text{جتا}^3 س \, هـ \, د س$

ص $= \text{جتا}٢س$ ، د ص $= -٢ \text{حا}٢س \, د س$

$\int -\frac{١}{٢} هـ^{ص} \, د ص$

$= -\frac{١}{٢} هـ^{ص} + ج = -\frac{١}{٣} هـ^{\text{جتا}٣س} + ج$

ط) $\int \frac{\sqrt[3]{س}}{٥ - س \sqrt[3]{س}} \, د س$

ص $= ٥ - س \sqrt[3]{س}$ ، ص $= ٥ - س^{\frac{٤}{٣}}$

د ص $= -\frac{٤}{٣} س^{\frac{١}{٣}} \, د س$

$\int -\frac{٣}{٤} \times \frac{١}{ص} \, د ص = -\frac{٣}{٤} \text{لو}_هـ |ص| + ج$

$= -\frac{٣}{٤} \text{لو}_هـ |٥ - س \sqrt[3]{س}| + ج$

ى) $\int \text{قا}^4 س \, د س = \int \text{قا}^2 س \times \text{قا}^2 س \, د س$

$= \int \text{قا}^2 س \, (\text{ظا}^2 س + ١) \, د س$

ص $= \text{ظا}س$

$= \int ص^2 + ١ \, د ص$

د ص $= \text{قا}^2 س \, د س$

$= \frac{ص^3}{٣} + ص + ج$

$= \frac{\text{ظا}^3 س}{٣} + \text{ظا}س + ج$

ب) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin^2 w - \sin^4 w}\, dw$

$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin^2 w (1-\sin^2 w)}\, dw$

$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin w \sqrt{1-\sin^2 w}\, dw$

$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin w \cos w \, dw$

$= \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin 2w \, dw$

$= -\frac{1}{4}\cos 2w \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$

$= -\frac{1}{4}(\cos \pi - \cos \frac{\pi}{2})$

$= -\frac{1}{4}(-1 - 0) = \frac{1}{4}$

ج) $\int \frac{dw}{\sqrt{1+w^2}}$

$= \int \frac{dw}{w\sqrt{\frac{1}{w^2}+1}}$

$= -\int \frac{d\frac{1}{w}}{\sqrt{\frac{1}{w^2}+1}}$

$= -\ln\left|\frac{1}{w} + \sqrt{\frac{1}{w^2}+1}\right| + c$

$= -\ln\left|\frac{1+\sqrt{1+w^2}}{w}\right| + c$

$= \ln\left|\frac{w}{1+\sqrt{1+w^2}}\right| + c$

$= \ln\left|\frac{w(1-\sqrt{1+w^2})}{-w^2}\right| + c$

$= \ln\left|\sqrt{1+w^2}-1\right| - \ln|w| + c$

د) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cot^2 w - \cot^4 w}\, dw$

$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cot^2 w (1-\cot^2 w)}\, dw$

$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cot^2 w \times \csc^2 w}\, dw$

$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} |\cot w| \csc^2 w \, dw$

$= -\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cot w \csc^2 w \, dw$

$= -\frac{1}{2}\cot^2 w \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$

$= -\frac{1}{2}(0 - 1) = \frac{1}{2}$

هـ) $\int \frac{dw}{\sqrt{w}(2+\sqrt{w})}$

$w = \tan^2 \theta \Rightarrow dw = 2\tan\theta \sec^2\theta \, d\theta$

$= \int \frac{2\tan\theta \sec^2\theta \, d\theta}{\tan\theta(2+\tan\theta)}$

$= \int \frac{2\sec^2\theta}{2+\tan\theta}\, d\theta$

$= 2\ln|2+\tan\theta| + c$

$= 2\ln\left|2+\sqrt{w}\right| + c$

و) $\int \frac{dw}{\sqrt{w}(2+\sqrt{w})^3}$

$w = \tan^2\theta \Rightarrow dw = 2\tan\theta\sec^2\theta \, d\theta$

$= \int \frac{2\tan\theta\sec^2\theta}{\tan\theta(2+\tan\theta)^3}\, d\theta$

$= \int \frac{2\sec^2\theta}{(2+\tan\theta)^3}\, d\theta$

$= -(2+\tan\theta)^{-2} + c$

$= -\frac{1}{(2+\sqrt{w})^2} + c$

ز) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\cot w}}{\sin^2 w}\, dw$

$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cot w}\csc^2 w \, dw$

$= -\frac{2}{3}\cot^{\frac{3}{2}} w \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$

$= -\frac{2}{3}(0 - 1) = \frac{2}{3}$

ح) $\int \frac{dw}{\sqrt{w}(1+\sqrt{w})^3}$

$w = \tan^2\theta \Rightarrow dw = 2\tan\theta\sec^2\theta \, d\theta$

$= \int \frac{2\tan\theta\sec^2\theta}{\tan\theta(1+\tan\theta)^3}\, d\theta$

$= \int \frac{2\sec^2\theta}{(1+\tan\theta)^3}\, d\theta$

$= -(1+\tan\theta)^{-2} + c$

$= -\frac{1}{(1+\sqrt{w})^2} + c$

ط) $\int \frac{dw}{\sqrt{w}(2+\sqrt{w})^4}$

$w = \tan^2\theta \Rightarrow dw = 2\tan\theta\sec^2\theta \, d\theta$

$= \int \frac{2\tan\theta\sec^2\theta}{\tan\theta(2+\tan\theta)^4}\, d\theta$

$= \int \frac{2\sec^2\theta}{(2+\tan\theta)^4}\, d\theta$

$= -\frac{2}{3}(2+\tan\theta)^{-3} + c$

$= -\frac{2}{3(2+\sqrt{w})^3} + c$

ي) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\tan^2 w - \tan^4 w}\, dw$

$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\tan^2 w (1-\tan^2 w)}\, dw$

$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\tan^2 w \times \sec^2 w}\, dw$

$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} |\tan w| \sec w \, dw$

$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \tan w \sec w \, dw$

$= \sec w \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$

$= \sec\frac{\pi}{2} - \sec\frac{\pi}{4}$

$= \infty - \sqrt{2}$

$= \infty$

$\tan w = 0 \Rightarrow w = 0$

$\tan w = \infty \Rightarrow w = \frac{\pi}{2}$

$w = \tan^2\theta \Rightarrow dw = 2\tan\theta\sec^2\theta \, d\theta$

$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2\tan\theta\sec^2\theta}{\tan^2\theta\sec\theta}\, d\theta$

$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2\sec\theta \, d\theta$

$= 2\ln|\sec\theta + \tan\theta| \Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$

$= 2\ln|\sqrt{2}+1| - 2\ln|1+0|$

$= 2\ln(\sqrt{2}+1)$

ك) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\tan w}}{\sin 2w}\, dw$

$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\tan w}}{2\sin w \cos w}\, dw$

$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\tan w}\sec^2 w}{2\tan w}\, dw$

$= \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \tan^{-\frac{1}{2}} w \sec^2 w \, dw$

$= \sqrt{\tan w} \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$

$= \sqrt{\infty} - \sqrt{1}$

$= \infty - 1$

$= \infty$

$\tan w = 1 \Rightarrow w = \frac{\pi}{4}$

$\tan w = \infty \Rightarrow w = \frac{\pi}{2}$

$w = \tan^2\theta \Rightarrow dw = 2\tan\theta\sec^2\theta \, d\theta$

$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2\tan\theta\sec^2\theta}{\tan\theta\sec^2\theta}\, d\theta$

$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2\, d\theta$

$= 2\theta \Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$

$= \frac{\pi}{2} - 0$

$= \frac{\pi}{2}$

ل) $\int \frac{dw}{\sqrt{w}(2+\sqrt{w})}$

$w = \tan^2\theta \Rightarrow dw = 2\tan\theta\sec^2\theta \, d\theta$

$= \int \frac{2\tan\theta\sec^2\theta}{\tan\theta(2+\tan\theta)}\, d\theta$

$= \int \frac{2\sec^2\theta}{2+\tan\theta}\, d\theta$

$= 2\ln|2+\tan\theta| + c$

$= 2\ln\left|2+\sqrt{w}\right| + c$

م) $\int \frac{dw}{\sqrt{w}(2+\sqrt{w})^3}$

$w = \tan^2\theta \Rightarrow dw = 2\tan\theta\sec^2\theta \, d\theta$

$= \int \frac{2\tan\theta\sec^2\theta}{\tan\theta(2+\tan\theta)^3}\, d\theta$

$= \int \frac{2\sec^2\theta}{(2+\tan\theta)^3}\, d\theta$

$= -(2+\tan\theta)^{-2} + c$

$= -\frac{1}{(2+\sqrt{w})^2} + c$

ن) $\int \frac{dw}{\sqrt{w}(1+\sqrt{w})^3}$

$w = \tan^2\theta \Rightarrow dw = 2\tan\theta\sec^2\theta \, d\theta$

$= \int \frac{2\tan\theta\sec^2\theta}{\tan\theta(1+\tan\theta)^3}\, d\theta$

$= \int \frac{2\sec^2\theta}{(1+\tan\theta)^3}\, d\theta$

$= -(1+\tan\theta)^{-2} + c$

$= -\frac{1}{(1+\sqrt{w})^2} + c$

س) $\int \frac{dw}{\sqrt{w}(2+\sqrt{w})^4}$

$w = \tan^2\theta \Rightarrow dw = 2\tan\theta\sec^2\theta \, d\theta$

$= \int \frac{2\tan\theta\sec^2\theta}{\tan\theta(2+\tan\theta)^4}\, d\theta$

$= \int \frac{2\sec^2\theta}{(2+\tan\theta)^4}\, d\theta$

$= -\frac{2}{3}(2+\tan\theta)^{-3} + c$

$= -\frac{2}{3(2+\sqrt{w})^3} + c$

ع) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\cot w}}{\sin^2 w}\, dw$

$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cot w}\csc^2 w \, dw$

$= -\frac{2}{3}\cot^{\frac{3}{2}} w \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$

$= -\frac{2}{3}(0 - 1) = \frac{2}{3}$

ف) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\tan w}}{\sin 2w}\, dw$

$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\tan w}}{2\sin w\cos w}\, dw$

$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\tan w}\sec^2 w}{2\tan w}\, dw$

$= \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \tan^{-\frac{1}{2}} w \sec^2 w \, dw$

$= \sqrt{\tan w} \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$

$= \sqrt{\infty} - \sqrt{1}$

$= \infty - 1$

$= \infty$

$\tan w = 1 \Rightarrow w = \frac{\pi}{4}$

$\tan w = \infty \Rightarrow w = \frac{\pi}{2}$

$w = \tan^2\theta \Rightarrow dw = 2\tan\theta\sec^2\theta \, d\theta$

$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2\tan\theta\sec^2\theta}{\tan^2\theta\sec\theta}\, d\theta$

$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2\sec\theta \, d\theta$

$= 2\ln|\sec\theta + \tan\theta| \Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$

$= 2\ln|\sqrt{2}+1| - 2\ln|1+0|$

$= 2\ln(\sqrt{2}+1)$

ق) $\int \frac{dw}{\sqrt{w}(2+\sqrt{w})}$

$= \ln|2+\sqrt{w}| + c$

$w = \tan^2\theta \Rightarrow dw = 2\tan\theta\sec^2\theta \, d\theta$

$= \int \frac{2\tan\theta\sec^2\theta}{\tan\theta(2+\tan\theta)}\, d\theta$

$= \int \frac{2\sec^2\theta}{2+\tan\theta}\, d\theta$

$= 2\ln|2+\tan\theta| + c$

$= 2\ln\left|2+\sqrt{w}\right| + c$

ر) $\int \frac{dw}{\sqrt{w}(2+\sqrt{w})^3}$

$w = \tan^2\theta \Rightarrow dw = 2\tan\theta\sec^2\theta \, d\theta$

$= \int \frac{2\tan\theta\sec^2\theta}{\tan\theta(2+\tan\theta)^3}\, d\theta$

$= \int \frac{2\sec^2\theta}{(2+\tan\theta)^3}\, d\theta$

$= -(2+\tan\theta)^{-2} + c$

$= -\frac{1}{(2+\sqrt{w})^2} + c$

ش) $\int \frac{dw}{\sqrt{w}(1+\sqrt{w})^3}$

$w = \tan^2\theta \Rightarrow dw = 2\tan\theta\sec^2\theta \, d\theta$

$= \int \frac{2\tan\theta\sec^2\theta}{\tan\theta(1+\tan\theta)^3}\, d\theta$

$= \int \frac{2\sec^2\theta}{(1+\tan\theta)^3}\, d\theta$

$= -(1+\tan\theta)^{-2} + c$

$= -\frac{1}{(1+\sqrt{w})^2} + c$

ت) $\int \frac{dw}{\sqrt{w}(2+\sqrt{w})^4}$

$w = \tan^2\theta \Rightarrow dw = 2\tan\theta\sec^2\theta \, d\theta$

$= \int \frac{2\tan\theta\sec^2\theta}{\tan\theta(2+\tan\theta)^4}\, d\theta$

$= \int \frac{2\sec^2\theta}{(2+\tan\theta)^4}\, d\theta$

$= -\frac{2}{3}(2+\tan\theta)^{-3} + c$

$= -\frac{2}{3(2+\sqrt{w})^3} + c$

ث) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\cot w}}{\sin^2 w}\, dw$

$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cot w}\csc^2 w \, dw$

$= -\frac{2}{3}\cot^{\frac{3}{2}} w \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$

$= -\frac{2}{3}(0 - 1) = \frac{2}{3}$

خ) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\tan w}}{\sin 2w}\, dw$

$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\tan w}}{2\sin w\cos w}\, dw$

$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\tan w}\sec^2 w}{2\tan w}\, dw$

$= \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \tan^{-\frac{1}{2}} w \sec^2 w \, dw$

$= \sqrt{\tan w} \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$

$= \sqrt{\infty} - \sqrt{1}$

$= \infty - 1$

$= \infty$

$\tan w = 1 \Rightarrow w = \frac{\pi}{4}$

$\tan w = \infty \Rightarrow w = \frac{\pi}{2}$

$w = \tan^2\theta \Rightarrow dw = 2\tan\theta\sec^2\theta \, d\theta$

$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2\tan\theta\sec^2\theta}{\tan^2\theta\sec\theta}\, d\theta$

$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2\sec\theta \, d\theta$

$= 2\ln|\sec\theta + \tan\theta| \Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$

$= 2\ln|\sqrt{2}+1| - 2\ln|1+0|$

$= 2\ln(\sqrt{2}+1)$

د) $\int \frac{dw}{\sqrt{w}(2+\sqrt{w})}$

$= 2\ln|2+\sqrt{w}| + c$

$w = \tan^2\theta \Rightarrow dw = 2\tan\theta\sec^2\theta \, d\theta$

$= \int \frac{2\tan\theta\sec^2\theta}{\tan\theta(2+\tan\theta)}\, d\theta$

$= \int \frac{2\sec^2\theta}{2+\tan\theta}\, d\theta$

$= 2\ln|2+\tan\theta| + c$

$= 2\ln\left|2+\sqrt{w}\right| + c$

ذ) $\int \frac{dw}{\sqrt{w}(2+\sqrt{w})^3}$

$w = \tan^2\theta \Rightarrow dw = 2\tan\theta\sec^2\theta \, d\theta$

$= \int \frac{2\tan\theta\sec^2\theta}{\tan\theta(2+\tan\theta)^3}\, d\theta$

$= \int \frac{2\sec^2\theta}{(2+\tan\theta)^3}\, d\theta$

$= -(2+\tan\theta)^{-2} + c$

$= -\frac{1}{(2+\sqrt{w})^2} + c$

ض) $\int \frac{dw}{\sqrt{w}(1+\sqrt{w})^3}$

$w = \tan^2\theta \Rightarrow dw = 2\tan\theta\sec^2\theta \, d\theta$

$= \int \frac{2\tan\theta\sec^2\theta}{\tan\theta(1+\tan\theta)^3}\, d\theta$

$= \int \frac{2\sec^2\theta}{(1+\tan\theta)^3}\, d\theta$

$= -(1+\tan\theta)^{-2} + c$

$= -\frac{1}{(1+\sqrt{w})^2} + c$

ظ) $\int \frac{dw}{\sqrt{w}(2+\sqrt{w})^4}$

$w = \tan^2\theta \Rightarrow dw = 2\tan\theta\sec^2\theta \, d\theta$

$= \int \frac{2\tan\theta\sec^2\theta}{\tan\theta(2+\tan\theta)^4}\, d\theta$

$= \int \frac{2\sec^2\theta}{(2+\tan\theta)^4}\, d\theta$

$= -\frac{2}{3}(2+\tan\theta)^{-3} + c$

$= -\frac{2}{3(2+\sqrt{w})^3} + c$

منهاجي
متعة التعليم الهادف

و) $\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{(س-1)^{ن}}{س^{ن} \times س^{2}}$ دس

$= \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{س^{2}} \left(\frac{س-1}{س}\right)^{ن}$ دس

ص $= \frac{س-1}{س}$ ، ص $= 1 - \frac{1}{س}$

دص $= + \frac{1}{س^{2}}$

س $= \frac{1}{2}$ ص $= -1$

س $= 1$ ص $= 0$

$\int_{-1}^{0}$ ص^{ن} دص $= \left[\frac{ص^{ن+1}}{ن+1}\right]_{-1}^{0}$

$= صفر - \frac{(-1)^{ن+1}}{ن+1}$

ن: فردي $\Leftarrow$ ن+1 زوجي $(-1)^{ن+1} = 1$

$= \frac{-1}{ن+1}$

ن: زوجي $\Leftarrow$ ن+1 فردي $(-1)^{ن+1} = -1$

$= -2 \times \frac{-1}{ن+1} = \frac{1}{ن+1}$.

$\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{(س-1)^{ن}}{س^{ن+3}}$ دس $= \begin{cases} \frac{-1}{ن+1} & ، ن: فردي \\ \frac{1}{ن+1} & ن: زوجي \end{cases}$

س)

ب) $\int$ جتا^{2}س جا^{2}س دس

نفرض ص $=$ جا س

ج) $\int$ ظا^{2}س قا^{4}س دس

ص $=$ ظا س

د) $\int$ ظا^{3}س قا^{5}س دس

ص $=$ قا س

هـ) $\int$ ظتا^{6}س قتا^{4}س دس

ص $=$ ظتا س

و) $\int$ ظتا^{7}س قتا^{4}س دس

ص $=$ ظتا س

م) $\int$ جتا^{1}س جا^{2}س دس

نضرض ص $=$ جا س

$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \, dx$ (١	$= \frac{\pi}{2} + 0.2 - \frac{\pi}{4} \times 3 = 0.2 \times 3$
$u = \cos x$ $\quad du = -\sin x \, dx$	$= \frac{\pi}{2} + \left(0.2 \times 3 + \frac{\pi}{4} \times 3\right) =$
$x = 0 \Rightarrow u = 1$ $\quad x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow u = 0$	$\frac{\pi}{2}\left[6.2 + \left(0.2 \times 3 + \frac{\pi}{4} \times 3\right)\right] =$
$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \, dx = \int_{1}^{0} (1-u^2)(-du) = \int_{0}^{1} (1-u^2) du$	$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \, dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin x \sin^2 x \, dx$
$= \left[u - \frac{u^3}{3}\right]_0^1 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$	$u = \cos x \quad dv = \sin x \, dx$
$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x \, dx$ (٢	$du = -\sin x \, dx \quad v = -\cos x$
$u = \cos x \quad dv = \cos^4 x \, dx$	$= \left[-\cos x \sin^2 x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} 2 \sin x \cos^2 x \, dx$
$du = -\sin x \, dx \quad v = \int \cos^4 x \, dx$	$= 0 + 2 \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin x \, dx$
$= \int \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{4} \int (1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x) \, dx$	$u = \cos x \quad dv = \sin x \, dx$
$= \frac{1}{4} \int \left(1 + 2\cos 2x + \frac{1+\cos 4x}{2}\right) dx = \frac{1}{4}\left(x + \sin 2x + \frac{x}{2} + \frac{\sin 4x}{8}\right)$	$du = -\sin x \, dx \quad v = -\frac{\cos^3 x}{3}$
$= \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}x + \sin 2x + \frac{\sin 4x}{8}\right) + c$	$= 0 + \frac{2}{3} \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x \sin x \, dx$
$\int \sin^4 x \cos^2 x \, dx$ (٣	$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x \, dx = \frac{2}{3} \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x \sin x \, dx$
$u = \cos x \quad dv = \sin^4 x \cos x \, dx$	$= \frac{2}{3} \left[-\frac{\cos^4 x}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3}\left(0 + \frac{1}{4}\right) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$
$du = -\sin x \, dx \quad v = \int \sin^4 x \cos x \, dx$	$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cos^3 x \, dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cos x \cos^2 x \, dx$
$= \int u^4 \, du = \frac{u^5}{5} = \frac{\sin^5 x}{5}$	$u = \sin x \quad dv = \cos^2 x \cos x \, dx$
$\int \sin^4 x \cos^2 x \, dx = -\frac{\sin^5 x \cos x}{5} + \frac{1}{5} \int \sin^5 x \sec x \, dx$	$du = \cos x \, dx \quad v = \int \cos^2 x \cos x \, dx$
$= -\frac{\sin^5 x \cos x}{5} + \frac{1}{5} \int \sin^4 x \tan x \sec x \, dx$	$= \int (1 - \sin^2 x) \cos x \, dx = \sin x - \frac{\sin^3 x}{3}$
$\int \cos^5 x \, dx$ (٤	$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cos^3 x \, dx = \left[\sin x \left(\sin x - \frac{\sin^3 x}{3}\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin x - \frac{\sin^3 x}{3}\right) \cos x \, dx$
$u = \cos x \quad dv = \cos^4 x \, dx$	$= \left[\sin^2 x - \frac{\sin^4 x}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos x \, dx + \frac{1}{3} \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cos x \, dx$
$du = -\sin x \, dx \quad v = \int \cos^4 x \, dx$	$= \left(1 - \frac{1}{3}\right) - \left[\frac{\sin^2 x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{3} \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cos x \, dx$
$= \int \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{4} \int (1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x) \, dx$	$= \frac{2}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cos x \, dx$
$= \frac{1}{4} \int \left(1 + 2\cos 2x + \frac{1+\cos 4x}{2}\right) dx = \frac{1}{4}\left(x + \sin 2x + \frac{x}{2} + \frac{\sin 4x}{8}\right)$	$\frac{2}{3} \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cos x \, dx = \frac{1}{6}$
$= \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}x + \sin 2x + \frac{\sin 4x}{8}\right) + c$	$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cos x \, dx = \frac{1}{12}$
	$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cos^3 x \, dx = \frac{1}{6} - \frac{1}{12} = \frac{1}{12}$

الفصل الثاني : طرائق التكامل

ثانياً: التكامل بالأجزاء

تدريب (١)

١) $\int \sin^2 x \, dx$

$u = \sin x \quad dv = \sin x \, dx$

$du = \cos x \, dx \quad v = -\cos x$

$\int \sin^2 x \, dx = -\sin x \cos x + \int \cos^2 x \, dx$

$= -\sin x \cos x + \int (1 - \sin^2 x) \, dx$

$= -\sin x \cos x + x - \int \sin^2 x \, dx$

$2 \int \sin^2 x \, dx = x - \sin x \cos x$

$\int \sin^2 x \, dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin x \cos x}{2} + c$

٢) $\int \cos^2 x \, dx$

$u = \cos x \quad dv = \cos x \, dx$

$du = -\sin x \, dx \quad v = \sin x$

$\int \cos^2 x \, dx = \sin x \cos x + \int \sin^2 x \, dx$

$= \sin x \cos x + \int (1 - \cos^2 x) \, dx$

$= \sin x \cos x + x - \int \cos^2 x \, dx$

$2 \int \cos^2 x \, dx = \sin x \cos x + x$

$\int \cos^2 x \, dx = \frac{\sin x \cos x}{2} + \frac{x}{2} + c$

٣) $\int \sec^3 x \, dx$

$u = \sec x \quad dv = \sec^2 x \, dx$

$du = \sec x \tan x \, dx \quad v = \tan x$

$\int \sec^3 x \, dx = \sec x \tan x - \int \sec x \tan^2 x \, dx$

$= \sec x \tan x - \int \sec x (\sec^2 x - 1) \, dx$

$= \sec x \tan x - \int \sec^3 x \, dx + \int \sec x \, dx$

$2 \int \sec^3 x \, dx = \sec x \tan x + \ln |\sec x + \tan x|$

$\int \sec^3 x \, dx = \frac{\sec x \tan x}{2} + \frac{\ln |\sec x + \tan x|}{2} + c$

٤) $\int \csc^3 x \, dx$

$u = \csc x \quad dv = \csc^2 x \, dx$

$du = -\csc x \cot x \, dx \quad v = -\cot x$

$\int \csc^3 x \, dx = -\csc x \cot x - \int \csc x \cot^2 x \, dx$

$= -\csc x \cot x - \int \csc x (\csc^2 x - 1) \, dx$

$= -\csc x \cot x - \int \csc^3 x \, dx + \int \csc x \, dx$

$2 \int \csc^3 x \, dx = -\csc x \cot x + \ln |\csc x - \cot x|$

$\int \csc^3 x \, dx = -\frac{\csc x \cot x}{2} + \frac{\ln |\csc x - \cot x|}{2} + c$

تدريب (٢)

١) $\int \sin^3 x \, dx$

$u = \sin^2 x \quad dv = \sin x \, dx$

$du = 2 \sin x \cos x \, dx \quad v = -\cos x$

$\int \sin^3 x \, dx = -\sin^2 x \cos x + 2 \int \sin x \cos^2 x \, dx$

$u = \cos x \quad dv = \sin x \, dx$

$du = -\sin x \, dx \quad v = -\cos x$

$= -\sin^2 x \cos x + 2 \left[-\cos x \sin^2 x - \int 2 \sin x \cos^2 x \, dx\right]$

$= -\sin^2 x \cos x + 2 \cos x \sin^2 x + 4 \int \sin x \cos^2 x \, dx$

$3 \int \sin^3 x \, dx = -\sin^2 x \cos x + 2 \cos x \sin^2 x + 4 \int \sin x \cos^2 x \, dx$

$\int \sin^3 x \, dx = -\frac{\sin^2 x \cos x}{3} + \frac{2 \cos x \sin^2 x}{3} + \frac{4}{3} \int \sin x \cos^2 x \, dx$

$= -\frac{\sin^2 x \cos x}{3} + \frac{2 \cos x \sin^2 x}{3} + \frac{4}{3}\left[-\frac{\cos^3 x}{3}\right] + c$

$= -\frac{\sin^2 x \cos x}{3} + \frac{2 \cos x \sin^2 x}{3} - \frac{4 \cos^3 x}{9} + c$

٢) $\int \cos^3 x \, dx$

$u = \cos^2 x \quad dv = \cos x \, dx$

$du = -2 \cos x \sin x \, dx \quad v = \sin x$

$\int \cos^3 x \, dx = \cos^2 x \sin x + 2 \int \cos x \sin^2 x \, dx$

$u = \sin x \quad dv = \cos x \, dx$

$du = \cos x \, dx \quad v = \sin x$

$= \cos^2 x \sin x + 2 \left[\sin^2 x - \int 2 \cos x \sin x \, dx\right]$

$= \cos^2 x \sin x + 2 \sin^2 x - 4 \int \cos x \sin x \, dx$

$3 \int \cos^3 x \, dx = \cos^2 x \sin x + 2 \sin^2 x - 4 \int \cos x \sin x \, dx$

$\int \cos^3 x \, dx = \frac{\cos^2 x \sin x}{3} + \frac{2 \sin^2 x}{3} - \frac{4}{3} \int \cos x \sin x \, dx$

$= \frac{\cos^2 x \sin x}{3} + \frac{2 \sin^2 x}{3} - \frac{4}{3}\left[\frac{\sin^2 x}{2}\right] + c$

$= \frac{\cos^2 x \sin x}{3} + \frac{2 \sin^2 x}{3} - \frac{2 \sin^2 x}{3} + c$

$= \frac{\cos^2 x \sin x}{3} + \frac{2}{3}(\sin x - \sin^2 x) + c$

$= \frac{1}{3} \cos^2 x \sin x + \frac{2}{3} \sin x - \frac{2}{3} \sin^2 x + c$

منصة العلم الحادث
منصة

منهاجي
منصة التعليم الهادف

٤) $\int \frac{س}{\sqrt{1-س^4}}\,د س = \int \frac{س}{\sqrt{1-(س^2)^2}}\,د س$

$= \frac{1}{2}\int \frac{2س}{\sqrt{1-(س^2)^2}}\,د س$

$= \frac{1}{2}\,جتا^{-1}(س^2) + ث$

$ع = س^2 \quad \Rightarrow \quad د ع = 2س\,د س$

$\therefore \int س^3 جتا^{-1}(س^2)\,د س = \frac{1}{2}\int ع\,جتا^{-1} ع\,د ع$

$= \frac{1}{2}\left[ع\,جتا^{-1} ع - \int \frac{ع}{\sqrt{1-ع^2}}\,د ع\right]$

$= \frac{1}{2}\left[ع\,جتا^{-1} ع + \frac{1}{2}\int \frac{-2ع}{\sqrt{1-ع^2}}\,د ع\right]$

$= \frac{1}{2}\left[ع\,جتا^{-1} ع + \frac{1}{2}\times 2\sqrt{1-ع^2}\right] + ث$

$= \frac{1}{2}\left[س^2 جتا^{-1}(س^2) + \sqrt{1-س^4}\right] + ث$

$= \frac{1}{2}س^2 جتا^{-1}(س^2) + \frac{1}{2}\sqrt{1-س^4} + ث$

تدريب (٣) :

١) $\int س^2 هـ^{س^3}\,د س$

$ع = س^3$

$د ع = 3س^2\,د س$

$\therefore \int س^2 هـ^{س^3}\,د س = \frac{1}{3}\int هـ^{ع}\,د ع$

$= \frac{1}{3}هـ^{ع} + ث$

$= \frac{1}{3}هـ^{س^3} + ث$

---

٢) $\int س\,(لو_{هـ} س)^2\,د س$

$ع = (لو_{هـ} س)^2$

$د ع = 2\,لو_{هـ} س \times \frac{1}{س}\,د س$

$= \frac{2}{س}لو_{هـ} س\,د س$

$هـ = \frac{س^2}{2}$

$د هـ = س\,د س$

$\int س\,(لو_{هـ} س)^2\,د س = \frac{س^2}{2}(لو_{هـ} س)^2 - \int \frac{س^2}{2}\times\frac{1}{س}لو_{هـ} س\,د س$

$= \frac{س^2}{2}(لو_{هـ} س)^2 - \frac{1}{2}\int س\,لو_{هـ} س\,د س$

أجزاء مرة أخرى

$د ع = 2س\,د س$

$\therefore \int س^3 هـ^{س^2}\,د س = \frac{1}{2}\int س^2 هـ^{ع}\,د ع$

$= \frac{1}{2}\left[س^2 هـ^{ع} - 2\int س هـ^{ع}\,د ع\right]$

$= \frac{1}{2}\left[س^2 هـ^{ع} - 2س هـ^{ع} + 2\int هـ^{ع}\,د ع\right]$

$= \frac{1}{2}\left[س^2 هـ^{ع} - 2س هـ^{ع} + 2هـ^{ع}\right] + ث$

$= \frac{1}{2}\left[س^2 هـ^{س^2} - 2س هـ^{س^2} + 2هـ^{س^2}\right] + ث$

$= \frac{1}{2}هـ^{س^2}(س^2 - 2س + 2) + ث$

تدريب (٤)

١) $\int س^2 هـ^{3س}\,د س$

$د ع = هـ^{3س}\,د س$

$ع = \frac{1}{3}هـ^{3س}$

	$س^2$	$2س$	2	صفر
	$+$	$-$	$+$	
$هـ^{3س}$	$\frac{1}{3}هـ^{3س}$	$\frac{1}{9}هـ^{3س}$	$\frac{1}{27}هـ^{3س}$	$\frac{1}{81}هـ^{3س}$

$\int س^2 هـ^{3س}\,د س = \frac{1}{3}س^2 هـ^{3س} - \frac{2}{9}س هـ^{3س} + \frac{2}{27}هـ^{3س} + ث$

$= \frac{1}{27}هـ^{3س}(9س^2 - 6س + 2) + ث$

---

٢) $\int س^2 جتا 4س\,د س$

	$س^2$	$2س$	2	صفر
	$+$	$-$	$+$	
$جتا 4س$	$\frac{1}{4}جا 4س$	$-\frac{1}{16}جتا 4س$	$-\frac{1}{64}جا 4س$	

$\int س^2 جتا 4س\,د س = \frac{1}{4}س^2 جا 4س + \frac{1}{8}س جتا 4س - \frac{1}{32}جا 4س + ث$

(٢٩)

منهاجي
متعة التعليم الهادف

٣) $\int (س^٢ - س)\, حا٣س\, دس$

ع = $س^٢ - س$ ، د هـ = $حا٣س$ دس

$س^٢ - س$ ← (+) ← $حا٣س$

$٢س - ١$ ← (−) ← $-\frac{١}{٣} جا٣س$

٢ ← (+) ← $-\frac{١}{٩} حا٣س$

صفر ← $\frac{١}{٢٧} جا٣س$

$\int (س^٢ - س)\, حا٣س\, دس = -\frac{١}{٣}(س^٢ - س) جا٣س + \frac{١}{٩}(٢س - ١) حا٣س$

$+ \frac{١}{٢٧} جا٣س + ث$

٤) $\int س^٥ (٣س + ١)^٥\, دس$

ع = $س^٥$ ، د هـ = $(٣س+١)^٥$

$س^٥$ ← (+) ← $(٣س+١)^٥$

$٥س^٤$ ← (−) ← $\frac{(٣س+١)^٦}{١٨}$

$٢٠س^٣$ ← (+) ← $\frac{(٣س+١)^٧}{١٢٦}$

$٦٠س^٢$ ← (−) ← $\frac{(٣س+١)^٨}{١٦٨}$

صفر ← $\frac{(٣س+١)^٩}{٥٠٤}$

$\int س^٥ (٣س+١)^٥\, دس = \frac{س^٥}{١٨}(٣س+١)^٦ - \frac{٥س^٤}{١٣٤}(٣س+١)^٧$

$+ \frac{٢٠س^٣}{٥٠٤}(٣س+١)^٨ + ث$

تدريب (٥) :

١) $\int ق٢س\, هـ^{ظا٣س}\, دس$

ص = $ظا٣س$ ، $ص^٢ = ظا٣س$ ، $٢ص\, دص = ق٢س\, دس$

$\int ٢ص\, هـ^{ص}\, دص$

ع = $٢ص$ ، د هـ = $هـ^{ص}\, دص$

د ع = $٢\, دص$ ، هـ = $هـ^{ص}$

$\int ٢ص\, هـ^{ص}\, دص = ٢ص\, هـ^{ص} - ٢هـ^{ص} + ث$

$= ٢ظا٣س\, هـ^{ظا٣س} - ٢هـ^{ظا٣س} + ث$

٢) $\int حا٢س\, هـ^{جاس}\, دس$

ص = $جاس$ ، د ص = $جتاس\, دس$

$\int ٢جاس\, جتاس\, هـ^{جاس}\, دس$

ع = $٢جاس$ ، د هـ = $جتاس\, هـ^{جاس}\, دس$ (تكامل بالأجزاء)

$= ٢جاس\, هـ^{جاس} - \int ٢هـ^{جاس}\, جتاس\, دس + ث$

$= ٢جاس\, هـ^{جاس} - ٢هـ^{جاس} + ث$

٣) $\int حتا\sqrt{٣س+١}\, دس$

ص = $\sqrt{٣س+١}$ ، $ص^٢ = ٣س + ١$ ، $٢ص\, دص = ٣\, دس$

$\int ص\, حتا ص\, دص$

ع = ص ، د هـ = $حتا ص\, دص$

د ع = $دص$ ، هـ = $جا ص$

$\int ص\, حتا ص\, دص = ص\, جا ص + جتا ص + ث$

$= \sqrt{٣س+١}\, جا\sqrt{٣س+١} + جتا\sqrt{٣س+١} + ث$

٤) $\int_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{\pi}{٢}} ٣ ق^٤ س\, ظا^٥ س\, دس$

ص = $ظا س$ ، د ص = $ق^٢ س\, دس$

س = $\frac{\pi}{٢}$ ← ص = ١

س = $\frac{\pi}{٤}$ ← ص = $\sqrt{٣}$

$\int_{١}^{\sqrt{٣}} ٣ ق^٤ س\, ظا^٥ س\, دس = \int_{١}^{\sqrt{٣}} ٣(ص^٢+١) ص^٥\, دص$

ع = $ص^٥$ ، د هـ = $٣(ص^٢+١)\, دص$

د ع = $٥ص^٤\, دص$ ، هـ = $٣(\frac{ص^٣}{٣} + ص)$

$= ٣(\frac{ص^٣}{٣} + ص) ص^٥ \Big]_{١}^{\sqrt{٣}} - \int_{١}^{\sqrt{٣}} ٣(\frac{ص^٣}{٣} + ص) ٥ص^٤\, دص$

$= ٣(\frac{ص^٣}{٣} + ص) ص^٥ \Big]_{١}^{\sqrt{٣}} - ٣ \int_{١}^{\sqrt{٣}} (ص^٦ + ٣ص^٤)\, دص$

$= ٣(\frac{ص^٣}{٣} + ص) ص^٥ \Big]_{١}^{\sqrt{٣}} - ٣(\frac{ص^٧}{٧} + \frac{٣ص^٥}{٥}) \Big]_{١}^{\sqrt{٣}}$

$= ٣(\frac{(\sqrt{٣})^٣}{٣} + \sqrt{٣}) (\sqrt{٣})^٥ - (صفر) - ٣((\frac{(\sqrt{٣})^٧}{٧} + \frac{٣(\sqrt{٣})^٥}{٥}) - (\frac{١}{٧} + \frac{٣}{٥}))$

منهاجي
متعة التعليم الهادف

تمارين ومسائل صفحة ٣٨٢

ب) $\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} (3س+1)$ جتا $3س$ دس

ف $= 3س+1$ ، دف $= 3$ دس

دهـ $=$ جتا $3س$ دس ، هـ $= \frac{1}{3}$ جا $3س$

$\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} (3س+1)$ جتا $3س$ دس $=$

$\frac{1}{3}(3س+1)$ جا $3س]_{0}^{\frac{\pi}{3}} - \int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{3}$ جا $3س$ دس

$(\frac{1}{3}(3\times\frac{\pi}{3}+1)$ جا $\pi - (\frac{1}{3}(3\times0+1)$ جا $0) + \frac{1}{9}$ جتا $3س]_{0}^{\frac{\pi}{3}}$

صفر $+ \frac{1}{9}$ جتا $\pi - \frac{1}{9}$ جتا صفر

$= -\frac{1}{9} - \frac{1}{9} = -\frac{2}{9}$

ج) $\int$ س^{2} لو$_{هـ}$ س دس

ف $=$ لو$_{هـ}$ س ، دف $= \frac{1}{س}$ دس

دهـ $=$ س^{2} دس ، هـ $= \frac{س^{3}}{3}$

$\int$ س^{2} لو$_{هـ}$ س دس $= \frac{س^{3}}{3}$ لو$_{هـ}$ س $- \int \frac{س^{2}}{3}$ دس

$= \frac{س^{3}}{3}$ لو$_{هـ}$ س $- \frac{س^{3}}{9} + ج$

د) $\int_{-2}^{-1} 5س\sqrt{س+3}$ دس

ف $= 5س$ ، دف $= 5$ دس

دهـ $= (س+3)^{\frac{1}{2}}$ ، هـ $= \frac{2}{3}(س+3)^{\frac{3}{2}}$

$\int_{-2}^{-1} 5س\sqrt{س+3}$ دس $=$

$\frac{10س}{3}\sqrt{(س+3)^{3}}]_{-2}^{-1} - \int_{-2}^{-1} \frac{10}{3}(س+3)^{\frac{3}{2}}$ دس

