رياضيات المستوى الثالث

الفرع العلمي

الوحدة الأولى

النهايات والاتصال

اعداد المعلمة ميسون الحسين

٠٧٩٨٩٥٩٠٧١

اقتران القيمة المطلقة

ملاحظات عامة على اقتران القيمة المطلقة

* |س| = { س ، س ≥ ٠ ؛ -س ، س < ٠

* |س| ≥ صفر دائماً.

* |-س| = |س|

* |س| = أ ⟺ س = أ
س = -أ حيث أ > ٠.

* |س| ≤ أ ⟺
-أ ≤ س ≤ أ حيث أ > ٠.

* |س| ≥ أ ⟺
س ≥ أ أو س ≤ -أ حيث أ > ٠.

* √(س²) = |س| ، س ∈ ح.

* |س ص| = |س| . |ص|

* |س/ص| = |س| / |ص| ، ص ≠ ٠.

* |س - ص| = |ص - س|

* |س|² = س².

مثال: اذا كان ق(س) = |٢س - ٥| أكتب الاقتران ق(س) دون استخدام القيمة المطلقة.

المطلوب: (اعادة تعريف الاقتران)

نضع ٢س - ٥ = ٠ ← ٢س = ٥ ← س = ٢,٥

٥ - ٢س   ٢س - ٥
− | +
٢,٥

* في الاقتران الخطي: الاشارة على يمين صفر الاقتران نفس اشارة س وعلى اليسار عكس اشارة س.

|٢س - ٥| = { ٢س - ٥ ، س ≥ ٢,٥ ؛ ٥ - ٢س ، س < ٢,٥ .

مثال٢: اعيد تعريف الاقتران

ق(س) = |٩س - س²|

٩س - س² = ٠ ← س(٩ - س) = ٠

س = ٠ ، س = ٩

س² - ٩س   ٩س - س²   س² - ٩س
−   +   −
٠   ٩

اشارة الاقتران التربيعي الذي له جذران مختلفان ، بين الجذرين عكس اشارة س² وباقي نفس اشارة س²

ق(س) = { س² - ٩س ، س ≤ ٠ ؛ ٩س - س² ، ٠ < س < ٩ ؛ س² - ٩س ، س ≥ ٩

اقتران صحيح س (الاقتران الدرجي)

$[\text{س}]$ يسمى اقتران أكبر عدد صحيح أقل من أو يساوي س.

$[2.5] = 2$

$[-2.5] = -3$

$[6] = 6$

$[-4] = -4$

$[1.99] = 1$.

* $[\text{س} + \text{ن}] = [\text{س}] + \text{ن}$ ، حيث ن عدد صحيح

* $[\text{ن} - \text{س}] \neq \text{ن} - [\text{س}]$.

* إذا كانت م عدداً صحيحاً فإن

$[\text{م}^{+}] = \text{م}$ ، $[\text{م}^{-}] = \text{م} - 1$.

مثال: $[5^{+}] = 5$ ، $[5^{-}] = 4$

* طول درجة الاقتران $\text{ق}(\text{س}) = [\text{م س}]$

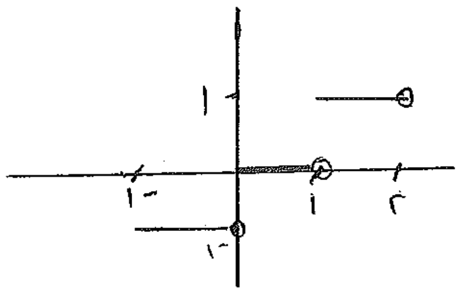
هي $\frac{1}{|\text{معامل س}|} = \frac{1}{\text{م}}$.

مثال: طول الدرجة للاقتران $[3\text{س}]$

هي $\frac{1}{3}$.

إعادة تعريف $\text{ق}(\text{س}) = [\text{س}]$.

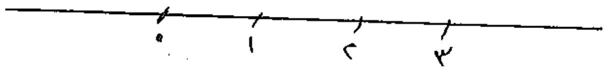
$$[\text{س}] = \begin{cases} -1 & ، -1 \le \text{س} < 0 \\ 0 & ، 0 \le \text{س} < 1 \\ 1 & ، 1 \le \text{س} < 2 \end{cases}$$



مثال: $\text{ق}(\text{س}) = 2\text{س}^2 - [1 - \text{س}]$ أكتب الاقتران دون استخدام أقواس أكبر عدد صحيح في الفترة $[0 ، 3]$.

نعيد تعريف الاقتران $[1 - \text{س}]$.

طول الدرجة $= \frac{1}{|-1|} = 1$.



$$[1 - \text{س}] = \begin{cases} -2 & ، 2 < \text{س} \le 3 \\ -1 & ، 1 < \text{س} \le 2 \\ 0 & ، 0 < \text{س} \le 1 \\ 1 & ، \text{س} = \text{صفر} \end{cases}$$

$$2\text{س}^2 - [1 - \text{س}] = \begin{cases} 2\text{س}^2 + 2 & ، 2 < \text{س} \le 3 \\ 2\text{س}^2 + 1 & ، 1 < \text{س} \le 2 \\ 2\text{س}^2 & ، 0 < \text{س} \le 1. \\ 2\text{س}^2 - 1 & ، \text{س} = \text{صفر} \end{cases}$$

يرمز للنهاية بالرمز (نهـــا)

ويمكن حساب النهاية بعدة طرق منها

١- حساب النهاية باستخدام الجدول

٢- حساب النهاية باستخدام الرسم .

٣- حساب النهاية بالتعويض .

* الجدول التالي يبين سلوك الاقتران ق(س) حول العدد (٣)

س	٣,١	٣,٠١	٣	٢,٩٩	٢,٩
ق(س)	٩,٢	٩,٠٢		٨,٩٨	٨,٨

حيث ق(س) = ٢س + ٣ .

نلاحظ من الجدول ما يلي :

١) كلما اقتربت س من العدد (٣) من جهة اليمين فإن ق(س) يقترب من العدد (٩)

وبالرموز نهـــا ق(س) = ٩ .
س←٣+

٢) كلما اقتربت س من العدد (٣) من جهة اليسار فإن ق(س) يقترب من العدد (٩)

وبالرموز نهـــا ق(س) = ٩ .
س←٣-

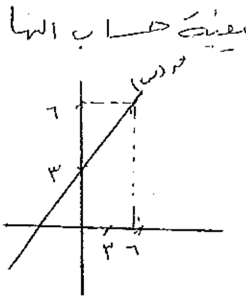
لذلك نقول ان النهاية موجودة وتساوي (٩) . وبالرموز

نهـــا ق(س) = ٩ .
س←٣

نتيجة : نقول ان النهاية غير موجودة عندما تكون النهاية من اليمين ≠ النهاية من اليسار

* كيفية حساب النهاية من الرسم .

①



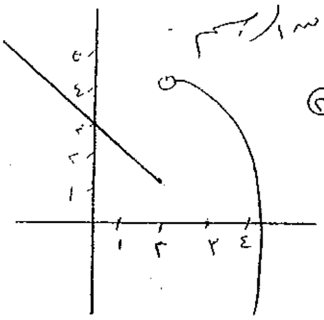
ق(٦) =

نهـا ق(س) =
س←٦+

نهـا ق(س) =
س←٦-

نهـا ق(س) =
س←٦

②



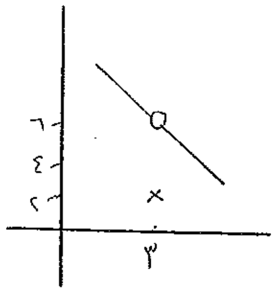
ق(٢) =

نهـا ق(س) =
س←٢+

نهـا ق(س) =
س←٢-

نهـا ق(س) =
س←٢

③

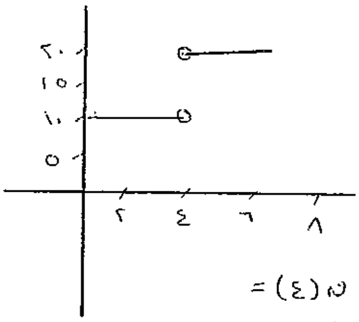


ق(٣) =

نهـا ق(س) =
س←٣+

نهـا ق(س) =
س←٣-

نهـا ق(س) =
س←٣



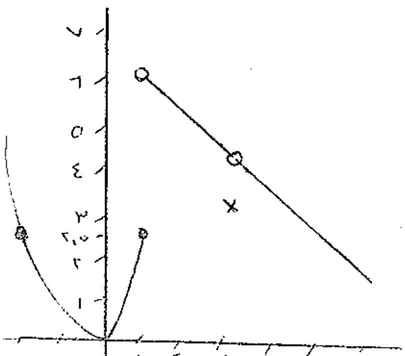
ق(٤) =

نهـا ق(س) =
س←٤+

نهـا ق(س) =
س←٤-

نهـا ق(س) =
س←٤

سؤال: الشكل المجاور يمثل منحنى الاقتران ق(س) جد ما يلي



① نهـا ق(س) =
س←١+

② نهـا ق(س) =
س←١-

③ نهـا ق(س) =
س←١

④ ق(١) =

⑤ ق(٣) =

⑥ نهـا ق(س) =
س←٣

نهاية اقتران عند نقطة

سؤال ١:

بالاعتماد على الجدول الآتي الذي يبين قيم ق(س) عندما س ← ٣ نأجب عن الأسئلة التالية:

س	٣,١	٣,٠١	٣,٠٠١		٢,٩٩	٢,٩٨	٢,٩
ق(س)	٤,١	٤,٠١	٤,٠٠١		٠,٩٩	٠,٩٨	٠,٩

١) $\lim_{س \leftarrow ٣^{+}}$ ق(س) =

٢) $\lim_{س \leftarrow ٣^{-}}$ ق(س) =

٣) $\lim_{س \leftarrow ٣}$ ق(س) =

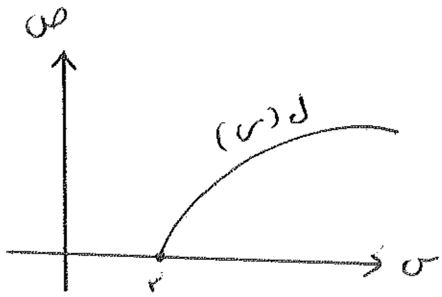
سؤال ٣: اذا كان ل(س) = $\sqrt{س - ٣}$

جد إن امكن كلاً مما يلي:

١) $\lim_{س \leftarrow ٣^{+}}$ ل(س) =

٢) $\lim_{س \leftarrow ٣^{-}}$ ل(س) =

٣) $\lim_{س \leftarrow ٣}$ ل(س) =



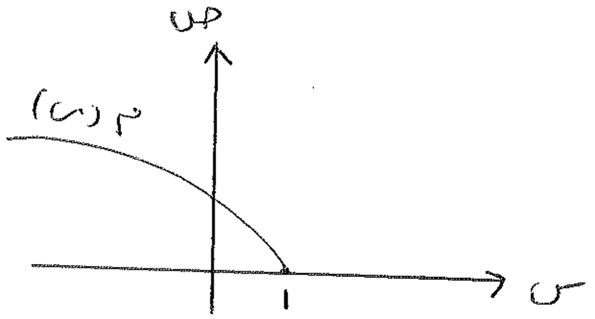
سؤال ٢: اذا كان م(س) = $\sqrt{١ - س}$

اعتمد على منحنى م في الشكل لايجاد كل مما يأتي

١) $\lim_{س \leftarrow ١^{+}}$ م(س) =

٢) $\lim_{س \leftarrow ١^{-}}$ م(س) =

٣) $\lim_{س \leftarrow ١}$ م(س) =



* اذا كان ق(س) = [illegible]
ارسم منحنى الاقتران ق ثم من الرسم جد $\lim_{س \to ٣}$ ق(س)

تذكر: الاقتران الأسي هو اقتران حقيقي يمكن التعبير عن قاعدته على الصورة
ق(س) = $م^{س}$ ، حيث م > صفر ، م ≠ ١

* من الأمثلة السابقة نلاحظ انه لتحديد نهاية اقتران عندما تؤول س الى عدد حقيقي م فانه من الضروري ان يكون الاقتران معرفاً حول العدد م (أي معرفاً في فترة مفتوحة قصيرة الطول تحتوي العدد م) وليس من الضروري ان يكون معرفاً عند العدد م نفسه)

ولتحديد نهاية اقتران عندما تؤول س الى عدد حقيقي م من اليسار فإنه من الضروري ان يكون الاقتران معرفاً حول (م) من اليسار (اي على فترة مفتوحة قصيرة الطول على شكل (هـ، م))

ولتحديد نهاية اقتران عندما تؤول س الى عدد حقيقي مثل م من اليمين فإنه من الضروري ان يكون الاقتران معرفاً حول (م) من اليمين (اي على فترة مفتوحة قصيرة الطول على الشكل (م، هـ))

* الجذور الزوجية غير معرفة اذا كان ناتج ما داخل الجذر سالب

خطوات حساب نهاية الجذور الزوجية

[١] اذا كان ناتج ما بداخل الجذر موجب فان النهاية موجودة
[٢] اذا كان ناتج ما بداخل الجذر سالب فان النهاية غير موجودة
[٣] اذا كان ناتج ما بداخل الجذر صفر ندرس اشارة ما داخل الجذر بحيث
④ اذا كان الناتج من اليمين واليسار موجب فان النهاية موجودة
⑤ اذا كان الناتج من اليمين واليسار مختلفين في الإشارة فان النهاية غير موجودة.

مثال: جد قيمة كل من النهايات الاتية اذا كانت موجودة

١) $\lim_{س \to ٤^{+}} \sqrt{س - ٤}$ = صفر لأن $\lim_{س \to ٤}$ (س − ٤) = صفر ،
س − ٤ > صفر عندما س > ٤.

٢) $\lim_{س \to ٤^{-}} \sqrt{س - ٤}$ = غير موجودة لان
س − ٤ < صفر عندما س < ٤ والجذر التربيعي غير معرف للأعداد السالبة

٣) $\lim_{س \to ٤} \sqrt{س - ٤}$ غير موجودة لأن النهاية من اليسار غير موجودة

٤) $\lim_{س \to ٢} \sqrt{(س - ٢)^{٢}}$ = صفر لان $\lim_{س \to ٢}$ $(س - ٢)^{٢}$ = صفر
ولان $(س - ٢)^{٢}$ > صفر عندما تكون س > ٢ او س < ٢

أسئلة إضافية :

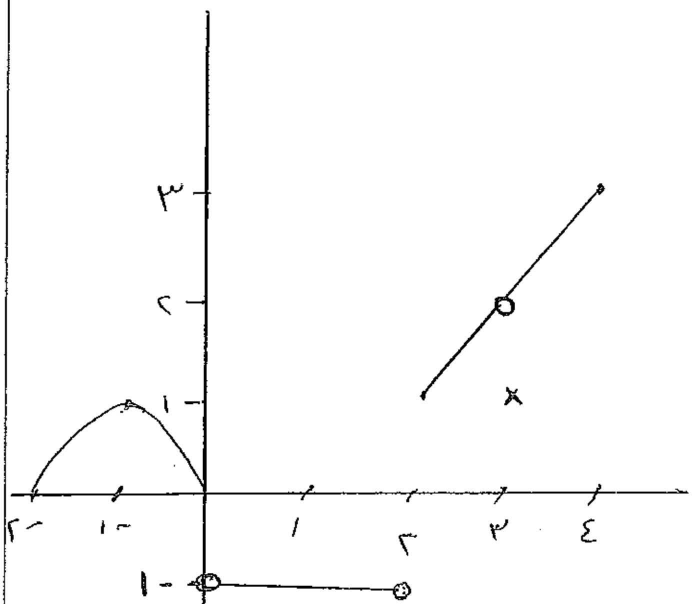
س١ اذا كان ق(س) = $\begin{cases} س^{2} & ، س < ٢ \\ ١ & ، س = ٢ \\ ٣ & ، س > ٢ \end{cases}$

ابحث في $\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}}$ ق(س) من خلال الجدول والرسم.

س٢ اذا كان ق(س) = |٢س - ١| ارسم منحنى ق(س) ثم اوجد $\underset{س \to ٠,٥}{\text{نهـا}}$ ق(س)

س٣ اذا كان ق(س) = [س] ارسم منحنى ق(س) ثم اوجد $\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}}$ ق(س) في الفترة [٠ ، ٣].

س٤ اعتمد الشكل التالي والذي يمثل اقتران ق(س) للاجابة عن الاسئلة التالية



١) $\underset{س \to ٠^{+}}{\text{نهـا}}$ ق(س)

٢) $\underset{س \to ٠^{-}}{\text{نهـا}}$ ق(س)

٣) $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}}$ ق(س)

٤) $\underset{س \to ٢^{+}}{\text{نهـا}}$ ق(س)

٥) $\underset{س \to ٢^{-}}{\text{نهـا}}$ ق(س)

٦) $\underset{س \to ٣^{+}}{\text{نهـا}}$ ق(س)

٧) $\underset{س \to ٣^{-}}{\text{نهـا}}$ ق(س)

٨) ق(٣)

٩) $\underset{س \to -١}{\text{نهـا}}$ ق(س)

حلول الأسئلة الإضافية

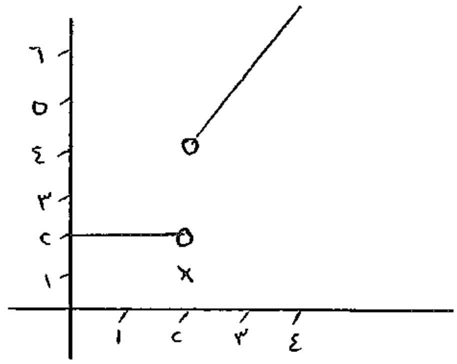
س١ نكوِّن الجدول التالي وندرس سلوك الاقتران حول س = ٢ .

س	٢,١	٢,٠١	٢	١,٩٩	١,٩
ق(س)	٤,٢	٤,٠٢	١	٢	٢

من الجدول نلاحظ أن :

نها ق(س) = ٤ (س ← ٢+) ، نها ق(س) = ٢ (س ← ٢−)

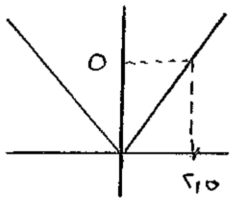
لذلك فإن نها ق(س) (س ← ٢) غير موجودة كما هو واضح من الشكل .



س٢ نعيد تعريف اقتران القيمة المطلقة

|س| = ٠ ← س = ٠

ق(س) = { ٢س ، س ≥ ٠ ؛ −٢س ، س < ٠



−٢س | ٢س (٠)

نها ق(س) = ٢ × ٢,٥ = ٥ (س ← ٢,٥+)

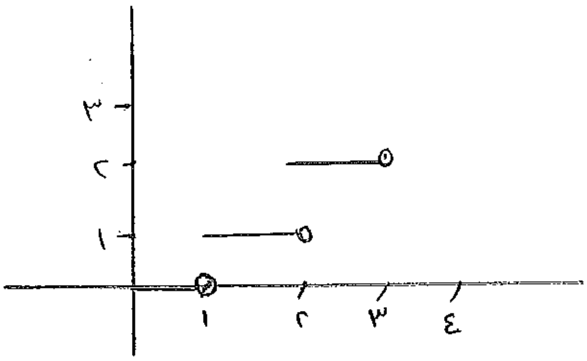
نها ق(س) = ٢ × ٢,٥ = ٥ (س ← ٢,٥−)

∴ نها ق(س) = ٥ (س ← ٢,٥) .

س٣ نعيد تعريف الاقتران ق(س) كما يلي

طول الدرجة = ١ / |معامل س| = ١/١ = ١

ق(س) = { ٠ ، ٠ ≤ س < ١ ؛ ١ ، ١ ≤ س < ٢ ؛ ٢ ، ٢ ≤ س < ٣ ؛ ٣ ، ٣ ≤ س < ٤



نها ق(س) = ٢ (س ← ٢+) ، نها ق(س) = ١ (س ← ٢−)

∴ نها ق(س) (س ← ٢) غير موجودة .

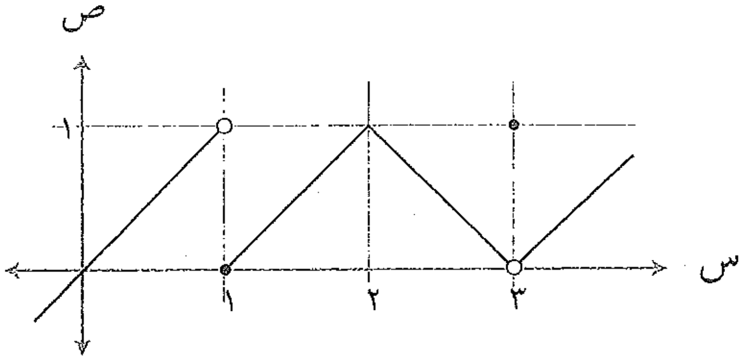
س٤
١) نها ق(س) = −١ (س ← ٠+)
٢) نها ق(س) = ٠ (س ← ٠−)
٣) نها ق(س) = غير موجودة (س ← ٠)
٤) نها ق(س) = ١ (س ← ٢+)
٥) نها ق(س) = −١ (س ← ٢−)
٦) نها ق(س) = ٢ (س ← ٣+)
٧) نها ق(س) = ٢ (س ← ٣−)
٨) ق(٣) = ١
٩) نها ق(س) = ١ (س ← −١)

تمارين ومسائل

١) اعتمادًا على الشكل (١–٨) الذي يمثل منحنى الاقتران ق، جد كلاً من:

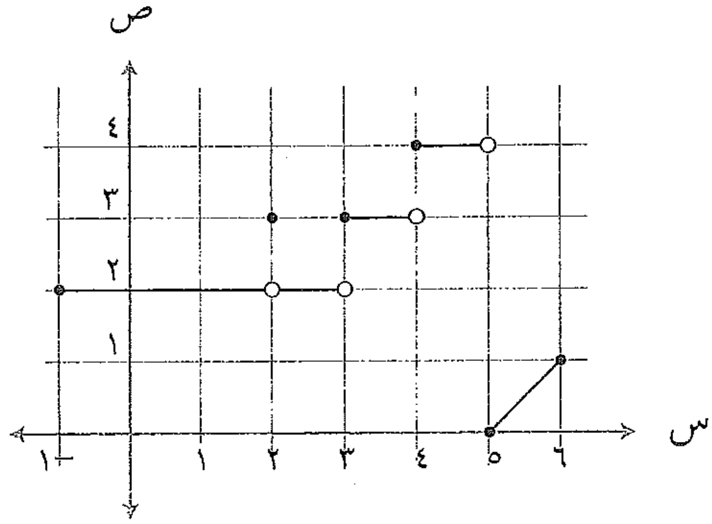
أ) $\lim_{س \to ١}$ ق(س)   ب) $\lim_{س \to ٢}$ ق(س)

جـ) $\lim_{س \to ٣}$ ق(س)   د) $\lim_{س \to ٠}$ ق(س)



الشكل (١–٨)

٢) اعتمادًا على الشكل (١–٩) الذي يمثل منحنى الاقتران ق المعرف على الفترة [–١، ٦]، جد كلاً من:



الشكل (١–٩)

أ) مجموعة قيم أ حيث $\lim_{س \to أ}$ ق(س) غير موجودة.

ب) مجموعة قيم أ حيث $\lim_{س \to أ}$ ق(س) = ٣ .

٣) ارسم شكلًا تقريبيًا للمنحنى الذي يمثل كلاً من الاقترانات الآتية، ثم احسب نهاية كل منها عندما تقترب س من العدد المذكور إزاء كل منها:

أ) ع(س) = { ٧ − س ، س ≤ −٢ ؛ س^{٢} + ٥ ، س > −٢ } ، س ← −٢

ب) ت(س) = |س + ٤| ، س ← −٤

٤) ارسم شكلًا تقريبيًا للمنحنى الذي يمثل كلاً من الاقترانات الآتية، ثم احسب نهاية كل منها عندما تقترب س من العدد المذكور إزاء كل منها:

أ) ق(س) = ٢^{س} ، س ← −١

ب) ف(س) = { |س| / س ، س ≠ ٠ ؛ ٥ ، س = ٠ } ، س ← ٠

جـ) هـ(س) = [س] ، س ∈ [٠،٢] ، س ← ١

٥) إذا كان ق(س) = $\sqrt{\text{س} - ١}$ ، فارسم المنحنى الذي يمثل منحنى الاقتران ق ، ثم جد:

أ) نهـــا ق(س) عندما س ← ٢$^{+}$

ب) نهـــا ق(س) عندما س ← ٢$^{-}$

جـ) نهـــا ق(س) عندما س ← ٢

د) نهـــا ق(س) عندما س ← ١

حلول تمارين ومسائل في الكتاب صفحة ٣٠

س١ أ) نهـا ه(س) غير موجودة لأن
س ← ١

نهـا ه(س) = ٠ ، و نهـا ه(س) = ١.
س ← ١+ ، س ← ١−

ب) نهـا ه(س) = ١
س ← ٢

جـ) نهـا ه(س) = صفر
س ← ٣

د) نهـا ه(س) = صفر
س ← ٠

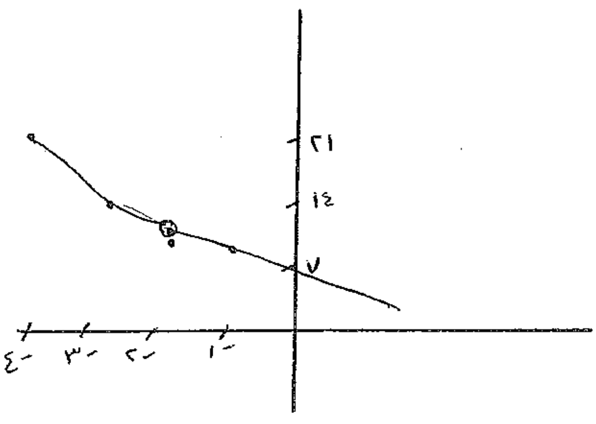
س٢ أ) م = {−١ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦}.

ب) م = (٣ ، ٤) فترة مفتوحة.

س٣ أ) ع(س) = { ٧ − س ، س ≥ −٢ ؛ س² + ٥ ، س < −٢ }

س	−٢	−١	٠
ص	٩	٨	٧

س	−٢	−٣	−٤
ص	٩	١٤	٢١



نهـا ع(س) = ٩
س ← −٢+

نهـا ع(س) = ٩
س ← −٢−

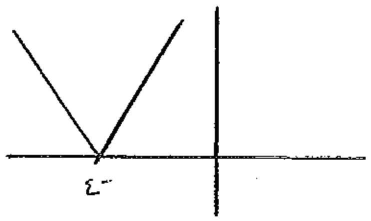
نهـا ع(س) = ٩.
س ← −٢

ب) ق(س) = |س + ٤|

س + ٤ = ٠ ← س = −٤

− س − ٤ (−) | س + ٤ (+)
−٤

|س + ٤| = { س + ٤ ، س ≥ −٤ ؛ −س − ٤ ، س < −٤ }



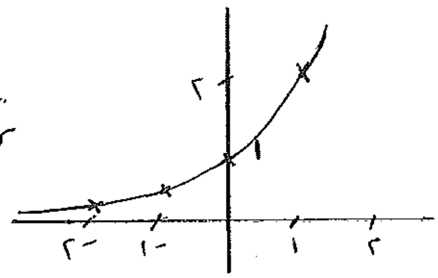
نهـا ق(س) = صفر
س ← −٤+

نهـا ق(س) = صفر
س ← −٤−

⇐ نهـا ق(س) = صفر.
س ← −٤

س٤ أ) ه(س) = ٢^س

س	٠	١	−١	٢	−٢
ص	١	٢	$\frac{1}{2}$	٤	$\frac{1}{4}$



نهـا ه(س) = $\frac{1}{2}$.
س ← −١

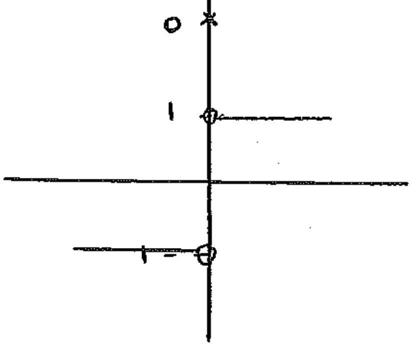
تابع حل التمارين

س٤ ب) |س| = { س ، س ≥ ٠ ؛ −س ، س < ٠ .

ق(س) = { |س| / س ، س ≠ ٠ ؛ ٥ ، س = ٠ .

ق(س) = { س / س ، س > ٠ ؛ −س / س ، س < ٠ ؛ ٥ ، س = ٠ .

ق(س) = { ١ ، س > ٠ ؛ −١ ، س < ٠ ؛ ٥ ، س = ٠ .

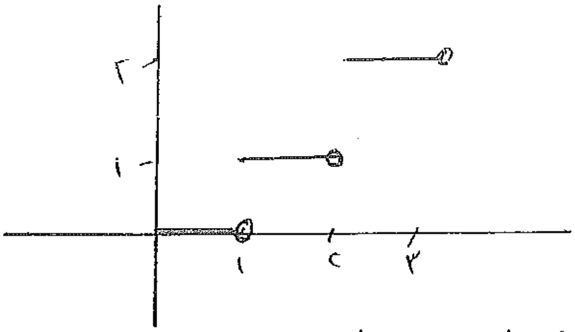


نهـا (س ← ٠⁺) ق(س) = ١ ، نهـا (س ← ٠⁻) ق(س) = −١

⇐ نهـا (س ← ٠) ق(س) = غير موجودة .

جـ) هـ(س) = [س] ، س ∈ [٠، ٣]

[س] = { ٠ ، ٠ ≤ س < ١ ؛ ١ ، ١ ≤ س < ٢ ؛ ٢ ، ٢ ≤ س < ٣



نهـا (س ← ١⁺) هـ(س) = ١ ، نهـا (س ← ١⁻) هـ(س) = صفر ⇐

نهـا (س ← ١) هـ(س) = غير موجودة .

س٥ أ) نهـا (س ← ٢⁺) √(س−١) = √١ = ١

ب) نهـا (س ← ٢⁻) √(س−١) = √١ = ١

جـ) نهـا (س ← ٢) √(س−١) = ١

د) نهـا (س ← ١) √(س−١)

نبحث في إشارة س−١

س−١ = ٠ ⇐ س = ١

− | +
١

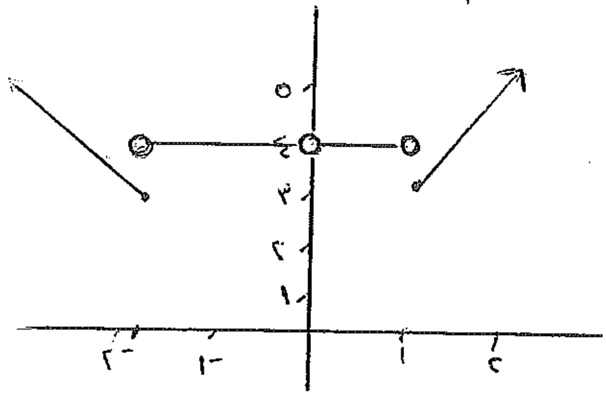
نهـا (س ← ١⁺) √(س−١) = صفر

نهـا (س ← ١⁻) √(س−١) = غير موجودة

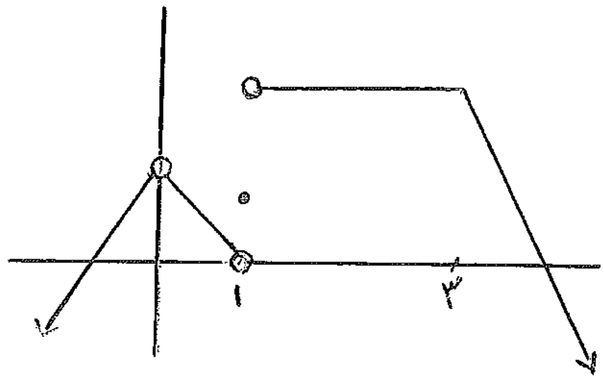
نهـا (س ← ١) √(س−١) غير موجودة .

