أسئلة إثرائية مختارة شاملة + تصنيف لجميع الاختبارات السابقة

الرياضيات

الصف الثاني عشر (العلمي)

الفصل الأول ٢٠١٦ / ٢٠١٧

مديرية الوسطى

إعداد :

مشرف المبحث : عبدالله مهنا

مشرفة المبحث : سميرة حنيف

بسم الله الرحمن الرحيم

المعلمون والمعلمات الأفاضل

طلاب وطالبات الثانوية العامة الأعزاء

يسرُّنا أن نقدمَ إليكم هذا الجهدَ آملين أن يحقّقَ النفعَ وينالَ استحسانكم.

ملاحظة: يفضل حل هذه المادة الإثرائية بعد حل تمارين الكتاب المدرسي.

والله ولي التوفيق

الوحدة الأولى

النهايات والاتّصال

ورقة عمل (١)

نهاية الاقتران عند نقطة جد النهايات التالية:

١- $\lim_{س \to ٠} \frac{٥س^{٢} + ٧س}{(٢س - ٣)^{٢} - ٩}$ $\left(-\frac{٧}{١٢}\right)$

٢- $\lim_{س \to ٤} \frac{س + \sqrt{س} - ٦}{\sqrt{س} - ٢}$ (٥)

٣- إذا كان $هـ(٥) = ٤$ ، $\lim_{س \to ٥} \frac{هـ(س) - ٤}{س - ٥} = ٧$ فما قيمة $\lim_{س \to ٥} \frac{س\, هـ(س) - ٢٠}{س - ٥}$ (٣٩)

٤- $\lim_{س \to ٣} \frac{س^{٢} - ٣س}{س - \sqrt{س + ١} - ١}$ (٤)

٥- $\lim_{س \to ١} \frac{(س - ١)^{٥}}{١ - س^{٥}}$ (٠)

٦- $\lim_{س \to ٠} س^{٢} + \frac{س}{\sqrt[٣]{س^{٢}}}$ (غ م)

٧- $\lim_{س \to ٠} \frac{٣^{س+١} - ٣}{٩^{س} - ١}$ $\left(\frac{٣}{٢}\right)$

٨- $\lim_{س \to ١} \frac{س^{٣} - ٢س^{٢} - س + ٢}{س^{٣} - س^{٢} - ٤س + ٤}$ $\left(\frac{٢}{٣}\right)$

٩- $\lim_{س \to ١} \frac{\sqrt{س + ٣} - \sqrt{٨ + س} + ١}{س - ١}$ $\left(\frac{١}{١٢}\right)$

١٠- $هـ(س) = س^{٢} - أ|س| + ٣ب$ ، $\lim_{س \to ١} هـ(س) = ٤$ ، $\lim_{س \to -٤} هـ(س) = ١٠$ فما قيمة كل من أ ، ب ؟ (٢،٣)

١١- $\lim_{س \to -٢} \frac{(س^{٢} - س - ٦)^{٢}}{(س + ٢)^{٢}}$ (٢٥)

١٢- $\lim_{س \to ٢} \frac{\sqrt[٣]{س + ٢٥} - \sqrt{٧س + ٢} + ١}{س - ٢}$

١٣- $هـ(س) = \begin{cases} س^{٢} & ، س \leq ٣ \\ س - ٢ & ، س > ٣ \end{cases}$ فما قيمة $\lim_{س \to ٠} هـ(س + ٢)$ (٠)

١٤- $\lim_{س \to ١} \frac{\sqrt{٢} - \sqrt{س + ١}}{س - ١}$ $\left(\frac{٥}{\sqrt{٢}\sqrt{٢}}\right)$

١٥- $\lim_{س \to ١} \frac{س^{٩} - ٢س^{٥} + ١}{س - ١}$ (-١)

١٦- إذا كانت $\lim_{س \to -١} \frac{أس^{٢} + ب س - ٤}{س + ١}$ موجودة فجد $\lim_{س \to ١} \frac{ب س^{٢} - أس}{س + ٣}$ (-١)

١٧- إذا كانت $ق(س) = أس^{٢} - ٢بس + ٥$ ، $\lim_{س \to ٣} ق(س) = ٢$ ، $\lim_{س \to -١} ق(س) = ١٤$ فجد أ ، ب . $\left(\frac{٣}{٨}، \frac{٥}{٤}\right)$

١٨- $\lim_{س \to ٣} \frac{٦(س-٣)^{٥} + ٢س^{٢} - ١٨}{س - ٣}$ (١٢)

١٩- $\lim_{س \to ٩} [س + ٥] - [س + ٢]$ (٣)

٢٠- إذا كانت $\lim_{س \to ٢} (ق(٢س+١) - ٣س) = ١$ فما قيمة $\lim_{س \to ٩} ٣ق\left(\sqrt{س} + ٢\right)^{٢}$ ؟ (١٤٧)

٢١- $ق(س) = \begin{cases} |س - ١| & ، \ ٠ \leq س < ٢ \\ [س - ١] & ، \ ٢ \leq س \leq ٤ \end{cases}$ فما قيمة $\lim_{س \to ٢} ق(س)$ ؟ (١)

٢٢- $ق(س) = \begin{cases} [س] + ٢ & ، \ س < أ \\ ٩ - [س] & ، \ س \geq أ \end{cases}$ وكانت $\lim_{س \to أ} ق(س)$ موجودة ، $أ \in صـ^{+}$ فما قيمة أ ؟ (٤)

٢٣- $\lim_{س \to -٨} \frac{\sqrt{١ - س} - ٣}{٢ + \sqrt[٣]{س}}$ (٢-)

٢٤- $\lim_{س \to ٣} \frac{\sqrt{١ + س} - ٢}{\sqrt{٢س + ١٠} - \sqrt{١٣ + س}}$ (٢-)

٢٥- إذا كانت $\lim_{س \to ١} \frac{(س^{٣} - ١)^{٢ن}}{(س^{٢} - ٢س + ١)^{ن}} = ٨١$ فما قيمة الثابت ن ؟ ن = ٢

٢٦- إذا كانت $\lim_{س \to ٢} \frac{س^{٢} + أس + ب}{س - ٢} = ٧$ فما قيمة الثابتين أ ، ب ؟ (٣، ١٠-)

٢٧- $\lim_{س \to ٣} \frac{س^{٢} - أس + ٦}{س - ٣} = ب$ جد أ، ب . (١،٥)

٢٨- $\lim_{س \to ٨} \frac{س \sqrt[٣]{س} - ١٦}{س - ٨}$ $\left(\frac{٨}{٣}\right)$

٢٩- إذا كانت $\lim_{س \to ٢} \frac{٣س^{٢} - (٦ - م)س - ٢م}{س^{٢} - ٤} = ٢-$ فما قيمة الثابت م ؟ م = ١٤-

٣٠- $\lim_{س \to ٠} \frac{|س - ٣| - |٢س - ٣|}{س}$ (١)

٣١- $\lim_{س \to ١-} \frac{\frac{١}{|س + ٣|} - \frac{١}{٤}}{|س - ١|}$ $\left(\frac{١}{١٦}\right)$

٣٢- $\lim_{س \to ٣^+} \frac{س - [س]}{|س^٢ - ٩|}$ $\left(\frac{١}{٦}\right)$

٣٣- $ق(س) = \begin{cases} س^٢ - أس ، س \leq ١ \\ ٣س + ب ، س > ١ \end{cases}$ وكانت $\lim_{س \to ١} ق(س) = ٥$ فجد أ، ب. $(-٢،٤)$

٣٤- $\lim_{س \to -١} ق(س) = ٣$، $\lim_{س \to -١} \left(ق^٢(س) + ٢هـ(س) - \frac{٢}{س}\right) = ٢١$ فجد $\lim_{س \to -١} هـ^٢(س)$. (٢٥)

٣٥- $\lim_{س \to ٢} ق(س) = ١٠$ ، $\lim_{س \to ٧} ق(س) = ١٧$، ق(٧) غير معرف فجد $\lim_{س \to ٢} ق(٢س + ٣)$ (١٧)

٣٦- $\lim_{س \to ١} \frac{ق(س) - ٦}{س - ١} = ٨$ ، $\lim_{س \to ١} \frac{س^٢ + ٢س - ٣}{ق(س) - ٦} + ب = \frac{٣}{٢}$. جد قيمة الثابت ب . (١)

٣٧- $\lim_{س \to ٠} \frac{\sqrt[٥]{س^٢ + ٢س + ٣٢} - ٢}{س}$ $\left(\frac{١}{٤٠}\right)$ ٣٨- $\lim_{س \to ٠} \frac{\sqrt[ن]{س + ٢^ن} - ٢}{س}$ حيث ن ∈ ط . $\left(\frac{٢^{ن-١}}{ن}\right)$

٣٩- إذا كان هـ كثير الحدود ، $\lim_{س \to ٠} \left(\frac{هـ(س) + ٥}{س}\right) = \frac{١}{٢}$ وكانت $\lim_{س \to ٠} (هـ(س) - ٥ + ٣ب) = ٢$ فجد ب. (٤)

٤٠- $\lim_{س \to \frac{١}{٢}} \frac{١٢٨س^٧ - ١}{٤س^٢ - ١}$ $\left(\frac{٧}{٢}\right)$ ٤١- $\lim_{س \to -١} \frac{س^٦ - ١}{س^٥ + ١}$ $\left(\frac{-٦}{٥}\right)$

٤٢- $\lim_{س \to ١} \frac{١}{س - ١}\left(١ - \frac{١}{\sqrt{س}}\right)$ $\left(\frac{-١}{٢}\right)$ ٤٣- $\lim_{س \to ١} \frac{(س + ١)^٢ \sqrt{س} - ٤}{س - ١}$ (٦)

٤٤- $\lim_{س \to ٢^-} (س - ١)^{[س]}$ (١) ٤٥- $\lim_{س \to ٢^+} (س - ١)^{[س]}$ (١) ٤٦- $\lim_{س \to ٢} (س - ١)^{[س]}$ (١)

٤٧- $\lim_{س \to ٣^-} (س - ١)^{[س]}$ (٤) ٤٨- $\lim_{س \to ٣^+} (س - ١)^{[س]}$ (٨) ٤٩- $\lim_{س \to ٣} (س - ١)^{[س]}$ (غ.م)

٥٠- $\lim_{س \to ١} \frac{\sqrt{س} - \sqrt[٣]{س}}{\sqrt[٤]{س} - ١}$ $(\frac{٢}{٣})$

السنة	السؤال	الجواب
٢٠٠٧	$\text{نهـــا}_{س \leftarrow -١} \frac{س + ١}{س^{٢} - س - ٢} =$ أ) صفر ب) $-\frac{١}{٣}$ ج) $\frac{١}{٣}$ د) ∞	ب
دراسات ٢٠٠٧	$\text{نهـــا}_{س \leftarrow ١} \frac{س^{٩} - ١}{س - ١} =$ أ) صفر ب) ١ ج) ٩ د) غ .م	جـ
دراسات ٢٠٠٧	$\text{نهـــا}_{س \leftarrow ٥} \frac{\sqrt{س + ٤} - ٣}{س - ٥} =$	$\frac{١}{٦}$
إكمال ٢٠٠٧	$\text{نهـــا}_{س \leftarrow ٠} س[س] =$ أ) صفر ب) -١ ج) ١ د) غ .م	أ
٢٠٠٨	$\text{نهـــا}_{س \leftarrow ٢} \frac{س^{٢} - ٤}{س - ٢} =$ أ) -٤ ب)-٢ ج) ٢ د) ٤	د
٢٠٠٨	$\text{نهـــا}_{س \leftarrow ٠} \frac{\sqrt{س + ٤} - ٢}{س} =$ أ) ٠ ب) $\frac{١}{٤}$ ج) ٤ د) ∞	ب
إكمال ٢٠٠٨	$\text{نهـــا}_{س \leftarrow ٢} \frac{س^{٥} - ٣٢}{٢ - س} =$ أ) -٨٠ ب) ٠ ج) ٨٠ د) غ.م	أ
٢٠٠٩	$\text{نهـــا}_{س \leftarrow ١} \frac{س^{٢} - س}{س - ١} =$ أ) ٢ ب) غ.م ج) ١ د) صفر	جـ

٢٠٠٩	إذا كانت $\lim_{س \to ٤} و(س) = \lim_{س \to ٤} و(\sqrt{س})$ فإن قيمة أ تساوي أ) ١٦ ب) $\pm$ ١٦ ج) ٤ د) ٢	أ
٢٠١٠	$\lim_{س \to ١^+} [س] - س =$ أ) -١ ب) ١ ج) صفر د) غ.م	أ
٢٠١٠	$\lim_{س \to ٤} \frac{س^٢ - ٤س}{٤ - س} =$ أ) -٤ ب) ٤ ج) صفر د) غ.م	أ
إكمال ٢٠١٠	إذا كانت $\lim_{س \to ٢} و(س) = -٢$ فإن $\lim_{س \to ٢} (٣و(س)^٢ - ١) =$ أ) ١١ ب) -٧ ج) -١٣ د) ١٣	أ
٢٠١١	$\lim_{س \to ٣} \frac{\frac{١}{س} - \frac{١}{٣}}{س - ٣} =$ أ) غ.م ب) $\frac{١}{٩}$ ج) ٠ د) $-\frac{١}{٩}$	د
٢٠١١	إذا كانت $\lim_{س \to أ} و(\sqrt{س}) = \lim_{س \to ٣} و(س)$ فإن قيمة أ تساوي أ) $\sqrt{٣}$ ب) ٣ ج) ٩ د) ٨١	جـ
٢٠١١	احسب $\lim_{س \to -١} \frac{(١ - س)^٥ - ٣٢}{١ + س}$	-٨٠
٢٠١٢	$\lim_{س \to ٩} \frac{س - ٩}{\sqrt{س} - ٣} =$ أ) صفر ب) ٦ ج) ٩ د) غ.م	ب
٢٠١٢	إذا كانت $\lim_{س \to ٢} و(س) = ٧$ فإن $\lim_{س \to ١} (و(٣س - ١)) + [\frac{١}{٢}س] =$ أ) غ.م ب) ٧ ج) ٧,٥ د) ٨	ب

٢٠١٢	ابحث وجود النهاية للاقتران $\text{ق}(س) = \begin{cases} س^{٢} + س & ، \quad س < ١ \\ \dfrac{\sqrt{٢ - س} - ١}{س - ١} & ، \quad س > ١ \end{cases}$ عند س=١	غ.م
٢٠١٢ إكمال	$\lim_{س \to ٢} \dfrac{س^{٢} - ٤}{٢ - س} =$ أ) -٤ ب) ٠ جـ) ٤ د) غ.م	أ
٢٠١٣	إذا كانت $\lim_{س \to ٣} \text{هـ}(س) = -٢$ ، $\lim_{س \to ٣} ٢\text{ق}(س) = ٨$ فإن $\lim_{س \to ٣} \text{ق}(س) \times \text{هـ}(س) + \sqrt{\text{ق}(س)} =$ أ) -٦ ب) -١٢ جـ) -٨ د) -٤	أ
٢٠١٣ إكمال	$\lim_{س \to -\frac{١}{٢}} س[س] =$ أ) $-\frac{١}{٢}$ ب) صفر جـ) $\frac{١}{٤}$ د) $\frac{١}{٢}$	د
٢٠١٤	$\lim_{س \to -\frac{١}{٢}} [٣س - \frac{١}{٢}] =$ أ) -٢ ب) -١ جـ) صفر د) ١	جـ
٢٠١٤	جد $\lim_{س \to ٢} \left(\dfrac{س^{٢} + ١٢}{س^{٢} - ٤} - \dfrac{س + ٢}{س - ٢} \right)$	-١
٢٠١٤ إكمال ضفة	$\lim_{س \to ١} \dfrac{س^{٧} - ١}{١ - س} =$ أ) -٧ ب) ٧ جـ) صفر د) غ.م	أ
٢٠١٤ إكمال ضفة	جد $\lim_{س \to ٥} \dfrac{س^{٢} - ٥س}{س - \sqrt{س + ٤} - ٢}$	٦

٢٠١٤إكمال غزة	$\text{نهـــا}_{س \leftarrow ٢^-} \frac{|س - ٢|}{س - ٢} =$ أ) -٢ ب) -١ ج) صفر د) ١	ب
٢٠١٥	$\text{نهـــا}_{س \leftarrow ٦} \frac{\sqrt{س + ٣} - ٣}{س - ٦} =$ أ) صفر ب) $\frac{١}{٦}$ ج) ٦ د) غ.م	ب
٢٠١٥	إذا كان ق(س) كثير الحدود بحيث $\text{نهـــا}_{س \leftarrow ٢} \frac{ق(س) - ٤}{س - ٢} = ٥$ فإن $\text{نهـــا}_{س \leftarrow ٢} \frac{ق(س) + ٨س}{س + ٢} =$ أ) $\frac{٢١}{٤}$ ب) $\frac{١٨}{٤}$ ج) ٥ د) $\frac{١٥}{٤}$	جـ
٢٠١٥ إكمال	إذا كانت $\text{نهـــا}_{س \leftarrow ٠} \frac{\sqrt{أس + ب} - ٣}{س} = ١$ فما قيمة كل من الثابتين أ،ب؟	أ=٦ ،ب=٩
٢٠١٦	$\text{نهـــا}_{س \leftarrow ١} \frac{س\left(\frac{١}{س} - س\right)}{س - ١} =$ أ) -٢ ب) -١ ج) ١ د)٢	أ
٢٠١٦	احسب $\text{نهـــا}_{س \leftarrow ١} \frac{٦س^{٢٠} + ٦س^{٣٠} - ١٢}{س - ١}$	٣٠٠
٢٠١٦ إكمال	$\text{نهـــا}_{س \leftarrow ١} \frac{س - س^{٢}}{س - ١} =$ أ) -١ ب) ١ ج) ٢ د)غ.م	أ
٢٠١٦ إكمال	إذا علمت أن $\text{نهـــا}_{س \leftarrow ٢} ك(س) = -٣$ فإن $\text{نهـــا}_{س \leftarrow ٢} (٥س - ٤ك(س)) =$ أ) -٣ ب) ١٢ ج) ١٧ د)٢٢	د

قوانين قد تهمّك في الموضوع التّالي :

$جا٢س = ٢ جاس\ جتاس$		$جتا٢س = \begin{cases} ١ - ٢ جا^{٢}س \\ ٢ جتا^{٢}س - ١ \\ جتا^{٢}س - جا^{٢}س \end{cases}$
$جا^{٢}س + جتا^{٢}س = ١$	$١ + ظا^{٢}س = قا^{٢}س$	$١ + ظتا^{٢}س = قتا^{٢}س$
$جا(\pi - س) = جاس$	$جتا(\pi - س) = -جتاس$	$ظا(\pi - س) = -ظاس$
$جا(\frac{\pi}{٢} - س) = جتاس$	$جتا(\frac{\pi}{٢} - س) = جاس$	$ظا(\frac{\pi}{٢} - س) = ظتاس$

$جا(أ \pm ب) = جا\ أ\ جتا\ ب \pm جتا\ أ\ جا\ ب$

$جتا(أ \pm ب) = جتا\ أ\ جتا\ ب \mp جا\ أ\ جاب$

ورقة عمل (٢)

نهاية الاقترانات المثلثية

جد النهايات التالية:

١- $\lim_{س \to \pi} \frac{جاس}{\pi^{٢} - س^{٢}}$ $\left(\frac{١}{\pi ٢}\right)$

٢- $\lim_{س \to ١} \frac{ظا(س-١) - جا\pi س}{١ - س}$ $(\pi - ١ -)$

٣- $\lim_{س \to ١} \frac{جا^{٢}\pi س}{١ - ٢س + س^{٢}}$ $(\pi^{٢})$

٤- $\lim_{س \to \frac{\pi}{٤}} \frac{جا٢س - جتا٢س - ١}{جاس - جتاس}$ $(\sqrt{٢})$

٥- $\lim_{س \to .} \frac{١ - جتا(ظاس)}{ظاس}$ (٠)

٦- $\lim_{س \to -٢} \frac{جا(س+٢)}{س^{٣} + ٨}$ $\left(\frac{١}{١٢}\right)$

٧- $\lim_{س \to \frac{\pi}{٤}} \frac{\sqrt{٢}جتاس - ١}{١ - ظا^{٢}س}$ $\left(\frac{١}{٤}\right)$

٨- $\lim_{س \to .} \frac{٢ - ٢جتا^{٢}٥س}{٣س^{٢}}$ $\left(\frac{٥٠}{٣}\right)$

٩- $\lim_{س \to .} \frac{جا٣س - س}{س - ظا٢س}$ $(٢-)$

١٠- $\lim_{س \to .} \frac{جا٤س}{\sqrt{س+١} - ١}$ (٨)

١١- $\lim_{س \to \frac{\pi}{٤}} \frac{ظاس - ١}{س - \frac{\pi}{٤}}$ (٢)

١٢- $\lim_{س \to \frac{\pi}{٤}} \frac{جا\left(س + \frac{\pi}{٤}\right) - ١}{س - \frac{\pi}{٤}}$ (٠)

١٣- $\lim_{س \to .} \frac{س ظاس + جتا٢س - ١}{س^{٢}}$ $(١-)$

١٤- $\lim_{س \to \frac{\pi}{٤}} \frac{جا\left(س - \frac{\pi}{٤}\right)}{س^{٢} - \frac{\pi}{٤}س}$ $\left(\frac{٤}{\pi}\right)$

١٥- $\lim_{س \to .} \frac{جا|س|}{س}$ (غ.م)

١٦- $\lim_{س \to \frac{\pi}{٤}} \frac{١ - ظاس}{جتا٢س}$ (١)

١٧- $\lim_{س \to .} \frac{١ - جتا٨س}{جتا٦س - ١}$ $\left(-\frac{١٦}{٩}\right)$

١٨- $\lim_{س \to .} س قا٢س ظتا٥س$ $\left(\frac{١}{٥}\right)$

١٩- $\lim_{س \to ٢} \frac{جتا\frac{\pi}{س}}{س - ٢}$ $\left(\frac{\pi}{٤}\right)$

٢٠- $\lim_{س \to \frac{\pi}{٦}} \frac{جتا٣س}{\pi - ٦س}$ $\left(\frac{-١}{٢}\right)$

٢١- $\lim_{س \to .} \frac{٢س(س + جا٨س - جا٤س)}{س^{٢} جتاس}$ (١٠)

٢٢- $\lim_{س \to .} \frac{١ - جتا٢س}{٦س^{٢}}$ $\left(\frac{١}{٣}\right)$

٢٣- $\lim_{س \to .} \frac{١ - جتا٨س - ٢جا^{٢}س}{١٠س^{٢}}$ (٣)

٢٤- $\lim_{س \to .} (٧س^{٣} ظتا^{٢}٢س قتا٥س)$ $\left(\frac{٧}{٢٠}\right)$

٢٦- $\lim_{س \to \frac{\pi}{٦}} \frac{\frac{١}{٢} - جاس}{س - \frac{\pi}{٦}}$ $\left(\frac{-\sqrt{٣}}{٢}\right)$

٢٧- $\lim_{س \to .} \frac{٢س^{٣} ظتا٣س + ١ - جتاس}{س}$ (٠)

٢٨- $\lim_{س \to -٢} \frac{جتا\frac{\pi}{٤}س}{س + ٢}$ $\left(\frac{\pi}{٤}\right)$

٢٩- $\lim_{س \to \frac{\pi}{٢}} \frac{١ + جتا٢س}{١ - جاس}$ (٤)

٣٠- $\lim_{س \to \frac{\pi}{٢}} \frac{١ - جاس}{(\pi - ٢س)^{٢}}$ $\left(\frac{١}{٨}\right)$

٣١- $\lim_{س \to \pi} \frac{جا^{٢}س}{١ + جتا^{٣}س}$ $\left(\frac{٢}{٣}\right)$

٣٢- $\lim_{س \to .} \frac{قا٢س - ١}{س^{٢}}$ (٢)

٣٣- $\lim_{س \to \frac{\pi}{٤}} \frac{١ - جا٢س}{جتاس - جاس}$ (٠)

٣٤- $\lim_{س \to .} \frac{١ - جتا٥س}{جتا٤س - ١}$ $\left(\frac{-٢٥}{١٦}\right)$

٣٥- $\lim_{س \to .} \frac{١ - قاس}{س جاس}$ $\left(\frac{-١}{٢}\right)$

٣٦- $\lim_{س \to .} \frac{١ - قاس}{ظا^{٢}س}$ $\left(\frac{-١}{٢}\right)$

٣٧- $\lim_{س \to ٢} \frac{جا(س^{٢} - ٤)}{ظا(س^{٣} - ٨)}$ $\left(\frac{١}{٣}\right)$

٣٨- $\lim_{س \to ٢} (٣س - ٦)قتا(س - ٢)$ (٣)

٣٩- $\lim_{س \to .} \frac{جتا٣س - جتاس}{س^{٢}}$ (-٤)

٤٠- $\lim_{س \to .} \frac{جاي س}{٦س} = \lim_{س \to .} \frac{ظا٥س}{٢س - س} = ٢$ جد ي،م . $\left(٢، \frac{٧}{٢}\right)$

٤١- $\lim_{س \to \pi} \frac{جا(\frac{\pi - س}{٢})}{جا(س - \pi)}$ $\left(\frac{١}{٢}\right)$

السنة	السؤال	الجواب
٢٠٠٧ إكمال	$\text{نهـا}_{س \to .} \frac{\text{جتا}(\pi - س)}{س} =$ أ) ٠ ب) ١ ج) غ.م د) -١	جـ
٢٠٠٨	جد $\text{نهـا}_{س \to .} \frac{\text{ظا}(\text{جاس})}{٢س} =$	$\frac{١}{٢}$
٢٠٠٩	$\text{نهـا}_{س \to .} \frac{\text{ظا}٢س}{\text{جا}٣س + س} =$ أ) $\frac{٨}{٣}$ ب) ٢ ج) $\frac{١}{٢}$ د) صفر	جـ
٢٠٠٩	$\text{نهـا}_{س \to \frac{\pi}{٤}} \frac{\text{جتا}^{٢}س - \frac{١}{٢}}{س - \frac{\pi}{٤}} =$	-١
٢٠٠٩ إكمال	$\text{نهـا}_{س \to .} ٢س\text{ظتا}٣س =$ أ) $\frac{٢}{٣}$ ب) $\frac{٣}{٢}$ ج)صفر د) غ.م	أ
٢٠٠٩ إكمال	جد $\text{نهـا}_{س \to .} \frac{١ - \text{جتا}٤س}{س^{٢}}$	٨
٢٠١٠	جد $\text{نهـا}_{س \to .} \frac{\text{جا}(\sqrt{س + ١} - ١)}{س}$	$\frac{١}{٢}$
٢٠١٠ إكمال	جد $\text{نهـا}_{س \to .} \frac{س\text{ظاس}}{١ - \text{جتاس}}$	٢
٢٠١١	جد $\text{نهـا}_{س \to \frac{\pi}{٢}} \frac{١}{(٢س - \pi)^{٢}\text{قا}^{٢}س} =$	$\frac{١}{٤}$

٢٠١١ إكمال	$\lim_{س \to .} \frac{جاس}{ظا٢س} =$ أ) ٠ ب) $\frac{١}{٢}$ ج) $-\frac{١}{٢}$ د) ٢	ب
٢٠١٢	احسب $\lim_{س \to .} س جتاس ظتا٢س$	$\frac{١}{٢}$
٢٠١٢ إكمال	جد $\lim_{س \to .} \frac{١ - جتا٢س + س جاس}{س^{٢}}$	٣
٢٠١٣	جد $\lim_{س \to .} \frac{جاس - جاس جتاس}{س^{٣}}$	$\frac{١}{٢}$
٢٠١٣ إكمال	$\lim_{س \to .} \frac{جا(س - ٢)}{٥س - ١٠} =$ أ) $-\frac{١}{٥}$ ب) ٠ ج) $\frac{١}{٥}$ د) غ.م	ج
٢٠١٤	جد $\lim_{س \to ١} \frac{جا\left(\frac{\pi}{س}\right)}{س - ١}$	π
٢٠١٤إكمال غزة	$\lim_{س \to .} \frac{جا - ٣س}{ظا٢س} =$ أ) $\frac{٣}{٢}$ ب) $\frac{٢}{٣}$ ج)$-\frac{٣}{٢}$ د) $-\frac{٢}{٣}$	ج
٢٠١٦	$\lim_{س \to .} \frac{جاس}{٢س جتاس} =$ أ) صفر ب) $\frac{١}{٢}$ ج) ٢ د) غير موجودة	ب

ملاحظة: يمكن حل الكثير من النهايات السابقة بطريقة سهلة عند دراسة "تعريف المشتقة" في الوحدة الثانية

ورقة عمل (٣)

النهاية عند اللانهاية

☜ $\lim_{س \to \pm\infty} \frac{ق(س)}{هـ(س)}$ = صفر ← عندما تكون درجة البسط أقل من درجة المقام.

← إما ∞ أو $-\infty$ عندما تكون درجة البسط أكبر من درجة المقام.

← $\frac{أ}{ب}$ عندما تتساوى درجتا البسط والمقام حيث $أ، ب$ معاملا أعلى قوة في البسط والمقام على الترتيب.

١- $\lim_{س \to \infty} \frac{(٣س + ٤)^{٢} - ٥س}{س - س^{٢} + س^{٧}}$ (٠)

٢- $\lim_{س \to \infty} \frac{س^{٤} + ٣س - ١}{٢ - ٣س^{٣} + س}$ $(-\infty)$

٣- $\lim_{س \to -\infty} \frac{(١ - س)^{٥} - س^{٤}}{٢ - ٦س^{٥}}$ $\left(\frac{١}{٦}\right)$

٤- $\lim_{س \to -\infty} \frac{|س^{٣}| - ٣س^{٣}}{(١ + ٢س)^{٣}}$ $\left(\frac{-١}{٢}\right)$

٥- $\lim_{س \to \infty} \left(\frac{س + ٣}{١ - ٣س}\right)^{-٢}$ (٩)

٦- $\lim_{س \to \infty} \left(\frac{س^{٣}}{٢ - س^{٢}} + \frac{س^{٣}}{٢ + س^{٢}}\right)$ (٠)

٧- $\lim_{س \to \infty} \left(٧ + \frac{١ - ٤س}{٥ + ٢س}\right)$ (٩)

٨- $\lim_{س \to \infty} \left(\frac{س^{٢}}{٢ + س} - \frac{٢س^{٢}}{٣ + س}\right)$ $(-\infty)$

٩- $\lim_{س \to -\infty} \left(\left(\frac{١ + ٢س}{س + ٣}\right)^{-٣} - \frac{٩ + س^{٢}}{س^{٢} - س^{٣}}\right)$ $\left(\frac{١}{٨}\right)$

١٠- $\lim_{س \to -\infty} \frac{٣س + ٤}{\sqrt{٩س^{٢} - ٥}}$ (-١)

☜ : عندما تكون النهاية (عند اللانهاية) موجودة ولا تساوي الصفر فإن درجة البسط يجب أن تساوي درجة المقام!!