$(\frac{10}{3}\times8 + \frac{20}{3}\times1) - \frac{10}{3}\times\frac{2}{5}\sqrt{(س+3)^{5}}]_{-2}^{-1}$

$(\frac{10}{3}\times1 - \frac{10}{3}\times\frac{2}{5}\times1) - (\frac{10}{3}\times8 + \frac{20}{3}\times1)$

$\frac{10}{3} - (\frac{8}{3}\times32 - \frac{4}{3}\times1\frac{4}{3})$

$\frac{10}{3} - \frac{124}{3} = -8$

د) $\int \frac{س \text{ جاس دس}}{\text{جتا}^{3}س} = \int$ س ظاس قا^{2}س دس

ف $= س$ ، دف $=$ دس

دهـ $=$ ظاس قا^{2}س ، هـ $= \frac{1}{2}$ قا^{2}س

تكامل بالتعويض

$\int$ س ظاس قا^{2}س دس $= \frac{1}{2}$س قا^{2}س $- \int \frac{1}{2}$ قا^{2}س دس

$= \frac{1}{2}$س قا^{2}س $- \frac{1}{2}$ ظاس $+ ج$

هـ) $\int$ قا^{2}س لو$_{هـ}$ ظاس دس

نفرض ص $=$ ظاس ، دص $=$ قا^{2}س دس

$\int$ لو$_{هـ}$ ص دص

ف $=$ لو$_{هـ}$ ص ، دف $= \frac{1}{ص}$ دص

دهـ $=$ دص ، هـ $=$ ص

$\int$ لو$_{هـ}$ ص دص $=$ ص لو$_{هـ}$ ص $- \int$ دص

$=$ ص لو$_{هـ}$ ص $-$ ص $+ ج$

$=$ ظاس لو$_{هـ}$ ظاس $-$ ظاس $+ ج$

و) $\int \frac{س}{هـ^{-2س}}$ دس $= \int$ س هـ^{2س} دس

ف $= س$ ، دف $=$ دس

دهـ $=$ هـ^{2س} دس ، هـ $= -\frac{1}{2}$ هـ$^{-2س}$

$\int$ س هـ$^{-2س}$ دس $= -\frac{1}{2}$س هـ$^{-2س} + \frac{1}{2}\int$ هـ$^{-2س}$ دس

$= -\frac{1}{2}$س هـ$^{-2س} - \frac{1}{4}$ هـ$^{-2س} + ج$

منهاجي
متعة التعليم الهادف

ز) $\int$ جتا $\sqrt[3]{س}$ دس

ص = $\sqrt[3]{س}$ ، ص^3 = س ⇐ ٣ص^2 دص = دس

$\int$ ٣ص^2 جتا ص دص

ف = ٣ص^2 ، دف = (٦ص + جتا ص) دص

ف = ٣ص^2 + جتا ص

دف = ٦ص − جا ص

دف = ٦ − جتا ص

دف = − جا ص

= ٣ص^2 جا ص + ٦ص جتا ص − ٦ جا ص + ج

= ٣$\sqrt[3]{س^2}$ جا $\sqrt[3]{س}$ + ٦$\sqrt[3]{س}$ جتا $\sqrt[3]{س}$ − ٦ جا $\sqrt[3]{س}$ + ج

ح) $\int$ جتا س لو$_{هـ}$ جا س دس

ص = جا س ، دص = جتا س دس

$\int$ لو$_{هـ}$ ص دص

ف = لو$_{هـ}$ ص ، دف = $\frac{1}{ص}$ دص

ده = دص ، هـ = ص

= ص لو$_{هـ}$ ص − ص + ج

= جا س لو$_{هـ}$ جا س − جا س + ج

ط) $\int$ س (جا س + جتا س)^2 دس

= $\int$ س (١ + جا ٢س) دس

ف = س ، دف = دس

دهـ = (١ + جا ٢س) دس ، هـ = س − $\frac{1}{2}$ جتا ٢س

$\int$ س(١ + جا ٢س) دس = س^2 − $\frac{1}{2}$ س جتا ٢س − $\int$ (س − $\frac{1}{2}$ جتا ٢س) دس

= س^2 − $\frac{1}{2}$ س جتا ٢س − ($\frac{س^2}{2}$ − $\frac{1}{4}$ جا ٢س) + ج

= $\frac{س^2}{2}$ − $\frac{1}{2}$ س جتا ٢س + $\frac{1}{4}$ جا ٢س + ج

ي) $\int$ هـ^{س} جتا ٣س دس

ف = هـ^{س} ، دف = هـ^{س} دس

دهـ = جتا ٣س دس ، هـ = $\frac{1}{3}$ جا ٣س

$\int$ هـ^{س} جتا ٣س دس = $\frac{1}{3}$ هـ^{س} جا ٣س − $\int$ $\frac{1}{3}$ جا ٣س هـ^{س} دس

بأجزاء مرة أخرى

ف = هـ^{س} ، دف = هـ^{س}

دهـ = $\frac{1}{3}$ جا ٣س ، هـ = $-\frac{1}{9}$ جتا ٣س

$\int$ هـ^{س} جتا ٣س دس =

$\frac{1}{3}$ هـ^{س} جا ٣س + $\frac{1}{9}$ هـ^{س} جتا ٣س − $\int$ $\frac{1}{9}$ هـ^{س} جتا ٣س دس

$\frac{10}{9}$ $\int$ هـ^{س} جتا ٣س دس = $\frac{1}{3}$ هـ^{س} جا ٣س + $\frac{1}{9}$ هـ^{س} جتا ٣س

∴ $\int$ هـ^{س} جتا ٣س دس = $\frac{9}{10}$ ($\frac{1}{3}$ هـ^{س} جا ٣س + $\frac{1}{9}$ هـ^{س} جتا ٣س) + ج

ك) $\int$ $\frac{لو_{هـ}(س+٣)}{\sqrt{س+٣}}$ دس

نفرض ص = $\sqrt{س+٣}$ ، ص^2 = س + ٣

٢ص دص = دس

$\int$ $\frac{لو_{هـ} ص^2}{ص}$. ٢ص دص = $\int$ ٤ لو$_{هـ}$ ص دص

ف = لو$_{هـ}$ ص ، دف = $\frac{1}{ص}$ دص

دهـ = ٤ دص ، هـ = ٤ص

$\int$ ٤ لو$_{هـ}$ ص دص = ٤ ص لو$_{هـ}$ ص − ٤ ص + ج

= ٤ $\sqrt{س+٣}$ لو$_{هـ}$ $\sqrt{س+٣}$ − ٤ $\sqrt{س+٣}$ + ج

ل) $\int (س^{2} - ٢س)\sqrt{س+٣}\ دس$

ع	دهـ
$س^{2} - ٢س$ (+)	$(س+٣)^{\frac{1}{2}}$
$٢س - ٢$ (−)	$\frac{٢}{٣}(س+٣)^{\frac{3}{2}}$
٢ (+)	$\frac{٤}{١٥}(س+٣)^{\frac{5}{2}}$
صفر	$\frac{٨}{١٠٥}(س+٣)^{\frac{7}{2}}$

$\int (س^{2} - ٢س)\sqrt{س+٣}\ دس =$

$\frac{٢}{٣}(س^{2} - ٢س)\sqrt{(س+٣)^{3}} - \frac{٤}{١٥}(٢س-٢)\sqrt{(س+٣)^{5}}$

$+ \frac{١٦}{١٠٥}\sqrt{(س+٣)^{7}} + جـ$

م) $\int قا^{2}س\ لو_{هـ} جاس\ دس$

$ع = لو_{هـ} جاس \qquad دع = \frac{جتاس}{جاس}\ دس$

$دهـ = قا^{2}س\ دس \qquad هـ = ظاس$

$\int قا^{2}س\ لو_{هـ} جاس\ دس = ظاس\ لو_{هـ} جاس - \int ظاس \times \frac{جتاس}{جاس}\ دس$

$= ظاس\ لو_{هـ} جاس - س + جـ$

ن) $\int ٢\ هـ^{س}\ جاس\ جتاس\ دس$

$= \int هـ^{س}\ جا٢س\ دس$

$ع = جا٢س \qquad دع = ٢\ جتا٢س\ دس$

$دهـ = هـ^{س}\ دس \qquad هـ = هـ^{س}$

$\int هـ^{س}\ جا٢س\ دس = هـ^{س}\ جا٢س - \int ٢\ هـ^{س}\ جتا٢س\ دس$

أجزاء مرة أخرى

$ع = ٢\ جتا٢س \qquad دع = -٤\ جا٢س\ دس$

$دهـ = هـ^{س}\ دس \qquad هـ = هـ^{س}$

$\int هـ^{س}\ جا٢س\ دس = هـ^{س}\ جا٢س - ٢\ هـ^{س}\ جتا٢س - \int ٤\ هـ^{س}\ جا٢س\ دس$

$٥\int هـ^{س}\ جا٢س\ دس = هـ^{س}\ جا٢س - ٢\ هـ^{س}\ جتا٢س$

$\therefore \int هـ^{س}\ جا٢س\ دس = \frac{١}{٥}\left(هـ^{س}\ جا٢س - ٢\ هـ^{س}\ جتا٢س\right) + جـ$

س) $\int (س^{3} + ٢س)\ هـ^{س}\ دس$

ع	دهـ
$(س^{3} + ٢س)$ (+)	$هـ^{س}$
$٣س^{2} + ٢$ (−)	$هـ^{س}$
$٦س$ (+)	$هـ^{س}$
٦ (−)	$هـ^{س}$
صفر	$هـ^{س}$

$\int (س^{3} + ٢س)\ هـ^{س}\ دس =$

$(س^{3} + ٢س)\ هـ^{س} - (٣س^{2} + ٢)\ هـ^{س} + ٦س\ هـ^{س} - ٦\ هـ^{س} + جـ$

ع) $\int \frac{س\ هـ^{س}}{(١+س)^{2}}\ دس = \int س\ هـ^{س}(١+س)^{-2}\ دس$

$ع = س\ هـ^{س} \qquad دع = هـ^{س}(س+١)\ دس$

$دهـ = (١+س)^{-2} \qquad هـ = \frac{-١}{١+س}$

$\int س\ هـ^{س}(١+س)^{-2}\ دس = \frac{-س\ هـ^{س}}{١+س} + \int هـ^{س}\ دس$

$= \frac{-س\ هـ^{س}}{١+س} + هـ^{س} + جـ$

الفصل الثاني : طرائق التكامل

ثالثاً: التكامل بالكسور الجزئية

تدريب (١)

$$\int \frac{٥}{س^٢ - ٤س + ٣} \, د س$$

$$\frac{٥}{(س-٣)(س-١)} = \frac{م}{س-٣} + \frac{ب}{س-١}$$

$$٥ = م(س-١) + ب(س-٣)$$

$س = ١$	$س = ٣$
$٥ = -٢ب$	$٥ = ٢م$
$ب = -\frac{٥}{٢}$	$م = \frac{٥}{٢}$

$$\int \frac{٥}{س^٢ - ٤س + ٣} \, د س = \int \frac{\frac{٥}{٢}}{س-٣} \, د س + \int \frac{-\frac{٥}{٢}}{س-١} \, د س$$

$$= \frac{٥}{٢} \text{لو}_{هـ} |س-٣| - \frac{٥}{٢} \text{لو}_{هـ} |س-١| + ج$$

تدريب (٢)

$$\int \frac{س - ١٣}{٢س^٢ - ٧س + ٣} \, د س$$

$$\frac{س-١٣}{(٢س-١)(س-٣)} = \frac{م}{٢س-١} + \frac{ب}{س-٣}$$

$$س - ١٣ = م(س-٣) + ب(٢س-١)$$

$س = ٣$	$س = \frac{١}{٢}$
$ب٥ = -١٠$	$-١٢,٥ = -٢٥,٢م$
$ب = -٢$	$م = ٥$

$$\int \frac{س-١٣}{٢س^٢ - ٧س + ٣} \, د س = \int \frac{٥}{٢س-١} \, د س + \int \frac{-٢}{س-٣} \, د س$$

$$= \frac{٥}{٢} \text{لو}_{هـ} |٢س-١| - ١١ \text{لو}_{هـ} |س-٣| + ج$$

تدريب (٣)

١) $\int \frac{س^٣ + س + ٥}{س^٢ + س} \, د س$

$$\begin{array}{r|l} س^٣ + س + ٥ & س^٢ + س \\ \hline -(س^٣ + س^٢) & ١ \\ \hline -س^٢ + س + ٥ & \end{array}$$

$$= \int ١ \, د س + \int \frac{٥}{س^٢ + س} \, د س$$

← كسور جزئية

$$\frac{٥}{س(س+١)} = \frac{م}{س} + \frac{ب}{س+١}$$

$$٥ = م(س+١) + ب س$$

$س = -١$	$س =$ صفر
$-ب = ٥$	$م = ٥$
$ب = -٥$	

$$= \int ١ \, د س + \int \frac{٥}{س} \, د س + \int \frac{-٥}{س+١} \, د س$$

$$= س + ٥ \, \text{لو}_{هـ} |س| - ٥ \, \text{لو}_{هـ} |س+١| + ج$$

٢) $\int_{٢}^{٣} \frac{س^٣ + س}{س - ١} \, د س$

$$\begin{array}{r|l} س^٣ + س & س - ١ \\ \hline -(س^٣ - س^٢) & س^٢ + س + ٢ \\ \hline س^٢ + س & \\ -(س^٢ - س) & \\ \hline ٢س - ٢ & \end{array}$$

$$= \int_{٢}^{٣} س^٢ + س + ٢ \, د س + \int_{٢}^{٣} \frac{٢}{س-١} \, د س$$

$$= \frac{س^٣}{٣} + \frac{س^٢}{٢} + ٢س + ٢ \, \text{لو}_{هـ} |س-١| \Big]_{٢}^{٣}$$

$٩ + \frac{٩}{٢} + ٦ + ٢$ لو$_{هـ}٢ - \frac{٨}{٣} - ٢ - ٤ - ٢$ لو$_{هـ}١$

$\frac{٦٥}{٦} + ٢$ لو$_{هـ}٢$

تدريب (٤)

١) $\int \frac{قا^٢ س}{٥ ظا^٢ س - ٣ ظا س - ٢}\, د س$

نفرض ص = ظا س   د ص = قا²س د س

$\int \frac{١}{٥ ص^٢ - ٣ ص - ٢}\, د ص$

$\frac{١}{(٥ص + ٢)(ص - ١)} = \frac{أ}{٥ص + ٢} + \frac{ب}{ص - ١}$

$١ = أ(ص - ١) + ب(٥ص + ٢)$

ص = ١	ص = $\frac{-٢}{٥}$
٧ب = ١	$-\frac{٧}{٥}$ أ = ١
ب = $\frac{١}{٧}$	أ = $\frac{-٥}{٧}$

$\int \frac{١}{٥ص^٢ - ٣ص - ٢}\, د ص = \int \frac{-\frac{٥}{٧}}{٥ص + ٢}\, د ص + \int \frac{\frac{١}{٧}}{ص - ١}\, د ص$

$= \frac{-١}{٧}$ لو$_{هـ}|٥ص + ٢| + \frac{١}{٧}$ لو$_{هـ}|ص - ١| +$ جـ

$= -\frac{١}{٧}$ لو$_{هـ}|٥ ظا س + ٢| + \frac{١}{٧}$ لو$_{هـ}|ظا س - ١| +$ جـ

٢) $\int \frac{\sqrt[٣]{س} - ١}{\sqrt[٣]{س^٢} - ٤}\, د س$

ص = $\sqrt[٣]{س}$ ، ص³ = س ، ٣ص² د ص = د س

$\int \frac{٣ص^٢(ص - ١)}{ص^٢ - ٤}\, د ص = \int \frac{٣ص^٣ - ٣ص^٢}{ص^٢ - ٤}\, د ص$

$٣ص - ٣$

$ص^٢ - ٤ \,\big)\, ٣ص^٣ - ٣ص^٢$

$\underline{-\,(٣ص^٣ - ١٢ص)}$

$-٣ص^٢ + ١٢ص$

$\underline{-\,(-٣ص^٢ + ١٢)}$

$١٢ص - ١٢$

$\int ٣ص - ٣\, د ص + \int \frac{١٢ص - ١٢}{ص^٢ - ٤}\, د ص$

← كسور جزئية

$\frac{١٢ص - ١٢}{(ص - ٢)(ص + ٢)} = \frac{أ}{ص - ٢} + \frac{ب}{ص + ٢}$

$١٢ص - ١٢ = أ(ص + ٢) + ب(ص - ٢)$

ص = ٢	ص = −٢
١٢ = ٤أ	−٣٦ = −٤ب
أ = ٣	ب = ٩

$\int ٣ص - ٣\, د ص + \int \frac{٣}{ص - ٢}\, د ص + \int \frac{٩}{ص + ٢}\, د ص$

$\frac{٣ص^٢}{٢} - ٣ص + ٣$ لو$_{هـ}|ص - ٢| + ٩$ لو$_{هـ}|ص + ٢| +$ جـ

$= \frac{٣(\sqrt[٣]{س})^٢}{٢} - ٣\sqrt[٣]{س} + ٣$ لو$_{هـ}|\sqrt[٣]{س} - ٢| + ٩$ لو$_{هـ}|\sqrt[٣]{س} + ٢| +$ جـ

٣) $\int_{٠}^{٣} \frac{\sqrt{س + ١} - ١}{\sqrt{س + ١} + ١}\, د س$

نفرض ص = $\sqrt{س + ١}$ ، ص² = س + ١ ، ٢ص د ص = د س

$\int_{١}^{٢} \frac{٢ص(ص - ١)}{ص + ١}\, د ص$

$٢ص - ٤$

$ص + ١ \,\big)\, ٢ص^٢ - ٢ص$

$\underline{-\,(٢ص^٢ + ٢ص)}$

$-٤ص$

$\underline{-\,(-٤ص - ٤)}$

٤

$\int_{١}^{٢} (٢ص - ٤)\, د ص + \int_{١}^{٢} \frac{٤}{ص + ١}\, د ص$

$[ص^٢ - ٤ص]_{١}^{٢} + ٤[$لو$_{هـ}|ص + ١|]_{١}^{٢}$

$-١ + ٤$ لو$_{هـ}٣ - ٤$ لو$_{هـ}٢$

منهاجي
متعة التعليم الهادف

تمارين ومسائل صفحة ٢٨٩

١) $\int \frac{\text{٧}}{\text{س}^{\text{٢}}-\text{٣س}-\text{١٠}}\,\text{دس}$

$\frac{\text{٧}}{(\text{س}-\text{٥})(\text{س}+\text{٢})} = \frac{\text{أ}}{\text{س}-\text{٥}} + \frac{\text{ب}}{\text{س}+\text{٢}}$

$\text{٧} = \text{أ}(\text{س}+\text{٢}) + \text{ب}(\text{س}-\text{٥})$

$\text{س} = -\text{٢}$ $\qquad$ $\text{س} = \text{٥}$

$\text{٧} = -\text{٧ب}$ $\qquad$ $\text{٧} = \text{٧أ}$

$\text{ب} = -\text{١}$ $\qquad$ $\text{أ} = \text{١}$

$\int \frac{\text{٧}}{\text{س}^{\text{٢}}-\text{٣س}-\text{١٠}}\,\text{دس} = \int \frac{\text{١}}{\text{س}-\text{٥}}\,\text{دس} + \int \frac{-\text{١}}{\text{س}+\text{٢}}\,\text{دس}$

$= \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}-\text{٥}| - \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}+\text{٢}| + \text{جـ}$

٢) $\int_{\text{١}}^{\text{٣}} \frac{\text{٢س}}{\text{س}^{\text{٢}}-\text{٤س}-\text{١٢}}\,\text{دس}$

$\frac{\text{٢س}}{(\text{س}-\text{٦})(\text{س}+\text{٢})} = \frac{\text{أ}}{\text{س}-\text{٦}} + \frac{\text{ب}}{\text{س}+\text{٢}}$

$\text{٢س} = \text{أ}(\text{س}+\text{٢}) + \text{ب}(\text{س}-\text{٦})$

$\text{س} = -\text{٢}$ $\qquad$ $\text{س} = \text{٦}$

$-\text{٤} = -\text{٨ب}$ $\qquad$ $\text{١٢} = \text{٨أ}$

$\text{ب} = \frac{\text{١}}{\text{٢}}$ $\qquad$ $\text{أ} = \frac{\text{٣}}{\text{٢}}$

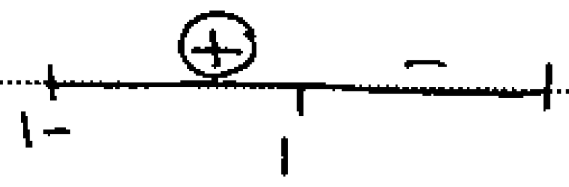
$\int_{\text{١}}^{\text{٣}} \frac{\frac{\text{٣}}{\text{٢}}}{\text{س}-\text{٦}}\,\text{دس} + \int_{\text{١}}^{\text{٣}} \frac{\frac{\text{١}}{\text{٢}}}{\text{س}+\text{٢}}\,\text{دس}$

$= \frac{\text{٣}}{\text{٢}}\left[\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}-\text{٦}|\right]_{\text{١}}^{\text{٣}} + \frac{\text{١}}{\text{٢}}\left[\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}+\text{٢}|\right]_{\text{١}}^{\text{٣}}$

$\frac{\text{٣}}{\text{٢}}\text{لو}_{\text{هـ}}\text{٣} - \frac{\text{٣}}{\text{٢}}\text{لو}_{\text{هـ}}\text{٥} + \frac{\text{١}}{\text{٢}}\text{لو}_{\text{هـ}}\text{٥} - \frac{\text{١}}{\text{٢}}\text{لو}_{\text{هـ}}\text{٣}$

$\text{لو}_{\text{هـ}}\text{٣} - \text{لو}_{\text{هـ}}\text{٥}$.

٣) $\int_{-\text{١}}^{\text{١}} \frac{|\text{١}-\text{س}|}{\text{س}^{\text{٢}}-\text{٥س}+\text{٦}}\,\text{دس}$



$\int_{-\text{١}}^{\text{١}} \frac{\text{١}-\text{س}}{\text{س}^{\text{٢}}-\text{٥س}+\text{٦}}\,\text{دس}$

$\frac{\text{١}-\text{س}}{(\text{س}-\text{٢})(\text{س}-\text{٣})} = \frac{\text{أ}}{\text{س}-\text{٢}} + \frac{\text{ب}}{\text{س}-\text{٣}}$

$\text{١}-\text{س} = \text{أ}(\text{س}-\text{٣}) + \text{ب}(\text{س}-\text{٢})$

$\text{س} = \text{٣}$ $\qquad$ $\text{س} = \text{٢}$

$\boxed{-\text{٢} = \text{ب}}$ $\qquad$ $-\text{١} = -\text{أ}$

$\boxed{\text{أ} = \text{١}}$

$\int_{-\text{١}}^{\text{١}} \frac{\text{١}-\text{س}}{\text{س}^{\text{٢}}-\text{٥س}+\text{٦}}\,\text{دس} = \int_{-\text{١}}^{\text{١}} \frac{\text{١}}{\text{س}-\text{٢}}\,\text{دس} + \int_{-\text{١}}^{\text{١}} \frac{-\text{٢}}{\text{س}-\text{٣}}\,\text{دس}$

$= \left[\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}-\text{٢}|\right]_{-\text{١}}^{\text{١}} + \left[-\text{٢لو}_{\text{هـ}}|\text{س}-\text{٣}|\right]_{-\text{١}}^{\text{١}}$

$\text{لو}_{\text{هـ}}\text{١} - \text{لو}_{\text{هـ}}\text{٣} - \text{٢لو}_{\text{هـ}}\text{٢} + \text{٢لو}_{\text{هـ}}\text{٤}$

$= \text{٢لو}_{\text{هـ}}\text{٤} - \text{٢لو}_{\text{هـ}}\text{٢} - \text{لو}_{\text{هـ}}\text{٣}$.

٤) $\int \frac{\text{س}^{\text{٣}}+\text{٤س}-\text{٨}}{\text{س}^{\text{٢}}-\text{٩}}\,\text{دس}$

بالقسمة الطويلة $\Leftarrow \int \text{س}\,\text{دس} + \int \frac{\text{١٣س}-\text{٨}}{\text{س}^{\text{٢}}-\text{٩}}\,\text{دس}$

$= \int \text{س}\,\text{دس} + \int \frac{\frac{\text{٣١}}{\text{٦}}}{\text{س}-\text{٣}}\,\text{دس} + \int \frac{\frac{\text{٤٧}}{\text{٦}}}{\text{س}+\text{٣}}\,\text{دس}$

$\frac{\text{س}^{\text{٢}}}{\text{٢}} + \frac{\text{٣١}}{\text{٦}}\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}-\text{٣}| + \frac{\text{٤٧}}{\text{٦}}\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}+\text{٣}| + \text{جـ}$

٥) $\int_{0}^{1} \frac{٣س^{٢}+٣}{٣س^{٣}-س-٤}\,د س$

بالقسمة الطويلة ⟸ $= \int_{0}^{1} ١\,د س + \int_{0}^{1} \frac{س+٧}{٣س^{٣}-س-٤}\,د س$

كسور جزئية ⟸

$= \int_{0}^{1} ١\,د س + \int_{0}^{1} \frac{\frac{٢٥}{٧}}{(٣س-٤)}\,د س + \int_{0}^{1} \frac{-\frac{٦}{٧}}{س+١}\,د س$

$= [س]_{0}^{1} + \frac{٢٥}{٢١}[\ln_{هـ}|٣س-٤|]_{0}^{1} - \frac{٦}{٧}[\ln_{هـ}|س+١|]_{0}^{1}$

$١ + \frac{٢٥}{٢١}\ln_{هـ}١ - \frac{٢٥}{٢١}\ln_{هـ}٤ - \frac{٦}{٧}\ln_{هـ}٢ + \frac{٦}{٧}\ln_{هـ}١$

$١ - \frac{٢٥}{٢١}\ln_{هـ}٤ - \frac{٦}{٧}\ln_{هـ}٢$

٦) $\int \frac{ظا س}{٣٥ - (\ln_{هـ} جتا س)^{٢}}\,د س$

نفرض $ص = \ln_{هـ} جتا س$ ، $د ص = \frac{-جا س}{جتا س}\,د س$

$\int \frac{١}{٢٥ - ص^{٢}}\,د ص$

$\frac{١}{(٥-ص)(٥+ص)} = \frac{أ}{٥-ص} + \frac{ب}{٥+ص}$

$١ = أ(٥+ص) + ب(٥-ص)$

$ص = ٥ \quad أ = \frac{١}{١٠}$

$ص = -٥ \quad ب = \frac{١}{١٠}$

$\int \frac{\frac{١}{١٠}}{٥-ص}\,د ص + \int \frac{\frac{١}{١٠}}{٥+ص}\,د ص$

$= \frac{١}{١٠}\ln_{هـ}|٥-ص| - \frac{١}{١٠}\ln_{هـ}|٥+ص| + ج$

$= \frac{١}{١٠}\ln_{هـ}\left|\frac{٥-ص}{٥+ص}\right| + ج$

$= \frac{١}{١٠}\ln_{هـ}\left|\frac{٥-\ln_{هـ} جتا س}{٥+\ln_{هـ} جتا س}\right| + ج$

٧) $\int \frac{١}{هـ^{س}+١}\,د س$

نفرض $ص = هـ^{س}$ $\quad د ص = هـ^{س}\,د س$

$\int \frac{١}{ص(ص+١)}\,د ص = \int \frac{١}{ص}\,د ص + \int \frac{-١}{ص+١}\,د ص$

$= \ln_{هـ}|ص| - \ln_{هـ}|ص+١| + ج$

$= \ln_{هـ}|\frac{ص}{ص+١}| + ج$

$= \ln_{هـ}|\frac{هـ^{س}}{هـ^{س}+١}| + ج$

٨) $\int \frac{هـ^{٣س}}{هـ^{٢س}-٣هـ^{س}-٤}\,د س$

نفرض $ص = هـ^{س}$ $\quad د ص = هـ^{س}\,د س$

$\int \frac{ص^{٢}}{ص^{٢}-٣ص-٤}\,د ص$ بالقسمة الطويلة

$= \int ١\,د ص + \int \frac{٣ص+٤}{ص^{٢}-٣ص-٤}\,د ص$ ⟸ كسور جزئية

$= \int ١\,د ص + \int \frac{\frac{١٦}{٥}}{ص-٤}\,د ص + \int \frac{-\frac{١}{٥}}{ص+١}\,د ص$

$ص + \frac{١٦}{٥}\ln_{هـ}|ص-٤| - \frac{١}{٥}\ln_{هـ}|ص+١| + ج$

$هـ^{س} + \frac{١٦}{٥}\ln_{هـ}|هـ^{س}-٤| - \frac{١}{٥}\ln_{هـ}|هـ^{س}+١| + ج$

٩) $\int_{٩}^{١٦} \frac{\sqrt{س}}{س-٤}\,د س$ نفرض $ص = \sqrt{س}$

$ص^{٢} = س \quad ٢ص\,د ص = د س$

$\int_{٣}^{٤} \frac{٢ص^{٢}}{ص^{٢}-٤}\,د ص = \int_{٣}^{٤} ٢\,د ص + \int_{٣}^{٤} \frac{٨}{ص^{٢}-٤}\,د ص$

$= [٢ص]_{٣}^{٤} + \int_{٣}^{٤} \frac{٢}{ص-٢}\,د ص + \int_{٣}^{٤} \frac{-٢}{ص+٢}\,د ص$

$= [٢(٤-٣)] + [٢\ln_{هـ}|ص-٢|]_{٣}^{٤} - [٢\ln_{هـ}|ص+٢|]_{٢}^{٤}$

$٢ + ٢\ln_{هـ}٢ - ٢\ln_{هـ}٦ + ٢\ln_{هـ}٥$

منهاجي
متعة التعليم الهادف

١٠) $\int \frac{\text{جتاس}}{1+3\text{حاس}-\text{جتا}^2\text{س}}\,\text{دس}$

$= \int \frac{\text{جتاس}}{3\text{حا}^2\text{س}+3\text{حاس}}\,\text{دس}$

نفرض $\text{ص}=\text{جاس}$ $\quad \text{دص}=\text{جتاس}\,\text{دس}$

$\int \frac{1}{3\text{ص}^2+3\text{ص}}\,\text{دص} = \int \frac{\frac{1}{3}}{\text{ص}}\,\text{دص} + \int \frac{-\frac{2}{3}\,\text{دص}}{2\text{ص}+3}$

$= \frac{1}{3}\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ص}| - \frac{1}{3}\,\text{لو}_{\text{هـ}}|2\text{ص}+3| + \text{جـ}$

$= \frac{1}{3}\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{حاس}| - \frac{1}{3}\,\text{لو}_{\text{هـ}}|2\text{حاس}+3| + \text{جـ}$

١١) $\int \text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}^2-9)\,\text{دس}$

$\text{هـ}=\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}^2-9)$ $\quad \text{دهـ}=\frac{2\text{س}}{\text{س}^2-9}\,\text{دس}$

$\text{دهـ}=\text{دس}$ $\quad \text{هـ}=\text{س}$

$\int \text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}^2-9)\,\text{دس} = \text{س}\,\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}^2-9) - \int \frac{2\text{س}^2}{\text{س}^2-9}\,\text{دس}$

$= \text{س}\,\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}^2-9) - \int 2\,\text{دس} - \int \frac{18}{\text{س}^2-9}\,\text{دس}$

$= \text{س}\,\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}^2-9) - 2\text{س} - (\int \frac{3}{\text{س}-3}\,\text{دس} + \int \frac{-3}{\text{س}+3}\,\text{دس})$

$= \text{س}\,\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}^2-9) - 2\text{س} - 3\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}-3| + 3\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}+3| + \text{جـ}$

١٢) $\int \frac{\text{س}}{\text{س}^4+\text{س}^2}\,\text{دس}$

$= \int \frac{\text{س}}{\text{س}^4(1+\text{س}^{-2})}\,\text{دس}$

$= \int \frac{\text{س}^{-3}}{1+\text{س}^{-2}}\,\text{دس}$

نفرض $\text{ص}=\text{س}^{-2}$ $\quad \text{دص}=-2\text{س}^{-3}\,\text{دس}$

$= \int -\frac{1}{2} \times \frac{1}{\text{ص}}\,\text{دص} = -\frac{1}{2}\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ص}+1| + \text{جـ}$

$= -\frac{1}{2}\,\text{لو}_{\text{هـ}}|1+\text{س}^{-2}| + \text{جـ}$

١٣) $\int_{9}^{16} \frac{\text{دس}}{\text{س}-3\sqrt{\text{س}}+2}$

نفرض $\text{ص}=\sqrt{\text{س}}$ $\quad$ و $\text{ص}^2=\text{س}$ $\quad$ و $2\text{ص}\,\text{دص}=\text{دس}$

$\int_{3}^{4} \frac{2\text{ص}\,\text{دص}}{\text{ص}^2-3\text{ص}+2} = \int_{3}^{4} \frac{4}{\text{ص}-2}\,\text{دص} + \int_{3}^{4} \frac{-2}{\text{ص}-1}\,\text{دص}$

$4\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ص}-2|_{3}^{4} + -2\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ص}-1|_{3}^{4}$

$4\,\text{لو}_{\text{هـ}}2 - 4\,\text{لو}_{\text{هـ}}1 - 2\,\text{لو}_{\text{هـ}}3 + 2\,\text{لو}_{\text{هـ}}2$

$6\,\text{لو}_{\text{هـ}}2 - 2\,\text{لو}_{\text{هـ}}3$

١٤) $\int \frac{1+\sqrt{\text{س}-2}}{\sqrt{4\text{س}-8}-2}\,\text{دس} = \int \frac{1+\sqrt{\text{س}-2}}{2\sqrt{\text{س}-2}-2}\,\text{دس}$

نفرض $\text{ص}=\sqrt{\text{س}-2}$ ، $\text{ص}^2=\text{س}-2 \Leftarrow 2\text{ص}\,\text{دص}=\text{دس}$

$\int \frac{\text{ص}+1}{2\text{ص}-2} \times 2\text{ص}\,\text{دص} = \int \frac{2\text{ص}^2+2\text{ص}}{2\text{ص}-2}\,\text{دص}$

$= \int \frac{\text{ص}^2+\text{ص}}{\text{ص}-1}\,\text{دص} = \int (\text{ص}+2)\,\text{دص} + \int \frac{2}{\text{ص}-1}\,\text{دص}$

$= \frac{\text{ص}^2}{2} + 2\text{ص} + 2\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ص}-1| + \text{جـ}$

$= \frac{(\text{س}-2)}{2} + 2\sqrt{\text{س}-2} + 2\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\sqrt{\text{س}-2}-1| + \text{جـ}$

(١٥) $\int \sqrt{١ - هـ^{س}}\ دس$

$ص = \sqrt{١ - هـ^{س}}$ ، $ص^{٢} = ١ - هـ^{س}$

$٢ص\ دص = -هـ^{س}\ دس$

$\int \frac{٢ص^{٢}}{ص^{٢}-١}\ دص = \int ٢\ دص + \int \frac{٢}{ص^{٢}-١}\ دص$

$= \int ٢\ دص + \int \frac{-١}{ص+١}\ دص + \int \frac{١}{ص-١}\ دص$

$= ٢ص - لو_{هـ}|ص+١| + لو_{هـ}|ص-١| + جـ$

$= ٢\sqrt{١-هـ^{س}} - لو_{هـ}\left|\sqrt{١-هـ^{س}}+١\right| + لو_{هـ}\left|\sqrt{١-هـ^{س}}-١\right| + جـ$

(١٦) $\int \frac{قا^{٢}س}{٥ - قا^{٢}س}\ دس = \int \frac{قا^{٢}س}{٥ - (ظا^{٢}س + ١)}\ دس$

$= \int \frac{قا^{٢}س}{٤ - ظا^{٢}س}\ دس$

نفرض $ص = ظاس$ ، $دص = قا^{٢}س\ دس$

$\int \frac{١}{٤ - ص^{٢}}\ دص = \int \frac{\frac{١}{٤}}{٢+ص}\ دص + \int \frac{\frac{١}{٤}}{٢-ص}\ دص$

$= \frac{١}{٤} لو_{هـ}|٢+ص| - \frac{١}{٤} لو_{هـ}|٢-ص| + جـ$

$= \frac{١}{٤} لو_{هـ}|٢+ظاس| - \frac{١}{٤} لو_{هـ}|٢-ظاس| + جـ$

(١٧) $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \frac{جتاس}{٨ + جتا^{٢}س}\ دس = \int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \frac{جتاس}{٨ + ١ - جا^{٢}س}\ دس$

$= \int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \frac{جتاس}{٩ - جا^{٢}س}\ دس$

نفرض $ص = جاس$ ، $دص = جتاس\ دس$

$س = ٠$ ، $ص = ٠$ ؛ $س = \frac{\pi}{٢}$ ، $ص = ١$

$\int_{٠}^{١} \frac{١}{٩ - ص^{٢}}\ دص = \int_{٠}^{١} \frac{\frac{١}{٦}}{٣-ص}\ دص + \int_{٠}^{١} \frac{\frac{١}{٦}}{٣+ص}\ دص$

$= -\frac{١}{٦}\left[لو_{هـ}|٣-ص|\right]_{٠}^{١} + \frac{١}{٦}\left[لو_{هـ}|٣+ص|\right]_{٠}^{١}$

$= -\frac{١}{٦} لو_{هـ}٢ + \frac{١}{٦} لو_{هـ}٣ + \frac{١}{٦} لو_{هـ}٤ - \frac{١}{٦} لو_{هـ}٣$

$= \frac{١}{٦} لو_{هـ}٢$

(١٨) $\int \frac{دس}{س(لوس)^{٢} - ٤س} = \int \frac{دس}{س((لوس)^{٢} - ٤)}$

$ص = لو_{هـ}س$ ، $دص = \frac{١}{س}\ دس$

$= \int \frac{دص}{ص^{٢} - ٤} = \int \frac{-\frac{١}{٤}}{ص+٢}\ دص + \int \frac{\frac{١}{٤}}{ص-٢}\ دص$

$= -\frac{١}{٤} لو_{هـ}|ص+٢| + \frac{١}{٤} لو_{هـ}|ص-٢| + جـ$

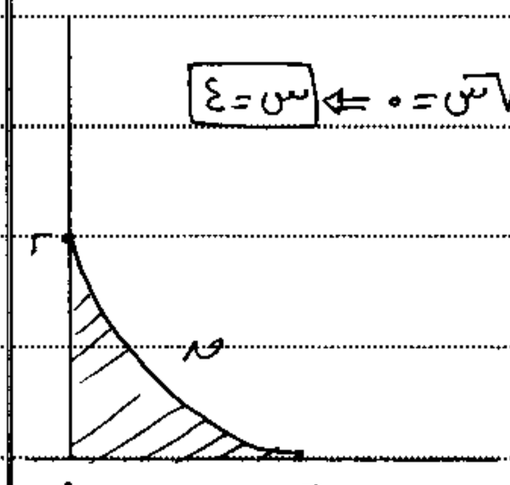
$= -\frac{١}{٤} لو_{هـ}|لو_{هـ}س + ٢| + \frac{١}{٤} لو_{هـ}|لو_{هـ}س - ٢| + جـ$

الفصل الثالث : تطبيقات التكامل

أولاً : المساحة

تدريب (١)