أسئلة وزارية :

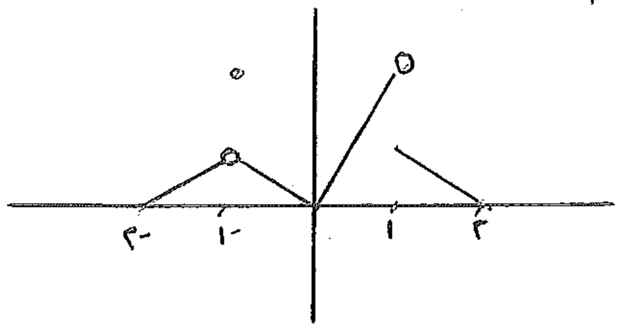
١) إذا كان الشكل التالي يمثل منحنى الاقتران ق المعرف على ح . جد مجموعة قيم م بحيث تكون نها ق(س) = ٣ .
س←م+



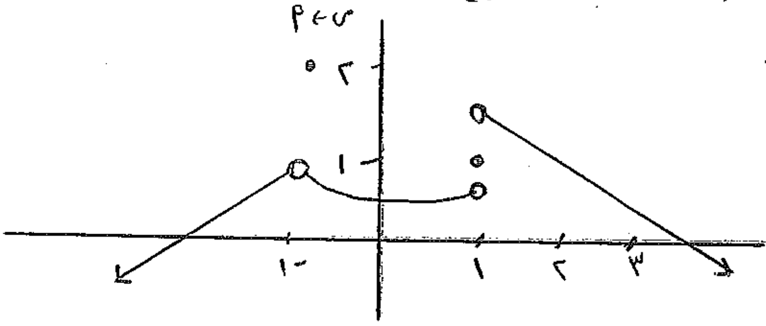
٢) الشكل التالي يمثل منحنى الاقتران ق(س) المعرف على ح . جد مجموعة قيم ل حيث نها ق(س) غير موجودة .
س←ل



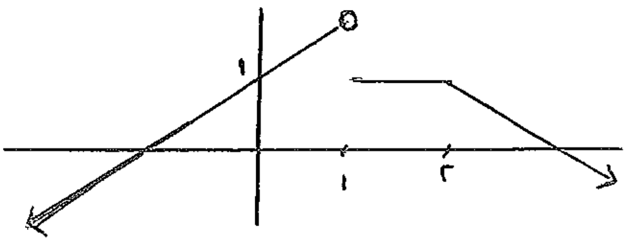
٣) الشكل التالي يمثل منحنى الاقتران ق(س) المعرف على [-٢، ٢] جد مجموعة جميع قيم م حيث نها ق(س) = صفر
س←م-



٤) الشكل التالي يمثل منحنى الاقتران ق(س) المعرف على ح جد مجموعة قيم م بحيث تكون نها ق(س) = ١ .
س←م

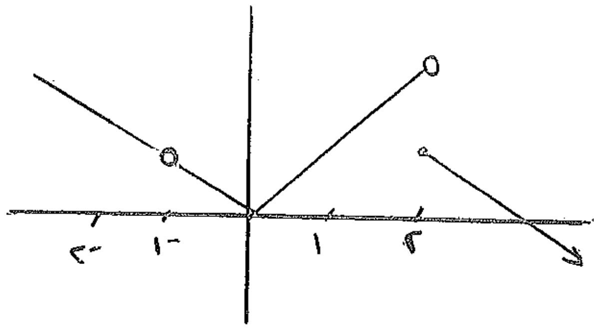


٥) الشكل التالي يمثل منحنى ق(س) المعرف على ح . جد مجموعة قيم م التي تجعل نها ق(س) = ١ .
س←م



تابع اسئلة وزارية

٦)

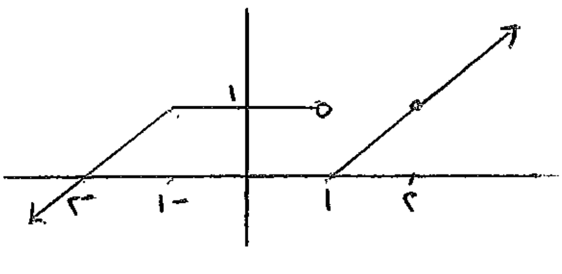


جد مجموعة قيم ل حيث

$\lim_{س \to ل}$ ق(س) غير موجودة .

٧) الشكل التالي يمثل منحنى ق المعرف على ح

جد مجموعة قيم س٠ التي تجعل $\lim_{س \to س_٠}$ ق(س) = ١



حل الأسئلة الوزارية

١) قيمة أ = ١

٢) قيمة ل = ١

٣) قيم أ = {٢ ، ٠}

٤) قيم أ = {-١ ، ٢} .

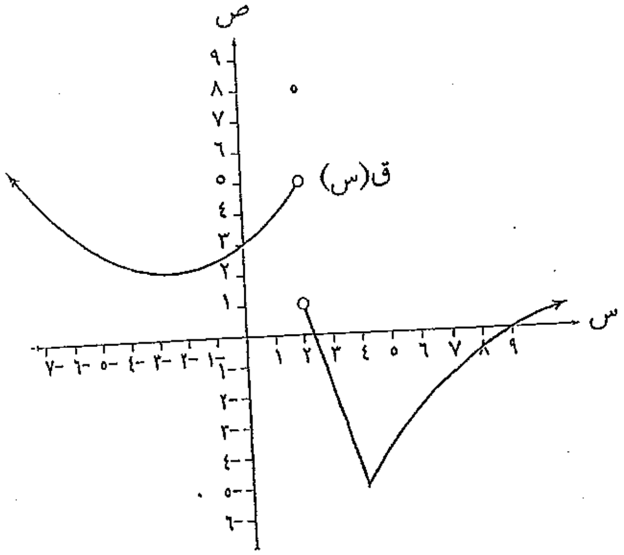
٥) قيم أ = (١ ، ٢] ∪ {٠} .

٦) قيمة ل = {٥} .

٧) قيم س. = [-١ ، ١) ∪ {٥}

حل تدريبات الكتاب المنهاج الجديد:

تدريب (١): بالاعتماد على الشكل الذي يمثل منحنى الاقتران ق جد كلاً مما يأتي إن أمكن:

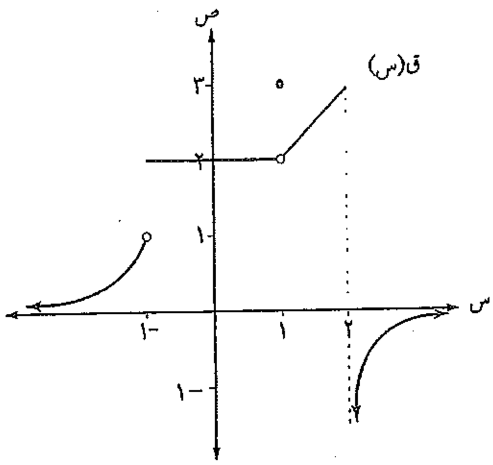


١) نهـا ق(س) = ١
س ← ٢$^{+}$

٢) نهـا ق(س) = ٥
س ← ٢$^{-}$

٣) نهـا ق(س) = غير موجودة
س ← ٢

تدريب (٢): بالاعتماد على الشكل التالي الذي يمثل منحنى الاقتران ق المعرف على ح جد كلاً مما يلي:



١) نهـا ق(س) = ٢
س ← ١

٢) نهـا ق(س) = غير موجودة
س ← ١-

٣) نهـا ق(س) = ٢
س ← ٠

٤) نهـا ق(س) = ٣
س ← ٢$^{-}$

١) معتمدًا الشكل (١-١٠) الذي يمثل منحنى الاقتران ق المعرف على ح ، جد كلًّا مما يأتي:

أ) $\lim_{س \to ٦^+}$ ق(س)

ب) $\lim_{س \to ٦^-}$ ق(س)

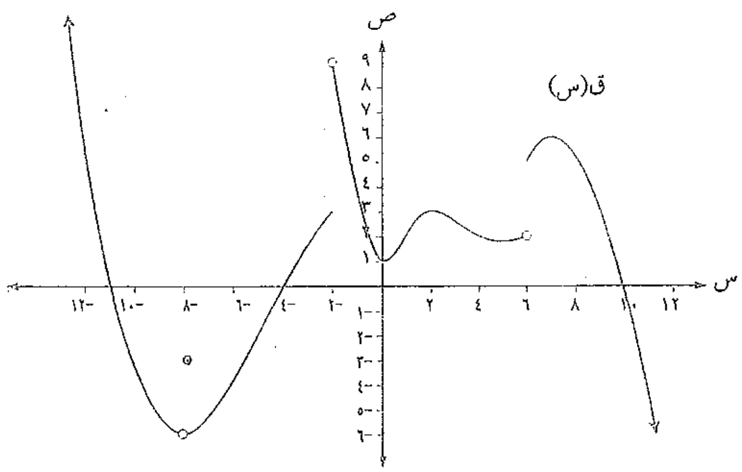
جـ) $\lim_{س \to ٠}$ ق(س)

د) $\lim_{س \to -٢}$ ق (س)

هـ) $\lim_{س \to -٨^+}$ ق(س)

و) $\lim_{س \to -٨^-}$ ق(س)

ز) $\lim_{س \to ١٠}$ ق(س)



الشكل (١-١٠)

٢) معتمدًا الشكل (١-١١) الذي يمثل منحنى الاقتران ل(س) = $\sqrt{س + ٤}$

جد كلًّا مما يأتي:

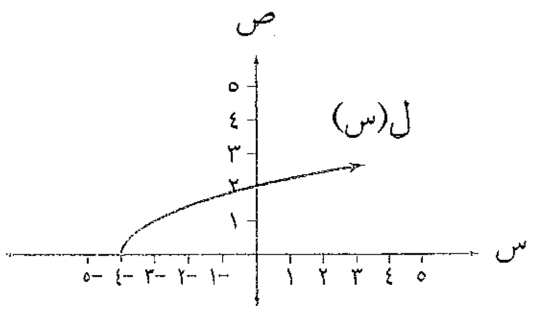
أ) مجال الاقتران ل

ب) $\lim_{س \to -٤^+}$ ل(س)

جـ) $\lim_{س \to -٤^-}$ ل(س)

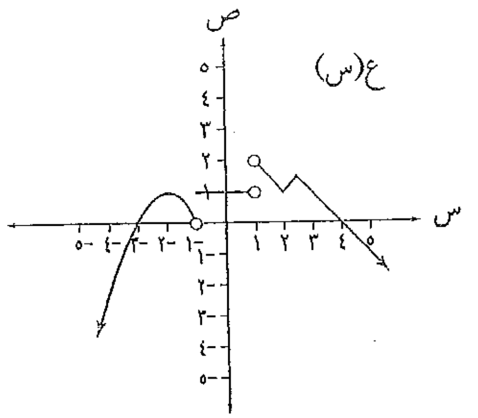
د) $\lim_{س \to -٤}$ ل(س)

هـ) $\lim_{س \to ٠}$ ل(س)



الشكل (١-١١)

٣) معتمدًا الشكل (١-١٢) الذي يمثل منحنى الاقتران ع، جد كلًّا مما يأتي:



الشكل (١-١٢)

أ) مجموعة قيم أ حيث:

$$\text{نها}_{\text{س} \leftarrow \text{أ}} \text{ع(س)} = ١$$

ب) مجموعة قيم جـ حيث:

$$\text{نها}_{\text{س} \leftarrow \text{جـ}^+} \text{ع(س)} = ١$$

جـ) مجموعة قيم ك حيث:

$$\text{نها}_{\text{س} \leftarrow \text{ك}} \text{ع(س)} \text{ غير موجودة}$$

د) مجموعة قيم ل حيث:

$$\text{نها}_{\text{س} \leftarrow \text{ل}} \text{ع(س)} = \text{صفرًا}$$

٤) إذا كان ل(س) = $\begin{cases} ٢\text{س} + ١ & \text{، س} \in \text{ص} \\ \text{س}^٢ + ٤ & \text{، س} \notin \text{ص} \end{cases}$ ، حيث ص مجموعة الأعداد الصحيحة

فجد $\text{نها}_{\text{س} \leftarrow ٢} \text{ل(س)}$

س١
أ) نهـا ه(س) = ٥ ، س ← ٦+

ب) نهـا ه(س) = ٣ ، س ← ٦-

ج) نهـا ه(س) = ١ ، س ← ٠

د) نهـا ه(س) = غير موجودة ، س ← ٢-

هـ) نهـا ه(س) = -٦ ، س ← -٨+

و) نهـا ه(س) = -٦ ، س ← -٨-

ز) نهـا ه(س) = صفر ، س ← ١٠

ج) نهـا ل(س) = غير موجودة ، س ← ٤-

د) نهـا ل(س) = غير موجودة ، س ← ٤

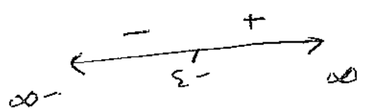
هـ) نهـا ل(س) = ٢ ، س ← ٠

س٢ ل(س) = $\sqrt{س+٤}$

أ) مجال الاقتران ل .

نبحث في إشارة الاقتران س+٤

س+٤ = صفر ⟸ س = -٤



المجال [-٤ ، ∞)

ب) نهـا ل(س) = صفر ، س ← -٤+

س٣ أ) مجموعة قيم أ حيث
نهـا ع(س) = ١ ، س ← أ

أ) (١،١-) ∪ {-٢ ، ٢ ، ٣} .

ب) [-١ ، ١) ∪ {-٢ ، ٢ ، ٣} .

ج) {١ ، -١} .

د) {-٣ ، ٤} .

س٤ نهـا ل(س) = ٢^{٢} + ٤ ، س ← ٢
= ٨

نظريات النهايات

نظرية (١): اذا كان ق(س) = جـ (ثابت)

فإن نها ق(س) = جـ
س ← أ

أي أن نهاية الثابت تساوي الثابت نفسه.

مثال (١): نها ١٠ = ١٠
س ← ٢

٢) نها ٢٥ = ٢٥.
س ← ٤

٣) نها ك = ك حيث ك ثابت.
س ← أ

نظرية ٢: اذا كان ق(س) كثير حدود من الدرجة ن فإن

نها ق(س) = ق(أ).
س ← أ

مثال: ١) نها ٨س^٢ - ٤س + ١ =
س ← ٢

٨(٢)^٢ - ٤(٢) + ١ = ٢٥

٢) نها ٦س^٢ - ٢س^٣ = ٦ × ٩ - ٢ × ٢٧
س ← ٣

= ٥٤ - ٥٤ = صفر

مثال: اذا كان نها ٦أس - ٥ = ١٣
س ← ٢

٦أ × ٢ - ٥ = ١٣

١٢أ - ٥ = ١٣

١٢أ = ١٨

أ = ١٨/١٢

= ٣/٢

سؤال (١): اذا كان ق(س) = ٦س - أس^٣

وكانت نها ق(س) = ١٢ فما قيمة أ؟
س ← -٢

سؤال (٢): اذا كان ق(س) = أس^٢ - ٢ب س + ٥

وكانت نها ق(س) = ٣ نها ق(س) = ١٤
س ← ٣ ، س ← -١

فما قيمة كل من أ، ب؟

نظرية ٣ : اذا كانت نها ق(س) = ل ، (س ← أ)
نها هـ(س) = ل' وكان جـ ∈ ح فإن : (س ← أ)

١) نها (ق(س) ∓ هـ(س)) = نها ق(س) ∓ نها هـ(س) (س ← أ)
= ل ∓ ل' .

٢) نها (جـ × ق(س)) = جـ × نها ق(س) (س ← أ)
= جـ × ل .

٣) نها (ق(س) × هـ(س)) = نها ق(س) × نها هـ(س) (س ← أ)
= ل × ل' .

٤) نها $($ق(س)$)^{ن}$ = $($نها ق(س)$)^{ن}$ (س ← أ)
= $ل^{ن}$ ، ن ∈ ط .

٥) نها $\sqrt[ن]{ق(س)}$ = $\sqrt[ن]{نها\ ق(س)}$ (س ← أ)
= $\sqrt[ن]{ل}$
(ل > ٠ اذا كان ن عدداً زوجياً)

مثال: اذا كانت نها ق(س) = ٥ ، (س ← ٣)
نها ك(س) = -٢ أوجد (س ← ٣)

١) نها (٦ق(س) + ٢ك(س)) = (س ← ٣)
٦ نها ق(س) + ٢ نها ك(س) (س ← ٣)
٦ × ٥ + ٢ × -٢ = ٣٠ - ٤ = ٢٦

٢) نها (٣ك(س) × ق(س)) = (س ← ٣)
٣ نها ك(س) × نها ق(س) = ٣ × -٢ × ٥ (س ← ٣)
= -٣٠

٣) نها $\sqrt{ق(س) - ١}$ = $\sqrt{نها\ ق(س) - ١}$ (س ← ٣)
$\sqrt{٥ - ١}$ = $\sqrt{٤}$ = ٢ .

٤) نها $((٣)(ك(س)))^{٤}$ = ٣$($نها ك(س)$)^{٤}$ (س ← ٣)
= ٣ × $(-٢)^{٤}$ = ٤٨ .

سؤال(١) : اذا كانت نها ق(س) = ٨ وكان (س ← ٥)
نها (٣أ - ٢ق(س)) = ١٧ فما قيمة أ ؟ (س ← ٥)

سؤال(٢) : اذا كانت نها ب $\sqrt[٣]{س^{٢} + ٤}$ = ٥ فما قيمة ب؟ (س ← ٢)

سؤال ٣ : اذا كانت $\underset{س\to٢}{\text{نهـا}}(٣س - ٢م(س) + ٥) = ١٥$

أوجد $\underset{س\to٢}{\text{نهـا}}(٣م(س) - ٢)$

سؤال ٤ : اذا كان $\underset{س\to٣}{\text{نهـا}}\left(٤ك(س) - \frac{١}{٢}م(س)\right) = ١٢$

فاوجد $\underset{س\to٣}{\text{نهـا}}\left(ك(س) - \frac{١}{٨}م(س) + ٦\right)$

مثال : اذا كانت $\underset{س\to٥}{\text{نهـا}}ه(س) = ٩$ أوجد

$\underset{س\to٢}{\text{نهـا}}ه(٣س-١)$ ،

نضع ص = ٣س - ١ عندما س ← ٢ فإن ص ← ٥

$\therefore \underset{س\to٢}{\text{نهـا}}ه(٣س-١) = \underset{ص\to٥}{\text{نهـا}}ه(ص)$

$= ٩$.

سؤال ٥ : اذا كانت $\underset{س\to٤}{\text{نهـا}}ه(س) = ٦$ أوجد

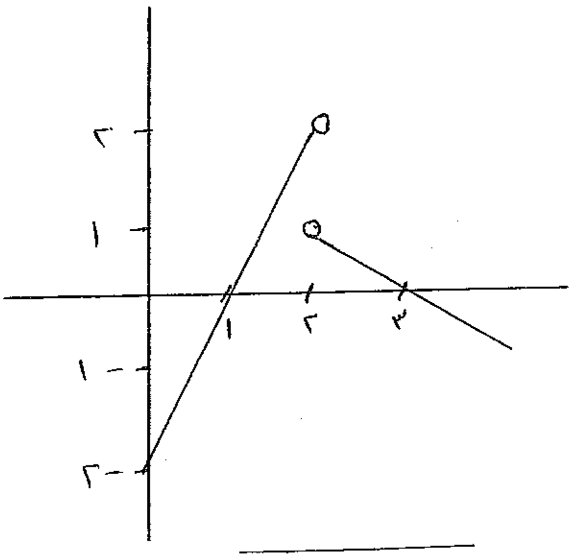
$\underset{س\to٢}{\text{نهـا}}(٣ه(س^٢) - ٥)$

سؤال ٦ : اذا كانت $\underset{س\to٢}{\text{نهـا}}\left(\frac{١}{٢}ه(س) - ٣\right) = ٣$

أوجد $\underset{س\to٤}{\text{نهـا}}ه^٢(\sqrt{س})$

سؤال ٧ : اعتمد الشكل التالي الذي يمثل

منحنى ه(س) لإيجاد $\underset{س\to٢^-}{\text{نهـا}}ه(٥-٣س)$



دراسة النهاية عند نقاط التحول (نقاط التشعب).

* لإيجاد النهاية عند نقطة التحول (التشعب) نجد النهاية عند يمين نقطة التحول والنهاية عند يسارها فإذا تساوتا، نقول أن النهاية موجودة وإذا لم تتساويا نقول أن النهاية غير موجودة.

مثال ١: $ق(س) = \begin{cases} ٤س - ١ ، & س \geq ٢ \\ ٣س^٢ - ٥ ، & س < ٢ \end{cases}$ جد $\underset{س \to ٢}{\text{نها}}\ ق(س)$

الحل: $\underset{س \to ٢^+}{\text{نها}}\ ق(س) = \underset{س \to ٢^+}{\text{نها}}(٤س - ١) = ٧$

$\underset{س \to ٢^-}{\text{نها}}\ ق(س) = \underset{س \to ٢^-}{\text{نها}}(٣س^٢ - ٥) = ٧$

بما أن $\underset{س \to ٢^+}{\text{نها}}\ ق(س) = \underset{س \to ٢^-}{\text{نها}}\ ق(س)$ فإن

$\underset{س \to ٢}{\text{نها}}\ ق(س) = ٧$ (موجودة).

مثال ٢: $ق(س) = \begin{cases} ٣ - س ، & س < ٥ \\ ١ ، & س \geq ٥ \end{cases}$ جد $\underset{س \to ٥}{\text{نها}}\ ق(س)$

$\underset{س \to ٥^+}{\text{نها}}\ ق(س) = ١$

$\underset{س \to ٥^-}{\text{نها}}\ ق(س) = ٣ - ٥ = -٢$

$\Leftarrow$ $\underset{س \to ٥}{\text{نها}}\ ق(س)$ غير موجودة

مثال ٣: $ق(س) = \begin{cases} ٤س - أ ، & س \geq ٢ \\ س^٣ + ٣ ، & س < ٢ \end{cases}$

إذا كانت $\underset{س \to ٢}{\text{نها}}\ ق(س)$ موجودة ما قيمة الثابت أ؟

الحل: $\underset{س \to ٢}{\text{نها}}\ ق(س)$ موجودة يعني أن النهاية من اليمين تساوي النهاية من اليسار.

$\underset{س \to ٢^+}{\text{نها}}\ ق(س) = \underset{س \to ٢^-}{\text{نها}}\ ق(س)$

$\underset{س \to ٢^+}{\text{نها}}(٤س - أ) = \underset{س \to ٢^-}{\text{نها}}(س^٣ + ٣)$

$٨ - أ = ٨ + ٣$

$- أ = ٣ \Leftarrow أ = -٣$.

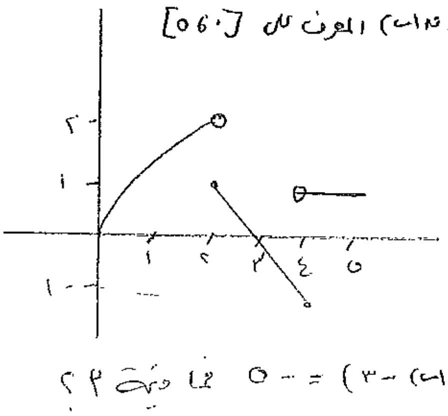
سؤال ١: $هـ(س) = \begin{cases} ٤س - ل(س) + ١ ، & س \geq ١ \\ ٢س^٣ ، & س < ١ \end{cases}$

إذا كانت $\underset{س \to ١}{\text{نها}}\ هـ(س)$ موجودة، جد $\underset{س \to ١}{\text{نها}}(٢ل(س) + ٣)$

سؤال: $ق(س) = \begin{cases} ٨ - ب س ، & س > ٢ \\ ١٠ ، & س = ٢ \\ أ س^٢ ، & س < ٢ \end{cases}$

جد قيمة الثابتين أ، ب إذا كانت $\underset{س \to ٢}{\text{نها}}\ ق(س) = ١٠$

سؤال ٢: يمثل الشكل منحنى ق(س) المعرف على [٠، ٥] اعتمد ذلك لإيجاد



١) $\underset{س \to ١}{\text{نها}}(ق(س) + ١)$

٢) $\underset{س \to ٣}{\text{نها}}\ ق(س)$

٣) إذا كانت $\underset{س \to ٢^-}{\text{نها}}(٢ق(س) - ٣) = -٥$ فما قيمة أ ؟

نهاية اقتران القيمة المطلقة:

مثال ١: ق(س) = |٢س − ٥| جد

أ) نها ق(س) ، س ← ١　　ب) نها ق(س) ، س ← ٤　　جـ) نها ق(س) ، س ← ٢,٥

الحل:

نعيد تعريف ق(س) كما يلي

٢س − ٥ = ٠ ⟸ س = ٢,٥

− ، + حول ٢,٥

|٢س − ٥| = { ٢س − ٥ ، س ≥ ٢,٥ ؛ ٥ − ٢س ، س < ٢,٥ }

أ) نها ق(س) (س ← ١) = ٥ − ٢ × ١ = ٣ .

ب) نها ق(س) (س ← ٤) = ٢ × ٤ − ٥ = ٣

جـ) نها ق(س) (س ← ٢,٥⁺) = صفر ، نها ق(س) (س ← ٢,٥⁻) = صفر ⟸ نها ق(س) (س ← ٢,٥) = صفر .

سؤال ١: ق(س) = |٤س − ٢س²| جد

١) نها ق(س) ، س ← ١　　٢) نها ق(س) ، س ← ٤

٣) نها ق(س) ، س ← ٠ .

سؤال ٢: ق(س) = |٦ − ٢س| جد

١) نها ق(س) ، س ← ٣　　٢) نها ق(س) ، س ← −٣

سؤال ٣: جد نها (س ← −٢) ٦س − |٨ − س³|

ثم جد نها (س ← ٢) ٦س − |٨ − س³|

مثال: اذا كان ق(س) = |٣ − ٢س| وكانت نها ق(س) (س ← أ) = ١ فما قيمة أ ؟

الحل: نها (س ← أ) |٣ − ٢س| = ١

|٣ − ٢أ| = ١

٣ − ٢أ = ١　أو　٣ − ٢أ = −١

٢أ = ٢　أو　٢أ = ٤

أ = ١　أو　أ = ٢ .

* ملاحظة: في حالة اقتران القيمة المطلقة يمكن إيجاد النهاية مباشرة بالتعويض .

سؤال ٤: اذا كانت نها (س ← −٢) (−٢س)/(أ + |س|) = ١ فما قيمة أ ؟

سؤال ٥: جد نها (س ← ٣) (|س − ٢| − ١)/(س − ٣)

سؤال ٦: جد نها (س ← ٠) |س² + س|/س

سؤال ٧: جد كلاً مما يلي

١) نها (س ← ٤⁺) √(س² − ١٦) / √(س − ٤)

٢) نها (س ← ٤) √(س² − ١٦) / √(س − ٤)

تذكر

√(أ/ب) = √أ / √ب

بشرط أن أ ≥ ٠ ، ب > ٠

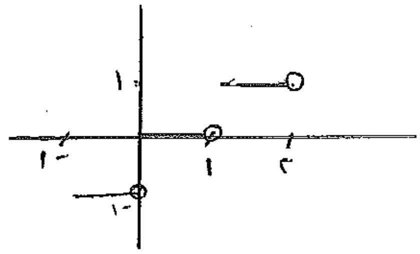
نهاية اقتران صحيح س [س]

(الاقتران الدرجي).

[٢،٥] = ٢ ، [-٢،٥] = -٣

[٦] = ٦ ، [-½] = -١ .

$$[س] = \begin{cases} -١ ، & -١ \leq س < ٠ \\ صفر ، & ٠ \leq س < ١ \\ ١ ، & ١ \leq س < ٢ \end{cases}$$



* [س + ن] = [س] + ن حيث ن عدد صحيح

مثال: [س + ٥] = [س] + ٥ .

[س - ٢] = [س] - ٢

لاحظ: [ن - س] ≠ ن - [س] .

* طول درجة الاقتران ق(س) = [أ س]

هي $\frac{١}{|معامل\ س|} = \frac{١}{أ}$.

مثال: طول الدرجة للاقتران [٣س] هي $\frac{١}{٣}$

وطول الدرجة للاقتران [$-\frac{١}{٤}$ س] هي

$\frac{١}{|-\frac{١}{٤}|} = ٤$.

* اذا كانت أ عدداً صحيحاً فإن

$[أ^+] = أ$ لكن $[أ^-] = أ - ١$

مثال: $[٧^+] = ٧$ لكن

$[٧^-] = ٦$.

* لإيجاد النهاية للاقتران ق(س) = [هـ(س)]

عند نقطة معينة نقوم بإعادة التعريف ثم

ايجاد النهاية كاقتران متشعب .

مثال: اذا كان ق(س) = [٤ - س] جد

١) $\lim_{س \to ١،٥}$ ق(س) ٢) $\lim_{س \to ٣}$ ق(س) .

الحل: نعيد تعريف الاقتران ق(س)

طول الدرجة = $\frac{١}{|-١|} = ١$

$$ق(س) = \begin{cases} ٣ ، & ٠ < س \leq ١ \\ ٢ ، & ١ < س \leq ٢ \\ ١ ، & ٢ < س \leq ٣ \\ صفر ، & ٣ < س \leq ٤ \end{cases}$$

١) $\lim_{س \to ١،٥}$ ق(س) = ٢

٢) $\lim_{س \to ٣^+}$ ق(س) = صفر

$\lim_{س \to ٣^-}$ ق(س) = ١

$\Leftarrow$ $\lim_{س \to ٣}$ ق(س) غير موجودة.

سؤال: اذا كان $ق(س) = ٢س^٢ - [س+١]$

جد ١) $\lim\limits_{س \to \frac{١}{٢}} ق(س)$

٢) $\lim\limits_{س \to ٢} ق(س)$.

مثال١: اذا كانت $\lim\limits_{س \to ٢^+} [أس] = ٥$

فما قيمة أ ؟

الحل: $\lim\limits_{س \to ٢^+} [أس] = [٢أ] = ٥$

$$٥ \leq ٢أ < ٦$$

$$٢,٥ \leq أ < ٣$$

$$أ \in [٢,٥ ، ٣).$$

مثال٢: اذا كان $ق(س) = \begin{cases} [س+٥] ، & س < أ \\ ١٠ - [س] ، & س \geq أ \end{cases}$

ما قيمة $أ \in ص$ حيث $\lim\limits_{س \to أ} ق(س)$ موجودة

الحل: $\lim\limits_{س \to أ^-} [س+٥] = \lim\limits_{س \to أ^+} ١٠ - [س]$

$$[أ^- + ٥] = ١٠ - [أ^+] .$$

$$[أ^-] + ٥ = ١٠ - [أ^+] .$$

$$أ - ١ + ٥ = ١٠ - أ$$

$$٢أ = ٦ \Leftarrow أ = ٣ .$$

تذكر $[أ^+] = أ$

$[أ^-] = أ - ١$

سؤال١: اذا كان $ق(س) = \frac{أ|س| + ١}{ب - [س]}$

أوجد أ، ب اذا كان $\lim\limits_{س \to ٢,٥} ق(س) = ٣$

$\lim\limits_{س \to \frac{١}{٢}^-} (٥ق(س) - ٣) = -١$.

سؤال٢: اذا كان $ق(س) = [س+٥]$ ، $هـ(س) = [٤ - س]$. جد كلا مما يلي:

١) $\lim\limits_{س \to ١} ق(س)$

٢) $\lim\limits_{س \to ١} هـ(س)$

٣) $\lim\limits_{س \to ١} (ق(س) + هـ(س))$.

مثال٣: اذا كانت $\lim\limits_{س \to ٠} \frac{ق(س)}{س^٢} = -٢$ جد

$\lim\limits_{س \to ٠} \frac{ق(س)}{س}$.

الحل: لاحظ أنه يمكن الحصول على $\frac{ق(س)}{س^٢}$ باستعمال النهاية المعطاه وذلك بضرب كلاً من البسط والمقام في س.

$$\lim\limits_{س \to ٠} \frac{ق(س)}{س} = \lim\limits_{س \to ٠} \frac{ق(س) \times س}{س \times س} =$$

$$\lim\limits_{س \to ٠} \frac{ق(س)}{س^٢} \times \lim\limits_{س \to ٠} س$$

$$-٢ \times صفر = صفر$$

سؤال ١: اذا كانت $\lim\limits_{س \leftarrow ٣}$ نهـا $\frac{ق(س)}{س^٢ - ٩} = ٥$

جد $\lim\limits_{س \leftarrow ٣}$ نهـا $\frac{ق(س)}{س - ٣}$.

ملاحظة حول الاستبدال اذا كان ما داخل الأقواس اقتران خطي على الصورة أس + ب .

* اذا كانت ص = ٢س - ٣ وكانت س ← ٧^- فإن ص ← ١١^-

* اذا كانت ص = ٥ - ٢س وكانت س ← ١^+ فإن ص ← ٣^-

واذا كانت س ← ١^- فإن ص ← ٣^+

مثال ١: ق(س) = { س² + ٦ ، س < ٣ ؛ ٣س ، س > ٣

جد ١) نهـا ق(س + ٢) ، س ← ٣

٢) نهـا ق(٧ - س) ، س ← ٤^+

الحل: ١) ص = س + ٢ ، س ← ٣ ، ص ← ٥

نهـا ق(س + ٢) (س ← ٣) = نهـا ق(ص) (ص ← ٥) = ١٠

٢) نهـا ق(٧ - س) (س ← ٤^+) ، ص = ٧ - س ، س ← ٤^+ ، ص ← ٣^-

نهـا ق(ص) (ص ← ٣^-) =

٣² + ٦ = ١٥ .

أسئلة إضافية على نظريات النهايات

سؤال (١): جد قيمة النهايات التالية:

١) نهـا (س ← ٠) س [س]

٢) نهـا (س ← ١) س² [س + ١]

٣) نهـا (س ← ١,٥) [س + ١] .

٤) نهـا (س ← ١) س [س + ٢]

٥) نهـا (س ← ١) [س + ١] / س

٦) نهـا (س ← ٠⁺) ([س] + س) / س

٧) نهـا (س ← ٠,٥) ([س] + ٣) / س

٨) نهـا (س ← ١) س² |س| − ١١

٩) نهـا (س ← ١,٥) س² + [س]

١٠) نهـا (س ← −٠,٣) س [س + ٢]

١١) نهـا (س ← ١) |س| . [س]

سؤال ٢: أعيد تعريف ق(س) = س + [س + ٠,٤] حيث س ∈ [١ ، ٣] .

سؤال ٣: كوّن جدول وارسم الاقتران ق(س) = ١ / (س − ٢) ثم جد نهـا (س ← ٢) ق(س) .

سؤال ٤: اذا كانت نهـا (س ← −٢) ب ∛(٤س + ٤) = ٥

جد قيمة ب .

سؤال ٥: اذا كانت نهـا (س ← ٥) ق(س) = ٨ وكانت

نهـا (س ← ٥) (٣أ − ٢ق(س)) = ١٧

فما قيمة أ ؟

سؤال ٦: ق(س) = { |س| + ٥ ، س > أ
[س] + ٢أ ، س < أ }

جد أ ∈ ص اذا كانت نهـا (س ← أ) ق(س) موجودة

حلول الأسئلة الإضافية :

(١) $\lim_{س \to ٠} س[س]$

طول الدرجة = ١

$[س] = \begin{cases} -١ & -١ \le س < ٠ \\ صفر & ٠ \le س < ١ \end{cases}$

$س[س] = \begin{cases} -س & -١ \le س < ٠ \\ صفر & ٠ \le س < ١ \end{cases}$

$\lim_{س \to ٠^+} د(س) = صفر$ ، $\lim_{س \to ٠^-} د(س) = ٠$

$\Leftarrow \lim_{س \to ٠} د(س) = ٠$.