جد قيمة كل من $أ، ب$ فيما يلي :

١١- $\lim_{س \to \infty} \frac{س^{٢} - أس^{٧} + ١١}{١٥ - ٣س - ٢س^{٦}} = ٢$ (٦،٤)

١٢- $\lim_{س \to \infty} \frac{٣ + ٢س^{٧} - أس^{٥}}{١ - ٢س^{٤}} = -١$ (٤،٠)

١٣- $\lim_{س \to \infty} \frac{(أ - ٢)س^{٥} + ٢س^{٣} - ١}{٨س^{٣} - ٤س + ٧} = ٦$ $\left(\frac{١}{٣}، ٢\right)$

١٤- $\lim_{س \to \infty} \frac{(١ + ٢س^{٣})^{٢}}{أس^{٢}(١ + س)^{٧}} = -٢$ $(-٤،٢)$

١٥- $\lim_{س\to\infty} \frac{س(٥+أس^{٣})-٧س^{٤}}{٣-\frac{١}{٢}س^{٥}} = ١٠$ (٤،٢)

١٦- $\lim_{س\to\infty}\left(\frac{أس-١}{س+١}+٨س+٩\right) = ١١$ (٠،٢)

١٧- إذا كانت $\lim_{س\to\infty} وه(س) = ٢$، $\lim_{س\to\infty} ٢هـ(س) = ٦$ فجد $\lim_{س\to\infty}\left(وه(س)+٤هـ(س)+\frac{٧}{س}\right)$ (١٤)

١٨- إذا كانت $\lim_{س\to\infty}\left(٢وه(س)+\frac{٩}{س+٢}\right) = ١٠$ فجد $\lim_{س\to\infty}\left(وه^{٢}(س)+س^{-٧}+١\right)$ (٢٦)

١٩- إذا كانت $\lim_{س\to\infty} ٤وه\left(٢+\frac{١}{س}\right) = ٨$ فجد $\lim_{س\to٢}\left(٢وه(س)+س^{٢}+٥\right)$ (١٣)

٢٠- $\lim_{س\to\infty} س جا\frac{١}{س}$ (١)

٢١- $\lim_{س\to\infty} س^{٢} ظا^{٢}\frac{٥}{س}$ (٢٥)

٢٢- $\lim_{س\to\infty} (س+٣)^{٢} جا^{٢}\frac{٧}{(س+٣)}$ (٤٩)

٢٣- $\lim_{س\to-\infty} \frac{|٥-٣س|+س}{|٦س-١|+١٩}$ $\left(\frac{١}{٣}\right)$

٢٤- $\lim_{س\to\infty}\left(\sqrt{س^{٢}+٥س-١}-\sqrt{س^{٢}-س+٢}\right)$ (٣)

٢٥- $\lim_{س\to\infty} \frac{٣س+٤}{\sqrt{٩س^{٢}-٥}}$ (١)

٢٦- $\lim_{س\to-\infty}\left(\frac{س^{٣}}{٢-س^{٢}}+\frac{١-س^{٤}}{٢-س^{٣}}\right)$ (٠)

٢٧- $\lim_{س\to-\infty}\left(\frac{٢س^{٥}}{١-٢س^{٣}}-\frac{س^{٤}}{٣-س^{٢}}\right)$ (-٣)

٢٨- $\lim_{س\to\infty}\left(\frac{س^{٣}}{(١-س^{٢})^{٢}}-\frac{(١+س^{٢})^{٢}}{٤-س^{٣}}\right)$ (∞)

٢٩- $\lim_{س\to-\infty}\left(\left(\frac{١-س}{١+س^{٢}}\right)^{-١}-\frac{٥+س^{٤}}{س^{٢}-س^{٣}}\right)$ (٠)

٣٠- إذا كان $وه(س) = \frac{ب س}{أ+|س|}$ ، $\lim_{س\to-١} وه(س) = ١$، $\lim_{س\to\infty} وه(س) = ٣$ فجد قيمة الثابتين أ،ب ؟ (-٣،٤)

السنة	السؤال	الجواب
٢٠٠٧	$\text{نهـا}_{س \to \infty} \frac{٢س^{٢} + ١}{٣س^{٢} - ٥} =$ أ) $-\frac{١}{٥}$ ب) $\frac{١}{٣}$ ج) $\frac{٢}{٣}$ د) غ.م	جـ
٢٠٠٧	جد $\text{نهـا}_{س \to \infty} \frac{س^{٢} - ٥س^{٣} + ٣}{٤س^{٣} - ٢}$	$-\frac{٥}{٤}$
٢٠٠٨	$\text{نهـا}_{س \to \infty} \frac{٢ - س^{٣}}{س^{٢} - ٤} =$ أ) $-\infty$ ب) ٠ ج) ∞ د) غ.م	أ
٢٠٠٨ إكمال	$\text{نهـا}_{س \to -\infty} \frac{٥}{س} \times \frac{س^{٣}}{٢س - ٥} =$ أ) ∞ ب) $\frac{٥}{٢}$ ج) $-\frac{٥}{٢}$ د) $-\infty$	د
٢٠٠٩	$\text{نهـا}_{س \to \infty} \left(س^{٣} - \frac{س^{٣} - ٥}{س + ١} \right) =$	∞
٢٠٠٩ إكمال	$\text{نهـا}_{س \to \infty} \frac{٣ - ٢س^{٢}}{س^{٢} + س} =$ أ) -١ ب) ١ ج) ٢ د) -٢	د
٢٠١٠	$\text{نهـا}_{س \to \infty} \left(\frac{١}{س} - س \right) =$ أ) ٠ ب) $-\infty$ ج) ∞ د) غ.م	ب
٢٠١٠ إكمال	$\text{نهـا}_{س \to \infty} \frac{٥س - ٣س^{٢}}{٤س^{٢} - ٧س} =$ أ) $\frac{٥}{٧}$ ب) $\frac{٣}{٤}$ ج) -١ د) $-\frac{٣}{٤}$	د

٢٠١٢	إذا كانت $\lim_{س \to \infty} \left(\frac{س^{٢} + ٣س}{س + ١} + أس \right)$ موجودة وتساوي عدداحقيقيا موجبا فما قيمة أ؟	-١
٢٠١٣	$\lim_{س \to -\infty} \frac{٢س^{٢} - ٢س + ٣}{س(٣س^{٢} - ١)} =$ أ) $-\frac{٢}{٣}$ ب) $\frac{٢}{٣}$ جـ) صفر د) $-\infty$	جـ
٢٠١٤	$\lim_{س \to -\infty} \frac{٢س + ٣}{\sqrt{٩س^{٢}}} =$ أ) $-\frac{٢}{٣}$ ب) $\frac{٢}{٣}$ جـ) $\frac{٥}{٣}$ د) ∞	أ
٢٠١٤ إكمال ضفة	$\lim_{س \to \infty} \left(\frac{س^{٢} - ٢}{س + ١} - س \right) =$ أ) -٢ ب) -١ جـ) ∞ د) غ.م	ب
٢٠١٥	$\lim_{س \to -\infty} \frac{٤|س| + ٣}{٦س - ٥} =$ أ) $-\frac{٢}{٣}$ ب) صفر جـ) $\frac{٢}{٣}$ د) غ.م	أ
٢٠١٥ إكمال	$\lim_{س \to \infty} \frac{(٢ - س)^{٢}}{١ + ٣س^{٢}} =$ أ) $-\frac{٤}{٣}$ ب) $-\frac{١}{٣}$ جـ) صفر د) $\frac{١}{٣}$	د
٢٠١٦	إذا كانت $\lim_{س \to \infty} \frac{س - مس^{٣}}{٢س^{٣}} = -٨$ فإن قيمة الثابت م هي أ) -١٦ ب) -٤ جـ) ٤ د) ١٦	د
٢٠١٦ إكمال	$\lim_{س \to \infty} \frac{س(س^{٢} - ٥)}{٤ - س^{٤}} =$ أ) $-\infty$ ب) -١ جـ) صفر د) ∞	جـ

ورقة عمل (٤)

١- $\text{ق}(س) = \begin{cases} |س-١| & ، س \leq ٣ \\ [س-١] & ، س > ٣ \end{cases}$ فجد $\lim_{س \to ٣} \text{ق}(س)$ (غ٠م)

٢- $\text{ق}(س) = \begin{cases} س^{٢} - أس & ، س \leq ١ \\ ٣س + ب & ، س > ١ \end{cases}$ ، $\lim_{س \to ١} \text{ق}(س) = ٥$ فجد أ،ب. (-٢،٤)

٣- $\text{ق}(س) = \begin{cases} \dfrac{٣س^{٢} - ٥س + ٢}{٢س^{٢} - ٣س + ١} & ، س > ١ \\ ب & ، س \geq ١ \end{cases}$ ما قيمة ب إذا كانت $\lim_{س \to ١} \text{ق}(س)$ موجودة ؟ (١)

٤- $\text{ق}(س) = \begin{cases} \dfrac{٢٧س^{٣} + ١}{٣س + ١} & ، س \neq -\frac{١}{٣} \\ ٥ & ، س = -\frac{١}{٣} \end{cases}$ فجد $\lim_{س \to -\frac{١}{٣}} \text{ق}(س)$ (٣)

٥- $\text{ق}(س) = \begin{cases} \dfrac{س^{٢} - ٤}{س - ٢} & ، س < ك \\ ٣س & ، س \geq ك \end{cases}$ فما قيمة ك التي تجعل $\lim_{س \to ك} \text{ق}(س)$ موجودة ؟ (١)

٦- $\text{ق}(س) = \begin{cases} [س + ٢] & ، س < أ \\ ٨ - [س] & ، س > أ \end{cases}$ فما قيمة أ حيث أ $\notin$ ص و $\lim_{س \to أ} \text{ق}(س)$ موجودة ؟

أ $\in$] ٣ ، ٤ [

٧- $هـ(س) = \begin{cases} [س + ٢] & ، س < أ \\ ٧ - [س] & ، س > أ \end{cases}$ فما قيمة أ حيث أ ∈ ص و $\lim_{س \to أ} هـ(س)$ موجودة ؟ (٣)

٨- $هـ(س) = \begin{cases} [٢س + ١] & ، س < ٣ \\ |١٠ - ٢س| & ، س \geq ٣ \end{cases}$ فجد $\lim_{س \to ٣^-} هـ(س)$ (٦)

٩- $هـ(س) = \begin{cases} \dfrac{س^٢ - ١٦}{٢س - ٨} & ، س < ٤ \\ \dfrac{٨}{س} + ٥ & ، س = ٤ \\ \dfrac{س - ٤}{\sqrt{س} - ٢} & ، س > ٤ \end{cases}$ فجد $\lim_{س \to ٤} هـ(س)$ (٤)

١٠- $هـ(س) = \begin{cases} \dfrac{٤ - س}{|س - ٤|} & ، س > ٤ \\ أس^٢ - ٩ & ، س < ٤ \end{cases}$ ما قيمة أ إذا كانت $\lim_{س \to ٤} هـ(س)$ موجودة ؟ $\left(\frac{١}{٢}\right)$

١١- $\lim_{س \to ٢^+} \dfrac{\sqrt{٤ - ٤س + س^٢}}{س^٢ + س - ٦}$ $\left(\frac{١}{٥}\right)$

١٢- $\lim_{س \to -\frac{١}{٢}} \dfrac{\sqrt{١ + ٤س + ٤س^٢}}{٢س + ١}$ (غ.م)

١٣- $\lim_{س \to ٢} \dfrac{\left[\frac{س}{٢}\right] - ٢س}{س + ١}$ (غ.م)

١٤- $\lim_{س \to ٢} \dfrac{|س^٢ - ٤|}{|س - ٢|}$ (٤)

١٥- $\lim_{س \to ٣^+} \dfrac{س - [س]}{|س^٢ - ٩|}$ $\left(\frac{١}{٦}\right)$

١٦- $\lim_{س \to ٠} \dfrac{|س - ٣| - |٢س - ٣|}{س}$ (١)

١٧- $\text{ق}(س) = \begin{cases} \dfrac{س^{٢} - ا س + ٣}{س - ١} & ، س > ١ \\ ب س - ٥ & ، س < ١ \end{cases}$ ، $\lim_{س \to ١} \text{ق}(س)$ موجودة فجد $ا، ب$. (٣،٤)

١٨- $\text{ق}(س) = \begin{cases} ا س + ٣ & ، س \geq ٢ \\ ا^{٢} س^{٢} + ٣ & ، س < ٢ \end{cases}$ ، $\lim_{س \to ا} \text{ق}(س)$ موجودة فما قيمة $ا$ ؟ $\left(\frac{١}{٢}، -\right)$

١٩- $\text{ق}(س) = \begin{cases} [س + ا] & ، س < ٤ \\ ٣س & ، س > ٤ \end{cases}$ وكانت $\lim_{س \to ٤} \text{ق}(س)$ موجودة فما قيمة $ا$ حيث $ا \in$ ص. (٨)

٢٠- ما مجموعة قيم $ا$ التي تجعل $\lim_{س \to ا} [٢س] = ٣$ $ا \in [\frac{٣}{٢}، ٢[$

٢١- إذا كانت $\lim_{س \to ٢} [ا س] = ٥$ فما قيمة الثابت $ا$ ؟ $ا \in [\frac{٥}{٢}، ٣[$

٢٢- $\text{ق}(س) = \begin{cases} ا س - ب & ، س \geq ١ \\ ٣س & ، ١ > س > ٢ \\ ب س^{٢} - ا & ، س \leq ٢ \end{cases}$ وكانت، $\lim_{س \to ١} \text{ق}(س)$ ، $\lim_{س \to ٢} \text{ق}(س)$ موجودتين . جد $ا، ب$. (٣،٦)

٢٣- $\text{ق}(س) = \dfrac{س^{٢} - ٣س + ٢}{س - ١}$ ، $\text{هـ}(س) = \begin{cases} ٢س + ١ & ، س \geq ١ \\ ٣س & ، س < ١ \end{cases}$ جد $\lim_{س \to ١} (\text{ق} + \text{هـ})(س)$. (٢)

٢٤- إذا كانت $\lim_{س \to ا} \dfrac{س + ٢}{س^{٢} + ٢س + ١}$ غير موجودة فما قيمة $ا$ ؟ (-١)

ورقة عمل (٥)

الاتصال وخواص الاقترانات المتصلة

١- $ق(س) = \begin{cases} أ^{٢}س^{٢} & ، س \geq ٢ \\ (١-أ)س & ، س < ٢ \end{cases}$ متصل عند س=٢ فما قيمة الثابت أ ؟ $\left(١-، \frac{١}{٢}\right)$

٢- $ق(س) = \begin{cases} ٢جتا^{٢}س & ، س \geq \frac{\pi}{٢} \\ أس^{٢}+\pi^{٢} & ، س < \frac{\pi}{٢} \end{cases}$ متصل عند س= $\frac{\pi}{٢}$ فما قيمة الثابت أ ؟ (-٤)

٣- $ق(س) = \begin{cases} س-|س| & ، س < -١ \\ بس & ، س \leq -١ \end{cases}$ متصل عند س=-١ فما قيمة الثابت ب ؟ (٢)

٤- $ق(س) = \begin{cases} \frac{س-جا٣س}{٥س} & ، س \neq ٠ \\ أجتا٢س & ، س = ٠ \end{cases}$ متصل عند س=٠ فما قيمة الثابت أ ؟ $\left(\frac{-٢}{٥}\right)$

٥- $ق(س) = \begin{cases} أ+١ & ، س = -٤ \\ \frac{١٦-س^{٢}}{٥-\sqrt{س^{٢}+٩}} & ، |س| < ٤ \\ ب & ، س = ٤ \end{cases}$ متصل في [-٤ ، ٤] فجد أ،ب. (١ ،٠٩)

٦- إذا علمت أن $هـ(س) = \frac{س^{٢} + ٣}{[س]}$ فجد قيم س التي تجعل $هـ(س)$ غير متصل . $س \in [١، ٠) \cup (٠، ١]$

٧- $هـ(س) = \begin{cases} \left[\frac{س}{٢} - ١\right] & ، س < ١ \\ \frac{أ}{س} & ، س \geq ١ \end{cases}$ متصل عند س=١ فما قيمة الثابت أ ؟ (-١)

٨- $هـ(س) = \begin{cases} \frac{\frac{١}{١+س} - \frac{١}{٣}}{س - ٢} & ، س \neq ٢ \\ \frac{٩س - ١٨}{٩} & ، س = ٢ \end{cases}$ ابحث اتصال $هـ(س)$ عند س= ٢ (متصل)

٩- $هـ(س) = \begin{cases} |س - ٢| & ، س \geq ٣ \\ \frac{٦}{س} - ١ & ، س < ٣ \end{cases}$ ابحث اتصال $هـ(س)$ في مجاله. (متصل على ح)

١٠- $هـ(س) = \begin{cases} أ - ب ظا س & ، ٠ \leq س < \frac{\pi}{٤} \\ ب + \frac{٤}{\pi} س & ، \frac{\pi}{٤} < س \geq \frac{\pi}{٢} \\ ٣ & ، س = \frac{\pi}{٤} \end{cases}$ متصل عند س= $\frac{\pi}{٤}$ فجد أ،ب. $(٢،٥)$

١١- $هـ(س) = \begin{cases} \frac{س^{٢} - (ك+١)س + ك}{س - ١} & ، س \neq ١ \\ ٢ & ، س = ١ \end{cases}$ متصل عند س = ١ فما قيمة ك ؟ (-١)

١٢- إذا كان $ق(س) = \sqrt{\frac{س^{٢}+١}{س^{٢}-١}}$ فجد قيم س التي يكون عندها $ق(س)$ غير متصل . $س \in [-١ ، ١]$

١٣- $ق(س) = \begin{cases} \frac{س^{٢}-(٣-٢جـ)س-٦جـ}{س-٣} & ، س \neq ٣ \\ ٤س-١ & ، س = ٣ \end{cases}$ متصل عند س = ٣ فما قيمة جـ ؟ (٤)

١٤- $ق(س) = \begin{cases} \frac{س\sqrt{س-١}}{س-١} & ، س > ١ \\ ب & ، س = ١ \\ ٢أس & ، س < ١ \end{cases}$ متصل عند س = ١ فما قيمة كل من أ،ب ؟ $(\frac{٣}{٢}، \frac{٣}{٤})$

١٥- $ق(س) = \begin{cases} \frac{جا أ(س-٤)}{٣س-١٢} & ، س > ٤ \\ ٢ & ، س = ٤ \\ \frac{س^{٢}-٢س-٨}{بس-٤ب} & ، س < ٤ \end{cases}$ متصل عند س = ٤ فما قيمة كل من أ،ب ؟ $(٣،٦)$

١٦- $ق(س) = \begin{cases} أس^{٣}-بس+١ & ، س > ١ \\ ٥ & ، س = ١ \\ س^{٢}-(أ+ب)س+٢ & ، س < ١ \end{cases}$ متصل عند س = ١ فما قيمة كل من أ،ب ؟ $(١، -٣)$

١٧- $ق(س) = \begin{cases} س^{٢}+٣ & ، ١ \geq س \geq ٢ \\ & \text{ابحث اتصال } ق(س) \text{ على } [١،٤]. \\ \frac{٩}{س-١} & ، ٢ < س \leq ٤ \end{cases}$ متصل على $[١ ، ٤] - \{٢\}$

١٨- $ق(س) = [٢س]$ فما مجموعة قيم س التي عندها $ق(س)$ غير متصل ؟ غير متصل عند س= $س = \frac{ن}{٢}$ حيث $ن \in ص$

١٩- إذا كان $ق(س) = [\frac{س}{٣} - ١]$ فما مجموعة قيم س التي يكون عندها $ق(س)$ غير متصل ؟ $س = ٣ن ، ن \in ص$

٢٠- إذا كان ق(س) متصلا عند س=٢ وكانت $\lim_{س \to ٢} (٥ - ٣هـ(س)) = ١٧$ فجد هـ(٢) (-٤)

٢١-إذا كان ق(س) متصلا عند س=٢،وكانت $\lim_{س \to ٢^-} هـ(س) = ٥$ فجد $\lim_{س \to ٢} (هـ(س) - [س - \frac{١}{٢}])$ (٤)

٢٢- إذا كانت $\lim_{س \to ٣} (هـ(س) + ٤) = ٩$ وكان ق(٣)=٥ فابحث اتصال ق(س) عند س=٣ . (متصل)

٢٣- $هـ(س) = \begin{cases} ٥س - ٢ & ، س \geq أ \\ ٣س + ٨ & ، س < أ \end{cases}$ متصل عند س=أ فما قيمة أ ؟ (٥)

٢٤- إذا كان هـ(س) متصلا عندس=٣،وكان ٢ق(٣)=-١ فجد $\lim_{س \to ٣^-} هـ(س)$. $(\frac{١}{٢})$

٢٥- $هـ(س) = \begin{cases} س^٢ + \sqrt{-س} & ، -١ \leq س < ٠ \\ [س] + ٥س - ٢ & ، ٠ \leq س \leq ١ \end{cases}$ ابحث اتصال ق(س) على [-١ ، ١] . متصل على[-١ ، ١]-{٠،١}

٢٦- $هـ(س) = \frac{س^٢ - ٣س - ٥}{س^٢ - ٢س + أ٢}$ متصل على ح فما مجموعة قيم الثابت أ ؟ $\exists أ \in]-\infty ، \frac{١}{٢}[$

٢٧-ق(س) متصل عند س=٤، ٣ق(٤)=٦ ، $\lim_{س \to ٤^+} هـ(س) = ٤ب$ فما قيمة الثابت ب ؟ $(\frac{١}{٢})$

٢٨- $هـ(س) = \begin{cases} \frac{أ}{س} + س^٢ & ، ٠ < س \leq ٢ \\ [س] + ٣ & ، ٢ < س < ٣ \\ ٧ & ، س = ٣ \end{cases}$ متصل عند س=٢ . جد أ وابحث الاتصال على [٠،٣[. أ=٢

متصل على [٠،٣[-{٣}

٢٩- $هـ(س) = \begin{cases} ٤ & ، -٢ < س < ٢ \\ |س| + ٢ & ، س < -٢ \\ س^٢ & ، س \leq ٢ \\ ١ & ، س = -٢ \end{cases}$ ابحث اتصال ق(س) على مجاله.

متصل على ح - {-٢}

السنة	السؤال	الجواب
٢٠٠٨	ابحث في اتصال $\text{ق}(س) = \begin{cases} \lvert س - ٢ \rvert & ، ٣ \leq س < ٤ \\ ٤ - س & ، ٤ \leq س \leq ٥ \end{cases}$ في الفترة [٣،٥]	متصل على [٣،٥]-{٤}
٢٠٠٩	ابحث في اتصال $\text{ق}(س) = \begin{cases} س^{٢} - س + ٩ & ، ٠ \leq س \leq ١ \\ \dfrac{س^{٥} - ١}{س - ١} & ، ١ < س \leq ٢ \end{cases}$ في الفترة [٠،٢]	متصل على [٠،٢]-{١}
٢٠١٠	ابحث في اتصال $\text{ق}(س) = \begin{cases} \lvert س \rvert + س^{٢} - ٥ & ، س \geq ٠ \\ \dfrac{٣ \text{جا} س + ٢ س}{س - \text{ظا} ٢ س} & ، س < ٠ \end{cases}$ عندما س=صفر	متصل عند س=٠
٢٠١٠ إكمال	ابحث في اتصال $\text{ق}(س) = \begin{cases} ٣ س^{٢} - ٣ س + \pi & ، -١ \leq س \leq ٠ \\ \dfrac{س^{٢} + \text{جا} \pi س}{س} & ، ٠ < س \leq ١ \end{cases}$ في الفترة [-١،١]	متصل في الفترة [-١،١]
٢٠١٢	أحد الاقترانات متصل عند س=١ أ) $\text{ق}(س) = [س]$ ب) $\text{ق}(س) = \dfrac{١}{س - ١}$ ج) $\text{ق}(س) = [س + ٠,٣]$ د) $\text{ق}(س) = ٢ ، س \neq ١$	جـ
٢٠١٢ إكمال	الاقتران ق(س)=[س+٠,٨] متصل عند س= أ)-٠,٨ ب)صفر ج) ٠,٢ د) ١,٢	ب
٢٠١٣	إذا كان ق(س) اقترانا متصلا على ح ، وكانت $\lim_{س \to ٢} (٣ \text{ق}(س) + س) = ١٤$ فإن ق(٢)= أ) ٢ ب) ٣ ج) ٤ د) $\frac{١٣}{٣}$	جـ

٢٠١٣	ابحث في اتصال الاقتران ق(س)= $\begin{cases} \lvert س\rvert + ٣٠ & ،١ \leqslant س \leqslant ٢ \\ \dfrac{س^{٤} - ١٦}{س - ٢} & ،٢ < س \leqslant ٤ \end{cases}$ في الفترة [٤،١]	متصل على[٤،١]
٢٠١٣	إذا كان ق(س)= $\begin{cases} \dfrac{\sqrt{١ + س^{٢}} - ١}{\sqrt{١ + س^{٢}}\ س^{٢}} & ،س \neq ٠ \\ \dfrac{جـ}{٤} & ،س = ٠ \end{cases}$ متصل عند س=٠ فما قيمة جـ؟	-٢
٢٠١٣إكمال	ابحث في اتصال الاقتران ق(س)= $\begin{cases} \dfrac{س^{٣} + ١}{س + ١} & ،-٣ \leqslant س < -١ \\ ١ - ٢س & ،-١ \leqslant س \leqslant ٢ \end{cases}$ في الفترة [-٣،٢]	متصل على [-٣،٢]
٢٠١٤	إذا كان ق(س) متصلا وكانت $\lim_{س \to ١} (٣ + ٢ق(س + ١)) = ٧$ فإن ق(٢)= أ) ١ ب) ٢ جـ) ٤ د) ٧	ب
٢٠١٤	إذا كان ق(س)= $\begin{cases} \dfrac{\sqrt{س - ١}}{\sqrt[٣]{س - ١}} & ،س > ١ \\ أ + ٢ & ،س = ١ \\ ب س + ٢ & ،س < ١ \end{cases}$ متصلا عند س=١ ، جد الثابتين أ ،ب.	أ= $\frac{١}{٢}$ - ب= $\frac{١}{٢}$ -
٢٠١٤إكمال ضفة	إذا كان ق(س) متصلا عند س=٢ ، ق(٢)=٣ وكانت $\lim_{س \to ١} ق(س) = ٥$ ، فإن $\lim_{س \to ١} (٣س - ١) - س^{٢} =$ أ) ٣ ب) ٢ جـ) ٤ د) ٧	ب

٢٠١٤إكمال ضفة	ابحث في اتصال ق(س)= $\begin{cases} \frac{\sqrt{٢-س}}{٢} & ، س = -٢ \\ \frac{١-س}{٥+س} & ، -٢ < س \geq ٠ \\ \frac{-جاس}{٥س} & ، ٠ < س \geq \pi \end{cases}$ على [-٢ ، π]	متصل على [-٢، π]-{٠}
٢٠١٤إكمال غزة	الفترة التي يكون فيها الاقتران $ق(س) = \sqrt{٣-س}$ متصلا عليهامن بين الفترات التالية هي : أ) ح ب)$]-\infty، ٣]$ جـ) $]-\infty، ٣]$ د) $]-\infty، ٠]$	جـ
٢٠١٥	ابحث في اتصال ق(س)= $\begin{cases} س^{٢} - ٢س + ٢ & ، -٢ \leq س \leq ٠ \\ [س + ٢] & ، ٠ < س \leq ١ \end{cases}$ في الفترة [-٢،١]	متصل على [-٢ ، ١]
٢٠١٦	قيمة الثابت ب التي تجعل ق(س) = $\begin{cases} ٢س - \pi & ، س \leq \frac{\pi}{٢} \\ جاس + ب & ، س < ٢ \end{cases}$ متصلا عند س = $\frac{\pi}{٢}$ هي أ) -١ ب) صفر جـ) ١ د) $\frac{\pi}{٢}$	أ

ورقة عمل (٦)

نظرية القيم الوسطية ونظرية بلزانو

١- $\text{و}(س) = س^{٣} - ٤س^{٢} + ٥س$ يحقق شروط نظرية القيم الوسطية في $[أ، أ+١]$ وكان ق(جـ)=٢٢ ، جـ $\in]أ، أ+١[$.

فما قيمة أ علما بأن أ $\in$ ط؟ (٤)

٢- إذا علمت أن٣،٢ هما صفرا الاقتران ق(س) وكان $\text{هـ}(س) = ٤\text{و}(س) + س^{٢} - ٥$ حيث ق(س) متصل. أثبت وجود صفر للاقتران هـ(س) في $]٣،٢[$.

٣-إذا كان $\text{و}(س) = س^{٢} + س - أ$ يحقق شروط نظرية بلزانو في $]١،٠[$ فجد قيمة الثابت أ. أ$\in]٢،٠[$

٤- ليكن $\text{و}(س) = جاس + ٢جتاس$ ، س$\in [\pi، ٠]$. بين أنه يوجد جـ $\in]\pi، ٠[$ بحيث ق(جـ)=١

٥- مكعب حجمه ٤٠ سم^{٣}فما طول ضلعه لأقرب منزلة عشرية ؟ (٣,٥)

٦- $\text{و}(س) = أس^{٣} + س^{٢} - ٧س + أ$. ما قيمة أ إذا كان للاقتران صفر في $[٣،١]$ ؟ أ$\in]٣، \frac{٣}{٧}[$

٧- $\text{و}(س) = أس^{٢} - ٧س + أ$. جد قيمة أ إذا علمت أن للاقتران صفرا حقيقيا على الأقل . أ$\in [\frac{٧}{٢}، \frac{٧-}{٢}]$

٨- $\text{و}(س) = س^{٣} + س - ٢٠$ ، ق(جـ)=٢٣ حيث جـ $\in]أ، أ+١[$. جد أ علما بأن أ $\in$ ص~ . (٣)

٩- ق(س)متصل في $[٢،٤]$ ، ق(٢)=٣ ، ق(٤)=١٥ بين أنه يوجد جـ$\in]٢،٤[$ بحيث ق(جـ)= ٣جـ .

١٠- ق(س)= $\begin{cases} س^{٢} - أ & ، ٠ \leq س \leq ٣ \\ ٢س - ١ & ، ٣ < س \leq ٥ \end{cases}$

حيث س$\in [٠،٥]$ فإذا علمت أن ق(س) يحقق شروط بلزانو فجد أ والتقريب الثاني لصفر الاقتران. (أ = ٤) (١,٢٥)

١١- ق(س) ، هـ(س) اقترانان متصلان في $[٢،٥]$ وكان ق(٢)=٧،ق(٥)=٢ ،هـ(٢)=٣،هـ(٥)=١٠ بين أنه يوجد جـ$\in]٢،٥[$ بحيث ق(جـ)=هـ(جـ) .

١٢- ق(س)،هـ(س) متصلان في $[أ، ب]$ بحيث $\text{و}(أ) > \text{هـ}(أ)$، $\text{و}(ب) < \text{هـ}(ب)$ أثبت أن للمعادلة ق(س)=هـ(س) حلا في $]أ، ب[$.

١٣- برهن أن للمعادلة جاس-س+١ =٠ جذرا واحدا على الأقل في $]٠، \frac{\pi ٣}{٢}[$.

١٤- ليكن $\text{و}(س) = \frac{\text{هـ}(س)}{س + جـ} - ١$ ، جـ >٠ يحقق شروط بلزانو في $[١،٠]$. بين أن $\text{هـ}(١) - \text{هـ}(٠) > ١$ حيث أن $\text{و}(٠) < ٠$

١٥- ق(س)،هـ(س) متصلان في $[٢،١]$ وكان ق(١)=٣ ، ق(٢)=٤ ، هـ(١)=٢ ، هـ(٢)=٧ . أثبت أن للمعادلة ٤ق(س)=٣هـ(س) حلا في $]٢،١[$.

١٦- ق(س) متصل في $[١،٠]$ وكان ٠ < ق(س) < ١ ، $\forall$س$\in$ $[١،٠]$. أثبت أنه توجد جـ$\in$ $]١،٠[$ بحيث ق(جـ)=جـ.

١٧- ق(س)،هـ(س) متصلان في $[٣،١]$ حيث ق(١)=١٠،هـ(١)=٢،ق(٣)=٣، هـ(٣)=٧.أثبت وجود جـ$\in$ $]٣،١[$ بحيث $\text{ق}(\text{جـ}) = \text{هـ}^{٢}(\text{جـ})$.

١٨- ق(س)= $\begin{cases} ٢\text{س} + ١ & ، \ ٠ \leq \text{س} < ٢ \\ ١ + \text{س}^{٢} & ، \ \text{س} \geq ٢ \end{cases}$ أثبت وجود جـ$\in$ $]٥،٠[$ بحيث ق(جـ)=١٧ ثم جد جـ . (٤)

١٩-عند استخدام نظرية بلزانو لإيجاد صفر حقيقي للاقتران ق(س) وجد أن هذا الصفر ينتمي للفترة $]٣،٢[$ وكان $\text{ق}(٢) = ٥،\ \text{ق}(\frac{٥}{٢}) = ١$

ما التقريب الثاني لصفر الاقتران ؟ (٢,٧٥)

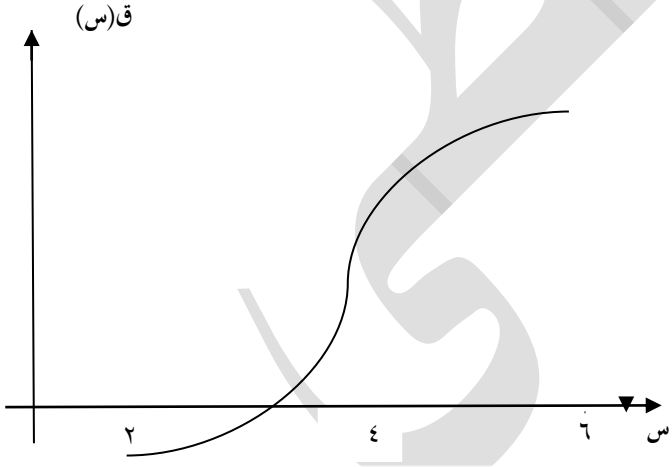
٢٠- إذا كان ق(س) متصلا على $[٥،١]$ وكان : ق(١)=صفر ، ق(٢)=٩ ، ق(٣)=١ ، ق(٤)=١٦ ، ق(٥)=١ .

$\text{هـ}(\text{س}) = \sqrt{\text{ق}(\text{س}) - ٢}$ ، فما هو أقل عدد ممكن لأصفار هـ(س) يمكن التأكد منها في $]٥،١[$. (٤)

٢١- ليكن ق(س) كثير حدود معرفا في $[٦،٢]$ حيث ق(٢)×ق(٦) < صفر وكان ق(٢)=٧ ، ق(٤)=٨ ، ق(٥)=-١ . فما التقريب الثالث لصفر الاقتران ق(س) في الفترة $]٦،٢[$ ؟؟ (٤,٥)

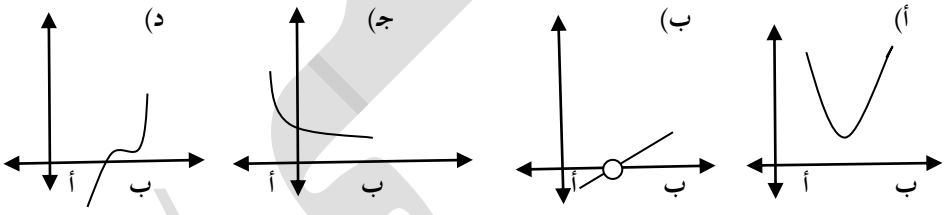
٢٢- الشكل المجاور يمثل منحنى ق(س) المتصل على $[٦،٢]$.