$ق(س) = 2 - \frac{1}{2}س$ ، $2 - \frac{1}{2}س = 0 \Leftarrow س = 4$



$م = \int_{0}^{4} (2 - \frac{1}{2}س)\, د س$

$= [2س - \frac{1}{4}س^2]_{0}^{4}$

$= (2 \times 4 - \frac{1}{4} \times 8) - صفر$

$= \frac{8}{3}$ وحدة مساحة

تدريب (٢) :

$\int_{أ}^{ب} ق(س)\, د س = \int_{أ}^{ج} ق(س)\, د س + \int_{ج}^{ب} ق(س)\, د س$

$= -8 + 5 = -3$

تدريب (٣)

$\int_{0}^{2} |جتا \pi س - 0|\, د س = \int_{0}^{2} |جتا \pi س|\, د س$

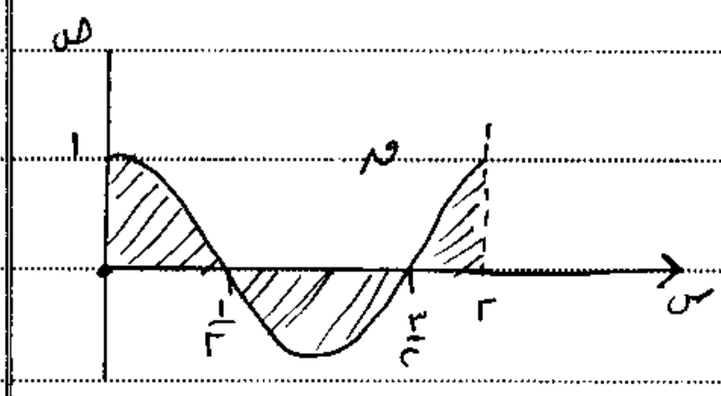
$= \int_{0}^{\frac{1}{2}} جتا \pi س\, د س + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} -جتا \pi س\, د س + \int_{\frac{3}{2}}^{2} جتا \pi س\, د س$

$[\frac{1}{\pi} جا \pi س]_{0}^{\frac{1}{2}} \oplus [-\frac{1}{\pi} جا \pi س]_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \oplus [\frac{1}{\pi} جا \pi س]_{\frac{3}{2}}^{2}$

$(\frac{1}{\pi} - صفر) \oplus (\frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi}) \oplus (صفر - -\frac{1}{\pi})$

$\frac{4}{\pi} = \frac{1}{\pi} + \frac{2}{\pi} + \frac{1}{\pi}$ وحدة مساحة

انظر الشكل المجاور



تدريب (٤) :

$ق(س) = 4س^2 - 3س$ ، $هـ(س) = 5س$

عند نقاط التقاطع $\Leftarrow$ $ق = هـ$

$4س^2 - 3س = 5س \Leftarrow$ $س = صفر$ ، $س = 2$

$م = \int_{0}^{2} هـ(س) - ق(س)\, د س$

$م = \int_{0}^{2} 5س - 4س^2 + 3س\, د س = \int_{0}^{2} (8س - 4س^2)\, د س$

$[4س^2 - \frac{4}{3}س^3]_{0}^{2} = (16 - \frac{32}{3}) - صفر$

$= \frac{16}{3}$ وحدة مساحة

تدريب (٥)

$ق(س) = 1 + جاس$ ، $هـ(س) = 1 + جتاس$

عند نقاط التقاطع $\Leftarrow$ $1 + جاس = 1 + جتاس$

$س = \frac{\pi}{4}$ ∈ $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$

$س = \frac{5\pi}{4}$ ∉ $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ لماذا

$م = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{4}} (ق - هـ)\, د س + \int_{\frac{5\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{2}} (هـ - ق)\, د س$

$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{4}} (جاس - جتاس)\, د س \oplus \int_{\frac{5\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{2}} جتاس - جاس\, د س$

$[جاس + جتاس]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{4}} \oplus [جاس + جتاس]_{\frac{5\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{2}}$

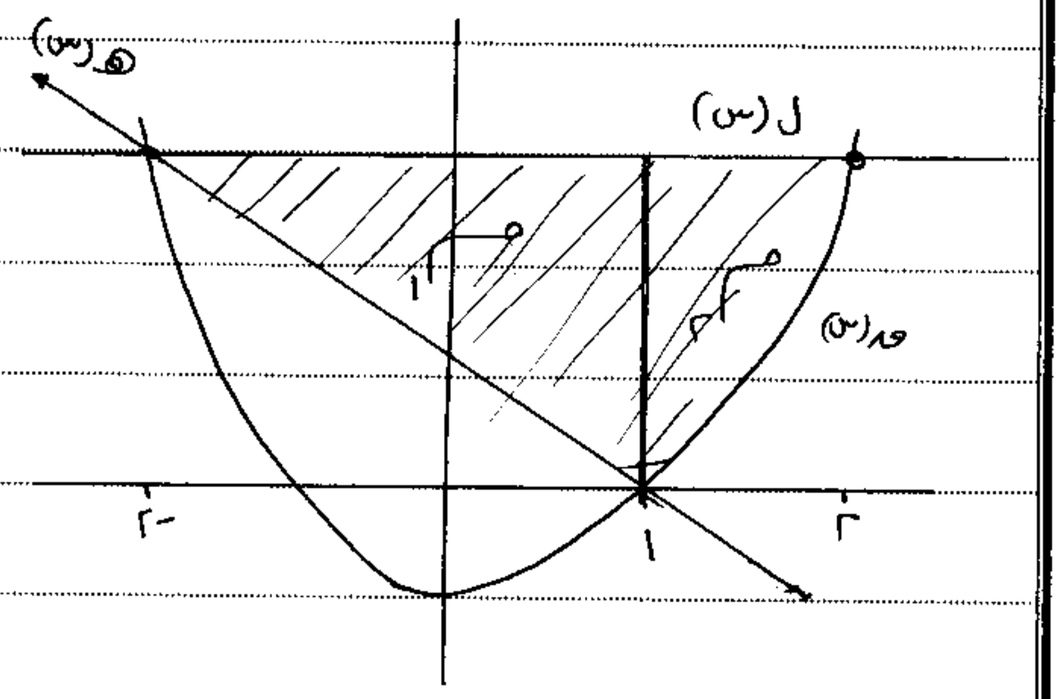
$(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} - (0 + 1)) \oplus (-1) - (\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}})$

$= \frac{2}{\sqrt{2}} + 1 - 1 + \frac{2}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$ وحدة مساحة

منهاجي
متعة التعليم الهادف

تدريب (٦)

هـ = ص	ص = ل	هـ = ل
$س^2 - ١ = ١ - س$	$س^2 - ١ = ٣$	$١ - س = ٣$
$س^2 + س - ٢ = ٠$	$س = ٢ ، (٣ ، ٢)$	$س = -٢$
$(س+٢)(س-١) = ٠$	$س = -٢ \quad (٣ ، ٢-)$	$(٣ ، ٢-)$
$س = ٢ \quad (٣ ، ٢-)$		
$س = +١ \quad (٠ ، ١)$		



$$م = \int_{-٢}^{١} (ل - هـ)\, دس + \int_{١}^{٢} (ل - هـ)\, دس$$

$$م = \int_{-٢}^{١} (٢ + س)\, دس \oplus \int_{١}^{٢} (٤ - س^2)\, دس$$

$$\left[٢س + \frac{س^2}{٢}\right]_{-٢}^{١} \oplus \left[٤س - \frac{س^3}{٣}\right]_{١}^{٢}$$

$$\left(٢ + \frac{١}{٢}\right) - (-٤ + ٢) \oplus \left(٨ - \frac{٨}{٣}\right) - \left(٤ - \frac{١}{٣}\right)$$

$$٤,٥ + \frac{٥}{٣} = \frac{٣٧}{٦}$$ وحدة مساحة

أولاً نجد مساحة المنطقة الملونة بالأزرق

= مساحة المستطيل − مساحة المنطقة المظللة

$$= ١٢ \times ٢٨ - \int_{-٤}^{٤} ٨ - \frac{س^2}{٣}\, دس$$

لإيجاد حدود التكامل نضع $٨ - \frac{س^2}{٣} = صفر$

$$م = ٣٣٦ - \left[٨س - \frac{س^3}{٦}\right]_{-٤}^{٤}$$

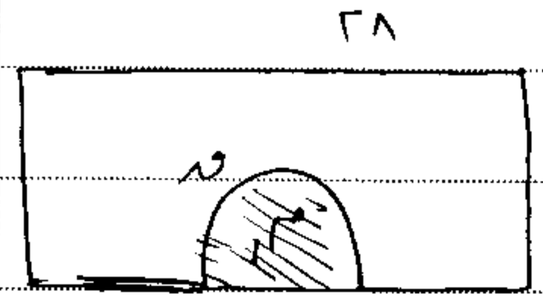
$$٣٣٦ - \left(\left(\frac{٦٤}{٦} - ٣٢\right) - \left(-٣٢ + \frac{٦٤}{٦}\right)\right)$$

$$م = \frac{٨٨٠}{٣}$$

التكلفة الكلية للدهان $= \frac{٨٨٠}{٣} \times ٤٠$

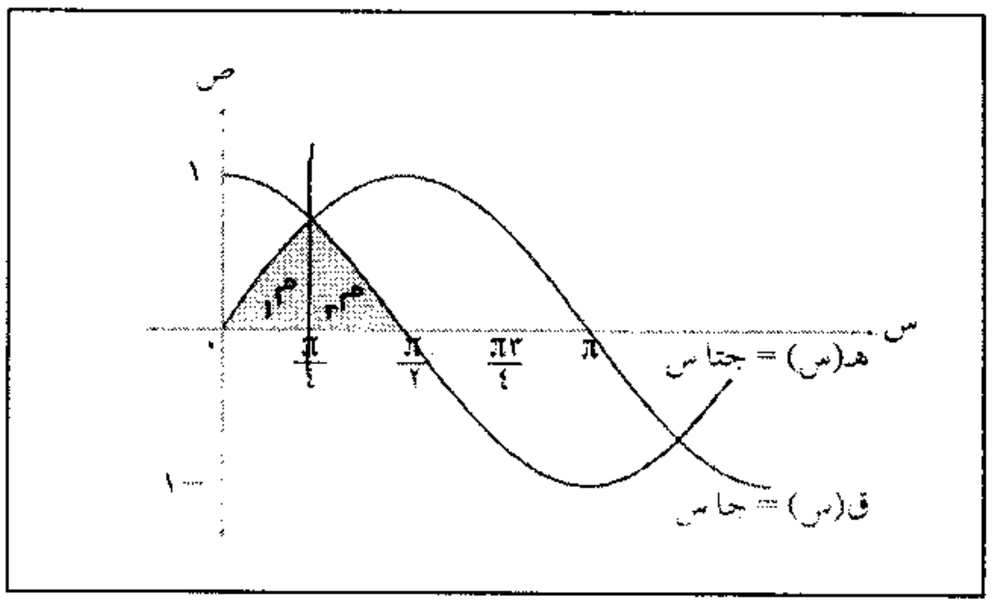
$= \frac{٣٥٢٠٠}{٣}$ قرشاً

تدريب (٧)



تمارين ومسائل صفحة (٣٠١ ـ ٣٠٣)

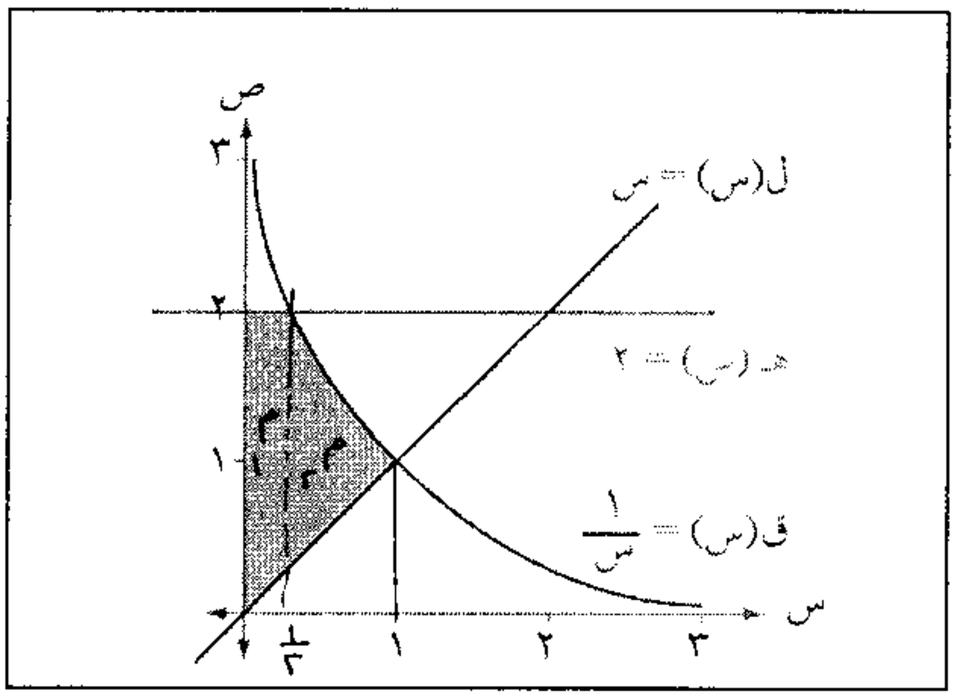
١) اكتب التكامل المحدود الذي يعبر عن مساحة المنطقة المظللة في كلٍّ من الأشكال الآتية:



الشكل (٤ ـ ٢٤)

$$م = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} ق(س)\,د س + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} هـ(س)\,د س$$

$$= \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} جاس\,د س + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} جتاس\,د س$$



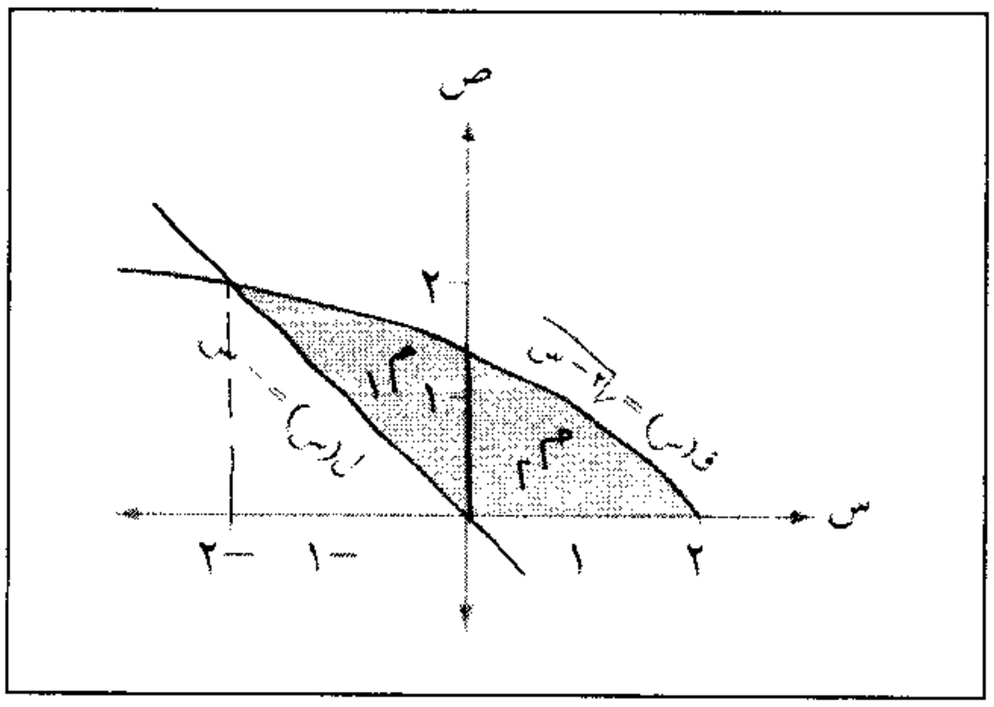
الشكل (٤ ـ ٢٥)

$هـ(س) = ق(س) \Leftarrow \frac{1}{س} = ٢ \Leftarrow س = \frac{1}{2}$

$م = م_1 + م_2$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^{1} (هـ(س) - ل(س))\,د س + \int_{0}^{\frac{1}{2}} (ق(س) - ل(س))\,د س$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^{1} (٢ - س)\,د س \oplus \int_{0}^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{س} - س\right)\,د س$$

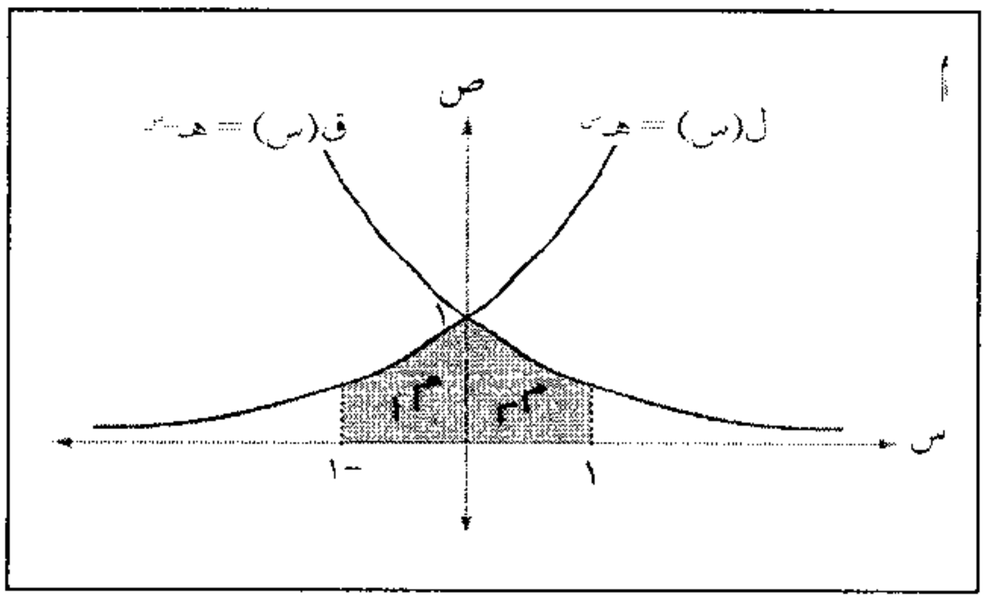


الشكل (٤ ـ ٢٦)

$م = م_1 + م_2$

$$= \int_{-2}^{0} (ق - ل)\,د س + \int_{0}^{2} (ق - صفر)\,د س$$

$$= \int_{-2}^{0} \sqrt{٢ - س} + س\,د س \oplus \int_{0}^{2} \sqrt{٢ - س}\,د س$$

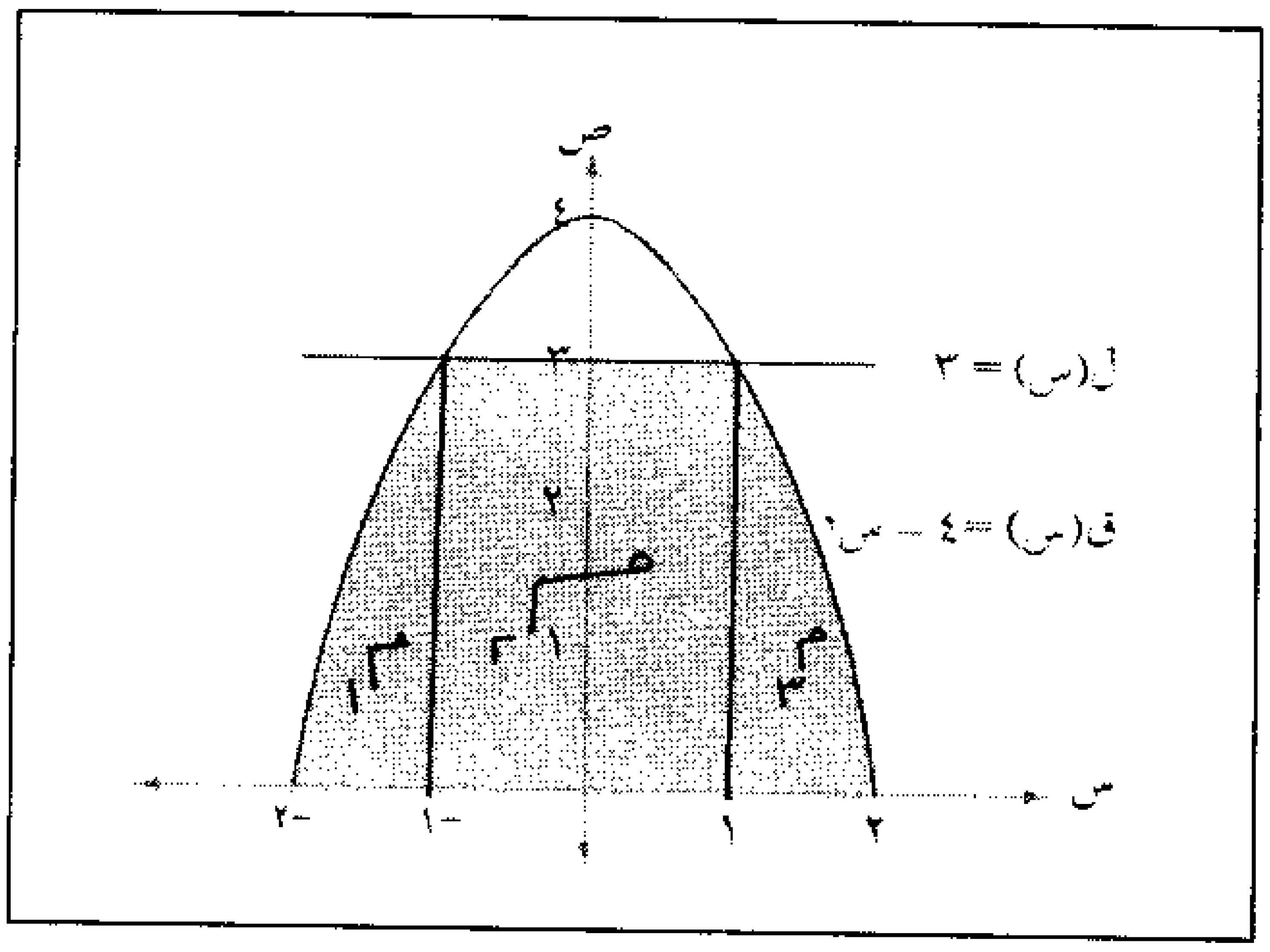


الشكل (٤ ـ ٢٧)

$م = م_1 + م_2$

$$= \int_{-1}^{0} ل(س)\,د س + \int_{0}^{1} ق(س)\,د س$$

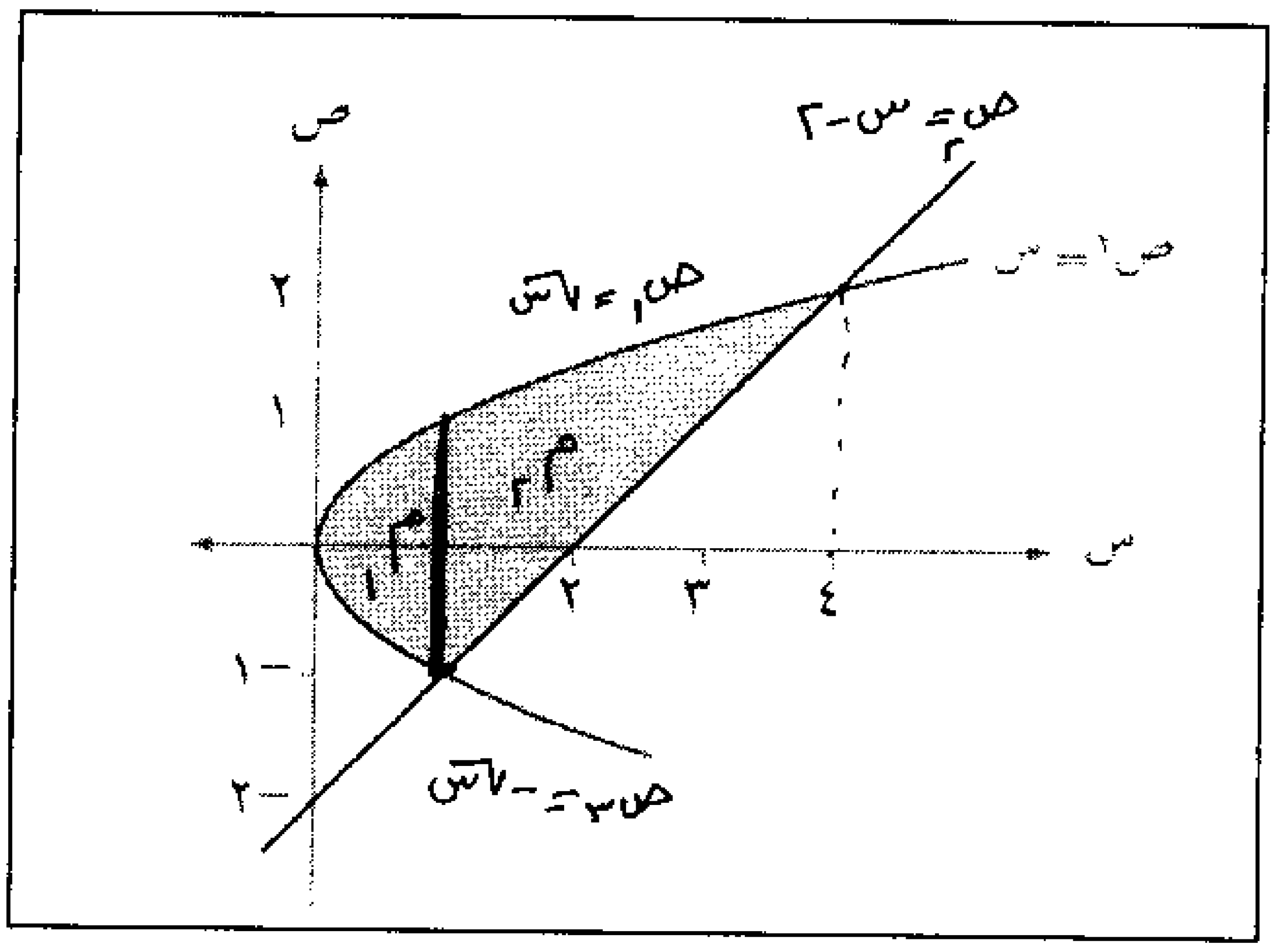
$$= \int_{-1}^{0} هـ^{س}\,د س + \int_{0}^{1} هـ^{-س}\,د س$$



الشكل (٤ ـ ٢٨)

$$\text{م} = \int_{-2}^{-1} \text{ق(س)}\,\text{دس} + \int_{-1}^{1} \text{ل(س)}\,\text{دس} + \int_{1}^{2} \text{ق(س)}\,\text{دس}$$

$$= \int_{-2}^{-1} (٤ - \text{س}^2)\,\text{دس} + \int_{-1}^{1} ٣\,\text{دس} + \int_{1}^{2} (٤ - \text{س}^2)\,\text{دس}$$



الشكل (٤ ـ ٢٩)

$$\text{م} = \text{م}_1 + \text{م}_2$$

$$= \int_{0}^{1} (\sqrt{\text{س}} - -\sqrt{\text{س}})\,\text{دس} + \int_{1}^{4} (\sqrt{\text{س}} - \text{س} + ٢)\,\text{دس}$$

$$= \int_{0}^{1} ٢\sqrt{\text{س}}\,\text{دس} + \int_{1}^{4} (\sqrt{\text{س}} - \text{س} + ٢)\,\text{دس}$$

---

٢) $\text{ق(س)} = ٤\text{س}^3 - ٤\text{س}$ ، محور السينات ص = ٠

$٤\text{س}^3 - ٤\text{س} = ٠ \Leftarrow \text{س} = ٠ ، \text{س} = ١ ، \text{س} = -١$

$$\text{م} = \int_{-1}^{0} (٤\text{س}^3 - ٤\text{س})\,\text{دس} + \int_{0}^{1} (-٤\text{س}^3 + ٤\text{س})\,\text{دس}$$

$$= \left[\text{س}^4 - ٢\text{س}^2\right]_{-1}^{0} \oplus \left[-\text{س}^4 + ٢\text{س}^2\right]_{0}^{1}$$

(صفر) − (١ − ٢) ⊕ (−١ + ٢) − (صفر)

١ ⊕ ١ = ٢ وحدة مساحة

٣) أولاً نجد نقاط التقاطع

$٤\text{س}^3 - ٣\text{س} = ٥\text{س} \Leftarrow ٤\text{س}^3 - ٨\text{س} = \text{صفر}$

$\text{س} = ٠ ، \text{س} = \sqrt{٢} ، \text{س} = -\sqrt{٢}$

$$\text{م} = \int_{-\sqrt{2}}^{0} (\text{ق} - \text{هـ})\,\text{دس} + \int_{0}^{\sqrt{2}} (\text{هـ} - \text{ق})\,\text{دس}$$

$$\text{م} = \int_{-\sqrt{2}}^{0} (٤\text{س}^3 - ٨\text{س})\,\text{دس} \oplus \int_{0}^{\sqrt{2}} (٨\text{س} - ٤\text{س}^3)\,\text{دس}$$

$$= \left[\text{س}^4 - ٤\text{س}^2\right]_{-\sqrt{2}}^{0} \oplus \left[٤\text{س}^2 - \text{س}^4\right]_{0}^{\sqrt{2}}$$

(صفر) − (٤ − ٨) ⊕ (٨ − ٤) − صفر

٤ + ٤ = ٨ وحدة مساحة

٤) $\text{ق(س)} = ٣\text{س}^2 - ٣$ ، محور السينات ← ص = ٠

$٣\text{س}^2 - ٣ = ٠ \Leftarrow \text{س} = \mp ١$

$$\text{م} = \int_{-3}^{-1} (٣\text{س}^2 - ٣)\,\text{دس} \oplus \int_{-1}^{1} (٣ - ٣\text{س}^2)\,\text{دس} \oplus \int_{1}^{2} (٣\text{س}^2 - ٣)\,\text{دس}$$

$$= \left[\text{س}^3 - ٣\text{س}\right]_{-3}^{-1} \oplus \left[٣\text{س} - \text{س}^3\right]_{-1}^{1} \oplus \left[\text{س}^3 - ٣\text{س}\right]_{1}^{2}$$

(−١ + ٣) − (−٢٧ + ٩) ⊕ (٣ − ١) − (−٣ + ١) ⊕ (٨ − ٦) − (١ − ٣)

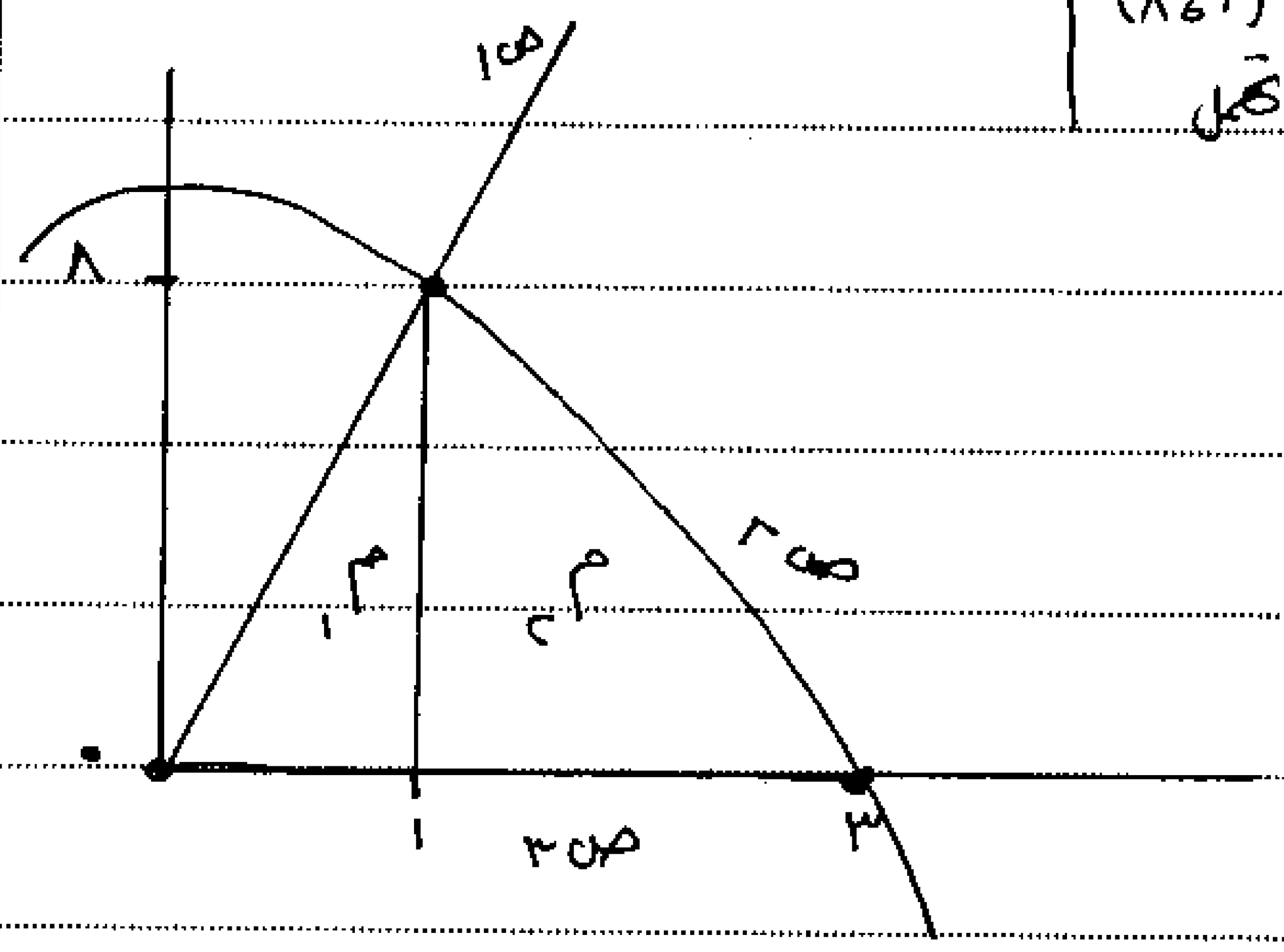
٢٠ ⊕ ٤ ⊕ ٤

= ٢٨ وحدة مساحة

منهاجي
متعة التعليم الهادف

س٥) $ص_1 = 8س$ ، $ص_2 = 9 - س^2$ ، $ص_3 = 0$

$ص_1 = ص_2$	$ص_1 = ص_3$	$ص_2 = ص_3$
$9 - س^2 = 8س$	$8س$ = صفر	$9 - س^2 = 0$
$س^2 + 8س - 9 = 0$	س = صفر	س = ٣ (٣،٠)
$(س - 1)(س + 9) = 0$		س = −٣ تهمل
س = ١ (١،٨)		
س = −٩ تهمل		



$م = \int_0^1 (ص_1 - ص_3)\,دس + \int_1^3 (ص_2 - ص_3)\,دس$

$= \int_0^1 8س\,دس + \int_1^3 (9 - س^2)\,دس$

$= [4س^2]_0^1 \oplus [9س - \frac{س^3}{3}]_1^3$

$4 -$ صفر $\oplus (27 - 9) - (9 - \frac{1}{3})$

$4 \oplus 9 + \frac{1}{3} = 13\frac{1}{3}$ وحدة مساحة

س٦) س ∈ [٠، $\frac{\pi}{2}$]

نجد نقاط التقاطع

جاس = جا٢س ⇐ جاس − ٢جاس جتاس = ٠

جاس = ٠ ، جتاس = $\frac{1}{2}$

س = ٠ ، س = $\frac{\pi}{3}$

$م = \int_0^{\frac{\pi}{3}} (جا2س - جاس)\,دس + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} (جاس - جا2س)\,دس$

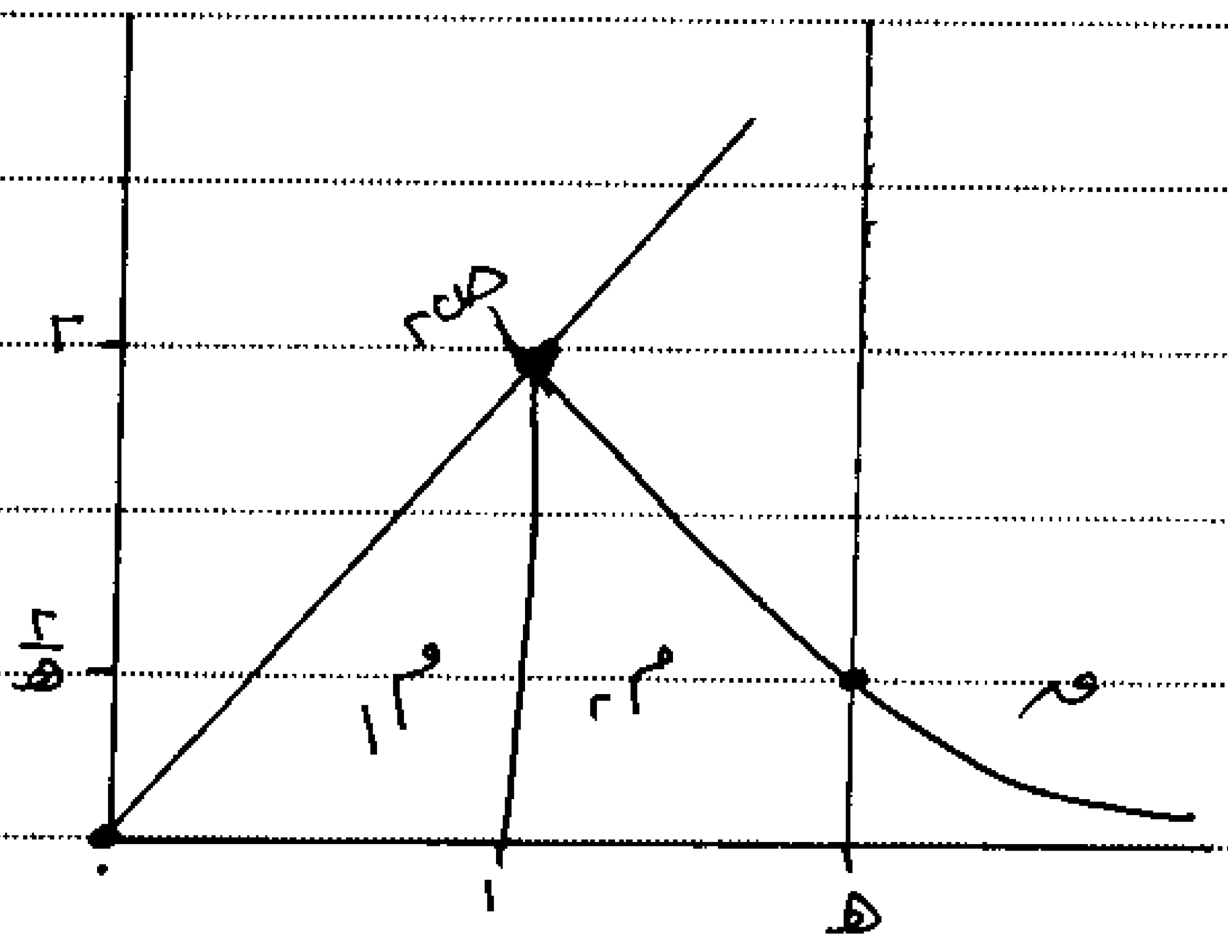
$= [-\frac{1}{2}جتا2س + جتاس]_0^{\frac{\pi}{3}} \oplus [-جتاس + \frac{1}{2}جتا2س]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}$

$(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}) - (-\frac{1}{2} + 1) \oplus (0 - \frac{1}{2}) - (-\frac{1}{2} - \frac{1}{4})$

$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ وحدة مساحة.