(٢) $\lim_{س \to ١} س^٢ [س+١]$.

$س+١ = صفر \Leftarrow س = -١$

$[س+١] = \begin{cases} ٠ & -١ \le س < ٠ \\ ١ & ٠ \le س < ١ \\ ٢ & ١ \le س < ٢ \end{cases}$

$س^٢[س+١] = \begin{cases} ٠ & -١ \le س < ٠ \\ س^٢ & ٠ \le س < ١ \\ ٢س^٢ & ١ \le س < ٢ \end{cases}$

$\lim_{س \to ١^+} د(س) = ٢$ ، $\lim_{س \to ١^-} د(س) = ١$ $\Leftarrow \lim_{س \to ١} د(س)$ غير موجودة

(٣) $\lim_{س \to ١,٥} [س+١] = [١,٥ + ١] = [٢,٥]$

$= ٢$ ناتج التعويض المباشر

أو نعيد التعريف

(٤) $\lim_{س \to ١} س[س+٢]$

$س+٢ = صفر \Leftarrow س = -٢$

طول الفترة = ١

$[س+٢] = \begin{cases} ٢ & ٠ \le س < ١ \\ ٣ & ١ \le س < ٢ \end{cases}$

$س[س+٢] = \begin{cases} ٢س & ٠ \le س < ١ \\ ٣س & ١ \le س < ٢ \end{cases}$

$\lim_{س \to ١^-} د(س) = ٢$ ، $\lim_{س \to ١^+} د(س) = ٣$.

$\Leftarrow \lim_{س \to ١} د(س)$ غير موجودة .

(٥) $\lim_{س \to ١} \frac{[س+١]}{س}$

$س+١ = صفر \Leftarrow س = -١$

في الفرع ٢

$\frac{[س+١]}{س} = \begin{cases} \frac{١}{س} & ٠ \le س < ١ \\ \frac{٢}{س} & ١ \le س < ٢ \end{cases}$

$\lim_{س \to ١^+} د(س) = ٢$ ، $\lim_{س \to ١^-} د(س) = ١ \Leftarrow \lim_{س \to ١} د(س)$ غير موجودة

(٦) $\lim_{س \to ٠^+} \frac{[س] + س}{س}$

$[س] = \begin{cases} -١ & -١ \le س < ٠ \\ صفر & ٠ \le س < ١ \end{cases}$

$د(س) = \begin{cases} \frac{-١+س}{س} & -١ \le س < ٠ \\ \frac{٠+س}{س} & ٠ \le س < ١ \end{cases}$

$\lim_{س \to ٠^+} د(س) = \lim_{س \to ٠^+} \frac{س}{س} = ١$.

(٧) $\lim_{س \to ٢,٥} \frac{[س] + ٣}{س} = \frac{[٢,٥] + ٣}{٢,٥} = \frac{٥}{٢,٥} = ٢$

(٨) $\lim_{س \to ١} س^٢ |س-١|$

$د(س) = \begin{cases} س^٢(س-١) & س > ١ \\ -س^٢(س-١) & س < ١ \end{cases}$

$\lim_{س \to ١^+} د(س) = صفر$ ، $\lim_{س \to ١^-} د(س) = صفر \Leftarrow \lim_{س \to ١} د(س) = صفر$

(٩) $\lim_{س \to ١,٥} س^٢ + [س]$ بالتعويض المباشر أو

$د(س) = \{ س^٢ + ١ \quad ، ١ \le س < ٢$

$\lim_{س \to ١,٥} د(س) = (١,٥)^٢ + ١ = ٣,٢٥$

(١٠) $\lim_{س \to ٢و} س[س+٢] = ٢و \times ٢ = ٤و$

(١١) $\lim_{س \to ١} |س| . [س]$

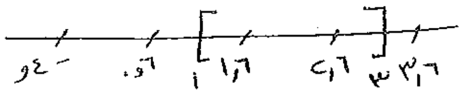
$د(س) = \begin{cases} صفر \times س & ٠ < س < ١ \\ ١ \times س & ١ < س < ٢ \end{cases}$

$= \begin{cases} صفر & ٠ < س < ١ \\ س & ١ \le س < ٢ \end{cases}$

$\lim_{س \to ١^+} د(س) = ١$ ، $\lim_{س \to ١^-} د(س) = صفر \Leftarrow$ النهاية غير موجودة .

سؤال٢: س + ٤و، = ٠ ⇐ ك = -٤و.

طول الدرجة = ١

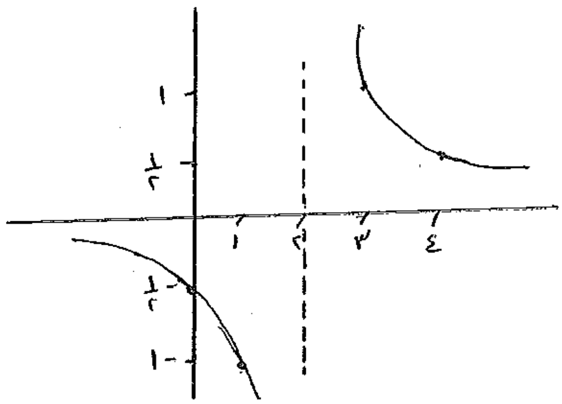


ق(س) = { ك + ١ ، ١ ≤ س < ١,٦
ك + ٢ ، ١,٦ ≤ س < ٢,٦
ك + ٣ ، ٢,٦ ≤ س ≤ ٣ }

سؤال٣: صفر المقام هو (٢)

الاقتران غير معرف عند س = ٢ .

س	٣	٤	١	٠
ق(س)	١	$\frac{١}{٢}$	-١	-$\frac{١}{٢}$



سؤال٤: نهـا (س ← -٢) ب $\sqrt[٣]{س^٢ + ٤}$ = ٥

ب × $\sqrt[٣]{٨}$ = ٥

ب × ٢ = ٥

ب = $\frac{٥}{٢}$.

سؤال٥: نهـا (س ← ٥) (٣أ - ٢ق(س)) = ١٧

نهـا (س ← ٥) ٣أ - ٢ نهـا (س ← ٥) ق(س) = ١٧

٣أ - ٢ × ٨ = ١٧

٣أ - ١٦ = ١٧

٣أ = ٣٣

أ = ١١

سؤال٦:

نهـا (س ← أ+) ق(س) = نهـا (س ← أ-) ق(س)

|أ| + ٥ = أ - ١ + ٢أ

إذا كانت أ > ٠ ، فإن |أ| = أ

∴ ~~أ~~ + ٥ = ~~أ~~ - ١ + ٢أ

٦ = ٢أ ⇐ أ = ٣

إذا كانت أ < ٠ ، فإن |أ| = -أ

∴ -أ + ٥ = أ - ١ + ٢أ

٦ = ٤أ

أ = $\frac{٦}{٤}$

لكن $\frac{٦}{٤}$ ∉ ص

مجموعة الحل أ = {٣} .

١) إذا كانت $\underset{س \leftarrow -١}{\text{نهـا}}\ ق(س) = \frac{١}{٢}$ ، $\underset{س \leftarrow -١}{\text{نهـا}}\ هـ(س) = -٢$ جد كلاً مما يأتي:

أ) $\underset{س \leftarrow -١}{\text{نهـا}} \left(ق(س) - \frac{١}{هـ(س)} \right)$ ب) $\underset{س \leftarrow -١}{\text{نهـا}} \sqrt[٣]{ق(س) - \frac{١}{٢}}$

٢) إذا كانت $\underset{س \leftarrow ٣}{\text{نهـا}} \left(س^{٢} - ٢أس + ٥ \right) = -٤$ ، فجد قيمة أ.

٣) جد $\underset{س \leftarrow -٣}{\text{نهـا}} \left(\frac{س^{٣} - ٢}{س - ١} + س^{٢} + ١ \right)$

٤) إذا كان : $د(س) = \begin{cases} ٢س^{٢} - ١٥ & ، س > ٣ \\ ٧ & ، س = ٣ \\ ٥ & ، س < ٣ \end{cases}$ ، فجد:

أ) $\underset{س \leftarrow ٣^{-}}{\text{نهـا}}\ د(س)$ ب) $\underset{س \leftarrow ٣}{\text{نهـا}}\ د(س)$

جـ) $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـا}}\ د(س)$ د) $\underset{س \leftarrow ٤}{\text{نهـا}}\ د(س)$

٥) احسب نهاية كل من الاقترانات فيما يأتي عندما تقترب س من العدد (الأعداد) المذكورة إزاء كل منها:

أ) $ق(س) = \sqrt{\frac{س - ١}{س + ١}}$ ، $س \leftarrow ١$ =

ب) $هـ(س) = [١ + ٢س]$ ، $س \leftarrow \frac{١}{٢}$ ، $س \leftarrow \frac{١}{٣}$

جـ) $م(س) = |١ - س^{٢}|$ ، $س \leftarrow -١$

حلول تمارين ومسائل في الكتاب صفحة ٢٩

س١ أ) $\lim\limits_{س \to ١} ق(س) - \lim\limits_{س \to ١} \frac{١}{هـ(س)}$

$= \frac{١}{٢} - \frac{١}{-٢}$

$= \frac{١}{٢} + \frac{١}{٢} = ١$

ب) $\sqrt[٣]{\lim\limits_{س \to ١} ق(س) - \frac{١}{٢}} =$

$\sqrt[٣]{\frac{١}{٢} - \frac{١}{٢}} =$ صفر

س٢ $\lim\limits_{س \to ٣} (س^٢ - ٢أس + ٥) = -٤$

$٩ - ٦أ + ٥ = -٤$

$-٦أ = -١٨ \Leftarrow أ = ٣$

س٣ $\frac{(-٣)^٣ - ٢}{-٣ - ١} + (-٣)^٢ + ١$

$\frac{-٢٩}{-٤} + ٩ + ١ = \frac{٢٩}{٤} + ١٠$

$= \frac{٢٩}{٤} + \frac{٤٠}{٤} = \frac{٦٩}{٤}$.

س٤ أ) $\lim\limits_{س \to ٣^-} د(س) = ٥$

ب) $\lim\limits_{س \to ٣^+} د(س) = ٢(٣)^٢ - ١٥$
$= ٣$

$\lim\limits_{س \to ٣} د(س) =$ غير موجودة .

جـ) $\lim\limits_{س \to ٠} د(س) = ٥$

د) $\lim\limits_{س \to ٤} د(س) = ٢(٤)^٢ - ١٥$
$= ١٧$

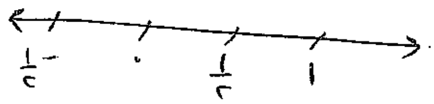
س٥ أ) $\lim\limits_{س \to ١^+} ⟦\frac{س - ١}{س + ١}⟧ =$ صفر .

$\lim\limits_{س \to ١^-} ⟦\frac{س - ١}{س + ١}⟧ =$ غير موجودة

$\Leftarrow \lim\limits_{س \to ١} ⟦\frac{س - ١}{س + ١}⟧$ غير موجودة .

ب) نعيد تعريف الاقتران $هـ(س) = ⟦١ + ٢س⟧$

طول الدرجة $= \frac{١}{٢}$.



$هـ(س) = \begin{cases} ١ ، & ٠ \le س < \frac{١}{٢} \\ ٢ ، & \frac{١}{٢} \le س < ١ \end{cases}$

$\boxed{١}$ $\lim\limits_{س \to \frac{١}{٢}^+} هـ(س) = ٢$

$\lim\limits_{س \to \frac{١}{٢}^-} هـ(س) = ١$

$\Leftarrow \lim\limits_{س \to \frac{١}{٢}} هـ(س) =$ غير موجودة

$\boxed{٢}$ $\lim\limits_{س \to \frac{١}{٣}} هـ(س) = ١$

$\frac{١}{٢} > \frac{١}{٣}$

تابع ش ج)

$\text{م}(\text{س}) = |١ - \text{س}^٢|$

$١ - \text{س}^٢ = \text{صفر} \Leftarrow \text{س}^٢ = ١ \Leftarrow \text{س} = \pm ١$

$-١ + \text{س}^٢$	$١ - \text{س}^٢$	$-١ + \text{س}^٢$
$-$	$+$	$-$

$-١ \qquad ١$

$|١ - \text{س}^٢| = \begin{cases} \text{س}^٢ - ١ \ , & \text{س} \geq ١ \\ ١ - \text{س}^٢ \ , & -١ < \text{س} < ١ \\ \text{س}^٢ - ١ \ , & \text{س} \leq -١ \end{cases}$

$\text{نها}_{\text{س} \to -١^+} \text{م}(\text{س}) = \text{صفر}$

$\text{نها}_{\text{س} \to -١^-} \text{م}(\text{س}) = \text{صفر}$

$\Leftarrow \text{نها}_{\text{س} \to -١} \text{م}(\text{س}) = \text{صفر}$

س٦) $\text{نها}_{\text{س} \to -٢} \dfrac{\text{ه}(\text{س}) + ٥}{\text{س} + ٢} = ٩$

$\boxed{\text{يؤجل للدرس القادم}}$

النهاية = ٩ (موجودة) $\Leftarrow$

البسط = صفر و المقام = صفر

$\Leftarrow$ البسط = صفر

$\text{نها}_{\text{س} \to -٢} \text{ه}(\text{س}) + ٥ = \text{صفر}$

$\text{نها}_{\text{س} \to -٢} \text{ه}(\text{س}) = -٥ .$

أ) $\text{نها}_{\text{س} \to -٢} (\text{ه}(\text{س}) + ٢\text{س}) =$

$\text{نها}_{\text{س} \to -٢} \text{ه}(\text{س}) + \text{نها}_{\text{س} \to -٢} ٢\text{س}$

$-٥ + ٢ \times -٢ = -٥ + -٤$

$= -٩ .$

ب) $\text{نها}_{\text{س} \to -٢} (\text{ه}^٢(\text{س}) + ٢\text{س})$

$\text{نها}_{\text{س} \to -٢} \text{ه}^٢(\text{س}) + \text{نها}_{\text{س} \to -٢} ٢\text{س}$

$\left(\text{نها}_{\text{س} \to -٢} \text{ه}(\text{س})\right)^٢ + ٢ \times -٢$

$= (-٥)^٢ + -٤$

$٢٥ + -٤ = ٢١ .$

تدريب (1): اذا كان ق(س) = ٢س ،

هـ(س) = $س^٣ + س$ جد كلا مما يلي:

1) $\text{نها}_{س \leftarrow -٢} \left(ق(س) + هـ(س) \times س \right)$

الحل: $\text{نها}_{س \leftarrow -٢} ق(س) + \text{نها}_{س \leftarrow -٢} هـ(س) \times \text{نها}_{س \leftarrow -٢} س$

$= ٢ \times -٢ + \left((-٢)^٣ + -٢ \right) \times -٢$

$= -٤ + -١٠ \times -٢ = -٤ + ٢٠$

$= ١٦$

2) $\text{نها}_{س \leftarrow ١} \dfrac{ق(س)}{هـ(س)} = \dfrac{٢ \times ١}{١^٣ + ١} = \dfrac{٢}{٢}$

$= ١$

3) $\text{نها}_{س \leftarrow ١} \left(\sqrt{ق(س)} + ٣\sqrt{هـ(س)} \right) + ١٥$

$\sqrt{٢ \times ١} + ٣\sqrt{١ + ١} + ٥$

$\sqrt{٢} + ٣\sqrt{٢} + ١٥$

$٤\sqrt{٢} + ١٥$

تدريب (2): جد كلاً مما يأتي

1) $\text{نها}_{س \leftarrow ٠} |س - ٨| = |٠ - ٨|$

$= |-٨|$

$= ٨$

تعويض مباشر لأن الصفر ليس صفر (صفر) للاقتران ما داخل المطلق

2) $\text{نها}_{س \leftarrow ١٦} |س - ١٦|$ نعيد التعريف

$س - ١٦ = \text{صفر} \leftarrow س = ١٦$

$$|س - ١٦| = \begin{cases} س - ١٦ \ ، & س \geq ١٦ \\ ١٦ - س \ ، & س < ١٦ \end{cases}$$

$\text{نها}_{س \leftarrow ١٦^+} |س - ١٦| = \text{صفر}$

$\Leftarrow \text{نها}_{س \leftarrow ١٦} |س - ١٦| = \text{صفر}$

$\text{نها}_{س \leftarrow ١٦^-} |س - ١٦| = \text{صفر}$

(3) $\text{نها}_{س \leftarrow ٤} |س^٢ - ١٦|$ نعيد التعريف

$س^٢ - ١٦ = \text{صفر} \leftarrow س = \pm ٤$

$س^٢ - ١٦$ (+) | $١٦ - س^٢$ (− −) | $س^٢ - ١٦$ (+)

-٤ ، ٤

$\text{نها}_{س \leftarrow ٤^+} |س^٢ - ١٦| = \text{صفر}$

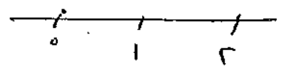
$\text{نها}_{س \leftarrow ٤^-} |س^٢ - ١٦| = \text{صفر}$

$\Leftarrow \text{نها}_{س \leftarrow ٤} |س^٢ - ١٦| = \text{صفر}$

تدريب ٣ : جد كلاً من النهايات الآتية :

١) $\lim_{س \to ١} [س - ٢]$ نعيد التعريف حول النقطة $س = ١$

$ل = \frac{١}{|\text{معامل س}|} = ١$



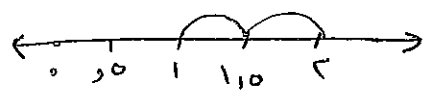
$[س - ٢] = \begin{cases} -١ &، ١ \le س < ٢ \\ -٢ &، ٠ \le س < ١ \end{cases}$

$\lim_{س \to ١^+} [س - ٢] = -١$

$\lim_{س \to ١^-} [س - ٢] = -٢$ $\Leftarrow \lim_{س \to ١} [س - ٢]$ غير موجودة

٢) $\lim_{س \to ١,٥} [٤ - ٢س]$

$ل = \frac{١}{٢}$



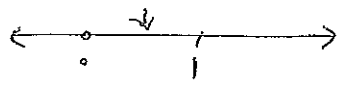
$[٤ - ٢س] = \begin{cases} \text{صفر} &، ١,٥ < س \le ٢ \\ ١ &، ١ < س \le ١,٥ \end{cases}$

$\lim_{س \to ١,٥^+} [٤ - ٢س] = \text{صفر}$

$\lim_{س \to ١,٥^-} [٤ - ٢س] = ١$

$\Leftarrow \lim_{س \to ١,٥} [٤ - ٢س] =$ غير موجودة .

٣) $\lim_{س \to ٠,١} [س + ١]$



$ل = ١$

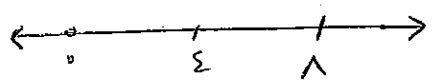
$[س + ١] = \{ ١ ، ٠ \le س < ١ \}$.

$\lim_{س \to ٠,١} [س + ١] = ١$.

٤) $\lim_{س \to ٤} [٠,٢٥ س]$

$٠,٢٥ = \frac{١}{٤}$

$ل = \frac{١}{\frac{١}{٤}} = ٤$



$[٠,٢٥ س] = \begin{cases} ٠ &، ٠ \le س < ٤ \\ ١ &، ٤ \le س < ٨ \end{cases}$

$\lim_{س \to ٤^+} [٠,٢٥ س] = ١$

$\lim_{س \to ٤^-} [٠,٢٥ س] = \text{صفر}$

$\Leftarrow \lim_{س \to ٤} [٠,٢٥ س] =$ غير موجودة .

تدريب ٤ : اذا كان

$\text{ق}(\text{س}) = [٢ - \text{س}]$ فأجب عن كل مما يأتي :

١) جد قيم أ التي تجعل $\underset{\text{س} \leftarrow \text{أ}}{\text{نهـا}}\ \text{ق}(\text{س})$ غير موجودة

٢) جد قيم جـ التي تجعل $\underset{\text{س} \leftarrow \text{جـ}}{\text{نهـا}}\ \text{ق}(\text{س}) = -١$

الحل: ١) قيم أ هي جميع قيم أ حيث

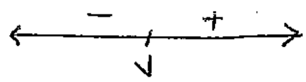
أ ∈ ص

٢) قيم جـ هي (٢، ٣)

تدريب ٥ : جد كلاً من النهايات الآتية:

١) $\underset{\text{س} \leftarrow ٧}{\text{نهـا}} \sqrt{\text{س} - ٧}$

س - ٧ = صفر ← س = ٧



$\underset{\text{س} \leftarrow ٧^{+}}{\text{نهـا}} \sqrt{\text{س} - ٧} = \text{صفر}$

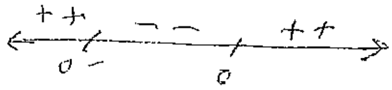
$\underset{\text{س} \leftarrow ٧^{-}}{\text{نهـا}} \sqrt{\text{س} - ٧} = \text{غير موجودة}$

$\Leftarrow \underset{\text{س} \leftarrow ٧}{\text{نهـا}} \sqrt{\text{س} - ٧}$ غير موجودة

٢) $\underset{\text{س} \leftarrow ٥}{\text{نهـا}} \sqrt{\text{س} - ٧} = \text{غير موجودة}$

٣) $\underset{\text{س} \leftarrow ٥}{\text{نهـا}} \sqrt{\text{س}^٢ - ٢٥}$

$\text{س}^٢ - ٢٥ = ٠ \leftarrow \text{س} = \mp ٥$



$\underset{\text{س} \leftarrow ٥^{+}}{\text{نهـا}} \sqrt{\text{س}^٢ - ٢٥} = \text{صفر}$

$\underset{\text{س} \leftarrow ٥^{-}}{\text{نهـا}} \sqrt{\text{س}^٢ - ٢٥} = \text{غير موجودة}$

$\underset{\text{س} \leftarrow ٥}{\text{نهـا}} \sqrt{\text{س}^٢ - ٢٥} = \text{غير موجودة}$

٤) $\underset{\text{س} \leftarrow -٧}{\text{نهـا}} \sqrt{\text{س}^٢ - ٢٥} = \sqrt{٤٩ - ٢٥}$

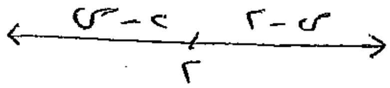
$= \sqrt{٢٤}$

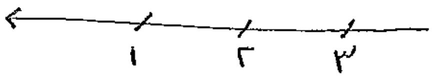
تدريب ٦ :

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} |\text{س} - ٢| & ، \text{س} \geq ٢ \\ [٦ - \text{س}] & ، \text{س} < ٢ \end{cases}$$

جد $\underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهـا}}\ \text{ق}(\text{س})$.

س - ٢ = صفر ⟸ س = ٢





$$[٦ - \text{س}] = \begin{cases} ٣ & ، ٢ < \text{س} \leq ٣ \\ ٤ & ، ١ < \text{س} \leq ٢ \end{cases}$$

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س} - ٢ & ، \text{س} > ٢ \\ ٤ & ، ١ < \text{س} \leq ٢ \end{cases}$$

$\underset{\text{س} \leftarrow ٢^{+}}{\text{نهـا}}\ \text{ق}(\text{س}) = \text{صفر}$

$\underset{\text{س} \leftarrow ٢^{-}}{\text{نهـا}}\ \text{ق}(\text{س}) = ٤$

$\Leftarrow \underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهـا}}\ \text{ق}(\text{س}) = \text{غير موجودة}$

تدريب ٦: إذا كان

$\text{ق}(\text{س}) = [\text{س}+5]$ ، $\text{ل}(\text{س}) = [4-\text{س}]$

نجد كلاً مما يلي:

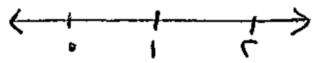
١) $\lim\limits_{\text{س}\to 1} \text{ق}(\text{س})$

٢) $\lim\limits_{\text{س}\to 1} \text{ل}(\text{س})$

٣) $\lim\limits_{\text{س}\to 1} \left(\text{ق}(\text{س}) + \text{ل}(\text{س})\right)$

الحل: $\text{ق}(\text{س}) = [\text{س}+5]$

١) ل = ١



$$[\text{س}+5] = \begin{cases} 6 \text{ ، } 1 \le \text{س} < 2 \\ 5 \text{ ، } 0 \le \text{س} < 1 \end{cases}$$

$\lim\limits_{\text{س}\to 1^+} \text{ق}(\text{س}) = 6$

$\lim\limits_{\text{س}\to 1^-} \text{ق}(\text{س}) = 5$

$\Leftarrow$ $\lim\limits_{\text{س}\to 1} \text{ق}(\text{س})$ غير موجودة.

٢) $\text{ل}(\text{س}) = [4-\text{س}]$

$$[4-\text{س}] = \begin{cases} 2 \text{ ، } 1 < \text{س} \le 2 \\ 3 \text{ ، } 0 < \text{س} \le 1 \end{cases}$$

$\lim\limits_{\text{س}\to 1^+} \text{ل}(\text{س}) = 2$

$\lim\limits_{\text{س}\to 1^-} \text{ل}(\text{س}) = 3$

$\Leftarrow$ $\lim\limits_{\text{س}\to 1} \text{ل}(\text{س})$ = غير موجودة

٣)

$$\text{ق}(\text{س}) + \text{ل}(\text{س}) = \begin{cases} 8 \text{ ، } 1 < \text{س} < 2 \\ 8 \text{ ، } 0 < \text{س} < 1 \\ 9 \text{ ، } \text{س} = 1 \end{cases}$$

$\lim\limits_{\text{س}\to 1^+} \left(\text{ق}(\text{س}) + \text{ل}(\text{س})\right) = 8$

$\lim\limits_{\text{س}\to 1^-} \left(\text{ق}(\text{س}) + \text{ل}(\text{س})\right) = 8$

$\Leftarrow \lim\limits_{\text{س}\to 1} \left(\text{ق}(\text{س}) + \text{ل}(\text{س})\right) = 8$

* لاحظ أنه قد تكون نهاية أحد الاقترانين أو كلاهما غير موجودة ولكن قد تصبح النهاية موجودة بعد تطبيق عملية حسابية عليها.

تمارين ومسائل

١) إذا كان $\text{ق(س)} = \text{س}^{٢} - \text{س} - ٦$ ، $\text{ل(س)} = \text{س}^{٢} - ٢\,\text{س} - ٣$ ، فجد كلًّا مما يأتي:

أ) $\underset{\text{س} \leftarrow ١}{\text{نهــا}} \left(\text{ق(س)} + \text{ل(س)}\right)$

ب) $\underset{\text{س} \leftarrow ١}{\text{نهــا}} \text{ق(س)} \times \text{ل(س)}$

جـ) $\underset{\text{س} \leftarrow ١}{\text{نهــا}} \dfrac{\text{ل(س)}}{\text{ق(س)}}$

د) $\underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهــا}} \left(\text{ل(س)}\right)^{٤}$

هـ) $\underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهــا}} \sqrt[٣]{١ - \text{ل(س)}}$

و) $\underset{\text{س} \leftarrow -١}{\text{نهــا}} \dfrac{\text{ل(س)}}{\text{ق(س)}}$

٢) إذا كانت $\underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهــا}} ٢\,\text{ع(س)} = ١٠$ ، $\underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهــا}} ٣\,\text{ل(س)} + ١ = ٧$ ، فجد كلًّا مما يأتي:

أ) $\underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهــا}} \left(٢\,\text{ع(س)} + \text{ل(س)}\right)$

ب) $\underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهــا}} \left(\text{ع}^{٣}\text{(س)} - \text{ل}^{٢}\text{(س)}\right)$

جـ) $\underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهــا}} \dfrac{\sqrt{\text{ل(س)}}}{\text{ع(س)}}$

د) $\underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهــا}} \left(\text{ع}^{٢}\text{(س)} - \text{ل}^{٢}\text{(س)}\right)$

٣) جد كلًّا مما يأتي:

أ) $\underset{\text{س} \leftarrow ٥^{+}}{\text{نهــا}} \left|\text{س}^{٢} - ٢٥\right|$

ب) $\underset{\text{س} \leftarrow ٥^{-}}{\text{نهــا}} \left|\text{س}^{٢} - ٢٥\right|$

جـ) $\underset{\text{س} \leftarrow ٢^{-}}{\text{نهــا}} \left|\text{س} - ٢\right|$

د) $\underset{\text{س} \leftarrow ٨}{\text{نهــا}} \left|\text{س}^{٢} - ٦٤\right|$

هـ) $\underset{\text{س} \leftarrow ٤^{-}}{\text{نهــا}} [\text{س} - ٢]$

و) $\underset{\text{س} \leftarrow ١}{\text{نهــا}} \left(\text{س}\,[\text{س}] + |\text{س}|\right)$

ز) $\underset{\text{س} \leftarrow ٥^{-}}{\text{نهــا}} \sqrt{٥ - \text{س}}$

ح) $\underset{\text{س} \leftarrow ١}{\text{نهــا}} \sqrt{١ - \text{س}^{٢}}$

ط) $\underset{\text{س} \leftarrow -٢}{\text{نهــا}} \sqrt{\text{س}^{٢} + ٤\,\text{س} + ٤}$

٤) جد قيم جـ التي تجعل $\lim\limits_{س \to جـ} \sqrt{٦ - س}$ غير موجودة.

٥) إذا كان ق(س)= [٢ ، ٠ س]، فجد قيم جـ التي تجعل $\lim\limits_{س \to جـ}$ [٢ ، ٠ س] = −١

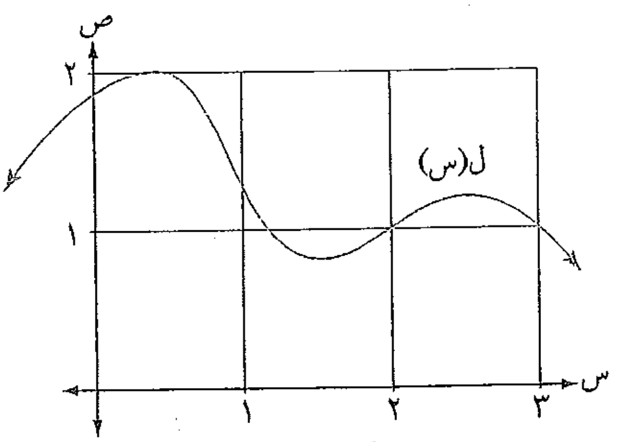
٦) إذا كان ق(س) = $\begin{cases} س^{٢} - ٤أ &، \quad س \leq ٣ \\ [٦ - س] &، \quad س > ٣ \end{cases}$

وكانت $\lim\limits_{س \to ٣}$ ق(س) موجودة ، فجد قيمة الثابت أ.