بين أن ق(س) يحقق بلزانو في تلك الفترة وجد التقريب الثاني لصفر هذا الاقتران. (٣)



٢٣) إذا كان ق(س) يحقق بلزانو على [أ،ب] ، وكان ق(أ)=ب ، ق(ب)=أ وكان هـ(س) =٢س فأثبت أن ك(س)=ق(س)-هـ(س) يحقق بلزانو على نفس الفترة.

السنة	السؤال	الجواب
٢٠٠٧	إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{٣} - ٢\text{س}^{٢} + \text{س} - ١$ فإنه يوجد للاقتران ق(س) صفر في الفترة: أ) $]١،٠[$ ب) $]-١،٠[$ جـ) $]-١،٢[$ د) $]-٢،-١[$	جـ

٢٠٠٧ دراسات	ليكن $ق(س) = س^٥ - ١$ ، $هـ(س) = \sqrt{س}$ ،أثبت وجود جـ $\in$]٠،١[بحيث ق(س)=هـ(س).	☺
٢٠٠٧ إكمال	إذا كان ق(س)= جتاس ، أثبت وجود جـ $\in$]٠،π[بحيث ق(جـ)=٠ ثم جد جـ .	$\frac{\pi}{٢}$
٢٠٠٨	إذا كان $ق(س) = س^٣ + س - ١$ ، س $\in$ [١،٢]،أثبت وجود جـ $\in$]١،٢[بحيث ق(جـ)=٧.	☺
٢٠٠٨ إكمال	ليكن $ق(س) = س^٥ - س - ٢$ ، أثبت باستخدام نظرية بلزانو وجود صفر واحد على الأقل للاقتران ق(س) في مجاله.	☺
٢٠٠٩	استخدم نظرية بلزانو في إيجاد في قيمة تقريبية ثانية للعدد $\sqrt{٣}$.	$\frac{٧}{٤}$
٢٠٠٩ إكمال	بين أنه يوجد للمعادلة $س^٣ - س = ١$ حل حقيقي واحد على الأقل.	☺
٢٠١٠	ق(س) كثير حدود على الفترة[٦،٢] ، ق(٢)=٣ ، ق(٤)=-١ ، ق(٦)=-٣ ما التقريب الثاني لصفر الاقتران في الفترة]٦،٢[؟ أ) ٥ ب) ٤ جـ) ٣ د) ٢	جـ
٢٠١٠	إذا كان $ق(س) = \frac{س^٢ + ٢س + ١}{س + ٤}$ ، س $\in$ [١،٣]فأثبت وجود جـ $\in$]١،٣[بحيث ق(جـ)=٢.	☺
٢٠١٠ إكمال	استخدم نظرية بلزانو لإيجاد قيمة تقريبية ثانية للعدد $\sqrt{٥}$ في الفترة]٢،٣[.	٢,٢٥
٢٠١١	أحد الاقترانات المرسومة يحقق شروط نظرية بلزانو في الفترة [أ،ب] أ) ب) جـ) د)  	د
٢٠١١	ق،هـ كثيرا حدود موجبان في [١،٣] بحيث $ق(١) - \frac{٢}{هـ(١)} > ٠$ ، $ق(٣) - \frac{٢}{هـ(٣)} < ٠$ بين أنه يوجد على الأقل جـ $\in$]١،٣[بحيث ق(جـ).هـ(جـ)=٢.	☺
٢٠١١إكمال	ق(س)= $\begin{cases} ٤س + ١ \text{ ، } -١ \leq س \leq ٣ \\ ٢س^٢ - ٥ \text{ ، } ٣ < س \leq ٥ \end{cases}$ بين أن ق(س) يحقق شروط نظرية القيم الوسطية على [-١، ٥] وأنه يوجد جـ $\in$]-١، ٥[حيث ق(جـ)=٢٠ ثم أوجد قيمة تقريبية ثانية للعدد جـ.	٣,٥

٢٠١٢	استخدم نظرية بلزانو لإيجاد قيمة تقريبية ثانية للعدد $\sqrt[٣]{٨}$ في الفترة]٢،٣[.	٢,٧٥
٢٠١٢ إكمال	إذا كان $ق(س) = س^{٣} + س + ٢$ ، س $\in$ [١،٢]،أثبت وجود جـ $\in$]١،٢[بحيث ق(جـ)=٩ ثم جد التقريب الثاني لقيمة جـ.	١,٢٥
٢٠١٣	باستخدام نظرية بلزانو بين أن للاقتران $ق(س) = س^{٢} + ٢س - ٥$ صفرا واحدا على الأقل في الفترة]١،٢[، ثم جد قيمة تقريبية ثانية لهذا الصفر.	١,٢٥
٢٠١٣ إكمال	إذا كان=$ق(س) = س^{٣} + ٢س$ ، س $\in$ [١،٣]،أثبت وجود جـ $\in$]١،٣[بحيث ق(جـ)=٨ ثم جد قيمة تقريبية ثانية للعدد جـ.	١,٥
٢٠١٤	إذا كان $ق(س) = س^{٢} - ٢س - أ$ يحقق شروط بلزانو على[-٣،٣]، جد جميع قيم الثابت أ .	أ $\in$]٣،١٥[
٢٠١٤إكمال غزة	إذا كان $ق(س) = ٢جاس - ١$، س $\in \left[\frac{\pi}{٢} ، \frac{\pi ٣}{٢}\right]$، أثبت وجود جذر واحد على الأقل لمنحنى الاقتران ق(س) على الفترة $\left[\frac{\pi}{٢} ، \frac{\pi ٣}{٢}\right]$ ثم جد تلك الجذور .	$\frac{\pi ٥}{٦}$
٢٠١٥	إذا كان $ق(س) = س^{٣} - ٨س + ١٠$ ، س $\in$ [١،٣]،أثبت وجود جـ $\in$]١،٣[بحيث ق(جـ)=٨ ثم جد قيمة تقريبية ثانية للعدد جـ.	٢,٥
٢٠١٥	إذا كان $ق(س) = س^{٣} - ٨س + ٦$ ،فمن المؤكد أن للمعادلة $ق(س) = ٢$ حلا في أ)]٠،١[ب)]٣،٤[جـ)]١،٢[د)] -١،٠[	أ
٢٠١٦	$ق(س) = \frac{٢}{س} + ٢س$ يحقق شروط القيم الوسطية على [١،٥] بحيث ق(جـ)=٧ فإن القيمة التقريبية الثانية للعدد جـ هي: أ) ٢ ب) ٣ جـ) ٤ د) ٤,٥	جـ
٢٠١٦	استخدم نظرية بلزانو لإيجاد قيمة تقريبية ثانية للمقدار $\sqrt[٤]{١٨}$ في الفترة]٢ ،٣[	٢,٢٥
٢٠١٦ إكمال	إذا كان ق(س) يحقق شروط بلزانو في [٢،٥] فإن العبارة الصحيحة فيما يلي هي: أ) ق(٢)=ق(٥) ب) ق(٢)×ق(٥)>صفر جـ) ق(٢)×ق(٥)=صفر د) ق(٢)×ق(٥)< صفر	د
٢٠١٦ إكمال	جد قيمة تقريبية ثانية للمقدار $\sqrt[٣]{٦}$ في]١،٢ [.	١,٧٥

الوحدة الثانية

التفاضل

ورقة عمل (٧)

متوسط التغير

١- إذا كان $\text{ق}(س) = \sqrt{٢س - ٣}$ ، متوسط التغير له في $[١، ٦]$ يساوي $\frac{١}{٢}$ فما قيمة أ ؟ (٢)

٢- ليكن متوسط تغير الاقتران $\text{ق}(س)$ على الفترة $[٢، ٥]$ يساوي ٦ ، وكان $\text{هـ}(س) = ٢\text{ق}(س) + ٣س - ٢$.
جد متوسط تغير $\text{هـ}(س)$ على نفس الفترة. (١٥)

٣- إذا كان $\text{ق}(س) = \frac{\text{هـ}(س)}{س}$ ، وكان متوسطا تغير $\text{ق}(س)$ ، $\text{هـ}(س)$ في $[١، ٢]$ هما $-٢، ٥$ على الترتيب. جد $\text{هـ}(١)$. (٩)

٤- ليكن $\text{ق}(س) = ١٠ - ٢\text{هـ}(س)$ ، $\text{هـ}(٢) = ٣$ ، $\text{هـ}(٥) = ١٢$. جد متوسط تغير $\text{ق}(س)$ في $[٢، ٥]$. (٦-)

٥- إذا كان $\text{ق}(س) = س^{٢}$ فما متوسط تغير الاقتران عند $س = ٤$ ؟ (٨ + هـ)

٦- إذا علمت أن $\text{ق}(٣) = ٤\text{ق}(٦) = ١٢$ فما متوسط تغير $\text{ق}(س)$ عندما تتغير س من ٣ إلى ٦ ؟ (٣-)

٧- $\text{ق}(س) = \begin{cases} \sqrt{س^{٢} + ١٦} & ، \quad ا \leq س \leq ٤ \\ ١١ - ٢س & ، \quad ٤ < س \leq ٦ \end{cases}$
جد قيمة ا علما بأن $\frac{\Delta ص}{\Delta س} = -٢$ في $[١، ٦]$. (٣)

٨- إذا علمت أن متوسط تغير $\text{ق}(س) = ٦$ في $[٢، ٤]$ ، متوسط تغير $\text{ق}(س) = ٨$ في $[٤، ٨]$.
فما متوسط التغير لهذا الاقتران في $[٢، ٨]$ ؟؟ $(\frac{٢٢}{٣})$

٩- إذا كان الاقتران $\text{ق}(س)$ كثير حدود من الدرجة الأولى ويمر منحناه بالنقطة $(٢، ٤)$ وكان متوسط التغير له في الفترة $[س_{١}، س_{٢}]$ يساوي ٨ .
جد قاعدة الاقتران . $(\text{ق}(س) = ٨س - ١٢)$

١٠- مربع يتغير طول ضلعه من س إلى س+هـ . ما متوسط التغير في محيطه ؟ (٤)

١١- إذا كان متوسطا تغير $\text{ق}(س)$ ، $\text{هـ}(س)$ على $[٣، ٦]$ هما ٩ ، ١١ على الترتيب ، فجد متوسط تغير
$\text{ل}(س) = \text{ق}(س) + \text{هـ}(س)$ على $[٣، ٦]$. (٢٠)

١٢- أثبت أن متوسط تغير الاقتران الخطي يساوي أ (معامل س) .

١٣- أثبت أن متوسط تغير الاقتران الثابت يساوي صفرا .

١٤- احسب متوسط تغير مساحة دائرة عندما يتغير نصف قطرها من ٤ سم إلى ٦ سم . $(\pi ١٠)$

١٥-إذا كان متوسط تغير $\text{ه}(س)$ في $[٣،١]$ يساوي ٥ وكان $\text{ه}(١) \times \text{ه}(٣) = ١٢$ ، $\text{هـ}(س) = \frac{١}{\text{ه}(س)}$ ، جد متوسط تغير الاقتران $\text{هـ}(س)$ في $[٣،١]$. $\left(\frac{٥-}{١٢}\right)$

١٦-يتحرك جسم على خط مستقيم بحيث بعده (ف) بالأمتار عن نقطة ثابتة (و) بعد (ن) ثانية يعطى بالعلاقة : $\text{ف}(ن) = ٢ن^{٢} - ٢ن + ٢٠$

. جد السرعة المتوسطة في الفترة $[٦،٢]$. (١٤)

١٧-إذا كان القاطع المار بالنقطتين (٢،ق(٢)) ، (٣، ق(٣)) يصنع زاوية قياسها (١٢٠°) مع الاتجاه الموجب لمحور السينات ، فجد متوسط تغير ق(س) عندما تتغير س من ٢ إلى ٣ . $\left(-\sqrt{٣}\right)$

١٨- تحرك جسم في المستوى على منحنى الاقتران ق(س) من النقطة أ(س،ص) إلى النقطة ب(٣، ٥) فإذا كانت $\Delta س = ٠,١$ ، $\Delta ص = ٠,٨$

جد إحداثيي النقطة أ . $أ(٢,٩، ٢,٤)$

١٩-إذا كان $\text{ه}(س) = \text{ظا}س$ فأثبت أن متوسط تغير $\text{ه}(س)$ يساوي $\frac{\text{قا}^{٢}س \text{ظا}هـ}{\text{هـ}(١ - \text{ظا}س \text{ظا}هـ)}$ عندما تتغير س من س إلى س+هـ .

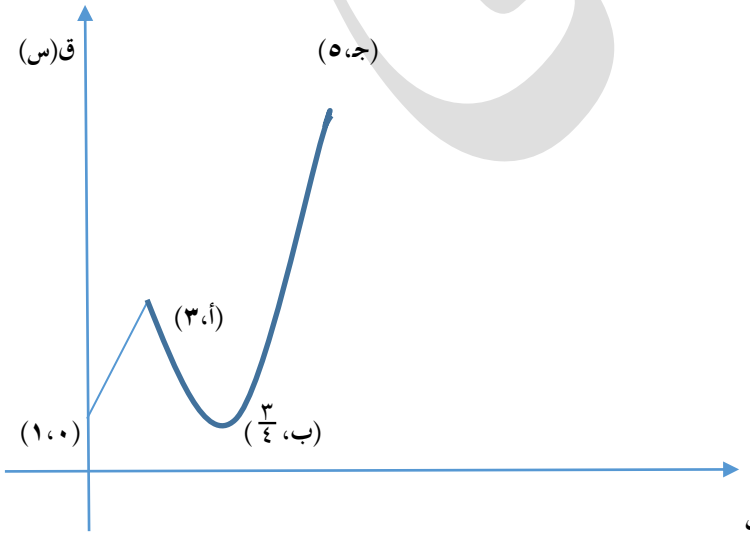
٢٠- $\text{ه}(س) = [س] + [[س]]$ فجد متوسط تغير الاقتران في $[\frac{-٣}{٢}، \frac{٥}{٢}]$. (٢)

٢١- إذا كان متوسط تغير الاقتران $\text{ه}(س) = ٤س^{٢} - أ$ في الفترة $[ب،٢]$ يساوي -٤ فما قيمة ب ؟ $(٣-)$

٢٢- إذا كان متوسط تغير الاقتران $\text{ه}(س) = ٢س^{٢} + س + ١$ في $[أ،١٢]$ يساوي ١٣ فما قيمة الثابت أ ؟ (٢)

٢٣- مكعب من الثلج يذوب بحيث يبقى محافظا على شكله ، تغير طول ضلعه من ٤ سم إلى ٢ سم . ما مقدار متوسط تغير حجمه؟ (٢٨)

مستعينا بالله ثم بالشكل المجاور أجب عن الأسئلة ٢٥ ،٢٦،٢٧



٢٤- متوسط التغير في $[أ،٠]$ يساوي ٢ . جد أ . (١)

٢٥- $\frac{\Delta ص}{\Delta س} = -٣$ في $[أ،ب]$. جد ب . $\left(\frac{٧}{٤}\right)$

٢٦- $\frac{\Delta \text{ه}(س)}{\Delta س} = ٤$ في $[ب،جـ]$. جد جـ . $\left(\frac{٤٥}{١٦}\right)$

السنة	السؤال	الجواب
٢٠٠٧	إذا كان $\text{هـ}(س) = س^{٢}$ ، فإن قيمة متوسط التغير عندما تتغير س من −١ إلى ٣ هي : أ) ٢ ب) ٢,٥ جـ) ٤ د) ٥	أ
٢٠٠٧ دراسات ٢٠٠٩ إكمال	إذا كان متوسط تغير الاقتران ق(س) بين س=١ ، س=٣ يساوي ٤ وكانت ق(٣)=٨ فإن قيمة ق(١)= أ) ١٦ ب) ٢ جـ) صفر د) ٤	جـ
٢٠٠٧ إكمال	ليكن ق(س)= $\begin{cases} ٣س + ٤ ، س > ٢ \\ س^{٢} + ٣س ، س \leq ٢ \end{cases}$ جد متوسط تغير ق(س) عندما تتغير س من ٢ إلى −١.	٣
٢٠٠٨	إذا كان $\text{هـ}(س) = س + [س]$ ، فإن قيمة متوسط التغير في $[\frac{١}{٢} ، ١]$ هي : أ) ٢ ب) ٣ جـ) $\frac{٢}{٣}$ د) $\frac{٣}{٢}$	ب
٢٠٠٨إكمال	متوسط تغير الاقتران $\text{هـ}(س) = س^{٢} + س - ٥$ عندما تتغير س من ١ إلى ٤ يساوي أ) −١٨ ب) −٦ جـ) ٦ د) ١٨	جـ
٢٠٠٩	إذا كان المستقيم القاطع لمنحنى ق(س) في النقطتين (١،ق(١))،(٥،٣) يصنع زاوية مقدارها ١٣٥° مع محور السينات الموجب. احسب متوسط تغير الاقتران هـ(س)= $\frac{٢}{\text{هـ}(س)}$ في الفترة [١،٣]	$\frac{٢}{٣٥}$
٢٠١٠	إذا كان متوسط تغير الاقتران $\text{هـ}(س) = \sqrt{٤س + ١}$ في الفترة [٠،ب] يساوي ١ ، فما قيمة الثابت ب ؟	٢
٢٠١٠ إكمال	إذا كان متوسط تغير الاقتران ق(س) في [١،١٦] يساوي ٩، فإن متوسط تغير الاقتران $\text{هـ}(س^{٢})$ في [١،٤] أ) ٩ ب) ٣ جـ) ٤٥ د) ١٥	جـ
٢٠١١	إذا علمت أن متوسط التغير للاقتران ق(س) في [−٤، ١] يساوي ٣ ، وأن ق(١)=٢ فإن ق(−٤)= أ) −١٥ ب) −١٣ جـ) ١٣ د) ١٥	ب
٢٠١٣	إذا كان متوسط تغير ق(س) في [١،٤] يساوي ٥ ، وكان ق(٤)=٣ ، فإن ق(١) يساوي أ) ١٨ ب) ١٥ جـ) $\frac{٣}{٢}$ د) −١٢	د
٢٠١٤	إذا كان متوسط تغير الاقتران ق(س) على[−٢،٢] يساوي ٥ ، جد متوسط تغير الاقتران هـ(س)=٣ق(س)−٢س على نفس الفترة.	١٣

٢٠١٤إكمال غزة	إذا كان متوسط تغير ق(س) في [١،٤] يساوي ٥ ، وكان ق(١)=٢ ، فإن ق(٤) يساوي أ) ١٧ ب) ١٦ جـ) ١٥ د) ١٣	أ
٢٠١٥	إذا كان متوسط تغير الاقتران ق(س)في الفترة[١،٢]يساوي٤،ومتوسط تغير ق(س)في الفترة[٢،٥]يساوي٨ ،فما متوسط تغير ق(س)في الفترة[١،٥]	٧
٢٠١٦	إذا كان ق(س) اقترانا بحيث ق(٣)=ق(٥)+أ وكان متوسط تغير ق(س) في الفترة [٣،٥] يساوي ١٠ فإن قيمة أ هي أ) ٢٠ ب) −٥ جـ) −١٠ د) −٢٠	د
٢٠١٦ إكمال	إذا كان ق(س)= ٢− س^{٢} معرفا على [١،ب]بحيث كان متوسط تغير ق(س) في تلك الفترة يساوي−٣فإن قيمة ب= أ) ٢ ب) ٣ جـ) ٤ د) $\frac{٣}{٢}$	أ

ورقة عمل (٨)

تعريف المشتقة

١- إذا كانت $\Delta ص = س^{٢} \Delta س + ٥ (\Delta س)^{٢}$ فجد $\frac{ص}{س}$. $(س^{٢})$

٢- إذا علمت أن $\frac{\Delta ص}{\Delta س} = س^{٢} \Delta س + ٥س + ٢$ فجد $ق'(١)$. (٧)

٣- إذا كان $ق(٥ + هـ) = ق(٥) + هـ^{٢} + ٣هـ$ فما قيمة $ق'(٥)$ ؟ (٣)

٤- أثبت أن $\lim_{و \to ٠} \frac{ق(س+و) - ق(س-و)}{٢و} = ق'(س)$.

٥- إذا كان $ق(س) = أس + ٨\sqrt{س}$ وكانت $\lim_{هـ \to ٠} \frac{ق(٤+هـ) - ق(٤)}{هـ} = ٥$ فجد قيمة الثابت أ . (٣)

٦- أثبت أن $\lim_{ع \to س} \frac{٣ع\, ق(ع) - ٣س\, ق(س)}{ع - س} = ٣ق(س) + ٣س\, ق'(س)$.

٧- إذا كان $ق(س) = س + \frac{أ}{س}$ ، $س \neq ٠$ وكانت $\lim_{هـ \to ٠} \frac{٤هـ}{ق(٢+هـ) - ق(٢)} = ٨$ فجد قيمة الثابت أ . (٢)

٨- إذا كان $ق(س) = جا^{٢}س + جتا^{٢}س$ فجد $\lim_{هـ \to ٠} \frac{ق\left(\frac{\pi}{٢} + هـ\right) - ق\left(\frac{\pi}{٢}\right)}{٣هـ}$. (٠)

٩- إذا علمت أن $ق(س) = س^{٢}$ فجد ما يلي:

أ) $\lim_{هـ \to ٠} \frac{ق(س) - ق(س-هـ)}{٥هـ}$ $\left(\frac{٢}{٥}س\right)$ ب) $\lim_{هـ \to ٠} \frac{ق'(٢+٣هـ) - ن'(٢)}{٤هـ}$ $\left(\frac{٣}{٢}\right)$

جـ) $\lim_{هـ \to ٠} \frac{ق(س+هـ) - ق(س-هـ)}{٢هـ}$ $(٢س)$ ١٠- $\lim_{هـ \to ٠} \frac{جتا(٧س+٣هـ) - جتا٧س}{٥هـ}$ $\left(\frac{-٣}{٥}جا٧س\right)$

١١- إذا كان $ق'(-٥) = ٦$ ، $ق'(-٣) = ٧$ فجد $\lim_{س \to -٣} \frac{ق(٢س+١) - ق(-٥)}{س+٣}$ (١٢)

١٢- جد $\lim_{ع \to ٢} \frac{هـ(\sqrt{ع+٧}) - هـ(٣)}{ع-٢}$ علما بأن $هـ'(٣) = ٤$ $\left(\frac{٢}{٣}\right)$

١٣- إذا كان متوسط تغير ق(س)يساوي $(٣س + ٤س^{٢}هـ)$ فجد $هـ'(٣)$. (٩)

١٤- إذا كان التغير في ق(س)يساوي $(٢س^{٢}\Delta س + (\Delta س)^{٢})$ فجد $\lim_{هـ \to ٠} \frac{هـ}{هـ(١+هـ) - هـ(١)}$ $\left(\frac{١}{٢}\right)$

١٥- إذا كان $هـ(س) = س^{٢}|س|$ فاستخدم تعريف المشتقة لإيجاد $هـ'(٠)$. (٠)

١٦- ق(س)= $\begin{cases} س|س| + ٣ & ، -١ < س < ١ \\ [س] + ٣ & ، ١ \leq س < ٢ \end{cases}$ جد إن أمكن $هـ'(١)$ باستخدام تعريف المشتقة. (غ،م)

١٧- $هـ(س) = \frac{١}{\sqrt{س}} + ٢$ ، جد $هـ'(١)$ باستخدام تعريف المشتقة . $\left(\frac{-١}{٢}\right)$

١٨- $هـ(س) = ١ + \sqrt{٣ - ٢س}$ جد $هـ'(س)$ باستخدام تعريف المشتقة . $\left(\frac{-١}{\sqrt{٣-٢س}}\right)$

١٩- إذا كان $هـ(٣) = ٥$ ، $هـ'(٣) = ٤$ فما قيمة $\lim_{س \to ٣} \frac{٣هـ(س) - س\,هـ(٣)}{س-٣}$ (٧)

٢٠- جد $\lim_{س \to ٤} \frac{هـ(\sqrt{س}) - هـ(٢)}{س-٤}$ $\left(\frac{١}{٤}هـ'(٢)\right)$ ٢١- $\lim_{س \to ٢} \frac{هـ'(٢س) - هـ'(٤)}{س-٢}$ $\left(٢هـ''(٤)\right)$

٢٢- $\lim_{هـ \to ٠} \frac{٥(٢+هـ)^{٧} - ٦٤٠}{١٠هـ}$ (٢٢٤) ٢٣- $\lim_{س \to \infty} س\left(هـ\left(\frac{٢س+١}{س}\right) - هـ(٢)\right)$ $\left(هـ'(٢)\right)$

٢٤- إذا كانت $هـ'(٤) = ٦$ فجد $\lim_{هـ \to ٠} \frac{هـ(٤-٢هـ) - هـ(٤+٥هـ)}{هـ}$ (-٤٢)

السنة	السؤال	الجواب
٢٠٠٧	إذا كان $\text{ه}(س) = \sqrt{٢س + ١}$ ، أوجد باستخدام تعريف المشتقة $\text{ه}'(٤)$	$\frac{١}{٣}$
٢٠٠٧	إذا كان $\text{ه}'(٥) = ٣$ فأوجد $\lim_{س \to ٤} \frac{\text{ه}(٣س - ٧) - \text{ه}(٥)}{٢س - ٨}$	$\frac{٩}{٢}$
٢٠٠٨	إذا كان $\text{ه}'(س) = ٢س^{٢} + ٤$ فإن $\lim_{س \to ٣} \frac{\text{ه}(٣) - \text{ه}(س)}{س - ٣}$ تساوي أ) −٢٢ ب) −١٢ ج) ١٢ د) ٢٢	أ
٢٠٠٨	استخدم تعريف المشتقة الأولى عند نقطة لإيجاد مشتقة الاقتران $\text{ه}(س) = س^{٢} + س$ عند س=٢	٥
٢٠٠٩	استخدم تعريف المشتقة الأولى عند نقطة لإيجاد مشتقة الاقتران $\text{ه}(س) = \sqrt{٢س - ٣}$ عند س=٦	$\frac{١}{٣}$
٢٠٠٩ إكمال	استخدم تعريف المشتقة الأولى عند نقطة لإيجاد مشتقة الاقتران $\text{ه}(س) = \frac{س - ١}{س + ١}$ عند س=٢	$\frac{٢}{٩}$
دورة	استخدم تعريف المشتقة الأولى عند نقطة لإيجاد مشتقة الاقتران $\text{ه}(س) = س + \frac{٢}{س}$ عند س=١	−١
٢٠١٠ إكمال	استخدم تعريف المشتقة الأولى عند نقطة لإيجاد مشتقة الاقتران $\text{ه}(س) = \sqrt{س + ٢}$ عند س=٢	$\frac{١}{٤}$
٢٠١١	استخدم التعريف لإيجاد مشتقة $ل(س) = \text{ه}(٣س) + ٢$ عند س=١علما بأن $\text{ه}'(٣) = ٥$	١٥
٢٠١١ إكمال	إذا كان $\text{ه}(س) = \frac{٣ + ٢س}{١ - ٢س}$ فأوجد باستخدام التعريف $\text{ه}'(٤)$	$\frac{-٨}{٤٩}$
٢٠١٢ إكمال	استخدم تعريف المشتقة الأولى عند نقطة لإيجاد مشتقة الاقتران $\text{ه}(س) = \sqrt{٣ + ٢س}$ عند س=٣	$\frac{١}{٣}$
دورة	استخدم تعريف المشتقة الأولى عند نقطة لإيجاد مشتقة الاقتران $\text{ه}(س) = س + \frac{٤}{س}$ عند س=٤	$\frac{٣}{٤}$
٢٠١٣ إكمال	استخدم تعريف المشتقة الأولى عند نقطة لإيجاد مشتقة الاقتران $\text{ه}(س) = \sqrt{٣ + س}$ عند س=٦	$\frac{١}{٣}$
٢٠١٤ إكمال ضفة	إذا علمت أن ك(س)=٢س ق(س)−٤ ، وأن −٢ق(٢)=٣قَ(٢)=٦ أوجد كَ(٢) باستخدام تعريف المشتقة عند نقطة.	٢

٢٠١٤إكمال غزة	إذا كان $ق(س) = \frac{٢س}{س+١}$ ، $س \neq -١$ ، جد باستخدام التعريف المشتقة الأولى للاقتران عندما س=١	$\frac{١}{٢}$
٢٠١٥	إذا كان $ق(س) = \frac{س}{س-٢}$ ، $س \neq ٢$ ، فأوجد $قَ(س)$ باستخدام تعريف المشتقة.	☺
٢٠١٥	إذا كان $ق(س)$ كثير الحدود بحيث $قَ(٠) = ٠$ ، $قً(٠) = -١٠$ فاحسب $\lim_{س \to ٠} \frac{٤قَ(س) جا٢س}{٥س^{٢}}$	-١٦
٢٠١٦	إذا كان $ق(س) = س + \frac{١}{س}$ فأوجد $قَ(٢)$ باستخدام تعريف المشتقة .	$\frac{٣}{٤}$
٢٠١٦إكمال	$\lim_{هـ \to ٠} \frac{قَ(٢+٥هـ) - قَ(٢)}{١٠هـ} =$ أ) $\frac{١}{٢}$قَ(٢) ب) ٢قَ(٢) جـ) $\frac{١}{٢}$ قً(٢) د) ٢قً(٢)	جـ
٢٠١٦ إكمال	استخدم تعريف المشتقة الأولى لإيجاد قَ(١) حيث $ق(س) = س + \frac{٢}{س}$ ، $س \neq ٠$	-١

ورقة عمل (٩)

قواعد الاشتقاق

١- إذا علمت أن $\text{و}(س) = ٣س\,\text{لـ}(س) - ٥س$ ، $\text{لـ}(٣) = ٥$، $\text{لـ}'(٣) = ٢$ فجد $\text{و}'(٣)$. (٢٨)

٢- ليكن $\text{و}(س) = \frac{١}{٣}س^{٣} - ٣س^{٢}$ ، جد قيمة س حيث أن $\text{و}''(س) = \text{و}'(س) + ١$ (٧،١)

٣- إذا علمت أن $\text{و}(س) = \frac{س + ٥}{٦ - ٢س}$ ، $س \neq ٣$ فجد $\text{و}'(٢)$. (٤)

٤- إذا كان $\text{و}(س) = س^{٣} - ٤س^{٢} + ٩س + ٨$ وكانت $\text{و}''(أ) = ١٦$ فجد قيمة الثابت أ . (٤)

٥- إذا كان $\text{و}(س) = \frac{١}{٣ + أس}$ ، $س \neq \frac{-٣}{أ}$ وكانت $\text{و}'(١) = ٢$ فجد قيمة الثابت أ . $\left(-٢ ، \frac{-٩}{٢}\right)$

٦- $\text{و}(س) = س^{٢}\,\text{هـ}(س) - ٢(س)$ ، $\text{هـ}(٢) = ٣$ $\text{هـ}'(٢) = ٢$، $(٢)'٢ = ٨$ جد $\text{و}'(٢)$. (١٢)

٧- إذا كانت $ص = س^{ن}$ ، $ن \ni ط$ وكانت $\frac{د^{٣}ص}{د س^{٣}} = ٢١٠ س^{ن-٣}$ فما قيمة ن ؟ (٧)

٨- ق(س) كثير حدود من الدرجة الثانية وكان $\text{و}(٠) = -٥$، $\text{و}'(٣) = ٩$، $\text{و}''(٥) = ٢$ فجد قاعدة الاقتران . (ق(س)=س^{٢}+٣س−٥)

٩- إذا كان $\text{و}(س) = \frac{١}{س}$ ، $\text{هـ}(٢) = ٢٠$ ، $\text{هـ}'(٢) = ٨$ فجد $(\text{و} \times \text{هـ})'(٢)$. (٣)

١٠- إذا كان $\text{و}(١) = -٣$ ، $\text{و}'(١) = ٢$ فجد $(\sqrt{س}\cdot\text{و}(س))'(١)$. $\left(\frac{١}{٢}\right)$

١١- إذا كان $\text{و}(س) \times \text{هـ}(س) = ١$ ، $\text{هـ}(١) = ٣$ ، $\text{هـ}'(١) = ٥$ فما قيمة $\text{و}'(١)$ ؟ $\left(\frac{-٥}{٩}\right)$

١٢- $\text{و}(س) = \frac{س|١ - ٢س|}{س + ١}$ فجد $\text{و}'(٠)$. (١)

١٣- $\text{و}(س) = \frac{[\frac{١}{٣}س]}{س - ٣}$ فجد $\text{و}'(\frac{٧}{٢})$. (−٤)

١٤- إذا كان $\text{و}(س) = س \times [٢ - \frac{س}{٣}]$ فجد (إن أمكن) $\text{و}'(٣)$. (غ،م)

١٥- $\text{و}(س) = [٢س + \frac{٢}{٥}]$ جد (إن أمكن) $\text{و}'(\frac{٤}{٥})$ (غ،م)

١٦- $\text{و}(س) = [س] \times |س|$ ، $س \ni]-٣، -٢[$ جد $\text{و}'(\frac{-٥}{٢})$ (٣)