س٧) $ق(س) = \frac{2}{س}$ ، $ص_1$ = صفر ، $ص_2 = 2س$

$ق = ص_1$	$ق = ص_2$	$ص_1 = ص_2$
$\frac{2}{س} = 0$ لا يوجد	$\frac{2}{س} = 2س$	$0 = 2س$
نقط تقاطع	$س^2 = 1$	س = ٠
	س = ١ ، س = −١ تهمل (١،٢)	(٠،٠)



$م = \int_0^1 (ص_2 - ص_1)\,دس + \int_1^{هـ} (ق - ص_1)\,دس$

$= \int_0^1 2س\,دس \oplus \int_1^{هـ} \frac{2}{س}\,دس$

$[س^2]_0^1 \oplus 2[لو_{هـ}|س|]_1^{هـ}$

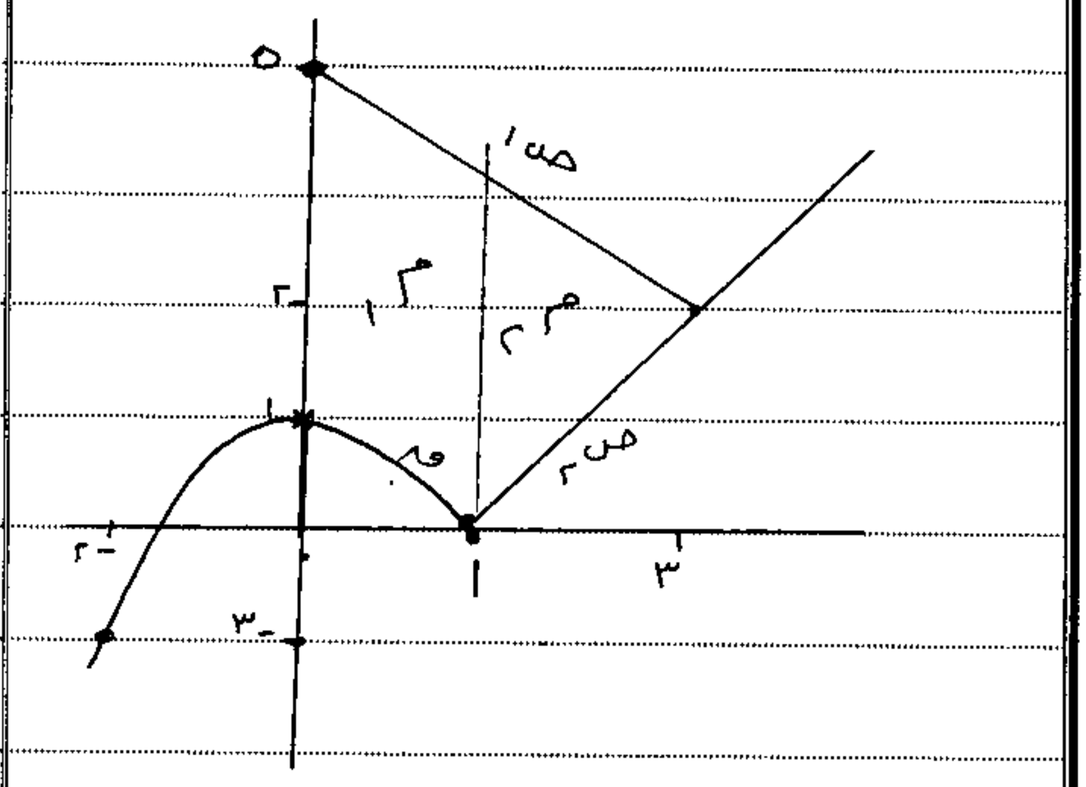
$1 \oplus 2لو_{هـ}هـ - 2لو_{هـ}1$

$1 + 2 = 3$ وحدة مساحة

س٨) $ق(س) = 1 - س^2$ ، $ص_1 = 5 - س$ ، $ص_2 = س - 1$

$ق = ص_1$	$ق = ص_2$	$ص_1 = ص_2$
$1 - س^2 = 5 - س$	$1 - س^2 = س - 1$	$5 - س = س - 1$
$س^2 - س + 4 = 0$	$س^2 + س - 2 = 0$	$2س = 6$
ليس لها حل	$(س + 2)(س - 1) = 0$	س = ٣
	س = ١ (١،٠)	(٣،٢)
	س = −٢	

منهاجي
متعة التعليم الهادف



$م = م_1 + م_2 + م_3$

$= \int_{-2}^{0} (هـ - ص_1)\,دس + \int_{0}^{1} (ص_2 - ص_1)\,دس + \int_{1}^{3} (ل - ص_1)\,دس$

$= \int_{-2}^{0} (س^3 + س + 1)\,دس \oplus \int_{0}^{1} (س^2 + س + 5 - س^3 - 1)\,دس \oplus \int_{1}^{3} (ل - ص_1)\,دس$

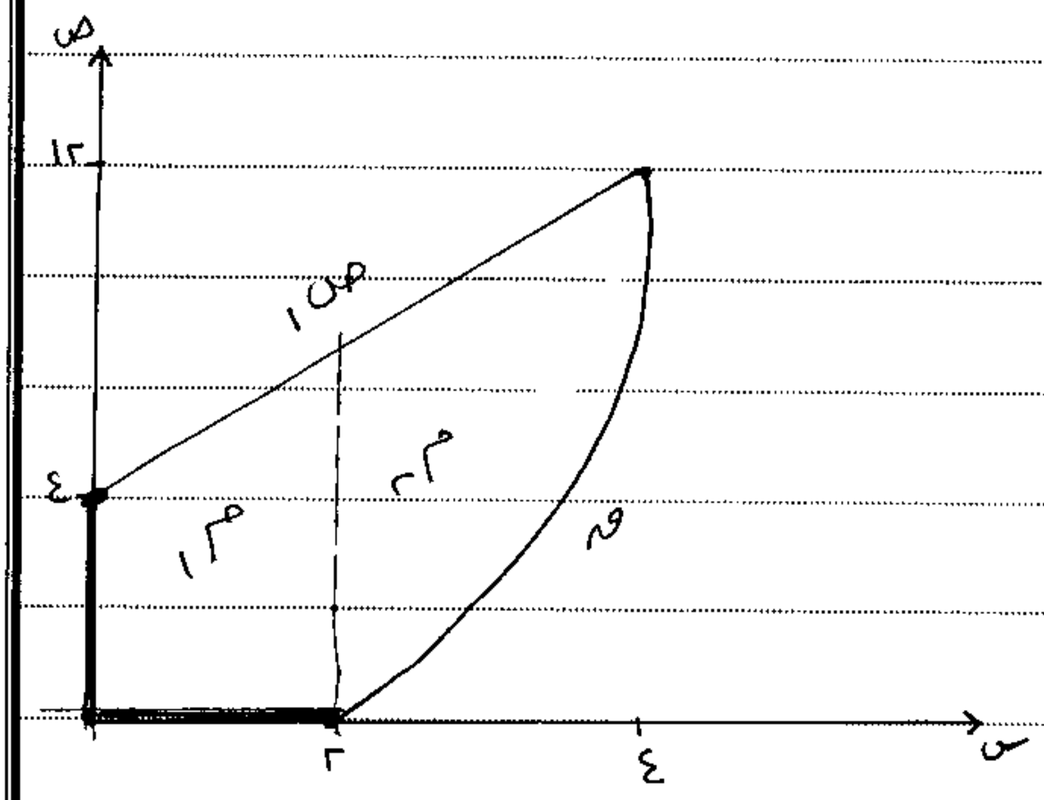
$= \left[\frac{س^4}{4} + \frac{س^2}{2} + س\right]_{-2}^{0} \oplus \left[\frac{س^3}{3} + \frac{س^2}{2} + 4س\right]_{0}^{1} \oplus$ صفر $- (4 + 2)$

$\oplus (9 + \frac{9}{2} + 12) - (\frac{8}{3} + 2 + 8)$

$= 6 + \frac{77}{6} - \frac{113}{6} =$ وحدة مساحة

$م_1 = \int_{0}^{1} (ص_1 - هـ)\,دس$ نقط) $هـ(س) = س^2 - 4$ $ص_1 = 3س + 4$ $ص_2 = 0$

$هـ = ص_1$	$ص_1 = ص_2$	$هـ = ص_2$
$س^2 - 4 = 3س + 4$	$3س + 4 = 0$	$س^2 - 4 = 0$
$س^2 - 3س - 8 = 0$	$س = -2$	$(س - 2)(س + 2) = 0$
$(س - 4)(س + 2) = 0$	مرفوض	$س = 2$ $(2, 0)$
$س = 4$ $(4, 12)$		$س = -2$ مرفوض
$س = -2$ مرفوض		



$م = \int_{2}^{4} (ص_1 - ص_2)\,دس + \int_{4}^{9} (ص_1 - هـ)\,دس$

$م = \int_{2}^{4} 3س + 4\,دس \oplus \int_{4}^{9} 3س + 4 - س^2 + 3\,دس$

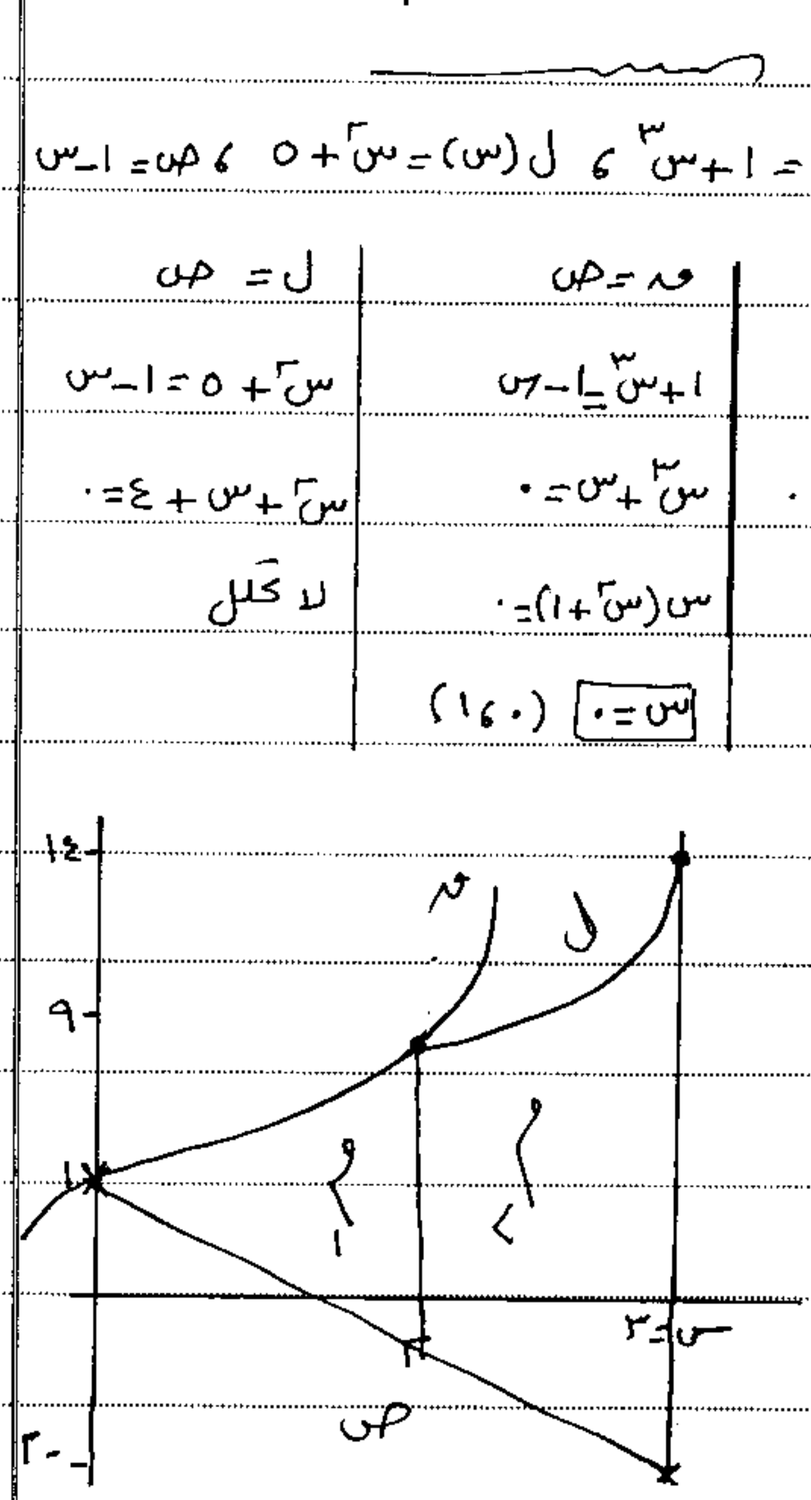
$\left[\frac{3}{2}س^2 + 4س\right]_{2}^{4} \oplus \left[4س + \frac{3}{2}س^2 - \frac{1}{3}س^3\right]_{4}^{9}$

$12 \oplus (36 - \frac{243}{3} + \frac{81}{2}) - (16 + \frac{64}{3} - \frac{8}{3} + 8)$

$12 \oplus \frac{28}{3} =$ وحدة مساحة

$ل(س) = س^2 + 5$ $ص = 1 - س$ $س)$ $هـ(س) = 1 + س^3$

$هـ = ل$	$هـ = ص$	$ل = ص$
$1 + س^3 = س^2 + 5$	$1 + س^3 = 1 - س$	$س^2 + 5 = 1 - س$
$س^3 - س^2 - 4 = 0$	$س^3 + س = 0$	$س^2 + س + 4 = 0$
$س = 2$	$س(س^2 + 1) = 0$	لا تحل
$(2, 9)$	$س = 0$ $(0, 1)$	



$م = \int_{2}^{4} ص_1 - ص_2\,دس + \int_{4}^{9} (ص_1 - هـ)\,دس$

$م = \int_{2}^{4} 3س + 4\,دس \oplus \int_{4}^{9} 3س + 4 - س^2\,دس$

$\left[\frac{3}{2}س^2 + 4س\right]_{2}^{4} \oplus \left[4س + \frac{3}{2}س^2 - \frac{1}{3}س^3\right]_{4}^{9}$

$8 + 4 \oplus (36 + \frac{243}{2} - 243) - (16 + 24 - \frac{64}{3})$

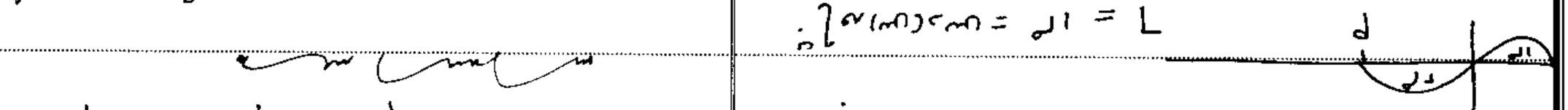
$12 \oplus \frac{28}{3} =$ وحدة مساحة

$\int_{0}^{8} f(x)\,dx = 8 \Rightarrow \int_{8}^{0} f(x)\,dx = -8$

$\int_{0}^{8} f(x)\,dx + \int_{8}^{12} f(x)\,dx = 6 \Rightarrow 8 + \int_{8}^{12} f(x)\,dx = 6$

$\int_{8}^{12} f(x)\,dx = -2$

$\int_{0}^{12} f(x)\,dx = 8 + (-2) = 6$



$\int_{0}^{12} f(x)\,dx = \frac{1}{2}(4)(8) + \frac{1}{2}(4)(8) = 32$

$\int_{0}^{12} (f(x) - 2)\,dx = \int_{0}^{12} f(x)\,dx - \int_{0}^{12} 2\,dx = 32 - 2x \Big|_{0}^{12} = 32 - 24 = 8$

$\int_{0}^{12} (f(x) - x)\,dx = \int_{0}^{12} f(x)\,dx - \int_{0}^{12} x\,dx = 32 - \frac{x^2}{2} \Big|_{0}^{12} = 32 - 72 = -40$

$\int_{0}^{12} (f(x) - 3)\,dx = \int_{0}^{12} f(x)\,dx - \int_{0}^{12} 3\,dx = 32 - 3x \Big|_{0}^{12} = 32 - 36 = -4$

$\int_{0}^{12} (f(x) - 4)\,dx = \int_{0}^{12} f(x)\,dx - \int_{0}^{12} 4\,dx = 32 - 4x \Big|_{0}^{12} = 32 - 48 = -16$

$\int_{0}^{12} (f(x) - 5)\,dx = \int_{0}^{12} f(x)\,dx - \int_{0}^{12} 5\,dx = 32 - 5x \Big|_{0}^{12} = 32 - 60 = -28$

$\int_{0}^{12} (f(x) -

الفصل الثالث : تطبيقات التكامل

ثانياً : المعادلات التفاضلية

تدريب (١) :

$(س^{٢}-٣س)\,دص = هـ^{ص}(س^{٢}+س-١٢)\,دس$

$\frac{دص}{هـ^{ص}} = \frac{(س-٣)(س+٤)}{س(س-٣)}\,دس$

$\int هـ^{-ص}\,دص = \int \frac{س+٤}{س}\,دس$

$-هـ^{-ص} = \int ١ + \frac{٤}{س}\,دس$

$-هـ^{-ص} = س + ٤\ لو_{هـ}|س| + ج$

$ص = -لو_{هـ}(-س - ٤\ لو_{هـ}|س| + ج)$

تدريب (٢) ميل الحمودي $= س\sqrt{٣+لو_{هـ}س}$

$ميل\ العمودي = \frac{-١}{ميل\ الحمودي}$

$\frac{دص}{دس} = \frac{-١}{س\sqrt{٣+لو_{هـ}س}}$

$\int دص = \int \frac{-١}{س\sqrt{٣+لو_{هـ}س}}\,دس$

$ع = \sqrt{٣+لو_{هـ}س} \quad \Leftarrow \quad ع^{٢} = ٣+لو_{هـ}س$

$٢ع\,دع = \frac{١}{س}\,دس$

$ص = \int \frac{-٢ع}{ع}\,دع$

$ص = \int -٢\,دع \quad \Leftarrow \quad ص = -٢ع + ج$

$ص = -٢\sqrt{٣+لو_{هـ}س} + ج$

$(هـ\ ٤٦) \Leftarrow ٤ = -٢\sqrt{٣+لو_{هـ}هـ} + ج$

$ج = ٨$

$ص = -٢\sqrt{٣+لو_{هـ}س} + ٨$

تدريب (٣)

$ن = ٧ع \quad \Leftarrow \quad \frac{دع}{دن} = ٧ع \qquad ع(٠) = ٩$

$\int ع^{\frac{-١}{٢}}\,دع = \int دن \qquad ف(٤) = ٨٠$

$٢ع^{\frac{١}{٢}} = ن + ج \qquad ف(٣) = ؟$

$٩٧٢ = ٠ + ج$

$ج = ٦$

$٢ع^{\frac{١}{٢}} = ن + ٦$

$ع = \frac{(ن+٦)^{٢}}{٤} \quad \Leftarrow \quad ع^{\frac{١}{٢}} = \frac{ن+٦}{٢}$

$\int دف = \int \frac{(ن+٦)^{٢}}{٤}\,دن$

$ف = \frac{(ن+٦)^{٣}}{١٢} + ج$

$ف(٤) = ٨٠ \quad \Leftarrow \quad ٨٠ = \frac{١٠٠٠}{١٢} + ج$

$ج = -\frac{٤٠}{١٢}$

$ف(ن) = \frac{(ن+٦)^{٣}}{١٢} - \frac{٤٠}{١٢}$

$ف(٢) = \frac{٥١٢}{١٢} - \frac{٤٠}{١٢} = \frac{٤٧٢}{١٢} = ٣\frac{١١٨}{١٢}$

تدريب (٤) $ع(٠) = ٤٥\ م/ث$

$ن = -١٠$

$\int دع = \int -١٠\,دن \quad \Leftarrow \quad ع = -١٠ن + ج$

$ع(٠) = ٤٠ \quad \Leftarrow \quad ج = ٤٠$

$\frac{دف}{دن} = -١٠ن + ٤٠ \quad \Leftarrow \quad \int دف = \int -١٠ن + ٤٠\,دن$

$ف = -٥ن^{٢} + ٤٠ن + ج$

$ف(١٠) = ٤٥ \quad \Leftarrow \quad ج = ٤٥$

$ف(ن) = -٥ن^{٢} + ٤٠ن + ٤٥$

$ف = صفر \qquad ن = ؟؟$

$-٥ن^{٢} + ٤٠ن + ٤٥ = ٠$

$ن^{٢} - ٨ن - ٩ = ٠ \qquad (ن+١)(ن-٩) = ٠$

$ن = -١$ مرفوض $\qquad ن = ٩$

تمارين ومسائل صفحة (٣.٨ - ٣.٩)

س)

٩) $س^{٣}\,د ص - ص\,د س = صفر$

$س^{٣}\,د ص = ص\,د س$

$\frac{١}{ص}\,د ص = \frac{١}{س^{٣}}\,د س$

$لو|ص| = \frac{-١}{٢س^{٢}} + ﺟ$

$|ص| = هـ^{\frac{-١}{٢س^{٢}}+ﺟ}$

ب) $د س - ٣\,د ص = ﺟا س\,د س$

$٣\,د ص = د س - ﺟا س\,د س$

$٣ ص = س - ﺟتا س + ﺟ$

$ص = \frac{١}{٣}س - \frac{١}{٣}ﺟتا س + ﺟ$

جـ) $هـ^{-ص}ﺟا س - \frac{د ص}{د س}ﺟتا^{٢}س = صفر$

$\frac{د ص}{د س} = \frac{هـ^{-ص}ﺟا س}{ﺟتا^{٢}س}$

$\frac{١}{هـ^{ص}}\,د ص = ﻇا س\,د س$

$هـ^{ص} = ﻗا س + ﺟ$

$ص = لو_{هـ}(ﻗا س + ﺟ)$.

د) $ﻗا^{٢}\frac{س}{٢}\,د ص - ﺟا^{٢}\frac{س}{٢}\,د س = صفر$

$ﻗا^{٢}\frac{س}{٢}\,د ص = ﺟا^{٢}\frac{س}{٢}\,د س$

$د ص = \frac{ﺟا^{٢}\frac{س}{٢}\,د س}{ﻗا^{٢}\frac{س}{٢}}$

$د ص = ﺟا^{٢}\frac{س}{٢}ﺟتا^{٢}\frac{س}{٢}\,د س$

$د ص = (ﺟا\frac{س}{٢}ﺟتا\frac{س}{٢})^{٢}\,د س$

$|د س = \frac{١}{٤}ﺟا^{٢}س\,د س$

$ص = \frac{١}{٨}(١ - ﺟتا٢س)\,د س$

$ص = \frac{١}{٨}(س - \frac{١}{٢}ﺟا٢س) + ﺟ$

هـ) $\frac{د ص}{د س} = ١ - ص + س^{٢} - ص س^{٢}$

$\frac{د ص}{د س} = (١ - ص) + س^{٢}(١ - ص)$

$\frac{د ص}{د س} = (١ - ص)(س^{٢} + ١)$

$|\frac{١}{١ - ص}\,د ص = |(س^{٢} + ١)\,د س$

$-لو|١ - ص| = \frac{س^{٣}}{٣} + س + ﺟ$

و) $(س^{٢} + ٣س)\frac{د ص}{د س} = هـ^{-٥ص}(س + ١)(س^{٢} - ٩)$

$\frac{د ص}{د س} = \frac{(س + ١)(س^{٢} - ٩)}{هـ^{٥ص}\,س\,(س + ٣)}$

$هـ^{٥ص}\,د ص = \frac{(س + ١)(س - ٣)\cancel{(س + ٣)}}{س\,\cancel{(س + ٣)}}\,د س$

$\frac{١}{٥}هـ^{٥ص} = |(س - ٢ - \frac{٣}{س})\,د س$

$\frac{١}{٥}هـ^{٥ص} = \frac{س^{٢}}{٢} - ٢س - ٣لو_{هـ}|س| + ﺟ$

$هـ^{٥ص} = س^{٢} - ٤س - ٦لو_{هـ}|س| + ﺟ$

$٥ص = لو_{هـ}(س^{٢} - ٤س - ٦لو_{هـ}|س| + ﺟ)$

$ص = \frac{١}{٥}لو_{هـ}(س^{٢} - ٤س - ٦لو_{هـ}|س| + ﺟ)$

منهاجي
متعة التعليم الهادف

$\frac{د}{د ن}$ (ح$_ن^3$) $= \frac{-٥٠٠}{(١+ن)^٣}$

$د_ن = [\frac{-٥٠٠}{(١+ن)^٣}]$ د ن

$د_ن = \frac{٥٠٠}{١+ن} + ثـ$

$د_٠ = ٢٥٠٠ \Leftarrow ٢٥٠٠ = \frac{٥٠٠}{١} + ثـ$

$ثـ = ٢٠٠٠$

$د_ن = \frac{٥٠٠}{١+ن} + ٢٠٠٠$

$د_٣ = \frac{٥٠٠}{٤} + ٢٠٠٠ =$ ٢١٢٥ دينار

$\frac{د ص}{د س}$ (ح$_س^3$) $= \frac{هـ^{س-ص}}{هـ^س + ١}$

$د ص = \frac{هـ^{س-ص}}{هـ^س + ١} \times$ د س

$\int هـ^ص د ص = \int \frac{هـ^س}{هـ^س + ١}$ د س

$هـ^ص = لو_هـ |هـ^س + ١| + ثـ$

$(٠،١) \Leftarrow ص = لو_هـ |هـ^س + ١| + ثـ$

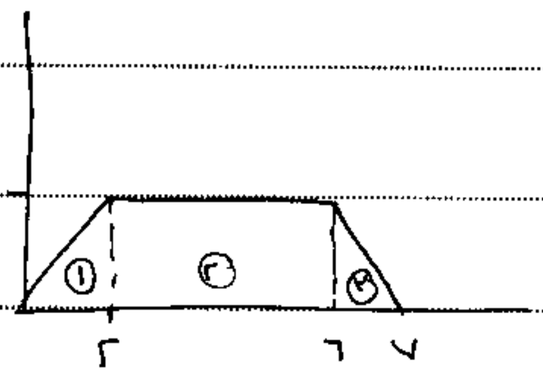
$ثـ = ١ - لو_هـ ١١$

$ص = لو_هـ |هـ^س + ١| + ١ - لو_هـ ١١$

$ص = لو_هـ (\frac{هـ^س + ١}{١١} + ١)$

المسافة المقطوعة في $[٠،٧]$

= المساحة تحت المنحنى



ف$_١$ = مساحة المثلث $= \frac{١}{٢} \times ٢ \times ٣٠ = ٣٠$

ف$_٢$ = مساحة المستطيل $= (٦-٢) \times ٣٠ = ١٢٠$

ف$_٣$ = مساحة المثلث $= \frac{١}{٢} \times ١ \times ٣٠ = ١٥$

المسافة المقطوعة $= ٣٠ + ١٢٠ + ١٥ =$ ١٦٥ م

ع$_ن^3$) $\frac{د ع}{د ن} = -٤ ع^{\frac{٣}{٢}} \Leftarrow$ ت$_ن = -٤ ع^{\frac{٣}{٢}}$

$\int ع^{-\frac{٣}{٢}}$ د ع $= \int -٤$ د ن

$-٢ ع^{-\frac{١}{٢}} = -٤ن + ثـ \Leftarrow \frac{-٢}{\sqrt{ع}} = -٤ن + ثـ$

ع$(٠) = ٤ \Leftarrow \frac{-٢}{\sqrt{٤}} = -٤ \times ٠ + ثـ \Leftarrow$ ثـ $= -١$

$\frac{-٢}{\sqrt{ع}} = -٤ن - ١ \Leftarrow \sqrt{ع} = \frac{٢}{٤ن+١}$

ع $= \frac{٤}{(٤ن+١)^٢} \Leftarrow$ د ف $= \int \frac{٤}{(٤ن+١)^٢}$ د ن

ف $= \frac{-٤}{٤(٤ن+١)^{-١}} + ثـ$

ف$(٠) = ٠ \Leftarrow \frac{-١}{١} + ثـ = ٠ \Leftarrow$ ثـ $= ١$

ف$(ن) = \frac{-١}{٤ن+١} + ١ \Leftarrow$ ف$(ن) = \frac{٤ن}{٤ن+١}$

ف$(ن) = \frac{٢}{٤ن+١} \times ٢ن \Leftarrow$ ف$'(ن) = \frac{٢ن\sqrt{٤}}{(٤ن+١)^{\frac{٣}{٢}}}$ #

$ع(ن) = ٢ × ١٠^{-٥}$ هـ $٠٫٠٥ ن$

$ع(١) = ٢ × ١٠^{-٥}$ هـ

$ع(٠٫٤) = ٢ × ١٠^{-٥}$ هـ $٠٫٠٥ × ٠٫٤$

$= ٢ × ١٠^{-٥}$ هـ

$= ٠٫٠٠٠٠٥٤$ نسمة

$ع(ن) = ٤٠٠ ن$ هـ $٠٫٠٥ ن$

فى (١) $ع = ٨٠$ فى $ن$ ، $ع$ يتناسب عكسيا مع $ن^٢$

$ع = \frac{ك}{ن^٢}$

$٨٠ = \frac{ك}{١}$

$ك = ٨٠$

$ع = \frac{٨٠}{ن^٢}$

فى (٢) $ع = \frac{٨٠}{٤} = ٢٠$ هـ

$ع(ن) = ٢٠ ن$ هـ $٠٫٠٥ ن$

فى (١) $ع = ٢٠ × ١ = ٢٠$ هـ

$ع(ن) = ٢٠ ن + ٠٫٠٥ ن^٢$ هـ

عند الوضع الاتزانى $ع = ٠$

$٠ = ٢٠ ن + ٠٫٠٥ ن^٢$

$ن = ٠$ ⇐ $ن = ٤٠٠$

$ع(٣) = ٥٧٦ + ٣٢٠ + ٤٥ = ٩٤١$ هـ

$\frac{ع}{ن^٢} = \frac{٩٤١}{٣^٢} = ١٠٤٫٥$ هـ / م^٢

$ع(٤) = ١٠٤٫٥ × ٤^٢ = ١٦٨٠$ هـ

$ع(٤) = ١٦٨٠ × ٠٫٠٥ = ٨٤$ جول

$\frac{ع}{ن^٢} = \frac{ك + ٠٫٠٥ ن^٢}{ن^٢}$

$\frac{ع}{ن^٢} = \frac{ك}{ن^٢} + ٠٫٠٥$

$\frac{ك}{ن^٢} = \frac{ع}{ن^٢} - ٠٫٠٥$

$ك = ن^٢ (\frac{ع}{ن^٢} - ٠٫٠٥)$

$ك = ٤^٢ (٢١ - ٠٫٠٥ × ٤)$

$ك = ١٦ × ٢٠$

$ك = ٣٢٠$ هـ

$ع = \frac{٣٢٠}{ن^٢} + ٠٫٠٥ ن^٢$

$\frac{ع}{ن^٢} = \frac{٣٢٠}{ن^٢} + ٠٫٠٥$

$\frac{ع}{ن^٢} = \frac{٣٢٠}{٤^٢} + ٠٫٠٥ = ٢١$

$\frac{ع}{ن^٢} = \frac{٣٢٠}{٨^٢} + ٠٫٠٥ = ٥٫٠٥$

$\frac{ع}{ن^٢}$ تقل بمقدار $٢١ - ٥٫٠٥ = ١٥٫٩٥$ هـ / م^٢

(٥١)

أسئلة الوحدة

أ) $\int_{2}^{3} (4س+1)^{\frac{1}{2}} دس = \frac{2}{3} \left[\frac{(4س+1)^{\frac{3}{2}}}{4} \right]_{2}^{3}$

$= \frac{2}{12} \sqrt[3]{13^2} - \frac{54}{12} = \frac{1}{6} (\sqrt[3]{13^2} - 27)$

ب) $\int \frac{س \, قا^2 س - س \, ظا^2 س}{\sqrt[3]{س^2}} دس$

$= \int \frac{س (قا^2 س - ظا^2 س)}{\sqrt[3]{س^2}} دس$

$= \int \frac{س}{س^{\frac{2}{3}}} دس = \int س^{\frac{2}{3}} دس$

$= \frac{3}{5} \sqrt[3]{س^5} + ثـ$

جـ) $\int \frac{\sqrt{س^2 - س^4}}{س^5} دس$ بإخراج $س^4$ عامل مشترك.

$= \int \frac{\sqrt{س^4 (س^{-2} - 1)}}{س^5} دس = \int \frac{س^2 \sqrt{س^{-2} - 1}}{س^5} دس$

$\int س^{-3} (س^{-2} - 1)^{\frac{1}{2}} دس$

نفرض $ص = س^{-2} - 1$

$د ص = -2 س^{-3} دس$

$= -\frac{1}{2} \int ص^{\frac{1}{2}} د ص$

$= -\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} ص^{\frac{3}{2}} + ثـ$

$= -\frac{1}{3} \sqrt{ص^3} + ثـ = -\frac{1}{3} \sqrt{(س^{-2} - 1)^3} + ثـ$

د) $\int ظتا س \, لو_{هـ} جا س \, دس$

$ص = لو_{هـ} جا س$ ، $د ص = \frac{جتا س \, دس}{جا س}$

$د ص = ظتا س \, دس$

$\int ص \, د ص = \frac{ص^2}{2} + ثـ = \frac{(لو_{هـ} جا س)^2}{2} + ثـ$

هـ) $\int (س^8 - 4س)^6 دس$

$= \int (س (س^7 - 4))^6 دس$

$= \int س^6 (س^7 - 4)^6 دس$ نفرض $ص = س^7 - 4$

$د ص = 7 س^6 دس$

$= \frac{1}{7} \int ص^6 د ص = \frac{1}{49} ص^7 + ثـ$

$= \frac{(س^7 - 4)^7}{49} + ثـ$

و) $\int قا^4 س \, لو_{هـ} ظا س \, دس$

$ص = ظا س$ $د ص = قا^2 س \, دس$

$\int قا^2 س \, لو_{هـ} ص \, د ص$

$\int (ظا^2 س + 1) \, لو_{هـ} ص \, د ص$

$د ه = \frac{1}{ص} د ص$ $ه = لو_{هـ} ص$

$د ه = (ص^2 + 1) د ص$ $هـ = \frac{ص^3}{3} + ص$

$\int (ص^2 + 1) \, لو_{هـ} ص \, د ص = (\frac{ص^3}{3} + ص) لو_{هـ} ص - \int (\frac{ص^2}{3} + 1) د ص$

$= (\frac{ص^3}{3} + ص) لو_{هـ} ص - \frac{ص^3}{9} - ص + ثـ$

$= (\frac{ظا^3 س}{3} + ظا س) لو_{هـ} ظا س - \frac{ظا^2 س}{9} - ظا س + ثـ$

ز) $\int \frac{\sqrt{2س^5 - س^3}}{س^3} دس = \int س \sqrt{2س^2 - 1} \, دس$

$ص = 2س^2 - 1 \Leftarrow د ص = 4س \, دس$

$\int \frac{1}{4} ص^{\frac{1}{2}} د ص = \frac{1}{4} \times \frac{2}{3} ص^{\frac{3}{2}} + ثـ$

$= \frac{3}{16} \sqrt[3]{(2س^2 - 1)^4} + ثـ$

س٢) $٣ ظاص - \frac{دص}{دس} قاس = ٠$

$\frac{دص}{دس} قاس = ٣ ظاص$

$\frac{١}{ظاص} دص = \frac{٣}{قاس} دس$

$\int ظتاص \ دص = \int ٣جتاس \ دس$

$= ٣جاس + جـ$

س٣) $ص^٢ = لو_هـ س ص - هـ^{س^٢}$ ، $\frac{دص}{دس} = ؟$

$ص^٢ = لو_هـ س + لو_هـ ص - هـ^{س^٢}$

$٢ص ص' = \frac{١}{س} + \frac{ص'}{ص} - ٢س هـ^{س^٢}$

$٢ص ص' - \frac{ص'}{ص} = \frac{١}{س} - ٢س هـ^{س^٢}$

$ص' (٢ص - \frac{١}{ص}) = \frac{١}{س} - ٢س هـ^{س^٢}$

$ص' = \frac{\frac{١}{س} - ٢س هـ^{س^٢}}{٢ص - \frac{١}{ص}}$

$\frac{دص}{دس} = \frac{ص(١ - ٢س^٢ هـ^{س^٢})}{س(٢ص^٢ - ١)}$

س٤) $م(س) = س^٣ + ب س^٢ - ١$

$م'(س) = ق(س) = ٣س^٢ + ٢ب س$

$ق(٢) = ٢٤ \Leftarrow ١٢ + ٤ب = ٢٤$

$ب = ٣$

س٥) م(س) ، هـ(س) معكوسين لمشتقة ق(س)