٧) معتمدًا الشكل (١−١٥) الذي يمثل منحنى الاقتران ل، جد كلًّا مما يأتي:

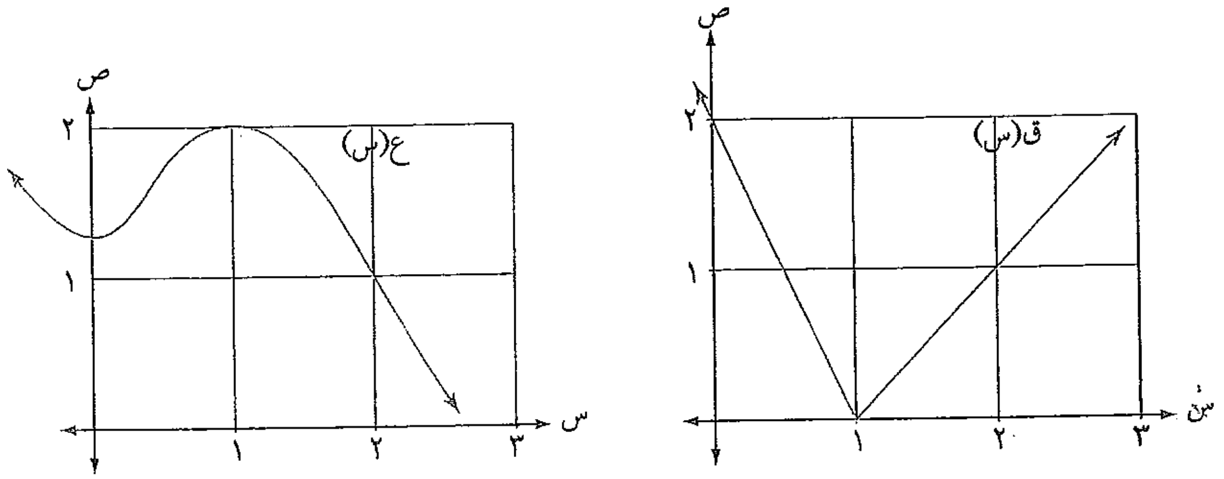
أ) $\lim\limits_{س \to ٢}$ ل(٣ س − ٣)

ب) $\lim\limits_{س \to ٢}$ (س + ل(س))



الشكل (١−١٥)

٨) معتمدًا الشكل(١−١٦)، الذي يمثل منحنيي الاقترانين ق، ع ،جد كلًّا مما يأتي:



الشكل (١−١٦)

أ) $\lim\limits_{س \to ١}$ (ق(س) + ع(س))

ب) $\lim\limits_{س \to ٢}$ (ق(س) × ع(س))

جـ) $\lim\limits_{س \leftarrow ١} \left(٢\, ق(س-١) + ع(س) \right)$

٩) إذا كان ق كثير حدود يمر بالنقطة (-٣ ، ٤)، وكانت $\lim\limits_{س \leftarrow -٣} \left(س - ل(س) \right) = -١٠$

فجد $\lim\limits_{س \leftarrow -٣} \left(ق^{٢}(س) - ٢\, ل(س) \right)$

١٠) إذا كان ع كثير حدود باقي قسمته على (س-٢) يساوي ٥ ، فجد

$\lim\limits_{س \leftarrow ٢} (٣ ع(س) + ٤ س^{٢})$

س١ $\text{هـ}(س) = س^2 - س - ٦$ ،

$ل(س) = س^2 - ٢س - ٣$

أ) $\underset{س \to ١}{\text{نها}} \left(\text{هـ}(س) + ل(س)\right) =$

$(١ - ١ - ٦) + (١ - ٢ - ٣) = -١٠$

ب) $\underset{س \to ١}{\text{نها}} \left(\text{هـ}(س) \times ل(س)\right) =$

$-٦ \times -٤ = ٢٤$

جـ) $\underset{س \to ١}{\text{نها}} \dfrac{ل(س)}{\text{هـ}(س)} = \dfrac{-٤}{-٦} = \dfrac{٢}{٣}$

د) $\underset{س \to ٢}{\text{نها}} \left(ل(س)\right)^٤ =$

$\left(٢^2 - ٢ \times ٢ - ٣\right)^٤ = (-٣)^٤$

$= ٨١$

هـ) $\underset{س \to ٢}{\text{نها}} \sqrt[٣]{١ - ل(س)} =$

$\sqrt[٣]{١ - -٣} = \sqrt[٣]{٤}$

و) $\underset{س \to -١}{\text{نها}} \dfrac{ل(س)}{\text{هـ}(س)} =$

$\dfrac{١ + ٢ - ٣}{١ + ١ - ٦} = \dfrac{\text{صفر}}{-٤}$

$=$ صفر

س٢ $\underset{س \to ٢}{\text{نها}}\ ٢ع(س) = ١٠ \Leftarrow$

$\dfrac{٢}{٢} \underset{س \to ٢}{\text{نها}} (ع(س)) = \dfrac{١٠}{٢} \Leftarrow$

$\boxed{\underset{س \to ٢}{\text{نها}}\ ع(س) = ٥}$

$٣ \underset{س \to ٢}{\text{نها}}\ ل(س) + ١ = ٧ \Leftarrow ٣ \underset{س \to ٢}{\text{نها}}\ ل(س) = ٦$

$\Leftarrow \boxed{\underset{س \to ٢}{\text{نها}}\ ل(س) = ٢}$

أ) $\underset{س \to ٢}{\text{نها}} \left(٢ع(س) + ل(س)\right) =$

$٢ \times ٥ + ٢ = ١٢$

ب) $\underset{س \to ٢}{\text{نها}} \left(ع^٣(س) - ل^2(س)\right) =$

$٥^٣ - ٢^2 = ١٢٥ - ٤ = ١٢١$

جـ) $\underset{س \to ٢}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt{ل(س)}}{ع(س)} = \dfrac{\sqrt{٢}}{٥}$

د) $\underset{س \to ٢}{\text{نها}} \left(ع^2(س) - ل^2(س)\right) =$

$= ٥^2 - ٢^2$

$٢٥ - ٤ = ٢١$

س٣

أ) نها $|س^٢ - ٢٥|$ ، $س \leftarrow ٥^+$

$س^٢ - ٢٥ = ٠ \Leftarrow س = \mp ٥$

$+$ ، $-$ ، $+$ (عند -٥ ، ٥)

نها $|س^٢ - ٢٥|$ = نها $(س^٢ - ٢٥)$ ، $س \leftarrow ٥^+$

= صفر

ب) نها $|س^٢ - ٢٥|$ = نها $(٢٥ - س^٢)$ ، $س \leftarrow ٥^-$

= صفر

جـ) نها $|س - ٢|$ = نها $(٢ - س)$ ، $س \leftarrow ٢^-$

= صفر

د) نها $|س^٢ - ٦٤|$ ، $س \leftarrow ٨$

$+$ ، $-$ ، $+$ (عند -٨ ، ٨)

نها $س^٢ - ٦٤$ = صفر ، $س \leftarrow ٨^+$

نها $٦٤ - س^٢$ = صفر ، $س \leftarrow ٨^-$

$\Leftarrow$ نها $|س^٢ - ٦٤|$ = صفر ، $س \leftarrow ٨$

هـ) نها $[س - ٣]$ ، $س \leftarrow -٤$

ل = ١ (-٥ ، -٤ ، -٣)

$[س - ٣] = \begin{cases} -٧ & ، -٥ \leq س < -٤ \\ -٦ & ، -٤ \leq س < -٣ \end{cases}$

نها $[س - ٣] = -٦$ ، $س \leftarrow -٤^+$

نها $[س - ٣] = -٧$ ، $س \leftarrow -٤^-$

$\Leftarrow$ نها $[س - ٣]$ ، $س \leftarrow -٤$ غير موجودة

و) نها $(س\,[س] + |س - ١|)$ ، $س \leftarrow ١$

$[س] = \begin{cases} ٠ & ، ٠ \leq س < ١ \\ ١ & ، ١ \leq س < ٢ \end{cases}$

نها $(س \times ٠ + س) = ٠ + ١ = ١$ ، $س \leftarrow ١^-$

نها $(س \times ١ + س) = ١ + ١ = ٢$ ، $س \leftarrow ١^+$

نها $(س\,[س] + |س - ١|)$ = غير موجودة ، $س \leftarrow ١$

ز) نها $\sqrt{٥ - س}$ ، $س \leftarrow ٥^-$

$٥ - س = ٠$

$س = ٥$

$+$ ، $-$ (عند ٥)

نها $\sqrt{٥ - س}$ = صفر ، $س \leftarrow ٥^-$

تابع س٣

ح) $\lim_{س \to ١} \sqrt{١ - س^٢}$

$١ - س^٢ = صفر \leftarrow س^٢ = ±١$

(− | −١ | + + | ١ | −)

$\lim_{س \to ١^+} \sqrt{١ - س^٢}$ = غير موجودة

$\lim_{س \to ١^-} \sqrt{١ - س^٢}$ = صفر

$\lim_{س \to ١} \sqrt{١ - س^٢}$ = غير موجودة

ط) $\lim_{س \to -٢} \sqrt{س^٢ + ٤س + ٤}$

$\lim_{س \to -٢} \sqrt{(س+٢)^٢} = \lim_{س \to -٢} |س+٢|$

(−(س+٢) | −٢ | س+٢)

$س + ٢ = ٠$
$س = -٢$

$\lim_{س \to -٢^+} |س+٢| = صفر$

$\lim_{س \to -٢^-} |س+٢| = صفر$

$\lim_{س \to -٢} |س+٢| = صفر$

س٤ $\lim_{س \to جـ} \sqrt{٦ - س}$

$٦ - س = صفر \leftarrow س = ٦$

(+ | ٦ | −)

$\lim_{س \to جـ} \sqrt{٦ - س}$ غير موجودة على

$(∞ ، ٦]$

س٥ $ق(س) = [٠٫٢ س] = [\frac{٢}{١٠} س]$

$ل = \frac{١}{\frac{٢}{١٠}} = \frac{١٠}{٢} = ٥$

(−٥ | ٠ | ٥)

$ق(س) = \{ -١ ، -٥ \le س < ٠$

$\lim_{س \to جـ} [٠٫٢ س] = -١$

قيم جـ هي (−٥، ٠)

س٦ $[٦ - س] = ٣ ، ٢ < س \le ٣$

$\lim_{س \to ٣^+} (س^٢ - ٤أ) = \lim_{س \to ٣^-} ٣$

$٩ - ٤أ = ٣ \leftarrow \frac{٤أ}{٤} = \frac{٦}{٤}$

$\Leftarrow أ = \frac{٦}{٤} = \frac{٣}{٢}$.

س٧ أ) نها ل(٣س − ٣)
س ← ٢

ص = ٣س − ٣

س ← ٢ ⟸ ص ← ٣

نها ل(٣س − ٣) = نها ل(ص)
س ← ٢ ص ← ٣
= ١

ب) نها (س + ل(س)) =
س ← ٢

نها س + نها ل(س)
س ← ٢ س ← ٢

٢ + ١ = ٣

س٨
أ) نها (ه(س) + ع(س)) =
س ← ١

نها ه(س) + نها ع(س) =
س ← ١ س ← ١

صفر + ٢ = ٢

ب) نها (ه(س) × ع(س)) =
س ← ٢

نها ه(س) × نها ع(س)
س ← ٢ س ← ٢

١ × ١ = ١

جـ) نها (٢ ه(س − ١) + ع(س))
س ← ١

ص = س − ١
س ← ١
ص ← صفر

٢ نها ه(ص) + نها ع(س)
ص ← ٠ س ← ١

٢ × ٢ + ٢ = ٦

س٩ ه كثير حدود ويمر بالنقطة (−٣، ٤)
فيكون ه(−٣) = ٤ ومنه نها ه(س) = ٤
س ← −٣

نها (س − ل(س)) = −١٠
س ← −٣

−٣ − نها ل(س) = −١٠ ⟸
س ← −٣

نها ل(س) = ٧
س ← −٣

نها ه²(س) − نها ٢ ل(س)
س ← −٣ س ← −٣

٤² − ٢ × ٧ = ١٦ − ١٤ = ٢

س١٠ لأن ع كثير حدود وباقي القسمة
على س − ٢ يساوي ٥ فيكون
ع(٢) = ٥ ومنه نها ع(س) = ٥
س ← ٢

∴ نها (٣ع(س) + ٤س²) =
س ← ٢

٣ × ٥ + ٤(٢)²

١٥ + ١٦ = ٣١

* يمكن حساب النهاية للاقترانات العادية (كثيرات الحدود) والنسبية واقترانات الجذور والاقترانات المتشعبة مباشرة وذلك من خلال التعويض المباشر.

* عند التعويض المباشر تنتج الحالات التالية:

$\boxed{1}$ $\frac{\text{عدد}}{\text{عدد}}$ هنا النهاية موجوده (معرفه)

$\boxed{2}$ $\frac{\text{صفر}}{\text{عدد}}$ = صفر.

$\boxed{3}$ $\frac{\text{عدد}}{\text{صفر}}$ = ∞ (النهاية غير موجوده)

$\boxed{4}$ $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ = قيمة غير معرفه

** اذا كان ناتج التعويض $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ نلجأ إلى احدى الطرق التالية:

١) التحليل الى العوامل ويستخدم عند وجود اقتران نسبي ويشمل

أ- اخراج عامل مشترك (اما متغير او عدد ثابت)

ب- فرق بين مربعين $س^2 - ص^2$

$س^2 - ص^2 = (س - ص)(س + ص)$

جـ- فرق بين مكعبين $س^3 - ص^3$

$س^3 - ص^3 = (س - ص)(س^2 + س ص + ص^2)$

د- مجموع مكعبين $س^3 + ص^3$

$س^3 + ص^3 = (س + ص)(س^2 - س ص + ص^2)$

هـ- عبارة تربيعية بالصورة

$أ س^2 + ب س + جـ$ ، أ، ب، جـ $\in$ ح
أ $\neq$ صفر

٢) خوارزمية القسمة (قسمة طويلة او تركيبية)

٣) توحيد المقامات (في حالة الكسور في البسط او المقام)

٤) الضرب بالمرافق (في حالة $\sqrt{}$ او $\sqrt[3]{}$ في البسط او المقام)

٤) الاستبدال

٥) التوزيع المنتظم (الفصل) ثم نلجأ للاضافه والطرح.

٦) اذا لم يحل السؤال على أي مما سبق نلجأ لقسمة كل من البسط والمقام على س - م حيث م هو الرقم الذي تؤول اليه س (س ← م)

مثال١: $\underset{س \leftarrow -1}{\text{نها}} \frac{3س + 1}{2س + 5} = \frac{-3 + 1}{-2 + 5} = \frac{-2}{3}$

مثال٢: $\underset{س \leftarrow 7}{\text{نها}} \frac{-10}{2 - س} = \frac{-10}{2 - 7} = \frac{-10}{-5} = 2$

مثال٣: $\underset{س \leftarrow -1}{\text{نها}} \frac{18}{(س + 1)^2} = \frac{18}{\text{صفر}}$ (غير موجوده)

مثال ١: $$\lim_{س \to ٥} \frac{٢٥ - س^٢}{٥ - س} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$$ (نحلل البسط)

$$\lim_{س \to ٥} \frac{\cancel{(٥ - س)}(٥ + س)}{\cancel{(٥ - س)}} = ٥ + ٥ = ١٠$$

مثال ٢: $$\lim_{س \to ٢} \frac{س^٢ - س - ٢}{س - ٢} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$$ (نحلل البسط)

$$\lim_{س \to ٢} \frac{\cancel{(س - ٢)}(س + ١)}{\cancel{س - ٢}} = ٢ + ١ = ٣ .$$

مثال ٣: $$\lim_{س \to -٢} \frac{س + ٢}{س^٣ + ٨} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$$ (نحلل المقام)

$$\lim_{س \to -٢} \frac{\cancel{س + ٢}}{\cancel{(س + ٢)}(س^٢ - ٢س + ٤)} = \lim_{س \to -٢} \frac{١}{س^٢ - ٢س + ٤}$$

$$= \frac{١}{٤ + ٤ + ٤} = \frac{١}{١٢} .$$

تذكر: اذا كان ق اقتراناً كثير حدود وكان ق(م) = ٠ فإن س − م عامل من عوامل ق(س).

مثال ٤: $$\lim_{س \to ٠} \frac{٦س}{س^٢ - ٢س} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$$

اخراج س عامل مشترك في المقام

$$\lim_{س \to ٠} \frac{٦س}{س(س - ٢)} = \lim_{س \to ٠} \frac{٦}{س - ٢} = \frac{٦}{-٢} = -٣$$

مثال ٥: ليكن
$$ق(س) = \begin{cases} \dfrac{٢٧س^٣ + ١}{٣س + ١} & ، س \neq -\frac{١}{٣} \\ ٥ & ، س = -\frac{١}{٣} \end{cases}$$

احسب $\lim_{س \to -\frac{١}{٣}} ق(س)$.

الحل: $$\lim_{س \to -\frac{١}{٣}} ق(س) = \lim_{س \to -\frac{١}{٣}} \frac{٢٧س^٣ + ١}{٣س + ١} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$$

$$\lim_{س \to -\frac{١}{٣}} \frac{٢٧س^٣ + ١}{٣س + ١} = \lim_{س \to -\frac{١}{٣}} \frac{\cancel{(٣س + ١)}(٩س^٢ - ٣س + ١)}{\cancel{٣س + ١}}$$

$$٩(-\tfrac{١}{٣})^٢ - ٣ \times -\tfrac{١}{٣} + ١ = ١ + ١ + ١$$
$$= ٣$$

سؤال: احسب قيم النهايات التالية

١) $$\lim_{س \to ٢} \frac{س^٢ + س - ٦}{س - ٢}$$

٢) $$\lim_{س \to ٢} \frac{س^٣ - ٣س^٢ + ٤}{س^٢ - ٤س + ٤}$$

نهايات اقترانات كسرية.

مثال ١: $\underset{\text{س}\leftarrow ٥}{\text{نها}} \dfrac{\frac{٢}{\text{س}} - \frac{٢}{٥}}{\text{س} - ٥} = \dfrac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ (توحيد مقامات)

$\underset{\text{س}\leftarrow ٥}{\text{نها}} \dfrac{\frac{٢\times٥ - ٢\text{س}}{٥\text{س}}}{\text{س} - ٥} = \underset{\text{س}\leftarrow ٥}{\text{نها}} \dfrac{\frac{١٠ - ٢\text{س}}{٥\text{س}}}{\text{س} - ٥}$

$\underset{\text{س}\leftarrow ٥}{\text{نها}} \dfrac{٢\cancel{(٥ - \text{س})}^{-١}}{٥\text{س}} \times \dfrac{١}{\cancel{\text{س} - ٥}} =$

$\underset{\text{س}\leftarrow ٥}{\text{نها}} \dfrac{-٢}{٥\text{س}} = \dfrac{-٢}{٢٥}$.

مثال ٢: $\underset{\text{س}\leftarrow ٠}{\text{نها}} \dfrac{١}{\text{س}} \left(\dfrac{١}{(\text{س}+١)^٢} - ١ \right)$

$\underset{\text{س}\leftarrow ٠}{\text{نها}} \dfrac{١}{\text{س}} \left(\dfrac{١ - (\text{س}+١)^٢}{(\text{س}+١)^٢} \right) =$

$\underset{\text{س}\leftarrow ٠}{\text{نها}} \dfrac{١}{\text{س}} \left(\dfrac{١ - (\text{س}^٢ + ٢\text{س} + ١)}{(\text{س}+١)^٢} \right)$

$\underset{\text{س}\leftarrow ٠}{\text{نها}} \dfrac{١}{\text{س}} \left(\dfrac{\cancel{١} - \text{س}^٢ - ٢\text{س} - \cancel{١}}{(\text{س}+١)^٢} \right)$

$\underset{\text{س}\leftarrow ٠}{\text{نها}} \dfrac{١}{\cancel{\text{س}}} \left(\dfrac{-\cancel{\text{س}}(\text{س}+٢)}{(\text{س}+١)^٢} \right)$

$\underset{\text{س}\leftarrow ٠}{\text{نها}} - \dfrac{(\text{س}+٢)}{(\text{س}+١)^٢}$.

$= -٢$.

سؤال ١: جد $\underset{\text{هـ}\leftarrow ٠}{\text{نها}} \dfrac{(\text{ن}+\text{هـ})^٢ - \text{ن}^٢}{\text{هـ}}$

سؤال ٢: جد $\underset{\text{س}\leftarrow ٣}{\text{نها}} \dfrac{\text{س}^٢ + ٤\text{س} + ٣}{\text{س} - ٣}$

سؤال ٣: جد

$\underset{\text{س}\leftarrow ٥}{\text{نها}} \left(\dfrac{٢}{\text{س}} - \dfrac{٢}{٥} \right) \left(\dfrac{١}{\text{س}^٢ - ٢٥} \right)$

مثال ٣: جد $\underset{\text{س}\leftarrow ١}{\text{نها}} \left(\dfrac{\text{س}^٤ - ٢\text{س}^٢ + ١}{\text{س}^٣ - ١} \right)$

$\underset{\text{س}\leftarrow ١}{\text{نها}} \dfrac{\text{س}^٤ - ٢\text{س}^٢ + ١}{\text{س}^٣ - ١} = \dfrac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

نقوم بتحليل البسط باستخدام القسمة التركيبية أو القسمة الطويلة فينتج أن

$\text{س}^٤ - ٢\text{س}^٢ + ١ = (\text{س} - ١)(\text{س}^٣ + \text{س}^٢ - \text{س} - ١)$

$\underset{\text{س}\leftarrow ١}{\text{نها}} \dfrac{\text{س}^٤ - ٢\text{س}^٢ + ١}{\text{س}^٣ - ١} = \underset{\text{س}\leftarrow ١}{\text{نها}} \dfrac{\cancel{(\text{س}-١)}(\text{س}^٣ + \text{س}^٢ - \text{س} - ١)}{\cancel{(\text{س}-١)}(\text{س}^٢ + \text{س} + ١)} = \text{صفر}$

سؤال ٤: جد

$\underset{\text{س}\leftarrow ٢}{\text{نها}} \dfrac{\text{س}^٣ - ٣\text{س} - ٢}{\text{س}^٣ - ٨}$

سؤال ٥: جد $\underset{\text{س}\leftarrow \text{أ}}{\text{نها}} \dfrac{\text{س}^٣ - \text{أ}^٣}{\text{س} - \text{أ}}$.

مثال 1: جد $\lim\limits_{\text{س}\to 2} \dfrac{\sqrt{4-4\text{س}+\text{س}^2}}{\text{س}^2+\text{س}-6}$

لاحظ ان $\dfrac{\sqrt{4-4\text{س}+\text{س}^2}}{\text{س}^2+\text{س}-6} = \dfrac{\sqrt{(\text{س}-2)^2}}{\text{س}^2+\text{س}-6}$

$= \dfrac{|\text{س}-2|}{\text{س}^2+\text{س}-6}$

نعيد تعريف الاقتران $|2-\text{س}|$

$2-\text{س}$ $-$ | 2 | $+$ $\text{س}-2$

$$\frac{|\text{س}-2|}{\text{س}^2+\text{س}-6} = \begin{cases} \dfrac{\text{س}-2}{\text{س}^2+\text{س}-6} & \text{،} \ \text{س} > 2 \\[2ex] \dfrac{2-\text{س}}{\text{س}^2+\text{س}-6} & \text{،} \ \text{س} < 2 \end{cases}$$

النقطة (2) هي نقطة التشعب لذلك نجد النهاية من اليمين ومن اليسار

$\lim\limits_{\text{س}\to 2^+} \dfrac{|\text{س}-2|}{\text{س}^2+\text{س}-6} = \lim\limits_{\text{س}\to 2^+} \dfrac{\text{س}-2}{(\text{س}-2)(\text{س}+3)}$

$\lim\limits_{\text{س}\to 2^+} \dfrac{1}{\text{س}+3} = \dfrac{1}{5}$.

$\lim\limits_{\text{س}\to 2^-} \dfrac{|\text{س}-2|}{\text{س}^2+\text{س}-6} = \lim\limits_{\text{س}\to 2^-} \dfrac{2-\text{س}}{(\text{س}-2)(\text{س}+3)}$

$\lim\limits_{\text{س}\to 2^-} \dfrac{-1}{\text{س}+3} = -\dfrac{1}{5}$.

∴ $\lim\limits_{\text{س}\to 2} \dfrac{\sqrt{4-4\text{س}+\text{س}^2}}{\text{س}^2+\text{س}-6}$ غير موجودة .

مثال 2: جد $\lim\limits_{\text{س}\to 2} \dfrac{\text{س}^2-1}{\text{س}-2}$

الحل: $\lim\limits_{\text{س}\to 2} \dfrac{\text{س}^2-1}{\text{س}-2} = \dfrac{2^2-1}{2-2} = \dfrac{3}{\text{صفر}}$ (ناتج التعويض)

∴ $\lim\limits_{\text{س}\to 2} \dfrac{\text{س}^2-1}{\text{س}-2}$ غير موجودة .

نتيجة: اذا كانت $\lim\limits_{\text{س}\to \text{أ}} \text{ق}(\text{س}) = \text{ل}$ ، ل عدد حقيقي ،
ل $\neq$ صفر ، $\lim\limits_{\text{س}\to \text{أ}} \text{هـ}(\text{س}) = \text{صفر}$ فإن
$\lim\limits_{\text{س}\to \text{أ}} \dfrac{\text{ق}(\text{س})}{\text{هـ}(\text{س})}$ غير موجودة .

مثال 3: جد $\lim\limits_{\text{س}\to 0^+} \dfrac{[\text{س}]}{\text{س}}$

الحل: يجب اعادة تعريف ق(س) بعين العدد صفر دون استعمال رمز أكبر عدد صحيح .

$\text{ق}(\text{س}) = \dfrac{0}{\text{س}}$ حيث $0 < \text{س} < 1$

∴ $\lim\limits_{\text{س}\to 0^+} \dfrac{[\text{س}]}{\text{س}} = \lim\limits_{\text{س}\to 0^+} \dfrac{0}{\text{س}} = \text{صفر}$.

مثال 4: $\lim\limits_{\text{س}\to 9} \sqrt{\text{س}-5} = \sqrt{4} = 2$

مثال 5: $\lim\limits_{\text{س}\to 5} \sqrt{\text{س}-5}$ غير موجودة $-$ | 5 | $+$

لأن $\lim\limits_{\text{س}\to 5^+} \sqrt{\text{س}-5} = \text{صفر}$

$\lim\limits_{\text{س}\to 5^-} \sqrt{\text{س}-5}$ = غير موجودة

$\Leftarrow$ $\lim\limits_{\text{س}\to 5} \sqrt{\text{س}-5}$ غير موجودة .

نهايات اقترانات كسرية

تذكر: مرافق $\sqrt{\text{ك}} - \sqrt{\text{هـ}}$ هو $\sqrt{\text{ك}} + \sqrt{\text{هـ}}$.

مثال ١: جد $\lim\limits_{\text{س}\to 3} \dfrac{2-\sqrt{\text{س}+1}}{\text{س}-3} = \dfrac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

نضرب بالمرافق

$$\lim_{\text{س}\to 3} \frac{2-\sqrt{\text{س}+1}}{\text{س}-3} \times \frac{2+\sqrt{\text{س}+1}}{2+\sqrt{\text{س}+1}}$$

$$\lim_{\text{س}\to 3} \frac{4-(\text{س}+1)}{(\text{س}-3)(2+\sqrt{\text{س}+1})}$$

$$\lim_{\text{س}\to 3} \frac{4-\text{س}-1}{(\text{س}-3)(2+\sqrt{\text{س}+1})}$$

$$\lim_{\text{س}\to 3} \frac{\overset{-1}{\cancel{3-\text{س}}}}{\cancel{(\text{س}-3)}(2+\sqrt{\text{س}+1})}$$

$$\lim_{\text{س}\to 3} \frac{-1}{2+\sqrt{\text{س}+1}} = \frac{-1}{2+2} = \frac{-1}{4}.$$

سؤال ١: جد $\lim\limits_{\text{س}\to 3} \dfrac{\text{س}^4-81}{\sqrt{3\text{س}}-3}$

سؤال ٢: جد $\lim\limits_{\text{س}\to 0} \dfrac{\sqrt{1+\text{س}+\text{س}^2}-\sqrt{1-\text{س}^2}}{\text{س}^2}$

مثال ٣: جد $\lim\limits_{\text{س}\to 5^+} \dfrac{\text{س}-5}{\sqrt{\text{س}-5}}$

$$\lim_{\text{س}\to 5^+} \frac{\text{س}-5}{\sqrt{\text{س}-5}} = \lim_{\text{س}\to 5^+} \frac{\text{س}-5}{\sqrt{\text{س}-5}} \times \frac{\sqrt{\text{س}-5}}{\sqrt{\text{س}-5}}$$

$$= \lim_{\text{س}\to 5^+} \sqrt{\text{س}-5} = \sqrt{5-5} = \text{صفر}$$

سؤال ٣: جد $\lim\limits_{\text{س}\to 3^+} \dfrac{\text{س}-3}{\sqrt{\text{س}-3}}$

سؤال ٤: جد $\lim\limits_{\text{س}\to 1} \dfrac{(1-\text{س}^2)^{\frac{1}{2}}}{(1-\text{س}^3)^{\frac{1}{2}}}$.

مثال ٢: جد $\lim\limits_{\text{س}\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{\text{س}+7}-2}{\text{س}-1}$

الحل: $\lim\limits_{\text{س}\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{\text{س}+7}-2}{\text{س}-1} = \dfrac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$.

نستخدم الاستبدال بوضع $\text{ص} = \sqrt[3]{\text{س}+7}$

$\text{ص}^3 = \text{س}+7$ عندما $\text{س}\to 1$ فإن $\text{ص}\to 2$

$$\lim_{\text{ص}\to 2} \frac{\text{ص}-2}{\text{ص}^3-7-1} = \lim_{\text{ص}\to 2} \frac{\text{ص}-2}{\text{ص}^3-8}$$

$$\lim_{\text{ص}\to 2} \frac{\cancel{\text{ص}-2}}{\cancel{(\text{ص}-2)}(\text{ص}^2+2\text{ص}+4)} = \frac{1}{12}.$$

مثال ٤: جد $\lim\limits_{\text{س}\to 8} \dfrac{\sqrt[3]{\text{س}}-2}{\text{س}-8}$

الحل: $\lim\limits_{\text{س}\to 8} \dfrac{\sqrt[3]{\text{س}}-2}{\text{س}-8} = \dfrac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ نضرب بالمرافق التكعيبي

$$\lim_{\text{س}\to 8} \frac{\sqrt[3]{\text{س}}-2}{\text{س}-8} \times \frac{\sqrt[3]{\text{س}^2}+2\sqrt[3]{\text{س}}+4}{\sqrt[3]{\text{س}^2}+2\sqrt[3]{\text{س}}+4}$$

$$\lim_{\text{س}\to 8} \frac{\cancel{\text{س}-8}}{\cancel{(\text{س}-8)}(\sqrt[3]{\text{س}^2}+2\sqrt[3]{\text{س}}+4)}$$

$$= \frac{1}{4+4+4} = \frac{1}{12}.$$

نهايات اقترانات كسرية

سؤال 1: جد $\lim\limits_{س \to 7} \dfrac{\sqrt[3]{س+1} - 2}{س - 7}$

المقدار	مرافقه التربيعي	حاصل ضربهما
$\sqrt{س} - 4$	$\sqrt{س} + 4$	$س - 16$
$\sqrt{س+5} - 2$	$\sqrt{س+5} + 2$	$س + 5 - 4$
$س + \sqrt{س+3} - 2$ $(س-2) + \sqrt{س+3}$	$(س-2) - \sqrt{س+3}$	$(س-2)^2 - (س+3)$

المقدار	مرافقه التكعيبي	حاصل ضربهما
$س - 3$	$س^2 + 3س + 9$	$س^3 - 27$
$\sqrt[3]{س} - 2$	$\sqrt[3]{س^2} + 2\sqrt[3]{س} + 4$	$س - 8$

مثال 1: جد $\lim\limits_{س \to 8} \dfrac{\sqrt{2 + \sqrt[3]{س}} - 2}{س - 8}$

$\lim\limits_{س \to 8} \dfrac{\sqrt{2 + \sqrt[3]{س}} - 2}{س - 8} = \dfrac{صفر}{صفر}$ استبدال ثم مرافق.

$ص = \sqrt[3]{س} \longrightarrow ص^3 = س$ ، $س \to 8$ ، $ص \to 2$

$$\lim_{ص \to 2} \frac{\sqrt{2+ص} - 2}{ص^3 - 8} \times \frac{\sqrt{2+ص} + 2}{\sqrt{2+ص} + 2}$$

$$\lim_{ص \to 2} \frac{2 + ص - 4}{(ص^3 - 8)(\sqrt{2+ص} + 2)}$$

$$\lim_{ص \to 2} \frac{\cancel{ص - 2}}{\cancel{(ص-2)}(ص^2 + 2ص + 4)(\sqrt{2+ص} + 2)} = \frac{1}{48}$$

مثال 2: جد $\lim\limits_{س \to -8} \dfrac{\sqrt{1-س} - 3}{2 + \sqrt[3]{س}}$ ناتج التعويض $\dfrac{صفر}{صفر}$

الحل: قسمة البسط والمقام على $س + 8$

$$\lim_{س \to -8} \frac{\dfrac{\sqrt{1-س} - 3}{س + 8}}{\dfrac{2 + \sqrt[3]{س}}{س + 8}}$$

$\lim\limits_{س \to -8} \dfrac{\sqrt{1-س} - 3}{س + 8}$ ⟵ مرافق تربيعي

$\lim\limits_{س \to -8} \dfrac{2 + \sqrt[3]{س}}{س + 8}$ ⟵ مرافق تكعيبي

$$= \frac{-\frac{1}{6}}{\frac{1}{12}} = -2$$

* عليك حل السؤال باستخدام مرافق التربيعي ومرافق التكعيبي.

سؤال 2: جد $\lim\limits_{س \to 3} \dfrac{\sqrt[3]{س^2 + 18} - 3}{س - 3}$

سؤال 3: جد $\lim\limits_{س \to 0} \dfrac{\sqrt{س^2 + 4}}{س}$

سؤال 4: جد $\lim\limits_{س \to 1} \dfrac{\sqrt[3]{س} - 1}{\sqrt{س} - 1}$

١) جد كلًّا من النهايات الآتية:

أ) $\lim\limits_{س \leftarrow ٨} \dfrac{(س + ١)^{٢} - ٨١}{س - ٨}$

ب) $\lim\limits_{س \leftarrow \frac{١}{٢}} \dfrac{٨س^{٣} - ١}{س - \frac{١}{٢}}$

جـ) $\lim\limits_{س \leftarrow \frac{٧}{٢}} \dfrac{\sqrt{٢س + ٩} - ٤}{٢س - ٧}$

د) $\lim\limits_{س \leftarrow ٢} \dfrac{\sqrt[٣]{س + ٢٥} - ٣}{س - ٢}$

هـ) $\lim\limits_{س \leftarrow ٠} \dfrac{١}{س}\left(\dfrac{١}{س + ٥} - \dfrac{١}{٥ - س}\right)$

و) $\lim\limits_{س \leftarrow ١} \dfrac{س^{٣} + ٣س - ٤}{س^{٢} - ١}$

ز) $\lim\limits_{س \leftarrow -٣} \dfrac{\sqrt[٣]{س - ٥} + ٢}{س^{٣} + ٢٧}$

٢) إذا كان ل(س) = $\begin{cases} \dfrac{٣س^{٢} - ٥س + ٢}{٢س^{٢} - ٣س + ١} & ،\ س > ١ \\ ب & ،\ س \leq ١ \end{cases}$

فجد قيمة ب علما بأن $\lim\limits_{س \leftarrow ١}$ ل(س) موجودة.

٣) جد كلًّا من النهايات الآتية:

أ) $\lim\limits_{س \leftarrow ٢} \dfrac{|س - ٣| - ١}{س - ٢}$

ب) $\lim\limits_{س \leftarrow \frac{٥}{٢}} \dfrac{٢س - [٢س]}{٤س^{٢} - ٢٥}$

جـ) $\lim\limits_{س \leftarrow ٢} \dfrac{\sqrt{٤ - ٤س + س^{٢}}}{س - ٢}$

د) $\lim\limits_{س \leftarrow ٧} \dfrac{\sqrt{س - ٧}}{\sqrt{س^{٢} - ٤٩}}$

هـ) $\lim\limits_{ص \leftarrow ١} \dfrac{ص - ٤\sqrt{ص} + ٣}{ص^{٢} - ١}$

إرشاد

(اكتب المقدار $ص - ٤\sqrt{ص} + ٣$ على الصورة $(ص + ٣) - ٤\sqrt{ص}$ ، واستخدم المرافق)

٤) جد: $\underset{س \leftarrow ٨}{نهـا} \dfrac{س\sqrt[٣]{س} - ١٦}{س - ٨}$

٥) ما مجموعة قيم أ التي تجعل $\underset{س \leftarrow أ}{نهـا} [٢س] = ٣$ ؟

٦) إذا كان $د(س) = \begin{cases} \dfrac{س^٢ - ٤}{س + ٢} & ، \quad س > ك \\ ٣س & ، \quad س < ك \end{cases}$

فما مجموعة قيم ك التي تجعل $\underset{س \leftarrow ك}{نهـا} د(س)$ موجودة؟

٧) جد: $\underset{س \leftarrow ٣}{نهـا} \left(\dfrac{س}{٩ - س^٢} + \dfrac{٣س}{س^٣ - ٩س} \right)$

٨) جد: $\underset{س \leftarrow ٠}{نهـا} \dfrac{(٤٩)^{س} - ٧^{س}}{١ - ٧^{س}}$

٩) إذا كان أ،ب $\in$ ح وكان:

$ق(س) = \begin{cases} \dfrac{س^٣ - أس + ٣}{س - ١} & ، \quad س > ١ \\ ب س - ٥ & ، \quad س < ١ \end{cases}$

فجد قيم أ ، ب التي تجعل $\underset{س \leftarrow ١}{نهـا} ق(س)$ موجودة.