٢٠٠٨	إذا كانت $ص = (س^{٣} - ٢)هـ(س)$ ،جد $\frac{د ص}{د س}$ عند س=١ علما بأن هـ (١)=٤ ، هـَ (١)=٢	١٠
٢٠٠٩	إذا كان ق(س)+هـ(س)=٨،ق(٢)=٥،قَ(٢)=١فإن $\frac{د}{د س}(س + هـ(س))$ عندما س=٢ تساوي أ) ١ ب) ٠ جـ) ٨ د) ٣	ب
٢٠٠٩ إكمال	إذا كان $و(س) = س^{٣} - س$ فإن $\lim_{هـ \to ٠} \frac{و(٢+هـ) - و(٢)}{هـ}$ = أ) ١٢ ب)١٠ جـ) ٦ د) ١١	د
٢٠١٠إكمال	إذا كان $و(س) = \frac{٢}{س^{٢}+١}$ فإن $\lim_{هـ \to ٠} \frac{و(١+هـ) - و(١)}{هـ}$ = أ) ١ ب)-١ جـ) $\frac{١}{٢}$ د) $-\frac{١}{٢}$	ب
٢٠١٢	إذا كان $و(س) = س^{٣} - س^{٢}$ فإن $\lim_{هـ \to ٠} \frac{و'(١+هـ) - و'(١)}{هـ}$ = أ) صفر ب)١ جـ) ٤ د) غ.م	جـ
٢٠١٢	احسب $\lim_{س \to ١} \frac{س\,و(س) - و(١)}{س - ١}$ علما بأن ق(١)=٣ ، قَ(١)=٤	٧
٢٠١٢	إذا كان $و(س) = \frac{س^{٢}+١}{ك(س)}$ ،وكان لمنحنى ك(س) مماس أفقي عند النقطة (٢،١) ، جد قَ(١)	١
٢٠١٣	إذا كان المستقيم ص=٣س-١ مماسا لمنحنى ق(س) عند (٢،٥)فإن $\lim_{هـ \to ٠} \frac{و(٢+هـ) - ٥}{هـ}$ أ) ٣ ب)٤ جـ) صفر د) ٥	أ
٢٠١٤إكمال غزة	إذا كان $و(س) = أس + \frac{ب}{س}$ ،$س \neq ٠$ ، أ،ب $\in$ ح وكان متوسط تغير ق(س) في[١،٥] هو ٢ وكانت $\lim_{هـ \to ٠} \frac{و(١+٢هـ) - و(١)}{هـ} = -٤$ فجد قيم الثابتين أ،ب.	أ=٣ ب=٥
٢٠١٥إكمال	إذا كان $و(س) = س^{٢} + ٢$،$هـ(س) = \|٤س - ٥\|$فأوجد $(و \times هـ)'(١)$	-١٠

٢٠١٦	إذا كان $ق(س) = \frac{١}{س^{٢} - ٦س + ٩}$ ، $س \neq ٣$ فإن $ق'(س)$ أ) $-٦ق^{٢}(س)$ ب) $٦ق(س)$ ج) $٦ق^{٢}(س)$ د) $ق^{٢}(س)$	جـ

ورقة عمل (١٠)

الاتصال وقابلية الاشتقاق

١- ق(س) = $\begin{cases} أس^{٣} + بس & ، س < ٢ \\ أس^{٢} + ٩بس - ١٢ & ، س \leq ٢ \end{cases}$ جد أ، ب التي تجعل هـ′(٢) موجودة . (١،١)

٢- ق(س) = $\begin{cases} أس^{٢} - بس + ٥ & ، س \geq ٢ \\ س^{٣} + جـ & ، س < ٢ \end{cases}$ جد أ، ب، جـ التي تجعل هـ″(٢) موجودة. (٦، ٢، ١-، ٣-)

٣- ق(س) = $\begin{cases} س^{٢} + ٥س - ٨ & ، س \leq ١ \\ س^{٣} + ٤س + ١ & ، س > ١ \end{cases}$ جد (إن أمكن) هـ′(١) . (غ.م)

٤- إذا كانت هـ′(٢) = ٨ ، $\lim_{س \to ٢}$ هـ(س) = ٣ ، فجد هـ(٢). (٣)

٥- إذا كانت هـ′(٢) = ٣ وكان ق(س) يمر بالنقطة (٢، ٥) فجد $\lim_{س \to ١}$ (ق(س + ١) - س^{٢} + ٣س) (٧)

٦- إذا كانت هـ′(١) = ٩ ، هـ(١) = ٥ فجد $\lim_{س \to ١} \frac{هـ(س) - ٣}{س - ٣}$ (١)

٧- ق(س) = $\begin{cases} [س + ١] & ، ١ \leq س \leq ٢ \\ \frac{|س|}{س} + ٤ & ، ٢ < س < ٥ \end{cases}$ جد هـ′(٢) . (غ.م)

٨- ق(س) = |س - ٢| + |س| . بين أن هـ′(٠) غير موجودة ٩- ق(س) = [س + ١] × |س - ١| . جد هـ′(١) . (غ.م)

٢٠٠٧	إذا كان ق(س)=[س+٠,٨] فإن قَ(٥)= أ) صفر ب)١ ج) ٥ د) غير موجودة	أ
٢٠٠٧	إذا كان قَ(س)>صفر ∀ س ∈]أ،ب[،جـ ∈]أ،ب[فإن ق(س) عند س=جـ يكون أ) متصلا ب)منفصلا ج)متناقصا د) مقعر للأعلى فقط	أ
٢٠٠٧ إكمال	إذا كان ق(س) متصلا عند س=أ فإن: أ) قَ(أ)=صفر ب)قَ(أ)موجودة ج)قَ(أ) غير موجودة د) قَ(أ) قد تكون موجودة	د
٢٠٠٨	إذا علمت أن هـ(س)= { أس٢ + ٢ ، س ≤ ٢ ؛ س٢ + بس ، س > ٢ } قابلا للاشتقاق عند س=٢ فجد الثابتين أ،ب	أ=٣/٢ ب=٢
٢٠٠٨ إكمال	إذا كان ق(س)= { س٣ + ٤س + ١ ، س ≤ ١ ؛ −س٢ + ٩س − ٢ ، س > ١ } ، جد قً(س)	٦س، س<١ −٢، س>١ غ.م ، س=١
٢٠١٠	إذا كان ق(س)= { ٣س٣ − ٣ ، س ≥ ١ ؛ مس٢ − م ، س < ١ } وكانت قَ(١) موجودة فإن قيمة الثابت م= أ) ١ ب)٣ ج) ٩/٢ د) ٢/٩	جـ
٢٠١٢	إذا كان ق(س)= { ب(٢س + ٣)٢ ، س > ١ ؛ ١٠س٢ + أ ، س ≤ ١ } قابلا للاشتقاق عند س=١ ،جد الثابتين أ،ب	أ=١٥ ب=١
٢٠١٣	إحدى العبارات صحيحة دائما: أ) إذا كانت قَ(أ)موجودة فإن قً(أ)موجودة ب) إذا كان ق(س)متصلا عند س=أ ، فإن قَ(أ) موجودة جـ) إذا كانت قَ(أ)غير موجودة فإن ق(س) ليس متصلا عند س=أ د) إذا كانت قَ(أ)موجودة فإن ق(س) متصل عند س=أ	د

٢٠١٤إكمال غزة	إذا كان ق(س)= $\begin{cases} أس^{٢}+ب ، س \leq ٣ \\ \frac{١}{[س]} ، س > ٣ \end{cases}$ جد قيمتي الثابتين أ ، ب بحيث تكون المشتقة الأولى للاقتران ق(س) عند س=٣ موجودة	أ=٠ ب=$\frac{١}{٢}$
٢٠١٦	إذا كان $ه'(٢)=٤$ وكان منحنى $ه(س)$ يمر بالنقطة (٢،٥) فإن $\lim_{س \to ٢} (س^{٢}-٣ه(س)+٩)$ أ) ١٤ ب)٢ ج) ١ د) -٢	د
٢٠١٦	إذا علمت أن ق(س)=[٤س+١] فإن قَ($\frac{١}{٢}$)= أ) ٤ ب)٢ ج) صفر د) غ م	د
٢٠١٦ إكمال	إذا كان ق(س)=[٢س+٦] فإن قَ($\frac{٣}{٢}$)= أ) ٢ ب)صفر ج) -٣ د) غ م	د

ورقة عمل (١١)

تطبيقات فيزيائية

١-يتحرك جسم حسب العلاقة $ف(ن) = \frac{١}{ن}$. أثبت أن $ن^{٢}ت + ن ع = ف$.

٢-إذا كانت $ف = \sqrt{٢ن^{٢} + ١٨}$. احسب المسافة التي يقطعها الجسم عندما تكون سرعته ١م/ث. (٦)

٣-قذف جسم رأسيا لأعلى بحيث المسافة التي يقطعها $ف = أ ن - ١٦ ن^{٢}$. جد $أ$ علما بأن أقصى ارتفاع يصله الجسم ٣٦م. (٤٨)

٤-قذف جسم لأعلى بسرعة ابتدائية ١٤٤م/ث فإذا كانت $ف = ١٤٤ ن - ١٦ ن^{٢}$ فجد :

أولا: السرعة والتسارع بعد ٣ ثوان ثانيا: الزمن اللازم ليعود الجسم لنقطة القذف (٤٨،-٣٢ ، ٩)

٥-إذا علمت أن $ف = أ ن + ب ن^{٢}$ حيث بدأ الجسم حركته من السكون ، وكانت السرعة ١٠م/ث عندما كانت المسافة المقطوعة ١٠٠م فجد $أ ، ب$. (صفر ، ٢٥، ٠)

٦-يتحرك جسم على محور السينات بحيث يقطع س كم بعد ن ثانية حسب العلاقة $س = ن^{٣} - ١٥ ن^{٢} + ٦٣ ن - ٢$. جد:

أولا: قيم ن التي تجعل السرعة موجبة . ثانيا : تسارع الجسم عندما تنعدم السرعة ($ن \ni [٣ ، ٧]$ ، ت= ١٢ ، -١٢)

٧-يتحرك جسم حسب العلاقة $ف = ن^{٣} - ٢٤ ن + ٢٠$. متى تتساوى السرعة مع التسارع عدديا؟ (٤)

٨-إذا كانت $ف = ن^{جـ}$ ، $جـ < ٠$. وكانت سرعته بعد ١٠ث ضعفي سرعته بعد ٥ث فما قيمة جـ ؟ (٢)

٩- إذا كانت سرعة جسم $ع = أ \sqrt{ف}$ حيث $أ < ٠$ وكان تسارعه ٢م/ث^{٢} فجد قيمة $أ$. (٢)

١٠- جسم يتحرك حيث $ع^{٢} = ١ - ف^{٢}$ احسب التسارع لهذا الجسم عندما تنعدم سرعته . (± ١)

١١- تتحرك نقطة مادية حسب العلاقة $ع^{٢} = أ + \frac{ب}{ف}$ ، $أ ، ب$ ثابتان أثبت أن التسارع يتناسب عكسيا مع مربع المسافة .

١٢-قذف جسم رأسيا لأعلى من قمة برج ارتفاعه ٢٢٥م وكانت المسافة الرأسية التي يقطعها $ف = ٦٠ ن - ٥ ن^{٢}$.جد سرعة الجسم لحظة وصوله للأرض . (-٩٠)

١٣- قذف جسم رأسيا لأعلى من قمة برج بحيث المسافة الرأسية التي يقطعها معطاة بالعلاقة $ف = ١٠ ن - ٥ ن^{٢}$. جد ارتفاع البرج علما بأن أقصى ارتفاع وصله عن سطح الأرض ١٥م . (١٠)

١٤- قذف جسم رأسيا لأعلى من قمة برج ارتفاعه٤٥بحيث المسافة الرأسية التي يقطعها $ف = ٦٠ ن - ٦ ن^{٢}$ جد سرعته عندما يكون على ارتفاع ٩٩م من سطح الأرض . (± ٤٨)

١٥- سقط جسم من سطح برج بحيث المسافة المقطوعة $ف = ١٦ ن^{٢}$ وفي نفس اللحظة قذف جسم لأسفل من سطح البرج بحيث المسافة المقطوعة $ف = ٤٠ ن + ١٦ ن^{٢}$ فإذا ارتطم الجسم الأول بالأرض بعد ثانية واحدة من وصول الثاني فجد:

أولا : سرعة الثاني لحظة وصوله للأرض ثانيا : ارتفاع البرج (١٠٤ ، ١٤٤)

١٦- قذف جسم رأسيا لأعلى حيث أن المسافة التي يقطعها $ف = أ ن - ٥ ن^{٢}$.ما سرعته بعد ثانيتين إذا كان اقصى ارتفاع للجسم ٤٥ مترا؟ (١٠)

السنة	السؤال	الجواب
٢٠٠٧	يتحرك جسيم في خط مستقيم حسب العلاقة $ف = ن^{٣} - ٢ن^{٢} + ٧$ حيث ف المسافة بالأمتار ، ن الزمن بالثواني ، أوجد سرعة وتسارع الجسيم بعد ثانيتين من بدء الحركة.	ع=٤ ت=٨
٢٠٠٧ دراسات	تحرك جسم على خط مستقيم وفق العلاقة $ف = ن^{٢} - ٦ن$ فإن سرعة الجسم وتسارعه يتساويان عدديا عندما أ) ن=٢ ب) ن=٣ ج) ن=٤ د) عند بدء الحركة	ج
٢٠٠٧ دراسات	يتحرك جسيم في خط مستقيم حسب العلاقة $ف = ن^{٣} - ن^{٢} + ٥$ حيث ف المسافة بالأمتار ، ن الزمن بالثواني ، أوجد سرعة الجسيم عندما يكون تسارعه ٤٠م/ث^{٢} .	١٣٣
٢٠٠٧ إكمال	من قمة برج يرتفع عن سطح الأرض ٢٠م،أطلق جسم رأسيا لأعلى فكانت إزاحته ف بالأمتار عن قمة البرج بعد ن ثانية تعطى بالقاعدة: $ف = ١٠ن - ٥ن^{٢}$ ، جد سرعة الجسم بعد ثانيتين	-١٠
٢٠٠٨	يتحرك جسم وفق العلاقة $ع = ٦\sqrt{ف}$ ،حيث ع،ف هما السرعة والإزاحة على الترتيب فإن تسارع هذا الجسم= أ) ٦ ب) ١٢ ج) ١٨ د) ٣٦	ج
٢٠٠٨	قذف جسم رأسيا للأعلى فكانت العلاقة بين ارتفاعه (ف) بالأمتار عن نقطة قذفه وزمن حركته (ن) هي: $ف = ٥٠ن - ٥ن^{٢}$ ،جد أقصى ارتفاع يصل إليه الجسم والمسافة التي قطعها الجسم في الثواني الست الأولى	١٣٠
٢٠٠٨ إكمال	يتحرك جسم في خط مستقيم تبعا للعلاقة $ف(ن) = ن^{٣} + ٤ن$ حيث ف(ن) إزاحة الجسم بالأمتار عن نقطة ثابتة (و) على خط الحركة،(ن) الزمن بالثواني جد السرعة المتوسطة والتسارع المتوسط لهذا الجسم في الفترة الزمنية[٢،٤]	ع=٣٢ ت=١٨
٢٠٠٩	تحرك جسم على خط مستقيم وفق العلاقة $ف = ن^{٢} - ٦ن$ ، سرعة الجسم وتسارعه يتساويان عدديا عندما ن= أ) صفر ب) ٢ ج) ٣ د) ٤	د
٢٠١٠	قذف جسم رأسيا للأعلى فكانت العلاقة بين ارتفاعه (ف) بالأمتار عن نقطة قذفه وزمن حركته (ن) هي: $ف = ٥٠ن - ٥ن^{٢}$ ،جد الزمن اللازم لتكون المسافة التي قطعها الجسم تساوي ١٣٠م.	٦
٢٠١١	أطلق جسم رأسيا لأعلى من قمة برج بحيث أن ارتفاعه بالأمتار عن سطح الأرض بعد ن ثانية يعطى بالقاعدة : $ف = ٢٤ن + ٦ن^{٢} - ١٦ن^{٢}$ ، جد أقصى ارتفاع عن قمة البرج يصل إليه الجسم.	٦٤
٢٠١١إكمال	قذف جسمان معا رأسيا لأعلى ، الأول يتحرك وفق العلاقة $ف = ٢٠ن - ٥ن^{٢}$ والثاني وفق العلاقة $ف = ١٠ن - ٥ن^{٢}$.جد ارتفاع الجسم الثاني عندما يصل الأول لأقصى ارتفاع له .	صفر

٢٠١٢	إذا تحرك جسم وفق العلاقة $ف = ن^{٣} + ٢ن$ ،فإن التسارع المتوسط للجسم في الثواني الثلاث الأولى يساوي أ) ٨ ب) ٩ ج) ١٠ د) ١١	ب
٢٠١٢إكمال	قذف جسم رأسيا لأعلى من نقطة على سطح الأرض وكان ارتفاعه يعطى بالعلاقة$ف = ٢ ١٢ن - ٢ن^{٢}$ ،جد: ١- أقصى ارتفاع يصل إليه الجسم ٢- السرعة المتوسطة للجسم في [٢،١]	١٨م ٦م/ث
٢٠١٣	قذف جسم رأسيا للأعلى من نقطة على سطح الأرض وكان ارتفاعه يعطى بالعلاقة$ف = ٥٠ن - ٥ن^{٢}$ حيث ف بالأمتار، ن بالثواني .جد: ١) أقصى ارتفاع يصل إليه الجسم٢) التسارع المتوسط في الفترة الزمنية [٣،١]	١٢٥ -١٠م/ث^{٢}
٢٠١٣ إكمال	إذا تحرك جسم على خط على خط مستقيم بحيث كانت ف(ن) تمثل إزاحته عند زمن (ن) فإن سرعته اللحظية= أ) $\frac{\Delta ع}{\Delta ن}$ ب) $\frac{\Delta ف}{\Delta ن}$ ج) $\frac{ع د}{ن د}$ د) $\frac{ف د}{ن د}$	د
٢٠١٤	قذف جسم رأسيا للأعلى بحيث أن ارتفاعه عن نقطة القذف معطى بالعلاقة $ف = ٢٨ن - ١٦ن^{٢}$ حيث ف بالأمتار، ن بالثواني .جد: ١) أقصى ارتفاع يصل إليه الجسم. ٢) سرعة الجسم عندما يكون قد قطع مسافة ٢٧٢م	٢٥٦م -٣٢م/ث
٢٠١٤إكمال ضفة	تحرك جسم على خط مستقيم وفق العلاقة $ف = ن^{٢} - ٦ن$ ، سرعة الجسم وتسارعه يتساويان عدديا عندما ن= أ)٢ ب) ٣ ج) ٤ د) ٦	ج
٢٠١٥	من قمة برج يرتفع عن سطح الأرض ٥٠ م أطلق جسم رأسيا لأعلى فكانت إزاحته ف بالأمتار عن قمة البرج بعد ن ثانية تعطى بالعلاقة : $ف=١٥ن-٥ن^{٢}$،جد: ١- الزمن اللازم ليكون على ارتفاع ٦٠ م من سطح الأرض ٢-أقصى ارتفاع عن سطح الأرض يصل إليه الجسم	ن=١،ن=٢ ف=٦١,٢٥م
٢٠١٥ إكمال	قذف جسم رأسيا إلى أعلى من نقطة على سطح أرض أفقية حسب العلاقة $ف(ن)=٦٤ن-١٦ن^{٢}$ حيث ف: المسافة بالأمتار ،ن: الزمن بالثواني ١: ما أقصى ارتفاع يصل إليه الجسم. ٢-بين أن الجسم يفقد نصف سرعته عندما يكون على ارتفاع ٤٨م	ف=٦٤م
٢٠١٦	قذف جسم رأسيا لأعلى بحيث يقاس ارتفاعه حسب العلاقة $ف=٤أن-٢ن^{٢}$ ، $أ > ٠$ فإذا كان أقصى ارتفاع وصله الجسم ٣٢مترا فإن قيمة أ هي: أ)٤ ب) ٨ ج) ١٦ د) ٣٢	أ
٢٠١٦ إكمال	يتحرك جسم في خط مستقيم حسب العلاقة $ف=ن^{٢}(٢ن-٩)$ حيث ف إزاحة الجسم بالأمتار، ن الزمن بالثواني : ١)جد السرعة بعد ٣ ثوان من بدء الحركة ٢) متى تبدأ سرعة الجسم بالتزايد؟	ع=صفر بعد ن=٣

ورقة عمل (١٢)

تطبيقات هندسية

١-إذا كان $ق(س) = أس^{٣} + بس^{٢}$ يمر بالنقطة (١ ، ٥) ومعادلة المماس لمنحنى الاقتران عندها ص=٨-٣س فجد أ ، ب . (-١٣، ١٨)

٢-جد مساحة المثلث المتكون من محور السينات والمماس والعمودي عليه للاقتران $ق(س) = \frac{٩ - س^{٢}}{٤}$ عند س=-١. (المساحة=٥)

٣-جد معادلة المماس للاقتران $ق(س) = ٦ - ٣س^{٢}$ العمودي على المستقيم س+٦ص=٠ (المعادلة ص=٦س+٩)

٤-$ق(س) = أس^{٢} + بس + جـ$ ، $هـ(س) = جـس - س^{٣}$ لهما مماس مشترك عند (٠،٢) جد أ ، ب ، جـ. (-٣، ٤،٤)

٥-المستقيم المار بالنقطتين (١،٤) ، (٠،-١) يمس منحنى $ق(س) = أس^{٢} + س$. جد قيمة أ $(\frac{١}{١٦})$

٦-جد معادلة المماس لمنحنى $ق(س) = س^{٣} + س|س - ٢|$ عند س=٣ (ص=٣١س-٦٣)

٧-جد معادلة المماس المرسوم من (٠،-٨) لمنحنى $س^{٢} - ص^{٢} = ٨$. (ص=٣س-٨ ، ص=-٣س-٨)

٨-جد معادلة المماس لمنحنى $(س + ص)^{٣} - ٥س + ص = ١$ عند نقطة تقاطعه مع المستقيم س+ ص=١ (٤ص=٢س+٣)

١٠- إذا علمت أن $جاص = س^{٢} + س$ فجد معادلة المماس عند $(٠، \pi)$. $ص = \pi - س$

١١- اثبت أن المنحنيين $ق(س) = س^{٣} - ٣س^{٢} - ٢س + ٤$ ، $هـ(س) = ٢س^{٢} - ٥س - ٥$ متماسان عند (٣،-٢) ثم جد معادلة المماس المشترك لهما (ص=٧س-٢٣)

١٢- $ص = (ن^{٢} + ١)^{٣}$ ، $س = (٢ن - ١)^{٤}$. جد معادلة مماس $ص = ق(س)$ عند $ن = ٢$ (١٨ص=٢٥س+٢٢٥)

١٣- إذا رسم مماس من النقطة (٢، ٦) لمنحنى $ق(س) = ٢س^{٢}$ فما إحداثيات نقطة التماس؟ (٢،١) ،(٣، ١٨)

١٤-$ق(س) = س - جا٢س$. جد قيم س التي يكون المماس عندها موازيا محور السينات ، $س \ni [٠، \pi]$. $\{ \frac{\pi}{٦} ، \frac{\pi٥}{٦} \}$

١٥-إذا علمت أن ص=٣س+٢ هي معادلة المماس للاقتران ق(س)عند(٠ ،٢) وكانت : ص=أ س +ب هي معادلة العمودي على المماس عند نفس النقطة فجد أ ، ب . $\left(٢، \frac{-١}{٣} \right)$

١٦-أثبت أن المماسين لمنحنيي $س^{٢} + ص^{٢} = ٨س$ ، $ص = س^{٢}$ متعامدان عند (٠، ٠) .

١٧-جد مساحة المثلث المتكون من المماسين المرسومين من النقطة (١، ٢) لمنحنى $ق(س) = ٢س - س^{٢}$ ومحور السينات. (٢)

١٨- إذا علمت أن $ص = مس + جـ$ يمس منحنى $ص^{٢} = ٤أس$ فأثبت أن $جـ = \frac{أ}{م}$ حيث أ ، جـ ، م ثوابت.

١٩- أثبت أن المماس لمنحنى $ق(س) = س^{٢}$ عند النقطة $(أ ، أ^{٢})$ يقطع محور السينات في $\left(\frac{أ}{٢} ، ٠ \right)$.

٢٠- رسم مماس من النقطة $(س_{١} ، ص_{١})$ الواقعة على منحنى $ص^{٢} = ٤س$. أثبت أن المماس يقطع محور السينات في $(-س_{١} ، ٠)$

٢١- إذا كان $\text{ق}(س) = ٢س - جا٤س$ ، $س \in \left[٠ ، \frac{\pi}{٢} \right]$ فجد جميع قيم س التي يكون عندها العمودي على المماس لمنحنى ق(س) موازيا لمحور الصادات ثم جد معادلة أحد هذه المماسات فقط .

٢٢-إذا كان منحنى الاقتران ق(س) يمر بالنقطة (٢ ، ١) وكان المماس المرسوم لمنحنى ق عند هذه النقطة يصنع زاوية قياسها ٤٥° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات فما قيمة $\text{نهـا}_{س \to ٢} \frac{\text{ق}(س) - ١}{٤ - ٢س}$ ؟ $-\frac{١}{٢}$

٢٣-إذا كان المستقيم المار بالنقطتين (٠ ، -٢) ، (٢ ، ٦) يمس منحنى الاقتران $\text{ق}(س) = ب س^{٢} + ٢س - ١$ فما قيمة الثابت ب؟ ١

٢٤- إذا كان منحنيا $\text{ق}(س) = س^{٢} + أس + ب$ ، $\text{هـ}(س) = س^{٣} - س^{٢} - س + جـ$ متماسين عند(-١ ، ٠) فجد :

أولا: قيم الثوابت أ ، ب ،جـ ثانيا : معادلة المماس المشترك للاقترانين ق، هـ عند النقطة (-١ ، ٠) . (٦،٥،١) ، ص=٤س+٤

٢٥- جد معادلة المماس لمنحنى الاقتران $\text{ق}(س) = س^{٢} - ٤س + ٣$ بحيث يكون هذا المماس عموديا على المستقيم ٦ص-٣س-٥ = ٠ عند نقطة التماس.

٢٦- إذا علمت أن المستقيم ٣س-ص+جـ=٠ يمس القطع $ص = س^{٢}$ فما قيمة الثابت جـ؟ $-\frac{٩}{٤}$

٢٧- إذا كان منحنى $\text{ق}(س) = أس^{٢} + بس + جـ$ يقطع محور الصادات في النقطة (٠ ، ٣) وله مماسان : الأول عند س=-١ ويصنع زاوية قياسها ٤٥° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات ، والثاني عند س=٢ ويصنع زاوية قياسها ١٣٥° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات .

جد قيم الثوابت أ ، ب ، جـ . $أ = -\frac{١}{٣}$ ، $ب = \frac{١}{٣}$ ، $جـ = ٣$

٢٨- بين أن المماسين لمنحنيي $\text{ق}(س) = \frac{١}{س}$ ، $\text{هـ}(س) = س$ متعامدان عند نقطة تقاطعهما .

٢٩- جد معادلة العمودي على المماس لمنحنى $\text{ق}(س) = س^{٢}$ إذا كان العمودي مرسوما من النقطة $(٠ ، \frac{٩}{٢})$.

$ص - ٤ = \pm \frac{١}{٤}(س - ٢)$ ، $س = ٠$

٣٠- بين أن لمنحنى الاقتران $\text{ق}(س) = س^{٤}$ مماسين مرسومين من النقطة $(\frac{٣}{٤} ، ٠)$. س=٠ ، س=١

٣١- إذا كان المستقيم ص=٣س-١ مماسا لمنحنى ق(س) عند النقطة (٢ ، ٥) فجد $\text{نهـا}_{و \to ٠} \frac{\text{ق}(٢ + و) - ٥}{و}$. ٣

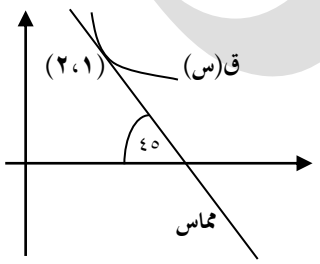
٣٢- جد معادلة المماس المرسوم لمنحنى العلاقة $س^{٢} - ص^{٢} = -٨$ من النقطة (-٤ ، ٠). $ص \mp \sqrt{١٢} = \pm \frac{٢}{\sqrt{١٢}}(س - ٢)$

٣٣- جد جميع النقط الواقعة على منحنى الاقتران $\text{ق}(س) = ٢س^{٣} - ٣س^{٢} + ٥س + ٧$ التي يكون المماس لمنحنى ق(س) عندها عموديا على المستقيم س+٥ص+٢=٠ (٠ ، ٧) ، (١ ، ١١)

٣٤- إذا كان $\text{ق}(س) = \sqrt{س}$ وكان المماس لمنحنى ق عند س=٤ موازيا للقاطع المار بالنقطتين (١ ، ق(١)) ، (م ، ق(م)) ، حيث م > ١ جد قيمة م . ٩

٣٥- رسم مماس لمنحنى الاقتران $\text{ق}(س) = س^{٢} + ١٠$ من النقطة (٠ ، ٩) . جد مساحة المثلث المحصور بين المماس ومحور الصادات والمستقيم ص=٤ . $\frac{٢٥}{٤}$

٢٠٠٧دراسات	إذا كان ميل المماس=−٢ فإن ميل العمودي عليه يساوي أ) ٢ ب) $\frac{١}{٢}$ ج) −٢ د) $\frac{-١}{٢}$	ب
٢٠٠٧دراسات	أوجد معادلة المماس لمنحنى الاقتران ق(س)= $\frac{١}{س}$ من النقطة (١،٠) الواقعة خارجه ،س< ٠	ص=−٤س+٤
٢٠٠٧إكمال	إذا كانت معادلة العمودي على منحنى ق(س) عند النقطة (٣،٠)هي:٢س−٣ص=٦ فإن قَ(٣)تساوي أ) $\frac{٣}{٢}$ ب) $\frac{٢}{٣}$ ج) $\frac{-٣}{٢}$ د) $\frac{-٢}{٣}$	ج
٢٠٠٧ إكمال	بيّن وجود مماسين من النقطة (١،٠) للاقتران $ق(س) = س^{٢}$ ، ثم جد معادلتيهما	ص=٠،ص=٤س−٤
٢٠٠٨	إذا كانت معادلة العمودي على منحنى ق(س) عند النقطة (٣،٠)هي:٢س+٣ص=٦ فإن قَ(٣)تساوي أ) $\frac{-٢}{٣}$ ب) $\frac{-٣}{٢}$ ج) $\frac{٢}{٣}$ د) $\frac{٣}{٢}$	د
٢٠٠٨	إذا كان المستقيم الواصل بين النقطتين(٠، −١) ،(١،ب) مماسا لمنحنى الاقتران $ق(س) = ٢س^{٢} - س + ٧$ ، جد قيمة الثابت ب.	١٠−،٦
٢٠٠٨ إكمال	إذا كان المستقيم ص=س مماسا لمنحنى $ص = س^{٢} + أ$ فإن قيمة أ تساوي أ) ٢ ب) $\frac{١}{٢}$ ج) $\frac{١}{٤}$ د) صفر	ج
٢٠٠٩	إذا كانت معادلة العمودي على مماس منحنى الاقتران ق(س) عند النقطة(٣،١) هي $ص = \frac{١}{م}س$ فإن قَ(١)= أ) ٣ ب) −٣ ج) $\frac{١}{٣}$ د) $\frac{-١}{٣}$	د
٢٠٠٩	جد الميل لجميع المماسات المرسومة لمنحنى $ق(س) = س^{٢}$ من النقطة (١،−٣).	٢−،٦
٢٠٠٩إكمال	إذا كان المستقيم ص=س+٤ مماسا لمنحنى ل(س)عندس=٢وكان ق(س)=(س×ل(س))،جد قَ(٢).	٨
٢٠١٠إكمال	إذا كان ك(س)=(ق(س)+س)× هـ(س)،جد كَ(٣)علما بأن للمنحنيين ق(س)،هـ(س) مماسا أفقيا مشتركا عند النقطة(٣،٤) الواقعة على كليهما.	٤
٢٠١١	إذا كانت معادلة العمودي على المماس لمنحنى الاقتران ق(س) عند النقطة (١٢،ب) هي أص=س وكانت قَ(١٢)=٦ فإن قيمة الثابت ب= أ) −٦ ب) −٢ ج) ٢ د) ٦	ب

٢٠١١إكمال	إذا كانت معادلة العمودي على منحنى ق(س) عند النقطة (٢،١)الواقعة عليه هي: س+٢ص=٥فإن قَ(١)تساوي أ) $\frac{١}{٢}$ ب) $\frac{-١}{٢}$ ج) ٢ د) -٢	ج
٢٠١٢إكمال	إذا كانت معادلة العمودي على المماس لمنحنى الاقتران ق(س) عند النقطة (١، -٢)الواقعة عليه هي: ص+٤س=٢فإن قَ(١)تساوي أ) -٤ ب) $\frac{-١}{٤}$ ج) $\frac{١}{٤}$ د) ٤	ج
٢٠١٣	جد معادلة المماس المرسوم لمنحنى الاقتران $ق(س) = س^{٢}$ من النقطة(٠، -٤) الواقعة خارج المنحنى علما بأن س>صفر.	ص=٤س-٤
٢٠١٤	إذا كانت معادلة العمودي على المماس لمنحنى الاقتران ق(س) عند النقطة (٥، ٤)الواقعة عليه هي: ٤س-٣ص=٨فإن قَ(٥)تساوي أ) $\frac{٤}{٣}$ ب) $\frac{٣}{٤}$ ج) $\frac{-٣}{٤}$ د) $\frac{-٤}{٣}$	ج
٢٠١٤إكمال ضفة	إذا كان المستقيم $ص = س$ مماسا لمنحنى $ص = \frac{س^{٢}}{٤} + ج$ فإن قيمة ج هي : أ) -٢ ب) -١ ج) ١ د) ٢	ج
٢٠١٤إكمال غزة	اوجد معادلتي المماس والعمودي على المماس لمنحنى القطع الذي معادلته $٢س^{٢} - ٣ص^{٢} = ٥$ عند النقطة (٢،-١)	٣ص+٤س=٥ ٣س-٤ص=١٠
٢٠١٥	إذا كانت معادلة العمودي على المماس لمنحنى ق(س) عند النقطة (-٣،٨) هي ٢ص+٣س-٧=صفر ، فإن قيمة ٦قَ(-٣)= أ) ٤ ب) ١٨ ج) -٤ د) -١٨	أ
٢٠١٥	أوجد معادلة المماس لمنحنى ق(س)=س^{٢}+س الذي يوازي المستقيم ص-٥س=٣	ص=٥س-٤
٢٠١٥	إذا كان ق(س) ، هَ (س) اقترانين قابلين للاشتقاق بحيث ق(س)X هَ (س)=٢٠ بالاعتماد على الشكل المجاور جد هَ (١)  	٥
٢٠١٥إكمال	معادلة العمودي على المماس لمنحنى ق(س) عند النقطة (٣،١) هي ٤س-٣ص=٩ ، فإن قيمة قَ(٣)+ق(٣)= أ) $\frac{١}{٤}$ ب) $\frac{٣}{٤}$ — ج) $\frac{٧}{٤}$ د) $\frac{٧}{٣}$	أ

٢٠١٦	إذا كان ميل العمودي على المماس لمنحنى ق(س) عند النقطة(١،-٣) الواقعة عليه يساوي $\frac{١}{٢}$ فإن معادلة المماس لمنحنى ق(س) عند تلك النقطة هي أ) ص=-٢س-١ ب) ص=٢س-٥ ج) ص=-٢س-٥ د) ص=-$\frac{١}{٢}$س+١	أ
٢٠١٦	إذا كان المماس لمنحنى $ق(س) = \left(س + \frac{٢}{س}\right)^{٣}$ عند س=٢ يمر بالنقطة (أ، ٠) فما قيمة الثابت أ؟	صفر
٢٠١٦ إكمال	ليكن $ق(س) = \|٣س - ٥\|$ ،فإن ميل العمودي على المماس لمنحنى ق(س) عند س=٢ هو : أ) -٣ ب) $-\frac{١}{٣}$ ج) $\frac{١}{٣}$ د) ٣	ب

ورقة عمل (١٢)

قاعدة السلسلة والاشتقاق الضمني

١- إذا كانت $ص = \frac{م-١}{م+١}$ ، $م = \sqrt{س}$ فجد $\frac{د ص}{د س}$ عند س=٤ . $\frac{١}{١٨}$

٢- إذا كان $هـ(٢س+١) = ٢س^{٢} - ٤س + ٩$ فجد $هـ'(٥)$ ٢

٣- إذا كان $هـ(جا٢س) = ظا٣س$ ، $س \in \left[٠ ، \frac{\pi}{٦}\right]$ فما قيمة $هـ'(\frac{١}{٢})$؟ $٢\sqrt{٣}$

٤- إذا كانت $ص = جاس - \frac{١}{٣}جا^{٣}س$ فأثبت أن : $ص' - جتا^{٣}س = ٠$

٥- لتكن $ص = جا^{٤}س$ فأثبت أن : $ص'' + ١٦ص = ١٢ جا^{٢}س$

٦- إذا علمت أن $ص = أ جا٣س + ب جتا٣س$ فأثبت أن $ص'' + ٩ص = ٠$

٧- إذا علمت أن $ص = أ جا٣س$ وكانت $\frac{د^{٢}ص}{د س^{٢}} + ٢ص = ٤ جا٣س$ فما قيمة $أ$ ؟ $\frac{-٤}{٧}$

٨- إذا كانت $ص = \sqrt{\frac{١+جا٢س}{١-جا٢س}}$ ، $س \in \left]٠ ، \frac{\pi}{٤}\right[$ فأثبت أن $\frac{د ص}{د س} = \frac{٢}{١-جا٢س}$.