$م(س) - هـ(س) = ثابت = جـ$

$\int_{-١}^{٣} جـ \ دس = ١٢ \Leftarrow جـ(٣ - -١) = ١٢$

$جـ = ٣$

$\int_{٠}^{٤} ٢س م(س) دس + \int_{٤}^{٠} ٢س هـ(س) دس$

$= \int_{٠}^{٤} ٢س م(س) دس - \int_{٠}^{٤} ٢س هـ(س) دس$

$= \int_{٠}^{٤} ٢س (م(س) - هـ(س)) دس$

ثابت = جـ = ٣

$\int_{٠}^{٤} ٦س \ دس = ٣س^٢]_{٠}^{٤} = ٤٨$

س٦) $\int_{٣}^{١} (٢ق(س) + \int_{٠}^{٢} ٢م \ دم) دس = ١٤$

$\leftarrow م^٢]_{٠}^{٢} = ٤$

$\int_{٣}^{١} (٢ق(س) + ٤) دس = ١٤$

$\int_{٣}^{١} ٢ق(س) دس + ٤ \times -٢ = ١٤$

$\int_{٣}^{١} ق(س) دس = ١١ \Leftarrow \int_{١}^{٣} ٣ق(س) دس = -٣٣$

س٧) $ق(س) = س^٢ - \int (٣س^٢ - \int_{٠}^{١} ٢ص \ دص) دس$

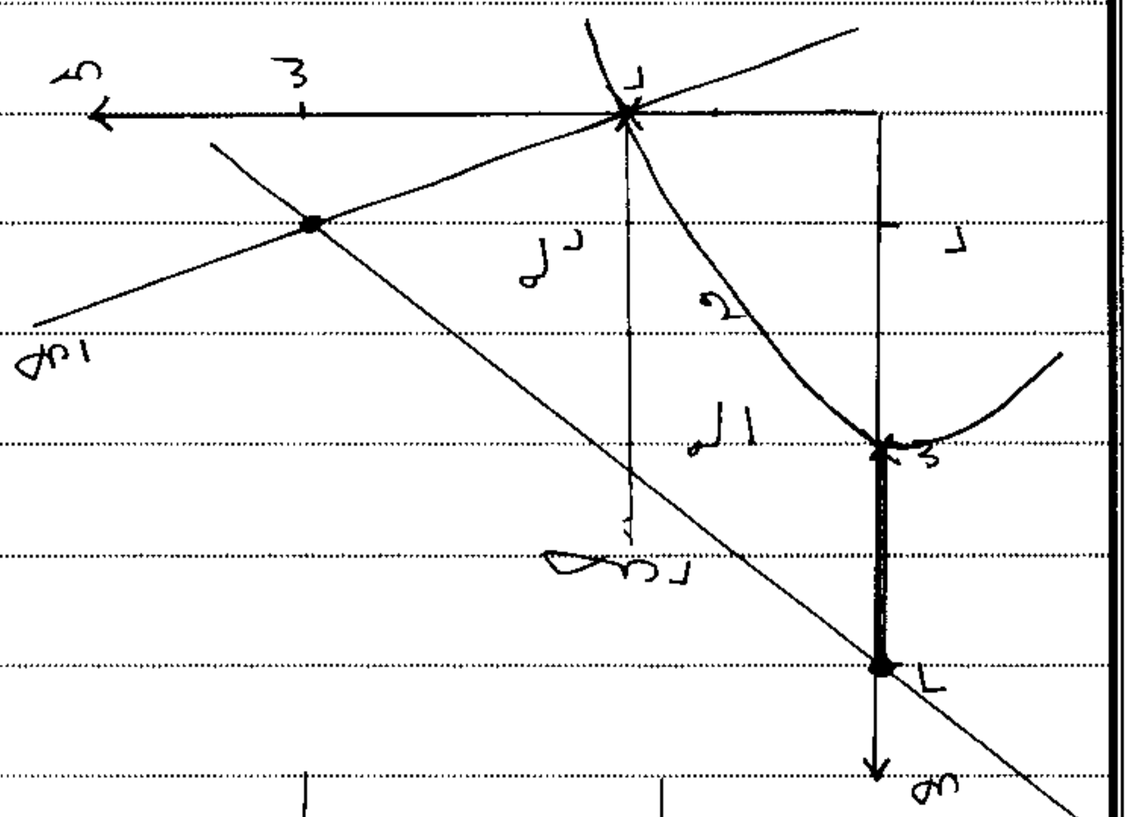
$\leftarrow ص^٢]_{٠}^{١} = ١$

$قَ(س) = ؟$

$ق(س) = س^٢ - \int ٣س^٢ - ١ \ دس$

$قَ(س) = ٢س - (٣س^٢ - ١)$

$قَ(س) = ٢س - ٣س^٢ + ١$



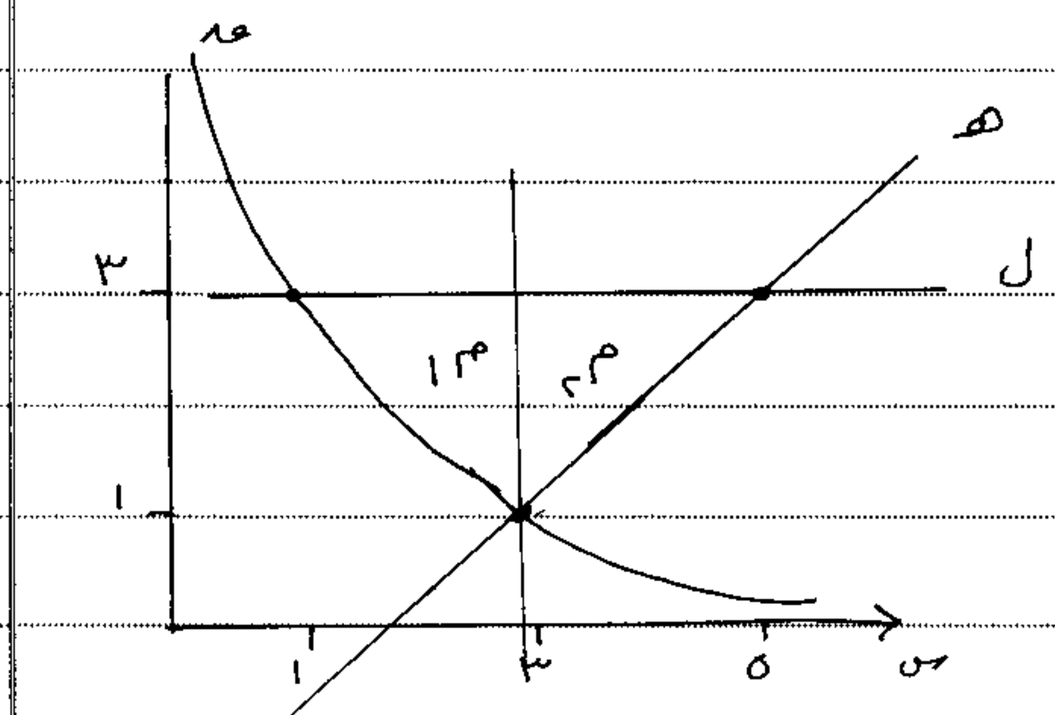
dahabcu
ذهب الطلاب الجدد

منهاجي
متعة التعليم الهادف

س١٢) $هـ(س) = \frac{٣}{س}$ ، $ه(س) = ٢س - ٣$

$ل(س) = ٣$

$هـ = ه$	$ه = ل$	$هـ = ل$
$\frac{٣}{س} = ٢س - ٣$	$\frac{٣}{س} = ٣$	$س - ٣ = ٣$
	$س = ١$	$س = ٥$
$س = ٣$ $(١، ٣)$	$(١، ٣)$	$(٥، ٣)$
$س = -١$ $(-١، -١٣)$		



$م = م_١ + م_٢$

$= \int_{١}^{٣} (ل - ه) \, دس + \int_{٣}^{٥} (ل - هـ) \, دس$

$= \int_{١}^{٣} ٣ - \frac{٣}{س} \, دس \oplus \int_{٣}^{٥} ٣ - ٢س + ٢ \, دس$

$= [٣س - ٣ لو_{هـ} |س|]_{١}^{٣} \oplus [٥س - \frac{٢س^{٢}}{٢}]_{٣}^{٥}$

$(٩ - ٣ لو_{هـ} ٣) - (صفر) \oplus (٢٥ - \frac{٢٥}{٢}) - (١٥ - \frac{٩}{٢})$

$٦ - ٣ لو_{هـ} ٣ \oplus ٢$

$٨ - ٣ لو_{هـ} ٣$

س١٣) مساحة المنطقة المظللة = مساحة المثلث $- \int_{-٢}^{١} ه(س) \, دس$

مساحة المثلث $= \frac{١}{٢} \times ٦ \times ٤ = ١٢$

$٢ - \frac{١}{٣} ص^{٢} = ٠ \Leftarrow ص = ٢ ٦ - ٢$

$م = \int_{-٢}^{٢} (٢ - \frac{١}{٣} ص^{٢}) \, دس$

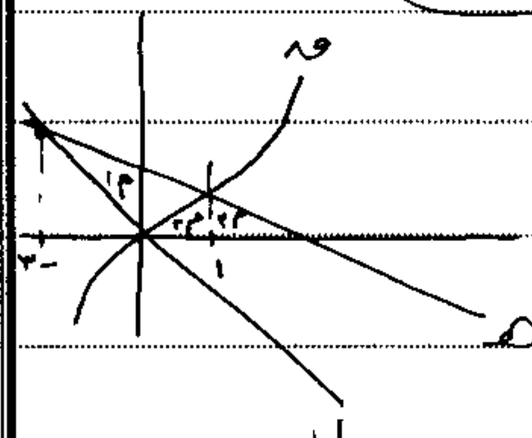
$= ٢س - \frac{١}{٩} س^{٣}]_{-٢}^{٢}$

$(\frac{٨}{٦} - ٤) - (-٤ + \frac{٨}{٦}) = \frac{١٦}{٣}$

مساحة المنطقة المظللة $= ١٢ - \frac{١٦}{٣}$

$= \frac{٢٠}{٣}$

التكلفة $= \frac{١}{٢} \times \frac{٢٠}{٣} = \frac{١٠}{٣}$ من الدينار.



س١٤) $م = \int_{-٣}^{١} (هـ - ل) \, دس$

$= \int_{-٣}^{١} ٣ - ص + ٢س \, دس$

$= [٣ص + \frac{ص^{٢}}{٢}]_{-٣}^{١}$

$(صفر) - (-٩ + \frac{٩}{٢}) = \frac{٩}{٢}$

$م_٢ = \int_{١}^{٣} ه(س) \, دس \leftarrow م_٢ = \int_{١}^{٣} ٢س^{-٣} \, دس = [\frac{-١}{٢} س^{-٤}]_{١}^{٣} = \frac{١}{٢}$

$م_٣ = \int_{١}^{٣} ٣ - ص \, دس$

$= [٣س - \frac{ص^{٢}}{٢}]_{١}^{٣}$

$(٩ - \frac{٩}{٢}) - (٣ - \frac{١}{٢}) = ٢$

$م = م_١ + م_٢ + م_٣$

$= \frac{٩}{٢} + \frac{١}{٢} + ٢ = ٧$ وحدة مساحة

منهاجي
متعة التعليم الهادف

س١٥) م١ = ١٠ ⟸ $\int_{-3}^{0}$ ق(س) دس = ١٠

م٢ = ٤ ، $\int_{0}^{1}$ ق(س) دس = −٤

$\int_{0}^{2}$ س ق(١ − س²) دس

ص = ١ − س²   دص = −٢س دس

س = ٠   ص = ١

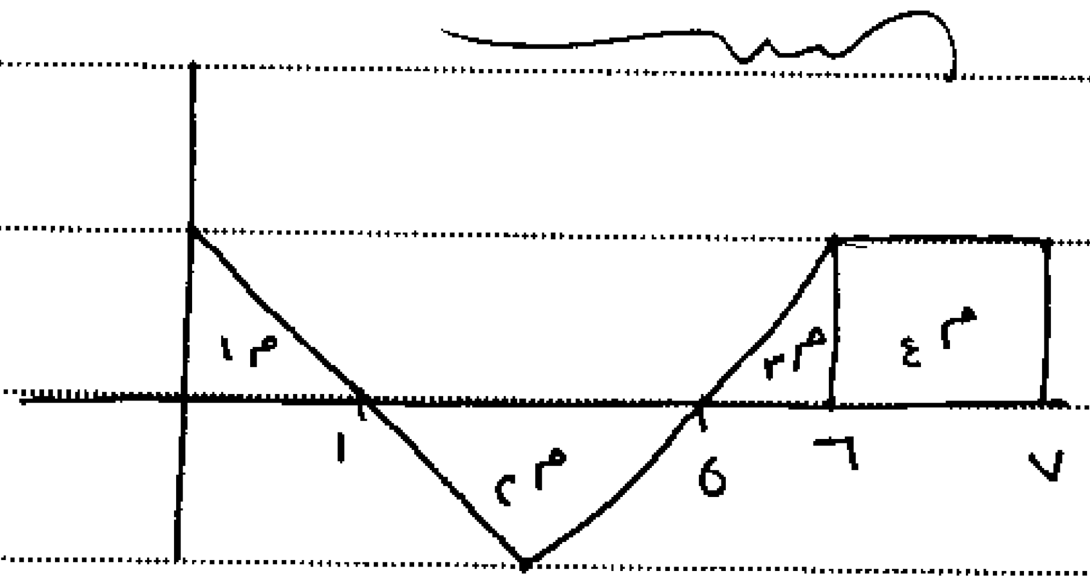
س = ٢   ص = −٣

$\int_{1}^{-3} -\frac{1}{2}$ ق(ص) دص

= $-\frac{1}{2}$ ($\int_{1}^{0}$ ق(ص) دص + $\int_{0}^{-3}$ ق(ص) دص)

= $-\frac{1}{2}$ (+٤ + −١٠) = ٣

س١٦)



م١ = مساحة المثلث = $\frac{1}{2}$ × ١ × ١ = $\frac{1}{2}$

$\int_{0}^{1}$ ق(س) دس = $\frac{1}{2}$

م٢ = $\frac{1}{2}$ × ٢ × (٥ − ١) = ٤

$\int_{1}^{5}$ ق(س) دس = −٤

م٣ = $\frac{1}{2}$ × ١ × ١ = $\frac{1}{2}$

$\int_{5}^{6}$ ق(س) دس = $\frac{1}{2}$

م٤ = ١ × ١ = ١ ، $\int_{6}^{7}$ ق(س) دس = ١

$\int_{0}^{7}$ ق(س) دس = $\frac{1}{2}$ + ١ = $\frac{3}{2}$

أ) $\int_{0}^{7}$ ق(س) دس = $\int_{0}^{1}$ ق(س) دس + $\int_{1}^{5}$ ق(س) دس + $\int_{5}^{7}$ ق(س) دس

= $\frac{1}{2}$ + −٤ + $\frac{3}{2}$ = −٢

ب) $\int_{0}^{7}$ |ق(س)| دس = المساحة

= م١ + م٢ + م٣ + م٤ = $\frac{1}{2}$ + ٤ + ١ + $\frac{1}{2}$

= ٦ وحدة مساحة

جـ) | $\int_{0}^{7}$ ق(س) دس |

= | $\int_{0}^{1}$ ق(س) دس + $\int_{1}^{5}$ ق(س) دس + $\int_{5}^{7}$ ق(س) دس |

= | $\frac{1}{2}$ + −٤ + $\frac{3}{2}$ | = |١ − ٣| = ٢

س١٧) أ) ∫ جا√س جتا³√س دس

نفرض ص = √س   ص² = س   ٢ص دص = دس

∫ ٢ص جاص جتا³ص دص

= ∫ ٢ص جاص جتاص جتا²ص دص

= ∫ ٢ص × $\frac{1}{2}$ جا٢ص × $\frac{1}{2}$ (١ + جتا٢ص) دص

= ∫ $\frac{1}{2}$ ص (جا٢ص + جا٢ص جتا٢ص) دص

= ∫ $\frac{1}{2}$ ص (جا٢ص + $\frac{1}{2}$ جا٤ص) دص

ق = $\frac{1}{2}$ ص   دق = $\frac{1}{2}$ دص

دهـ = (جا٢ص + $\frac{1}{2}$ جا٤ص) دص   هـ = ($-\frac{1}{2}$ جتا٢ص − $\frac{1}{8}$ جتا٤ص)

= $\frac{1}{2}$ ص ($-\frac{1}{2}$ جتا٢ص − $\frac{1}{8}$ جتا٤ص) + ∫ $\frac{1}{2}$ ($\frac{1}{2}$ جتا٢ص + $\frac{1}{8}$ جتا٤ص) دص

= $\frac{1}{2}$ ص ($-\frac{1}{2}$ جتا٢ص − $\frac{1}{8}$ جتا٤ص) + $\frac{1}{2}$ ($\frac{1}{4}$ جا٢ص + $\frac{1}{32}$ جا٤ص) + جـ

= $\frac{1}{2}$ √س ($-\frac{1}{2}$ جتا٢√س + $\frac{1}{8}$ جتا٤√س) + $\frac{1}{2}$ ($\frac{1}{4}$ جا٢√س + $\frac{1}{32}$ جا٤√س) + جـ

ب) $\int س \sqrt[3]{س^2+1}\ دس$

$ص = س^2 + 1 \qquad دص = 2س\ دس$

$\int \frac{1}{2} ص^{\frac{1}{3}}\ دص = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} ص^{\frac{4}{3}} + جـ$

$= \frac{3}{8} \sqrt[3]{(س^2+1)^4} + جـ$

جـ) $\int_{0}^{\frac{\pi}{6}} \frac{قا^4 س}{ظا^2 س - 3 ظا س + 2}\ دس$

$ص = ظا س \qquad دص = قا^2 س\ دس$

$س = 0 \leftarrow ص = 0 \quad ، \quad س = \frac{\pi}{6} \ ، \ ص = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\int \frac{قا^2 س}{ص^2 - 3ص + 2}\ دص = \int \frac{ظا^2 س + 1}{ص^2 - 3ص + 2}\ دص$

$= \int_{0}^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{ص^2 + 1}{ص^2 - 3ص + 2}\ دص$

$= \int_{0}^{\frac{1}{\sqrt{3}}} 1\ دص + \int_{0}^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{3ص - 1}{ص^2 - 3ص + 2}\ دص$

$= \int_{0}^{\frac{1}{\sqrt{3}}} 1\ دص + \int_{0}^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{5}{(ص-2)}\ دص + \int_{0}^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{-2}{(ص-1)}\ دص$

$= ص\Big]_{0}^{\frac{1}{\sqrt{3}}} + 5\ لو_{هـ}|ص-2|\Big]_{0}^{\frac{1}{\sqrt{3}}} - 2\ لو_{هـ}|ص-1|\Big]_{0}^{\frac{1}{\sqrt{3}}}$

$\frac{1}{\sqrt{3}} + 5\ لو_{هـ}\left|\frac{1}{\sqrt{3}} - 2\right| - 5\ لو_{هـ} 2 - 2\ لو_{هـ}\left|\frac{1}{\sqrt{3}} - 1\right|$

$= \frac{1}{\sqrt{3}} + 5\ لو_{هـ}\left|\frac{1}{\sqrt{3}} - 2\right| - 5\ لو_{هـ} 2 - 2\ لو_{هـ}\left|\frac{1}{\sqrt{3}} - 1\right|$

د) $\int \frac{ظتا س\ قتا س}{9 - 4 قتا^2 س}\ دس$

$ص = قتا س \qquad دص = - قتا س\ ظتا س\ دس$

$= \int \frac{-1}{9 - 4ص^2}\ دص = \int \frac{1}{4ص^2 - 9}\ دص$

$= \int \frac{\frac{1}{6}}{2ص - 3}\ دص + \int \frac{-\frac{1}{6}}{2ص + 3}\ دص$

$= \frac{1}{12} لو_{هـ}|2ص - 3| + \frac{-1}{12} لو_{هـ}|2ص + 3| + جـ$

$= \frac{1}{12} لو_{هـ}\left|\frac{2 قتا س - 3}{2 قتا س + 3}\right| + جـ$

هـ) $\int_{0}^{2} س^4\ هـ^{س^3 + لو_{هـ} س}\ دس$

$= \int_{0}^{2} س^4 \times هـ^{س^3} \times هـ^{لو_{هـ} س}\ دس$

$= \int_{0}^{2} س^5\ هـ^{س^3}\ دس$

$ص = س^3 \qquad دص = 3س^2\ دس$

$س = 0 \quad ص = 0 \quad ، \quad س = 2 \quad ص = 8$

$\int_{0}^{8} \frac{1}{3} س^3\ هـ^{ص}\ دص = \int_{0}^{8} \frac{1}{3} ص\ هـ^{ص}\ دص$

$ع = \frac{1}{3} ص \qquad دع = \frac{1}{3}\ دص$

$دهـ = هـ^{ص}\ دص \qquad هـ = هـ^{ص}$

$\int_{0}^{8} \frac{1}{3} ص\ هـ^{ص}\ دص = \frac{1}{3} ص\ هـ^{ص}\Big]_{0}^{8} - \int_{0}^{8} \frac{1}{3} هـ^{ص}\ دص$

$= \left(\frac{8}{3} هـ^{8} - صفر\right) - \frac{1}{3} هـ^{ص}\Big]_{0}^{8}$

$\frac{8}{3} هـ^{8} - \frac{1}{3} هـ^{8} + \frac{1}{3} = \frac{7}{3} هـ^{8} + \frac{1}{3}$

(ج) $\int \frac{٦٠ \sin ٣\theta}{٦٣ \cos \theta}$ ، $u = ٦٣ \cos \theta$ ، $du = -٦٣ \sin \theta \, d\theta$

$= \int \frac{(٦٣ \cos \theta + ٦٤ \sin \theta) \, ٢٠ \sin \theta}{٦٣ \cos \theta}$

$= \int \frac{٦٣ \cos \theta \, ٢٠ \sin \theta}{٦٣ \cos \theta} + \int \frac{٦٤ \, ٢٠ \sin^٢ \theta}{٦٣ \cos \theta}$

$= -٢٠ \ln|\cos \theta| - \frac{١}{٢} \int \frac{٦٤ \, ٢ \sin^٢ \theta}{\cos \theta}$

$= -٢٠ \ln|\cos \theta| - \frac{١}{٢} \int \frac{٦٤ (١ - \cos^٢ \theta)}{\cos \theta}$

$= -٢٠ \ln|\cos \theta| - \frac{١}{٢} \int (٦٤ \sec \theta - ٦٤ \cos \theta)$

$= -٢٠ \ln|\cos \theta| - \frac{١}{٢} [٦٤ \ln|\sec \theta + \tan \theta| - ٦٤ \sin \theta] + ج$

$= -٢٠ \ln|\cos \theta| - ٣٢ \ln|\sec \theta + \tan \theta| + ٣٢ \sin \theta + ج$

(د) $\int \frac{٦٤ \sin^٣ \theta}{٦٣ \cos \theta}$

$= \int \frac{٦٤ \sin \theta \, \sin^٢ \theta}{٦٣ \cos \theta}$

$= \int \frac{٦٤ \sin \theta \, (١ - \cos^٢ \theta)}{٦٣ \cos \theta}$

$= \int \frac{٦٤ \sin \theta}{٦٣ \cos \theta} - \int \frac{٦٤ \sin \theta \cos^٢ \theta}{٦٣ \cos \theta}$

$= -\frac{٦٤}{٦٣} \ln|\cos \theta| + \frac{١}{٢} \cos^٢ \theta + ج$

(هـ) $\int \frac{\sin^٣ \theta}{\cos^٢ \theta}$

$= \int \frac{\sin \theta \, \sin^٢ \theta}{\cos^٢ \theta}$

$= \int \frac{\sin \theta \, (١ - \cos^٢ \theta)}{\cos^٢ \theta}$

$= \int \frac{\sin \theta}{\cos^٢ \theta} - \int \frac{\sin \theta \cos^٢ \theta}{\cos^٢ \theta}$

$= \int \sec \theta \tan \theta - \int \cos \theta$

$= \sec \theta - \sin \theta + ج$

(و) $\int \sin^٣ \theta \cos^٢ \theta$

$= \int \sin \theta \, \sin^٢ \theta \cos^٢ \theta$

$= \int \sin \theta \, (١ - \cos^٢ \theta) \cos^٢ \theta$

$= \int \sin \theta \cos^٢ \theta - \int \sin \theta \cos^٤ \theta$

$= -\frac{١}{٣} \cos^٣ \theta + \frac{١}{٥} \cos^٥ \theta + ج$

(ز) $\int \frac{\sin^٣ \theta}{\cos^٤ \theta}$

$= \int \frac{\sin \theta \, \sin^٢ \theta}{\cos^٤ \theta}$

$= \int \frac{\sin \theta \, (١ - \cos^٢ \theta)}{\cos^٤ \theta}$

$= \int \frac{\sin \theta}{\cos^٤ \theta} - \int \frac{\sin \theta \cos^٢ \theta}{\cos^٤ \theta}$

$= \int \sec^٣ \theta \tan \theta - \int \sec^٢ \theta \tan \theta$

$= \frac{١}{٣} \sec^٣ \theta - \sec \theta + ج$

(ح) $\int \frac{\sin^٣ \theta}{\cos^٥ \theta}$

$= \int \frac{\sin \theta \, \sin^٢ \theta}{\cos^٥ \theta}$

$= \int \frac{\sin \theta \, (١ - \cos^٢ \theta)}{\cos^٥ \theta}$

$= \int \frac{\sin \theta}{\cos^٥ \theta} - \int \frac{\sin \theta \cos^٢ \theta}{\cos^٥ \theta}$

$= \int \sec^٤ \theta \tan \theta - \int \sec^٣ \theta \tan \theta$

$= \frac{١}{٤} \sec^٤ \theta - \frac{١}{٣} \sec^٣ \theta + ج$

(ط) $\int \frac{\sin^٥ \theta}{\cos^٣ \theta}$

$= \int \frac{\sin \theta \, \sin^٤ \theta}{\cos^٣ \theta}$

$= \int \frac{\sin \theta \, (١ - \cos^٢ \theta)^٢}{\cos^٣ \theta}$

$= \int \frac{\sin \theta}{\cos^٣ \theta} - ٢ \int \frac{\sin \theta \cos^٢ \theta}{\cos^٣ \theta} + \int \frac{\sin \theta \cos^٤ \theta}{\cos^٣ \theta}$

$= \int \sec^٢ \theta \tan \theta - ٢ \int \sec \theta \tan \theta + \int \cos \theta$

$= \frac{١}{٢} \sec^٢ \theta - ٢ \sec \theta + \sin \theta + ج$

(ى) $\int \frac{\sin^٥ \theta}{\cos^٤ \theta}$

$= \int \frac{\sin \theta \, \sin^٤ \theta}{\cos^٤ \theta}$

$= \int \frac{\sin \theta \, (١ - \cos^٢ \theta)^٢}{\cos^٤ \theta}$

$= \int \frac{\sin \theta}{\cos^٤ \theta} - ٢ \int \frac{\sin \theta \cos^٢ \theta}{\cos^٤ \theta} + \int \frac{\sin \theta \cos^٤ \theta}{\cos^٤ \theta}$

$= \int \sec^٣ \theta \tan \theta - ٢ \int \sec^٢ \theta \tan \theta + \int \sec \theta \tan \theta$

$= \frac{١}{٣} \sec^٣ \theta - ٢ \sec \theta + \ln|\sec \theta + \tan \theta| + ج$

(ك) $\int \frac{\sin^٥ \theta}{\cos^٦ \theta}$

$= \int \frac{\sin \theta \, \sin^٤ \theta}{\cos^٦ \theta}$

$= \int \frac{\sin \theta \, (١ - \cos^٢ \theta)^٢}{\cos^٦ \theta}$

$= \int \frac{\sin \theta}{\cos^٦ \theta} - ٢ \int \frac{\sin \theta \cos^٢ \theta}{\cos^٦ \theta} + \int \frac{\sin \theta \cos^٤ \theta}{\cos^٦ \theta}$

$= \int \sec^٥ \theta \tan \theta - ٢ \int \sec^٤ \theta \tan \theta + \int \sec^٣ \theta \tan \theta$

$= \frac{١}{٥} \sec^٥ \theta - \frac{٢}{٤} \sec^٤ \theta + \frac{١}{٣} \sec^٣ \theta + ج$

(ل) $\int \frac{\sin^٥ \theta}{\cos^٥ \theta}$

$= \int \frac{\sin \theta \, \sin^٤ \theta}{\cos^٥ \theta}$

$= \int \frac{\sin \theta \, (١ - \cos^٢ \theta)^٢}{\cos^٥ \theta}$

$= \int \frac{\sin \theta}{\cos^٥ \theta} - ٢ \int \frac{\sin \theta \cos^٢ \theta}{\cos^٥ \theta} + \int \frac{\sin \theta \cos^٤ \theta}{\cos^٥ \theta}$

$= \int \sec^٤ \theta \tan \theta - ٢ \int \sec^٣ \theta \tan \theta + \int \sec^٢ \theta \tan \theta$

$= \frac{١}{٤} \sec^٤ \theta - \frac{٢}{٣} \sec^٣ \theta + \frac{١}{٢} \sec^٢ \theta + ج$

(م) $\int \frac{\sin^٥ \theta}{\cos^٧ \theta}$

$= \int \frac{\sin \theta \, \sin^٤ \theta}{\cos^٧ \theta}$

$= \int \frac{\sin \theta \, (١ - \cos^٢ \theta)^٢}{\cos^٧ \theta}$

$= \int \frac{\sin \theta}{\cos^٧ \theta} - ٢ \int \frac{\sin \theta \cos^٢ \theta}{\cos^٧ \theta} + \int \frac{\sin \theta \cos^٤ \theta}{\cos^٧ \theta}$

$= \int \sec^٦ \theta \tan \theta - ٢ \int \sec^٥ \theta \tan \theta + \int \sec^٤ \theta \tan \theta$

$= \frac{١}{٦} \sec^٦ \theta - \frac{٢}{٥} \sec^٥ \theta + \frac{١}{٤} \sec^٤ \theta + ج$

(ن) $\int \frac{\sin^٥ \theta}{\cos^٨ \theta}$

$= \int \frac{\sin \theta \, \sin^٤ \theta}{\cos^٨ \theta}$

$= \int \frac{\sin \theta \, (١ - \cos^٢ \theta)^٢}{\cos^٨ \theta}$

$= \int \frac{\sin \theta}{\cos^٨ \theta} - ٢ \int \frac{\sin \theta \cos^٢ \theta}{\cos^٨ \theta} + \int \frac{\sin \theta \cos^٤ \theta}{\cos^٨ \theta}$

$= \int \sec^٧ \theta \tan \theta - ٢ \int \sec^٦ \theta \tan \theta + \int \sec^٥ \theta \tan \theta$

$= \frac{١}{٧} \sec^٧ \theta - \frac{٢}{٦} \sec^٦ \theta + \frac{١}{٥} \sec^٥ \theta + ج$

(س) $\int \frac{\sin^٦ \theta}{\cos^٦ \theta}$

$= \int \frac{\sin^٢ \theta \, \sin^٤ \theta}{\cos^٦ \theta}$

$= \int \frac{(١ - \cos^٢ \theta)(١ - \cos^٢ \theta)^٢}{\cos^٦ \theta}$

$= \int \frac{(١ - \cos^٢ \theta)(١ - ٢ \cos^٢ \theta + \cos^٤ \theta)}{\cos^٦ \theta}$

$= \int \frac{١ - ٣ \cos^٢ \theta + ٣ \cos^٤ \theta - \cos^٦ \theta}{\cos^٦ \theta}$

$= \int \sec^٦ \theta - ٣ \sec^٤ \theta + ٣ \sec^٢ \theta - ١$

$= \frac{١}{٥} \tan^٥ \theta + \frac{٢}{٣} \tan^٣ \theta + \tan \theta - \theta + ج$

(ع) $\int \sin^٣ \theta \cos^٣ \theta$

$= \int \sin^٢ \theta \cos^٣ \theta \sin \theta$

$= \int (١ - \cos^٢ \theta) \cos^٣ \theta \sin \theta$

$= \int \cos^٣ \theta \sin \theta - \int \cos^٥ \theta \sin \theta$

$= -\frac{١}{٤} \cos^٤ \theta + \frac{١}{٦} \cos^٦ \theta + ج$

(ف) $\int \sin^٥ \theta \cos^٢ \theta$

$= \int \sin^٤ \theta \cos^٢ \theta \sin \theta$

$= \int (١ - \cos^٢ \theta)^٢ \cos^٢ \theta \sin \theta$

$= \int (١ - ٢ \cos^٢ \theta + \cos^٤ \theta) \cos^٢ \theta \sin \theta$

$= \int \cos^٢ \theta \sin \theta - ٢ \int \cos^٤ \theta \sin \theta + \int \cos^٦ \theta \sin \theta$

$= -\frac{١}{٣} \cos^٣ \theta + \frac{٢}{٥} \cos^٥ \theta - \frac{١}{٧} \cos^٧ \theta + ج$

(ص) $\int \sin^٥ \theta \cos^٣ \theta$

$= \int \sin^٤ \theta \cos^٣ \theta \sin \theta$

$= \int (١ - \cos^٢ \theta)^٢ \cos^٣ \theta \sin \theta$

$= \int (١ - ٢ \cos^٢ \theta + \cos^٤ \theta) \cos^٣ \theta \sin \theta$

$= \int \cos^٣ \theta \sin \theta - ٢ \int \cos^٥ \theta \sin \theta + \int \cos^٧ \theta \sin \theta$

$= -\frac{١}{٤} \cos^٤ \theta + \frac{٢}{٦} \cos^٦ \theta - \frac{١}{٨} \cos^٨ \theta + ج$

(ق) $\int \sin^٥ \theta \cos^٥ \theta$

$= \int \sin^٤ \theta \cos^٥ \theta \sin \theta$

$= \int (١ - \cos^٢ \theta)^٢ \cos^٥ \theta \sin \theta$

$= \int (١ - ٢ \cos^٢ \theta + \cos^٤ \theta) \cos^٥ \theta \sin \theta$

$= \int \cos^٥ \theta \sin \theta - ٢ \int \cos^٧ \theta \sin \theta + \int \cos^٩ \theta \sin \theta$

$= -\frac{١}{٦} \cos^٦ \theta + \frac{٢}{٨} \cos^٨ \theta - \frac{١}{١٠} \cos^{١٠} \theta + ج$

(ر) $\int \sin^٦ \theta \cos^٢ \theta$

$= \int \sin^٦ \theta \cos^٢ \theta$

$= \int \sin^٦ \theta \, (١ - \sin^٢ \theta)$

$= \int \sin^٦ \theta - \int \sin^٨ \theta$

$= \frac{١}{٧} \sin^٧ \theta - \frac{١}{٩} \sin^٩ \theta + ج$

(ش) $\int \sin^٦ \theta \cos^٣ \theta$

$= \int \sin^٦ \theta \cos^٢ \theta \cos \theta$

$= \int \sin^٦ \theta \, (١ - \sin^٢ \theta) \cos \theta$

$= \int \sin^٦ \theta \cos \theta - \int \sin^٨ \theta \cos \theta$

$= \frac{١}{٧} \sin^٧ \theta - \frac{١}{٩} \sin^٩ \theta + ج$

(ت) $\int \sin^٦ \theta \cos^٥ \theta$

$= \int \sin^٦ \theta \cos^٤ \theta \cos \theta$

$= \int \sin^٦ \theta \, (١ - \sin^٢ \theta)^٢ \cos \theta$

$= \int \sin^٦ \theta \cos \theta - ٢ \int \sin^٨ \theta \cos \theta + \int \sin^{١٠} \theta \cos \theta$

$= \frac{١}{٧} \sin^٧ \theta - \frac{٢}{٩} \sin^٩ \theta + \frac{١}{١١} \sin^{١١} \theta + ج$

(ث) $\int \sin^٦ \theta \cos^٧ \theta$

$= \int \sin^٦ \theta \cos^٦ \theta \cos \theta$

$= \int \sin^٦ \theta \, (١ - \sin^٢ \theta)^٣ \cos \theta$

$= \int \sin^٦ \theta \cos \theta - ٣ \int \sin^٨ \theta \cos \theta + ٣ \int \sin^{١٠} \theta \cos \theta - \int \sin^{١٢} \theta \cos \theta$

$= \frac{١}{٧} \sin^٧ \theta - \frac{٣}{٩} \sin^٩ \theta + \frac{٣}{١١} \sin^{١١} \theta - \frac{١}{١٣} \sin^{١٣} \theta + ج$

(خ) $\int \sin^٨ \theta \cos^٢ \theta$

$= \int \sin^٨ \theta \cos^٢ \theta$

$= \int \sin^٨ \theta \, (١ - \sin^٢ \theta)$

$= \int \sin^٨ \theta - \int \sin^{١٠} \theta$

$= \frac{١}{٩} \sin^٩ \theta - \frac{١}{١١} \sin^{١١} \theta + ج$

(ذ) $\int \sin^٨ \theta \cos^٣ \theta$

$= \int \sin^٨ \theta \cos^٢ \theta \cos \theta$

$= \int \sin^٨ \theta \, (١ - \sin^٢ \theta) \cos \theta$

$= \int \sin^٨ \theta \cos \theta - \int \sin^{١٠} \theta \cos \theta$

$= \frac{١}{٩} \sin^٩ \theta - \frac{١}{١١} \sin^{١١} \theta + ج$

(ض) $\int \sin^٨ \theta \cos^٥ \theta$

$= \int \sin^٨ \theta \cos^٤ \theta \cos \theta$

$= \int \sin^٨ \theta \, (١ - \sin^٢ \theta)^٢ \cos \theta$

$= \int \sin^٨ \theta \cos \theta - ٢ \int \sin^{١٠} \theta \cos \theta + \int \sin^{١٢} \theta \cos \theta$

$= \frac{١}{٩} \sin^٩ \theta - \frac{٢}{١١} \sin^{١١} \theta + \frac{١}{١٣} \sin^{١٣} \theta + ج$

(ظ) $\int \sin^٨ \theta \cos^٧ \theta$

$= \int \sin^٨ \theta \cos^٦ \theta \cos \theta$

$= \int \sin^٨ \theta \, (١ - \sin^٢ \theta)^٣ \cos \theta$

$= \int \sin^٨ \theta \cos \theta - ٣ \int \sin^{١٠} \theta \cos \theta + ٣ \int \sin^{١٢} \theta \cos \theta - \int \sin^{١٤} \theta \cos \theta$

$= \frac{١}{٩} \sin^٩ \theta - \frac{٣}{١١} \sin^{١١} \theta + \frac{٣}{١٣} \sin^{١٣} \theta - \frac{١}{١٥} \sin^{١٥} \theta + ج$

(غ) $\int \sin^{١٠} \theta \cos^٢ \theta$

$= \int \sin^{١٠} \theta \cos^٢ \theta$

$= \int \sin^{١٠} \theta \, (١ - \sin^٢ \theta)$

$= \int \sin^{١٠} \theta - \int \sin^{١٢} \theta$

$= \frac{١}{١١} \sin^{١١} \theta - \frac{١}{١٣} \sin^{١٣} \theta + ج$

(أ) $\int \sin^{١٠} \theta \cos^٣ \theta$

$= \int \sin^{١٠} \theta \cos^٢ \theta \cos \theta$

$= \int \sin^{١٠} \theta \, (١ - \sin^٢ \theta) \cos \theta$

$= \int \sin^{١٠} \theta \cos \theta - \int \sin^{١٢} \theta \cos \theta$

$= \frac{١}{١١} \sin^{١١} \theta - \frac{١}{١٣} \sin^{١٣} \theta + ج$

(ب) $\int \sin^{١٠} \theta \cos^٥ \theta$

$= \int \sin^{١٠} \theta \cos^٤ \theta \cos \theta$

$= \int \sin^{١٠} \theta \, (١ - \sin^٢ \theta)^٢ \cos \theta$

$= \int \sin^{١٠} \theta \cos \theta - ٢ \int \sin^{١٢} \theta \cos \theta + \int \sin^{١٤} \theta \cos \theta$

$= \frac{١}{١١} \sin^{١١} \theta - \frac{٢}{١٣} \sin^{١٣} \theta + \frac{١}{١٥} \sin^{١٥} \theta + ج$

(ج) $\int \sin^{١٠} \theta \cos^٧ \theta$

$= \int \sin^{١٠} \theta \cos^٦ \theta \cos \theta$

$= \int \sin^{١٠} \theta \, (١ - \sin^٢ \theta)^٣ \cos \theta$

$= \int \sin^{١٠} \theta \cos \theta - ٣ \int \sin^{١٢} \theta \cos \theta + ٣ \int \sin^{١٤} \theta \cos \theta - \int \sin^{١٦} \theta \cos \theta$

$= \frac{١}{١١} \sin^{١١} \theta - \frac{٣}{١٣} \sin^{١٣} \theta + \frac{٣}{١٥} \sin^{١٥} \theta - \frac{١}{١٧} \sin^{١٧} \theta + ج$

(د) $\int \sin^{١٢} \theta \cos^٢ \theta$

$= \int \sin^{١٢} \theta \cos^٢ \theta$

$= \int \sin^{١٢} \theta \, (١ - \sin^٢ \theta)$

$= \int \sin^{١٢} \theta - \int \sin^{١٤} \theta$

$= \frac{١}{١٣} \sin^{١٣} \theta - \frac{١}{١٥} \sin^{١٥} \theta + ج$

(هـ) $\int \sin^{١٢} \theta \cos^٣ \theta$

$= \int \sin^{١٢} \theta \cos^٢ \theta \cos \theta$

$= \int \sin^{١٢} \theta \, (١ - \sin^٢ \theta) \cos \theta$

$= \int \sin^{١٢} \theta \cos \theta - \int \sin^{١٤} \theta \cos \theta$

$= \frac{١}{١٣} \sin^{١٣} \theta - \frac{١}{١٥} \sin^{١٥} \theta + ج$

(و) $\int \sin^{١٢} \theta \cos^٥ \theta$

$= \int \sin^{١٢} \theta \cos^٤ \theta \cos \theta$

$= \int \sin^{١٢} \theta \, (١ - \sin^٢ \theta)^٢ \cos \theta$

$= \int \sin^{١٢} \theta \cos \theta - ٢ \int \sin^{١٤} \theta \cos \theta + \int \sin^{١٦} \theta \cos \theta$

$= \frac{١}{١٣} \sin^{١٣} \theta - \frac{٢}{١٥} \sin^{١٥} \theta + \frac{١}{١٧} \sin^{١٧} \theta + ج$

(ز) $\int \sin^{١٢} \theta \cos^٧ \theta$

$= \int \sin^{١٢} \theta \cos^٦ \theta \cos \theta$

$= \int \sin^{١٢} \theta \, (١ - \sin^٢ \theta)^٣ \cos \theta$

$= \int \sin^{١٢} \theta \cos \theta - ٣ \int \sin^{١٤} \theta \cos \theta + ٣ \int \sin^{١٦} \theta \cos \theta - \int \sin^{١٨} \theta \cos \theta$