١٠) إذا كانت $\underset{س \leftarrow ٢}{نهـا} \dfrac{أس^٢ - ب س - ٦}{س - ٢} = ٥$

فجد قيم كل من أ ، ب .

١١) إذا كانت $\underset{س \leftarrow -٢}{نهـا} \dfrac{ق(س) + ٥}{س + ٢} = ٩$ ، وكان ق(س) كثير حدود، فجـ

أ) $\underset{س \leftarrow -٢}{نهـا} \left(ق(س) + ٢س \right)$ ب) $\underset{س \leftarrow -٢}{نهـا} \left(ق^٢(س)$

حل تمارين ومسائل صفحة ٣٧

س ٢) أ) $\underset{\text{س}\to ٨}{\text{نها}} \dfrac{(\text{س}+١)^٢ - ٨١}{٨ - \text{س}} = \dfrac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

تحليل البسط (فرق بين مربعين)

$\underset{\text{س}\to ٨}{\text{نها}} \dfrac{(\text{س}+١-٩)(\text{س}+١+٩)}{٨-\text{س}}$

$\underset{\text{س}\to ٨}{\text{نها}} \dfrac{\overset{-١}{\cancel{(\text{س}-٨)}}(\text{س}+١٠)}{\cancel{٨-\text{س}}} = -١٨ .$

ب) $\underset{\text{س}\to \frac{١}{٢}}{\text{نها}} \dfrac{٨\text{س}^٣ - ١}{\text{س} - \frac{١}{٢}} = \dfrac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

$\underset{\text{س}\to \frac{١}{٢}}{\text{نها}} \dfrac{(٢\text{س}-١)(٤\text{س}^٢+٢\text{س}+١)}{\text{س}-\frac{١}{٢}}$

اخراج ٢ عامل مشترك

$\underset{\text{س}\to \frac{١}{٢}}{\text{نها}} \dfrac{٢\cancel{(\text{س}-\frac{١}{٢})}(٤\text{س}^٢+٢\text{س}+١)}{\cancel{\text{س}-\frac{١}{٢}}}$

$٢\left(٤(\frac{١}{٢})^٢ + ٢\times\frac{١}{٢} + ١\right) = ٢(٣) = ٦ .$

جـ) $\underset{\text{س}\to \frac{٧}{٢}}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt{٢\text{س}+٩} - ٤}{٢\text{س} - ٧} = \dfrac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

$\underset{\text{س}\to \frac{٧}{٢}}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt{٢\text{س}+٩} - ٤}{٢\text{س}-٧} \times \dfrac{\sqrt{٢\text{س}+٩}+٤}{\sqrt{٢\text{س}+٩}+٤}$

$\underset{\text{س}\to \frac{٧}{٢}}{\text{نها}} \dfrac{٢\text{س}+٩-١٦}{(٢\text{س}-٧)(\sqrt{٢\text{س}+٩}+٤)}$

$\underset{\text{س}\to \frac{٧}{٢}}{\text{نها}} \dfrac{\cancel{٢\text{س}-٧}}{\cancel{(٢\text{س}-٧)}(\sqrt{٢\text{س}+٩}+٤)}$

$\underset{\text{س}\to \frac{٧}{٢}}{\text{نها}} \dfrac{١}{\sqrt{٢\text{س}+٩}+٤} = \dfrac{١}{٤+٤} = \dfrac{١}{٨}$

د) $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt[٣]{\text{س}+٢٥} - ٣}{\text{س} - ٢} = \dfrac{\text{صفر}}{\text{صفر}} .$

$\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt[٣]{\text{س}+٢٥} - ٣}{\text{س}-٢} \times \dfrac{(\sqrt[٣]{\text{س}+٢٥})^٢ + ٣\sqrt[٣]{\text{س}+٢٥} + ٩}{(\sqrt[٣]{\text{س}+٢٥})^٢ + ٣\sqrt[٣]{\text{س}+٢٥} + ٩}$

$\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نها}} \dfrac{\text{س}+٢٥-٢٧}{(\text{س}-٢)\left((\sqrt[٣]{\text{س}+٢٥})^٢ + ٣\sqrt[٣]{\text{س}+٢٥} + ٩\right)}$

$\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نها}} \dfrac{\cancel{\text{س}-٢}}{\cancel{(\text{س}-٢)}\left((\sqrt[٣]{\text{س}+٢٥})^٢ + ٣\sqrt[٣]{\text{س}+٢٥} + ٩\right)}$

$\dfrac{١}{٩+٩+٩} = \dfrac{١}{٢٧} .$

هـ) $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \dfrac{١}{\text{س}}\left(\dfrac{١}{٥+\text{س}} - \dfrac{١}{٥-\text{س}}\right) = \dfrac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

$\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \dfrac{١}{\text{س}}\left(\dfrac{١}{٥+\text{س}} - \dfrac{١}{٥-\text{س}}\right)$

$\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \dfrac{١}{\text{س}}\left(\dfrac{٥-\text{س}-٥-\text{س}}{(٥-\text{س})(٥+\text{س})}\right)$

$\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \dfrac{١}{\cancel{\text{س}}}\left(\dfrac{-٢\cancel{\text{س}}}{(٥-\text{س})(٥+\text{س})}\right)$

$\dfrac{-٢}{٥\times٥} = \dfrac{-٢}{٢٥} .$

تابع س١

و) $\lim\limits_{س \to ١} \dfrac{س^٣ + ٣س - ٤}{س^٢ - ١} = \dfrac{صفر}{صفر}$

نقسم $س^٣ + ٣س - ٤$ على $س^٢ - ١$ باستخدام خوارزمية القسمة

$$\lim_{س \to ١} \frac{س^٣ + ٣س - ٤}{س^٢ - ١} = \lim_{س \to ١} \left(س + \frac{٤س - ٤}{س^٢ - ١} \right)$$

$$\lim_{س \to ١} س + \lim_{س \to ١} \frac{٤س - ٤}{س^٢ - ١}$$

$$١ + \lim_{س \to ١} \frac{٤\cancel{(س - ١)}}{(س + ١)\cancel{(س - ١)}}$$

$$١ + \frac{٤}{١ + ١} = ١ + ٢ = ٣ .$$

ز) $\lim\limits_{س \to -٣} \dfrac{\sqrt[٣]{س - ٥} + ٢}{س^٣ - ٢٧} =$

$$\frac{\sqrt[٣]{-٣ - ٥} + ٢}{(-٣)^٣ - ٢٧}$$

$$\frac{\sqrt[٣]{-٨} + ٢}{-٢٧ - ٢٧}$$

$$\frac{-٢ + ٢}{-٥٤} = \frac{صفر}{-٥٤}$$

$= صفر$

بشرط $\lim\limits_{س \to ١} ل(س)$ موجودة $\Leftarrow$

$$\lim_{س \to ١^+} ل(س) = \lim_{س \to ١^-} ل(س)$$

$$\lim_{س \to ١^+} \frac{٣س^٢ - ٥س + ٢}{٢س^٢ - ٣س + ١} = \lim_{س \to ١^-} ب$$

$$\lim_{س \to ١^+} \frac{(٣س - ٢)\cancel{(س - ١)}}{(٢س - ١)\cancel{(س - ١)}} = ب$$

$$\lim_{س \to ١} \frac{٣س - ٢}{٢س - ١} = ب$$

$$\frac{١}{١} = ب \Leftarrow \boxed{ب = ١}$$

س٣) أ) $\lim\limits_{س \to ٢} \dfrac{|س - ٣| - ١}{س - ٢} = \dfrac{صفر}{صفر} .$

نعيد تعريف $|س - ٣|$

٣ − س	٣	س − ٣
−		+

$$|س - ٣| = \begin{cases} س - ٣ ، & س \geq ٣ \\ ٣ - س ، & س < ٣ \end{cases}$$

$$\lim_{س \to ٢} \frac{|س - ٣| - ١}{س - ٢} = \lim_{س \to ٢} \frac{٣ - س - ١}{س - ٢}$$

$$\lim_{س \to ٢} \frac{٢ - س}{س - ٢} = \lim_{س \to ٢} -١$$

$$= -١ .$$

حل ٣ ب) $\text{نها}_{س \leftarrow \frac{٥}{٢}} \dfrac{٢س - [س]}{٤س^٢ - ٢٥} =$

$= \dfrac{٢ \times \frac{٥}{٢} - [\frac{٥}{٢}]}{٤ \times (\frac{٥}{٢})^٢ - ٢٥} = \dfrac{٥ - ٢}{٢٥ - ٢٥}$

$= \dfrac{٣}{\text{صفر}} =$ غير موجودة.

جـ) $\text{نها}_{س \leftarrow ٢} \dfrac{\sqrt{٤ - ٤س + س^٢}}{٢ - س} = \dfrac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

$\text{نها}_{س \leftarrow ٢} \dfrac{\sqrt{(٢ - س)(٢ - س)}}{٢ - س} = \text{نها}_{س \leftarrow ٢} \dfrac{\sqrt{(٢ - س)^٢}}{٢ - س}$

$\text{نها}_{س \leftarrow ٢} \dfrac{|٢ - س|}{٢ - س}$ ، إشارة $٢ - س$: $+$ | $-$ عند ٢

$|٢ - س| = \begin{cases} س - ٢ \ ، \ س \geq ٢ \\ ٢ - س \ ، \ س < ٢ \end{cases}$

$\text{نها}_{س \leftarrow ٢^+} \dfrac{س - ٢}{٢ - س} = -١$

$\text{نها}_{س \leftarrow ٢^-} \dfrac{٢ - س}{٢ - س} = ١$

$\text{نها}_{س \leftarrow ٢} \dfrac{|٢ - س|}{٢ - س}$ غير موجودة.

د) $\text{نها}_{س \leftarrow ٧} \dfrac{\sqrt{س - ٧}}{\sqrt{س^٢ - ٤٩}}$

لاحظ أن كلاً من البسط والمقام غير معرفين ليسار العدد ٧، وعليه فإنهما غير معرفين حول العدد ٧ فتكون كل منهما غير موجودة عندما تؤول س إلى ٧ وعليه فإن

$\text{نها}_{س \leftarrow ٧} \dfrac{\sqrt{س - ٧}}{\sqrt{س^٢ - ٤٩}}$ غير موجودة.

هـ) $\text{نها}_{ص \leftarrow ١} \dfrac{ص - ٤\sqrt{ص} + ٣}{ص^٢ - ١} = \dfrac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$.

$\text{نها}_{ص \leftarrow ١} \dfrac{(ص + ٣) - ٤\sqrt{ص}}{ص^٢ - ١} \times \dfrac{(ص + ٣) + ٤\sqrt{ص}}{(ص + ٣) + ٤\sqrt{ص}}$

$\text{نها}_{ص \leftarrow ١} \dfrac{(ص + ٣)^٢ - ١٦ص}{(ص - ١)(ص + ١)((ص + ٣) + ٤\sqrt{ص})}$

$\text{نها}_{ص \leftarrow ١} \dfrac{ص^٢ + ٦ص + ٩ - ١٦ص}{(ص - ١)(ص + ١)((ص + ٣) + ٤\sqrt{ص})}$

$\text{نها}_{ص \leftarrow ١} \dfrac{ص^٢ - ١٠ص + ٩}{(ص - ١)(ص + ١)((ص + ٣) + ٤\sqrt{ص})}$

$\text{نها}_{ص \leftarrow ١} \dfrac{(ص - ٩)\cancel{(ص - ١)}}{\cancel{(ص - ١)}(ص + ١)((ص + ٣) + ٤\sqrt{ص})}$

$= \dfrac{-٨}{٢(٤ + ٤)} = \dfrac{-١}{٢}$.

تابع حل التمارين

س٤ $\underset{\text{س}\to ٨}{\text{نها}} \dfrac{\text{س}\sqrt[٣]{\text{س}} - ١٦}{\text{س} - ٨} = \dfrac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

اضافة وطرح ٢س للبسط

$\underset{\text{س}\to ٨}{\text{نها}} \dfrac{\text{س}\sqrt[٣]{\text{س}} - ١٦ + ٢\text{س} - ٢\text{س}}{\text{س} - ٨}$

$\underset{\text{س}\to ٨}{\text{نها}} \dfrac{\text{س}\sqrt[٣]{\text{س}} - ٢\text{س}}{\text{س} - ٨} + \underset{\text{س}\to ٨}{\text{نها}} \dfrac{٢\text{س} - ١٦}{\text{س} - ٨}$

$\underset{\text{س}\to ٨}{\text{نها}} \dfrac{\text{س}(\sqrt[٣]{\text{س}} - ٢)}{\text{س} - ٨} + \underset{\text{س}\to ٨}{\text{نها}} \dfrac{٢\cancel{(\text{س} - ٨)}}{\cancel{\text{س} - ٨}}$

$\underset{\text{س}\to ٨}{\text{نها}}\ \text{س} \times \underset{\text{س}\to ٨}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt[٣]{\text{س}} - ٢}{\text{س} - ٨} + ٢$

$٨ \times \underset{\text{س}\to ٨}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt[٣]{\text{س}} - ٢}{\text{س} - ٨} + ٢$

$\cancel{٨} \times \dfrac{١}{\cancel{١٢}_{٣}} + ٢ = ٢ + \dfrac{٢}{٣} = ٢\dfrac{٢}{٣}$

$\underset{\text{س}\to ٨}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt[٣]{\text{س}} - ٢}{\text{س} - ٨} \times \dfrac{\sqrt[٣]{\text{س}^٢} + ٢\sqrt[٣]{\text{س}} + ٤}{\sqrt[٣]{\text{س}^٢} + ٢\sqrt[٣]{\text{س}} + ٤}$

$\underset{\text{س}\to ٨}{\text{نها}} \dfrac{\cancel{(\text{س} - ٨)}}{\cancel{(\text{س} - ٨)})(\sqrt[٣]{\text{س}^٢} + ٢\sqrt[٣]{\text{س}} + ٤)}$

$\dfrac{١}{١٢}$

يمكن حل السؤال بإضافة وطرح

$٨\sqrt[٣]{\text{س}}$

س٥ $\underset{\text{س}\to \text{م}}{\text{نها}} [٢\text{س}] = ٣$

$[٢\text{م}] = ٣$

$\dfrac{٣}{٢} \leqslant \dfrac{٢}{٢}\text{م} < \dfrac{٤}{٢}$

$\dfrac{٣}{٢} \leqslant \text{م} < ٢$

$[\dfrac{٣}{٢} ، ٢)$

س٦ $\underset{\text{س}\to \text{ك}}{\text{نها}}\ \text{ق(س)}$ موجوده $\Leftarrow$

$\underset{\text{س}\to \text{ك}^+}{\text{نها}}\ \text{ق(س)} = \underset{\text{س}\to \text{ك}^-}{\text{نها}}\ \text{ق(س)}$

$\underset{\text{س}\to \text{ك}^+}{\text{نها}} \dfrac{\text{س}^٢ - ٤}{\text{س} + ٢} = \underset{\text{س}\to \text{ك}^-}{\text{نها}}\ ٣\text{س}$

$\underset{\text{س}\to \text{ك}^+}{\text{نها}} \dfrac{(\text{س} - ٢)\cancel{(\text{س} + ٢)}}{\cancel{\text{س} + ٢}} = ٣\text{ك}$

$\text{ك} - ٢ = ٣\text{ك}$

$\dfrac{٢\text{ك}}{٢} = \dfrac{-٢}{٢} \Leftarrow \text{ك} = -١$

تابع تمارين ومسائل :

س٧) $\lim_{\text{س}\to ٣} \left(\frac{\text{س}}{٩-\text{س}^٢} + \frac{٣-\text{س}}{\text{س}^٣-٩\text{س}} \right)$

$\lim_{\text{س}\to ٣} \left(\frac{\text{س}}{(٣-\text{س})(٣+\text{س})} + \frac{٣-\text{س}}{\text{س}(\text{س}^٢-٩)} \right)$

$\lim_{\text{س}\to ٣} \left(\frac{\text{س}}{(٣-\text{س})(٣+\text{س})} + \frac{٣-\cancel{\text{س}}}{\cancel{\text{س}}(\text{س}-٣)(\text{س}+٣)} \right)$

$\lim_{\text{س}\to ٣} \left(\frac{-\text{س}}{(\text{س}-٣)(\text{س}+٣)} + \frac{٣}{(\text{س}-٣)(\text{س}+٣)} \right)$

$\lim_{\text{س}\to ٣} \left(\frac{\overset{-١}{\cancel{٣-\text{س}}}}{(\text{س}+٣)\cancel{(\text{س}-٣)}} \right) = \frac{-١}{٦}$.

س٨) $\lim_{\text{س}\to ٠} \frac{(٤٩)^{\text{س}} - ٧^{\text{س}}}{١-٧^{\text{س}}} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$.

$\lim_{\text{س}\to ٠} \frac{(٤٩)^{\text{س}} - ٧^{\text{س}}}{١-٧^{\text{س}}} = \lim_{\text{س}\to ٠} \frac{٧^{٢\text{س}} - ٧^{\text{س}}}{١-٧^{\text{س}}}$.

اخراج $٧^{\text{س}}$ عامل مشترك .

$\lim_{\text{س}\to ٠} \frac{٧^{\text{س}}(٧^{\text{س}}-١)}{١-٧^{\text{س}}}$

$\lim_{\text{س}\to ٠} ٧^{\text{س}} \times -١$

$٧^{٠} \times -١ = ١ \times -١ = -١$

س٩) $\lim_{\text{س}\to ١} \frac{\text{س}^٣ - \text{أ}\text{س} + ٣}{\text{س} - ١}$ موجودة يعني

ان البسط = صفر والمقام = صفر .

اي ان $١^٣ - \text{أ}\times ١ + ٣ = \text{صفر} \Leftarrow \boxed{\text{أ} = ٤}$

$\lim_{\text{س}\to ١^+} \text{ق(س)} = \lim_{\text{س}\to ١^-} \text{ق(س)}$

$\lim_{\text{س}\to ١^+} \frac{\text{س}^٣ - ٤\text{س} + ٣}{\text{س} - ١} = \lim_{\text{س}\to ١^-} \text{ب س} - ٥$

$\lim_{\text{س}\to ١^+} \frac{\cancel{(\text{س}-١)}(\text{س}^٢+\text{س}-٣)}{\cancel{\text{س}-١}} = \text{ب} - ٥$

$-١ = \text{ب} - ٥ \Leftarrow \boxed{\text{ب} = ٤}$

س١٠) بما أن النهاية موجودة ⇐ البسط = صفر

$٤\text{أ} - ٢\text{ب} - ٦ = \text{صفر} \Leftarrow \boxed{\text{ب} = ٢\text{أ} - ٣}$

وايضاً $\lim_{\text{س}\to ٢} \frac{(\text{أ}\text{س}+٣)\cancel{(\text{س}-٢)}}{\cancel{\text{س}-٢}} = ٥$

$٢\text{أ} + ٣ = ٥$

$٢\text{أ} = ٢ \Leftarrow \boxed{\text{أ} = ١}$

$\text{ب} = ٢\text{أ} - ٣$

$\text{ب} = ٢ - ٣$

$\boxed{\text{ب} = -١}$

* أسئلة متنوعة على نهايات اقترانات كسرية؟

سؤال: أوجد قيمة النهايات التالية

① $\text{نها}_{\text{س}\to 2} \; -7$

② $\text{نها}_{\text{س}\to 4} \; \frac{1}{2}$

③ $\text{نها}_{\text{س}\to -1} \; (3\text{س} - 6)$

④ $\text{نها}_{\text{س}\to 3} \; \frac{\text{س}^2 - 3\text{س}}{\text{س}^3 + 2\text{س} + 5}$

⑤ $\text{نها}_{\text{س}\to 3} \; \frac{\sqrt[3]{\text{س} + 5} - 4\text{س}}{\text{س}^2 - 4}$

⑥ $\text{نها}_{\text{س}\to 1} \; \frac{\frac{4}{\text{س}^2 + 1} - \frac{12}{\text{س} + 3}}{\text{س}^3 - 2}$

⑦ $\text{نها}_{\text{س}\to 2} \; \frac{\text{س}^2 + 5}{(\text{س} - 2)^2}$

⑧ $\text{نها}_{\text{س}\to 3} \; \frac{4\text{س} - 12}{\text{س} - 3}$

⑨ $\text{نها}_{\text{س}\to 1} \; \frac{\text{س}^2 - \text{س}}{1 - \text{س}}$

⑩ $\text{نها}_{\text{س}\to 0} \; \frac{3\text{س}^3 - 10\text{س}^2}{2\text{س}^2}$

⑪ $\text{نها}_{\text{س}\to 3} \; \frac{\text{س}^2 - 3\text{س}}{9 - \text{س}^2}$

⑫ $\text{نها}_{\text{س}\to 3} \; \frac{\text{س}^4 - 81}{6 - 2\text{س}}$

⑬ $\text{نها}_{\text{س}\to 1} \; \frac{(\text{س} + 1)^2 - 4}{4\text{س} - 4}$

⑭ $\text{نها}_{\text{س}\to 2} \; \frac{\text{س}^2 - \text{س} - 2}{3\text{س} - 6}$

⑮ $\text{نها}_{\text{س}\to -5} \; \frac{\text{س}^2 + 9\text{س} + 20}{3\text{س}^2 - 75}$

⑯ $\text{نها}_{\text{س}\to 0} \; \frac{(\text{س} + 5)^2 - 25}{(\text{س} + 1)^4 - 1}$

⑰ $\text{نها}_{\text{س}\to 1} \; \frac{(\text{س} + 3)^3 - 27}{\text{س}^3 - 1}$

⑱ $\text{نها}_{\text{س}\to 1} \; \frac{\text{س} - \frac{1}{\text{س}}}{\frac{1}{\text{س}^2} - \text{س}^2}$

⑲ $\text{نها}_{\text{س}\to -2} \; \frac{\frac{1}{\text{س}} + \frac{1}{2}}{\frac{1}{\text{س}^3} + \frac{1}{8}}$

١) $\lim\limits_{س \to ٢} -٧ = -٧$

٢) $\lim\limits_{س \to ٤} \frac{١}{٢} = \frac{١}{٢}$

٣) $\lim\limits_{س \to -١} (٣س - ٦) = -٣ - ٦ = -٩$

٤) $\lim\limits_{س \to ٣} \frac{س^٢ - ٣س}{س^٣ + ٢س + ٥} = \frac{٩ - ٩}{٢٧ + ٦ + ٥} = \text{صفر}$

٥) $\lim\limits_{س \to ٣} \frac{\sqrt[٣]{س + ٥} - ٤س}{س^٢ - ٤} = \frac{\sqrt[٣]{٨} - ١٢}{٩ - ٤}$

$= \frac{٢ - ١٢}{٥} = \frac{-٧}{٥}$.

٦) $\lim\limits_{س \to ١} \frac{\frac{٤}{س^٢ + ١} - \frac{١٢}{س + ٣}}{س^٣ - ٢} = \frac{\frac{٤}{٢} - \frac{١٢}{٤}}{١ - ٢}$

$= \frac{٢ - ٣}{-١} = \frac{-١}{-١} = ١$

٧) $\lim\limits_{س \to ٢} \frac{س^٢ + ٥}{٦(س - ٢)} = \frac{٤ + ٥}{٠} = \text{غير موجودة}$

٨) $\lim\limits_{س \to ٣} \frac{٤س - ١٢}{س - ٣} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

$\lim\limits_{س \to ٣} \frac{٤\cancel{(س - ٣)}}{\cancel{س - ٣}} = ٤$.

٩) $\lim\limits_{س \to ١} \frac{س^٢ - س}{١ - س} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

$\lim\limits_{س \to ١} \frac{س\,\overset{-١}{\cancel{(س - ١)}}}{\cancel{١ - س}} = \lim\limits_{س \to ١} (-س)$

$= -١$

١٠) $\lim\limits_{س \to ٠} \frac{٣س^٣ - ١٠س^٢}{٢س^٢} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

$\lim\limits_{س \to ٠} \frac{س^٢(٣س - ١٠)}{٢س^٢} = \frac{-١٠}{٢} = -٥$

١١) $\lim\limits_{س \to ٣} \frac{س^٢ - ٣س}{٩ - س^٢} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

$\lim\limits_{س \to ٣} \frac{س\,\overset{-١}{\cancel{(٣ - س)}}}{(٣ + س)\cancel{(٣ - س)}} = \frac{-٣}{٣ + ٣} = \frac{-٣}{٦} = \frac{-١}{٢}$

١٢) $\lim\limits_{س \to ٣} \frac{س^٤ - ٨١}{٦ - ٢س} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

$\lim\limits_{س \to ٣} \frac{(س^٢ - ٩)(س^٢ + ٩)}{٢(٣ - س)}$

$\lim\limits_{س \to ٣} \frac{\overset{-١}{\cancel{(س - ٣)}}(س + ٣)(س^٢ + ٩)}{٢\cancel{(٣ - س)}}$

$= -\frac{(٣ + ٣)(٩ + ٩)}{٢} = -\frac{٦ \times \overset{٩}{\cancel{١٨}}}{\cancel{٢}} = -٥٤$

13) $\lim_{\text{س} \to 1} \dfrac{(\text{س}+1)^2 - 4}{4\text{س} - 4} = \dfrac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

$\lim_{\text{س} \to 1} \dfrac{\text{س}^2 + 2\text{س} + 1 - 4}{4\text{س} - 4}$

$\lim_{\text{س} \to 1} \dfrac{\text{س}^2 + 2\text{س} - 3}{4(\text{س} - 1)}$

$\lim_{\text{س} \to 1} \dfrac{\cancel{(\text{س} - 1)}(\text{س} + 3)}{4\cancel{(\text{س} - 1)}} = \dfrac{4}{4} = 1$

* يمكن حل السؤال بالاستبدال

$\text{ص} = \text{س} + 1$

$(\text{س}+1)^2 - 4 = \text{ص}^2 - 4$

$= (\text{ص} - 2)(\text{ص} + 2)$ نعوض قيمة ص

$(\text{س} + 1 - 2)(\text{س} + 1 + 2)$

$(\text{س} - 1)(\text{س} + 3).$

$= \lim_{\text{س} \to 1} \dfrac{(\text{س}+1)^2 - 4}{4\text{س} - 4}$

$\lim_{\text{س} \to 1} \dfrac{\cancel{(\text{س} - 1)}(\text{س} + 3)}{4\cancel{(\text{س} - 1)}} = \dfrac{4}{4}$

$= 1$

14) $\lim_{\text{س} \to 2} \dfrac{\text{س}^2 - \text{س} - 2}{3\text{س} - 6} = \dfrac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

$\lim_{\text{س} \to 2} \dfrac{\cancel{(\text{س} - 2)}(\text{س} + 1)}{3\cancel{(\text{س} - 2)}} = \dfrac{3}{3} = 1$

15) $\lim_{\text{س} \to 5} \dfrac{\text{س}^2 + \text{س} + 20}{3\text{س}^2 - 75} = \dfrac{25 - 5 + 20}{75 - 75}$

$= \dfrac{40}{\text{صفر}} =$ غير موجودة .

16) $\lim_{\text{س} \to 0} \dfrac{(\text{س}+5)^2 - 25}{(\text{س}+1)^4 - 1} = \dfrac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

$\lim_{\text{س} \to 0} \dfrac{(\text{س} + \cancel{5} - \cancel{5})(\text{س} + 5 + 5)}{\left((\text{س}+1)^2 - 1\right)\left((\text{س}+1)^2 + 1\right)}$

$\lim_{\text{س} \to 0} \dfrac{\text{س}(\text{س} + 10)}{\cancel{(\text{س} + 1 - 1)}(\text{س} + 1 + 1)\left((\text{س}+1)^2 + 1\right)}$

$\lim_{\text{س} \to 0} \dfrac{\cancel{\text{س}}(\text{س} + 10)}{\cancel{\text{س}}(\text{س} + 2)\left((\text{س}+1)^2 + 1\right)}$

$\dfrac{10}{2(1 + 1)} = \dfrac{10}{4} = \dfrac{5}{2}$

١٧) $$\text{نها}_{س \to 1} \frac{(س+2)^3 - 27}{س^3 - 1} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$$

$$\text{نها}_{س \to 1} \frac{\left((س+2) - 3\right)\left((س+2)^2 + 3(س+2) + 9\right)}{(س-1)(س^2+س+1)}$$

$$\text{نها}_{س \to 1} \frac{\cancel{(س-1)}\left((س+2)^2 + 3س + 6 + 9\right)}{(س^2+س+1)\cancel{(س-1)}}$$

$$\frac{3^2 + 3 + 15}{3} = \frac{27}{3} = 9$$

١٨) $$\text{نها}_{س \to 1} \frac{س - \frac{1}{س}}{س^2 - \frac{1}{س^2}} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$$

$$\text{نها}_{س \to 1} \frac{\frac{س^2-1}{س}}{\frac{س^4-1}{س^2}}$$

$$\text{نها}_{س \to 1} \frac{\frac{(س+1)(س-1)}{س}}{\frac{(س^2+1)(س^2-1)}{س^2}}$$

$$\text{نها}_{س \to 1} \frac{\frac{(س+1)\cancel{(1-س)}}{س}}{\frac{(س^2+1)(س+1)(س-1)}{س^2}}$$

$$\text{نها}_{س \to 1} - \frac{\cancel{(1+س)}}{س} \times \frac{س^2}{(س^2+1)\cancel{(س+1)}}$$

$$\text{نها}_{س \to 1} \frac{-س}{س^2+1} = \frac{-1}{1+1} = \frac{-1}{2}$$

١٩) $$\text{نها}_{س \to -2} \frac{\frac{1}{س} + \frac{1}{2}}{\frac{1}{س^3} + \frac{1}{8}} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$$

$$= \text{نها}_{س \to -2} \frac{\frac{2+س}{2س}}{\frac{8+س^3}{8س^3}}$$

$$\text{نها}_{س \to -2} \frac{س+2}{\cancel{2س}} \times \frac{\cancel{8}^{4}\,\cancel{س^3}^{س^2}}{س^3+8}$$

$$\text{نها}_{س \to -2} \frac{\cancel{(س+2)} \times 4س^2}{(4-2س+س^2)\cancel{(س+2)}}$$

$$\text{نها}_{س \to -2} \frac{4س^2}{4-2س+س^2}$$

$$= \frac{4 \times 4}{4+4+4} = \frac{16}{12}$$

$$= \frac{4}{3}$$

تدريب 1 : جد كلاً من النهايات الآتية :

1) $\displaystyle \lim_{س \to -5} \frac{س^2 + 3س - 10}{س + 5} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

$\displaystyle \lim_{س \to -5} \frac{\cancel{(س+5)}(س-2)}{\cancel{س+5}} = -5 - 2 = -7$

2) $\displaystyle \lim_{س \to 3} \frac{س^2 + 1}{س - 3} = \frac{9+1}{3-3} = \frac{10}{\text{صفر}}$ غير موجودة

تدريب 2 : جد كلاً من النهايات التالية :

1) $\displaystyle \lim_{س \to 5} \left(\frac{2}{س} - \frac{2}{5}\right)\left(\frac{1}{س^2 - 25}\right) = \frac{0}{0}$

$\displaystyle \lim_{س \to 5} \left(\frac{2}{س} - \frac{2}{5}\right)\left(\frac{1}{س^2 - 25}\right) =$

$\displaystyle \lim_{س \to 5} \left(\frac{10 - 2س}{5س}\right)\left(\frac{1}{(س-5)(س+5)}\right)$

$\displaystyle \lim_{س \to 5} \left(\frac{2\cancel{(5-س)}^{\,-1}}{5س}\right)\left(\frac{1}{(س+5)\cancel{(س-5)}}\right)$

$\displaystyle \lim_{س \to 5} \frac{-2}{5س\,(س+5)} = \frac{-2}{(5\times5)(5+5)}$

$\displaystyle = \frac{-2}{25 \times 10} = \frac{-2}{250}$

---

2) $\displaystyle \lim_{س \to 2} \frac{س - 2}{\sqrt{س+34} - 6}$ ناتج التعويض $\frac{0}{0}$

$\displaystyle \lim_{س \to 2} \frac{س - 2}{\sqrt{س+34} - 6} \times \frac{\sqrt{س+34} + 6}{\sqrt{س+34} + 6}$

$\displaystyle \lim_{س \to 2} \frac{(س-2)(\sqrt{س+34} + 6)}{س + 34 - 36}$

$\displaystyle \lim_{س \to 2} \frac{\cancel{(س-2)}(\sqrt{س+34} + 6)}{\cancel{(س-2)}} = 6 + 6 = 12$

---

3) $\displaystyle \lim_{س \to 0} \frac{\sqrt{س^2+1} - \sqrt{1-2س^2}}{س^2} \times \frac{\sqrt{س^2+1} + \sqrt{1-2س^2}}{\sqrt{س^2+1} + \sqrt{1-2س^2}}$

$\displaystyle \lim_{س \to 0} \frac{س^2 + 1 - (1 - 2س^2)}{س^2\left(\sqrt{س^2+1} + \sqrt{1-2س^2}\right)}$

$\displaystyle \lim_{س \to 0} \frac{س^2 + \cancel{1} - \cancel{1} + 2س^2}{س^2\left(\sqrt{س^2+1} + \sqrt{1-2س^2}\right)}$

$\displaystyle \lim_{س \to 0} \frac{3\cancel{س^2}}{\cancel{س^2}\left(\sqrt{س^2+1} + \sqrt{1-2س^2}\right)}$

$\displaystyle \frac{3}{\sqrt{1} + \sqrt{1}} = \frac{3}{2}$

تدريب ٣ : جد كلاً من النهايات الآتية :

١) $\underset{\text{س}\leftarrow ٢^{+}}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt{\text{س}^٢-٤}}{\sqrt{\text{س}-٢}}$

$\text{س}^٢-٤=٠ \leftarrow \text{س}=\pm ٢$ $\quad \underset{-٢\quad\ ٢}{+\ |\ -\ |\ +}$

معرف على يمين العدد ٢

$\text{س}-٢=\text{صفر} \leftarrow \text{س}=٢$ $\quad \underset{٢}{-\ |\ +}$

معرف على يمين العدد ٢

$\Leftarrow \underset{\text{س}\leftarrow ٢^{+}}{\text{نها}} \sqrt{\dfrac{\text{س}^٢-٤}{\text{س}-٢}} = \underset{\text{س}\leftarrow ٢^{+}}{\text{نها}} \sqrt{\dfrac{(\text{س}-٢)(\text{س}+٢)}{\text{س}-٢}}$

$= \underset{\text{س}\leftarrow ٢^{+}}{\text{نها}} \sqrt{\text{س}+٢} = \sqrt{٤} = ٢$

٢) $\underset{\text{س}\leftarrow ٢}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt{\text{س}^٢-٤}}{\sqrt{\text{س}-٢}}$

كل من $\sqrt{\text{س}^٢-٤}$ ، $\sqrt{\text{س}-٢}$ غير معرف

على يسار العدد ٢

لذلك $\underset{\text{س}\leftarrow ٢^{-}}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt{\text{س}^٢-٤}}{\sqrt{\text{س}-٢}}$ غير موجودة

ومنه

$\underset{\text{س}\leftarrow ٢}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt{\text{س}^٢-٤}}{\sqrt{\text{س}-٢}}$ غير موجودة

تدريب ٤ : جد $\underset{\text{س}\leftarrow ٧}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt[٣]{\text{س}+١}-٢}{\text{س}-٧}$ ناتج التعويض $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

$\underset{\text{س}\leftarrow ٧}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt[٣]{\text{س}+١}-٢}{\text{س}-٧} \times \dfrac{\sqrt[٣]{\text{س}+١}^{\,٢}+٢\sqrt[٣]{\text{س}+١}+٤}{\sqrt[٣]{\text{س}+١}^{\,٢}+٢\sqrt[٣]{\text{س}+١}+٤} =$

$\underset{\text{س}\leftarrow ٧}{\text{نها}} \dfrac{\text{س}+١-٨}{(\text{س}-٧)(٤+٤+٤)} = \underset{\text{س}\leftarrow ٧}{\text{نها}} \dfrac{\cancel{\text{س}-٧}}{\cancel{(\text{س}-٧)}(١٢)}$

$= \dfrac{١}{١٢}$

١) جد كلًّا من النهايات الآتية:

أ) $\underset{س\to ٨}{\text{نهـا}} \dfrac{(س+١)^{٢} - ٨١}{(س-٨)}$

ب) $\underset{س\to ٨}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt[٣]{س} - ٢}{٤ - \dfrac{س}{٢}}$

جـ) $\underset{س\to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{١}{س}\left(\dfrac{١}{(٢+س)^{٢}} - \dfrac{١}{٤}\right)$

د) $\underset{س\to -٢}{\text{نهـا}} \dfrac{٥ - |٣س+١|}{س^{٣}+٨}$

هـ) $\underset{س\to ٣}{\text{نهـا}} \dfrac{٦ - س\sqrt{س+١}}{٩ - ٣س}$

و) $\underset{س\to ٥}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt{س^{٢} - ١٠س + ٢٥}}{س - ٥}$

ز) $\underset{س\to ١}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt{س^{٢} - ١}}{\sqrt{س - ١}}$

ح) $\underset{س\to ١}{\text{نهـا}} \dfrac{س^{٣} + ٣س - ٤}{س^{٢} - ١}$

ط) $\underset{س\to ٧^{+}}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt{س^{٢} - ٤٩}}{\sqrt{س - ٧}}$

ي) $\underset{س\to ٢,٥}{\text{نهـا}} \dfrac{٢س - [٢س]}{٤س^{٢} - ٢٥}$

ك) $\underset{س\to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt{١+س^{٢}} - \sqrt{١-س^{٢}}}{س^{٢}}$

٢) إذا كان ق كثير حدود، وكانت $\underset{س\to ٣}{\text{نهـا}} \dfrac{ق(س) + ٥}{س - ٣} = ٤$ ،

$\underset{س\to ٣}{\text{نهـا}} \left(ق(س) - ٢س + ٣ب\right) = ٧$ ، فجد قيمة الثابت ب.