٩- إذا علمت أن $ص^{ن} = (١+س)^{ن}$ فأثبت أن $\frac{د^{٢}ص}{د س^{٢}}(١+س) = (ن^{٢}-١)\frac{د ص}{د س}$

١٠- ليكن $هـ(س+ص) = هـ(س) + هـ(ص) + ٥س ص$ ، $\lim_{و \to ٠} \frac{هـ(و)}{و} = ٣$ جد $هـ'(س)$ $(٣ + ٥ س)$

١١- ليكن $هـ(س^{٢}) = ٢س^{٢} + ١٢أس$ ، $هـ'(٩) = ٣$. جد قيمة $أ$ حيث $أ > ٠$. ٣

١٢- $هـ(س) = جاس$ ، $هـ(س) = ٢جتاس$ جد $(هـ \circ هـ)'(\frac{\pi}{٢})$ -٢

١٣- إذا كان $\sqrt{س} + \sqrt{ص} = \sqrt{٥}$ فجد $\frac{د ص}{د س}$ $-\sqrt{\frac{ص}{س}}$

١٤- إذا كان $س = (١-ص^{٢})(١+ص^{٢})(١+ص^{٤})$ فجد $\frac{د ص}{د س}$ عندما س=صفرا $\pm \frac{١}{٨}$

١٥- ليكن $س ص(س+ص)=٦$ فجد $\frac{ء ص}{ء س}$ عندما س=٢ $-\frac{٣}{٨}، -\frac{٥}{٨}$

١٦- إذا كان $س^{٢}+ص^{٢}=٥$ فأثبت أن $\frac{ء^{٢}ص}{ء س^{٢}}-\frac{ص}{س}\cdot\frac{ء ص}{ء س}+\frac{٥}{ص^{٣}}=١$

١٧- إذا علمت أن $س=$جتا٢ص فأثبت أن : ٢جا^{٣}٢ص $\frac{ء^{٢}ص}{ء س^{٢}}+س=٠$

١٨- إذا علمت أن $س=$ظاص فأثبت أن : $\frac{ء^{٢}ص}{ء س^{٢}}+$جا٢ص$\cdot\frac{ء ص}{ء س}=٠$

١٩- جد $\frac{ء}{ء س}\left(هـ\left(\sqrt{س+٣}\right)\right)$ عند س=١ علما بأن $هـ(٢)=٢، هـ'(٢)=١$ $\frac{١}{٤}$

٢٠- إذا كان $هـ\left(س-\sqrt{س}\right)=س^{٣}\times ه(س)، ه(س)=١+س^{٢}$ فجد $هـ'(٢)$ $\frac{٥٣١٢}{٣}$

٢١- إذا كانت $س=$جتا^{٣}ص فأثبت أن : ^{٣}جا^{٣}ص $\times ص''+س=٠$

٢٢- إذا علمت أن $ص=\left(\frac{١}{٢}ظاس جا٢س\right)^{٣}$ فأثبت أن : $\frac{ء ص}{ء س}=٣$جا^{٤}س جا٢س

٢٣- إذا علمت أن $(ص+١)^{٣}=(س-٢)^{٢}$ فأثبت أن : $٩(ص+١)\left(\frac{ء ص}{ء س}\right)^{٢}=٤$

٢٤- إذا كان ص =جا٢ن ،س =جتا٢ن فأثبت أن $\frac{ء^{٢}ص}{ء س^{٢}}=-$قتا^{٣}٢ن

٢٥- إذا كان $ص^{٢}=٣س^{٢}+٥$ فما قيمة $\frac{س}{ص}$ علما بأن $ء ص=٣ء س$ ؟ ١

٢٦- جد $\frac{ء}{ء س}\left(هـ^{٢}(س)\right)$ عند س=٣ علما بأن $هـ(٣)=٤، هـ'(٣)=٢$ ١٦

٢٧- إذا كان $ص=\left(\frac{ع+١}{ع-١}\right)^{٢}$ ، $ع=س^{٢}+٢س$ فجد $\frac{ء ص}{ء س}$ عندما $س=١$

٢٨- إذا كان $هـ(س)=$ظا^{٢}س، $ه(س)=\frac{أ}{٢س+١}$ وكان $(ه\circ هـ)'\left(\frac{\pi}{٤}\right)=\frac{٨}{٢٥}$ فما قيمة أ ؟ $\frac{-٩}{٢٥}$

٢٩- إذا كان $ص-س=$جتاص فأثبت أن : $\left(\frac{ء ص}{ء س}\right)^{٢}=-\frac{ء^{٢}ص}{ء س^{٢}}(ق اص+ظاص)$

٣٠- $ه(س)=\sqrt[٥]{س^{٣}-٤س+١}$ ، $هـ(٢)=٣، هـ'(٢)=-١$ ، $ل(س)=ه(س)\times هـ(س)$. جد $ل'(٢)$ $\frac{١٩}{٥}$

٣١- $ل(س)=\sqrt[٤]{(س^{٢}-س+١)^{٣}}$ ، $هـ(١)=-٤، هـ'(١)=٢$. جد $\left(\frac{هـ}{ل}\right)'(١)$ ٥

٣٢- إذا كان $س + ص = جاص$ فأثبت أن : $\left(\frac{ءص}{ءس}\right)^{٢} = \frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}}(ظتاص - قتاص)$

٣٣- إذا كان $ص - سص = جاس$ فأثبت أن : $ص'' + ص = ٢ص' \times (١ - س)^{-١}$

٣٤- إذا كان $جتاص - سص = ٢س$ فأثبت أن : $ص'' \times (س + جاص) + ص' \times (٢ + ص' جتاص) = ٠$

٣٥- إذا كان $ص = \sqrt{ظاس + \sqrt{ظاس + \sqrt{ظاس + \sqrt{ظاس + ٠ ٠ ٠}}}}$ فأثبت أن $\frac{ءص}{ءس} = \frac{قا^{٢}س}{٢ص - ١}$

٣٦- إذا كان $ص = (قاس + ظاس)^{ن}$ فأثبت أن $\frac{ءص}{ءس} = نص قاس$

٣٧- إذا كان $ع = س^{٢} + س + ١$ ، $ص = \frac{١}{٣}س^{٣} + ٣س + ٥$ فما قيمة $\frac{ء^{٢}ع}{ءص^{٢}}$ عند $س = ١$ $\frac{١}{٣٢}$

٣٨- إذا كان $\frac{ءص}{ءس} = س^{٢}$ فجد $\frac{ء^{٢}س}{ءص^{٢}}$

٣٩- إذا كان $ص = ظا(سص)$ فاثبت أن $\frac{ءص}{ءس} = \frac{ص + ص^{٣}}{١ - س(١ + ص^{٢})}$

٤٠- إذا كان $ع^{٢} = \frac{س}{هـ(س^{٢})}$ وكان $هـ(١) = ٤$ ، $هـ'(١) = ١$ ، $ع > ٠$ فجد $\frac{ءع}{ءس}$ عند س = ١ $\left(\frac{١}{٨}\right)$

٤١- إذا كان $س = هـ(ص^{٢} + ١)$ فجد $\frac{ءص}{ءس}$ عندما ص=٢ ، $هـ'(٥) = ٤$ $\left(\frac{١}{١٦}\right)$

جد المشتقة النونية ($هـ^{(ن)}(س)$) للاقترانات التالية:

٤٢- $هـ(س) = جا٣س$

٤٣- $هـ(س) = جتا٣س$

٤٤- $هـ(س) = \frac{١}{س}$

٤٥- $هـ(س) = \frac{١}{١ - س}$

٤٦- $هـ(س) = \frac{١}{س(١ - س)}$

٤٧- $هـ(س) = سهـ(س)$

٤٨- إذا كان $هـ(س) = ٢ظتاس$، $هـ(س) = أ^{س(س^{٢} - ٣)^{٣}}$ وكان $(هـ \circ هـ)'(\frac{\pi}{٤}) = -٥٠$ فما قيمة أ ؟ $(\frac{١}{٢})$

٤٩- إذا كان $ص = \sqrt{٤ + ٣جاس}$ فأثبت أن $٢ص\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}} + ٢\left(\frac{ءص}{ءس}\right)^{٢} + ص^{٢} = ٤$

السنة	السؤال	الجواب
٢٠٠٧	إذا كان $ص = ع^{٢} + ١$ ، $ع = ٢س - ٣$ فإن $\frac{ص}{س}$ عند س=٢ تساوي أ) ٢ ب) ٤ جـ) ٥ د) ٨	ب
٢٠٠٧	إذا كان $ل(س) = س \times هـ(س^{٢} - ٣س + ٣)$ فأوجد لَ(٣) علما بأن هـ(٣)=٤ ،هَ(٣)=١	١٣
٢٠٠٧دراسات	إذا كان $قـ(س) = س^{٣} + ٢س + ٥$ ، $هـ(س) = س^{٢} + ١$ فأوجد (قـ٥هـ)َ(س)	$٦س(س^{٢} + ١)^{٢} + ٤س$
٢٠٠٨إكمال	إذا كان $قـ(س) = ل(س^{٢} + ١)$ ، لَ(٥)=١، ل(٥)=٣ فجد معادلة المماس لمنحنى الاقتران ق(س) عند س=٢	ص=٤س-٥
٢٠٠٩	إذا كان $قـ(س) = \frac{١}{س}$ ، $هـ(س) = ٢س^{٢} - ١$ فإن(قـ٥هـَ)(١)= أ) -٤ ب) -١ جـ) ١ د) ٤	أ
٢٠٠٩إكمال	إذا كان $ص = ع^{٣} - ١$ ، $ع = (س+١)^{٣}$ فجد $\frac{ص}{س}$ عند ص=صفر	٩
٢٠١٠	إذا كان $قـ(س) = ٢س^{٢} + س - ١$ ، $هـ(س) = \sqrt{س}$ فإن(قـ٥هـَ)($\frac{١}{٤}$)= أ) -٣ ب) $-\frac{١}{٢}$ جـ) $\frac{١}{٢}$ د) ٣	د
٢٠١٠	إذا كانت $ص = (ع^{٣} - ٢ع)^{٣}$ ، $ع س = ١$ فجد $\frac{ص}{س}$ عند س=١	-٣
٢٠١٠إكمال	إذا كانت $ص = ع^{٣} + ع^{٢} - ٦$ ، $ع = س^{٢} - ٣$ ، س>١ فجد $\frac{ص}{س}$ عند ع=١	٢٠
٢٠١١	إذا كان ق(س) قابلا للاشتقاق وكان $قـ(س^{٣} + ١) - س = ٠$ ، فإن قَ(٩)= أ) $\frac{١}{١٢}$ ب) $\frac{١}{٩}$ جـ) صفر د) ٣٣	أ
٢٠١١	إذا كانت $ص = \sqrt{ع + ١٣}$ ، $٣ع = ٤س^{٣}$ فجد $\frac{ص}{س}$ عند س=٣	$\frac{١٨}{٧}$
٢٠١٢	إذا كان $قـ(س) = س^{٢}$ فإن (قـ٥قَ) (١)= أ) ٢ ب) ٤ جـ) ٦ د) ٨	د

٢٠١٢	إذا كان $\sqrt{ص} = \frac{ص}{س - ١}$ ، أثبت أن: صً ص=صَ(س−١)	☺
٢٠١٣	إذا كان $ق(س) = ٢س^{٢} + س - ١$ ، $هـ(س) = \sqrt{س}$ فإن(ق٥هـ)َ $(\frac{١}{٤})$= أ) $\frac{١}{٢}$ ب) ٣ جـ) −٣ د) $-\frac{١}{٢}$	ب
٢٠١٣إكمال	إذا كان $ق(س) = أ^{هـ(\sqrt{س})}$ وكان هَ(٣)=٢، قَ(٩) = $\frac{٢}{٣}$ فإن قيمة الثابت أ تساوي أ) ٢ ب) $\frac{٤}{٣}$ جـ) ١ د) $\frac{١}{٣}$	أ
٢٠١٤	إذا كان (ق٥هـَ)(٢)=٢٧ حيث $ق(س) = س^{٢} - ٥س$ ،هَ (٢)=٣ فإن هـ(٢)= أ) ٢١ ب) ١٦ جـ) ٩ د) ٧	د
٢٠١٤	إذا كان $ق(س) = س^{٣} + ٢$ ، $هـ(س) = س^{٢} + ٣$ فجد (ق٥هـً)(٢)	٩٦٦
٢٠١٤	إذا كان ص=جاهـ ، س=قتاهـ ، أثبت أن : $\frac{د^{٢}ص}{د س^{٢}} + ٢ص \frac{دص}{دس} = ٠$	☺
٢٠١٥	إذا كان (ق٥هـ)(س)= س،وكانت قَ(س)= $\frac{١}{س}$ حيث هـ(س) قابل للاشتقاق فإن هـَ(س)= أ) ١ ب) س جـ) ق(س) د) هـ(س)	د
٢٠١٥	إذا كان $(\frac{س}{ب})^{ن} = (\frac{ص}{ب})^{م}$ حيث أ،ب عددان حقيقيان لا يساويان الصفر،م،ن عددان صحيحان موجبان غير متساويين فأثبت أن $\frac{دص}{دس} = \frac{ن}{م}(\frac{ص}{س})$	☺
٢٠١٥ إكمال	إذا كان $ق(س^{٣} - ١) = س^{٢} + ١$ فإن قَ(٧) = أ) $\frac{٢}{٢١}$ ب) $\frac{١}{٣}$ جـ) ٤ د) ١٤	ب
٢٠١٦	إذا كان (ق٥هـ)َ (٣)=٨ ، وكان (قَ٥هـ)(٣)=٢ فإن هـَ (٣) تساوي أ) ٢ ب) ٤ جـ) ٨ د) ١٦	ب
٢٠١٦	إذا كان $ق(٢س^{٢} - ١) = \sqrt[٣]{(س + ٦)^{٤}}$ ، س > صفر فاحسب $\lim_{هـ \to ٠} \frac{ق(٧ + هـ) - ق(٧)}{٦هـ}$	$\frac{١}{١٨}$

٢٠١٦ إكمال	$قـ(س)=\sqrt{٢س+١٠}$ ، $هـ(س)=٩-٣س$ فإن $(قـ\circ هـ)'(٢)=$ أ) $\frac{-٣}{٢}$ ب) -٦ ج) $\frac{٣}{٤}$ د) $\frac{-٣}{٤}$	د

الاشتقاق الضمني

٢٠٠٧	إذا كان $(س+ص)^{٥}=س^{٢}ص^{٣}+٣١$ فأوجد $\frac{د ص}{د س}$ عند النقطة(١،١)	$\frac{-٧٨}{٧٧}$
٢٠٠٨	إذا كانت $ع=٥ص-ص^{٢}+٨$ ، $ص^{٢}=سص+٢$ جد $\frac{د ع}{د س}$ عندس=-١،ص=١	١
٢٠٠٨إكمال	جد $\frac{د ص}{د س}$ إذا كان: ١) $س^{٢}+٢ص^{٢}=٦$	$\frac{-س}{٢ص}$
	٢) $ص=ل^{٣}-٤ل+٢$ ، $ل=س^{٢}-٤س$	$(٣(س^{٢}-٤س)^{٢}-٤)(٢س-٤)$
٢٠٠٩	إذا كانت $ص^{٢}+٣سص=١٨$ ، $ع=٥ص-ص^{٢}+٨$ جد $\frac{د ع}{د س}$ عند ص=٦	١٤
٢٠١٠	جد معادلة المماس المرسوم لمنحنى العلاقة $(س-ص)^{٢}+٢س-ص=٦$ عند نقطة/نقاط تقاطع منحناها مع المستقيم ص-س+١=صفر	ص-٣= $\frac{٤}{٣}$ (س-٤)
٢٠١١	إذا كانت $ص^{٢}=\frac{٥}{س^{٢}+١}$ ، أثبت أن $سص^{٣}+٥ص'$ = صفر	☺
٢٠١٢	إذا كانت $ل=ص^{٢}+٤ص-٥$ ، $ص+سص=٦$ جد $\frac{د ل}{د س}$ عند ص=٢	$\frac{-١٦}{٣}$
٢٠١٣	إذا كان $صع=١$، $س+ص^{٢}=٢$ فجد $\frac{د ع}{د س}$ عند س=١	$\pm\frac{١}{٢}$
٢٠١٤	إذا كان ص=جاهـ ، س=قتاهـ ، أثبت أن : $\frac{د^{٢}ص}{د س^{٢}}+٢ص\frac{د ص}{د س}=٠$	☺
٢٠١٥	إذا كان $ل=س^{٢}-٤س+٣$ ، $س=\sqrt{٣ص^{٢}+٦}$ ،فإن $\frac{د ل}{د س}$ عندما ص=١هي أ) ١ ب) ٢ ج) $\frac{١}{٣}$ د) -٢	ب
٢٠١٦	إذا كان $ص=\sqrt{س}$ فإن $\frac{د}{د س}(صص)$ يساوي أ) $\frac{١}{٢\sqrt{س}}$ ب) صفر ج) ١ د) $\frac{١}{٢س}$	ب

٢٠١٦ إكمال	إذا كان $ص^{٦}س^{٣}=١٠$ فأثبت أن $ص'=\frac{٣ص}{٤س^{٢}}$	☺

الاقترانات الدائرية

٢٠٠٧	$\lim_{هـ\to٠}\frac{جتا(س+هـ)-جتاس}{هـ}=$ أ) جتاس ب) جاس ج)-جتاس د) -جاس	د
٢٠٠٧دراسات	إذا كان ٢س+ص=جاس ص ، فأوجد $\frac{د ص}{د س}$	$\frac{ص جتا(س ص)-٢}{١-س جتا(س ص)}$
٢٠٠٨إكمال ٢٠١١إكمال	إذا كان ق(س)= جاس ، هـ(س)=٢جتاس فإن (ق٥هـ)َ ($\frac{\pi}{٣}$) تساوي أ) -٢ ب) -١ ج) ١ د) ٢	أ
٢٠٠٨إكمال	$\lim_{هـ\to٠}\frac{جتا(٢س-هـ)-جتا٢س}{هـ}=$ أ) -٢جا٢س ب) جا٢س ج) ٢جاس د) -جا٢س	ب
٢٠٠٩	إذا كان ق(س)=ظا٢س ،فإن $\lim_{هـ\to٠}\frac{ق(\pi+هـ)-ق(\pi)}{هـ}=$ أ) غ.م ب) -٢ ج) صفر د) ٢	د
٢٠٠٩	إذا كان $ص=ظا^{٢}س$، أثبت أن $\frac{د^{٢}ص}{د س^{٢}}=٢(١+ص)(١+٣ص)$	☺
٢٠١٠	إذا كان ق(س)=جتا٢س ، فإن قً(س)+٥ق(س)= أ) جتا٢س ب) ٩جتا٢س ج) -٩جتاس د) -جتا٢س	أ
٢٠١٠	$\lim_{هـ\to٠}\frac{ظا(٢س-هـ)-ظا٢س}{هـ}=$ أ) $قا^{٢}٢س$ ب) $-قا^{٢}٢س$ ج) $٢قا^{٢}٢س$ د) $-٢قا^{٢}٢س$	ب

٢٠١٠إكمال	إذا كان المستقيم ص=س مماسا لمنحنى الاقتران ص =جا^{٢}س + أ، س∈ [٠، π] فإن الإحداثي السيني لنقطة التماس هو : أ) $\frac{\pi}{٢}$ ب) $\frac{\pi}{٤}$ جـ) $\frac{\pi}{٦}$ د) $\frac{\pi}{٣}$	ب
٢٠١١	جد معادلة المماس لمنحنى الاقتران ق(س)= $\frac{١}{٢}$ جتا٢س+جتاس عند النقطة/النقاط التي يكون عندها المماس أفقيا في الفترة[$-\frac{\pi}{٢}$ ، $\frac{\pi}{٢}$]	ص− $\frac{٣}{٢}$ =٠
٢٠١٢	إذا كان ص =ظاس+قاس فإن $\frac{ص'}{ص}$ = أ) قاس ب) قتاس جـ) −قاس د) −قتاس	أ.
٢٠١٣	إذا كان ص=قتا٢س فإن $\frac{د ص}{د س}$ = أ) قتا٢س ظتا٢س ب) −٢قتا٢س ظتا٢س جـ) −قتا٢س ظتا٢س د) ٢ظتا^{٢}٢س	ب
٢٠١٣إكمال	إذا كان ص = ١−جاس فأثبت أن $\frac{د}{د س}\left(\frac{\text{جتاس}}{ص}\right)=\frac{١}{ص}$ ، حيث ص≠٠.	☺
٢٠١٤	إذا كان ق (س) =جا $\sqrt{٢س}$ فإن قَ($\frac{\pi}{٢}$)= أ) $-\pi$ ب) −١ جـ) $-\frac{١}{\pi}$ د) صفر	جـ
٢٠١٤	$\text{نهـا}_{هـ\to٠}\frac{\text{جا}^{٣}(٢س-٢هـ)-\text{جا}^{٣}٢س}{٣هـ}$ = أ) −جا٤س جا٢س ب) ٢جا^{٢}٢س جـ) $\frac{٢}{٣}$جتا^{٢}٢س د) جا٤س جتا٢س	أ
٢٠١٥	إذا كان ص=ظاس جا٢س فإن $\frac{د ص}{د س}$ عندما س= $\frac{\pi}{٤}$ تساوي أ) صفر ب) $\frac{١}{٢}$ جـ) ٤ د) ٢	د
٢٠١٦	إذا كان ص =جاس − $\frac{١}{٣}$جا^{٣}س فإن $\frac{د ص}{د س}$ تساوي أ) جتا^{٢}س ب) جتا^{٣}س جـ) جا^{٣}س د) −جتا^{٣}س	ب

٢٠١٦ إكمال	إذا كان ص =قا٢س فإن $\frac{ع ص}{ع س}$ = أ) ٢قاسظاس ب) ٢قاسظا٢س ج) ٢قا٢سظاس د) ٢ظاس	جـ

الوحدة الثالثة

تطبيقات التفاضل

ورقة عمل (١٣)

نظريتا القيمة المتوسطة ورول:

٢٠٠٧،٢٠٠٧دراسات ٢٠١١	قيمة جـ التي تحددها نظرية رول على الاقتران ق(س)=جاس+جتاس في الفترة [٠، $\frac{\pi}{٢}$] هي: أ) صفر ب) $\frac{\pi}{٦}$ جـ) $\frac{\pi}{٤}$ د) $\frac{\pi}{٣}$	جـ
٢٠٠٧	بيّن فيما إذا كان الاقتران ق(س)= $\begin{cases} س^{٣} - ٢ ، س \geq ١ \\ ٣س - ٤ ، س < ١ \end{cases}$ يحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة على[−١، ٣] ثم أوجد جـ التي تعينها النظرية .	$\pm \sqrt{\frac{٢}{٣}}$
٢٠٠٧دراسات	إذا كان $ق(س) = س^{٢} - ٣س + ٦$ فابحث في توفر شروط نظرية القيمة المتوسطة على [−١، ٢] ثم أوجد جـ التي تعينها النظرية .	$\frac{١}{٢}$
٢٠٠٧ إكمال	ليكن ق(س) كثير حدود من الدرجة الثانية وكان ق(أ)=ق(−أ) فإنه يوجد على الأقل جـ $\in$]−أ،أ[بحيث أ) قَ(جـ)=٠ ب) جـ نقطة انعطاف جـ) ق(جـ)=٠ د) غير ذلك	أ
٢٠٠٨	قيمة جـ التي تحددها نظرية القيمة المتوسطة للاقتران $ق(س) = س^{٢} + س - ٦$ في [−١، ٢]هي: أ) $-\frac{١}{٢}$ ب) $\frac{١}{٢}$ جـ) $\frac{٣}{٢}$ د) $\frac{٥}{٢}$	ب
٢٠٠٨إكمال	بيّن أن $هـ(س) = س^{٢} + \frac{١}{س^{٢}}$ يحقق شروط رول على[$\frac{١}{٢}$ ، ٢] ثم جد جـ التي تعينها النظرية	١
٢٠٠٩	إذا كان الاقتران ق(س)= $\begin{cases} ا - س^{٢} ، -٢ \leq س \leq ١ \\ ٦ - بس ، ١ < س \leq ٢ \end{cases}$ يحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة في [−٢،٢] ،جد قيمتي الثابتين أ،ب ثم جد قيمة جـ التي تعينها النظرية.	أ=٥ ، ب=٢ جـ= $-\frac{١}{٨}$
٢٠٠٩ إكمال	بيّن أن الاقتران $ق(س) = س + \frac{١}{س}$ يحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة في [$\frac{١}{٢}$ ، ٢] .ثم جد قيمة /قيم جـ التي تعينها النظرية.	١

٢٠١٠	إذا كان الاقتران ق(س)= $\begin{cases} ٣س^{٢} - ٢س - ٢ & ، -١ \leq س < ١ \\ س^{٢} + ٢س - ٤ & ، ١ \leq س \leq ٣ \end{cases}$ فابحث في تحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة للاقتران ق(س) على [−١، ٣] ثم أوجد جـ التي تعينها النظرية .	$\frac{٢}{٣}$
٢٠١١	بيّن أن الاقتران ق(س)= $\begin{cases} ٣ - س^{٢} & ، -١ \leq س < ١ \\ س^{٢} - ٤س + ٥ & ، ١ \leq س \leq ٢ \end{cases}$ يحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة في الفترة [−١، ٢] ثم أوجد قيمة/قيم جـ التي تعينها النظرية .	$\frac{١}{٦}$ $\frac{١١}{٦}$
٢٠١١إكمال	ق،ك اقترانان كل منهما يحقق شروط نظرية رول في الفترة [أ، ب]، ابحث هل يحقق حاصل الضرب(ق×ك) شروط هذه النظرية على الفترة [أ، ب] .	☺
٢٠١٢	مجموعة جميع قيم جـ التي يمكن الحصول عليها من تطبيق نظرية رول على الاقتران ق(س)=٨ في[٠، ١]هي: أ) { } ب) { صفر } جـ)]٠، ١[د) [٠، ١]	جـ
٢٠١٢	بيّن أن الاقتران $ق(س) = ٢س^{٢} + ٣س + ١$ يحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة في [١، ٤].ثم جد قيمة /قيم جـ التي تعينها النظرية.	$\frac{٥}{٢}$
٢٠١٢إكمال	إذا كان الاقتران ق(س)= $\begin{cases} س^{٣} - أس & ، ٠ \leq س < ١ \\ بس^{٢} - ٤س & ، ١ \leq س \leq ٢ \end{cases}$ يحقق شروط نظرية رول للاقتران ق(س) على [٠، ٢] فجد قيمتي أ،ب ثم أوجد قيمة جـ التي تعينها النظرية	أ=٣ ب=٢ جـ=١
٢٠١٣	إذا كان الاقتران ق(س)= $\begin{cases} أس - ٣ & ، س < ٤ \\ -س^{٢} + ١٠أس - ب & ، س \leq ٤ \end{cases}$ يحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة على [٢، ٦] فجد قيمتي أ،ب ثم أوجد قيمة جـ التي تعينها النظرية	أ=٢ ب=١٩ جـ=$\frac{٩}{٢}$

٢٠١٣ إكمال	إذا كان الاقتران ق(س)= $\begin{cases} س^{٢}+س+١ & ، س \geq ١ \\ ٣س & ، س < ١ \end{cases}$ متصلا على [-٣، $\frac{٧}{٣}$] بين أن ق(س)يحقق باقي شروط نظرية رول على [-٣، $\frac{٧}{٣}$] ثم أوجد قيمة/قيم جـ التي تعينها النظرية .	$-\frac{١}{٢}$
٢٠١٤	بيّن أن الاقتران ق(س)= $\begin{cases} س^{٢}+٢س & ، ١ \leq س \leq ٢ \\ س^{٣}-٦س+١٢ & ، ٢ < س \leq ٣ \end{cases}$ يحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة في الفترة [١، ٣] ثم أوجد قيمة/قيم جـ التي تعينها النظرية .	$\sqrt{٥}$
٢٠١٤	إذا كان الاقتران ق(س)= $\begin{cases} [\frac{١}{٣}س]+جـ & ، ١ \leq س < ٣ \\ س^{٢}-أس & ، ٣ \leq س \leq ب \end{cases}$ يحقق شروط نظرية رول ، أوجد الثوابت أ،ب،جـ.	أ=٦ ب=٣ جـ=-٩
٢٠١٤إكمال ضفة	بيّن أن الاقتران $ق(س) = \frac{س^{٦}+١}{س^{٣}}$ يحقق شروط نظرية رول في [$\frac{١}{٢}$ ، ٢].ثم جد قيمة /قيم جـ التي تعينها النظرية.	١
٢٠١٤ إكمال غزة	جد الثوابت أ،ب،جـ التي تجعل الاقتران ق(س)= $\begin{cases} \lvert س^{٢}-س-٦ \rvert & ، ٠ \leq س < ١ \\ أس+ب & ، ١ \leq س < ٢ \\ جـ & ، س = ٢ \end{cases}$ يحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة على الفترة[٠ ، ٢]	أ=-١ ب=٧ جـ=٥
٢٠١٥	إذا كان ق(س)=س^{٢}-٣س-أ يحقق شروط نظرية رول على الفترة [-١،أ] فإن قيمة الثابت أ تساوي أ) ١ ب) ٢ جـ) ٣ د) ٤	د