$= \frac{١}{١٣} \sin^{١٣} \theta - \frac{٣}{١٥} \sin^{١٥} \theta + \frac{٣}{١٧} \sin^{١٧} \theta - \frac{١}{١٩} \sin^{١٩} \theta + ج$

(ح) $\int \sin^{١٤} \theta \cos^٢ \theta$

$= \int \sin^{١٤} \theta \cos^٢ \theta$

$= \int \sin^{١٤} \theta \, (١ - \sin^٢ \theta)$

$= \int \sin^{١٤} \theta - \int \sin^{١٦} \theta$

$= \frac{١}{١٥} \sin^{١٥} \theta - \frac{١}{١٧} \sin^{١٧} \theta + ج$

(ط) $\int \sin^{١٤} \theta \cos^٣ \theta$

$= \int \sin^{١٤} \theta \cos^٢ \theta \cos \theta$

$= \int \sin^{١٤} \theta \, (١ - \sin^٢ \theta) \cos \theta$

$= \int \sin^{١٤} \theta \cos \theta - \int \sin^{١٦} \theta \cos \theta$

$= \frac{١}{١٥} \sin^{١٥} \theta - \frac{١}{١٧} \sin^{١٧} \theta + ج$

(ى) $\int \sin^{١٤} \theta \cos^٥ \theta$

$= \int \sin^{١٤} \theta \cos^٤ \theta \cos \theta$

$= \int \sin^{١٤} \theta \, (١ - \sin^٢ \theta)^٢ \cos \theta$

$= \int \sin^{١٤} \theta \cos \theta - ٢ \int \sin^{١٦} \theta \cos \theta + \int \sin^{١٨} \theta \cos \theta$

$= \frac{١}{١٥} \sin^{١٥} \theta - \frac{٢}{١٧} \sin^{١٧} \theta + \frac{١}{١٩} \sin^{١٩} \theta + ج$

(ك) $\int \sin^{١٤} \theta \cos^٧ \theta$

$= \int \sin^{١٤} \theta \cos^٦ \theta \cos \theta$

$= \int \sin^{١٤} \theta \, (١ - \sin^٢ \theta)^٣ \cos \theta$

$= \int \sin^{١٤} \theta \cos \theta - ٣ \int \sin^{١٦} \theta \cos \theta + ٣ \int \sin^{١٨} \theta \cos \theta - \int \sin^{٢٠} \theta \cos \theta$

$= \frac{١}{١٥} \sin^{١٥} \theta - \frac{٣}{١٧} \sin^{١٧} \theta + \frac{٣}{١٩} \sin^{١٩} \theta - \frac{١}{٢١} \sin^{٢١} \theta + ج$

(ل) $\int \sin^{١٦} \theta \cos^٢ \theta$

$= \int \sin^{١٦} \theta \cos^٢ \theta$

$= \int \sin^{١٦} \theta \, (١ - \sin^٢ \theta)$

$= \int \sin^{١٦} \theta - \int \sin^{١٨} \theta$

$= \frac{١}{١٧} \sin^{١٧} \theta - \frac{١}{١٩} \sin^{١٩} \theta + ج$

(م) $\int \sin^{١٦} \theta \cos^٣ \theta$

$= \int \sin^{١٦} \theta \cos^٢ \theta \cos \theta$

$= \int \sin^{١٦} \theta \, (١ - \sin^٢ \theta) \cos \theta$

$= \int \sin^{١٦} \theta \cos \theta - \int \sin^{١٨} \theta \cos \theta$

$= \frac{١}{١٧} \sin^{١٧} \theta - \frac{١}{١٩} \sin^{١٩} \theta + ج$

(ن) $\int \sin^{١٦} \theta \cos^٥ \theta$

$= \int \sin^{١٦} \theta \cos^٤ \theta \cos \theta$

$= \int \sin^{١٦} \theta \, (١ - \sin^٢ \theta)^٢ \cos \theta$

$= \int \sin^{١٦} \theta \cos \theta - ٢ \int \sin^{١٨} \theta \cos \theta + \int \sin^{٢٠} \theta \cos \theta$

$= \frac{١}{١٧} \sin^{١٧} \theta - \frac{٢}{١٩} \sin^{١٩} \theta + \frac{١}{٢١} \sin^{٢١} \theta + ج$

(س) $\int \sin^{١٦} \theta \cos^٧ \theta$

$= \int \sin^{١٦} \theta \cos^٦ \theta \cos \theta$

$= \int \sin^{١٦} \theta \, (١ - \sin^٢ \theta)^٣ \cos \theta$

$= \int \sin^{١٦} \theta \cos \theta - ٣ \int \sin^{١٨} \theta \cos \theta + ٣ \int \sin^{٢٠} \theta \cos \theta - \int \sin^{٢٢} \theta \cos \theta$

$= \frac{١}{١٧} \sin^{١٧} \theta - \frac{٣}{١٩} \sin^{١٩} \theta + \frac{٣}{٢١} \sin^{٢١} \theta - \frac{١}{٢٣} \sin^{٢٣} \theta + ج$

(ع) $\int \sin^{١٨} \theta \cos^٢ \theta$

$= \int \sin^{١٨} \theta \cos^٢ \theta$

$= \int \sin^{١٨} \theta \, (١ - \sin^٢ \theta)$

$= \int \sin^{١٨} \theta - \int \sin^{٢٠} \theta$

$= \frac{١}{١٩} \sin^{١٩} \theta - \frac{١}{٢١} \sin^{٢١} \theta + ج$

(ف) $\int \sin^{١٨} \theta \cos^٣ \theta$

$= \int \sin^{١٨} \theta \cos^٢ \theta \cos \theta$

$= \int \sin^{١٨} \theta \, (١ - \sin^٢ \theta) \cos \theta$

$= \int \sin^{١٨} \theta \cos \theta - \int \sin^{٢٠} \theta \cos \theta$

$= \frac{١}{١٩} \sin^{١٩} \theta - \frac{١}{٢١} \sin^{٢١} \theta + ج$

(ص) $\int \sin^{١٨} \theta \cos^٥ \theta$

$= \int \sin^{١٨} \theta \cos^٤ \theta \cos \theta$

$= \int \sin^{١٨} \theta \, (١ - \sin^٢ \theta)^٢ \cos \theta$

$= \int \sin^{١٨} \theta \cos \theta - ٢ \int \sin^{٢٠} \theta \cos \theta + \int \sin^{٢٢} \theta \cos \theta$

$= \frac{١}{١٩} \sin^{١٩} \theta - \frac{٢}{٢١} \sin^{٢١} \theta + \frac{١}{٢٣} \sin^{٢٣} \theta + ج$

(ق) $\int \sin^{١٨} \theta \cos^٧ \theta$

$= \int \sin^{١٨} \theta \cos^٦ \theta \cos \theta$

$= \int \sin^{١٨} \theta \, (١ - \sin^٢ \theta)^٣ \cos \theta$

$= \int \sin^{١٨} \theta \cos \theta - ٣ \int \sin^{٢٠} \theta \cos \theta + ٣ \int \sin^{٢٢} \theta \cos \theta - \int \sin^{٢٤} \theta \cos \theta$

$= \frac{١}{١٩} \sin^{١٩} \theta - \frac{٣}{٢١} \sin^{٢١} \theta + \frac{٣}{٢٣} \sin^{٢٣} \theta - \frac{١}{٢٥} \sin^{٢٥} \theta + ج$

(ر) $\int \sin^{٢٠} \theta \cos^٢ \theta$

$= \int \sin^{٢٠} \theta \cos^٢ \theta$

$= \int \sin^{٢٠} \theta \, (١ - \sin^٢ \theta)$

$= \int \sin^{٢٠} \theta - \int \sin^{٢٢} \theta$

$= \frac{١}{٢١} \sin^{٢١} \theta - \frac{١}{٢٣} \sin^{٢٣} \theta + ج$

(ش) $\int \sin^{٢٠} \theta \cos^٣ \theta$

$= \int \sin^{٢٠} \theta \cos^٢ \theta \cos \theta$

$= \int \sin^{٢٠} \theta \, (١ - \sin^٢ \theta) \cos \theta$

$= \int \sin^{٢٠} \theta \cos \theta - \int \sin^{٢٢} \theta \cos \theta$

$= \frac{١}{٢١} \sin^{٢١} \theta - \frac{١}{٢٣} \sin^{٢٣} \theta + ج$

(ت) $\int \sin^{٢٠} \theta \cos^٥ \theta$

$= \int \sin^{٢٠} \theta \cos^٤ \theta \cos \theta$

$= \int \sin^{٢٠} \theta \, (١ - \sin^٢ \theta)^٢ \cos \theta$

$= \int \sin^{٢٠} \theta \cos \theta - ٢ \int \sin^{٢٢} \theta \cos \theta + \int \sin^{٢٤} \theta \cos \theta$

$= \frac{١}{٢١} \sin^{٢١} \theta - \frac{٢}{٢٣} \sin^{٢٣} \theta + \frac{١}{٢٥} \sin^{٢٥} \theta + ج$

(ث) $\int \sin^{٢٠} \theta \cos^٧ \theta$

$= \int \sin^{٢٠} \theta \cos^٦ \theta \cos \theta$

$= \int \sin^{٢٠} \theta \, (١ - \sin^٢ \theta)^٣ \cos \theta$

$= \int \sin^{٢٠} \theta \cos \theta - ٣ \int \sin^{٢٢} \theta \cos \theta + ٣ \int \sin^{٢٤} \theta \cos \theta - \int \sin^{٢٦} \theta \cos \theta$

$= \frac{١}{٢١} \sin^{٢١} \theta - \frac{٣}{٢٣} \sin^{٢٣} \theta + \frac{٣}{٢٥} \sin^{٢٥} \theta - \frac{١}{٢٧} \sin^{٢٧} \theta + ج$

(خ) $\int \sin^{٢٢} \theta \cos^٢ \theta$

$= \int \sin^{٢٢} \theta \cos^٢ \theta$

$= \int \sin^{٢٢} \theta \, (١ - \sin^٢ \theta)$

$= \int \sin^{٢٢} \theta - \int \sin^{٢٤} \theta$

$= \frac{١}{٢٣} \sin^{٢٣} \theta - \frac{١}{٢٥} \sin^{٢٥} \theta + ج$

(ذ) $\int \sin^{٢٢} \theta \cos^٣ \theta$

$= \int \sin^{٢٢} \theta \cos^٢ \theta \cos \theta$

$= \int \sin^{٢٢} \theta \, (١ - \sin^٢ \theta) \cos \theta$

$= \int \sin^{٢٢} \theta \cos \theta - \int \sin^{٢٤} \theta \cos \theta$

$= \frac{١}{٢٣} \sin^{٢٣} \theta - \frac{١}{٢٥} \sin^{٢٥} \theta + ج$

(ض) $\int \sin^{٢٢} \theta \cos^٥ \theta$

$= \int \sin^{٢٢} \theta \cos^٤ \theta \cos \theta$

$= \int \sin^{٢٢} \theta \, (١ - \sin^٢ \theta)^٢ \cos \theta$

$= \int \sin^{٢٢} \theta \cos \theta - ٢ \int \sin^{٢٤} \theta \cos \theta + \int \sin^{٢٦} \theta \cos \theta$

$= \frac{١}{٢٣} \sin^{٢٣} \theta - \frac{٢}{٢٥} \sin^{٢٥} \theta + \frac{١}{٢٧} \sin^{٢٧} \theta + ج$

(ظ) $\int \sin^{٢٢} \theta \cos^٧ \theta$

$= \int \sin^{٢٢} \theta \cos^٦ \theta \cos \theta$

$= \int \sin^{٢٢} \theta \, (١ - \sin^٢ \theta)^٣ \cos \theta$

$= \int \sin^{٢٢} \theta \cos \theta - ٣ \int \sin^{٢٤} \theta \cos \theta + ٣ \int \sin^{٢٦} \theta \cos \theta - \int \sin^{٢٨} \theta \cos \theta$

$= \frac{١}{٢٣} \sin^{٢٣} \theta - \frac{٣}{٢٥} \sin^{٢٥} \theta + \frac{٣}{٢٧} \sin^{٢٧} \theta - \frac{١}{٢٩} \sin^{٢٩} \theta + ج$

(غ) $\int \sin^{٢٤} \theta \cos^٢ \theta$

$= \int \sin^{٢٤} \theta \cos^٢ \theta$

$= \int \sin^{٢٤} \theta \, (١ - \sin^٢ \theta)$

$= \int \sin^{٢٤} \theta - \int \sin^{٢٦} \theta$

$= \frac{١}{٢٥} \sin^{٢٥} \theta - \frac{١}{٢٧} \sin^{٢٧} \theta + ج$

(أ) $\int \sin^{٢٤} \theta \cos^٣ \theta$

$= \int \sin^{٢٤} \theta \cos^٢ \theta \cos \theta$

$= \int \sin^{٢٤} \theta \, (١ - \sin^٢ \theta) \cos \theta$

$= \int \sin^{٢٤} \theta \cos \theta - \int \sin^{٢٦} \theta \cos \theta$

$= \frac{١}{٢٥} \sin^{٢٥} \theta - \frac{١}{٢٧} \sin^{٢٧} \theta + ج$

(ب) $\int \sin^{٢٤} \theta \cos^٥ \theta$

$= \int \sin^{٢٤} \theta \cos^٤ \theta \cos \theta$

$= \int \sin^{٢٤} \theta \, (١ - \sin^٢ \theta)^٢ \cos \theta$

$= \int \sin^{٢٤} \theta \cos \theta - ٢ \int \sin^{٢٦} \theta \cos \theta + \int \sin^{٢٨} \theta \cos \theta$

$= \frac{١}{٢٥} \sin^{٢٥} \theta - \frac{٢}{٢٧} \sin^{٢٧} \theta + \frac{١}{٢٩} \sin^{٢٩} \theta + ج$

(ج) $\int \sin^{٢٤} \theta \cos^٧ \theta$

$= \int \sin^{٢٤} \theta \cos^٦ \theta \cos \theta$

$= \int \sin^{٢٤} \theta \, (١ - \sin^٢ \theta)^٣ \cos \theta$

$= \int \sin^{٢٤} \theta \cos \theta - ٣ \int \sin^{٢٦} \theta \cos \theta + ٣ \int \sin^{٢٨} \theta \cos \theta - \int \sin^{٣٠} \theta \cos \theta$

$= \frac{١}{٢٥} \sin^{٢٥} \theta - \frac{٣}{٢٧} \sin^{٢٧} \theta + \frac{٣}{٢٩} \sin^{٢٩} \theta - \frac{١}{٣١} \sin^{٣١} \theta + ج$

(د) $\int \sin^{٢٦} \theta \cos^٢ \theta$

$= \int \sin^{٢٦} \theta \cos^٢ \theta$

$= \int \sin^{٢٦} \theta \, (١ - \sin^٢ \theta)$

$= \int \sin^{٢٦} \theta - \int \sin^{٢٨} \theta$

$= \frac{١}{٢٧} \sin^{٢٧} \theta - \frac{١}{٢٩} \sin^{٢٩} \theta + ج$

(هـ) $\int \sin^{٢٦} \theta \cos^٣ \theta$

$= \int \sin^{٢٦} \theta \cos^٢ \theta \cos \theta$

$= \int \sin^{٢٦} \theta \, (١ - \sin^٢ \theta) \cos \theta$

$= \int \sin^{٢٦} \theta \cos \theta - \int \sin^{٢٨} \theta \cos \theta$

$= \frac{١}{٢٧} \sin^{٢٧} \theta - \frac{١}{٢٩} \sin^{٢٩} \theta + ج$

(و) $\int \sin^{٢٦} \theta \cos^٥ \theta$

$= \int \sin^{٢٦} \theta \cos^٤ \theta \cos \theta$

$= \int \sin^{٢٦} \theta \, (١ - \sin^٢ \theta)^٢ \cos \theta$

$= \int \sin^{٢٦} \theta \cos \theta - ٢ \int \sin^{٢٨} \theta \cos \theta + \int \sin^{٣٠} \theta \cos \theta$

$= \frac{١}{٢٧} \sin^{٢٧} \theta - \frac{٢}{٢٩} \sin^{٢٩} \theta + \frac{١}{٣١} \sin^{٣١} \theta + ج$

(ز) $\int \sin^{٢٦} \theta \cos^٧ \theta$

$= \int \sin^{٢٦} \theta \cos^٦ \theta \cos \theta$

$= \int \sin^{٢٦} \theta \, (١ - \sin^٢ \theta)^٣ \cos \theta$

$= \int \sin^{٢٦} \theta \cos \theta - ٣ \int \sin^{٢٨} \theta \cos \theta + ٣ \int \sin^{٣٠} \theta \cos \theta - \int \sin^{٣٢} \theta \cos \theta$

$= \frac{١}{٢٧} \sin^{٢٧} \theta - \frac{٣}{٢٩} \sin^{٢٩} \theta + \frac{٣}{٣١} \sin^{٣١} \theta - \frac{١}{٣٣} \sin^{٣٣} \theta + ج$

(ح) $\int \sin^{٢٨} \theta \cos^٢ \theta$

$= \int \s

ن	٥	٤	٣	٢	١	٠	ن	٦	٧	٨	٩
ق(ن)	٠,١	٠,٢	٠,٣	٠,٢	٠,١	٠,١	ق(ن)	٠,١	٠,٢	٠,٣	٠,٢

(ب)

(ج) $\text{ت}(\text{ن}) = \sum_{\text{ن}=0}^{\text{ن}} \text{ق}(\text{ن})$

ن	٠	١	٢	٣	٤	٥
ت(ن)	٠,١	٠,٣	٠,٦	٠,٨	٠,٩	١

(د) $\text{ت}(\text{ن}) = \sum_{\text{ن}=0}^{\text{ن}} \text{ق}(\text{ن})$

ن	٠	١	٢	٣	٤	٥
ت(ن)	٠,١	٠,٣	٠,٦	٠,٨	٠,٩	١

(هـ) $\text{ت}(\text{ن}) = \sum_{\text{ن}=0}^{\text{ن}} \text{ق}(\text{ن})$

ن	٠	١	٢	٣	٤	٥
ت(ن)	٠,١	٠,٣	٠,٦	٠,٨	٠,٩	١

(و) $\text{ت}(\text{ن}) = \sum_{\text{ن}=0}^{\text{ن}} \text{ق}(\text{ن})$

ن	٠	١	٢	٣	٤	٥
ت(ن)	٠,١	٠,٣	٠,٦	٠,٨	٠,٩	١

(ز) $\text{ت}(\text{ن}) = \sum_{\text{ن}=0}^{\text{ن}} \text{ق}(\text{ن})$

ن	٠	١	٢	٣	٤	٥
ت(ن)	٠,١	٠,٣	٠,٦	٠,٨	٠,٩	١

(ح) $\text{ت}(\text{ن}) = \sum_{\text{ن}=0}^{\text{ن}} \text{ق}(\text{ن})$

ن	٠	١	٢	٣	٤	٥
ت(ن)	٠,١	٠,٣	٠,٦	٠,٨	٠,٩	١

(ط) $\text{ت}(\text{ن}) = \sum_{\text{ن}=0}^{\text{ن}} \text{ق}(\text{ن})$

ن	٠	١	٢	٣	٤	٥
ت(ن)	٠,١	٠,٣	٠,٦	٠,٨	٠,٩	١

(ي) $\text{ت}(\text{ن}) = \sum_{\text{ن}=0}^{\text{ن}} \text{ق}(\text{ن})$

ن	٠	١	٢	٣	٤	٥
ت(ن)	٠,١	٠,٣	٠,٦	٠,٨	٠,٩	١

(ك) $\text{ت}(\text{ن}) = \sum_{\text{ن}=0}^{\text{ن}} \text{ق}(\text{ن})$

ن	٠	١	٢	٣	٤	٥
ت(ن)	٠,١	٠,٣	٠,٦	٠,٨	٠,٩	١

(ل) $\text{ت}(\text{ن}) = \sum_{\text{ن}=0}^{\text{ن}} \text{ق}(\text{ن})$

ن	٠	١	٢	٣	٤	٥
ت(ن)	٠,١	٠,٣	٠,٦	٠,٨	٠,٩	١

منهاجي
متعة التعليم الهادف

إدارة المناهج والكتب المدرسية

إجابات وحلول أسئلة الرياضيات

الصف: الثاني عشر (العلمي).

الوحدة الخامسة : القطوع المخروطية وتطبيقاتها.

الفصل الأول : القطوع المخروطية :

أولاً: القطع المخروطي :

١) الشكل (٥-٣) :

أ) قطع زائد ب) قطع ناقص ج) دائرة د) قطع مكافئ

٢) أ) قطع زائد ب) دائرة ج) قطع مكافئ د) قطع ناقص

ثانياً : المحل الهندسي :

تدريب (١) : المحل الهندسي للنقطة المتحركة في المستوى هو دائرة مركزها النقطة ك (٢، -٤)، ونصف قطرها = ١ وحدة.

∴ معادلة المحل الهندسي = معادلة الدائرة

$$\Leftarrow (\text{ص} - ٢)^{٢} + (\text{ب} + ٤)^{٢} = (١)^{٢}$$

$$\Leftarrow (\text{س} - ٢)^{٢} + (\text{ص} + ٤)^{٢} = ١$$

تدريب (٢) : المحل الهندسي الناتج هو خط مستقيم، ولإيجاد معادلته :

$$\text{البعد} = \left| \frac{\text{أ س}_{١} + \text{ب ص}_{١} + \text{ج}}{\sqrt{\text{أ}^{٢} + \text{ب}^{٢}}} \right|$$

البعد = $\sqrt{٥}$

م : ص + ٢س = ٠

النقطة (س، ص)

$$\sqrt{٥} = \left| \frac{٠ + \text{ص} \times ١ + \text{س} \times ٢}{\sqrt{(١)^{٢} + (٢)^{٢}}} \right| = \frac{|٢\text{س} + \text{ص}|}{\sqrt{٥}}$$

$$|٢\text{س} + \text{ص}| = ٥$$

$$\therefore ٢\text{س} + \text{ص} = ٥$$

أو $٢\text{س} + \text{ص} = -٥$

وبما أن النقطة المتحركة تمر أثناء حركتها بالنقطة (-١، -٣) فإن معادلة المستقيم هي $٢\text{س} + \text{ص} = -٥$

المحل الهندسي :

٢

تدريب (٣) : معادلة المحل الهندسي هي :

$$\left|\frac{\text{س}}{\sqrt{\quad}}\right| = \sqrt{(\text{س}-٢)^٢ + (\text{ص}+١)^٢} \quad \times ٣$$

(محور الصادات معادلته س = ٠)

$$(\text{س}-٢)^٢ + (\text{ص}+١)^٢ = (\text{س})^٢ \quad \times ٩$$

$$٩(\text{س}^٢ - ٤\text{س} + ٤ + \text{ص}^٢ + ٢\text{ص} + ١) = \text{س}^٢$$

$$٨\text{س}^٢ + ٩\text{ص}^٢ - ٣٦\text{س} + ١٨\text{ص} + ٤٥ = ٠$$

★ تمارين مسائل المحل الهندسي :

١ معادلة المحل الهندسي هي : $(\text{س}+٢)^٢ + (\text{ص}-٦)^٢ = (٧)^٢$

---

٢ معادلة المحل الهندسي هي :

$$\text{البعد} = \left|\frac{\text{س}-١}{\sqrt{(١)^٢+(٠)^٢}}\right| \Leftarrow ٤ = |\text{س}-١| \Leftarrow \text{س} = ٥ \text{ تهمل}$$

أو $\boxed{\text{س} = -٣}$ إذن النقطة (-٣، ٢) تقع عليه.

---

٣ معادلة المحل الهندسي هي :

$$\left|\frac{\text{ص}-٤}{\sqrt{(١)^٢+٠}}\right| = ٢ \sqrt{(\text{س}-٥)^٢ + (\text{ص}-٣)^٢}$$ وبتربيع الطرفين

$$(\text{س}-٥)^٢ + (\text{ص}-٣)^٢ = ٤(\text{ص}-٤)^٢$$

$$\text{س}^٢ - ١٠\text{س} + ٢٥ + \text{ص}^٢ - ٦\text{ص} + ٩ = ٤\text{ص}^٢ - ٣٢\text{ص} + ٦٤$$

$$\text{س}^٢ - ٣\text{ص}^٢ - ١٠\text{س} + ٣٦\text{ص} - ٣٠ = ٠$$

---

٤ بعد النقطة عن المستقيم = ٣ وحدات ، معادلة المستقيم $٣\text{س} + ٤\text{ص} - ٥ = ٠$ ، النقطة تمر بمركز الدائرة (٤، ٣) تقع على المحل الهندسي

$$\therefore \text{معادلة المحل هي البعد} = ٣ = \left|\frac{٣\text{س} + ٤\text{ص} - ٥}{\sqrt{(٣)^٢+(٤)^٢}}\right|$$

$$٣ = \frac{|٣\text{س} + ٤\text{ص} - ٥|}{٥} \Leftarrow |٣\text{س} + ٤\text{ص} - ٥| = ١٥$$

$$\therefore ٣\text{س} + ٤\text{ص} - ٥ = -١٥ \Leftarrow ٣\text{س} + ٤\text{ص} = -١٠$$

أو $٣\text{س} + ٤\text{ص} - ٥ = ١٥ \Leftarrow ٣\text{س} + ٤\text{ص} = ٢٠$

لكن النقطة (٤، ٣) تقع على المستقيم (منحنى) الذي معادلته $٣\text{س} + ٤\text{ص} = ٢٠$

$\therefore$ معادلة المحل الهندسي هي $\boxed{٣\text{س} + ٤\text{ص} = ٢٠}$

منهاجي
متعة التعليم الهادف

الفصل الثاني : معادلات القطوع المخروطية :

أولاً : الدائرة :

تدريب ١ : أ) معادلة الدائرة التي نهايتا قطر فيها النقطتان (٧، ٣) ، (٥، -١)

نجد إحداثيات المركز = $\left(\frac{٥+٧}{٢}\ ،\ \frac{-١+٣}{٢}\right) = (٦، ١)$ إحداثيات منتصف قطعة $\left(\frac{س_١+س_٢}{٢}\ ،\ \frac{ص_١+ص_٢}{٢}\right)$

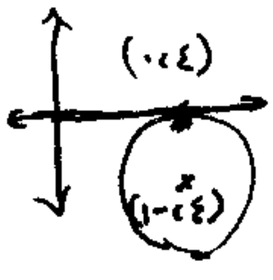
نجد قطر الدائرة = $\sqrt{(٥-٧)^٢ + (-١-٣)^٢} = \sqrt{٤+١٦} = \sqrt{٢٠} = ٢\sqrt{٥}$ وحدة طول $\Leftarrow$ نق = $\sqrt{٥}$ وحدة

∴ معادلة الدائرة هي $(س-٦)^٢ + (ص-١)^٢ = ٥$

تدريب ١ : ب) معادلة الدائرة على الصورة القياسية :

∵ مركز الدائرة هو (-١، ٤) ، نق = $\sqrt{٣٠}$ وحدة

تدريب ٢ : بما أن الدائرة تمس محور السينات ، فإن نقطة التماس (٠، ٤) ، مجاورة المركز (-١، ٤)



نجد نق = $\sqrt{(-١-٠)^٢ + (٤-٤)^٢} = ١$ وحدة

∴ المعادلة $(س-٤)^٢ + ص^٢ = ١$ ـــــ وهي الصورة القياسية لمعادلة الدائرة .

تدريب ٣ :

أ) المركز (-١، ٤) ، وتمس المستقيم ص = -٢ ،

نجد نق = البعد بين نقطة ومستقيم = $\left|\frac{أ س_١ + ب ص_١ + جـ}{\sqrt{أ^٢ + ب^٢}}\right|$ حيث $(س_١، ص_١) = (-١، ٤)$

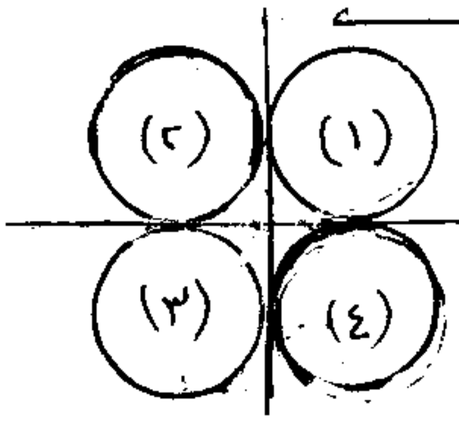
$= \left|\frac{٠ \times -١ + ١ \times ٤ + ٢}{\sqrt{٠^٢ + ١^٢}}\right| = \frac{٦}{١} = ٦$ وحدة طول

∴ معادلة الدائرة هي : $(س+١)^٢ + (ص-٤)^٢ = ٣٦$

أ = ٠ = معامل س في المستقيم
ب = ١ = معامل ص
جـ = ٢ = الحد الثابت لأن المعادلة ص + ٢ = ٠

تدريب ٣ :

ب) بما أن الدائرة تمس المحورين ، ونصف قطرها = ٣ وحدات ، لاحظ الشكل



(١) الحل الأول : الدائرة تقع في الربع الأول ⇐ مركزها (٣، ٣) ، نق = ٣

∴ المعادلة هي : $(س-٣)^٢ + (ص-٣)^٢ = ٩$

(٢) الحل الثاني : الدائرة تقع في الربع الثاني ⇐ المركز (-٣، ٣) ، نق = ٣

∴ المعادلة هي : $(س+٣)^٢ + (ص-٣)^٢ = ٩$

(٣) الحل الثالث : الدائرة تقع في الربع الثالث ⇐ معادلة الدائرة $(س+٣)^٢ + (ص+٣)^٢ = ٩$

(٤) الحل الرابع : الدائرة تقع في الربع الرابع ⇐ معادلة الدائرة $(س-٣)^٢ + (ص+٣)^٢ = ٩$.

٤

تدريب ٢ : ١) بما أن المعادلة على الصورة العامة ، فإن المركز = (-نصف معامل س ، - نصف معامل ص)

∴ إحداثيا المركز = $\left(\frac{-(-٢)}{٢}\ ،\ -\frac{(٦)}{٢}\right) = (١\ ،\ -٣)$

د = ١
هـ = -٣
حـ = الحد المطلق = -٦

طول نصف القطر = $\sqrt{(د)^٢ + (هـ)^٢ - حـ} = \sqrt{(١)^٢ + (-٣)^٢ - (-٦)}$

$= \sqrt{١ + ٩ + ٦} = \sqrt{١٦} = ٤$ وحدة طول

حل آخر: يمكن تحويل المعادلة إلى الصورة القياسية بإكمال مربع ثم إيجاد المركز ونصف القطر.

تدريب ٤ : ٢) $(٣س + ٦)^٢ + (٣ص - ١٢)^٢ = ٣٦$

نحول المعادلة إلى الصورة القياسية على الصورة $(س - د)^٢ + (ص - هـ)^٢ = نق^٢$

$\left(\frac{٣س}{٣} + \frac{٦}{٣}\right)^٢ + \left(\frac{٣ص}{٣} - \frac{١٢}{٣}\right)^٢ = \frac{٣٦}{(٣)^٢}$ بالقسمة على ٣ ، ولاحظ أن ٣ داخل ( )

ومنه $(س + ٢)^٢ + (ص - ٤)^٢ = ٤$.

∴ المركز $(-٢\ ،\ ٤)$ ، $نق = ٢$ وحدة طول.

تدريب (٥) : الصورة العامة لمعادلة الدائرة $س^٢ + ص^٢ + ب س + ج ص + د = ٠$ ، فنعوض النقاط الثلاثة

$(٠\ ،\ ٠) \Leftarrow \boxed{د = ٠}$

$(٢\ ،\ ٠) \Leftarrow (٢)^٢ + ٠ + ٢ب + ٠ + د = ٠ \Leftarrow ٤ + ٢ب = ٠ \Leftarrow \boxed{ب = -٢}$

$(-١\ ،\ ٣) \Leftarrow (-١)^٢ + (٣)^٢ + ١-ب + ٣ج + د = ٠ \Leftarrow ١٠ - ب + ٣ج = ٠$

$١٠ - ١-(-٢) - ٣ج = ٠ \Leftarrow ٦ - ٣ج = ٠ \Leftarrow \boxed{ج = ٢}$

∴ معادلة الدائرة $\boxed{س^٢ + ص^٢ - ٢س + ٤ص = ٠}$

إحداثيا مركز الدائرة = $\left(-\frac{\text{معامل س}}{٢}\ ،\ -\frac{\text{معامل ص}}{٢}\right) = \left(-\frac{-٢}{٢}\ ،\ -\frac{٤}{٢}\right) = (١\ ،\ -٢)$

$نق = \sqrt{د^٢ + هـ^٢ - حـ} = \sqrt{(-٢)^٢ + (١)^٢ - ٠} = \sqrt{٥}$ وحدة طول.

تدريب (٦) : بما أن الصورة العامة لمعادلة الدائرة هي :

$س^٢ + ص^٢ + ب س + ج ص + د = ٠$ ، مركزها على محور الصادات ⇐ إحداثيا $(٠\ ،\ -\frac{ب}{٢})$

وبما أن النقاط $(-١\ ،\ ٣)$ ، $(٥\ ،\ ١)$ تقع على الدائرة ، فإنها تحقق معادلتها ، ومنه

$-١٠ + ٣ب + د = -٢٦$ ـــــ ②

$٢٥ + ب + د = -٢٦$ ـــــ ③

وبما أن المركز = (-نصف معامل س ، - نصف معامل ص) = $(٠\ ،\ -\frac{ب}{٢}) = (٠\ ،\ -\frac{-٨}{٢})$

∴ $\boxed{ب = ٨}$

وبحل نظام المعادلتين ② ، ③ نجد أن $\boxed{ب = ٨}$ ، $\boxed{د = -٣٤}$

∴ الصورة النهائية لمعادلة الدائرة هي : $\boxed{س^٢ + ص^٢ + ٨ص - ٣٤ = ٠}$

ملاحظة : يمكن حل السؤال على المسافة بين نقطتين. $س^٢ + (ص - هـ)^٢ = نق^٢$ ، المركز $(٠\ ،\ -٤)$ ، $نق = ٢\sqrt{٥}$ وحدة طول

منهاجي بمسائل الدائرة :
متعة التعليم الهادف

حل ٤) معادلة الدائرة $س^2 + ص^2 = (٨)^2$

ب) معادلة الدائرة $(س+٢)^2 + (ص-١)^2 = ٤٩$ لأنه نصف = $\sqrt{(٥-٢)^2 + (-١-١)^2}$ = ٧ وحدة طول

حـ) معادلة الدائرة $(س-٣)^2 + (ص+٧)^2 = ٤٩$ لأن نصف = البعد بين المركز والمماس = $|-٧|$ = ٧ وحدة طول

د) معادلة الدائرة $(س-٥)^2 + (ص-١)^2 = (\sqrt{٥٧})^2$ لأن المركز = $(\frac{٦+٤}{٢}, \frac{-١+٣}{٢}) = (٥, ١)$

نصف = $\sqrt{(٦-٥)^2 + (-١-١)^2}$ = $\sqrt{٥٧}$ وحدة طول

هـ) معادلة الدائرة $(س-٥)^2 + (ص+٥)^2 = (٥)^2$ لأن الدائرة تقع في الربع الرابع وتمس المحورين فإن المركز (٥ ، -٥)

و) الدائرة يقع مركزها على محور السينات ⇐ المركز $(-\frac{ب}{٢}, ٠)$ ⇐ ب = ٠

تمر بالنقطة (٠ ، -٢) ⇐ جـ = -٤

تمر بالنقطة (٤ ، ٤) ⇐ ٤أ + ٤ب + جـ = -٣٢ ⇐ أ = -٧

∴ معادلة الدائرة هي $س^2 + ص^2 - ٧س - ٤ = ٠$

ز) تمر بالنقاط (-٥ ، ٠) ، (-٣ ، ٤) ، (١ ، ٢) فتكون نظاماً من ثلاث معادلات بثلاث متغيرات وحله

النظام : $-٢٥ = ٢٥أ - ٥ب + جـ$ ①

$-٢٥ = ١٠أ + ٤ب + جـ$ ②

$-٥ = أ + ٢ب + جـ$ ③

ومن الحل نجد أن أ = ٤ ، ب = -٢ ، جـ = -٥

∴ المعادلة هي : $س^2 + ص^2 + ٤س - ٢ص - ٥ = ٠$

ح) الدائرة تمس محور السينات عند النقطة (٧ ، ٠) ⇐ مركز الدائرة = $(-\frac{أ}{٢}, -\frac{ب}{٢}) = (٧, -\frac{ب}{٢})$ ⇐ أ = -١٤

وتمس النقطة (٧ ، ٠) ⇐ جـ = ٤٩

وتمر بالنقطة (٢ ، ١) ⇐ ب = -٢٠

∴ معادلة الدائرة هي $س^2 + ص^2 - ١٤س - ٢٠ص + ٤٩ = ٠$

عن أ) المركز (٠ ، ٠) ، نصف = $\sqrt{١٤٤}$ = ١٢ وحدة طول

عن ب) نكتب المعادلة على الصورة القياسية $(س+١١)^2 + (ص+٤)^2 = ١٣$ ⇐ المركز (-١١ ، -٤) ، نصف = $\sqrt{١٣٧}$ وحدة طول.

عن حـ) المركز (٠ ، ٧) ، نصف = $\sqrt{٨١}$ = ٩ وحدة طول .

عن د) نكتب المعادلة على الصورة العامة $س^2 + ص^2 - ٨س - ٦ص - ٩ = ٠$

المركز $(+\frac{٨}{٢}, +\frac{٦}{٢}) = (٤ ، ٣)$

نصف = $\sqrt{(٤)^2 + (٣)^2 - (-٩)}$ = $\sqrt{١٦ + ٩ + ٩}$ = $\sqrt{٣٤}$ وحدة طول .

منهاجي
متعة التعليم الهادف

هـ) نكتب المعادلة على الصورة القياسية :

$٣س^٢ + ٣ص^٢ + ٦ص - ٢٧ = ٠$ نقسم على ٣

$س^٢ + ص^٢ + ٢ص - ٩ = ٠$

المركز $(٠ ، -١)$ ، نق $= \sqrt{(٠)^٢ + (-١)^٢ - (-٩)} = \sqrt{١٠}$ وحدة طول .

و) $(\frac{٢}{٢}س - \frac{٣}{٢})^٢ + (\frac{٢ص}{٢} + \frac{١٠}{٢})^٢ = \frac{١٠٠}{(٢)^٢}$

$(س-١)^٢ + (ص+٥)^٢ = ٢٥ \Leftarrow$ المركز $(١ ، -٥)$ ، نق $= ٥$ وحدة طول .

ز) نكتب المعادلة على الصورة القياسية :

$(س+٤)^٢ + ص^٢ = ١٦ \Leftarrow$ المركز $(-٤ ، ٠)$ ، نق $= ٤$ وحدة طول .