٣) إذا كان ق(س) =

$$ق(س) = \begin{cases} \dfrac{٣ - س}{|س - ٣|} &، \quad س \geq ٣ \\ جـ س^{٢} - ٤ &، \quad س < ٣ \end{cases}$$

وكانت $\lim\limits_{س \to ٣}$ ق(س) موجودة، فجد قيمة الثابت جـ.

٤) إذا كانت $\lim\limits_{س \to ١} \dfrac{أس^{٢} + ٢ب س + ٢}{س - ١} = ١$ ، فجد قيمة كلٍّ من الثابتين أ ، ب.

٥) جد $\lim\limits_{س \to ٠} \dfrac{(٦٤)^{س} - ٨^{س}}{١ - ٨^{س}}$

٦) إذا كان ل(س) =

$$ل(س) = \begin{cases} \dfrac{س^{٣} - ٢٧}{٢س^{٢} + ٦س + ١٨} &، \quad س \geq ع \\ س + ٥ &، \quad س < ع \end{cases}$$

فجد قيمة الثابت ع التي تجعل $\lim\limits_{س \to ع}$ ل(س) موجودة.

٧) إذا كان $ق(س) = \dfrac{س^{٢} + ٥}{س^{٢} - ٥س + ٦}$

فجد قيم أ التي تجعل $\lim\limits_{س \to أ}$ ق(س) غير موجودة.

٨) إذا كانت $\lim\limits_{س \to ١} \dfrac{ق(س) - ٦}{س - ١} = ٨$ ، وكانت $\lim\limits_{س \to ١} \dfrac{س^{٢} + ٢س - ٣}{ق(س) - ٦} + ب = \dfrac{٣}{٢}$

فجد قيمة الثابت ب.

٩) إذا كان هـ كثير حدود، وكانت $\lim\limits_{س \to ٠} \dfrac{هـ(س) + ٥}{س} = \dfrac{١}{٢}$ ،

$\lim\limits_{س \to ٠} \left(هـ(س) - ٥ + ٣جـ \right) = ٢$ ، فجد قيمة الثابت جـ.

س ١) أ) $\lim\limits_{\text{س}\to 8} \dfrac{(\text{س}+1)^2 - 81}{\text{س} - 8} = \dfrac{0}{0}$ حلل

$\lim\limits_{\text{س}\to 8} \dfrac{(\text{س}+1-9)(\text{س}+1+9)}{\text{س}-8}$

$\lim\limits_{\text{س}\to 8} \dfrac{\cancel{(\text{س}-8)}(\text{س}+10)}{\cancel{\text{س}-8}} = 8+10 = 18$

ب) $\lim\limits_{\text{س}\to 8} \dfrac{\sqrt[3]{\text{س}} - 2}{4 - \frac{\text{س}}{2}} \times \dfrac{\sqrt[3]{\text{س}^2} + 2\sqrt[3]{\text{س}} + 4}{\sqrt[3]{\text{س}^2} + 2\sqrt[3]{\text{س}} + 4}$

$\lim\limits_{\text{س}\to 8} \dfrac{\text{س} - 8}{\frac{1}{2}(8 - \text{س})(4+4+4)}$ ‏(−١)

$\lim\limits_{\text{س}\to 2} \dfrac{-1}{12 \times \frac{1}{2}} = \dfrac{-1}{6}$.

جـ) $\lim\limits_{\text{س}\to 0} \dfrac{1}{\text{س}}\left(\dfrac{1}{(\text{س}+2)^2} - \dfrac{1}{4}\right) =$

$\lim\limits_{\text{س}\to 0} \dfrac{1}{\text{س}}\left(\dfrac{4 - (\text{س}+2)^2}{4(\text{س}+2)^2}\right)$

$\lim\limits_{\text{س}\to 0} \dfrac{1}{\text{س}}\left(\dfrac{4 - (\text{س}^2 + 4\text{س} + 4)}{4(\text{س}+2)^2}\right)$

$\lim\limits_{\text{س}\to 0} \dfrac{1}{\text{س}}\left(\dfrac{-\text{س}^2 - 4\text{س} \cancel{- 4 + 4}}{4(\text{س}+2)^2}\right)$

$\lim\limits_{\text{س}\to 0} \dfrac{1}{\cancel{\text{س}}}\left(\dfrac{\cancel{\text{س}}(-\text{س} - 4)}{4(\text{س}+2)^2}\right) = \dfrac{-4}{16} = \dfrac{-1}{4}$

د) $\lim\limits_{\text{س}\to -2} \dfrac{5 - |3\text{س}+1|}{\text{س}^3 + 8}$

نعيد تعريف $|3\text{س}+1|$

$3\text{س}+1 = \text{صفر} \leftarrow \text{س} = \dfrac{-1}{3}$

$-3\text{س}-1$ (−) ‏ | ‏ $3\text{س}+1$ (+) عند $\dfrac{-1}{3}$

$\lim\limits_{\text{س}\to -2} \dfrac{5 - (-3\text{س}-1)}{\text{س}^3 + 8} =$

$\lim\limits_{\text{س}\to -2} \dfrac{5 + 3\text{س} + 1}{(\text{س}+2)(\text{س}^2 - 2\text{س} + 4)}$

$\lim\limits_{\text{س}\to -2} \dfrac{3\text{س}+6}{(\text{س}+2)(\text{س}^2 - 2\text{س} + 4)} = \lim\limits_{\text{س}\to -2} \dfrac{3(\text{س}+2)}{(\text{س}+2)(\text{س}^2 - 2\text{س} + 4)}$

$= \dfrac{3}{4+4+4} = \dfrac{3}{12} = \dfrac{1}{4}$.

هـ) $\lim\limits_{\text{س}\to 3} \dfrac{6 - \text{س}\sqrt{\text{س}+1}}{9 - 3\text{س}} \times \dfrac{6 + \text{س}\sqrt{\text{س}+1}}{6 + \text{س}\sqrt{\text{س}+1}}$

$\lim\limits_{\text{س}\to 3} \dfrac{36 - \text{س}^2(\text{س}+1)}{(9 - 3\text{س})(6 + 3\sqrt{3+1})} = \lim\limits_{\text{س}\to 3} \dfrac{36 - \text{س}^3 - \text{س}^2}{12 \times (9 - 3\text{س})}$

$\lim\limits_{\text{س}\to 3} \dfrac{-\text{س}^3 - \text{س}^2 + 36}{12 \times 3(3 - \text{س})}$

نقسم $(-\text{س}^3 - \text{س}^2 + 36)$ على $(\text{س} - 3)$
قسمة تركيبية أو خوارزمية القسمة .

تابع حل فرع (هـ).

$$\text{نها}_{س \to ٣} \frac{\cancel{(س-٣)}(س^٢+٤س+١٢)}{٣\cancel{(س-٣)} \times ١٢} =$$

$$\frac{٣^٢+١٢+١٢}{٣٦} = \frac{٣٣}{٣٦} = \frac{١١}{١٢} .$$

(و) $\text{نها}_{س \to ٥} \frac{\sqrt{س^٢-١٠س+٢٥}}{س-٥} =$

$$\text{نها}_{س \to ٥} \frac{\sqrt{(س-٥)^٢}}{س-٥} = \text{نها}_{س \to ٥} \frac{|س-٥|}{س-٥}$$

$س-٥=٠ \leftarrow س=٥$

$٥-س$ ، $س-٥$ ؛ $-$ ، $+$ ؛ ٥

$$|س-٥| = \begin{cases} س-٥ ، & س \geq ٥ \\ ٥-س ، & س < ٥ \end{cases}$$

$$\text{نها}_{س \to ٥^+} \frac{س-٥}{س-٥} = \text{نها}_{س \to ٥^+} ١ = ١$$

$$\text{نها}_{س \to ٥^-} \frac{٥-س}{س-٥} = \text{نها}_{س \to ٥^-} -١ = -١$$

$\text{نها}_{س \to ٥} \frac{|س-٥|}{س-٥}$ غير موجودة .

(ز) $\text{نها}_{س \to ١} \frac{\sqrt{س^٢-١}}{\sqrt{س-١}}$

$س^٢-١=٠ ، \leftarrow س = \mp ١$ ؛ $+$ ، $-$ ، $+$ ؛ -١ ، ١

$س-١=٠ ، \leftarrow س=١$ ؛ $-$ ، $+$ ؛ ١

$\sqrt{س^٢-١}$ ، $\sqrt{س-١}$ غير معرفة على يسار العدد (١)

لذلك $\text{نها}_{س \to ١^-} \frac{\sqrt{س^٢-١}}{\sqrt{س-١}}$ غير موجودة

$\Leftarrow \text{نها}_{س \to ١} \frac{\sqrt{س^٢-١}}{\sqrt{س-١}}$ غير موجودة

(ح) $\text{نها}_{س \to ١} \frac{س^٣+٣س-٤}{س^٢-١}$

ناتج تعويض العدد (١) في البسط = صفر ⟸ (١) أحد الأصفار ⟸ $(س-١)$ أحد العوامل ⟸ نقسم البسط على $(س-١)$ فينتج

$$\text{نها}_{س \to ١} \frac{\cancel{(س-١)}(س^٢+س+٤)}{\cancel{(س-١)}(س+١)} = \frac{٦}{٢} = ٣$$

(ط) $\text{نها}_{س \to ٧^+} \frac{\sqrt{س^٢-٤٩}}{\sqrt{س-٧}}$

$س^٢-٤٩=٠ . \leftarrow س=\mp ٧$ ؛ $+$ ، $-$ ، $+$ ؛ -٧ ، ٧

$س-٧=٠ ، \leftarrow س=٧$ ؛ $-$ ، $+$ ؛ ٧

كل من $\sqrt{س^٢-٤٩}$ ، $\sqrt{س-٧}$ معرف على يمين العدد (٧)

لذلك $\text{نها}_{س \to ٧^+} \sqrt{\frac{س^٢-٤٩}{س-٧}} = \sqrt{\text{نها}_{س \to ٧} \frac{\cancel{(س-٧)}(س+٧)}{\cancel{س-٧}}}$

$$\text{نها}_{س \to ٧} \sqrt{س+٧} = \sqrt{١٤} .$$

تابع سؤال فرع (ي)

(ي) $$\text{نهـا}_{س \leftarrow ٢,٥} \frac{٢س - [٢س]}{٤س^٢ - ٢٥}$$

نعيد تعريف $[٢س]$ ل $= \frac{١}{٢}$

$$٢ \quad ٢,٥ \quad ٣$$

$$[٢س] = \begin{cases} ٥ \text{ ، } ٢,٥ \leq س < ٣ \\ ٤ \text{ ، } ٢ \leq س < ٢,٥ \end{cases}$$

$$\text{نهـا}_{س \leftarrow ٢,٥^+} \frac{\cancel{٢س - ٥}}{(٢س+٥)\cancel{(٢س-٥)}} = \frac{١}{١٠}$$

$$\text{نهـا}_{س \leftarrow ٢,٥^-} \frac{٢س - ٤}{(٢س+٥)(٢س-٥)} = \frac{\text{عدد}}{\text{صفر}}$$

= غير موجودة

$$\Leftarrow \text{نهـا}_{س \leftarrow ٢,٥} \frac{٢س - [٢س]}{٤س^٢ - ٢٥} = \text{غير موجودة}.$$

(ك) $$\text{نهـا}_{س \leftarrow ٠} \frac{\sqrt{١+س^٢} - \sqrt{١-س^٢}}{س^٢} \times \frac{\sqrt{١+س^٢} + \sqrt{١-س^٢}}{\sqrt{١+س^٢} + \sqrt{١-س^٢}}$$

$$\text{نهـا}_{س \leftarrow ٠} \frac{١+س^٢ - (١-س^٢)}{س^٢(\sqrt{١+س^٢} + \sqrt{١-س^٢})}.$$

$$\text{نهـا}_{س \leftarrow ٠} \frac{١+س^٢ - ١ + س^٢}{س^٢ \times ٢} = \frac{٢س^٢}{٢س^٢} = ١$$

سؤال بما أن $$\text{نهـا}_{س \leftarrow ٣} \frac{ق(س) + ٥}{س - ٣} = ٤$$

⇐ النهاية موجودة .

لكن ناتج تعويض المقام = صفر ⇐

ناتج تعويض البسط = صفر

$ق(٣) + ٥ = \text{صفر} \Leftarrow ق(٣) = -٥$.

ومنه $\text{نهـا}_{س \leftarrow ٣} ق(س) = -٥$ لأن ق كثير حدود

$$\text{نهـا}_{س \leftarrow ٣} (ق(س) - ٢س + ٣ب) = ٧$$

$$ق(٣) - ٦ + ٣ب = ٧$$

$$-٥ - ٦ + ٣ب = ٧$$

$$-١١ + ٣ب = ٧$$

$$٣ب = ١٨ \longleftarrow ب = ٦$$

سؤال ٣ $|س - ٣| = س - ٣$ عندما $س > ٣$

$$\text{نهـا}_{س \leftarrow ٣^+} \frac{٣ - س}{|س - ٣|} = \text{نهـا}_{س \leftarrow ٣^-} (جـ س^٢ - ٤)$$

$$\text{نهـا}_{س \leftarrow ٣^+} \frac{٣ - س}{س - ٣} = ٩جـ - ٤$$

$$-١ = ٩جـ - ٤$$

$$+٤ \qquad +٤$$

$$\frac{٣}{٩} = \frac{٩جـ}{٩}$$

$$جـ = \frac{١}{٣}$$

س٤ النهاية موجودة وتعويض المقام = صفر

فيكون تعويض البسط = صفر

$\Leftarrow \text{أ} + \text{ب}٢ + ٢ = \text{صفر}$

$\text{ب}٢ = -٢ - \text{أ} \leftarrow \boxed{\text{ب} = -١ - \frac{\text{أ}}{٢}}$

$$\lim_{\text{س}\to ١} \frac{\text{أس}^٢ + ٢(-١ - \frac{\text{أ}}{٢})\text{س} + ٢}{\text{س} - ١} = ١$$

$$\lim_{\text{س}\to ١} \frac{\text{أس}^٢ - ٢\text{س} - \text{أس} + ٢}{\text{س} - ١} = ١$$

$$\lim_{\text{س}\to ١} \frac{\text{أس}^٢ - \text{أس}}{\text{س} - ١} + \lim_{\text{س}\to ١} \frac{٢\cancel{(١-\text{س})}}{\cancel{\text{س} - ١}} = ١$$

(-١)

$$\lim_{\text{س}\to ١} \frac{\text{أس}\cancel{(\text{س}-١)}}{\cancel{\text{س} - ١}} + -٢ = ١$$

$$\lim_{\text{س}\to ١} \text{أس} - ٢ = ١$$

$\text{أ} - ٢ = ١$

$\boxed{\text{أ} = ٣}$

$\text{ب} = -١ - \frac{\text{أ}}{٢}$

$\text{ب} = -١ - \frac{٣}{٢}$

$\boxed{\text{ب} = \frac{-٥}{٢}}$

س٥ $\lim_{\text{س}\to ٠} \frac{(٦٤)^{\text{س}} - ٨^{\text{س}}}{١ - ٨^{\text{س}}}$

$$\lim_{\text{س}\to ٠} \frac{٨^{٢\text{س}} - ٨^{\text{س}}}{١ - ٨^{\text{س}}} = \lim_{\text{س}\to ٠} \frac{٨^{\text{س}}(٨^{\text{س}} - ١)}{١ - ٨^{\text{س}}}$$

(-١)

$$\lim_{\text{س}\to ٠} ٨^{\text{س}} \times -١ = ١ \times -١ = -١$$

س٦ $\lim_{\text{س}\to ٤} \text{ل(س)}$ موجودة $\Leftarrow$

$$\lim_{\text{س}\to ٤^+} \text{ل(س)} = \lim_{\text{س}\to ٤^-} \text{ل(س)}$$

$$\lim_{\text{س}\to ٤^+} \frac{(\text{س}-٣)\cancel{(\text{س}^٢ + ٣\text{س} + ٩)}}{٢\cancel{(\text{س}^٢ + ٣\text{س} + ٩)}} = \lim_{\text{س}\to ٤^-} (\text{ع س} + ٥)$$

$\frac{\text{ع} - ٣}{٢} = \text{ع} + ٥$

$\text{ع} - ٣ = ٢\text{ع} + ١٠$

$+٣ \qquad +٣$

$\text{ع} = ٢\text{ع} + ١٣$

$-٢\text{ع} \qquad -٢\text{ع}$

$-\text{ع} = ١٣ \Leftarrow \text{ع} = -١٣$

حل ٧: نهـا ق(س) غير موجودة ⟸ المقام = صفر
س ← ٣

س² − ٥س + ٦ = صفر

(س − ٣)(س − ٢) = صفر

س = ٣ ، ٢ .

حل ٨: بقسمة البسط والمقام على س − ١

$$\lim_{\text{س}\to 1} \frac{\frac{\text{س}^2 + 2\text{س} - 3}{\text{س} - 1}}{\frac{\text{ق(س)} - 6}{\text{س} - 1}} =$$

$$\frac{\lim_{\text{س}\to 1} \frac{(\text{س}+3)\cancel{(\text{س}-1)}}{\cancel{\text{س}-1}}}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{\text{س}\to 1} \frac{\text{س}^2 + 2\text{س} - 3}{\text{ق(س)} - 6} + \text{ب} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{1}{2} + \text{ب} = \frac{3}{2}$$

$$-\frac{1}{2} \qquad -\frac{1}{2}$$

$$\text{ب} = \frac{2}{2} = 1$$

حل ٩: النهاية موجودة وتعويض المقام = صفر

فيكون تعويض البسط = صفر

هـ(٠) + ٥ = صفر ⟸ هـ(٠) = −٥

نهـا هـ(س) = −٥ لأنه هـ كثير حدود
س ← ٠

نهـا (هـ(س) − ٥ + ٣جـ) = ٢
س ← ٠

−٥ − ٥ + ٣جـ = ٢

−١٠ + ٣جـ = ٢

+١٠ +١٠

$$\frac{3\text{جـ}}{3} = \frac{12}{3}$$

$$\boxed{\text{جـ} = 4}$$

(١) $\underset{س\leftarrow ١}{\text{نها}} \dfrac{س^{٢} + \sqrt{س} - ٢}{س - ١}$ نضيف ونطرح ١

$\underset{س\leftarrow ١}{\text{نها}} \dfrac{س^{٢} + \sqrt{س} - ٢}{س - ١} \mp ١$

$\underset{س\leftarrow ١}{\text{نها}} \dfrac{س^{٢} - ١}{س - ١} + \dfrac{\sqrt{س} - ١}{س - ١}$

$\underset{س\leftarrow ١}{\text{نها}} \dfrac{(س - ١)(س + ١)}{س - ١} + \underset{س\leftarrow ١}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt{س} - ١}{(\sqrt{س} - ١)(\sqrt{س} + ١)}$

$\underset{س\leftarrow ١}{\text{نها}} (س + ١) + \underset{س\leftarrow ١}{\text{نها}} \dfrac{١}{\sqrt{س} + ١}$

$٢ + \dfrac{١}{٢} = \dfrac{٥}{٢}$.

(٢) $\underset{س\leftarrow ٣}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt[٣]{س + ٥} - \sqrt{س + ١}}{س - ٣}$ إضافة ∓ ٢

$\underset{س\leftarrow ٣}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt[٣]{س + ٥} - ٢}{س - ٣} + \underset{س\leftarrow ٣}{\text{نها}} \dfrac{٢ - \sqrt{س + ١}}{س - ٣}$

$\underset{س\leftarrow ٣}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt[٣]{س + ٥} - ٢}{س - ٣} \times \dfrac{\sqrt[٣]{(س + ٥)^{٢}} + ٢\sqrt[٣]{س + ٥} + ٤}{\sqrt[٣]{(س + ٥)^{٢}} + ٢\sqrt[٣]{س + ٥} + ٤}$

$+ \underset{س\leftarrow ٣}{\text{نها}} \dfrac{٢ - \sqrt{س + ١}}{س - ٣} \times \dfrac{\sqrt{س + ١} + ٢}{\sqrt{س + ١} + ٢}$

$= \dfrac{١}{١٢} \text{ نها } \dfrac{\cancel{س - ٣}}{\cancel{س - ٣}} + \dfrac{١}{٤} \text{ نها } \dfrac{\overset{-١}{\cancel{٣ - س}}}{\cancel{س - ٣}}$

$= \dfrac{١}{١٢} + \dfrac{-١}{٤} = \dfrac{-٢}{١٢} = \dfrac{-١}{٦}$

(٣) $\underset{س\leftarrow ٢}{\text{نها}} \dfrac{س - ٢}{٣\sqrt{٣ - س} - \sqrt{٢س} - ١}$

نقسم على
س − ٢

$\underset{س\leftarrow ٢}{\text{نها}} \dfrac{١}{\dfrac{٣\sqrt{٣ - س} - \sqrt{٢س} - ١}{س - ٢} \mp ٣}$

$\underset{س\leftarrow ٢}{\text{نها}} \dfrac{١}{\dfrac{٣\sqrt{٣ - س} - ٣}{س - ٢} + \dfrac{٢ - \sqrt{٢س}}{س - ٢}}$

$\dfrac{١}{\dfrac{١}{٦} \underset{س\leftarrow ٢}{\text{نها}} \dfrac{٩(٣ - س) - ٩}{س - ٢} + \dfrac{١}{٤} \underset{س\leftarrow ٢}{\text{نها}} \dfrac{٤ - ٢س}{س - ٢}}$

$\dfrac{١}{\dfrac{١}{٦} \underset{س\leftarrow ٢}{\text{نها}} \dfrac{٩\overset{-١}{\cancel{(٢ - س)}}}{\cancel{س - ٢}} + \dfrac{١}{٤} \underset{س\leftarrow ٢}{\text{نها}} \dfrac{٢\overset{-١}{\cancel{(٢ - س)}}}{\cancel{س - ٢}}}$

$\dfrac{١}{\dfrac{-٩}{٦} + \dfrac{-٢}{٤}}$

$= \dfrac{١}{\dfrac{-٣}{٢} + \dfrac{-١}{٢}}$

$= \dfrac{١}{\dfrac{-٤}{٢}} = -\dfrac{١}{٢}$

(٤) $\displaystyle \text{نها}_{س \leftarrow ٣} \frac{س^٢ + \sqrt{س+١} + \sqrt{س+٦} - ١٤}{س - ٣}$

$\displaystyle = \text{نها}_{س \leftarrow ٣} \frac{س^٢ - ٩}{س - ٣} + \text{نها}_{س \leftarrow ٣} \frac{\sqrt{س+١} - ٢}{س - ٣} + \text{نها}_{س \leftarrow ٣} \frac{\sqrt{س+٦} - ٣}{س - ٣}$

$\displaystyle = \text{نها}_{س \leftarrow ٣} \frac{(س-٣)(س+٣)}{س - ٣} + \text{نها}_{س \leftarrow ٣} \frac{\sqrt{س+١} - ٢}{س - ٣} \times \frac{\sqrt{س+١} + ٢}{\sqrt{س+١} + ٢}$

$\displaystyle + \text{نها}_{س \leftarrow ٣} \frac{\sqrt{س+٦} - ٣}{س - ٣} \times \frac{\sqrt{س+٦} + ٣}{\sqrt{س+٦} + ٣}$

$\displaystyle = \text{نها}_{س \leftarrow ٣} س + ٣ + \frac{١}{٤} \text{نها}_{س \leftarrow ٣} \frac{س + ١ - ٤}{س - ٣} +$

$\displaystyle \frac{١}{٦} \text{نها}_{س \leftarrow ٣} \frac{س + ٦ - ٩}{س - ٣}$

$\displaystyle = ٦ + \frac{١}{٤} \text{نها}_{س \leftarrow ٣} \frac{\cancel{س - ٣}}{\cancel{س - ٣}} + \frac{١}{٦} \text{نها}_{س \leftarrow ٣} \frac{\cancel{س - ٣}}{\cancel{س - ٣}}$

$\displaystyle = ٦ + \frac{١}{٤} + \frac{١}{٦} = \frac{٨٢ + ٣ + ٢}{١٢}$

$\displaystyle = \frac{٨٧}{١٢}$.

(٥) $\displaystyle \text{نها}_{س \leftarrow ٤} \frac{س - ٤}{س - \sqrt{س+٥} - ١}$

$\displaystyle = \text{نها}_{س \leftarrow ٤} \frac{١}{\dfrac{س - \sqrt{س+٥} - ١}{س - ٤}}$ $٤ \mp$

$\displaystyle = \frac{١}{\text{نها}_{س \leftarrow ٤} \dfrac{\cancel{س - ٤}}{\cancel{س - ٤}} + \text{نها}_{س \leftarrow ٤} \dfrac{٣ - \sqrt{س+٥}}{س - ٤}}$

$\displaystyle = \frac{١}{١ + \text{نها}_{س \leftarrow ٤} \dfrac{٣ - \sqrt{س+٥}}{س - ٤}}$

$\displaystyle = \frac{١}{١ + \frac{١}{٦} \text{نها}_{س \leftarrow ٤} \dfrac{٤ - س}{س - ٤}}$

$\displaystyle = \frac{١}{١ + \frac{١}{٦} \times -١} = \frac{١}{\frac{٥}{٦}} = \frac{٦}{٥}$.

(٥) $\displaystyle \text{نها}_{س \leftarrow ١} \frac{\sqrt{س}\,(س+١)^٢ - ٤}{س - ١}$ $\mp (س+١)^٢$ أو $\mp ٤\sqrt{س}$

$\displaystyle = \text{نها}_{س \leftarrow ١} \frac{\sqrt{س}\,(س+١)^٢ - (س+١)^٢}{س - ١} + \text{نها}_{س \leftarrow ١} \frac{(س+١)^٢ - ٤}{س - ١}$

$\displaystyle = \text{نها}_{س \leftarrow ١} \frac{(س+١)^٢ \cancel{(\sqrt{س} - ١)}}{(\sqrt{س} + ١)\cancel{(\sqrt{س} - ١)}} + \text{نها}_{س \leftarrow ١} \frac{(س+١+٢)\cancel{(س+١-٢)}}{\cancel{س - ١}}$

$\displaystyle = \frac{٤}{٢} + ٤$.