٢٠١٥	إذا كان ق(س)= $\begin{cases} \text{أس}^{٢} + ٢\text{س}، ٠ \leq \text{س} \leq ٢ \\ \text{س}^{٣} - \text{بس} + ١٢، ٢ < \text{س} \leq ٣ \end{cases}$ يحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة للاقتران ق(س) على [٠ ، ٣] فعين قيمتي أ،ب ثم جد قيمة/قيم جـ التي تعينها النظرية.	أ=١ ب=٦ جـ= $\sqrt{\frac{١٣}{٣}}$
٢٠١٥ إكمال	إذا كان ق(س) يحقق شروط نظرية رول في الفترة [أ، ب]، فإن العبارة الصحيحة دائما هي أ) ق(أ)Xق(ب)<صفر ب) يوجد على الأقل جـ∈] أ، ب[بحيث ق(جـ)=صفر جـ) يوجد على الأقل جـ∈] أ، ب[بحيث يكون مماس ق عندها أفقيا د) ق(س) يحقق شروط رول على أي فترة جزئية من[أ، ب]	جـ
٢٠١٥ إكمال	إذا كان ق(س)= $\begin{cases} ٢\text{س} - ٣ ، ١ \leq \text{س} \leq ٢ \\ ٦\text{س} - \text{س}^{٢} - ٧ ، ٢ < \text{س} \leq ٣ \end{cases}$ فابحث في تحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة في الفترة [١، ٣] ثم أوجد قيمة/قيم جـ التي تعينها النظرية .	جـ= $\frac{٩}{٤}$
٢٠١٦	إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = ٣\sqrt{\text{س}} - \text{س}$ يحقق شروط رول في [١،٤] فإن قيمة جـ التي تحددها النظرية أ) $\frac{٣}{٢}$ ب) $\frac{٧}{٤}$ جـ) $\frac{٩}{٤}$ د) ٢	جـ
٢٠١٦	إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \text{أس} - ٣ ، ٠ \leq \text{س} \leq ١ \\ \text{بس}^{٢} + ١ ، ١ < \text{س} \leq ٢ \end{cases}$ يحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة على[٠،٢] فجد قيمتي الثابتين أ ، ب .	أ=٨ ب=٤

ورقة عمل (١٤)

التزايد والتناقص والقيم القصوى والتقعر

اختر الإجابة الصحيحة :

١- إذا كان $\text{ق}(س) = |س - ٣| - ٥$ فإن أصغر قيمة للاقتران $\text{ق}(س)$ هي :

أ) ٥ ب) صفر جـ) -٢ د) -٥

٢- إذا كان $\text{ق}(س) = \sqrt{س^{٢} - ٤س + ٣}$ فإن مجموعة قيم س التي يكون للاقتران ق(س) عندها نقط حرجة هي :

أ) { ٢ } ب) { ١، ٣ } جـ) { ١، ٢، ٣ } د) { ١، -٢ ، ٣ }

٣- إذا كان $\text{ق}(س) = |٢س - ٤|$ ، $س \in [-١، ٥]$ فإن مجموعة قيم س التي يكون للاقتران ق(س) عندها نقط حرجة هي :

أ) { -١، ٠، ٥ } ب) { -١، ٢، ٥ } جـ) { -١، ٤، ٥ } د) { ٠، ٢ }

٤- ق(س) معرف على $[٠، ٣]$ وقابل للاشتقاق على $]٠، ٣[$ حيث $\text{ق}'(س) = \frac{س - ٢}{س + ١}$ فإن عدد النقط الحرجة للاقتران ق(س) يساوي

أ) ٥ ب) ٤ جـ) ٣ د) ٢

٥- إذا كان للاقتران $\text{ق}(س) = س^{٣} - ب س + ٦$ قيمة قصوى محلية عند س=-٢ فما قيمة ب

أ) ٦ ب) -٦ جـ) ١٢ د) -١٢

٦- ق(س) معرف على $[٠، ٣]$ وقابل للاشتقاق على $]٠، ٣[$ حيث $\text{ق}'(س) = \frac{س - ٢}{س + ١}$ فإن جميع قيم س التي عندها نقط حرجة للاقتران ق(س)

أ) {٠، -١، ٢، ٣ } ب) { ٠، ٢، ٣ } جـ) { ٠، ٣ } د) { ٢ }

٧- إذا كان للاقتران $\text{ق}(س) = ٣س^{٣} - ٣س^{٢}$ قيمة صغرى محلية عند س=٢ فإن قيمة الثابت م تساوي

أ) -١ ب) ١ جـ) ٢ د) ٣

٨- إذا كان ق(س) = $\begin{cases} س^{٢} - س & ، \ ٠ \leq س \leq ١ \\ س - ١ & ، \ ١ < س \leq ٣ \end{cases}$ ، فإن جميع قيم س التي يوجد عندها نقط حرجة للاقتران ق(س) في $[٠، ٣]$ هي

أ) {٠، $\frac{١}{٢}$ ، ٣ } ب) { ٠، ١، ٣ } جـ) { ٠، $\frac{١}{٢}$ ، ١، ٣ } د) { ٠، ٣ }

٩- ق(س) معرف على $[٠، ٣]$ وكان $\text{ق}(١) = -٢$، $\text{ق}'(١) = ٠$، $\text{ق}''(١) = -٣$ فإن القيمة العظمى المحلية للاقتران ق(س) تساوي

أ) -٢ ب) -٣ جـ) صفر د) ١

١٠- $\text{ق}(س) = \sqrt{س^{٢} - ٢س + ٥}$ ، $س \in ح$ ، الفترة التي يكون فيها الاقتران متزايدا :

أ)] ١، ∞ [ب) [١، ∞ [ج)] - ∞، ١ [د) [-١، ١]

١١- $\text{ق}(س) = \left[\frac{١}{٣} س + ١ \right]$ معرف على $[-٣، ٣]$ فإن الإحداثي السيني للنقط الحرجة للاقتران ق(س) :

أ) $\frac{-١}{٣}$ ب) { -٣، ٣ } ج)] - ٣، ٣[د) [-٣، ٣]

١٢- مجموعة النقط الحرجة للاقتران $\text{ق}(س) = \sqrt{س^{٢} - ١٦س}$ هي :

أ) {٠، ١٦ } ب) { ٠، ٨، ١٦ } ج) { ٨ } د) $\emptyset$

١٣- إذا كان للاقتران $\text{ق}(س) = م س^{٣} - ٩س^{٢}$ نقطة حرجة عند س=٢ فإن قيمة الثابت م تساوي

أ) ٢ ب) ٥، ١ ج) ٥، ٤ د) ٣

١٤- إذا كان $\text{ق}(س) = \sqrt{٣٦ - س^{٢}}$ ، $|س| \geq ٦$ فإن ق(س) يكون متزايدا عندما :

أ) س ≤٠ ب) س ≤-٦ ج) -٦ ≤س ≤٠ د) ٠ ≤س ≤٦

١٥- إذا كانت النقطة (٢،١) نقطة انعطاف لمنحنى ق(س) وكانت $\text{ق}'(س) = ٤س^{٣} - ل س^{٢}$ ،حيث ل ثابت فإن ل=

أ)٦ ب) ١٢ ج) ٤ د) ٢٤

١٦- إذا كان لمنحنى $\text{ق}(س) = جاس + أس^{٢}$ نقطة انعطاف عند $س = \frac{\pi}{٦}$ فما قيمة الثابت أ ؟

أ)١ ب) $\frac{١}{٢}$ ج) ٠ د) $\frac{١}{٤}$

١٧- $\text{ق}(س) = (٢س - ٤)^{٣} + ٣$ ، $س \in ح$ فإن منحنى ق(س) يكون مقعرا لأعلى في :

أ)]-∞،-٤ [ب)] - ∞، ٢ [ج) [٢،∞ [د)] - ∞، ٠ [

١٨- إذا كان المستقيم ص+٣س+٢=٠ مماسا لمنحنى ق(س) عند نقطة الانعطاف (-١، ١) فإن ظل زاوية الانعطاف عند النقطة (-١، ١) يساوي :

أ)-١ ب) ١ ج) صفر د) -٣

السؤال	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠	١١	١٢	١٣	١٤	١٥	١٦	١٧	١٨
الإجابة	د	ب	ب	ج	ج	ب	ب	أ	أ	ب	د	أ	د	ج	أ	د	ج	د

لكل من الاقترانات التالية جد : أ) فترات التزايد والتناقص والقيم القصوى ب) فترات التقعر ونقط الانعطاف

١- $ق(س) = ٦س^{٢} - س^{٣} - ٦$

٢- $ق(س) = س^{\frac{١}{٣}}$

٣- $ق(س) = \sqrt{٩ - س^{٢}}$

٤- $ق(س) = |س^{٢} - ٩|$

٥- $ق(س) = \frac{١}{٤}جتا٤س - جتا٢س$ $س \in [٠ ، \frac{\pi}{٢}]$

٦- $ق(س) = \frac{١}{س^{٢} - ٤}$ ، $س \neq \pm ٢$

٧- ق(س) = $\begin{cases} س^{٣} - ٣س^{٢} + ٩ & ، -٣ \leq س < ٢ \\ ١ + س^{٢} & ، ٢ \leq س < ٧ \end{cases}$

٨- ق(س) = $\begin{cases} س^{٢} - ٣ & ، س \leq ٢ \\ ٥ - س^{٢} & ، س > ٢ \end{cases}$

أجب عن الأسئلة التالية :

١- إذا كان $ق(س) = س^{٣} + أس^{٢} + بس + جـ$ ، جد قيم الثوابت أ ، ب ، جـ إذا علمت أن للاقتران نقطة حرجة عند (-١ ، ٥) ونقطة انعطاف عند س=٢ . (أ=-٦ ، ب=-١٥ ، جـ=-٣)

٢- إذا كان منحنى $ق(س) = أس^{٣} + بس^{٢} + جـ$ يمر بالنقطة (٠ ، -٢) ، وكانت النقطة (-١ ، ٠) نقطة انعطاف لهذا المنحنى ، فجد قيم الثوابت أ ، ب ، جـ . (أ=١ ، ب=٣ ، جـ= -٢)

٣- جد قاعدة كثير الحدود من الدرجة الثالثة والذي يمر بالنقطة (٠ ، ٥) ومعادلة المماس لمنحناه عند نقطة الانعطاف (١ ، ٣) هي : ص-٢س=١ .

$ق(س) = -٤س^{٣} + ٢١س^{٢} - ١٠س + ٥$

٤- جد معادلة المماس لمنحنى $ق(س) = س^{٣} - ٦س^{٢} + ١٥$ عند نقطة الانعطاف. (ص= -١٢س + ٢٣)

٥- $ق(س) = ٢س^{٣} - ٣س^{٢} - ١٢س$ ، $س \in [-٢ ، ٣]$. جد القيم العظمى والصغرى المطلقة للاقتران . { ٧ ، -٢٠ }

٦- $ق(س) = س^{\frac{٣}{٥}}$ ، جد : فترات التزايد والتناقص والتقعر .

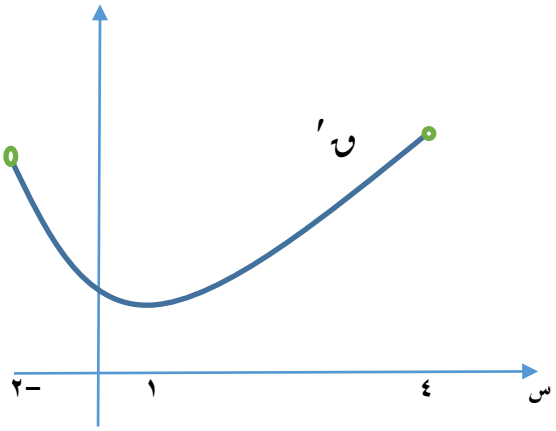
٧- $ق(س) = \frac{س - ١}{س^{٢} + ٣}$ ، جد فترات التزايد والتناقص.

٨- أوجد القيم العظمى والقيم الصغرى المحلية (إن وجدت) للاقتران $ق(س) = جتاس - جاس$ ، $س \in [٠ ، \pi]$

٩- إذا كان $ق(س) = س(٢ - س)^{٣}$ ، $س \in [-١ ، ٤]$ فجد فترات التزايد والقيم العظمى والصغرى المطلقة وفترات التقعر لأسفل.

١٠- إذا كان $ق(س) = (س^{٢} - ٤)^{\frac{٢}{٣}}$ فجد فترات التزايد والقيم العظمى المحلية للاقتران ق(س).

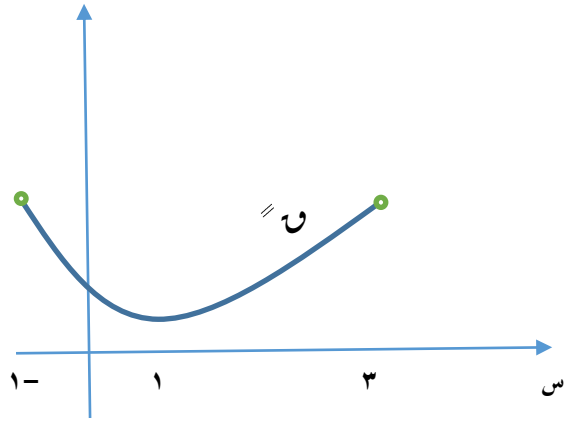
١١- يمثل الشكل المجاور منحنى المشتقة الأولى للاقتران ق المتصل على [-٢، ٤]



١- حدد الفترة التي يكون فيها ق(س) متزايدا .

٢- حدد الفترة التي يكون فيها منحنى ق(س) مقعرا لأعلى.

١٢- يمثل الشكل المجاور منحنى المشتقة الثانية للاقتران ق المتصل على [-١، ٣]

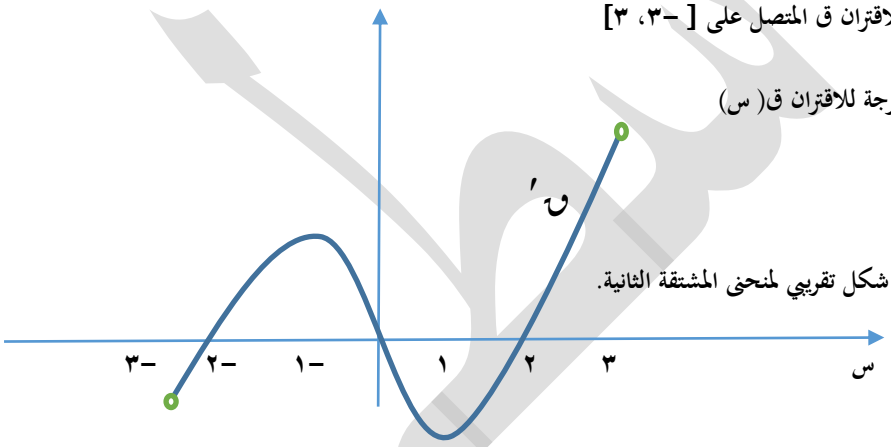


حدد الفترة التي يكون فيها ق′ متزايدا .

حدد الفترة التي يكون فيها منحنى ق مقعرا لأعلى.

١٣- يمثل الشكل المجاور منحنى المشتقة الأولى للاقتران ق المتصل على [-٣، ٣]

جد : ١- فترات التزايد والتناقص والنقط الحرجة للاقتران ق(س)

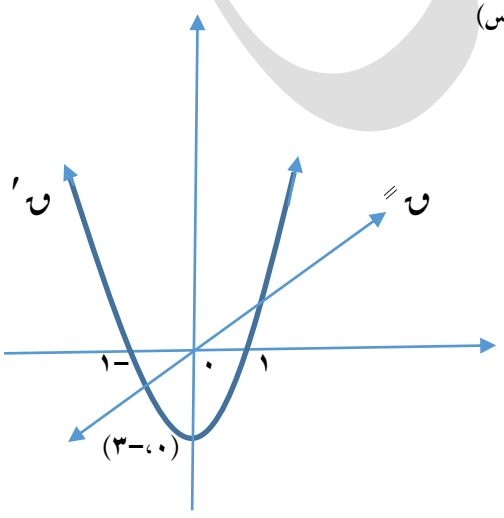


٢- التقعر ونقط الانعطاف لمنحنى ق(س) وارسم شكل تقريبي لمنحنى المشتقة الثانية.

٣- النقط الحرجة للاقتران قَ(س) .

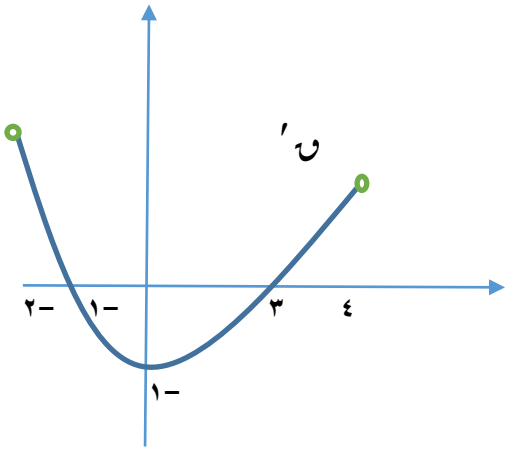
١٤- يمثل الشكل المجاور منحنيي المشتقة الأولى والمشتقة الثانية لكثير الحدود ق(س)

١- حدد فترات تزايد وتناقص ق(س) ٢- القيم القصوى للاقتران ق(س)



٣- فترات تقعر ق(س) ٤- نقط/ة انعطاف ق(س) (إن وجدت)

١٥- يبين الشكل المجاور منحنى المشتقة الأولى للاقتران ق(س) المتصل على [-٢، ٤]

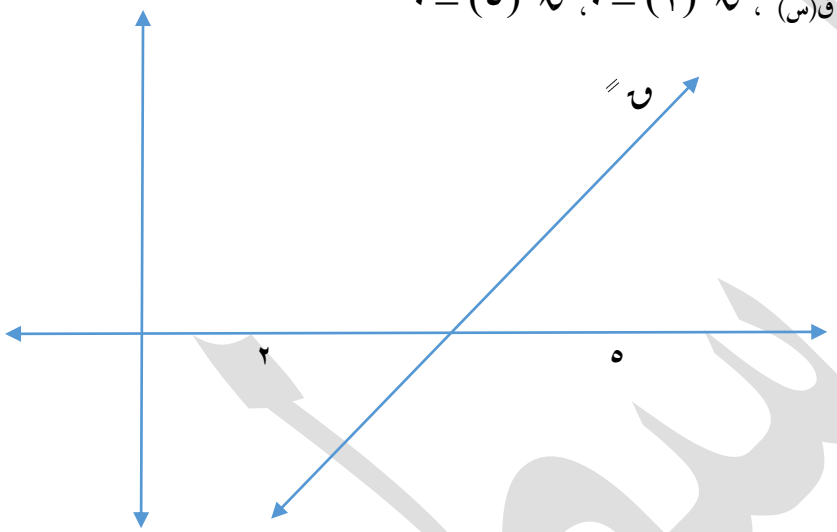


١- حدد الإحداثيات السينية للنقط الحرجة للاقتران ق ٢- حدد الإحداثي السيني لنقطة الانعطاف

٣- حدد فترات تناقص وتزايد ق (س)

٤- حدد فترات تقعر ق(س)

١٦- يمثل الشكل المجاور منحنى المشتقة الثانية لكثير الحدود ق(س) ، $هـ'(٢) = ٠$، $هـ'(٥) = ٠$



جد :

١-القيم العظمى والصغرى للاقتران ق(س)

٢-فترات تقعر ق(س) ونقط الانعطاف (إن وجدت)

٣-فترات تزايد وتناقص ق(س)

١٧- الشكل المجاور يمثل منحنيي المشتقة الأولى والمشتقة الثانية للاقتران ق(س)

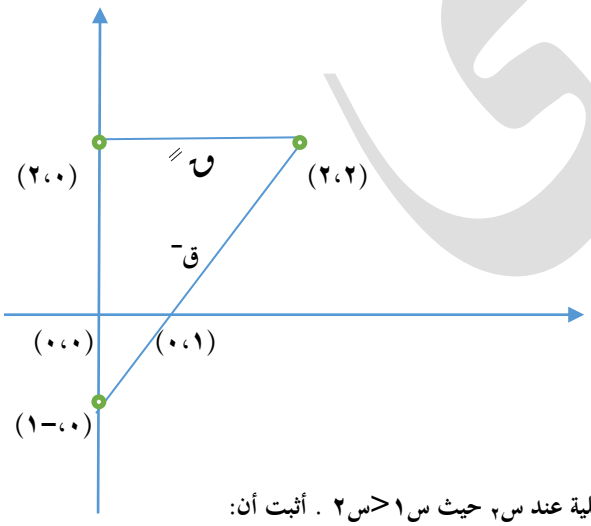
المعرف على [٠، ٢]

جد :

النقط الحرجة للاقتران ق(س)

تزايد وتناقص ق(س)

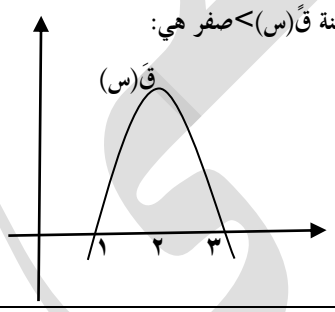
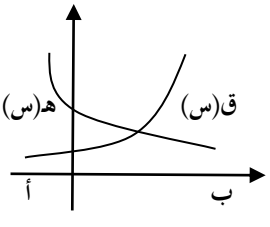
تقعر ق(س) ونقط الانعطاف إن وجدت



١٨) ق(س) كثير الحدود من الدرجة الثالثة له قيمة صغرى محلية عند س١، وقيمة عظمى محلية عند س٢ حيث س١<س٢ . أثبت أن:

أولا: قَ(س) مقعر لأسفل على ح ثانيا : قً(س) متناقص على ح

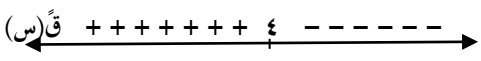
الاقترانات المتزايدة والمتناقصة

٢٠٠٧ إكمال	عين فترات التزايد والتناقص للاقتران $\text{ه}(س) = \|س^{٢} - ٤\|$	متزايد$[٢،\infty[\cup [-٢، ٠]$ متناقص$[٠، ٢] \cup]-\infty،-٢]$
٢٠٠٨	بين أن $\text{ه}(س) = جاس - س$ متناقص على$[٠، \frac{\pi}{٢}]$ ومن ذلك أثبت أن: $جاس \geq س$ في نفس الفترة.	☺
٢٠٠٩	إذا كان الاقتران ق(س) كثير الحدود على$[٢،٦]$ ويقع منحناه في الربع الأول ومتناقص على مجاله وكان الاقتران هـ(س) =٨-س ، بيّن أن الاقتران ك(س)=(ق$\times$ هـ)(س) متناقص في $[٢،٦]$.	☺
٢٠١٠	إذا كان $\text{ه}(س) = جتاس - \text{هـ}(س) + ٣س$ ، س$\in [٠، \frac{\pi}{٢}]$ أثبت أن: الاقتران (ق+هـ)(س) متزايد في تلك الفترة.	☺
٢٠١٢	إذا كان ق(س)،هـ(س) معرفان على ح ، وكان ق(س) متزايدا على ح ، ق(س)$\neq ٠$ بحيث ق(س)$\times$ هـ(س)=٧ فإن إحدى العبارات التالية صحيحة دائما أ) هـ(س) متناقص على ح ب) هـ(س) متزايد على ح جـ) هـ(س) ثابت على ح د) ق(س)>هـ(س) على ح	أ
٢٠١٢	إذا كان ق(س)= جاس + جتاس ، س$\in [٠، \frac{\pi}{٤}]$ ،أثبت أن ق(س) متزايد على مجاله ومن ذلك أثبت أن :جاس + جتاس ≤ ١ في تلك الفترة.	☺
٢٠١٥	الشكل المجاور يبين منحنى قَ(س) فإن مجموعة حل المتباينة قً(س)>صفر هي:  أ) $]٣،١[$ ب) $]٢،\infty[$ جـ) $]-\infty،٢[$ د) $]-\infty،١[\cup]٣،\infty[$	جـ
٢٠١٦	إذا كان $\text{هَ}(س) = (س^{٢} - ١)^{٣} (س - ٢)^{٤}$ فإن $\text{ه}(س)$ يكون متناقصا في أ) $]-\infty،-١]$ ب) $[-١،١]$ جـ) $[١،٢]$ د)$[٢،\infty[$	ب
٢٠١٦	الشكل المجاور يبين منحنيي ق(س) ، هـ(س) المعرفين على$[أ،ب]$  بين أن الاقتران $\frac{\text{هَ}(س)}{\text{هـ}(س)}$ متزايد.	☺

القيم القصوى

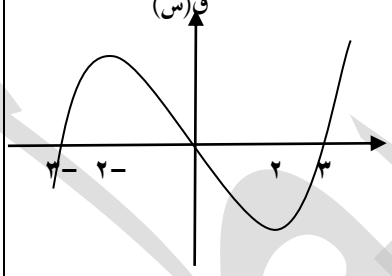
٢٠٠٧	للاقتران $ق(س) = ٥ - ٢س^{٢}$ قيمة عظمى في [٠،٣] عندما س= أ)١ ب) $\frac{٣}{٢}$ جـ) $\frac{٥}{٢}$ د) صفر	د
٢٠٠٧	عيّن فترات التزايد والتناقص للاقتران $ق(س) = \frac{س^{٢}}{س^{٢} + ٢}$ ثم أوجد القيم القصوى له.	متزايد س>٠،متناقص س<٠ قيمة صغرى محلية=٠عندس=٠
٢٠٠٧دراسات	أكبر قيمة يأخذها الاقتران ق(س)=جاس +٣ لكل س∈ ح هي أ)٢ ب) ٣ جـ) -٤ د) ٤	د
٢٠٠٧ دراسات	إذا كان الاقتران ق(س) = $\begin{cases} س^{٢} ، -١ \leq س < ٢ \\ ٤ ، س = ٢ \end{cases}$ عيّن القيمة /القيم القصوى للاقتران على مجاله	صغرى محلية=٠ عند س=٠ عظمى محلية=١ عند س=-١ عظمى محلية=٤ عند س=٢
٢٠٠٨	جد القيم القصوى المحلية للاقتران $ق(س) = س^{٣} - ٣س^{٢} + ٦$ ،س∈ ح	عظمى محلية=٦عندس=٠ صغرى محلية=٢عندس=٢
٢٠٠٨إكمال	إذا كان للاقتران ق(س) قيمة صغرى محلية عند س=جـ فإن إحدى العبارات صحيحة دائما: أ)ق(جـ)<٠ ب) قَ(جـ)=٠ جـ)قً(جـ)>٠ د)(جـ،ق(جـ))نقطةحرجة لِ ق(س)	د
٢٠٠٩	إذا كان الاقتران ق(س) متصلا على[١،٥] ،قَ(س)>٠لكل س∈]١،٥[فإن إحدى العبارات التالية صحيحة دائما : أ)لا يوجد لِ ق(س) نقطة انعطاف في]١،٥[ب)لِ ق(س) قيمة عظمى محلية عند س=٥ جـ)ق(س) مقعر للأعلى على [١،٥] د)لِ ق(س) قيمة عظمى محلية عند س=١	ب
٢٠٠٩	إذا كان ق(س) معرفا على[٠،٣] ،قَ(س)=(س-٢)(س+١)فإن مجموعة جميع قيم س التي يكون عند كل منها نقطة حرجة للاقتران ق(س) هي: أ){٠،-١، ٢، ٣} ب) {٠، ٣} جـ) {-١، ٢} د){٠، ٢، ٣}	د

٢٠٠٩	إذا كان ق(س)=جاس + جتاس ،س $\in$ [٠، π] فجد: ١-مجالات التزايد والتناقص للاقتران ق(س) ٢- الإحداثيات السينية لنقاط القيم العظمى والصغرى للاقتران ق(س)	متزايد على [٠، $\frac{\pi}{٤}$] متناقص على[$\frac{\pi}{٤}$ ، π] س=٠، $\frac{\pi}{٤}$ ، π
٢٠٠٩إكمال	إذا كان ق(س) معرفا على[٠،٤] ، $\text{ه}'(س) = \frac{س+٢}{س+١}$ فإن مجموعة الإحداثيات السينية للنقط الحرجة : أ){-٢،-١، ٠، ٤} ب) {-١، -٢} جـ) {٠، ٤} د){-٢}	جـ
٢٠٠٩إكمال	$\text{ه}(س) = ٢س^{٣} - أس^{٢}$ وكان لمنحنى ق(س) قيمة قصوى عند س=١فإن أ= أ)٢ ب) -٣ جـ) ٣ د) -٢	جـ
٢٠١٠	إذا كان $\text{ه}(س) = \frac{س}{س^{٢}+١}$ فجد : ١- فترات التزايد والتناقص للاقتران ق(س) ٢- القيم الصغرى المحلية للاقتران ق(س)	متزايد على[-١،١] متناقص]-∞،-١] $\cup$ [١،∞[قيمة صغرى= $\frac{-١}{٢}$ عند س=-١
٢٠١١	جد مجالات التزايد والتناقص والقيم القصوى المحلية للاقتران $\text{ه}(س) = \frac{س+١}{س^{٢}+٣}$	متزايد على[-٣،١] متناقص]-∞،-٣] $\cup$ [١،∞[صغرى= $\frac{-١}{٦}$ ، عظمى= $\frac{١}{٢}$
٢٠١٢	ق(س) معرف على ح، $\text{ه}'(س) = \frac{س^{٣}+٢س}{(س+١)^{٢}}$ فإن عدد النقط الحرجة لِ ق(س) أ)٠ ب) ١ جـ) ٢ د) ٣	جـ
٢٠١٣	ق(س)=[٢س-٤]،س $\in$ [٠،٢]فإن جميع قيم س التي يكون عندها نقط حرجة لِ ق(س): أ){٠، ٢ } ب) [٠،٢] جـ)]٠،٢[د) { ٠،١،٢}	ب
٢٠١٣	القيمة الصغرى المطلقة للاقتران $\text{ه}(س) = س^{٣} - ٣س$ في الفترة [-٣، ١]هي: أ)-١٨ ب) -٢ جـ) -٣٦ د) -٣	أ

٢٠١٤	إذا كان $ق(س) = |س - ٢| - ٥$ ، $س \in [-٢، ٢]$، فإن القيمة المطلقة العظمى للاقتران ق(س) في مجاله هي: أ) ١ ب) -١ ج) -٥ د) -٩	ب
٢٠١٤	إذا كان ق(س) متصلا على [١،٣]، قً(س)>صفر لجميع قيم $س \in$]١، ٣[، ق(س) له ثلاث نقاط حرجة فقط في [١،٣] وكان قَ(٢)=صفر فإن أ) ق(٢,٥)>صفر ب) ق(٢,٥)>ق(٢) ج) ق(٢,٥)=ق(٢) د) ق(٢,٥)< ق(٢)	د
٢٠١٦	مجموعة قيم س التي يكون عندها للاقتران $ق(س) = \sqrt{س^٢ - ٢١س}$ نقطا حرجة هي أ){ ٠، ١٢} ب) {٦، ١٢،٠} ج) {٦} د){ ١٢،٦}	أ
٢٠١٦	إذا كان ق(س) كثير الحدود وكان الشكل المجاور يبين إشارة قً(س) وكانت قَ(٣)=صفر  فإن إحدى العبارات التالية صحيحة دائما أ) قً(٣)=صفر ب) قَ(٤)=صفر ج) ق(٣) قيمة صغرى محلية د) ق(٣) قيمة عظمى محلية	ج
٢٠١٦ إكمال	ليكن $ق(س) = \sqrt{٤ - س^٢}$ ، $س \in [-٢، ٢]$ فإن قيمة س التي يكون عندها للاقتران ق(س) قيمة عظمى مطلقة هي : أ) -٢ ب) صفر ج) ١ د) ٢	ب
٢٠١٦ إكمال	إذا كان الاقتران ق(س) = $\begin{cases} س^٢ - س & ، \ ٠ \leq س \leq ١ \\ س - ١ & ، \ ١ < س \leq ٣ \end{cases}$ فإن مجموعة قيم س التي يكون عندها للاقتران ق(س) نقطا حرجة في [٠،٣] هي: أ){ ٠، ١،٣} ب) {٠،٣} ج) {٠،٣، $\frac{١}{٢}$} د){ ٠،١،٣، $\frac{١}{٢}$}	ج

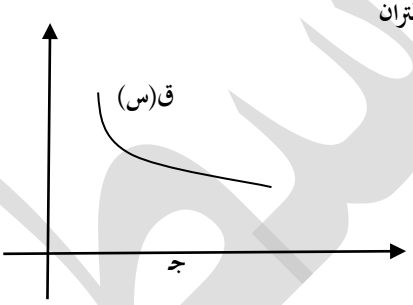
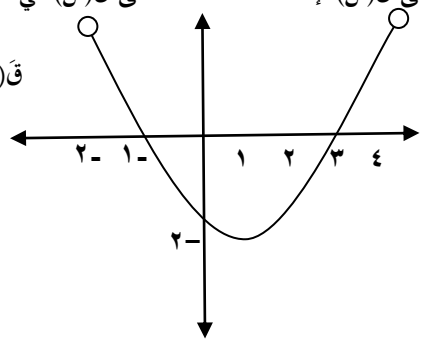
التقعر ونقط الانعطاف