ح) مركزها يقع على المستقيم $ص - ٢س = ٤$ وتمس محور السينات عند النقطة $(١ ، ٠)$

المركز $(د ، هـ) = (١ ، هـ)$

وبما أن المركز يقع على المستقيم $ص - ٢س = ٤ \Leftarrow$ يحقق معادلته $\Leftarrow هـ - ٢ \times ١ = ٤ \Leftarrow هـ = ٦$

∴ إحداثيا المركز $(١ ، ٦)$

نق = المسافة بين $(١ ، ٦) ، (١ ، ٠) = ٦$ وحدات

∴ معادلة الدائرة هي $(س-١)^٢ + (ص-٦)^٢ = ٣٦$

ط) مركز الدائرة $= (-٢ ، ٣)$ ، نق = البعد بين المركز والمماس الذي معادلته $٣س - ص + ١٠ = ٠$

نق $= \left| \frac{٣ \times -٢ - ١ \times ٣ + ١٠}{\sqrt{(٣)^٢ + (-١)^٢}} \right| = \left| \frac{-٦ - ٣ + ١٠}{\sqrt{١٠}} \right| = \frac{٦}{\sqrt{١٠}}$ وحدة طول

∴ معادلة الدائرة هي : $(س+٢)^٢ + (ص+٣)^٢ = \frac{٣٦}{١٠}$

منهاجي
متعة التعليم الهادف

ش :

ح بما أن $س = ٣ + ٢جتاهـ \Leftarrow$ جتاهـ $= \frac{س - ٣}{٢}$ ـــــ ①

$ص = ٤ + ٢$ جاهـ $\Leftarrow$ جاهـ $= \frac{ص - ٤}{٢}$ ـــــ ②

لكن جتاهـ + جاهـ = ١ (متطابقة مثلثية)

$\therefore \left(\frac{س - ٣}{٢}\right)^٢ + \left(\frac{ص - ٤}{٢}\right)^٢ = ١ \Leftarrow (س - ٣)^٢ + (ص - ٤)^٢ = ٤$ وهي معادلة الحل الهندسي

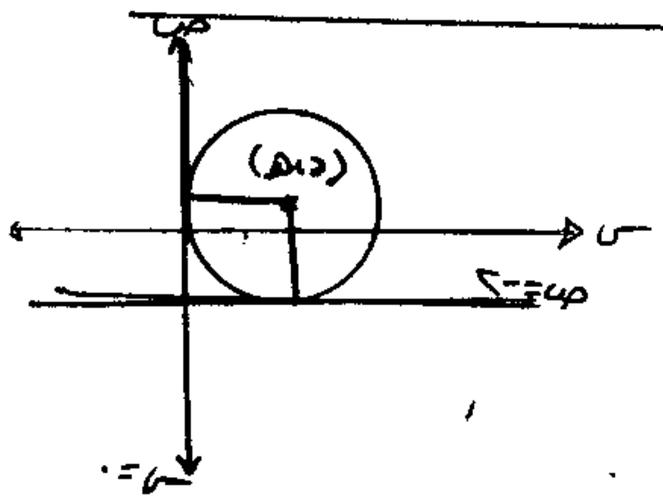
$\therefore$ الحل الهندسي هو دائرة مركزها (٣، ٤)، وطول نصف قطرها = ٢ وحدة

ل بما أن $س^٢ + ص^٢ + ٨س - ٤ص + جـ = ٠$ معادلة دائرة فإن $\left(\frac{-٨}{٢}\right)^٢ + \left(\frac{٤}{٢}\right)^٢ - جـ > ٠$

مركز الدائرة (-٤، ٢) $\quad \frac{-د}{٢} = -٤ \leftarrow د = ٨$ ، $\frac{-ه}{٢} = ٢ \leftarrow ه = -٤$

$\therefore (-٤)^٢ + (٢)^٢ - جـ > ٠$

$١٦ + ٤ > جـ \Leftarrow ٢٠ > جـ \Leftarrow$ قيم جـ = $(-\infty، ٢٠)$



ل معادلة الدائرة هي $(س - د)^٢ + (ص - هـ)^٢ = ر^٢$

$د = ر \Leftarrow هـ = ر$

$\therefore (س - ر)^٢ + (ص - ر + ٢)^٢ = ر^٢$

بما أنه (٠، ٤) تقع على الدائرة $\Leftarrow (٤ - ر)^٢ + (-ر + ٢)^٢ = ر^٢$

وبحل $ر^٢ - ١٢ر + ٢٠ = ٠ \Leftarrow (ر - ١٠)(ر - ٢) = ٠$

$\therefore ر = ١٠$ أو $ر = ٢$ ترفض

عندما $ر = ١٠ \Leftarrow$ المركز (١٠، ٨) $\Leftarrow$ معادلة الدائرة $(س - ١٠)^٢ + (ص - ٨)^٢ = ١٠٠$

ح الدائرة تمس المحورين $\therefore$ المركز (د، د)

بعد الدائرة عن المستقيم $٣ص + ٤س = هـ$

نجد معادلة $\overleftrightarrow{أب} \Leftarrow ص = -س + ٤ \Leftarrow س + ص - ٤ = ٠$

$$\text{البعد} = د = \left|\frac{د + د - ٤}{\sqrt{(١)^٢ + (١)^٢}}\right| = \left|\frac{٢د - ٤}{\sqrt{٢}}\right|$$

$\therefore \sqrt{٢}\, د = |٢د - ٤|$ وبتربيع الطرفين

$(\sqrt{٢}\, د)^٢ = (٢د - ٤)^٢ \Leftarrow ٢د^٢ = ٤د^٢ - ١٦د + ١٦ \Leftarrow د^٢ - ٨د + ٨ = ٠$

$\therefore$ نعوض $د = \frac{٨ \pm \sqrt{(-٨)^٢ - ٤ \times ١ \times ٨}}{٢} \Leftarrow ٤ + ٢\sqrt{٢}$ تهمل لأن نقطة التماس في الشكل المعطى $٤ - ٢\sqrt{٢}$

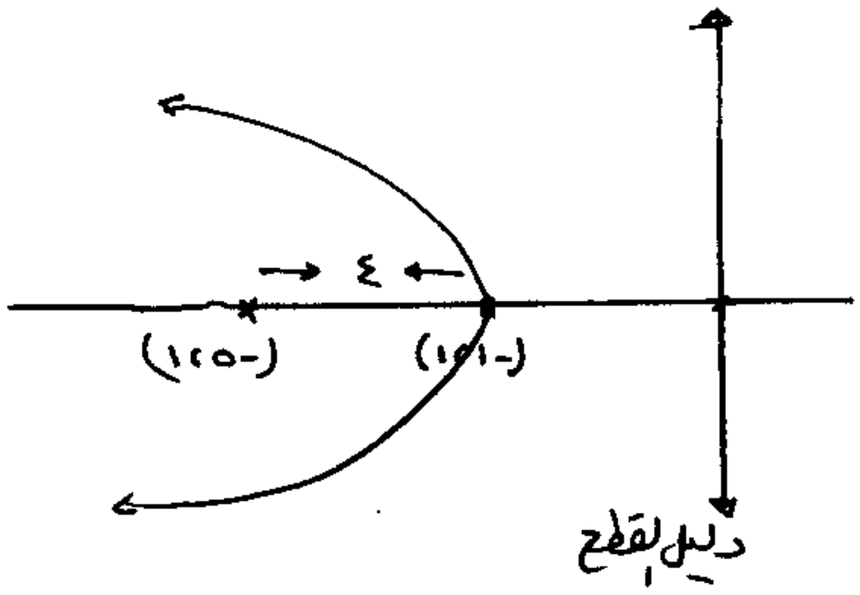
ن معادلة الدائرة هي :

$$(س - ٤ + ٢\sqrt{٢})^٢ + (ص - ٤ + ٢\sqrt{٢})^٢ = (٤ - ٢\sqrt{٢})^٢$$

منهاجي
متعة التعليم الهادف

القطع المكافئ

تدريب ١ : ١) رأس القطع المكافئ (-١، ١) ، بؤرته النقطة (-٥، ١) .



نلاحظ أن القطع مفتوح نحو اليسار

∴ معادلة القطع هي (ص - هـ)^٢ = -٤ جـ (س - د)

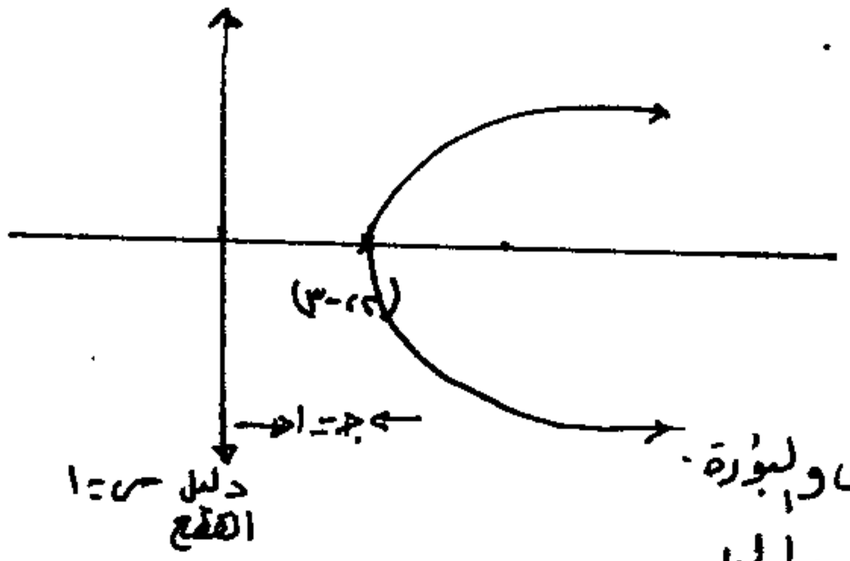
ومنه رأسه (د، هـ) = (-١، ١)

وبعد الرأس عن البؤرة = جـ = ٤ وحدات

∴ المعادلة (ص - ١)^٢ = -٤ × ٤ (س + ١)

(ص - ١)^٢ = -١٦ (س + ١)

تدريب ١ : ٢) رأس القطع المكافئ (٢، -٣) ، معادلة دليله س = ١ .



معادلة القطع المكافئ هي :

(ص + ٣)^٢ = ٤ × ١ (س - ٢)

(ص + ٣)^٢ = ٤ (س - ٢)

حيث جـ = البعد بين الرأس والبؤرة .

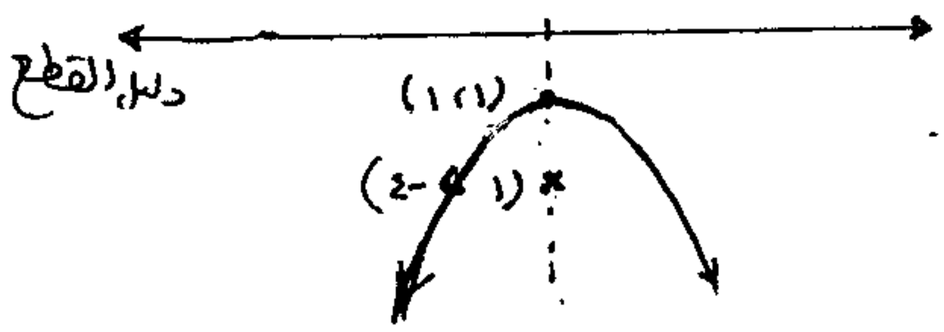
= البعد بين الرأس والدليل .

تدريب ٢ : ١) بما أن البؤرة تقع أسفل الرأس ⇐ القطع مفتوح للأسفل ، وجـ = البعد بين الرأس والبؤرة = ٥ وحدات

∴ معادلة القطع المكافئ هي :

(س - ١)^٢ = -٤ × ٥ (ص - ١)^٢

(س - ١)^٢ = -٢٠ (ص - ١)^٢



٢) الرأس (٠، ٣) ، ومعادلة دليله ص + ٣ = ٠ ← ص = -٣

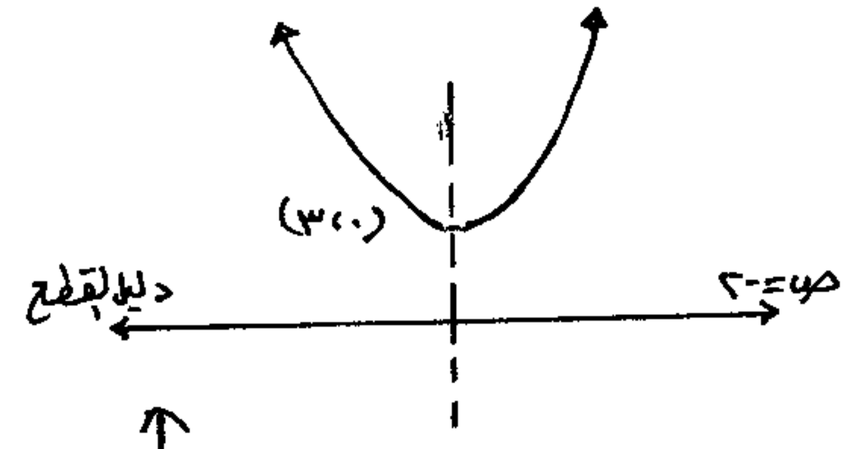
معادلة القطع المكافئ هي :

(س - ٠)^٢ = ٤ × ٥ (ص - ٣)

القطع مفتوح نحو الأعلى

وجـ = ٥

س^٢ = ٢٠ (ص - ٣)



٣) بؤرته (٠، ٠) ومعادلة دليله س = -٦

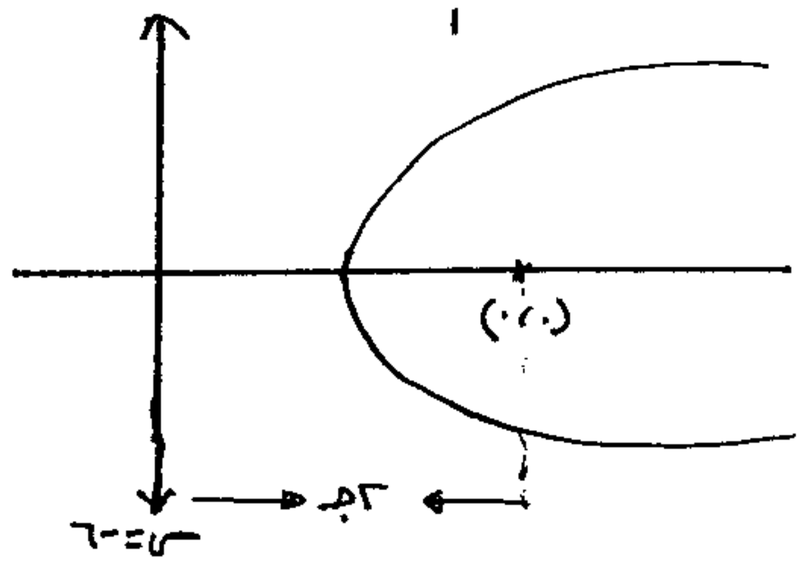
∴ معادلة القطع المكافئ هي :

القطع مفتوح نحو اليمين

وجـ = ٣

ص^٢ = ٤ × ٣ س

ص^٢ = ١٢ س



ح المكافئ :.

تدريب٣ :. نكتب المعادلة على الصورة القياسية :

$(س-١)^{٢} = -(ص+٣)$

ومنه نجد أن القطع مفتوح نحو الأسفل

إحداثيات الرأس = (١ ، -٣) ، $ح = \frac{١}{٤}$

:. إحداثيات البؤرة = $(١ ، -٣\frac{١}{٤})$

معادلة الدليل هي : $ص = -٣ + \frac{١}{٤} = -٢\frac{٣}{٤}$

معادلة محور التماثل هي : $س = ١$

تدريب٤ :. نكتب معادلة القطع على الصورة القياسية

$س^{٢} = ٤(ص-١)$ فيكون منحنى القطع مفتوحًا نحو الأعلى ، $ح = ١$

- الرأس (١ ، ٠) ، البؤرة (٢ ، ٠)

معادلة الدليل هي : $ص = ٠$

معادلة محور التماثل هي $س = ٠$

تدريب٥ :. بما أن محور القطع معادلته $س = -٢$ ⟸ الرأس $(-٢ ، هـ)$

:. معادلة القطع المكافئ هي :.

$(س+٢)^{٢} = ٤ ح (ص - هـ)$

النقطة (٠ ، ٠) تقع على المنحنى ⟸ $\boxed{ح \times هـ = -١}$

النقطة (١ ، ٣) تقع على المنحنى ⟸ $٩ = ١٢ ح + ٤$ ⟸ $ح = \frac{١٢}{٥}$ ، $هـ = -\frac{٥}{١٢}$

:. المعادلة هي : $(س+٢)^{٢} = \frac{٤٨}{٥}(ص + \frac{٥}{١٢})$

حل م) $ص^{٢} = -١٦(س+١)$ حيث $ح = ٤$ ، ومنحنى القطع مفتوح نحو اليسار.

ن) $ص^{٢} = ١٦(س+١)$ حيث $ح = ٤$ ، ومنحنى القطع مفتوح نحو اليمين.

هـ) $(س-٢)^{٢} = ٢٠(ص-٣)$ حيث $ح = ٥$ ، ومنحنى القطع مفتوح نحو الأعلى.

و) $(س-٢)^{٢} = -٢٠(ص-٣)$ حيث $ح = ٥$ ، ومنحنى القطع مفتوح نحو الأسفل.

ي) $(س-١)^{٢} = ٦(ص + \frac{٣}{٢})$ حيث $٢ح$ = البعد بين البؤرة والدليل = ٣ ⟸ $ح = \frac{٣}{٢}$ ، والمنحنى مفتوح نحو الأعلى.

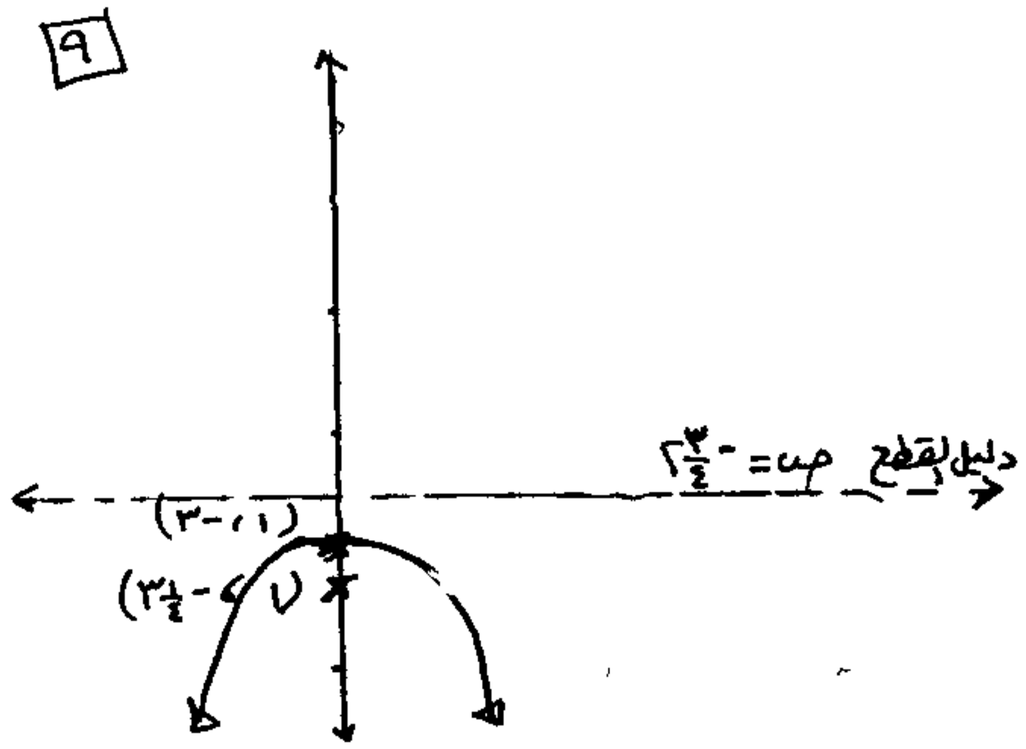
ل) $ص^{٢} = -١٠س$ حيث $٢ح = ٥$ ⟸ $ح = \frac{٥}{٢}$ ، والمنحنى مفتوح نحو اليسار.

ز) $(ص+٥)^{٢} = ٠٫١(س - ١٢٫٣٥)$ حيث $٢ح = ٠٫١$ ⟸ $ح = \frac{٠٫١}{٢}$ ، والمنحنى مفتوح نحو اليمين
وبرأسه $(١٢٫٣٥ ، -٥)$

ع) $(ص+٣)^{٢} = ١٢(س-٢)$ حيث $ح = ٣$ ، والمنحنى مفتوح نحو اليمين.

ط) $(س+١)^{٢} = -١٢(ص-٢)$ حيث $ح = ٣$ ، والمنحنى مفتوح نحو الأسفل.

٩



س = ١ محور التماثل

السطح الناتج

ب(١) المركز (٠،٠) محور السينات // محور الصادات ، ب = ٤ ⇐ ب = ٢

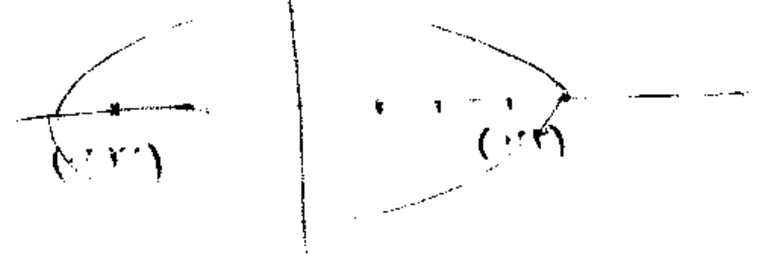
البؤرة (٠،-٣)

$\frac{س^2}{ب^2} + \frac{ص^2}{أ^2} = 1$ ، (٠،-٣) = (٠،-ج) ⇐ أ = ٣

$ج^2 = أ^2 - ب^2$

$9 = 4 - أ^2$ ⇐ $أ^2 = 13$

$\therefore \frac{س^2}{13} + \frac{ص^2}{4} = 1$



ج(١) مقطع ناقص بؤرتاه (٠،-٣)، (٠،٣) ⇐ المركز = (٠،٠)

$\therefore \frac{(ص-د)^2}{ب^2} + \frac{(س-ه)^2}{ن^2} = 1$ ⇐ $\frac{ص^2}{ب^2} - \frac{س^2}{ع^2} = 1$

طول محور المركز = ١٢ ⇐ ٢ب = ١٢ ⇐ ب = ٦

البؤرتان (٥،٤ ± ج) ⇐ (٥،٤-ج) = (٥،٢-) ⇐ ج - ٤ = ٢

(٥،٤+ج) = (٥،٩)

ج + ٤ = ٩

ب = ٦ ، ج = ٣

$ج^2 = أ^2 - ن^2$

$9 = 36 - ن^2$ ⇐ $ن^2 = 27$

$\therefore \frac{(ص-٤)^2}{36} + \frac{(س+٥)^2}{27} = 1$

منهاجي
متعة التعليم الهادف

$$\frac{\text{س}^2}{25} + \frac{\text{ص}^2}{9} = 1$$

١) المركز (٠، ٠)   أ² = ٢٥ ⇐ أ = ٥   جـ² = أ² - ب²

ب² = ٩ ⇐ ب = ٣   = ٢٥ - ٩

جـ² = ١٦

جـ = ٤

٢) البؤرتان (±٤، ٠)

٣) الرأسان (±٥، ٠)

٤) طول المحور الأكبر = ٢أ = ١٠

٥) = = الأصغر = ٢ب = ٦

٦) طول البعد البؤري = ٢جـ = ٨

٧) طرفي المحور الأصغر (٠، ±٣)

<u>س(٤)</u> احد الرؤوس (١، ٤) والبؤرة القريبة من الرأس (١، ٢) ، الاختلاف المركزي = ٠.٥

$$\frac{(\text{س} - \text{د})^2}{\text{أ}^2} + \frac{(\text{ص} - \text{هـ})^2}{\text{ب}^2} = 1$$

أ - جـ = ٤ - ٢ = ٢   جـ / أ = ٠.٥ ⇐ **أ = ٢جـ**

∴ **أ - جـ = ٢**

⇐ ٢جـ - جـ = ٢

جـ = ٢

أ = ٤

(٤، ١) = (د + أ، هـ)   جـ² = أ² - ب²

د + أ = ٤   ٤ = ١٦ - ب² ⇐ **ب² = ١٢**

د + ٤ = ٤   **هـ = ١**

د = ٠

$$\therefore \frac{(\text{س})^2}{16} + \frac{(\text{ص} - 1)^2}{12} = 1$$

<u>س(٥)</u>

$$\frac{(\text{س} - 3)^2}{25} + \frac{(\text{ص} - 2)^2}{16} = 1$$

منهاجي
متعة التعليم الهادف

ت(٦)

$٤\text{س}^2 + ٣\text{ص}^2 + ١٦\text{س} = ١٧٦$

$٤\text{س}^2 + ١٦\text{س} + ٣\text{ص}^2 = ١٧٦$

$٤(\text{س}^2 + ٤\text{س}) + ٣\text{ص}^2 = ١٧٦$

$٤(\text{س}+٢)^2 + ٣\text{ص}^2 - ١٦ = ١٧٦ \Leftarrow ٤(\text{س}+٢)^2 + ٣\text{ص}^2 = ١٩٢$

$\frac{\text{ص}^2}{٦٤} + \frac{(\text{س}+٢)^2}{٤٨} = ١ \Leftarrow \frac{(\text{س}+٢)^2}{٤٨} + \frac{\text{ص}^2}{٦٤} = ١$

١) المركز $(-٢ ، ٠)$ $\quad$ $\text{أ}^2 = ٦٤ \Leftarrow \text{أ} = ٨$

$\text{ب}^2 = ٤٨ \Leftarrow \text{ب} = \sqrt{٤٨}$

$\text{جـ}^2 = \text{أ}^2 - \text{ب}^2 = ١٦ \Leftarrow \text{جـ} = ٤$

٢) الرأسان $(-٢ ، ٠ \pm ٨)$

٣) البؤرتان $(-٢ ، ٠ \pm ٤)$

٣) الاختلاف المركزي $\text{هـ} = \frac{\text{جـ}}{\text{أ}} = \frac{٤}{٨} = ٠,٥$

تمارين ومسائل

① أ) $\frac{(\text{س}-١)^2}{٩} + \frac{(\text{ص}-١)^2}{٤} = ١$

ب) $\frac{\text{ص}^2}{٢٥} + \frac{\text{س}^2}{٢١} = ١$

جـ) $\frac{\text{س}^2}{٢٢} + \frac{\text{ص}^2}{١٦} = ١$

د) $\frac{\text{س}^2}{١٣} + \frac{٤\text{ص}^2}{٣٩} = ١$

هـ) $\frac{(\text{س}-٢)^2}{١٠٠} + \frac{(\text{ص}-٣)^2}{٦٤} = ١$

و) $\frac{(\text{س}+٣)^2}{٢٥} + \frac{(٤\text{ص})}{١٦} = ١$

ز) $\frac{٥\text{ص}^2}{٨١} + \frac{\text{س}^2}{٩} = ١$

(1) $a=\frac{8}{2}\Rightarrow$ ... $\Leftarrow$ $x=8$ ، $y^2=x^3-6^2$ $\Rightarrow$ ... $=y^2$

$=(5-1)^2=$ ... بالطرح

$=25-6^2=$

$=x^3-6^2$

(9) $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1$ ، $a=10$ ، $\frac{37}{2}=36$

(8) $\frac{x^2}{144}+\frac{y^2}{81}=1$ ؛ $y=\frac{3}{4}x$ ، $x^2+y^2=225$

(7) $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{25}=1$ ؛ $y=\frac{3}{4}x$ ، $x=8$

$\frac{(x-5)^2}{9}+\frac{(y-0)^2}{4}=1$

(6) $\frac{x^2}{4}=\frac{y^2}{5}$ ، $\frac{x^2}{4}=\frac{y^2}{5}$ ، $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

(5) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1$

(4) $\frac{(x-1)^2}{25}+\frac{(y-2)^2}{16}=1$

(3) ... $\Leftarrow$ $(a,a+1)$ ، $(a+2,a+5)=(12,3)$

$\overline{a=1}$ ، $\overline{a=3}$

$y^2=x^3-6^2$

$y=0\Leftarrow 6^2-x^3=12$

(3) $4(x-3)^2+9(y-4)^2=36$

مركز الدائرة $(3,4)$ ومعادلة دليلها المطلوب

$a=3\Leftarrow$ ... $\Leftarrow$ مطلوب البؤرة = مركز الدائرة

$\boxed{b=4}\Leftarrow 9=b^2\Leftarrow$

معادلة القطع $\frac{(x-3)^2}{9}+\frac{(y+1)^2}{25}=1$ $\Leftarrow$ $x=-1$ ... بالتعويض

$\boxed{10=c}$ ... $\Leftarrow$ $c^2=a^2+b^2$

مركز الدائرة $(2,-3)$ ونصف قطرها $=6$

$(x-2)^2+(y+3)^2=36$ $\Leftarrow$ مركز الدائرة $(2,-3)$

$x=2$ ، $y=3$ ، $x=-4$ ، $y=-9$

(3) د $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$

$a^2 = 9 \Rightarrow a = 3$ ، $b^2 = 16 \Rightarrow b = 4$

$c^2 = a^2 + b^2 = 9 + 16 = 25 \Rightarrow c = 5$

البؤرتان $(\pm 5, 0)$

الرأسان $(\pm 3, 0)$

البؤرتان على المحور x ، طول المحور الحقيقي $= 2a = 6$

طول المحور المرافق $= 2b = 8$

(4) د $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{5} = 1$

$a^2 = 4 \Rightarrow a = 2$ ، $b^2 = 5 \Rightarrow b = \sqrt{5}$

$c^2 = a^2 + b^2 = 4 + 5 = 9 \Rightarrow c = 3$

البؤرتان $(0, \pm 3)$

الرأسان $(0, \pm 2)$

البؤرتان على المحور y ، طول المحور الحقيقي $= 2a = 4$

طول المحور المرافق $= 2b = 2\sqrt{5}$

(5) د $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1$

البؤرتان: $(0, \pm 5)$

$a^2 = 16 \Rightarrow a = 4$ ، $b^2 = 9 \Rightarrow b = 3$

$c^2 = a^2 + b^2 = 16 + 9 = 25 \Rightarrow c = 5$

(6) د $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = 1$

$a^2 = 25 \Rightarrow a = 5$ ، $b^2 = 9 \Rightarrow b = 3$

$c^2 = a^2 + b^2 = 25 + 9 = 34 \Rightarrow c = \sqrt{34}$

البؤرتان $(\pm \sqrt{34}, 0)$

الرأسان $(\pm 5, 0)$

البؤرتان على المحور x ، طول المحور الحقيقي $= 2a = 10$

طول المحور المرافق $= 2b = 6$

(7) د $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$

$a^2 = 4 \Rightarrow a = 2$ ، $b^2 = 5 \Rightarrow b = \sqrt{5}$

$c^2 = a^2 + b^2 = 4 + 5 = 9 \Rightarrow c = 3$

البؤرتان $(\pm 3, 0)$

الرأسان $(\pm 2, 0)$

البؤرتان على المحور x ، طول المحور الحقيقي $= 2a = 4$

طول المحور المرافق $= 2b = 2\sqrt{5}$

(8) د $\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{144} = 1$

$a^2 = 25 \Rightarrow a = 5$ ، $b^2 = 144 \Rightarrow b = 12$

$c^2 = a^2 + b^2 = 25 + 144 = 169 \Rightarrow c = 13$

البؤرتان $(0, \pm 13)$

الرأسان $(0, \pm 5)$

البؤرتان على المحور y ، طول المحور الحقيقي $= 2a = 10$

طول المحور المرافق $= 2b = 24$

(9) د $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{9} = 1$

$a^2 = 64 \Rightarrow a = 8$ ، $b^2 = 9 \Rightarrow b = 3$

$c^2 = a^2 + b^2 = 64 + 9 = 73 \Rightarrow c = \sqrt{73}$

البؤرتان $(\pm \sqrt{73}, 0)$

الرأسان $(\pm 8, 0)$

البؤرتان على المحور x ، طول المحور الحقيقي $= 2a = 16$

طول المحور المرافق $= 2b = 6$

(10) د $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{5} = 1$

$a^2 = 4 \Rightarrow a = 2$ ، $b^2 = 5 \Rightarrow b = \sqrt{5}$

$c^2 = a^2 + b^2 = 4 + 5 = 9 \Rightarrow c = 3$

البؤرتان $(0, \pm 3)$

الرأسان $(0, \pm 2)$

البؤرتان على المحور y ، طول المحور الحقيقي $= 2a = 4$

طول المحور المرافق $= 2b = 2\sqrt{5}$

(11) $2 + 6 = 8$

$8 - 6 = 2$

بقسمة الطرفين على 2

$4 - 3 = 1 \Rightarrow$ (قطع زائد)

$6 + 2 = 8 \Rightarrow$ (قطع ناقص)

ب) (٥) ، $\frac{(س-١)^2}{٥} - \frac{(ص+٢)^2}{٢} = ١$ ، العاصر تضيق مباشر .

ج) $\frac{س^2}{٤} - \frac{ص^2}{٩} = ١$ ، العاصر تضيق مباشر .

تمارين وسائل

١) $\frac{س^2}{٩} - \frac{ص^2}{٤} = ١$

ب) $\frac{ص^2}{٢٥} - \frac{س^2}{١٢٤} = ١$

ج) $\frac{٥س^2}{١٤} - \frac{ص^2}{٣٦} = ١$

د) $\frac{(س+١)^2}{٤} - \frac{٥(ص-١)^2}{١٦} = ١$

هـ) $\frac{س^2}{١٦} - \frac{ص^2}{٤} = ١$

و) $٤ص^2 - \frac{س^2}{٢} = ١$

ز) $٤(س-٣)^2 + ٤(ص-٢)^2 = ٢٦ \Leftarrow (س-٣)^2 + (ص-٢)^2 = ٩$ معادلة الدائرة

مركزها (٣، ٢) هو احد بؤرتي القطع الزائد

بعد = ٣ ⇐ البؤرة = القطع ⇐ ب ج = ٦

$\boxed{ب = ٣}$

معادلة محور القطع هي $س = -١$

⇐ معادلة القطع هي $\frac{(س+١)^2}{ج^2} - \frac{(ص+٥)^2}{ب^2} = ١$

البؤرة (٣، ٢) ⇐ $(-١+ج، ٥+١)$ ⇐ $-١+ج = ٣$ ⇐ $\boxed{ج = ٤}$ ، $\boxed{ب = ٣}$

$ج^2 = ب^2 + د^2$

$١٦ = ٩ + د^2$

⇐ $\boxed{د = ٧}$

∴ $\frac{(س+١)^2}{٩} - \frac{(ص+٥)^2}{٩} = ١$

منهاجي
متعة التعليم الهادف

١٦

٤) $\frac{(س-٤)^2}{٤٤} + \frac{(ص-٣)^2}{٤} = ١$ ⇐ $٤(س-٤)^2 + ٤(ص-٣)^2 = ١٦$ معادلة الدائرة ، نق = ٢

مركزها (٤ ، ٣) ١هـ سا ∩ القطع الزائد

طول الرافق ٢ب = القطر = ٤ ⇐ **ب = ٢**

المركز (٤ ، ٥) تقع كل ص = -١ ⇐ **ج = -١**

١هـ الرأسية (٤ ، ٣) = (٤ ، ج + ا) ⇐ ٤ = ا + ج - ⇐ **ا = ٥**

ا = ٣

$١ = \frac{(ص-٣)^2}{٤} - \frac{(س+١)^2}{٢٥}$

٥) $\frac{ل س^2}{٩٠} - \frac{ل ص^2}{٩٠} = ١$ ، $ل^2 = \frac{٩٠}{ل}$ ، $ا^2 = \frac{٩٠}{ل}$

طول محور المقاطع = ٢ب = ٢٧٦ ⇐ **ب = ٣٧٦**

$\frac{٩٠}{ل} = (٣٧٦)^2$ ⇐

١هـ ل = ٩٠

$ل = \frac{٩٠}{١٨} = \frac{١٠}{٢} = ٥$

القطع الزائد

$هـ^2 = ا^2 + ب^2$

$هـ^2 = \frac{٩٠}{ل} + \frac{٩٠}{ل}$

البؤرتان (± هـ ، ٠) = (± ٢٨ ، ٠)

$٢٨ = \frac{٩٠}{ل} + \frac{٩٠}{ل}$

$١٨ = \frac{٩٠}{ل} + ٤٨$

ل = ٩

القطع الناقص $٩س^2 + ١٦ص^2 = ٥٧٦$

$١ = \frac{س^2}{٦٤} + \frac{ص^2}{٣٦}$

البؤرتان (± ٢٨ ، ٠)

$هـ^2 = ٢٨$

$هـ = \sqrt{٢٨}$

منهاجي
متعة التعليم الهادف

(٦) $\frac{س+٤}{٥} = قتاه$ ، $\frac{ص-٢}{-٣} = ظاه$

$ظ^٢ه + ١ = ق^٢ه \Leftarrow ق^٢ه - ظ^٢ه = ١$

$\frac{(س+٤)^٢}{٢٥} - \frac{(ص-٢)^٢}{٩} = ١$ قطع زائد

منهاجي
متعة التعليم الهادف

(٦) الإحصاء والاحتمالات / علمي

الفصل الأول: الإحصاء

أولاً :- الارتباط

تدريب (١) ارتباط عكسي ، لأن العلاقة تمثل خط مستقيم ميله سالب .

تمارين ومسائل:

(١) طردي

(٢) أ طردي تام في الشكل (٦-٤) ، عكسي في الشكل (٦-٥)

ب لا ، لأن العلاقة ص = ٦ + ٣س تمثل ارتباطاً طردياً والشكل المرسوم يمثل ارتباطاً عكسياً .

(٤) أ عكسي

ب متوحدًا (تام) .

(٥) نعم

(٦) أ طردي:

س	١	٢	٣
ص	٥	٦	٧

ب عكسي

س	٢	٣	٤
ص	٧	٦	٣

ثانياً :- معامل ارتباط بيرسون

تدريب (١) ر = ٠٫٨٤

تدريب (٢) أ ب -١ ج ضعيفاً .

تدريب (٣) أ ٠٫٨٩ ج ٠٫٨٩

تدريب (٤) ر = ٠٫٨٤

تمارين ومسائل

(١) أ قوياً ب صفر ج الكمية د نوع و قوة

(٢) ر = ٠٫٩٧

(٣) ر = $\frac{-١}{\sqrt{١٫٧١٠٧}}$ = -١٫٠

(٤) تدل على نوع الارتباط : (موجبة تعني ارتباطاً طردياً وسالبة تعني ارتباطاً عكسياً) .

(٥) العلاقة س، م، ن أقوى لأنه |-٠٫٩| > |٠٫٨|

(٦) أ -٠٫٣ ج ٠٫٣

ثالثاً: معادلة خط الانحدار

تدريب (1) أ) ص = س + 11 ب) ص^ = س + 11

ج) أ د) صفر

تمارين ومسائل:

1) أ) ص^ = 2س + 2

ب) 16

ج) 1

ج) أ) ص = 1 و ب = 1

ب) أخطاء

ج) صفر

3) تدل على نوع الارتباط.

4) ص^ = 0.7 س + 2.3

5) ص = الحقيقية = 9 ، ص^ المتنبأ بها = 2×3 + 1 = 7

الخطأ في التنبؤ = ص - ص^ = 2

6)

س	1	2	3
ص	9	8	7

الفصل الثاني: الاحتمالات

أولاً: المتغير العشوائي المنفصل

تدريب (1) أ) 2، 3، 4، 5، 6، 7، 8، 9، 10، 11، 12

ب) 0، 1، 2، 3، 4

ج) 0، 1، 2، 3، 4

تدريب (2) أ)

س	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
ل(س)	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

ب)

س	0	1	2	3	4
ل(س)	1/16	4/16	6/16	4/16	1/16

تمثل بالمثلث إلى ذات الحدين بعد الانتهاء منه.