$= ٦$

(٦) $\text{نها}_{س \leftarrow ٤} \dfrac{(س+١)^٢ \sqrt{س} - ٥٠}{س - ٤} \quad \mp ٢٥\sqrt{س}$

$= \text{نها}_{س \leftarrow ٤} \dfrac{(س+١)^٢\sqrt{س} - ٢٥\sqrt{س}}{س-٤} + \text{نها}_{س \leftarrow ٤} \dfrac{٢٥\sqrt{س} - ٥٠}{س-٤}$

$= \text{نها}_{س \leftarrow ٤} \dfrac{\sqrt{س}\left((س+١)^٢ - ٢٥\right)}{س-٤} + \text{نها}_{س \leftarrow ٤} \dfrac{٢٥(\sqrt{س}-٢)}{س-٤}$

$= ٢\ \text{نها}_{س \leftarrow ٤} \dfrac{(س+١-٥)(س+١+٥)}{\cancel{س-٤}} + ٢٥\ \text{نها}_{س \leftarrow ٤} \dfrac{\sqrt{س}-٢}{(\sqrt{س}-٢)(\sqrt{س}+٢)}$

$= ٢\ \text{نها}_{س \leftarrow ٤} (س+٦) + ٢٥\ \text{نها}_{س \leftarrow ٤} \dfrac{١}{\sqrt{س}+٢}$

$= ٢ \times ١٠ + ٢٥ \times \dfrac{١}{٤}$

$= \dfrac{٨٠}{٤} + \dfrac{٢٥}{٤} = \dfrac{١٠٥}{٤}$

(٧) اذا كانت $\text{نها}_{س \leftarrow ١} \dfrac{د(س) - ٢}{س - ١} = ٥$

فاوجد $\text{نها}_{س \leftarrow ١} \dfrac{د(س) - ٢س}{س-١}$

الحل: $\text{نها}_{س \leftarrow ١} \dfrac{د(س) - ٢س}{س-١} \quad \mp ٢$

$\text{نها}_{س \leftarrow ١} \dfrac{د(س) - ٢}{س-١} + \text{نها}_{س \leftarrow ١} \dfrac{٢ - ٢س}{س-١}$

$= ٥ + \text{نها}_{س \leftarrow ١} \dfrac{٢\overset{-١}{\cancel{(١-س)}}}{\cancel{س-١}}$

$= ٥ + -٢ = ٣$

(٨) اذا كانت $\text{نها}_{س \leftarrow ٣} \dfrac{د(س) - ٢٧}{س-٣} = -٤$

فاوجد $\text{نها}_{س \leftarrow ٣} \dfrac{س^٣ - د(س)}{س-٣}$

الحل: $\text{نها}_{س \leftarrow ٣} \dfrac{س^٣ - د(س)}{س-٣} \quad \mp ٢٧$

$\text{نها}_{س \leftarrow ٣} \dfrac{س^٣ - ٢٧}{س-٣} + \text{نها}_{س \leftarrow ٣} \dfrac{٢٧ - د(س)}{س-٣}$

$\text{نها}_{س \leftarrow ٣} \dfrac{\cancel{(س-٣)}(س^٢+٣س+٩)}{\cancel{س-٣}} + ٤$

$٢٧ + ٤ = ٣١$

(٩) اذا كانت $\text{نها}_{س \leftarrow ١} \dfrac{د(س) - ٥س}{س-١} = ٧$

فاوجد $\text{نها} \dfrac{٢س - ٢}{٥س - د(س)}$

الحل: $\text{نها}_{س \leftarrow ١} \dfrac{\dfrac{٢س-٢}{٢س-٢}}{\dfrac{٥س - د(س)}{٢س-٢}}$

$= \dfrac{١}{\text{نها}_{س \leftarrow ١} \dfrac{٥س - د(س)}{٢(س-١)}}$

$= \dfrac{١}{-\dfrac{١}{٢}\ \text{نها}_{س \leftarrow ١} \dfrac{د(س) - ٥س}{س-١}}$

$= \dfrac{١}{-\dfrac{١}{٢} \times ٧} = \dfrac{-٢}{٧}$

(١٠) إذا كانت $\underset{س\to ٢}{\text{نها}} \dfrac{٢د(س) - ٨}{س - ٢} = -٣$

فأوجد قيمة $\underset{س\to ٢}{\text{نها}} \dfrac{٣د(س) - ٣س^٢}{س^٢ - ٤}$

الحل: $\underset{س\to ٢}{\text{نها}} \dfrac{٢د(س) - ٨}{س - ٢} = -٣$

$\dfrac{٢}{٢} \underset{س\to ٢}{\text{نها}} \dfrac{د(س) - ٤}{س - ٢} = \dfrac{-٣}{٢}$

$\underset{س\to ٢}{\text{نها}} \dfrac{٣د(س) - ٣س^٢}{س^٢ - ٤} \mp ١٢$

$\underset{س\to ٢}{\text{نها}} \dfrac{٣د(س) - ١٢}{س^٢ - ٤} + \underset{س\to ٢}{\text{نها}} \dfrac{١٢ - ٣س^٢}{س^٢ - ٤}$

$\underset{س\to ٢}{\text{نها}} \dfrac{٣(د(س) - ٤)}{(س - ٢)(س + ٢)} + \underset{س\to ٢}{\text{نها}} \dfrac{٣\cancel{(٤ - س^٢)}^{-١}}{\cancel{(س^٢ - ٤)}}$

$٣ \times \dfrac{-٣}{٢} \times \dfrac{١}{٤} + -٣$

$\dfrac{-٩}{٨} - ٣ = \dfrac{-٩}{٨} - \dfrac{٢٤}{٨} = \dfrac{-٣٣}{٨}$

(١١) $\underset{س\to ١}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt{س} - \sqrt[٣]{س}}{\sqrt[٤]{س} - \sqrt[٣]{س}}$

نفرض أن $ص = \sqrt[١٢]{س} \Leftarrow س = ص^{١٢}$

$\underset{ص\to ١}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt{ص^{١٢}} - \sqrt[٣]{ص^{١٢}}}{\sqrt[٤]{ص^{١٢}} - \sqrt[٣]{ص^{١٢}}}$ ، $س \to ١$ ، $ص \to ١$

$\underset{ص\to ١}{\text{نها}} \dfrac{ص^٦ - ص^٤}{ص^٣ - ص^٤} = \text{نها} \dfrac{ص^٤(ص^٢ - ١)}{-ص^٣(ص - ١)}$

$\underset{ص\to ١}{\text{نها}} \dfrac{-ص(ص - ١)(ص + ١)}{ص - ١} = -٢$

(١٢) $\underset{س\to ٢}{\text{نها}} \dfrac{(س + ٢)^٢ - ٥س - ٦}{س - ٢}$

$ص = س + ٢$
$ص - ٢ = س$
$س \to ٢$
$ص \to ٤$

$\underset{ص\to ٤}{\text{نها}} \dfrac{ص^٢ - ٥(ص - ٢) - ٦}{ص - ٢ - ٢}$

$\underset{ص\to ٤}{\text{نها}} \dfrac{ص^٢ - ٥ص + ١٠ - ٦}{ص - ٤}$

$\underset{ص\to ٤}{\text{نها}} \dfrac{ص^٢ - ٥ص + ٤}{ص - ٤}$

$\underset{ص\to ٤}{\text{نها}} \dfrac{(ص - ٤)(ص - ١)}{ص - ٤}$

$\underset{ص\to ٤}{\text{نها}} ص - ١ = ٤ - ١ = ٣$.

أسئلة وزارية :

١) اذا كان ق اقتران كثير حدود وكانت

$\lim_{س \to ٣} \frac{ق(س) + ٥}{س - ٣} = ٤$ وكانت

$\lim_{س \to ٣} \left(ق(س) - ٢س + ٣ب\right) = ٧$

فجد قيمة الثابت ب

٢) جد $\lim_{س \to ٠} \frac{١}{س}\left(\frac{١}{\sqrt{س+١}} - ١\right)$

٣) اذا كان ق(س) اقتران كثير حدود وكانت $\lim_{س \to ٢} \frac{ق(س)}{س} = ٣$ ، جد $\lim_{س \to ٢} \frac{ق^{٢}(س)}{س}$

٤) اذا كانت $\lim_{س \to -١} \frac{أس^{٢} - ب س - ٥}{س + ١} = -٧$

جد قيمة كل من الثابتين أ ، ب

٥) جد $\lim_{س \to ٣} \frac{س^{٢} - ٣س}{س - \sqrt{س+١} - ١}$

٦) $\lim_{س \to -٣} \frac{\frac{١}{س} + \frac{١}{٣}}{س^{٢} + ٢س - ٣}$

٧) جد $\lim_{س \to ٠} \frac{١}{س}\left(\frac{١}{(س+٢)^{٣}} - \frac{١}{٨}\right)$

٨) $ق(س) = \begin{cases} \frac{س - ٣}{|س - ٣|} & ، س > ٣ \\ جـ س^{٢} - ٤ & ، س < ٣ \end{cases}$

اذا كانت $\lim_{س \to ٣} ق(س)$ موجودة فما قيمة الثابت جـ ؟

٩) جد $\lim_{س \to ٢} \frac{\sqrt{٣س+٣} - \sqrt{٤س+١}}{س - ٢}$

١٠) $ق(س) = \begin{cases} \frac{س^{٢} - ٤س - ٥}{|س - ٥|} & ، س > ٥ \\ أ جتا \frac{\pi}{٥}س + ٥ & ، س < ٥ \end{cases}$

اذا كانت $\lim_{س \to ٥} ق(س)$ موجوده فما قيمة الثابت أ ؟

١١) $\lim_{س \to ٨} \frac{\sqrt[٣]{س} - ٢}{٤ - \frac{س}{٢}}$

١٢) $\lim_{س \to -٢} \frac{٥ - |٣س + ١|}{س^{٣} + ٨}$

١٣) $ق(س) = \begin{cases} ٢س^{٢} + \frac{١}{س} + \left[\frac{س}{٣}\right] & ، ١ \le س \le ٣ \\ \frac{|س - ٣|}{س^{٢} - ٩} & ، ٣ < س < ٤ \end{cases}$

جد $\lim_{س \to ٣} ق(س)$.

تابع اسئلة وزارية

١٤) جد $\underset{س \leftarrow ٤}{نها} \dfrac{\sqrt{س^{٣}} - ٢|س|}{٢س^{٢} - ٥س - ١٢}$

١٥) جد

$$\underset{س \leftarrow -٣}{نها} \frac{س + ٣}{س + \sqrt{٢س^{٢} - ٩}}$$

١٦) جد

$$\underset{س \leftarrow ٣}{نها} \left(\frac{س^{٢} + ٢٧}{س^{٢} - ٩} - \frac{س + ٣}{س - ٣} \right)$$

١٧) جد

$$\underset{س \leftarrow ٣}{نها} \frac{٦ - س\sqrt{س + ١}}{٩ - ٣س}$$

١٨) جد

$$\underset{س \leftarrow -٢٧}{نها} \frac{\sqrt{٩ - س} - ٦}{\sqrt[٣]{س} + ٣}$$

حل أسئلة دراية :

١) النهاية موجودة وتعويض المقام = صفر

∴ تعويض البسط = صفر

∴ $ق(٣) + ٥ = \text{صفر} \leftarrow ق(٣) = -٥$

لكن $\lim_{س \to ٣} ق(س) = ق(٣)$ (كثير حدود)

$\lim_{س \to ٣} \left(ق(س) - ٢س + ٣ب\right) = ٧$

$-٥ - ٦ + ٣ب = ٧ \Leftarrow ٣ب = ١٨ \Leftarrow ب = ٦$

٢) $\lim_{س \to ٠} \frac{1}{س} \times \left(1 - \frac{1}{\sqrt{س+1}}\right) =$

$\lim_{س \to ٠} \frac{1}{س} \times \frac{\sqrt{س+1} - 1}{\sqrt{س+1}} \times \frac{\sqrt{س+1}+1}{\sqrt{س+1}+1}$

$\lim_{س \to ٠} \frac{1 - (س+1)}{س\left(\sqrt{س+1}\right)\left(1+\sqrt{س+1}\right)}$

$\lim_{س \to ٠} \frac{-\cancel{س}}{\cancel{س}\left(\sqrt{س+1}\right)\left(1+\sqrt{س+1}\right)}$

$= \frac{-1}{1 \times ٢} = \frac{-1}{٢}$

٣) $\lim_{س \to ٢} ق(س) = \lim_{س \to ٢} ٣س = ٦$

$\lim_{س \to ٢} \frac{ق^2(س)}{س} = \lim_{س \to ٢} \frac{ق(س)}{س} \times ق(س)$

$= ٣ \times ٦$

$= ١٨ .$

٤) النهاية موجودة وتعويض (-1) في المقام = صفر

∴ تعويض (-1) في البسط يعطي صفر

∴ $أ + ب - ٥ = \text{صفر} \Leftarrow ب = ٥ - أ .$

∴ $\lim_{س \to -1} \frac{أس^2 - ب س - ٥}{س + 1} = -٧$

$= \lim_{س \to -1} \frac{أس^2 - (٥-أ)س - ٥}{س+1} = -٧$

$= \lim_{س \to -1} \frac{أس^2 - ٥س + أس - ٥}{س+1} = -٧$

$= \lim_{س \to -1} \frac{أس^2 + أس - ٥س - ٥}{س+1} = -٧$

$= \lim_{س \to -1} \frac{أس(س+1) - ٥(س+1)}{س+1} = -٧$

$= \lim_{س \to -1} \frac{\cancel{(س+1)}(أس - ٥)}{\cancel{س+1}} = -٧$

$= \lim_{س \to -1} أس - ٥ = -٧ \Leftarrow -أ - ٥ = -٧$

$\Leftarrow أ = ٢ \Leftarrow ب = ٥ - ٢ = ٣ .$

٥) نفرض أن $\sqrt{س+1} = ص \Leftarrow س + 1 = ص^2 \Leftarrow س = ص^2 - 1$

عندما $س \to ٣$ فإن $ص \to ٢$

$\lim_{س \to ٣} \frac{س^2 - ٣س}{س - \sqrt{س+1} - 1} = \lim_{ص \to ٢} \frac{(ص^2-1)^2 - ٣(ص^2-1)}{ص^2 - 1 - ص - 1}$

$\lim_{ص \to ٢} \frac{(ص^2-1)(ص^2-1-٣)}{ص^2 - ص - ٢} = \lim_{ص \to ٢} \frac{(ص^2-1)(ص^2-٤)}{ص^2-ص-٢}$

$\lim_{ص \to ٢} \frac{(ص-1)\cancel{(ص+1)}\cancel{(ص-٢)}(ص+٢)}{\cancel{(ص-٢)}\cancel{(ص+1)}} = ٤ .$

تابع حل اسئلة وزارية:

٦) $\lim\limits_{س\to ٣} \frac{\cancel{٣+س}}{٣س} \times \frac{1}{(س-١)\cancel{(س+٣)}}$

$\lim\limits_{س\to ٣} \frac{١}{٣س(س-١)} = \frac{١}{-٩\times -٤} = \frac{١}{٣٦}$

٧) $\lim\limits_{س\to ٠} \frac{١}{س} \times \frac{٨ - (س+٢)^{٣}}{٨ \times (س+٢)^{٣}}$

$\lim\limits_{س\to ٠} \frac{١}{س}\left(\frac{(٢-(س+٢))\left((س+٢)^{٢} + ٢(س+٢) + ٤\right)}{٨ \times (س+٢)^{٣}}\right)$

$= \frac{-(٤+٤+٤)}{٨\times٨} = \frac{-١٢}{٦٤} = \frac{-٣}{١٦}$

٨) $|س-٣| = س-٣$ عندما $س \to ٣^{+}$

$\lim\limits_{س\to ٣^{-}} د(س) = \lim\limits_{س\to ٣^{+}} د(س)$

$\lim\limits_{س\to ٣^{-}} (ﺟ س^{٢} - ٤) = \lim\limits_{س\to ٣^{+}} \frac{٣-س}{س-٣}$

$٩ﺟ - ٤ = -١$

$٩ﺟ = -١ + ٤$

$٩ﺟ = ٣$

$ﺟ = \frac{٣}{٩}$

$ﺟ = \frac{١}{٣}$

٩) $\lim\limits_{س\to ٢} \frac{\sqrt{٣س+٣} - \sqrt{٤س+١}}{س-٢} \times \frac{\sqrt{٣س+٣} + \sqrt{٤س+١}}{\sqrt{٣س+٣} + \sqrt{٤س+١}}$

$\lim\limits_{س\to ٢} \frac{٣س+٣ - (٤س+١)}{(س-٢)(٣+٣)} =$

$\lim\limits_{س\to ٢} \frac{٢-س}{(س-٢)\times ٦} = \frac{-١}{٦}$

١٠) $\lim\limits_{س\to ٥^{+}} د(س) = \lim\limits_{س\to ٥^{+}} \frac{(س-٥)(س+١)}{(س-٥)}$

$= \lim\limits_{س\to ٥^{+}} (س+١) = ٦$

$\lim\limits_{س\to ٥^{-}} د(س) = \lim\limits_{س\to ٥^{-}} (أ \text{ جتا } \frac{\pi}{٥} س + ٥)$

$= أ \text{ جتا } \pi + ٥ = -أ + ٥$

$\lim\limits_{س\to ٥^{-}} د(س) = \lim\limits_{س\to ٥^{+}} د(س)$

$-أ + ٥ = ٦ \Rightarrow أ = -١$.

١١) $\lim\limits_{س\to ٨} \frac{\sqrt[٣]{س} - ٢}{٤ - \frac{س}{٢}} \times \frac{\sqrt[٣]{س^{٢}} + ٢\sqrt[٣]{س} + ٤}{\sqrt[٣]{س^{٢}} + ٢\sqrt[٣]{س} + ٤}$

$\lim\limits_{س\to ٨} \frac{\overset{-١}{\cancel{س-٨}}}{\frac{١}{٢}\cancel{(٨-س)}\left(\sqrt[٣]{س^{٢}} + ٢\sqrt[٣]{س} + ٤\right)}$

$\lim\limits_{س\to ٨} \frac{-١}{\frac{١}{٢}\left(\sqrt[٣]{س^{٢}} + ٢\sqrt[٣]{س} + ٤\right)} = \frac{-١}{\frac{١}{٢} \times ١٢} = \frac{-١}{٦}$

تابع حل أسئلة وزارية :

12) $\underset{س \to -2}{\text{نها}} \dfrac{5 - |3س+1|}{س^3+8}$

$= \underset{س \to -2}{\text{نها}} \dfrac{5 - (-3س-1)}{(س+2)(س^2-2س+4)}$

$= \underset{س \to -2}{\text{نها}} \dfrac{6+3س}{(س+2)(س^2-2س+4)}$

$\underset{س \to -2}{\text{نها}} \dfrac{3(\cancel{2+س})}{(\cancel{س+2})(س^2-2س+4)} = \dfrac{3}{12} = \dfrac{1}{4}$.

13) $\underset{س \to 3^-}{\text{نها}} ق(س) =$

$\underset{س \to 3^-}{\text{نها}} \left(2س^2 + \dfrac{1}{س} + \left[\dfrac{س}{3}\right]\right)$

$18 + \dfrac{1}{3} + 0 = 18\dfrac{1}{3}$

$\underset{س \to 3^+}{\text{نها}} ق(س) = \underset{س \to 3^+}{\text{نها}} \dfrac{|س-3|}{س^2-9}$

$= \underset{س \to 3^+}{\text{نها}} \dfrac{\cancel{س-3}}{(س+3)(\cancel{س-3})} = \dfrac{1}{6}$.

$\underset{س \to 3^+}{\text{نها}} ق(س) \neq \underset{س \to 3^-}{\text{نها}} ق(س)$

$\therefore \underset{س \to 3}{\text{نها}} ق(س)$ غير موجودة .

14) $|س| = س$ عندما $س \to 4$

$\underset{س \to 4}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt{س^3} - 2س}{2س^2-5س-12} \times \dfrac{\sqrt{س^3}+2س}{\sqrt{س^3}+2س}$

$\underset{س \to 4}{\text{نها}} \dfrac{س^3 - 4س^2}{(2س^2-5س-12)(8+8)}$

$\underset{س \to 4}{\text{نها}} \dfrac{س^2(\cancel{س-4})}{16 \times (\cancel{س-4})(2س+3)} = \dfrac{16}{16 \times 11} = \dfrac{1}{11}$

15) $\underset{س \to 3}{\text{نها}} \dfrac{س+3}{س+\sqrt{2س^2-9}} \times \dfrac{س-\sqrt{2س^2-9}}{س-\sqrt{2س^2-9}}$

$\underset{س \to 3}{\text{نها}} \dfrac{(س+3)(3-3-)}{س^2-(2س^2-9)}$

$\underset{س \to 3}{\text{نها}} \dfrac{(س+3) \times -6}{-س^2+9} = \underset{س \to 3}{\text{نها}} \dfrac{(\cancel{س+3}) \times -6}{(\cancel{س+3})(س-3)}$

$= \dfrac{-6}{6} = -1$.

16) $\underset{س \to 2}{\text{نها}} \dfrac{س^2+27}{(س-2)(س+3)} - \dfrac{س+3}{(س-2)} \times \dfrac{(س+3)}{(س+3)}$

$\underset{س \to 2}{\text{نها}} \dfrac{س^2+27 - (س^2+6س+9)}{(س-2)(س+2)}$

$\underset{س \to 2}{\text{نها}} \dfrac{18 - 6س}{(س-2)(س+2)} = \underset{س \to 2}{\text{نها}} \dfrac{6(3-س)}{(س-2)(س+2)}$

$= \dfrac{-6}{6} = -1$

تابع حل اسئلة وزارية

١٧) $\lim_{س \to ٣} \frac{٦ - س\sqrt{س+١}}{٩ - ٣س} \times \frac{٦ + س\sqrt{س+١}}{٦ + س\sqrt{س+١}}$

$\lim_{س \to ٣} \frac{٣٦ - س^{٢}(س+١)}{١٢ \times (٩ - ٣س)}$

$\lim_{س \to ٣} \frac{-س^{٣} - س^{٢} + ٣٦}{١٢ \times ٣(٣ - س)}$

بالقسمة الطويلة او التركيبية

$\lim_{س \to ٣} \frac{\cancel{(س - ٣)}^{-١}(-س^{٢} - ٤س - ١٢)}{٣٦\,\cancel{(٣ - س)}}$

$- \frac{(-٩ - ١٢ - ١٢)}{٣٦} = \frac{٣٣}{٣٦} = \frac{١١}{١٢}$.

---

١٨) $\lim_{س \to -٢٧} \frac{٦ - \sqrt{٩ - س}}{\sqrt[٣]{س} + ٣} \times \frac{٦ + \sqrt{(٩ - س)}}{٦ + \sqrt{٩ - س}}$

$\times \frac{٩ - ٣\sqrt[٣]{س} + (\sqrt[٣]{س})^{٢}}{٩ - ٣\sqrt[٣]{س} + (\sqrt[٣]{س})^{٢}}$

$= \lim_{س \to -٢٧} \frac{(٩ - س - ٣٦)(٩ + ٩ + ٩)}{(١٢)(س + ٢٧)}$

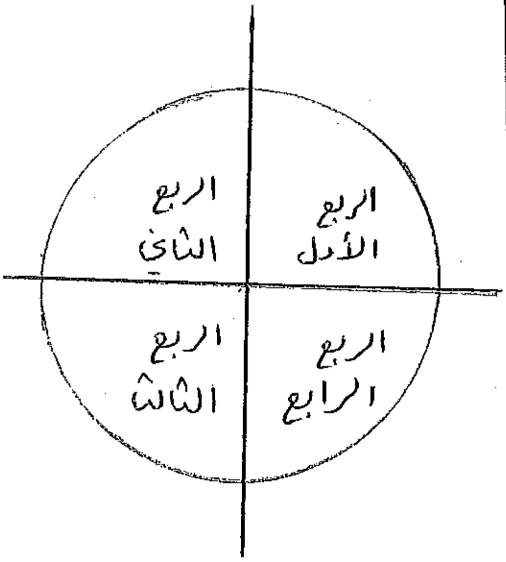
$\lim_{س \to -٢٧} \frac{\cancel{(-س - ٢٧)}^{-١}(٢٧)}{(١٢)(س + ٢٧)}$

$= \frac{-٢٧}{١٢} = \frac{-٩}{٤}$.

معلومات وقوانين أساسية:

الاقترانات الدائرية: جاس ، جتاس ، ظاس ، قتاس ، قاس ، ظتاس

الزاوية بالدرجات	التقدير الدائري	جاس	جتاس	ظاس
صفر°	صفر	صفر	1	صفر
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
90°	$\frac{\pi}{2}$	1	صفر	∞
180°	π	صفر	-1	صفر
270°	$\frac{3\pi}{2}$	-1	صفر	$-\infty$
360°	2π	صفر	1	صفر



دائرة الوحدة

* في الربع الأول حيث $0 < س < \frac{\pi}{2}$ جميع قيم الاقترانات الدائرية موجبة
* في الربع الثاني حيث $\frac{\pi}{2} < س < \pi$ ، جاس ، قتاس موجبة والباقي سالبة
* في الربع الثالث حيث $\pi < س < \frac{3\pi}{2}$ ، ظاس ، ظتاس موجبة والباقي سالبة
* في الربع الرابع حيث $\frac{3\pi}{2} < س < 2\pi$ ، جتاس ، قاس موجبة والباقي سالبة
* ظاس = $\frac{\text{جاس}}{\text{جتاس}}$ ، قاس = $\frac{1}{\text{جتاس}}$ ، قتاس = $\frac{1}{\text{جاس}}$

ظتاس = $\frac{1}{\text{ظاس}}$

قوانين في المثلثات:

(1) $\text{جا}^2\text{س} + \text{جتا}^2\text{س} = 1$

(2) $1 + \text{ظا}^2\text{س} = \text{قا}^2\text{س}$

(3) $1 + \text{ظتا}^2\text{س} = \text{قتا}^2\text{س}$.

(4) $\text{جا}2\text{س} = 2\,\text{جاس جتاس}$

(5) $\text{جتا}2\text{س} = \text{جتا}^2\text{س} - \text{جا}^2\text{س}$

$= 2\,\text{جتا}^2\text{س} - 1$

$= 1 - 2\,\text{جا}^2\text{س}$.

(6) $\text{ظا}2\text{س} = \dfrac{2\,\text{ظاس}}{1 - \text{ظا}^2\text{س}}$.

(7) $\text{ظا}(\text{أ}+\text{ب}) = \dfrac{\text{ظاأ} + \text{ظاب}}{1 - \text{ظاأ ظاب}}$

(8) $\text{ظا}(\text{أ}-\text{ب}) = \dfrac{\text{ظاأ} - \text{ظاب}}{1 + \text{ظاأ ظاب}}$

(9) $\text{جا}^2\text{س} = \dfrac{1 - \text{جتا}2\text{س}}{2}$

(10) $\text{جتا}^2\text{س} = \dfrac{1 + \text{جتا}2\text{س}}{2}$

(11) $\text{جاس} = \text{جتا}\left(\dfrac{\pi}{2} - \text{س}\right)$

(12) $\text{جتاس} = \text{جا}\left(\dfrac{\pi}{2} - \text{س}\right)$.

(13) $\text{جاس} = \text{جا}(\pi - \text{س})$

(14) $\left.\begin{array}{l}\text{جا}(-\text{س}) = -\,\text{جاس}\\ \text{جتا}(-\text{س}) = \text{جتاس}\end{array}\right\}$ س زاوية حادة.

(15) $\text{جا}\,\dfrac{\text{س}}{2} = \mp\sqrt{\dfrac{1 - \text{جتاس}}{2}}$

(16) $\text{جتا}\,\dfrac{\text{س}}{2} = \mp\sqrt{\dfrac{1 + \text{جتاس}}{2}}$

(17) $\text{ظا}\,\dfrac{\text{س}}{2} = \mp\sqrt{\dfrac{1 - \text{جتاس}}{1 + \text{جتاس}}}$

(18) $\text{جتا}(\text{أ}-\text{ب}) = \text{جتاأ جتاب} + \text{جاأ جاب}$

$\text{جتا}(\text{أ}+\text{ب}) = \text{جتاأ جتاب} - \text{جاأ جاب}$

(19) $\text{جا}(\text{أ}-\text{ب}) = \text{جاأ جتاب} - \text{جتاأ جاب}$

$\text{جا}(\text{أ}+\text{ب}) = \text{جاأ جتاب} + \text{جتاأ جاب}$

(20) $\text{جاأ جتاب} = \dfrac{1}{2}\left[\text{جا}(\text{أ}+\text{ب}) + \text{جا}(\text{أ}-\text{ب})\right]$

$\text{جتاأ جاب} = \dfrac{1}{2}\left[\text{جا}(\text{أ}+\text{ب}) - \text{جا}(\text{أ}-\text{ب})\right]$

(21) $\text{جتاأ جتاب} = \dfrac{1}{2}\left[\text{جتا}(\text{أ}+\text{ب}) + \text{جتا}(\text{أ}-\text{ب})\right]$

$\text{جاأ جاب} = \dfrac{1}{2}\left[\text{جتا}(\text{أ}-\text{ب}) - \text{جتا}(\text{أ}+\text{ب})\right]$

تابع قوانين في المثلثات.

(٢٢) جا أ + جا ب = ٢ جا $\frac{أ+ب}{٢}$ جتا $\frac{أ-ب}{٢}$

جا أ − جا ب = ٢ جتا $\frac{أ+ب}{٢}$ جا $\frac{أ-ب}{٢}$

(٢٣) جتا أ + جتا ب = ٢ جتا $\frac{أ+ب}{٢}$ جتا $\frac{أ-ب}{٢}$

جتا أ − جتا ب = −٢ جا $\frac{أ+ب}{٢}$ جا $\frac{أ-ب}{٢}$.

مثال ١: جد $\lim_{س \to ٠} \frac{س}{جتا س}$

الحل: $\lim_{س \to ٠} \frac{س}{جتا س} = \frac{\lim_{س \to ٠} س}{\lim_{س \to ٠} جتا س} = \frac{٠}{١} =$ صفر.

مثال ٢: جد $\lim_{س \to \frac{\pi}{٢}} (٢ جا س - ظا \frac{١}{٢} س)$

$= ٢ جا \frac{\pi}{٢} - ظا (\frac{١}{٢} \times \frac{\pi}{٢})$

$= ٢ جا \frac{\pi}{٢} - ظا \frac{\pi}{٤}$

$= ٢ \times ١ - ١$

$= ١$

نظرية: $\lim_{س \to ٠} \frac{جا س}{س} = ١$

حيث س بالقياس الدائري

مثال ٣: جد $\lim_{س \to ٠} \frac{س}{جا س}$

الحل: $\lim_{س \to ٠} \frac{س}{جا س} = \lim_{س \to ٠} \frac{١}{\frac{جا س}{س}} = \frac{١}{\lim_{س \to ٠} \frac{جا س}{س}} = ١$

مثال ٤: جد $\lim_{س \to ٠} \frac{ظا س}{س}$

$\lim_{س \to ٠} \frac{ظا س}{س} = \lim_{س \to ٠} \frac{جا س}{س \times جتا س} = \lim_{س \to ٠} \frac{جا س}{س} \times \lim_{س \to ٠} \frac{١}{جتا س}$.

$= ١ \times ١ = ١$

مثال ٥: $\lim_{س \to ٠} \frac{جا ٣س}{٥س}$

نفرض أن ص = ٣س ⟸ س = $\frac{ص}{٣}$

عندما س ← ٠، فإن ص ← ٠.

$\lim_{س \to ٠} \frac{جا ٣س}{٥س} = \lim_{ص \to ٠} \frac{جا ص}{٥ \frac{ص}{٣}}$

$\lim_{ص \to ٠} \frac{٣}{٥} \frac{جا ص}{ص} = \frac{٣}{٥} \lim_{ص \to ٠} \frac{جا ص}{ص}$

$= \frac{٣}{٥} \times ١ = \frac{٣}{٥}$.

سؤال ١: جد كلاً مما يلي:

١) $\lim_{س \to ٠} \frac{٩س}{جا ٢س}$

٢) $\lim_{س \to ٠} \frac{ظا ٢س}{٧س}$.

نتيجة:

1) $\underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}} \frac{\text{جا أس}}{\text{ب س}} = \underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}} \frac{\text{أس}}{\text{جا ب س}} = \frac{\text{أ}}{\text{ب}}$

حيث أ، ب أعداداً حقيقية، ب ≠ صفر

2) $\underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}} \frac{\text{ظا أس}}{\text{ب س}} = \underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}} \frac{\text{أس}}{\text{ظا ب س}} = \frac{\text{أ}}{\text{ب}}$

حيث أ، ب أعداداً حقيقية، ب ≠ صفر

مثال١: جد $\underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}} \frac{\text{س جاس} - \text{ظا٢س}}{\text{جا٣س} - \text{٥س}}$

الحل: يمكن قسمة حدود كل من البسط والمقام على س (س ← ٠ تتضمن أن س ≠ ٠)

$= \underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}} \frac{\frac{\text{س جاس}}{\text{س}} - \frac{\text{ظا٢س}}{\text{س}}}{\frac{\text{جا٣س}}{\text{س}} - \frac{\text{٥س}}{\text{س}}}$

$= \underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}} \frac{\text{جاس} - \frac{\text{ظا٢س}}{\text{س}}}{\frac{\text{جا٣س}}{\text{س}} - ٥}$

$\frac{\underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}}\ \text{جاس} - \underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}} \frac{\text{ظا٢س}}{\text{س}}}{\underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}} \frac{\text{جا٣س}}{\text{س}} - \underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}}\ ٥} = \frac{٠ - ٢}{٣ - ٥} = ١.$

مثال٢: $\underset{\text{س}\to ٣}{\text{نها}} \frac{\text{جا}(\text{٢س} - ٦)}{\text{س} - ٣}$

الحل: نفرض أن ص = س − ٣

عندما س ← ٣ فإن ص ← ٠

$\underset{\text{س}\to ٣}{\text{نها}} \frac{\text{جا ٢(س} - ٣)}{\text{س} - ٣} = \underset{\text{ص}\to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{جا ٢ص}}{\text{ص}}$

$= ٢$

مثال٣: جد $\underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}} \frac{١ - \text{جتاس}}{\text{س}^2}$

الحل: $\underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}} \frac{١ - \text{جتاس}}{\text{س}^2} \times \frac{١ + \text{جتاس}}{١ + \text{جتاس}}$

$\underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}} \frac{١ - \text{جتا}^2\text{س}}{\text{س}^2(١ + \text{جتاس})} = \underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}} \frac{\text{جا}^2\text{س}}{\text{س}^2(١ + \text{جتاس})}$

$\underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}} \frac{\text{جا}^2\text{س}}{\text{س}^2} \times \underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}} \frac{١}{١ + \text{جتاس}}$

$\underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}} \left(\frac{\text{جاس}}{\text{س}}\right)^2 \times \frac{١}{٢} = ١ \times \frac{١}{٢} = \frac{١}{٢}.$

مثال٤: جد $\underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}} \frac{\text{س جا٢س}}{\text{س}^2}$

الحل: $\underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}} \frac{\cancel{\text{س}}\ \text{جا٢س}}{\text{س}^{\cancel{2}}} = \underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}} \frac{\text{جا٢س}}{\text{س}} = ٢$

مثال٥: جد $\underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}} \frac{\text{ظا}^2\text{٣س}}{\text{٥س}^2}$

الحل: $\underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}} \frac{\text{ظا٣س} \times \text{ظا٣س}}{\text{٥س} \times \text{س}} =$

$\underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}} \frac{\text{ظا٣س}}{\text{٥س}} \times \underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}} \frac{\text{ظا٣س}}{\text{س}} = \frac{٣}{٥} \times ٣ = \frac{٩}{٥}.$

سؤال١: جد $\underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}} \frac{\text{٥س} - ٣\ \text{جا٧س}}{\text{٢س}}$

سؤال٢: جد $\underset{\text{س}\to ١}{\text{نها}} \frac{\text{س}^2 - ١}{\text{ظا}(\text{س} - ١)}$

سؤال٣: جد $\underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}} \frac{\text{قا(٢س)} - ١}{\text{س}^2}$

سؤال ١: جد قيمة النهايات التالية

١) $\lim_{س \to 0} \frac{جتا(90 - 3س)}{5س}$

٢) $\lim_{س \to 0} \frac{جتا\left(\frac{\pi - 3س}{2}\right)}{2س}$

مثال ١: جد $\lim_{س \to 0} \frac{جا(س + \frac{\pi}{2})}{س + \frac{\pi}{2}}$

الحل: هذا الوضع لا ينطبق على النظرية
ان ناتجه لذلك نعوض مباشرة فيكون

$\lim_{س \to 0} \frac{جا(س + \frac{\pi}{2})}{س + \frac{\pi}{2}} = \frac{جا\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}$

مثال: جد $\lim_{س \to -\frac{\pi}{2}} \frac{جا(س + \frac{\pi}{2})}{س + \frac{\pi}{2}}$

هنا السؤال ينطبق على النظرية لأن ناتج التعويض = $\frac{صفر}{صفر}$ فيكون

$\lim_{س \to -\frac{\pi}{2}} \frac{جا(س + \frac{\pi}{2})}{\frac{\pi}{2} + س} = 1$.