مثال	حدد فترات التقعر لأعلى ولأسفل للاقتران $ق(س) = ٤س^{٣} - ٣س + ٢$ ثم جد نقطة الانعطاف إن وجدت.	مقعر لأعلى $]٠، \infty[$ مقعر لأسفل $]-\infty، ٠[$ (٠،٢) نقطة انعطاف
٢٠٠٧دراسات	يقع الاقتران فوق جميع مماساته عندما يكون الاقتران : أ)مقعرا لأعلى ب) مقعرا لأسفل جـ) متزايدا د) متناقصا	أ
٢٠٠٧دراسات	إذا كان ق(س) كثير حدود من الدرجة الثانية فإن الاقتران ق(س): أ)لا توجد له نقط انعطاف ب) توجد له نقطة انعطاف واحدة جـ) توجد له نقطتا انعطاف د) توجد له نقطة انعطاف واحدة على الأقل	أ
٢٠٠٧ دراسات	إذا كان $ق(س) = س|س|$ فإن: أ) قَ(٠) غير موجودة ب) ق(٠) قيمة عظمى جـ)ق(٠) قيمة صغرى د) (٠،ق(٠))نقطة انعطاف	د
٢٠٠٧إكمال	إذا كانت النقطة(١،٢)نقطة انعطاف لمنحنى الاقتران ق(س)وكانت $ق'(س) = ٤س^{٣} - لس^{٢}$ حيث ل ثابت فإن ل= أ)٤ ب) ٦ جـ) ١٢ د) ٢٤	ب
٢٠٠٨	إذا كان ق(س) معرفا على [-١،١]،قً(س)موجودة في]-١،١[،توجد نقطة انعطاف عندس=٠فإن إحدى العبارات التالية صحيحة دائما أ) ق(س)مقعر لأسفل على[-١،٠]ولأعلى على[١،٠] ب)ق له نقطة حرجة في]-١،١[جـ) قَ له نقطة حرجة في]-١،١[د) قً له نقطة حرجة في]-١،١[	جـ
٢٠٠٨	جد مجالات التقعر لأعلى ولأسفل للاقتران ق(س)= ٣جاس جتاس في $[٠، \pi]$	لأسفل$[٠، \frac{\pi}{٢}]$،لأعلى$[\frac{\pi}{٢}، \pi]$

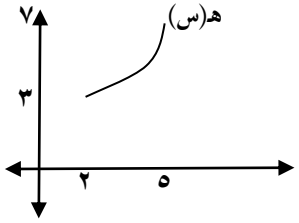
٢٠٠٨ إكمال	إذا كان $\text{ق}(س) = س^{٣} - ٦س^{٢}$ ، جد : ١-مجالات التزايد والتناقص للاقتران ق(س) ٢- مجالات التقعر لأعلى ولأسفل للاقتران ق(س)	متزايد]-∞،٠] ∪ [٤،∞[متناقص[٠،٤] لأسفل]-∞،٢]،لأعلى[٢،∞[
٢٠٠٩	ق(س)معرف على ح، $\text{ق}'(س) = \frac{س}{س^{٢} + ٩}$ ،جد التقعر لأعلى لِ ق(س)	[-٣،٣]
٢٠٠٩إكمال	للاقتران $\text{ق}(س) = ٢س^{٣} - ٢٤س$ ، $س \in ح$ ،جد: ١- مجالات التزايد والتناقص والقيم القصوى ٢- مجالات التقعر للاقتران ق(س)	متناقص[-٢،٢]، متزايد ح-]-٢،٢[لأعلى[٠،∞[، لأسفل]-∞،٠]
٢٠١٠	معتمدا على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى قَ(س)  جد : ١- مجالات تقعر ق(س) لأعلى ولأسفل ٢- الإحداثيات السينية لنقط الانعطاف	لأعلى]-∞،-٢] ∪ [٢،∞[لأسفل [-٢،٢] نقاط الانعطاف عند س=-٢،٢
٢٠١٠إكمال	إذا كان $\text{ق}(س) = \frac{١}{٤}س^{٤} - س^{٣} + ٢$ فجد: ١- القيم القصوى للاقتران ق(س) ٢- مجالات التقعر للاقتران ق(س)	صغرى محلية= $\frac{-١٥}{٤}$ عند س=٣ لأسفل[٠،٢]،لأعلى ح-]-٢،٢[
٢٠١١	إذا كانت قَ(-١)=قَ(٣)=٠وكانت قً(س)>٠ في الفترة]-٢،٢[فإن: أ) ق(-١) عظمى محلية ب) ق(-١) صغرى محلية جـ) ق(٣) عظمى محلية د) ق(٣) صغرى محلية	ب
٢٠١١	إذا كان للاقتران $\text{ق}(س) = أس^{٢} + س^{٣}$ نقطة انعطاف عند س=- ١فإن أ= أ)-٣ ب) $\frac{-٣}{٢}$ جـ) $\frac{٣}{٢}$ د) ٣	د
٢٠١١	إذا كان $\text{ق}(س) = س^{٤} - ١٠س^{٣} + ٣٦س^{٢}$ ، جد : ١- مجالات التقعر للاقتران ق(س) ٢- الإحداثيات السينية لنقط الانعطاف	لأسفل[٢،٣]،لأعلى ح-]٣،٢[س=٣،٢

٢٠١٢	للاقتران $\text{ه}(س) = س^{٢}(س - ٣)$، جد : ١- القيم القصوى المحلية ٢- مجالات التقعر للأعلى وللأسفل	عظمى ق(٠)=٠ ، صغرى ق(٢)=-٤ لأعلى]١،∞[،لأسفل]-∞،١[
٢٠١٢	إذا كان $\text{ه}'(س) = \frac{س}{س^{٢}+١}$ فجد : ١- فترات التزايد والتناقص للاقتران ق(س) ٢- مجالات التقعر للاقتران ق(س) ٣-الإحداثيات السينية لنقاط الانعطاف	متزايد[٠،∞[،متناقص]-∞،٠[لأعلى[-١،١] لأسفل ح-]-١،١[س=-١،١
٢٠١٣	للاقتران $\text{ه}(س) = جا^{٢}س - جتا٢س$ ، $س \in [٠، \frac{\pi}{٢}]$،جد: ١- القيم العظمى والصغرى المحلية ٢- فترات التقعر للاقتران ق(س)	صغرى ق(٠)=-١، عظمى ق($\frac{\pi}{٢}$)=٢، لأعلى[٠، $\frac{\pi}{٤}$] لأسفل[$\frac{\pi}{٤}$ ، $\frac{\pi}{٢}$]

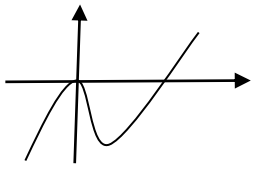
إن لم تستطع قول الحق فلا تصفق للباطل

٢٠١٣	الشكل المجاور يمثل جزءا من منحنى الاقتران كثير الحدود ق(س) فإذا كان م(س)= ق(س) × قَ(س) ، بيّن أن: مَ(جـ)>صفر 	☺
٢٠١٣ إكمال	إذا كان $\text{ه}(س) = \frac{١}{٢}س^{٤} + ٢س^{٣}$ ، $س \in ح$ فجد: ١- القيم الصغرى والعظمى المحلية للاقتران ق(س) ٢- فترات تقعر ق(س) لأعلى ولأسفل	صغرى ق(-٣)=-١٣,٥ لأسفل[-٢،٠]،لأعلى ح-]-٢،٠[
٢٠١٤	إذا كان ق(س) كثير حدود من الدرجة الثالثة ، جد قاعدة الاقتران ق(س) إذا علمت أن (٢، -١) نقطة قيمة صغرى محلية أن (٠،٣) نقطة انعطاف للاقتران ق(س).	$\text{ه}(س) = \frac{١}{٤}س^{٣} - ٣س + ٣$
٢٠١٤	إذا كان الشكل المجاور يمثل منحنى قَ(س) فإن نقطة انعطاف منحنى ق(س) هي: أ) (١، -٢) ب) (١،ق(١)) جـ) (٣،٠) د) (-١، ٠) 	ب

٢٠١٤إكمال ضفة	إذا كان $ق(س) = ٦س^{٢} - س^{٣} - ٩س$ فجد: ١- مجالات التزايد والتناقص للاقتران ق(س) ٢- مجالات التقعر ونقط الانعطاف للاقتران ق(س)	متزايد على[١،٣]،متناقص ح-]١،٣[لأعلى]-∞،٢]،لأسفل[٢،∞[
٢٠١٤ إكمال غزة	إذا كان $ق(س) = ٢ + جا^{٢}س$ ، $س \in [٠، \frac{\pi}{٢}]$،جد مجالات: ١- التزايد والتناقص للاقتران ق(س) ٢- التقعر لأعلى ولأسفل لمنحنى ق(س)	متزايد على[٠، $\frac{\pi}{٢}$] لأعلى[٠، $\frac{\pi}{٤}$]،لأسفل[$\frac{\pi}{٤}$ ، $\frac{\pi}{٢}$]
٢٠١٤إكمال غزة	(١،٠) هي نقطة انعطاف لمنحنى أحد الاقترانات التالية: أ) $ق(س) = س^{٢} + ١$ ب) $ق(س) = ١ - س^{٤}$ جـ) $ق(س) = س^{٤} + ١$ د) $ق(س) = س^{٣} + ١$	د
٢٠١٥	إذا كان لمنحنى الاقتران ق(س)=س^{٣}+م س^{٢}-٩س نقطة انعطاف عند س=-١ فإن م= أ) ٣ ب) ٦ جـ) -٣ د) -٤	أ
٢٠١٥	إذا كان ق(س)=٤س^{٣}-٣س^{٤} ، س$\in$ح : أوجد ١- مجالات التزايد والتناقص للاقتران ق(س) ٢- القيم القصوى المحلية للاقتران ق(س) ٣- مجالات التقعر لأعلى ولأسفل للاقتران ق(س)	متزايد]-∞،١]،متناقص[١،∞[عظمى محلية ق(١)=١ لأسفل]-∞،٠]،[$\frac{٢}{٣}$ ،∞[لأعلى[٠، $\frac{٢}{٣}$]
٢٠١٦	إذا كان $ق(س) = \frac{١}{٢}س + جتاس$ معرفا على[٠، π] فإن منحنى ق(س) يكون مقعرا لأسفل في أ) [٠، π] ب) [٠، $\frac{\pi}{٤}$] جـ) [$\frac{\pi}{٢}$ ، π] د)[٠، $\frac{\pi}{٢}$]	د
٢٠١٦	بالاعتماد على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى ق(س) فإن النقطة التي يكون عندها قَ ، قً موجبين هي: أ) م ب) ن جـ) هـ د) و	جـ

٢٠١٦	إذا كان هـ(س) = ٣س^{٢} −س^{٣} ، س ∈ [−٢، ٥] أوجد : ١− مجالات التزايد والتناقص للاقتران ق(س) ٢− القيم القصوى المحلية للاقتران ق(س) ٣− مجالات التقعر لأعلى ولأسفل للاقتران ق(س)	متزايد[٠،٢] متناقص[−٢،٠] ∪ [٢،٥] عظمى ٤،٢٠ صغرى ٠،−٥٠ مقعر لأعلى[−٢،١] ولأسفل [١،٥]
٢٠١٦إكمال	ليكن هـ(س) = ٣س^{٤} − ٤س^{٣} معرفا على[−١،٢] فاوجد: ١−مجالات التزايد والتناقص للاقتران ق(س) ٢−القيم العظمى والصغرى للاقتران ق(س) ٣−مجالات التقعر للأعلى وللأسفل للاقتران ق(س)	متناقص[−١، ١]،متزايد[١،٢] عظمى:ق(−١)،ق(٢)،صغرى:ق(١)،لأعلى [− ١،٠]،[$\frac{٢}{٣}$ ،٢] ، لأسفل [٠، $\frac{٢}{٣}$]
٢٠١٦إكمال	الشكل المجاور يمثل منحنى هـ(س) في [٢،٥] وكان ق(س) = س هـ(س) . بين أن : ق(س) مقعر لأعلى في [٢،٥]	 ☺

رسم المنحنيات

٢٠١١ إكمال	إذا كان هـ(س) = س^{٣} − ٣س^{٢} ، فجد: ١−القيم القصوى المحلية للاقتران ق(س) ٢−نقطة/نقط الانعطاف ٣−ارسم الشكل العام لمنحنى الاقتران	عظمى ق(٠)=٠،صغرى ق(٢)=−٤ انعطاف(١،−٢) 
٢٠١٠	إذا كان ق(س)=(س+١)^{٢}(س−٢)، فجد: ١−القيم القصوى المحلية للاقتران ق(س) ٢−فترات التقعر لأعلى ولأسفل للاقتران ق(س) ٣−ارسم منحنى الاقتران ق(س)	عظمى محلية=٠ صغرى محلية=−٤ لأسفل]−∞،٠]،لأعلى[٠،∞[

قوانين قد تهمّك في الموضوعين التاليين

الشكل	المحيط	المساحة	الحجم
المثلث	مجموع أطوال أضلاعه	= $\frac{1}{2}$ X القاعدة X الارتفاع = $\frac{1}{2}$ Xحاصل ضرب أي ضلعين Xجيب الزاوية المحصورة	
المربع	٤ل	ل^{2} $\frac{1}{2}$ Xحاصل ضرب القطرين	
المستطيل	٢(س+ص)	الطولXالعرض	
متوازي الأضلاع	٢(س+ص)	القاعدة X الارتفاع حاصل ضرب أي ضلعين متجاورين Xجيب الزاوية المحصورة	
المعين	٤ل	القاعدة X الارتفاع ل^{2}Xجيب إحدى زواياه (ل:طول الضلع) $\frac{1}{2}$ Xحاصل ضرب القطرين	
الدائرة	٢ π نق	π نق^{2}	
القطاع الدائري	ل+٢نق(ل:طول القوس)	$\frac{1}{2}$ ل نق $\frac{1}{2}$ هـ^{د} نق^{2}	
الاسطوانة		٢ π نق ع (الجانبية) ٢ π نق ع+٢ π نق^{2} (الكلية)	π نق^{2}ع
الكرة		٤ π نق^{2}	$\frac{4}{3}$ π نق^{3}
المخروط القائم		π نق ل (الجانبية) ل:طول الراسم π نق ل+ π نق^{2} (الكلية)	$\frac{1}{3}$ π نق^{2}ع
متوازي المستطيلات		٢(س ص+ص ع+س ع)	س ص ع

ورقة عمل (١٥)

تطبيقات على القيم القصوى :

١- قطعة أرض مستطيلة الشكل محيطها ٦٠٠ م. أوجد بعديها لتكون مساحتها أكبر ما يمكن . البعدان {١٥٠ ، ١٥٠}

٢- قطعة أرض مستطيلة الشكل مساحتها ٤٠٠م^{٢} . ما أقل محيط ممكن للقطعة ؟ المحيط =٨٠م

٣- عددان موجبان مجموعهما ٢٠ . جد العددين بحيث أولا: مجموع مربعيهما أصغر ما يمكن العددان (١٠ ، ١٠)

ثانيا: حاصل ضرب أحدهما في مربع الآخر اكبر ما يمكن. العددان ($\frac{٤٠}{٣}$ ، $\frac{٢٠}{٣}$)

٤- جد الإحداثي السيني للنقطة التي عندها ميل المماس لمنحنى $هـ(س) = \frac{١}{٣}س^{٣} - ٣س^{٢} - ٤$ أقل ما يمكن . س=٣

٥- يتحرك جسم في خط مستقيم وفق العلاقة $ف = ن^{٤} - ١٢ن^{٣} + ٨ن^{٢} - ٦ن + ٣٠$ ، حيث ف المسافة بالأمتار ، ن الزمن بالثواني.

جد أقل تسارع لهذا الجسم . التسارع= -٩٢م/ث^{٢}

٦-جد مساحة اكبر مستطيل يمكن رسمه فوق محور السينات بحيث يكون أحد بعديه منطبقا على محور السينات ورأساه الآخران يقعان على منحنى الاقتران $ص = ١٢ - س^{٢}$. المساحة=٣٢ وحدة مربعة

٧- -جد مساحة اكبر مستطيل يمكن رسمه فوق محور السينات بحيث يكون أحد بعديه منطبقا على محور السينات ورأساه الآخران يقعان على منحنى الاقتران $هـ(س) = ٨ - س^{٢} + ٤س$. المساحة=٣٢ وحدة مربعة

٨- أ ب جـ د مستطيل يقع رأساه أ ، ب على منحنى $هـ(س) = ٢س^{٢}$ ، ورأساه جـ ، د على منحنى $هـ(س) = ٣٦ - س^{٢}$. جد بعدي المستطيل لتكون مساحته أكبر ما يمكن . البعدان ٤ ، ٢٤

٩- أ ب جـ د مستطيل يقع رأساه ب ، جـ على محور السينات ، والراس أ في الربع الأول على منحنى $هـ(س) = ١٢ - \frac{س^{٢}}{٤}$ والرأس د في الربع الثاني على منحنى $هـ(س) = ١٢ - س^{٢}$. جد أكبر مساحة ممكنة للمستطيل. المساحة=٤٨ وحدة مربعة

١٠- مثلث متساوي الساقين مرسوم فوق محور السينات بحيث يقع رأسه في نقطة الأصل والرأسان الآخران على منحنى الاقتران $ق(س) = ٢٧ - س^{٢}$.

جد أكبر مساحة لهذا المثلث . المساحة=٥٤ وحدة مربعة

١١- جد اكبر مساحة ممكنة لشبه منحرف يمكن رسمه فوق محور السينات بحيث تكون إحدى قاعدتيه على محور السينات وجميع رؤوسه على منحنى الاقتران $هـ(س) = ٩ - س^{٢}$. المساحة= ٣٢وحدة مربعة

١٢- جد أكبر مساحة لمستطيل يمكن رسمه داخل دائرة نصف قطرها ١٠ سم . المساحة= ٢٠٠وحدة مربعة

١٣- قطاع دائري محيطه ٢٠م ،جد نصف قطر دائرته لتكون مساحة القطاع أكبر ما يمكن . نق=٥

١٤- مثلث متساوي الساقين طول قاعدته ٨سم وارتفاعه ١٠سم ، يراد اقتطاع مستطيل منه بحيث يقع رأسان منه على قاعدة المثلث والرأسان الآخران على ساقي المثلث. جد بعدي المستطيل لتكون مساحته أكبر ما يمكن . (البعدان ٤، ٥)

١٥- جد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٢ ، ٣) بحيث يصنع مع المحورين في الربع الأول مثلثا مساحته أصغر ما يمكن . (٢ص+٣س-١٢=٠)

١٦- جد ارتفاع الأسطوانة الدائرية القائمة ذات أكبر حجم والتي يمكن رسمها داخل مخروط دائري قائم نصف قطره ٥سم،وارتفاعه ٩سم. (الارتفاع=٣سم)

١٧-برهن أن أكبر حجم الاسطوانة دائرية قائمة يمكن رسمها داخل مخروط دائري قائم يساوي $\frac{٤}{٩}$ حجم المخروط .

١٨- جد نصف قطر قاعدة مخروط دائري قائم يمكن رسمه داخل كرة نصف قطرها ٩سم بحيث يكون حجمه أكبر ما يمكن . (نصف القطر= $\sqrt{٧٢}$ سم)

١٩- جد ارتفاع الأسطوانة الدائرية القائمة ذات أكبر حجم التي يمكن رسمها داخل كرة نصف قطرها $٣\sqrt{٣}$ سم. (الارتفاع=٦سم)

٢٠- قطعة خشب على شكل اسطوانة دائرية مساحتها الجانبية ٤٠٠π سم^{٢} . حفر في هذه القطعة نصف كرة طول قطرها مساو لطول قطر قاعدة الاسطوانة . جد طول قطر قاعدة الأسطوانة الذي يجعل حجم الجزء المتبقي من الأسطوانة أكبر ما يمكن . (نق = ١٠ سم)

٢١- مستطيل طول قطره ١٠سم ، إذا دار المستطيل دوره كاملة حول أحد اضلاعه فاحسب اكبر حجم ممكن للاسطوانة الناشئة . الحجم= $\frac{\pi٢٠٠٠}{٣\sqrt{٣}}$ سم^{٣}

٢٢- لوح من الصفيح على شكل مستطيل محيطه ٣٦سم،طوله س سم وعرضه ص سم . إذا حوّل هذا اللوح إلى اسطوانة دائرية قائمة ارتفاعها ص ومحيط قاعدتها س فجد قيمتي س ، ص اللتين تجعلان حجم الأسطوانة أكبر ما يمكن . (س=١٢ ، ص=٦)

٢٣- مثلث قائم الزاوية طول وتره ٩سم وطول كل من ضلعي القائمة س ، ص سم .إذا دار المثلث دورة كاملة حول أحد ضلعي القائمة فما أكبر حجم ممكن للمخروط الناشئ؟ الحجم= $٤٥\sqrt{٣}\pi$ سم^{٣}

٢٤- إذا دارت صفيحة على شكل مثلث متساوي الساقين محيطه ٤٠ سم دورة كاملة حول قاعدتها فما اكبر حجم ممكن للجسم الناشئ؟ الحجم= $\frac{\pi٢٠٠٠}{٣}$

٢٥- قطاع دائري زاويته المركزية بالتقدير الدائري هـ ونصف قطر دائرته نق حوّل إلى مخروط دائري قائم نصف قطر قاعدته س وارتفاعه ع. ما قيمة هـ التي تجعل للمخروط الناتج أكبر حجم ممكن؟ هـ= $\pi٢\sqrt{\frac{٢}{٣}}$

٢٦- ورقة مستطيلة الشكل مساحتها ٥٠ سم^{٢} يراد طباعة إعلان عليها فإذا كان عرض كل من الهامشين في رأس الورقة وأسفلها ١سم ، وفي كل من الجانبين $\frac{١}{٢}$ سم جد بعدي الورقة لتكون المساحة المطبوعة أكبر ما يمكن . س= ٥ ، ص=١٠

٢٧- جد النقطة على منحنى $ق(س) = \sqrt{٨س}$ التي تكون أقرب ما يمكن إلى النقطة (٤، ٢) النقطة (٢ ، ٤)

٢٨- بدأت نقطة مادية الحركة من النقطة (٨ ، ٠) باتجاه نقطة الأصل بسرعة ٤سم/ث ، وفي نفس اللحظة بدأت نقطة أخرى الحركة على محور السينات من النقطة(٠ ، ١٠) على محور الصادات مبتعدة عن نقطة الأصل بسرعة ٢سم/ث. متى يكون البعد بين النقطتين أقل ما يمكن ؟ (ن = ٦، ٠)

٢٩- لدى رجل حقل مستطيل يريد إحاطته بسياج ثم قسمته إلى ثلاثة اقسام متساوية بسياجين يوازيان أحد أضلاعه، فإذا كان لديه ١٠٠٠م من السياج فأوجد أكبر مساحة يمكن إحاطتها بالسياج. المساحة=٣١٢٥٠م^{٢}

٣٠- أ ب جـ د شبه منحرف فيه ثلاثة أضلاع متساوية طول كل منها ٢٠سم .جد طول الضلع الرابع لشبه المنحرف الذي يجعل مساحة شبه المنحرف أكبر ما يمكن. (طول الضلع الرابع=٤٠سم)

٣١- مثلث طولا ضلعين فيه ٥سم ، ٧سم والزاوية المحصورة بينهما قياسها هـ. جد قياس هـ التي تجعل مساحة المثلث أكبر ما يمكن . هـ= $\frac{\pi}{٣}$

٣٢- دائرة قطرها $\overline{أب}$ طوله ٤سم،بدأت النقطة ب الحركة على الدائرة من ب باتجاه أ جد قياس ∢أبجـ التي تجعل مساحة المثلث أكبر ما يمكن. هـ= $\frac{\pi}{٤}$

٣٣-قطاع دائري محيطه ٢٠م،فجد نصف قطر دائرته بحيث تكون مساحة القطاع أكبر ما يمكن. نق=٥سم

٣٤- مستقيم يمر بالنقطة جـ (١ ، ٢) ويقطع محور السينات في النقطة أ (س ، ٠) ومحور الصادات في ب (٠ ، ص) حيث س>٠،ص>٠ . جد أقل مساحة ممكنة للمثلث أ ب و حيث و نقطة الأصل. س=٢،المساحة=٤سم

٣٥- صندوق بلا غطاء على شكل متوازي مستطيلات قاعدته مربعة الشكل حجمه ٣٢سم^{٣} ، جد أبعاد الصندوق لتكون كمية المادة المستخدمة في صنعه أقل ما يمكن . الأبعاد ٤،٤،٢ سم

٣٦- يراد صنع صندوق من الخشب الرقيق بدون غطاء على شكل متوازي مستطيلات قاعدته مربعة الشكل .جد أكبر حجم ممكن للصندوق بحيث تبلغ تكاليف صناعته ١٤٤دينارا علما بأن تكلفة المتر المربع الواحد من الخشب ٣دنانير. الحجم= ٣٢سم^{٣}

٣٧- احسب أكبر حجم لاسطوانة دائرية قائمة مغلقة القاعدتين يمكن صنعها من صفيحة معدنية مساحتها ٦٠٠π سم^{٢}. الحجم= ٢٠٠٠π سم^{٣}

٣٨- جد أقل كمية من المعدن اللازم لصنع مكيال للزيت على شكل أسطوانة دائرية قائمة مغلقة القاعدتين سعتها ٢٠٠٠π سم^{٣} . الكمية=٦٠٠π سم^{٢}

٣٩- خزان ماء اسطواني الشكل سعته ٣٠٠٠π م^{٣} يكلف المتر المربع من القاعدة ٤دنانير ومن الجوانب دينارين ،غطاء الخزان على شكل نصف كرة جوفاء يكلف المتر المربع منها دينار واحد. ما أبعاد الخزان لتكون كلفة صنعه أقل ما يمكن؟ نق=١٠، ع=٣٠

٤٠- يراد إقامة سياج حول قطعة أرض على شكل مستطيل ينتهي بنصفي دائرة ،فإذا كانت تكلفة المتر الواحد من السياج على الجانبين المستقيمين ٤دنانير وعلى الأجزاء المنحنية ٦ دنانير. ما أكبر مساحة ممكنة يمكن إحاطتها بسياج تكلفته ٤٠٠ دينار؟ المساحة= $\frac{١٢٥٠}{\pi}$ م^{٢}

٤١-إذا كانت تكلفة (س) من الوحدات التي ينتجها مصنع شهريا هي (٣س+٦٥٠) وكان سعر الوحدة الواحدة (٣٠-٥ ،١ س) ، فجد عدد الوحدات (س) اللازم إنتاجها ليكون الربح أكبر ما يمكن . س=٩

٤٢- وجد مصنع أن التكلفة الكلية بالدينار للإنتاج الأسبوعي لغرفة نوم عددها س تقدر بالاقتران ك(س) = س^{٣} − ٣س^{٢} − ٨٠س + ٥٠٠

فإذا بيعت كل غرفة نوم بسعر ٢٨٠٠دينار.فما الإنتاج الأسبوعي للمصنع الذي يجعل الربح أكبر ما يمكن ؟ الإنتاج=٣٢غرفة

٤٣- يبيع مصنع (س) من سلعة ما بسعر ٣٠ دينار لكل وحدة ، فإذا كان الربح اليومي يعطى بالعلاقة ٤٠س − س^{٢} − ١٠٠ فجد عدد الوحدات اللازم إنتاجها حتى تكون التكلفة اليومية أقل ما يمكن؟ س=٥

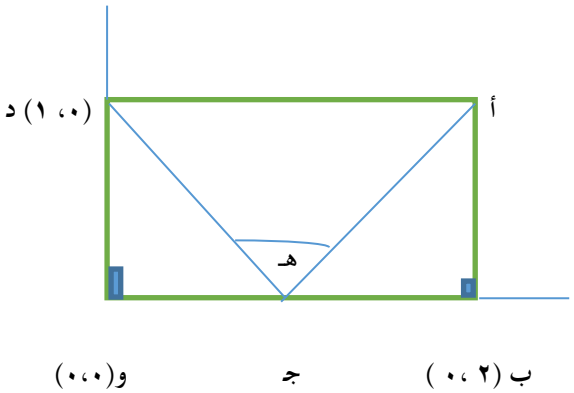
٤٤- اتفقت إحدى المدارس مع شركة سياحية على تسيير رحلة إلى القدس بأن يدفع كل طالب ٦٥دينار إذا كان عدد الطلاب ١٠٠طالب ،وإذا زاد عدد الطلاب عن ١٠٠ فإن الشركة تخفض نصف دينار عن كل مشترك جديد .جد عدد المشتركين ليكون إيراد الشركة أكبر ما يمكن . ١٦٥ طالب

٤٥ - أعد حل السؤال السابق بعد حذف كلمة " جديد " ١١٥ طالب

٤٦- أ ب و د مستطيل (كما هو موضح بالشكل)

ما طول $\overline{جو}$ ليكون قياس هـ أكبر ما يمكن ؟

(طول $\overline{جو}$ = ١)



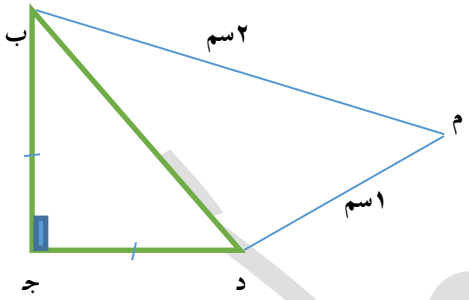
٤٧- في الشكل : جـ د = ب جـ ، زاوية جـ قائمة ، م ب ثابت وطوله =٢سم ، م د يدور في مستوى الشكل وطوله ثابت = ١سم

جد قياس زاوية ب م د

لتكون مساحة الشكل الرباعي

أكبر ما يمكن .

(°١٣٥)

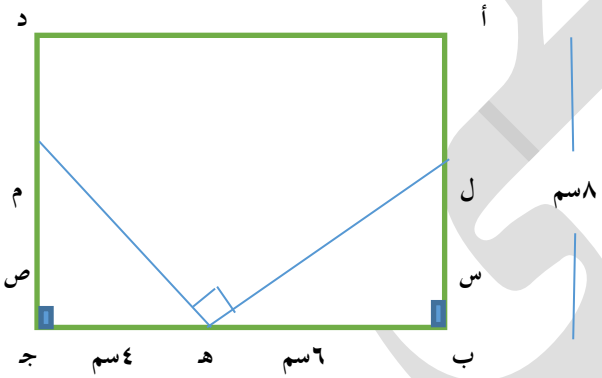


٤٨- أ ب جـ د مستطيل ، أب= ٨سم ، ب جـ= ١٠سم ، هـ ب=٦سم ، ل ب=س ، م جـ=ص ، زاوية ل هـ م قائمة (كما بالشكل)

ما قيمة كل من س، ص

لتكون مساحة الشكل أ ل هـ م د

أكبر ما يمكن ؟



٤٩- أ ب جـ د مستطيل

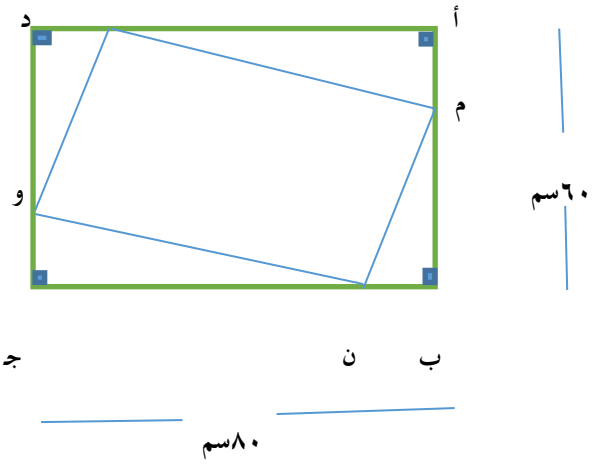
أب=٦٠سم ، ب جـ=٨٠سم

م ن و ل متوازي الأضلاع

ب ن= س (كما بالشكل)

ما قيمة س التي تجعل مساحة متوازي الأضلاع

أكبر ما يمكن علما بأن م ب=٢ ب ن؟



(٥ ، ٢٧سم)

٥٠- أ (٠ ، ٤) ، ب(٠ ، ٩) نقطتان ثابتتان ، جـ نقطة تتحرك على محور السينات الموجب . جد الإحداثي السيني للنقطة جـ الذي يجعل قياس زاوية أ جـ ب أكبر ما يمكن .

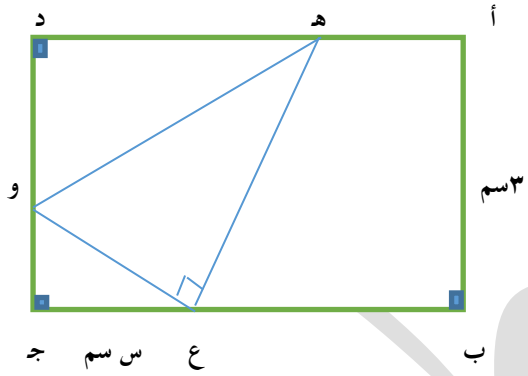
س=٦

٥١- في الشكل: أ ب جـ د مستطيل

أب=٣سم ، طويت الزاوية أدجـ وفق الخط وهـ حتى انطبق الرأس د على المستقيم ب جـ

في النقطة ع . ع جـ = س سم

جد أكبر مساحة ممكنة للمثلث و جـ ع .