ج)

س	0	1	2	3	4
ل(س)	21/256	112/256	70/256	28/256	7/256

ل(س = 0) = ل(0 من 11 و 4) = (4 0)(7 5) / (11 5) = 21/462

ل(س = 1) = ل(1 من 11 و 4) = (4 1)(7 4) / (11 5) = 140/462

وهكذا

منهاجي
متعة التعليم الهادف

تدريب (٣) ٢ك + ٠,٣ + ٠,٤٥ + ٢ك = ١ ومنه، ك = ٠,٠٥

تمارين ومسائل

١) ٠، ١، ٢، ٣

٢) ٠، ١، ٢، ٣، ٤

٣)

س	٠	١	٢	٣	٤	٥
ل(س)	$\frac{٦}{٣٦}$	$\frac{١٠}{٣٦}$	$\frac{٨}{٣٦}$	$\frac{٦}{٣٦}$	$\frac{٤}{٣٦}$	$\frac{٢}{٣٦}$

٤)

س	١	٢	٣
ل(س)	$\frac{٦}{٥٦}$	$\frac{٣٠}{٥٦}$	$\frac{٢٠}{٥٦}$

ل(س=١) = $\frac{\binom{٦}{١}\binom{٢}{٢}}{\binom{٨}{٣}} = \frac{٦}{٥٦}$ وهكذا.

ب	ح
٦	٢

١، ل(ح ح ب + ح ب ح + ب ح ح) = ٣ × $(\frac{٦}{٨} \times \frac{٢}{٧} \times \frac{١}{٦})$ = $\frac{٦}{٥٦}$

٥) أ) ل(١) + ل(٢) + ل(٣) = ١ ومنه، ٤ن + ٢ن + ٤ن = ١ ⟸ ن = $\frac{١}{١٠}$

ب)

س	١	٢	٣
ل(س)	٠,٤	٠,٢	٠,٤

٦)

س	١	٢	٣	٤
ل(س)	$\frac{٤}{١٠}$	$\frac{٣}{١٠}$	$\frac{٢}{١٠}$	$\frac{١}{١٠}$
	ح	ب ح	ب ب ح	ب ب ب ح

بيضاء	حمراء
٣	٢

ل(س=١) = $\frac{٢}{٥} = \frac{٤}{١٠}$

ل(س=٢) = $\frac{٣}{٥} \times \frac{٢}{٤} = \frac{٣}{١٠}$

ل(س=٣) = $\frac{٣}{٥} \times \frac{٢}{٤} \times \frac{٢}{٣} = \frac{٢}{١٠}$

ل(س=٤) = $\frac{٣}{٥} \times \frac{٢}{٤} \times \frac{١}{٣} \times \frac{٢}{٢} = \frac{١}{١٠}$

ثانياً: توزيع ذات الحدين

تدريب (١) أ) ل(س=٣) = $\binom{٣}{٣}$(٠,٤)^{٣}(٠,٦)^{٠} = (٠,٤)^{٣} = ٠,٠٦٤

ب) ل(س<١) = ل(س=٠) = $\binom{٣}{٠}$(٠,٤)^{٠}(٠,٦)^{٣} = ٠,٢١٦

ج) ل(س≥٢) = ل(س=٢) + ل(س=٣)

د) ل(س≥١) = ل(س=١) + ل(س=٢) + ل(س=٣) = ١ − ل(س=٠) = ١ − ٠,٢١٦ = ٠,٧٨٤

تدريب (٢) ن = ٧ ، أ = $\frac{١}{٤}$

١) ل(س=١) = $\binom{٧}{١}$$(\frac{١}{٤})^{١}$$(\frac{٣}{٤})^{٦}$

٢) ل(س≥٢) = ل(س=٢) + ل(س=٣) + ... + ل(س=٧) = ١ − [ل(س=١) + ل(س=٠)] ...

٣) ل(س≤١) = ل(س=١) + ل(س=٠) ......

تدريب (٣) ن = ٢٠ ، أ = ٠,٧٥

١) ل(س=٥) = $\binom{٢٠}{٥}$(٠,٧٥)^{٥}(٠,٢٥)^{١٥} ، ٢) ل(س=٠) = $\binom{٢٠}{٠}$(٠,٧٥)^{٠}(٠,٢٥)^{٢٠} = (٠,٢٥)^{٢٠}

ب) $n=10$ ، $p=0.8$

$P(x=0)+P(x=1)+P(x=2)+P(x=3)+P(x=4)=\binom{10}{0}(0.8)^0(0.2)^{10}+\binom{10}{1}(0.8)^1(0.2)^9+\binom{10}{2}(0.8)^2(0.2)^8+\binom{10}{3}(0.8)^3(0.2)^7+\binom{10}{4}(0.8)^4(0.2)^6$

$=(0.2)^6[(0.2)^4+10(0.8)(0.2)^3+45(0.8)^2(0.2)^2+120(0.8)^3(0.2)+210(0.8)^4]$

$=(0.2)^6(16+160+720+1920+2100)=(0.2)^6(4916)$

$=0.0050176$

ج) $n=8$ ، $p=\frac{1}{4}$

$P(x=5)+P(x=6)+P(x=7)+P(x=8)=\binom{8}{5}(\frac{1}{4})^5(\frac{3}{4})^3+\binom{8}{6}(\frac{1}{4})^6(\frac{3}{4})^2+\binom{8}{7}(\frac{1}{4})^7(\frac{3}{4})^1+\binom{8}{8}(\frac{1}{4})^8(\frac{3}{4})^0$

$=(\frac{1}{4})^5[56(\frac{3}{4})^3+28(\frac{1}{4})(\frac{3}{4})^2+8(\frac{1}{4})^2(\frac{3}{4})+(\frac{1}{4})^3]$

$=(\frac{1}{4})^5(\frac{1512+252+24+1}{64})=(\frac{1}{4})^5(\frac{1789}{64})$

$=\frac{1789}{65536}$

د) $n=8$ ، $p=\frac{1}{4}$

$P(x\le 4)=1-[P(x=5)+P(x=6)+P(x=7)+P(x=8)]$

$=1-\frac{1789}{65536}=\frac{63747}{65536}$

هـ) $P(x=0)=\binom{8}{0}(\frac{1}{4})^0(\frac{3}{4})^8=(\frac{3}{4})^8=\frac{6561}{65536}$

$P(x=1)=\binom{8}{1}(\frac{1}{4})^1(\frac{3}{4})^7=8(\frac{1}{4})(\frac{3}{4})^7=\frac{17496}{65536}$

$P(x=2)=\binom{8}{2}(\frac{1}{4})^2(\frac{3}{4})^6=28(\frac{1}{4})^2(\frac{3}{4})^6=\frac{20412}{65536}$

$P(x=3)=\binom{8}{3}(\frac{1}{4})^3(\frac{3}{4})^5=56(\frac{1}{4})^3(\frac{3}{4})^5=\frac{12960}{65536}$

$P(x=4)=\binom{8}{4}(\frac{1}{4})^4(\frac{3}{4})^4=70(\frac{1}{4})^4(\frac{3}{4})^4=\frac{5670}{65536}$

x	0	1	2	3	4
$P(x)$	$\frac{6561}{65536}$	$\frac{17496}{65536}$	$\frac{20412}{65536}$	$\frac{12960}{65536}$	$\frac{5670}{65536}$

و) $P(x=0)+P(x=1)+P(x=2)+P(x=3)+P(x=4)=\frac{63747}{65536}$

ز) $n=10$ ، $p=0.7$

$P(x\le 3)=P(x=0)+P(x=1)+P(x=2)+P(x=3)=\binom{10}{0}(0.7)^0(0.3)^{10}+\binom{10}{1}(0.7)^1(0.3)^9+\binom{10}{2}(0.7)^2(0.3)^8+\binom{10}{3}(0.7)^3(0.3)^7$

$=(0.3)^7[(0.3)^3+10(0.7)(0.3)^2+45(0.7)^2(0.3)+120(0.7)^3]$

$=(0.3)^7(0.027+0.63+4.725+41.16)=(0.3)^7(46.542)$

$=0.0021819$

ح) $n=8$ ، $p=0.5$

$P(x\ge 4)=P(x=4)+P(x=5)+P(x=6)+P(x=7)+P(x=8)=\binom{8}{4}(0.5)^4(0.5)^4+\binom{8}{5}(0.5)^5(0.5)^3+\binom{8}{6}(0.5)^6(0.5)^2+\binom{8}{7}(0.5)^7(0.5)^1+\binom{8}{8}(0.5)^8(0.5)^0$

$=(0.5)^8[70+56+28+8+1]=(0.5)^8(163)$

$=0.6367$

ط) $n=8$ ، $p=0.5$

$P(x\le 4)=1-[P(x=5)+P(x=6)+P(x=7)+P(x=8)]$

$=1-[\binom{8}{5}(0.5)^5(0.5)^3+\binom{8}{6}(0.5)^6(0.5)^2+\binom{8}{7}(0.5)^7(0.5)^1+\binom{8}{8}(0.5)^8(0.5)^0]$

$=1-[(0.5)^8(56+28+8+1)]=1-(0.5)^8(93)$

$=0.6367$

منهاجي
متعة التعليم الهادف

ثالثا : العلامة المعيارية

تدريب (١) أ) $\frac{س - س}{ع}$ = ٢ ب) ٤٤,٥ ج) ٣٧

تدريب (٢) مستوى التحصيل في الفيزياء أفضل ؛ لأن له العلامة المعيارية في الفيزياء أكبر منها في الرياضيات.

تدريب (٣) أ) ع = ٤

ب) س = ٧٢

ج) ٨٥

تمارين ومسائل

١) أ) س = ٥٨

ب) ٥ ف ٥ ف ٥

ج) ٥ ف ٥ ف ٥

د) ع = ٤ ف ٥ ف ٨٠,٦٧٢٦٧١٦ ف ٦٤

هـ) ع = ٦

و) $س = \frac{\sum_{ر=١}^{ن} س_ر}{ن}$ ⇒ $\sum_{ر=١}^{ن} س_ر = ن س$

$$\text{الوسط الحسابي للعلامات المعيارية} = \frac{\sum_{ر=١}^{ن} ز_ر}{ن}$$

$$= \frac{\frac{س_١ - س}{ع} + \frac{س_٢ - س}{ع} + \cdots + \frac{س_ن - س}{ع}}{ن}$$

$$= \frac{(س_١ + س_٢ + \cdots + س_ن) - (س + س + \cdots + س)}{ن ع}$$

(ن مرات)

$$= \frac{\sum_{ر=١}^{ن} س_ر - ن س}{ن ع} = \frac{ن س - ن س}{ن ع} = \frac{صفر}{ع}$$

= صفر

وهو المطلوب.

$\frac{14}{115} = \frac{28}{230} = \frac{7}{9} \times \frac{4}{10} \times \frac{3}{11} = (x=y)$ أ.

$\sum_{y=0}^{2} \binom{3}{y}\binom{9}{5-y} = (x=y)$ ب. $\frac{\binom{3}{0}\binom{9}{5} + \binom{3}{1}\binom{9}{4} + \binom{3}{2}\binom{9}{3}}{\binom{12}{5}}$

ج) $P(x=y) = 1 - [P(x=0) + P(x=1) + P(x=2)]$ ، حيث $P(x=y) = \binom{3}{y}\binom{9}{5-y}$

د) احتمال أن يكون الطالب ذكراً $= \frac{3}{5}$ احتمال أن يكون الطالب أنثى $= \frac{2}{5}$

هـ) $P(x=3) = 0$

أ) $P(x=3) = \frac{1}{7}$

ب) $P(x=4) = \binom{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{8}$

ج) $P(x \geq 1) = 1 - P(x=0) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$

د) $P(x=0) = \binom{3}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$

هـ) $P(x=0) + P(x=1) + P(x=2) + P(x=3) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = 1$

و) $P(x=0) = \frac{1}{8}$

ز) $P(x=1) = \frac{3}{8}$

ح) $P(x=2) = \frac{3}{8}$

ط) $P(x=3) = \frac{1}{8}$

ي) $P(x=4) = 0$

ك) $P(x=5) = 0$

ل) $P(x=6) = 0$

م) $P(x=7) = 0$

ن) $P(x=8) = 0$

س) $P(x=9) = 0$

ع) $P(x=10) = 0$

ف) $P(x=11) = 0$

ص) $P(x=12) = 0$

ق) $P(x=13) = 0$

ر) $P(x=14) = 0$

ش) $P(x=15) = 0$

ت) $P(x=16) = 0$

ث) $P(x=17) = 0$

خ) $P(x=18) = 0$

ذ) $P(x=19) = 0$

ض) $P(x=20) = 0$

ظ) $P(x=21) = 0$

غ) $P(x=22) = 0$

أ) $P(x=0) = \binom{3}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$

ب) $P(x=1) = \binom{3}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{8}$

ج) $P(x=2) = \binom{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{3}{8}$

د) $P(x=3) = \binom{3}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{1}{8}$

هـ) $P(x=0) + P(x=1) + P(x=2) + P(x=3) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = 1$

و) $P(x=0) = \frac{1}{8}$

ز) $P(x=1) = \frac{3}{8}$

ح) $P(x=2) = \frac{3}{8}$

ط) $P(x=3) = \frac{1}{8}$

ي) $P(x=4) = 0$

ك) $P(x=5) = 0$

ل) $P(x=6) = 0$

م) $P(x=7) = 0$

ن) $P(x=8) = 0$

س) $P(x=9) = 0$

ع) $P(x=10) = 0$

ف) $P(x=11) = 0$

ص) $P(x=12) = 0$

ق) $P(x=13) = 0$

ر) $P(x=14) = 0$

ش) $P(x=15) = 0$

ت) $P(x=16) = 0$

ث) $P(x=17) = 0$

خ) $P(x=18) = 0$

ذ) $P(x=19) = 0$

ض) $P(x=20) = 0$

ظ) $P(x=21) = 0$

غ) $P(x=22) = 0$

أ) $P(x=0) = \binom{3}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$

ب) $P(x=1) = \binom{3}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{8}$

ج) $P(x=2) = \binom{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{3}{8}$

د) $P(x=3) = \binom{3}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{1}{8}$

هـ) $P(x=0) + P(x=1) + P(x=2) + P(x=3) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = 1$

و) $P(x=0) = \frac{1}{8}$

ز) $P(x=1) = \frac{3}{8}$

ح) $P(x=2) = \frac{3}{8}$

ط) $P(x=3) = \frac{1}{8}$

ي) $P(x=4) = 0$

ك) $P(x=5) = 0$

ل) $P(x=6) = 0$

م) $P(x=7) = 0$

ن) $P(x=8) = 0$

س) $P(x=9) = 0$

ع) $P(x=10) = 0$

ف) $P(x=11) = 0$

ص) $P(x=12) = 0$

ق) $P(x=13) = 0$

ر) $P(x=14) = 0$

ش) $P(x=15) = 0$

ت) $P(x=16) = 0$

ث) $P(x=17) = 0$

خ) $P(x=18) = 0$

ذ) $P(x=19) = 0$

ض) $P(x=20) = 0$

ظ) $P(x=21) = 0$

غ) $P(x=22) = 0$

أ) $P(x=0) = \binom{3}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$

ب) $P(x=1) = \binom{3}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{8}$

ج) $P(x=2) = \binom{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{3}{8}$

د) $P(x=3) = \binom{3}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{1}{8}$

هـ) $P(x=0) + P(x=1) + P(x=2) + P(x=3) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = 1$

و) $P(x=0) = \frac{1}{8}$

ز) $P(x=1) = \frac{3}{8}$

ح) $P(x=2) = \frac{3}{8}$

ط) $P(x=3) = \frac{1}{8}$

ي) $P(x=4) = 0$

ك) $P(x=5) = 0$

ل) $P(x=6) = 0$

م) $P(x=7) = 0$

ن) $P(x=8) = 0$

س) $P(x=9) = 0$

ع) $P(x=10) = 0$

ف) $P(x=11) = 0$

ص) $P(x=12) = 0$

ق) $P(x=13) = 0$

ر) $P(x=14) = 0$

ش) $P(x=15) = 0$

ت) $P(x=16) = 0$

ث) $P(x=17) = 0$

خ) $P(x=18) = 0$

ذ) $P(x=19) = 0$

ض) $P(x=20) = 0$

ظ) $P(x=21) = 0$

غ) $P(x=22) = 0$

أ) $P(x=0) = \binom{3}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$

ب) $P(x=1) = \binom{3}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{8}$

ج) $P(x=2) = \binom{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{3}{8}$

د) $P(x=3) = \binom{3}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{1}{8}$

هـ) $P(x=0) + P(x=1) + P(x=2) + P(x=3) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = 1$

و) $P(x=0) = \frac{1}{8}$

ز) $P(x=1) = \frac{3}{8}$

ح) $P(x=2) = \frac{3}{8}$

ط) $P(x=3) = \frac{1}{8}$

ي) $P(x=4) = 0$

ك) $P(x=5) = 0$

ل) $P(x=6) = 0$

م) $P(x=7) = 0$

ن) $P(x=8) = 0$

س) $P(x=9) = 0$

ع) $P(x=10) = 0$

ف) $P(x=11) = 0$

ص) $P(x=12) = 0$

ق) $P(x=13) = 0$

ر) $P(x=14) = 0$

ش) $P(x=15) = 0$

ت) $P(x=16) = 0$

ث) $P(x=17) = 0$

خ) $P(x=18) = 0$

ذ) $P(x=19) = 0$

ض) $P(x=20) = 0$

ظ) $P(x=21) = 0$

غ) $P(x=22) = 0$

أ) $P(x=0) = \binom{3}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$

ب) $P(x=1) = \binom{3}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{8}$

ج) $P(x=2) = \binom{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{3}{8}$

د) $P(x=3) = \binom{3}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{1}{8}$

هـ) $P(x=0) + P(x=1) + P(x=2) + P(x=3) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = 1$

و) $P(x=0) = \frac{1}{8}$

ز) $P(x=1) = \frac{3}{8}$

ح) $P(x=2) = \frac{3}{8}$

ط) $P(x=3) = \frac{1}{8}$

ي) $P(x=4) = 0$

ك) $P(x=5) = 0$

ل) $P(x=6) = 0$

م) $P(x=7) = 0$

ن) $P(x=8) = 0$

س) $P(x=9) = 0$

ع) $P(x=10) = 0$

ف) $P(x=11) = 0$

ص) $P(x=12) = 0$

ق) $P(x=13) = 0$

ر) $P(x=14) = 0$

ش) $P(x=15) = 0$

ت) $P(x=16) = 0$

ث) $P(x=17) = 0$

خ) $P(x=18) = 0$

ذ) $P(x=19) = 0$

ض) $P(x=20) = 0$

ظ) $P(x=21) = 0$

غ) $P(x=22) = 0$

أ) $P(x=0) = \binom{3}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$

ب) $P(x=1) = \binom{3}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{8}$

ج) $P(x=2) = \binom{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{3}{8}$

د) $P(x=3) = \binom{3}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{1}{8}$

هـ) $P(x=0) + P(x=1) + P(x=2) + P(x=3) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = 1$

و) $P(x=0) = \frac{1}{8}$

ز) $P(x=1) = \frac{3}{8}$

ح) $P(x=2) = \frac{3}{8}$

ط) $P(x=3) = \frac{1}{8}$

ي) $P(x=4) = 0$

ك) $P(x=5) = 0$

ل) $P(x=6) = 0$

م) $P(x=7) = 0$

ن) $P(x=8) = 0$

س) $P(x=9) = 0$

ع) $P(x=10) = 0$

ف) $P(x=11) = 0$

ص) $P(x=12) = 0$

ق) $P(x=13) = 0$

ر) $P(x=14) = 0$

ش) $P(x=15) = 0$

ت) $P(x=16) = 0$

ث) $P(x=17) = 0$

خ) $P(x=18) = 0$

ذ) $P(x=19) = 0$

ض) $P(x=20) = 0$

ظ) $P(x=21) = 0$

غ) $P(x=22) = 0$

أ) $P(x=0) = \binom{3}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$

ب) $P(x=1) = \binom{3}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{8}$

ج) $P(x=2) = \binom{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{3}{8}$

د) $P(x=3) = \binom{3}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{1}{8}$

هـ) $P(x=0) + P(x=1) + P(x=2) + P(x=3) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = 1$

و) $P(x=0) = \frac{1}{8}$

ز) $P(x=1) = \frac{3}{8}$

ح) $P(x=2) = \frac{3}{8}$

ط) $P(x=3) = \frac{1}{8}$

ي) $P(x=4) = 0$

ك) $P(x=5) = 0$

ل) $P(x=6) = 0$

م) $P(x=7) = 0$

ن) $P(x=8) = 0$

س) $P(x=9) = 0$

ع) $P(x=10) = 0$

ف) $P(x=11) = 0$

ص) $P(x=12) = 0$

ق) $P(x=13) = 0$

ر) $P(x=14) = 0$

ش) $P(x=15) = 0$

ت) $P(x=16) = 0$

ث) $P(x=17) = 0$

خ) $P(x=18) = 0$

ذ) $P(x=19) = 0$

ض) $P(x=20) = 0$

ظ) $P(x=21) = 0$

غ) $P(x=22) = 0$

أ) $P(x=0) = \binom{3}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$

ب) $P(x=1) = \binom{3}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{8}$

ج) $P(x=2) = \binom{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{3}{8}$

د) $P(x=3) = \binom{3}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{1}{8}$

هـ) $P(x=0) + P(x=1) + P(x=2) + P(x=3) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = 1$

و) $P(x=0) = \frac{1}{8}$

ز) $P(x=1) = \frac{3}{8}$

ح) $P(x=2) = \frac{3}{8}$

ط) $P(x=3) = \frac{1}{8}$

ي) $P(x=4) = 0$

ك) $P(x=5) = 0$

ل) $P(x=6) = 0$

م) $P(x=7) = 0$

ن) $P(x=8) = 0$

س) $P(x=9) = 0$

ع) $P(x=10) = 0$

ف) $P(x=11) = 0$

ص) $P(x=12) = 0$

ق) $P(x=13) = 0$

ر) $P(x=14) = 0$

ش) $P(x=15) = 0$

ت) $P(x=16) = 0$

ث) $P(x=17) = 0$

خ) $P(x=18) = 0$

ذ) $P(x=19) = 0$

ض) $P(x=20) = 0$

ظ) $P(x=21) = 0$

غ) $P(x=22) = 0$

أ) $P(x=0) = \binom{3}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$

ب) $P(x=1) = \binom{3}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{8}$

ج) $P(x=2) = \binom{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{3}{8}$

د) $P(x=3) = \binom{3}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{1}{8}$

هـ) $P(x=0) + P(x=1) + P(x=2) + P(x=3) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = 1$

و) $P(x=0) = \frac{1}{8}$

ز) $P(x=1) = \frac{3}{8}$

ح) $P(x=2) = \frac{3}{8}$

ط) $P(x=3) = \frac{1}{8}$

ي) $P(x=4) = 0$

ك) $P(x=5) = 0$

ل) $P(x=6) = 0$

م) $P(x=7) = 0$

ن) $P(x=8) = 0$

س) $P(x=9) = 0$

ع) $P(x=10) = 0$

ف) $P(x=11) = 0$

ص) $P(x=12) = 0$

ق) $P(x=13) = 0$

ر) $P(x=14) = 0$

ش) $P(x=15) = 0$

ت) $P(x=16) = 0$

ث) $P(x=17) = 0$

خ) $P(x=18) = 0$

ذ) $P(x=19) = 0$

ض) $P(x=20) = 0$

ظ) $P(x=21) = 0$

غ) $P(x=22) = 0$

أ) $P(x=0) = \binom{3}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$

ب) $P(x=1) = \binom{3}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{8}$

ج) $P(x=2) = \binom{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{3}{8}$

د) $P(x=3) = \binom{3}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{1}{8}$

هـ) $P(x=0) + P(x=1) + P(x=2) + P(x=3) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = 1$

و) $P(x=0) = \frac{1}{8}$

ز) $P(x=1) = \frac{3}{8}$

ح) $P(x=2) = \frac{3}{8}$

ط) $P(x=3) = \frac{1}{8}$

ي) $P(x=4) = 0$

ك) $P(x=5) = 0$

ل) $P(x=6) = 0$

م) $P(x=7) = 0$

ن) $P(x=8) = 0$

س) $P(x=9) = 0$

ع) $P(x=10) = 0$

ف) $P(x=11) = 0$

ص) $P(x=12) = 0$

ق) $P(x=13) = 0$

ر) $P(x=14) = 0$

ش) $P(x=15) = 0$

ت) $P(x=16) = 0$

ث) $P(x=17) = 0$

خ) $P(x=18) = 0$

ذ) $P(x=19) = 0$

ض) $P(x=20) = 0$

ظ) $P(x=21) = 0$

غ) $P(x=22) = 0$

أ) $P(x=0) = \binom{3}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$

ب) $P(x=1) = \binom{3}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{8}$

ج) $P(x=2) = \binom{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{3}{8}$

د) $P(x=3) = \binom{3}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{1}{8}$

هـ) $P(x=0) + P(x=1) + P(x=2) + P(x=3) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = 1$

و) $P(x=0) = \frac{1}{8}$

ز) $P(x=1) = \frac{3}{8}$

ح) $P(x=2) = \frac{3}{8}$

ط) $P(x=3) = \frac{1}{8}$

ي) $P(x=4) = 0$

ك) $P(x=5) = 0$

ل) $P(x=6) = 0$

م) $P(x=7) = 0$

ن) $P(x=8) = 0$

س) $P(x=9) = 0$

ع) $P(x=10) = 0$

ف) $P(x=11) = 0$

ص) $P(x=12) = 0$

ق) $P(x=13) = 0$

ر) $P(x=14) = 0$

ش) $P(x=15) = 0$

ت) $P(x=16) = 0$

ث) $P(x=17) = 0$

خ) $P(x=18) = 0$

ذ) $P(x=19) = 0$

ض) $P(x=20) = 0$

ظ) $P(x=21) = 0$

غ) $P(x=22) = 0$

أ) $P(x=0) = \binom{3}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$

ب) $P(x=1) = \binom{3}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{8}$

ج) $P(x=2) = \binom{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{3}{8}$

د) $P(x=3) = \binom{3}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{1}{8}$

هـ) $P(x=0) + P(x=1) + P(x=2) + P(x=3) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = 1$

و) $P(x=0) = \frac{1}{8}$

ز) $P(x=1) = \frac{3}{8}$

ح) $P(x=2) = \frac{3}{8}$

ط) $P(x=3) = \frac{1}{8}$

ي) $P(x=4) = 0$

ك) $P(x=5) = 0$

ل) $P(x=6) = 0$

م) $P(x=7) = 0$

ن) $P(x=8) = 0$

س) $P(x=9) = 0$

ع) $P(x=10) = 0$

ف) $P(x=11) = 0$

ص) $P(x=12) = 0$

ق) $P(x=13) = 0$

ر) $P(x=14) = 0$

ش) $P(x=15) = 0$

ت) $P(x=16) = 0$

ث) $P(x=17) = 0$

خ) $P(x=18) = 0$

ذ) $P(x=19) = 0$

ض) $P(x=20) = 0$

ظ) $P(x=21) = 0$

غ) $P(x=22) = 0$

أ) $P(x=0) = \binom{3}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$

ب) $P(x=1) = \binom{3}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{8}$

ج) $P(x=2) = \binom{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{3}{8}$

د) $P(x=3) = \binom{3}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{1}{8}$

هـ) $P(x=0) + P(x=1) + P(x=2) + P(x=3) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = 1$

و) $P(x=0) = \frac{1}{8}$

ز) $P(x=1) = \frac{3}{8}$

ح) $P(x=2) = \frac{3}{8}$

ط) $P(x=3) = \frac{1}{8}$

ي) $P(x=4) = 0$

ك) $P(x=5) = 0$

ل) $P(x=6) = 0$

م) $P(x=7) = 0$

ن) $P(x=8) = 0$

س) $P(x=9) = 0$

ع) $P(x=10) = 0$

ف) $P(x=11) = 0$

ص) $P(x=12) = 0$

ق) $P(x=13) = 0$

ر) $P(x=14) = 0$

ش) $P(x=15) = 0$

ت) $P(x=16) = 0$

ث) $P(x=17) = 0$

خ) $P(x=18) = 0$

ذ) $P(x=19) = 0$

ض) $P(x=20) = 0$

ظ) $P(x=21) = 0$

غ) $P(x=22) = 0$

أ) $P(x=0) = \binom{3}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$

ب) $P(x=1) = \binom{3}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{8}$

ج) $P(x=2) = \binom{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{3}{8}$

د) $P(x=3) = \binom{3}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{1}{8}$

هـ) $P(x=0) + P(x=1) + P(x=2) + P(x=3) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = 1$

و) $P(x=0) = \frac{1}{8}$

ز) $P(x=1) = \frac{3}{8}$

ح) $P(x=2) = \frac{3}{8}$

ط) $P(x=3) = \frac{1}{8}$

ي) $P(x=4) = 0$

ك) $P(x=5) = 0$

ل) $P(x=6) = 0$

م) $P(x=7) = 0$

ن) $P(x=8) = 0$

س) $P(x=9) = 0$

ع) $P(x=10) = 0$

ف) $P(x=11) = 0$

ص) $P(x=12) = 0$

ق) $P(x=13) = 0$

ر) $P(x=14) = 0$

ش) $P(x=15) = 0$

ت) $P(x=16) = 0$

ث) $P(x=17) = 0$

خ) $P(x=18) = 0$

ذ) $P(x=19) = 0$

ض) $P(x=20) = 0$

ظ) $P(x=21) = 0$

غ) $P(x=22) = 0$

أ) $P(x=0) = \binom{3}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$

ب) $P(x=1) = \binom{3}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{8}$

ج) $P(x=2) = \binom{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{3}{8}$

د) $P(x=3) = \binom{3}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{1}{8}$

هـ) $P(x=0) + P(x=1) + P(x=2) + P(x=3) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = 1$

و) $P(x=0) = \frac{1}{8}$

ز) $P(x=1) = \frac{3}{8}$

ح) $P(x=2) = \frac{3}{8}$

ط) $P(x=3) = \frac{1}{8}$

ي) $P(x=4) = 0$

ك) $P(x=5) = 0$

ل) $P(x=6) = 0$

م) $P(x=7) = 0$

ن) $P(x=8) = 0$

س) $P(x=9) = 0$

ع) $P(x=10) = 0$

ف) $P(x=11) = 0$

ص) $P(x=12) = 0$

ق) $P(x=13) = 0$

ر) $P(x=14) = 0$

ش) $P(x=15) = 0$

ت) $P(x=16) = 0$

ث) $P(x=17) = 0$

خ) $P(x=18) = 0$

ذ) $P(x=19) = 0$

ض) $P(x=20) = 0$

ظ) $P(x=21) = 0$

غ) $P(x=22) = 0$

أ) $P(x=0) = \binom{3}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$

ب) $P(x=1) = \binom{3}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{8}$

ج) $P(x=2) = \binom{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{3}{8}$

د) $P(x=3) = \binom{3}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{1}{8}$

هـ) $P(x=0) + P(x=1) + P(x=2) + P(x=3) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = 1$

و) $P(x=0) = \frac{1}{8}$

ز) $P(x=1) = \frac{3}{8}$

ح) $P(x=2) = \frac{3}{8}$

ط) $P(x=3) = \frac{1}{8}$

ي) $P(x=4) = 0$

ك) $P(x=5) = 0$

ل) $P(x=6) = 0$

م) $P(x=7) = 0$

ن) $P(x=8) = 0$

س) $P(x=9) = 0$

ع) $P(x=10) = 0$

ف) $P(x=11) = 0$

ص) $P(x=12) = 0$

ق) $P(x=13) = 0$

ر) $P(x=14) = 0$

ش) $P(x=15) = 0$

ت) $P(x=16) = 0$

ث) $P(x=17) = 0$

خ) $P(x=18) = 0$

ذ) $P(x=19) = 0$

ض) $P(x=20) = 0$

ظ) $P(x=21) = 0$

غ) $P(x=22) = 0$

أ) $P(x=0) = \binom{3}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$

ب) $P(x=1) = \binom{3}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{8}$

ج) $P(x=2) = \binom{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{3}{8}$

د) $P(x=3) = \binom{3}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{1}{8}$

هـ) $P(x=0) + P(x=1) + P(x=2) + P(x=3) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = 1$

و) $P(x=0) = \frac{1}{8}$

ز) $P(x=1) = \frac{3}{8}$

ح) $P(x=2) = \frac{3}{8}$

ط) $P(x=3) = \frac{1}{8}$

ي) $P(x=4) = 0$

ك) $P(x=5) = 0$

ل) $P(x=6) = 0$

م) $P(x=7) = 0$

ن) $P(x=8) = 0$

س) $P(x=9) = 0$

ع) $P(x=10) = 0$

ف) $P(x=11) = 0$

ص) $P(x=12) = 0$

ق) $P(x=13) = 0$

ر) $P(x=14) = 0$

ش) $P(x=15) = 0$

ت) $P(x=16) = 0$

ث) $P(x=17) = 0$

خ) $P(x=18) = 0$

ذ) $P(x=19) = 0$

ض) $P(x=20) = 0$

ظ) $P(x=21) = 0$

غ) $P(x=22) = 0$

أ) $P(x=0) = \binom{3}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$

ب) $P(x=1) = \binom{3}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{8}$

ج) $P(x=2) = \binom{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{3}{8}$

د) $P(x=3) = \binom{3}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{1}{8}$

هـ) $P(x=0) + P(x=1) + P(x=2) + P(x=3) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = 1$

و) $P(x=0) = \frac{1}{8}$

ز) $P(x=1) = \frac{3}{8}$

ح) $P(x=2) = \frac{3}{8}$

ط) $P(x=3) = \frac{1}{8}$

ي) $P(x=4) = 0$

ك) $P(x=5) = 0$

ل) $P(x=6) = 0$

م) $P(x=7) = 0$

ن) $P(x=8) = 0$

س) $P(x=9) = 0$

ع) $P(x=10) = 0$

ف) $P(x=11) = 0$

ص) $P(x=12) = 0$

ق) $P(x=13) = 0$

ر) $P(x=14) = 0$

ش) $P(x=15) = 0$

ت) $P(x=16) = 0$

ث) $P(x=17) = 0$

خ) $P(x=18) = 0$

ذ) $P(x=19) = 0$

ض) $P(x=20) = 0$

ظ) $P(x=21) = 0$

غ) $P(x=22) = 0$

أ) $P(x=0) = \binom{3}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$

ب) $P(x=1) = \binom{3}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{8}$

ج) $P(x=2) = \binom{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{3}{8}$

د) $P(x=3) = \binom{3}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{1}{8}$

هـ) $P(x=0) + P(x=1) + P(x=2) + P(x=3) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = 1$

و) $P(x=0) = \frac{1}{8}$

ز) $P(x=1) = \frac{3}{8}$

ح) $P(x=2) = \frac{3}{8}$

ط) $P(x=3) = \frac{1}{8}$

ي) $P(x=4) = 0$

ك) $P(x=5) = 0$

ل) $P(x=6) = 0$

م) $P(x=7) = 0$

ن) $P(x=8) = 0$

س) $P(x=9) = 0$

ع) $P(x=10) = 0$

ف) $P(x=11) = 0$

ص) $P(x=12) = 0$

ق) $P(x=13) = 0$

ر) $P(x=14) = 0$

ش) $P(x=15) = 0$

ت) $P(x=16) = 0$

ث) $P(x=17) = 0$

خ) $P(x=18) = 0$

ذ) $P(x=19) = 0$

ض) $P(x=20) = 0$

ظ) $P(x=21) = 0$

غ) $P(x=22) = 0$

أ) $P(x=0) = \binom{3}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$

ب) $P(x=1) = \binom{3}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{8}$

ج) $P(x=2) = \binom{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{3}{8}$

د) $P(x=3) = \binom{3}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{1}{8}$

هـ) $P(x=0) + P(x=1) + P(x=2) + P(x=3) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = 1$

و) $P(x=0) = \frac{1}{8}$

ز) $P(x=1) = \frac{3}{8}$

ح) $P(x=2) = \frac{3}{8}$

ط) $P(x=3) = \frac{1}{8}$

ي) $P(x=4) = 0$

ك) $P(x=5) = 0$

ل) $P(x=6) = 0$

م) $P(x=7) = 0$

ن) $P(x=8) = 0$

س) $P(x=9) = 0$

ع) $P(x=10) = 0$

ف) $P(x=11) = 0$

ص) $P(x=12) = 0$

ق) $P(x=13) = 0$

ر) $P(x=14) = 0$

ش) $P(x=15) = 0$

ت) $P(x=16) = 0$

ث) $P(x=17) = 0$

خ) $P(x=18) = 0$

ذ) $P(x=19) = 0$

ض) $P(x=20) = 0$

ظ) $P(x=21) = 0$

غ) $P(x=22) = 0$

أ) $P(x=0) = \binom{3}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$

ب) $P

منهاجي
متعة التعليم الهادف

رابعاً : التوزيع الطبيعي

تدريب (١) ١) ل (ز ≤ ١٫١٦) = ٠٫٨٧٧٠

٢) ل (ز ≤ ١٫٢٣) = ١ − ل (ز ≥ ١٫٢٣) ثم من الجدول مباشرة .

٣) ل (ز ≤ −٠٫٩٥) = ١ − ل (ز ≥ ٠٫٩٥) " " "

٤) ل (٠٫٣ ≤ ز ≤ ١٫٣)

= ل (ز ≤ ١٫٣) − ل (ز ≤ ٠٫٣) ثم من الجدول مباشرة .

٥) ل (−٠٫٨ ≤ ز ≤ صفر) = ل (ز ≤ صفر) − ل (ز ≤ −٠٫٨)

= ل (ز ≤ صفر) − [١ − ل (ز ≤ ٠٫٨)] ثم من الجدول مباشرة .

تدريب (٢) ١) P = ٠٫٨ ب) P = −٠٫٤٧

تدريب (٣) ١) ل (ز ≤ (٩٥ − ١١٠)/١٠) = ل (ز ≤ −١٫٥) = ١ − ل (ز ≤ ١٫٥) ثم من الجدول مباشرة

٢) ل (ز ≤ (١٠٥ − ١١٠)/١٠) = ل (ز ≤ −٠٫٥) = ل (ز ≥ ٠٫٥) " " "

٣) ل (−٢ ≤ ز ≤ ٢) = ل (ز ≤ ٢) − ل (ز ≤ −٢) = ل (ز ≤ ٢) − [١ − ل (ز ≤ ٢)]

تدريب (٤) ٢٥ يوماً .

تمارين ومسائل

١) ن) ل (|ز| ≤ ٠٫٨) = ل (−٠٫٨ ≤ ز ≤ ٠٫٨) = ل (ز ≤ ٠٫٨) − ل (ز ≤ −٠٫٨)

= ل (ز ≤ ٠٫٨) − [١ − ل (ز ≤ ٠٫٨)] ثم من الجدول .

ج) ١) P = −٠٫٢٧ ج) P = ٠٫٩٢

٣) ب) ل (س ≤ ٨٢) = ل (ز ≤ (٨٢ − ٧٠)/٨) = ل (ز ≤ ١٫٥) = ١ − ل (ز ≥ ١٫٥)

= ١ − ٠٫٩٣٣٢ = ٠٫٠٦٦٨

العدد = ٢٠٠٠ × ٠٫٠٦٦٨ = ١٣٣٫٦ ≈ ١٣٤ مهاجراً .

ج) ل (س ≤ ٨٠) = ل (ز ≤ ١٫٥) = ١ − ل (ز ≥ ١٫٥) = ١ − ٠٫٩٤٤٩ = ٠٫٠٥٥١

٤) نسبة النجاح = ٧٥٨٠/١٠٠٠٠ = ٠٫٧٥٨ ل (س ≤ م) = ٠٫٧٥٨

ل (ز ≤ (٦٠ − م)/٥) = ٠٫٧٥٨ لكن (٦٠ − م)/٥ = ك

ل (ز ≤ ك) = ٠٫٧٥٨

١ − ل (ز ≥ ك) = ٠٫٧٥٨٠

ل (ز ≥ ك) = ٠٫٢٤٢٠ ⇐ ك = −٠٫٧٠

(٦٠ − م)/٥ = −٠٫٧٠ ⇐ ٦٠ − م = −٣٫٥ ⇐ م = ٦٣٫٥