($س = \sqrt{٣}$ ، المساحة= $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$)

٥٢- أ ب جـ د مستطيل (كما بالشكل)

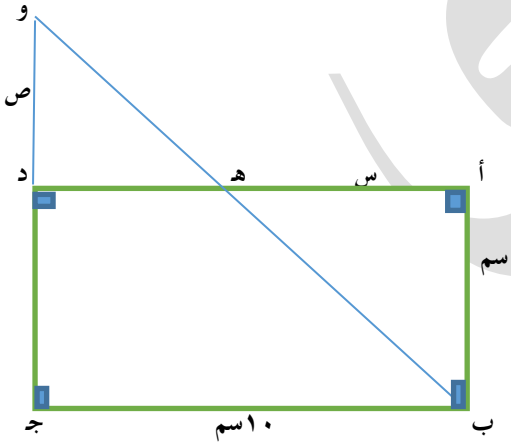
أ ب= ٤سم ، ب جـ= ١٠سم

مد الضلع جـ د على استقامته إلى و

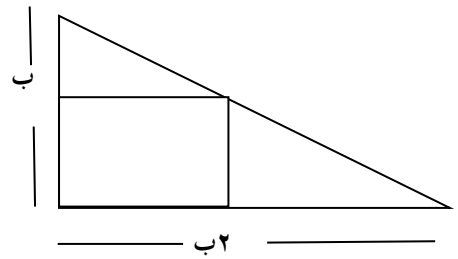
وصل ب و فقطع أد في هـ

أ هـ=س ، دو= ص

جد قيمتي س ، ص ليكون مجموع مساحتي المثلثين د هـ و ، أهـ ب أصغر ما يمكن.



($س = ٥\sqrt{٢}$ ، $ص = ٤(١-\sqrt{٢})$)

السنة	السؤال	الجواب
٢٠٠٧	أوجد مساحة أكبر مستطيل يمكن رسمه داخل دائرة نصف قطرها ١٠ سم.	٢٠٠
٢٠٠٧ دراسات	مثلث متساوي الساقين محيطه ١٨سم ، أوجد أطوال أضلاعه عندما تكون مساحته أكبر ما يمكن.	٦،٦،٦
٢٠٠٧	معتمدا على الشكل المجاور ، جد بعدي المستطيل ذي المساحة الكبرى الذي يمكن رسمه داخا مثلث قائم الزاوية بحيث ينطبق أحد أضلاع هذا المستطيل على أحد ضلعي القائمة في المثلث ورأساه الآخران على ضلعي المثلث الآخرين. 	ب ، $\frac{1}{2}$ ب
٢٠٠٧ أكمال	جد بعدي المستطيل الواقع في الربع الأول والذي مساحته أكبر ما يمكن بحيث تنطبق قاعدته الكبرى على محور السينات ويقع رأساه الآخران على منحنى $ق(س) = ٤س - س^{٢} + ٢$	٤،$\sqrt{٢}$ ٢
٢٠٠٩	جد أقصر مسافة بين النقطة (٠،٦) ومنحنى $س^{٢} - ص^{٢} = ١٦$	$\sqrt{٣٤}$
٢٠٠٩إكمال	جد ميل المستقيم الذي يمر بالنقطة (٢،٤) ويصنع مع المحورين الإحداثيين في الربع الأول مثلثا مساحته أصغر ما يمكن .	-٢
٢٠١٠	يراد صنع وعاء معدني على هيئة أسطوانة دائرية قائمة مفتوحة من أعلى سعتها ٨١ π سم^{٣} ، فإذا كانت تكلفة المواد المستعملة ٣دنانير لكل سم^{٢} من قاعدة الأسطوانة ، ودينارا واحدا لكل سم^{٢} من سطحها الجانبي . جد أبعاد الأسطوانة التي تجعل تكاليف صنعها أقل ما يمكن.	نق=٣ ع=٩
٢٠١١	جد معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطة (٣،٤) ويصنع مع المحورين الإحداثيين في الربع الأول مثلثا مساحته أصغر ما يمكن.	ص= -$\frac{٤}{٣}$ س+٨
٢٠١١إكمال	ثُني سلك طوله ١٢سم ليكوّن مثلثا متساوي الساقين، جد أطوال أضلاع هذا المثلث لتكون مساحته أكبر ما يمكن.	٤،٤،٤
٢٠١٢	جد الإحداثي السيني للنقطة الواقعة على منحنى العلاقة: $ص^{٢} - ٢ص + ٤س - ٢٣ = ٠$ وتكون أقرب ما يمكن للنقطة (١،٣) .	س=٥
٢٠١٣	جد مساحة أكبر مستطيل يمكن رسمه بحيث يقع رأسان من رؤوسه على محور السينات والرأسان الآخران على منحنى الاقتران $ق(س) = ٨ - \frac{٢}{٣} س^{٢}$	$\frac{٦٤}{٣}$
٢٠١٤	أوجد باستخدام التفاضل أكبر حجم للشكل الناتج من دوران مستطيل محيطه (٦٠) سم دورة كاملة حول أحدأضلاعه	٤٠٠٠ π سم^{٣}

٢٠١٤إكمال غزة	جد أقرب نقطة على منحنى ص = $\sqrt{س - ١}$ إلى النقطة أ(٢،صفر)	$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$
٢٠١٥	أوجد أقرب مسافة بين النقطة (٠،٢) ومنحنى العلاقة ص^{٢}–س^{٢}=٨	$\sqrt{١٠}$
٢٠١٥ إكمال	سلك طوله ٥٦سم ، قُسم إلى جزأين صُنع من أحدهما مربع ومن الآخر مستطيل طوله يساوي ثلاثة أمثال عرضه ما أبعاد كل من المربع والمستطيل ليكون مجموع مساحتيهما أقل ما يمكن	المربع ٦سم المستطيل ١٢،٤ سم
٢٠١٦	أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب ، إذا كان طول أ ب = ٢ سم ، طول ب جـ = ٣ سم ، د نقطة على ب جـ ، أوجد طول د جـ بحيث يكون مجموع طول (د جـ) ومثلي طول (أ د) أقل ما يمكن .	$\frac{٢}{\sqrt{٣}} - ٣$

ورقة عمل (١٦)

المعدلات الزمنية المرتبطة:

١- تتحرك نقطة بمعدل ٤م/د نحو عمود ارتفاعه ٢٠م. ما معدل تغير المسافة بينها وبين قمة العمود عندما تكون على بعد ١٥م من قاعدة العمود؟ (-٢,٤م/د)

٢- سلم طوله ٥م يرتكز بطرفه العلوي على حائط عمودي وبطرفه السفلي على أرض أفقية، إذا انزلق الطرف السفلي مبتعدا عن الحائط بمعدل ٢م/ث فجد معدل انخفاض الطرف العلوي عندما يكون الطرف السفلي على بعد ٣م من الحائط. (-١,٥م/ث)

٣- سلم طوله (ل) متر يرتكز على حائط رأسي ، انزلق الطرف الملامس للأرض مبتعدا عن الحائط بمعدل $\frac{١}{٥}$ م/ث . احسب سرعة هبوط أعلى السلم عندما يكون السلم مائلا بزاوية مقدارها ٦٠°. ($\frac{-١}{٣\sqrt{٥}}$ م/ث)

٤- تطير طائرة بسرعة ثابتة في خط مستقيم على ارتفاع ٨كم بحيث تمر فوق نقطة ثابتة على سطح الأرض ، فإذا كان معدل تغير بعد الطائرة عن النقطة ٤كم/د في اللحظة التي كانت تبعد فيها الطائرة عن النقطة ١٠كم فاحسب سرعة الطائرة. ($\frac{٢٠}{٣}$ كم /د)

٥- سلم طوله ٣٦٠سم يرتكز بطرفه العلوي على حائط رأسي وبطرفه السفلي على أرض أفقية. تحرك الطرف السفلي مبتعدا عن الحائط بمعدل ٩٠سم/ث فجد سرعة تغير الزاوية بين السلم والأرض عندما يكون الطرف السفلي للسلم على بعد ١٨٠سم من الحائط. ($\frac{-١}{٣\sqrt{٢}}$ سم/ث)

٦- يرتفع بالون رأسيا للأعلى بمعدل ثابت ٤٢م/د. رصد مشاهد البالون من نقطة على الأرض تبعد ١٥٠م عن موقع البالون على الأرض، جد معدل تغير زاوية ارتفاع البالون عندما يكون البالون على ارتفاع ١٥٠م من سطح الأرض. ($\frac{٧}{٥٠}$)

٧- من قمة برج يرتفع عن سطح بحيرة بمقدار ١٢م رصد زورق يسير بسرعة ١,٥ م/ث مبتعدا عن قاعدة البرج. جد معدل تغير زاوية انخفاض الزورق عندما يكون الزورق على بعد ٩م من قاعدة البرج. ($\frac{-٢}{٢٥}$)

٨- يقف رجل على رصيف حوض للسفن ويسحب حبلا -أحد طرفيه متصل بقارب - بمعدل ٠,٣ م/ث وطرفه الآخر يمر على بكرة ترتفع ٠,٩م عن خط سير القارب ، جد معدل تغير الزاوية المحصورة بين الحبل وخط سير القارب في اللحظة التي يكون فيها القارب على بعد١,٢ م من الرصيف. ($\frac{٣}{٢٠}$)

٩- مثلث قائم الزاوية طولا ضلعي القائمة ٦،٨وكان الأول يتناقص بمعدل ١سم/ث والثاني يتزايد بمعدل ٢سم/ث .جد معدل تغير مساحته بعد ثانيتين. (١)

١٠-أقلعت طائرة من أحد المطارات في الساعة السابعة متجهة نحو الشرق بسرعة ٤٠٠كم/س ، وبعد ساعة من إقلاعها أقلعت طائرة أخرى من نفس المطار متجهة نحو الجنوب بسرعة ٦٠٠كم/س. ما معدل تغير المسافة بين الطائرتين بعد ساعة واحدة من إقلاع الثانية؟ (٦٨٠كم/س)

١١- بدأت نقطة الحركة من نقطة الأصل في التجاه الموجب لمحور الصادات بسرعة ٣سم/ث. ما معدل تغير البعد بينها وبين النقطة (٢ ، ٥) بعد مرور ثانيتين من بدء الحركة؟ ($\frac{٣}{٥\sqrt{}}$)

١٢- بدأت النقطة أ الحركة من النقطة (٢ ، ٠) باتجاه محور السينات الموجب بسرعة ٣سم/د وفي نفس اللحظة بدأت النقطة ب الحركة من النقطة (٠ ، ٧) باتجاه نقطة الأصل بسرعة ٢سم/د . جد معدل تغير البعد بين النقطتين بعد مرور دقيقتين من بدء الحركة. ($\frac{١٨}{٧٣\sqrt{}}$)

١٣- مستطيل طوله ٨سم وعرضه ٣سم ، يتناقص طوله بمعدل ١سم/ث ويتزايد عرضه بمعدل ٢سم/ث . ما معدل تغير مساحته بعد ثانيتين؟ (٥ سم^{٢}/ث)

١٤- مصعدان كهربائيان أ ، ب مستقران في الطابق الأرضي من عمارة والمسافة الأفقية بينهما ٨م ، بدأ المصعد أ يرتفع بمعدل ٢م/ث وبعد ثانيتين بدأ ب يرتفع بمعدل ١م/ث .جد معدل تغير المسافة بين المصعدين بعد ثانيتين من بدء حركة ب. (٠,٦ م/ث)

١٥- دائرتان متحدان في المركز نصفا قطريهما ٣سم ، ١٨سم بدأ نصف قطر الصغرى يتزايد بمعدل٢سم /د وفي نفس اللحظة بدأ نصف قطر الكبرى يتناقص بمعدل ٣سم/د. ما معدل تغير المساحة المحصورة بين الدائرتين في اللحظة التي تنعدم فيها هذه المساحة؟ (-٩٠π)

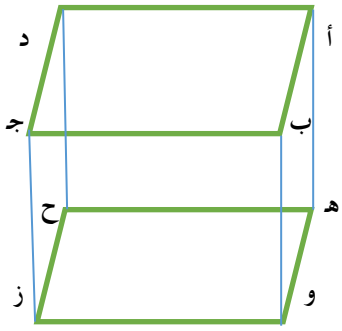
١٦-بدأت النقطتان ب، جـ الحركة معا من نقطة الأصل بحيث تتحرك ب على محور السينات الموجب بسرعة ٤سم/ث وتتحرك جـ في الربع الأول على منحنى $ص = س^{٢}$ بحيث يبقى دائما ب جـ=وجـ . ما معدل تغير مساحة المثلث و ب جـ بعد ثانيتين من بدء الحركة ؟ (٩٦)

١٧- الشكل المقابل مكعب طول ضلعه ٢٠سم

انطلقت نملتان في نفس اللحظة الأولى من أ (على أد)نحو د بسرعة ٤سم/ث

والثانية من هـ (على هـ و) نحو و بسرعة ٣سم/ث

ما معدل تباعد النملتين بعد ٤ث من بدء الحركة؟ $(\frac{٥}{٢\sqrt{}})$



١٨- مثلث طولا ضلعين فيه ١سم،٢سم يتغير طول الضلع الثالث بحيث معدل تزايد الزاوية بين الضلعين المعلومين $\frac{١}{٥}$ ^{ق}/ث . ما معدل تغير طول الضلع الثالث عندما يكون طوله $٣\sqrt{}$ سم؟ $(\frac{١}{٥})$

١٩- خطان حديديان الزاوية بينهما ٦٠° ويلتقيان في النقطة م يسير القطار أ على أحدهما مقتربا من م بسرعة ٨٠كم/س ويسير ب على الخط الآخر مقتربا من م بسرعة ٥٠كم/س (عند الساعة التاسعة صباحا). إذا كان أ،ب يبعدان عن م مسافة ٢١٠كم،١٨٠كم على الترتيب فما معدل تغير المسافة بين القطارين عند الساعة الحادية عشرة صباحا؟ $(-\frac{٧١٠}{١٤})$

٢٠- يرتفع صاروخ عموديا عن سطح الأرض بمعدل ٢كم/ث وعندما وصل إلى ارتفاع ١٠كم عن سطح الأرض انحرف عن مساره واصبح يصنع مع الأفقي زاوية قياسها ٣٠° محافظا على سرعته . ما معدل تغير المسافة بين الصاروخ ونقطة انطلاقه عندما يكون على بعد $١٠\sqrt{٣}$ كم من نقطة انطلاقه؟ $(\sqrt{٣})$

٢١- تحركت نقطتان الأولى أ من (١٠ ، ٠)بسرعة ٤سم/ث باتجاه نقطة الأصل والثانية ب (في نفس اللحظة) من نقطة الأصل على المستقيم ص=س=٠ في الربع الأول بسرعة $٢\sqrt{}$ سم/ث. ما معدل تغير المسافة بين النقطتين بعد ثانيتين من بدء الحركة؟ (١)

٢٢- أ ب وتر في دائرة نصف قطرها ٢سم يزداد طوله بمعدل ١سم/ث. ما معدل تغير مساحة القطاع الدائري الذي يقع فيه الوتر في اللحظة التي يكون فيها قياس زاوية القطاع ٦٠° ؟ $(\frac{٢}{٣\sqrt{}})$

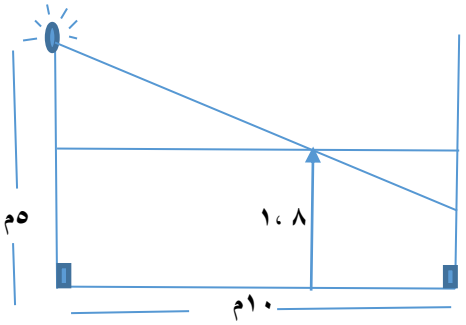
٢٣- بدأت نقطة الحركة على دائرة مركزها نقطة الأصل من النقطة (أ ، ٠) بعكس اتجاه عقارب الساعة بحيث يزداد طول قوس الدائرة الذي ترسمه بمعدل٨سم/ث جد معدل ابتعاد النقطة المتحركة عن النقطة(أ ، ٠) عندما يقابل القوس الذي ترسمه زاوية مركزية قياسها ٦٠° . $(٤\sqrt{٣})$

٢٤- تتحرك نقطة على منحنى $ق(س) = \sqrt{س^{٢}+١}$ بحيث يتزايد الإحداثي السيني لها بمعدل٢وحدة/ث ، ما معدل تغير المسافة بين هذه النقطة والنقطة (١ ، ٠) عندما يكون الإحداثي السيني للنقطة المتحركة يساوي ٢ ؟ $(\sqrt{٦})$

٢٥–تتحرك نقطة على منحنى العلاقة $ص^{٢} = س^{٣}$ بحيث يتزايد بعدها عن نقطة الأصل بمعدل ٤ وحدات/ث . ما معدل التغير في الإحداثي السيني للنقطة عند النقطة $(٢، ٢\sqrt{٢})$. $(\sqrt{٣})$

٢٦– رجل طوله ١٨٠سم يقف أمام مصباح يرتفع عن سطح أرض مستوية بمقدار ٥٤٠سم ، أخذ الرجل يبتعد عن المصباح بمعدل ٣م/ث .
ما معدل ازدياد طول ظل الرجل؟ (١٥٠سم/ث)

٢٧– يقع مصباح على بعد ١٠ متر من حائط رأسي على ارتفاع ٥متر عن أرض أفقية



سار رجل طوله ١٨٠سم على الأرض بسرعة $\frac{١}{٢}$ م/ث مبتعدا عن المصباح

ما سرعة تحرك ظل رأس الرجل على الحائط

عندما يكون الرجل على بعد ١,٥ م من الحائط؟ $(\frac{٦٤}{٢٨٩})$

٢٨– بدأت نقطة الحركة من نقطة الأصل على منحنى $ص = س^{٢}$ في الربع الأول .جد معدل تغير مساحة المثلث المكون من المماس للمنحنى ومحور السينات والعمود النازل من نقطة التماس على محور السينات إذا كانت $\frac{د س}{ن د} = ٤$ عندما س=٢ . (١٢)

٢٩– تتمدد كرة معدنية بالحرارة فيزداد حجمها ح بمعدل $\frac{٥}{٢}$ سم^{٣}/ث . جد معدل تغير مساحة سطح الكرة عند نق=١٠ . $(\frac{١}{٢})$

٣٠–كرة حديدية قطرها ٨سم مغطاة بطبقة من الجليد فإذا كان الجليد يذوب بمعدل ١٠ سم^{٣}/د فأوجد:

أولا: معدل تغير سمك الجليد عندما يكون سمكه=٢سم. $(\frac{-٥}{٧٢\pi})$ ثانيا: معدل تغير مساحة السطح الخارجي عند نفس اللحظة . $(\frac{-١٠}{٣})$

٣١– مكعب يتمدد بالحرارة فيزداد طول ضلعه بمعدل $\frac{١}{١٠٠}$ سم/د فإذا كان معدل تغير حجمه عند لحظة معينة ١٢ سم^{٣}/د فجد:

أولا: طول ضلع المكعب عند هذه اللحظة . (٢٠) ثانيا: معدل تغير المساحة الكلية للمكعب عند نفس اللحظة. $(\frac{١٢}{٥})$

٣٢– متوازي مستطيلات قاعدته مربعة ، يتزايد طول ضلع القاعدة بمعدل $\frac{٩}{١٠}$ سم/د ويتناقص ارتفاعه بمعدل ١سم/د في اللحظة التي يكون فيها طول ضلع القاعدة=٨سم والارتفاع=٥سم ،جد أولا: معدل تغير حجم متوازي المستطيلات (٨) ثانيا: معدل تغير المساحة الكلية له (١٤,٨)

٣٣–حوض سباحة على شكل متوازي مستطيلات بعدا قاعدته ٢٠ ، ٨م وعمقه ٢م ، ضُخّ فيه الماء بمعدل ١٠٥ م^{٣}/د .جد سرعة ارتفاع الماء. $(\frac{١}{٣٢})$

٣٤– مستطيل مساحته ٥٠ سم^{٢} إذا ازداد طولا ضلعين متوازيين فيه بمعدل ٢سم/ث وتناقص طولا الضلعين الآخرين بحيث تظل مساحته ثابته فجد بعدي المستطيل في اللحظة التي يتوقف فيها المحيط عن التناقص. $(\sqrt{٥٠}، \sqrt{٥٠})$

٣٥– مثلث يتناقص ارتفاعه بمعدل $\frac{٣}{١٠}$ سم/د بينما تتزايد قاعدته بمعدل $\frac{٧}{١٠}$ سم/د . جد معدل تغير مساحة المثلث عندما يكون طول القاعدة=٨سم
ويكون الارتفاع ٤سم . $(\frac{١}{٥})$

٣٦– مثلث متساوي الساقين طول كل من ضلعيه المتساويين ٦سم فإذا كانت سرعة تغير الزاوية (هـ) المحصورة بين الضلعين المتساويين ٢°/د فجد سرعة تغير مساحة المثلث عندما تصبح هـ= $\frac{\pi}{٦}$. $(\frac{\pi\sqrt{٣}}{١٠})$

٣٧- مثلث متساوي الأضلاع تتزايد مساحته بمعدل ٦ سم^{٢}/ث ، جد معدل التغير في طول ضلع المثلث عندما يكون طول الضلع ٤سم. ($\sqrt{٣}$)

٣٨- خزان ماء اسطواني قطر قاعدته ٣٠م يخرج منه الماء بمعدل٢ م^{٣}/د ، جد سرعة انخفاض الماء في الخزان. ($\frac{-٢}{\pi ٢٢٥}$)

٣٩- تتحرك النقطة أ(س ، ص) في الربع الأول على منحنى $ص = \sqrt{س^{٢} + ٥}$ بحيث يزداد الإحداثي السيني لها بمعدل ٦سم/ث أسقط العمودان أب،أجـ على محوري السينات والصادات الموجبين على الترتيب .جد معدل تغير مساحة المستطيل أ ب و جـ عند س=٢. (٢٦)

٤٠-أب قطر في دائرة طوله٢٠سم ،تتحرك النقطة جـ على القوس أب بحيث يتزايد قياس الزاوية جـ ب أ بمعدل ٠,٣^{د}/دقيقة. احسب معدل تغير مساحة المثلث أ ب جـ عندما يكون قياس الزاوية جـ ب أ يساوي $\frac{\pi}{٣}$. (-٣٠)

٤١- مربع تتمدد أضلاعه بمعدل ٤سم/ث ، رسمت دائرة داخل المربع وأخذت تتمدد مع المربع بحيث تبقى تمس أضلاعه .جد معدل التغير في مساحة المنطقة المحصورة بين المربع والدائرة عندما يكون طول ضلع المربع ٢٠سم. ($-١٦٠ \pi ٤$)

٤٢- تتمدد أضلاع مثلث متساوي الأضلاع بمعدل ٢سم/ث رسمت دائرة داخل المثلث وأخذت تتمدد مع المثلث (بحيث تبقى تمس أضلاعه) جد معدل تغير مساحة المنطقة المحصورة بين المثلث والدائرة عندما يكون طول ضلع المثلث ١٢سم. ($-\sqrt{٣} ١٢ \pi ٤$)

٤٣- ماسورة جوفاء من الحديد على شكل أسطوانة يتغير نصفا قطريها الداخلي والخارجي بحيث يبقى حجم الحديد ثابتا.جد معدل تغير نصف قطرها الخارجي عندما يكون نصف القطر الخارجي٨سم بينما الداخلي ٦سم ويتزايد بمعدل $\frac{١}{٢}$ سم/ث. ($\frac{٣}{٨}$)

٤٤- قطعة من الثلج على شكل أسطوانة دائرية قائمة تذوب بمعدل ٤ سم^{٣}/ث بحيث تبقى النسبة بين نصف قطرها إلى ارتفاعها ٢:٣ . ما معدل تغير المساحة الجانبية لها عندما يكون نصف القطر ٦سم. ($-\frac{٨}{٩}$)

٤٥- خزان على شكل مخروط قائم نصف قطر قاعدته ٢م وارتفاعه ٤م ورأسه لأسفل ، يصب فيه الماء بمعدل ٢م^{٣}/د .جد :

أولا: معدل ارتفاع الماء في الخزان عندما عمق الماء ١م . ($\frac{٨}{\pi}$) ثانيا: معدل تغير مساحة سطح الماء في تلك اللحظة (٤)

٤٦- وعاء على شكل مخروط دائري قائم نصف قطره س سم ، وارتفاعه ٣س سم ، إذا كان الوعاء فارغا ورأسه لأسفل وصب فيه الماء بمعدل ٤π سم^{٣}/ث فجد معدل تغير ارتفاع السائل بعد مرور ١٦ث على بدء صب الماء. ($\frac{١}{٤}$)

٤٧- مخروط قطر قاعدته ١٢سم وارتفاعه ١٢سم ورأسه للأسفل إذا صب فيه سائل بمعدل ١٦ سم^{٣}/ث وفي نفس اللحظة يخرج منه السائل بمعدل ٧ سم^{٣}/ث

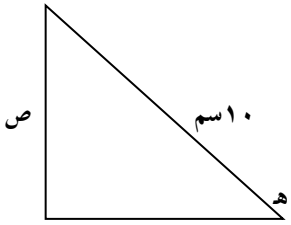
جد سرعة ارتفاع السائل عندما يكون عمق السائل ٦سم. ($\frac{١}{\pi}$)

٤٨- مخروط قائم طول نصف قطر قاعدته ١٠سم وارتفاعه ٣٠سم ، أغلق جزء منه بواسطة قرص دائري رقيق نصف قطره ٣سم يوازي قاعدته ويمنع وصول أي مادة للجزء السفلي من المخروط . صب فيه سائل بمعدل ٥π سم^{٣}/ث ،جد سرعة ارتفاع السائل عندما يكون حجم السائل في الإناء ٣٧π سم^{٣} . ($\frac{٥}{١٦}$)

٤٩- يضخ غاز داخل بالون كروي بمعدل ١٢٥ سم^{٣}/ث .جد معدل زيادة مساحة سطح البالون عندما يكون طول قطره ١٠سم. (٥٠)

٥٠ – جسر للمشاة يرتفع عن مستوى الشارع بمقدار ٦م يسير عليه رجل بمعدل ٢٤م/دقيقة وفي نفس اللحظة مر من تحته رجل آخر يسير بسرعة ٨م/دقيقة . جد معدل تغير المسافة بين الرجلين بعد دقيقة واحدة من بدء الحركة. $\frac{٦٤٠}{١٣}$

السنة	السؤال	الجواب
٢٠٠٨	من نقطة تبعد (١٠) أمتار عن النقطة (أ)،بدأ أحمد السير على أرض أفقية في خط مستقيم مبتعدا عن (أ) بمعدل ٢م/ث وفي نفس اللحظة انطلق جسم من (أ) لأعلى بسرعة (٥)م/ث ،جد معدل تغير المسافة بين أحمد والجسم عندما يكون بُعد أحمد عن (أ) يساوي (١٢)مترا.	$\frac{٤٩}{١٣}$
٢٠٠٩	من على بعد ٢م إلى يسار قاعدة عمود انطلقت النقطة ب نحو اليسار بسرعة ١م/ث وفي نفس اللحظة ومن قمة العمود ابتدأت النقطة أ الحركة نحو اليمين بسرعة ٢م/ث فإذا كان ارتفاع العمود ١٢م،جد معدل تغير البعد بين النقطتين أ،ب عندما تكون النسبة بين بعد أ عن قمة العمود إلى بعد ب عن قاعدة العمود كنسبة ٢:٣ .	$\frac{١٥}{١٣}$
٢٠١٠	تتحرك نقطة على منحنى الاقتران $ق(س) = س^{٣}$ بحيث $\frac{د س}{د ن}$ =٢سم/ث، ما المعدل الزمني لتغير ميل المماس للاقتران ق(س) عندما س=١ ؟ أ) ٣ ب) ٦ ج) ١٢ د) ٢٤	جـ
٢٠١٠	تتحرك النقطة (س،ص) على منحنى الاقتران $ق(س) = س^{٣} + س$ بحيث أن $\frac{د ص}{د ن}$ =٢سم/ث ،جد معدل تغير مساحة المثلث الذي رؤوسه نقطة الأصل والنقطة(٠،٦) والنقطة المتحركة (س،ص) في اللحظة التي يكون فيها الإحداثي السيني للنقطة المتحركة يساوي ٣.	$\frac{٣}{١٤}$
٢٠١٠إكمال	تطير طائرة على ارتفاع ٣كم بسرعة ثابتة مقدارها ٠,٢٤ كم/ث في خط مستقيم يمر بالنقطة الواقعة رأسيا فوق شخص يرصدها من سطح الأرض ، جد معدل تغير زاوية ارتفاع الطائرة عندما تكون على بعد ٦كم من الشخص.	٠,٠٢د/ث
٢٠١١إكمال	بدأت بقعة زيت دائرية الشكل نصف قطرها ٣سم ومركزها نقطة التقاء قطري قطعة قماش مربعة الشكل قطرها ٢٠سم بالانتشار محافظة على شكلها بحيث يتزايد نصف قطرها بمعدل ثابت ٢سم/ث، وفي نفس اللحظة ومن أحد رؤوس قطعة القماش بدأت بقعة زيت أخرى نصف قطرها ٤سم بالانتشار محافظة على شكلها بمعدل ثابت ١سم/ث .جد معدل تغير مساحة المنطقة الخالية من الزيت في قطعة القماش لحظة بدء التقاء محيطي البقعتين.	π ٢٢,٥-
٢٠١١إكمال	تتحرك نقطة على منحنى الاقتران $ق(س) = س^{٣}$ بحيث $\frac{د س}{د ن}$ =٢سم/ث، ما المعدل الزمني لتغير ميل المماس للاقتران ق(س) عندما س=١ ؟ أ) ٣ ب) ٦ ج) ٢٤ د) ١٢	د
٢٠١٢	إذا كانت أ(٢،٢)،ب(٢،٧) وكانت النقطة ن(س،ص) تتحرك على منحنى الاقتران $ن(س) = س^{٢} + ٢$، س>٠ بحيث يتغير إحداثيها السيني بمعدل ٣سم/ث، احسب معدل التغير في مساحة المثلث أ ب ن عندما يكون طول العمود النازل من ن على أ ب يساوي ٤ وحدات.	٣٠
٢٠١٢إكمال	تتحرك النقطة أ(س،ص) على منحنى الاقتران $ق(س) = \sqrt{س^{٢} + ٤}$ بحيث يتزايد إحداثيها السيني بمعدل سم/ث ، جد معدل التغير في بعد النقطة أ عن النقطة (٠،١) عندما س=-١ .	٢-

٢٠١٣	نقطتان ماديتان أ ، ب تقعان على خط مستقيم أفقي والمسافة بينهما ٤٠ م ، وتقع أ على يمين ب ، إذا تحركت أ نحو اليسار باتجاه ب بسرعة ٤م/ث ، وبعد ٥ث تحركت ب عموديا لأعلى بسرعة ٢م/ث . جد معدل تغير البعد بين النقطتين عندما تكون ب قد قطعت مسافة ٦م.	−٢م/ث
٢٠١٣إكمال	يبيّن الشكل المجاور مثلثا قائم الزاوية طول وتره ١٠سم . أخذت الزاوية هـ بالتناقص بمعدل ٠,١ ^{c}/ث ، بحيث يبقى المثلث قائم الزاوية. ما معدل تغير مساحة المثلث عندما هـ= $\frac{\pi}{٦}$ ؟ 	−٥
٢٠١٤	يصب الماء في مخروط دائري قائم بمعد ٢٤٣دسم ^{٣}/د ، فإذا كان رأس المخروط إلى أعلى وارتفاعه ٣٠ دسم ونصف قطر قاعدته ١٥دسم ،فما سرعة ارتفاع الماء في المخروط عندما يكون ارتفاع الماء فيه ١٨دسم؟	$\frac{٢٧}{\pi ٤}$
٢٠١٤إكمال ضفة	سلم طوله ٥ أمتار متكئ على حائط عمودي ،بدأ أسفل السلم ينزلق على أرض أفقية مبتعدا عن الحائط بمعدل ١,٥م/ث أوجد معدل انزلاق الطرف العلوي للسلم في اللحظة التي يبعد أسفله عن الحائط ٣ أمتار.	$\frac{٩-}{٨}$
٢٠١٥	دائرة قطرها أب طوله ٢٠سم ، جـ نقطة تتحرك على القوس أب بحيث تزداد الزاوية أ ب جـ بمعدل ٠,٣ راديان/دقيقة ما معدل تغير مساحة المثلث أ ب جـ في اللحظة التي يكون فيها قياس الزاوية أ ب جـ يساوي $\frac{\pi}{٣}$ ؟	−٣٠
٢٠١٦	مخروط دائري قائم مملوء بالماء رأسه إلى أسفل ونصف قطر قاعدته ١٥ سم وارتفاعه ٣٠ سم ، فإذا بدأ الماء بالنزول من المخروط بمعدل ١٨سم^{٣}/د ، فما معدل التغير في مساحة السطح العلوي للماء عندما يكون ارتفاع الماء في المخروط ٦ سم ؟	−٦ سم^{٢}/د

مع تمنياتنا بالتفوق . . والله ولي التوفيق