سؤال: جد $\lim_{س \to -2} \frac{جا(س + 2)}{س^3 + 8}$

سؤال ٣: جد $\lim_{س \to ص} \frac{ظا(س - ص)}{س^2 - ص^2}$

سؤال ٤: جد $\lim_{س \to 0} \frac{جاس - س}{س}$

سؤال ٥: جد قيمة النهايات التالية:

١) $\lim_{س \to 0} س^2 ظتا^2 س$

٢) $\lim_{س \to 0} 2س قتا 3س$

٣) $\lim_{س \to 0} \frac{س + جا(\pi - 2س)}{2س}$

٤) $\lim_{س \to 0} \frac{جا(ظاس)}{س}$

٥) $\lim_{س \to 0} \frac{2 - 2جتا 5س}{3س^2}$

٦) $\lim_{س \to 0} \frac{جا^3 2س}{س جا^2 3س}$

٧) $\lim_{س \to 0} \frac{1 - جتا 5س}{س}$

٨) $\lim_{س \to \infty} س جا\frac{1}{س}$

٩) $\lim_{س \to 1} \frac{جا \pi س}{س - 1}$

تذكر:

$جاس = جا(\pi - س)$

$جاس = جتا(\frac{\pi}{2} - س)$

حل سؤال ٥ :

١) $\underset{س\to ٠}{\text{نها}}\ س^{٢}\ \text{ظتا}^{٢}س$

$\text{ظتا}^{٢}س = \frac{١}{\text{ظا}^{٢}س}$

$= \underset{س\to ٠}{\text{نها}}\ \frac{س^{٢}}{\text{ظا}^{٢}س} =$

$\underset{س\to ٠}{\text{نها}}\ \frac{س}{\text{ظا}س} \times \frac{س}{\text{ظا}س} = ١ \times ١ = ١$

٢) $\underset{س\to ٠}{\text{نها}}\ ٢س\ \text{قتا}\ ٣س$

$= \underset{س\to ٠}{\text{نها}}\ ٢س \times \frac{١}{\text{جا}\ ٣س} =$

$\underset{س\to ٠}{\text{نها}}\ \frac{٢س}{\text{جا}\ ٣س} = \frac{٢}{٣}$.

٣) $\underset{س\to ٠}{\text{نها}}\ \frac{س + \text{جا}(\pi - ٢س)}{٢س}$

$= \underset{س\to ٠}{\text{نها}}\ \frac{س + \text{جا}\ ٢س}{٢س}$

$\underset{س\to ٠}{\text{نها}} \left(\frac{س}{٢س} + \frac{\text{جا}\ ٢س}{٢س} \right)$

$\underset{س\to ٠}{\text{نها}}\ \frac{١}{٢} + \underset{س\to ٠}{\text{نها}}\ \frac{\text{جا}\ ٢س}{٢س}$

$\frac{١}{٢} + ١ = \frac{٣}{٢}$.

٤) $\underset{س\to ٠}{\text{نها}}\ \frac{\text{جا}(\text{ظا}س)}{س}$

نقسم على ظاس

$\underset{س\to ٠}{\text{نها}}\ \frac{\frac{\text{جا}(\text{ظا}س)}{\text{ظا}س}}{\frac{س}{\text{ظا}س}}$

$\frac{\underset{س\to ٠}{\text{نها}}\ \frac{\text{جا}(\text{ظا}س)}{\text{ظا}س}}{\underset{س\to ٠}{\text{نها}}\ \frac{س}{\text{ظا}س}} = \frac{١}{١} = ١$

٥) $\underset{س\to ٠}{\text{نها}}\ \frac{٢ - ٢\text{جتا}^{٢}٥س}{٣س^{٢}} =$

$\underset{س\to ٠}{\text{نها}}\ \frac{٢(١ - \text{جتا}^{٢}٥س)}{٣س^{٢}} =$

$\underset{س\to ٠}{\text{نها}}\ \frac{٢ \times \text{جا}^{٢}٥س}{٣س^{٢}} =$

$\underset{س\to ٠}{\text{نها}}\ \frac{٢}{٣} \times \frac{\text{جا}\ ٥س}{س} \times \frac{\text{جا}\ ٥س}{س}$

$\frac{٢}{٣} \times ٥ \times ٥ = \frac{٥٠}{٣}$.

تابع حل سؤال ٥ :

٦) $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نها}} \dfrac{\text{ظا}^{٣}\,٢\text{س}}{\text{س جا}^{٢}\,٣\text{س}} =$

$\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نها}} \left(\dfrac{\text{ظا}\,٢\text{س}}{\text{س}} \times \dfrac{\text{ظا}\,٢\text{س}}{\text{جا}\,٣\text{س}} \times \dfrac{\text{ظا}\,٢\text{س}}{\text{جا}\,٣\text{س}} \right)$

$٢ \times \dfrac{٢}{٣} \times \dfrac{٢}{٣} = \dfrac{٨}{٩}$.

٧) $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نها}} \dfrac{١ - \text{جتاس}}{\text{س}} \times \dfrac{١ + \text{جتاس}}{١ + \text{جتاس}}$

$= \underset{\text{س} \to ٠}{\text{نها}} \dfrac{١ - \text{جتا}^{٢}\text{س}}{\text{س}\,(١ + \text{جتاس})}$

$= \underset{\text{س} \to ٠}{\text{نها}} \dfrac{\text{جا}^{٢}\text{س}}{\text{س}\,(١ + \text{جتاس})}$

$\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نها}} \left(\dfrac{\text{جاس}}{\text{س}} \times \dfrac{\text{جاس}}{١ + \text{جتاس}} \right)$

$١ \times \dfrac{٠}{١ + ١} = \text{صفر}$

٨) $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نها}} \left(\text{س جا} \dfrac{١}{\text{س}} \right) =$

$\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نها}} \dfrac{\text{جا} \frac{١}{\text{س}}}{\frac{١}{\text{س}}}$

$\text{ص} = \dfrac{١}{\text{س}}$
$\text{س} \to \infty$
$\text{ص} \to ٠$

$\underset{\text{ص} \to ٠}{\text{نها}} \dfrac{\text{جاص}}{\text{ص}} = ١$

٩) $\underset{\text{س} \to ١}{\text{نها}} \dfrac{\text{جا}\,\pi\text{س}}{\text{س} - ١}$

$\text{جا}\,\pi\text{س} = \text{جا}\,(\pi - \pi\text{س})$

$\underset{\text{س} \to ١}{\text{نها}} \dfrac{\text{جا}\,\pi\text{س}}{\text{س} - ١} = \underset{\text{س} \to ١}{\text{نها}} \dfrac{\text{جا}\,(\pi - \pi\text{س})}{\text{س} - ١}$

$\underset{\text{س} \to ١}{\text{نها}} \dfrac{\text{جا}\,\pi\,(١ - \text{س})}{\text{س} - ١}$ نضرب البسط والمقام في π

$\underset{\text{س} \to ١}{\text{نها}} \dfrac{\pi\ \text{جا}\,\pi\,(١ - \text{س})}{\pi\,(\text{س} - ١)} =$

$\pi \times -١ = -\pi$.

تمارين ومسائل

في التمارين من ١ إلى ١٤، جد النهاية المطلوبة.

١) $\underset{\text{س} \leftarrow \frac{\pi}{٤}}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا س}}{\text{س}}$

٢) $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} (\text{قا س} + \text{ظا ٤ س}$

٣) $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا ٥ س}}{\text{٨ س}}$

٤) $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا}^{٢}\text{٣ س}}{\text{س}^{٢}}$

٥) $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{ظا ٢ س}^{٢}}{\text{٤ س}^{٢}}$

٦) $\underset{\text{س} \leftarrow -٥}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا (س+٥)}}{٢٥ - \text{س}^{٢}}$

٧) $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{س} - \text{جا٣س} + \text{ظا٥س}}{\text{٢س} - \text{ظا}^{٢}\text{س}}$

٨) $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{١ - \text{جتا ٢ س}}{\text{٢ س}^{٢}}$

٩) $\underset{\text{س} \leftarrow \frac{\pi}{٢}}{\text{نهـا}} \frac{\text{جتا س}}{\frac{\pi}{٢} - \text{س}}$

١٠) $\underset{\text{س} \leftarrow ٣\pi}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا س}}{\frac{\text{س}}{٣} - \pi}$

١١) $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt{١ - \text{جتا س}}}{\text{س}}$

١٢) $\underset{\text{س} \leftarrow ٨}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا(س}^{٢} - ٦٤)}{\text{س} - ٨}$

(في السؤال (١١) استخدم العلاقة جتا س $= ١ - ٢\ \text{جا}^{٢} (\frac{\text{س}}{٢})$)

١٣) $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{١ + \text{جا ٤س} - \text{جتا}^{٢}\text{(٢س)}}{\text{س}}$

١٤) $\underset{\text{س} \leftarrow \text{أ}}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا س} - \text{جاأ}}{\text{س} - \text{أ}}$

١٥) إذا كانت $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا أ س}}{\text{٦ س}} = \underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{ظا ٥ س}}{\text{ب س} - \text{س}} = ٢$ ، فما قيمة كـ

مثال ١ : جد $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نها}} \dfrac{\text{جتاس} - \text{جتا٣س}}{س^٢}$

الحل : نستخدم القانون

$\text{جتاس} - \text{جتاص} = -٢\,\text{جا}\left(\dfrac{س+ص}{٢}\right)\text{جا}\left(\dfrac{س-ص}{٢}\right)$

$\text{جتاس} - \text{جتا٣س} =$

$= -٢\,\text{جا}\left(\dfrac{٤س}{٢}\right)\text{جا}\left(\dfrac{-٢س}{٢}\right) =$

$= -٢\,\text{جا٢س}\,\text{جا}(-س) =$

$٢\,\text{جا٢س}\,\text{جاس}$.

$\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نها}} \dfrac{\text{جتاس} - \text{جا٣س}}{س^٢} = \underset{س \leftarrow ٠}{\text{نها}} \dfrac{٢\,\text{جا٢س}\,\text{جاس}}{س^٢}$

$٢ \times \underset{س \leftarrow ٠}{\text{نها}} \dfrac{\text{جا٢س}}{س} \times \underset{س \leftarrow ٠}{\text{نها}} \dfrac{\text{جاس}}{س} = ٢\times٢\times١$

$= ٤$.

سؤال ١ : جد $\underset{س \leftarrow \frac{\pi}{٤}}{\text{نها}} \dfrac{\text{جاس} - \text{جتاس}}{س - \frac{\pi}{٤}}$

سؤال ٢ : جد

$\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نها}}\ س^٢\ \text{ظتا}(٣س)\ \text{قتاس}$

حلول تمارين ومسائل صفحة ٤٦ .

س١ $\underset{س \leftarrow \frac{\pi}{٤}}{\text{نها}} \dfrac{\text{جاس}}{س} = \dfrac{\text{جا}\frac{\pi}{٤}}{\frac{\pi}{٤}}$

$\dfrac{٤}{\pi} \times \dfrac{١}{\sqrt{٢}} = \dfrac{٤}{\pi\sqrt{٢}}$.

س٢ $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نها}} (\text{قاس} + \text{ظا٤س}) =$

$\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نها}} \left(\dfrac{١}{\text{جتاس}} + \text{ظا٤س}\right) = ١ + \text{صفر}$

$= ١$.

س٣ $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نها}} \dfrac{\text{جا٥س}}{٨س} = \dfrac{٥}{٨}$.

س٤ $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نها}} \dfrac{\text{جا}^٢\text{٣س}}{س^٢} = \underset{س \leftarrow ٠}{\text{نها}} \dfrac{\text{جا٣س}}{س} \times \dfrac{\text{جا٣س}}{س}$

$= ٣\times٣ = ٩$.

س٥ $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نها}} \dfrac{\text{ظا٢س}^٢}{٤س^٢} = \underset{س \leftarrow ٠}{\text{نها}} \dfrac{\text{ظا٢س}^٢}{٢\times٢س^٢}$.

$\dfrac{١}{٢} \underset{س \leftarrow ٠}{\text{نها}} \dfrac{\text{ظا٢س}^٢}{٢س^٢} = \dfrac{١}{٢} \times ١ = \dfrac{١}{٢}$.

س٦ $\underset{س \leftarrow -٥}{\text{نها}} \dfrac{\text{جا}(س+٥)}{س^٢ - ٢٥} = \underset{س \leftarrow -٥}{\text{نها}} \dfrac{\text{جا}(س+٥)}{(س+٥)(س-٥)}$

$\underset{س \leftarrow -٥}{\text{نها}} \dfrac{١}{س-٥} \times \underset{س \leftarrow -٥}{\text{نها}} \dfrac{\text{جا}(س+٥)}{س+٥}$

$\dfrac{١}{١٠} \times ١ = \dfrac{١}{١٠}$

س٧ $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نها}} \dfrac{س - \text{جا}٣س + \text{ظا}٥س}{٢س - \text{ظا}^{٢}س}$

نقسم على س ،

$\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نها}} \dfrac{\frac{س}{س} - \frac{\text{جا}٣س}{س} + \frac{\text{ظا}٥س}{س}}{\frac{٢س}{س} - \frac{\text{ظا}س}{س} \times \text{ظا}س}$

$\dfrac{\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نها}}\ ١ - \underset{س \leftarrow ٠}{\text{نها}} \frac{\text{جا}٣س}{س} + \underset{س \leftarrow ٠}{\text{نها}} \frac{\text{ظا}٥س}{س}}{\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نها}}\ ٢ - \underset{س \leftarrow ٠}{\text{نها}} \frac{\text{ظا}س}{س} \times \text{ظا}س}$

$\dfrac{١ - ٣ + ٥}{٢ - ١ \times ٠} = \dfrac{٣}{٢} = ٣$.

س٨ $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نها}} \dfrac{١ - \text{جتا}٢س}{٢س^{٢}} \times \dfrac{١ + \text{جتا}٢س}{١ + \text{جتا}٢س}$

$\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نها}} \dfrac{١ - \text{جتا}^{٢}٢س}{٢س^{٢}(١ + \text{جتا}٢س)}$

$\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نها}} \dfrac{\text{جا}^{٢}٢س}{٢س^{٢}(١ + \text{جتا}٢س)}$

$\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نها}} \dfrac{\text{جا}٢س}{٢س} \times \dfrac{\text{جا}٢س}{س} \times \dfrac{١}{١ + \text{جتا}٢س}$

$١ \times ٢ \times \dfrac{١}{١ + ١}$

$٢ \times \dfrac{١}{٢} = ١$

س٩ $\underset{س \leftarrow \frac{\pi}{٢}}{\text{نها}} \dfrac{\text{جتا}س}{\frac{\pi}{٢} - س} = \underset{س \leftarrow \frac{\pi}{٢}}{\text{نها}} \dfrac{\text{جا}(\frac{\pi}{٢} - س)}{\frac{\pi}{٢} - س}$

$= ١$

س١٠ $\underset{س \leftarrow ٣\pi}{\text{نها}} \dfrac{\text{جا}س}{\frac{س}{٣} - \pi}$

$ص = س - ٣\pi$

$س = ص + ٣\pi$

$\dfrac{ص}{٣} = \dfrac{س}{٣} - \pi$

عندما $س \leftarrow ٣\pi$

$ص \leftarrow$ صفر

$\text{جا}س = \text{جا}(ص + ٣\pi)$

$= \text{جا}ص\ \text{جتا}٣\pi + \text{جتا}ص\ \text{جا}٣\pi$

$= \text{جا}ص \times -١ + \text{جتا}ص \times ٠$

$= - \text{جا}ص$.

$\underset{س \leftarrow ٣\pi}{\text{نها}} \dfrac{\text{جا}س}{\frac{س}{٣} - \pi} = \underset{ص \leftarrow ٠}{\text{نها}} \dfrac{- \text{جا}ص}{\frac{ص}{٣}} = -٣$

س١١ $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt{١ - \text{جتا}س}}{س} = \underset{س \leftarrow ٠}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt{١ - (١ - ٢\text{جا}^{٢}\frac{س}{٢})}}{س}$

$= \underset{س \leftarrow ٠}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt{٢\text{جا}^{٢}\frac{س}{٢}}}{س} = \underset{س \leftarrow ٠}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt{٢}\,|\text{جا}\frac{س}{٢}|}{س}$

$\underset{س \leftarrow ٠^{+}}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt{٢}\ \text{جا}\frac{س}{٢}}{س} = \sqrt{٢} \times \dfrac{١}{٢} = \dfrac{\sqrt{٢}}{٢}$.

$\underset{س \leftarrow ٠^{-}}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt{٢} \times -\text{جا}\frac{س}{٢}}{س} = \sqrt{٢} \times -\dfrac{١}{٢} = -\dfrac{\sqrt{٢}}{٢}$

$\therefore \underset{س \leftarrow ٠}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt{١ - \text{جتا}س}}{س}$ غير موجودة .

تابع حل تمارين ومسائل صفحة ٤٦.

١٢) $\underset{س \leftarrow ٨}{نها} \frac{جا(س^٢ - ٦٤)}{س - ٨} \times \frac{س + ٨}{س + ٨}$

$\underset{س \leftarrow ٨}{نها} \frac{جا(س^٢ - ٦٤)}{س^٢ - ٦٤} \times س + ٨$

ص = س² − ٦٤ ، س ← ٨
ص ← ٠

$\underset{ص \leftarrow ٨}{نها} \frac{جا ص}{ص} \times \underset{س \leftarrow ٨}{نها} (س + ٨)$

١ × ١٦ = ١٦ .

١٣) $\underset{س \leftarrow ٠}{نها} \frac{١ + جا٤س - جتا٢س}{س}$

$\underset{س \leftarrow ٠}{نها} \frac{١ - جتا٢س + جا٤س}{س}$

$\underset{س \leftarrow ٠}{نها} \frac{٢جا^٢س + جا٤س}{س}$

$\underset{س \leftarrow ٠}{نها} \frac{٢جا^٢س}{س} + \underset{س \leftarrow ٠}{نها} \frac{جا٤س}{س}$

$\underset{س \leftarrow ٠}{نها} \frac{٢جاس}{س} \times جاس + ٤$

٢ × ٠ + ٤

٤ .

١٤) $\underset{س \leftarrow أ}{نها} \frac{جاس - جاأ}{س - أ}$

$\underset{س \leftarrow أ}{نها} \frac{٢جتا\frac{س+أ}{٢} جا\frac{س-أ}{٢}}{س - أ}$

$\underset{س \leftarrow أ}{نها} ٢جتا\frac{س+أ}{٢} \times \underset{س \leftarrow أ}{نها} \frac{جا\frac{س-أ}{٢}}{س-أ}$

ص = س − أ ، س ← أ ⟸ ص ← ٠ .

$= ٢جتا\frac{أ+أ}{٢} \times \underset{ص \leftarrow ٠}{نها} \frac{جا\frac{ص}{٢}}{ص}$

$= ٢جتا أ \times \frac{١}{٢} = جتا أ$.

١٥) $\underset{س \leftarrow ٠}{نها} \frac{جا أس}{٦س} = \frac{أ}{٦} = ٢ \Leftarrow$

أ = ٦ × ٢ = ١٢

$\underset{س \leftarrow ٠}{نها} \frac{ظا٥س}{بس - س} = ٢$

$\underset{س \leftarrow ٠}{نها} \frac{ظا٥س}{س(ب - ١)} = ٢$

$\frac{٥}{ب - ١} = ٢$

٢ب − ٢ = ٥ ⟸ ٢ب = ٧

$ب = \frac{٧}{٢}$.

تدريب (1) : جد كلاً من النهايات التالية :

1) $\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{جا}\,٧س}{٣س} = \frac{٧}{٣}$

2) $\underset{س \to \pi}{\text{نها}} \frac{\text{جا}(س - \pi)}{(س - \pi)} =$

ص = س − π
س ← π
ص ← صفر

$\underset{ص \to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{جا}\,ص}{ص} = ١$

3) $\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{٩س}{\text{ظا}\,س} = ٩$

4) $\underset{س \to \frac{\pi}{٢}}{\text{نها}} \frac{\text{جا}\,س}{س} = \frac{\text{جا}\,\frac{\pi}{٢}}{\frac{\pi}{٢}} = \frac{١}{\frac{\pi}{٢}} = \frac{٢}{\pi}$

تدريب ٢ : جد $\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{س - \text{جا}\,٣س + \text{ظا}\,٥س}{٣س - \text{ظا}^٢س}$

بالقسمة على س

$\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{\frac{س}{س} - \frac{\text{جا}\,٣س}{س} + \frac{\text{ظا}\,٥س}{س}}{\frac{٣س}{س} - \frac{\text{ظا}^٢س}{س}}$

$\frac{١ - ٣ + ٥}{٣ - \underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{ظا}\,س}{س} \times \text{ظا}\,س} = \frac{٣}{٣ - ١ \times ٠}$

$= \frac{٣}{٣} = ١$

تدريب ٣ : جد كلاً مما يأتي

1) $\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{١ - \text{جتا}\,س}{س^٢} \times \frac{١ + \text{جتا}\,س}{١ + \text{جتا}\,س}$

$\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{١ - \text{جتا}^٢س}{س^٢(١ + \text{جتا}\,س)} = \underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{جا}^٢س}{س^٢(١ + \text{جتا}\,س)}$

$\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{جا}\,س}{س} \times \underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{جا}\,س}{س} \times \underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{١}{١ + \text{جتا}\,س}$

$١ \times ١ \times \frac{١}{٢} = \frac{١}{٢}$

2) $\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{جا}\,٨س + \text{جا}\,٤س}{س} =$

$\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{جا}\,٨س}{س} + \underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{جا}\,٤س}{س} = ٨ + ٤ = ١٢$

تدريب ٤ : جد كلاً مما يأتي

1) $\underset{س \to \frac{\pi}{٢}}{\text{نها}} \frac{\text{جتا}\,س}{س - \frac{\pi}{٢}} = \underset{س \to \frac{\pi}{٢}}{\text{نها}} \frac{\text{جا}(\frac{\pi}{٢} - س)}{س - \frac{\pi}{٢}}$

$\underset{س \to \frac{\pi}{٢}}{\text{نها}} \frac{\text{جا}(\frac{\pi}{٢} - س)}{-(\frac{\pi}{٢} - س)} = -١$

2) $\underset{س \to ١}{\text{نها}} \frac{\text{جتا}\,\frac{\pi}{٢}س}{س - ١} = \underset{س \to ١}{\text{نها}} \frac{\text{جا}(\frac{\pi}{٢} - \frac{\pi}{٢}س)}{س - ١}$

$\underset{س \to ١}{\text{نها}} \frac{\text{جا}\,\frac{\pi}{٢}(١ - س)}{س - ١}$

ص = ١ − س
س ← ١
ص ← ٠

$\underset{ص \to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{جا}\,\frac{\pi}{٢}ص}{-ص} = -\frac{\pi}{٢}$

جد النهاية المطلوبة في كلٍّ من التمارين من (١) إلى (٢١) :

١) $\underset{\text{س}\leftarrow ٠}{\text{نهــا}} \dfrac{\text{حا ٨س}}{\text{٦س}}$

٢) $\underset{\text{س}\leftarrow ٠}{\text{نهــا}} \dfrac{\text{س + ظا٢س − جا س}}{\text{س}}$

٣) $\underset{\text{س}\leftarrow ٠}{\text{نهــا}} (\text{قاس + ظا ٥س})$

٤) $\underset{\text{س}\leftarrow ٠}{\text{نهــا}} \left(\text{٧ س}^{٣}\ \text{ظتا}^{٢}\ \text{(٢س) قتــا (٥س)}\right)$

٥) $\underset{\text{س}\leftarrow ٠}{\text{نهــا}} \dfrac{\text{١+ جتا ٤س − ٢جتا}^{٢}\text{س}}{\text{س}^{٢}}$

٦) $\underset{\text{س}\leftarrow ٠}{\text{نهــا}} \dfrac{\text{١ − جتاس}}{\text{س جا س}}$

٧) $\underset{\text{س}\leftarrow ٠}{\text{نهــا}} \dfrac{\text{جتاس}}{\text{٢س} - \pi}$

٨) $\underset{\text{س}\leftarrow ٠}{\text{نهــا}} \dfrac{\text{ظا س − جا س}}{\text{س}}$

٩) $\underset{\text{س}\leftarrow \frac{\pi}{٢}}{\text{نهــا}} \dfrac{\text{١ − جا س}}{(\pi - \text{٢س})^{٢}}$

١٠) $\underset{\text{س}\leftarrow ٠}{\text{نهــا}} \dfrac{\text{قا(٢س) − ١}}{\text{س}^{٢}}$

١١) $\underset{\text{س}\leftarrow ٠}{\text{نهــا}} \dfrac{\text{٢س}^{٢}\text{+ س ظا٢س}}{\text{جا}^{٢}\text{س}}$

١٢) $\underset{\text{س}\leftarrow \frac{\pi}{٤}}{\text{نهــا}} \dfrac{\text{جتا}^{٢}\text{س − جا}^{٢}\text{س}}{\text{س} - \frac{\pi}{٤}}$

١٣) $\underset{\text{س}\leftarrow ٠}{\text{نهــا}} \dfrac{\text{١ − جتا ٦س}}{\text{جتا ٨س − ١}}$

١٤) $\underset{\text{س}\leftarrow ٠}{\text{نهــا}} \text{٣س(ظتا ٢س + قتا ٣س)}$

١٥) $\underset{\text{س}\leftarrow \frac{\pi}{٢}}{\text{نهــا}} \dfrac{\text{ظتا س}}{\pi - \text{٢س}}$

١٦) $\underset{\text{س}\leftarrow ١}{\text{نهــا}} \dfrac{\text{س جا}\frac{\pi}{\text{س}}}{\text{س − ١}}$

١٧) $\lim\limits_{\text{س} \to -٤} \dfrac{\text{جا}(\text{س} + ٤)}{\text{س}^{٢} - ١٦}$

١٨) $\lim\limits_{\text{س} \to ٠} \dfrac{٢\text{س} - \text{جا س}}{\sqrt{١ - \text{جتا ٢س}}}$

١٩) $\lim\limits_{\text{س} \to ٣\pi} \dfrac{\text{جا س}}{\frac{\text{س}}{٣} - \pi}$

٢٠) $\lim\limits_{\text{س} \to ٢} \dfrac{\text{س} - ٢}{\text{ظا}\,\pi\,\text{س}}$

٢١) $\lim\limits_{\text{س} \to -\text{أ}} \dfrac{\text{جا س} + \text{جا أ}}{\text{س} + \text{أ}}$ (إرشاد: $\text{جا س} + \text{جا ص} = ٢\,\text{جا}\left(\dfrac{\text{س} + \text{ص}}{٢}\right)\text{جتا}\left(\dfrac{\text{س} - \text{ص}}{٢}\right)$)

٢٢) إذا كانت $\lim\limits_{\text{س} \to ٠} \dfrac{\text{جا أس}}{٢\text{س}} = \lim\limits_{\text{س} \to ٠} \dfrac{\text{ظا ٣س}}{\text{ب س} - \text{س}} = ٦$ فجد قيمة كل من الثابتين أ ، ب .

٢٣) إذا كان $\text{ق(س)} = \dfrac{\text{جا}(٢\pi - ٢\text{س})}{-٥\text{س}}$ ، فجد $\lim\limits_{\text{س} \to ٠} \text{ق(س)}$

س1 $\text{نها}_{س \to 0} \dfrac{\text{جا}\,8س}{6س} = \dfrac{8}{6}$

س2 $\text{نها}_{س \to 0} \dfrac{س + \text{ظا}\,2س - \text{جا}\,س}{س} =$

$\text{نها}_{س \to 0} \left(\dfrac{س}{س} + \dfrac{\text{ظا}\,2س}{س} - \dfrac{\text{جا}\,س}{س} \right) =$

$1 + 2 - 1 = 2$

س3 $\text{نها}_{س \to 0} \left(\text{قا}\,س + \text{ظا}\,5س \right) =$

$1 + 0 = 1$

س4 $\text{نها}_{س \to 0} \left(7س^3 \cdot \text{قتا}^2(2س) \cdot \text{قتا}(5س) \right)$

$\text{نها}_{س \to 0} \left(7س^3 \times \dfrac{1}{\text{ظا}^2\,2س} \times \dfrac{1}{\text{جا}\,5س} \right)$

$\text{نها}_{س \to 0} \left(7 \times \dfrac{س}{\text{ظا}\,2س} \times \dfrac{س}{\text{ظا}\,2س} \times \dfrac{س}{\text{جا}\,5س} \right) =$

$7 \times \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{5} = \dfrac{7}{20}$

س5 $\text{نها}_{س \to 0} \dfrac{1 + \text{جتا}\,4س - 2\,\text{جتا}^2 س}{س^2}$

تذكر: $1 - 2\,\text{جتا}^2 س = -\,\text{جتا}\,2س$

$\text{نها}_{س \to 0} \dfrac{\text{جتا}\,4س - \text{جتا}\,2س}{س^2} =$

$\text{نها}_{س \to 0} \dfrac{-2\,\text{جا}\left(\frac{4س+2س}{2}\right)\text{جا}\left(\frac{4س-2س}{2}\right)}{س^2} =$

$\text{نها}_{س \to 0} \dfrac{-2\,\text{جا}\,3س\,\text{جا}\,س}{س^2} =$

$\text{نها}_{س \to 0} -2\,\dfrac{\text{جا}\,3س}{س} \times \dfrac{\text{جا}\,س}{س} = -2 \times 3 \times 1 = -6$

س6 $\text{نها}_{س \to 0} \dfrac{1 - \text{جتا}\,س}{س\,\text{جا}\,س} \times \dfrac{1 + \text{جتا}\,س}{1 + \text{جتا}\,س}$

$\text{نها}_{س \to 0} \dfrac{1 - \text{جتا}^2 س}{س\,\text{جا}\,س\,(1 + \text{جتا}\,س)} = \text{نها}_{س \to 0} \dfrac{\text{جا}^2 س}{س\,\text{جا}\,س\,(1 + \text{جتا}\,س)}$

$= \text{نها}_{س \to 0} \dfrac{\text{جا}\,س}{س} \times \text{نها}_{س \to 0} \dfrac{1}{1 + \text{جتا}\,س} =$

$1 \times \dfrac{1}{1+1} = \dfrac{1}{2}$

س7 $\text{نها}_{س \to 0} \dfrac{\text{جتا}\,س}{2س - \pi}$

تعويض مباشر

$\dfrac{\text{جتا}\,0}{2 \times 0 - \pi} = \dfrac{1}{0 - \pi}$

$= -\dfrac{1}{\pi}$

س٨ $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نها}} \dfrac{\text{ظاس} - \text{جاس}}{س} =$

$\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نها}} \left(\dfrac{\text{ظاس}}{س} - \dfrac{\text{جاس}}{س} \right) = ١ - ١ = \text{صفر}$

س٩ $\underset{س \leftarrow \frac{\pi}{٢}}{\text{نها}} \dfrac{١ - \text{جاس}}{(\pi - ٢س)^٢} \times \dfrac{١ + \text{جاس}}{١ + \text{جاس}} =$

$\underset{س \leftarrow \frac{\pi}{٢}}{\text{نها}} \dfrac{١ - \text{جا}^٢س}{(\pi - ٢س)^٢} \times \dfrac{١}{١+١} =$

$\underset{س \leftarrow \frac{\pi}{٢}}{\text{نها}} \dfrac{\text{جتا}^٢س}{(\pi - ٢س)^٢} \times \dfrac{١}{٢} =$

$\underset{س \leftarrow \frac{\pi}{٢}}{\text{نها}} \dfrac{\text{جا}^٢(\frac{\pi}{٢} - س)}{\left(٢(\frac{\pi}{٢} - س)\right)^٢} \times \dfrac{١}{٢} =$

$\underset{س \leftarrow \frac{\pi}{٢}}{\text{نها}} \dfrac{\text{جا}^٢(\frac{\pi}{٢} - س)}{٨(\frac{\pi}{٢} - س)^٢}$

ص $= \frac{\pi}{٢} -$ س
س $\leftarrow \frac{\pi}{٢}$
ص $\leftarrow$ صفر

$\underset{ص \leftarrow ٠}{\text{نها}} \dfrac{\text{جا}^٢ص}{٨ص^٢}$

$\underset{ص \leftarrow ٠}{\text{نها}} \dfrac{\text{جاص}}{٨ص} \times \dfrac{\text{جاص}}{ص} =$

$\dfrac{١}{٨} \times ١ = \dfrac{١}{٨}$.

س١٠ $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نها}} \dfrac{\text{قا}(٢س) - ١}{س^٢} \times \dfrac{\text{قا}(٢س) + ١}{\text{قا}(٢س) + ١}$

$\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نها}} \dfrac{\text{قا}^٢(٢س) - ١}{س^٢(١+١)} = \underset{س \leftarrow ٠}{\text{نها}} \dfrac{\text{ظا}^٢ ٢س}{٢س^٢}$

$\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نها}} \dfrac{\text{ظا}٢س}{٢س} \times \dfrac{\text{ظا}٢س}{س} = ١ \times ٢ = ٢$

س١١ $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نها}} \dfrac{٢س^٢ + س\,\text{ظا}٢س}{\text{جا}^٢س}$ توزيع البسط على المقام

$\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نها}} \left(\dfrac{٢س^٢}{\text{جا}^٢س} + \dfrac{س\,\text{ظا}٢س}{\text{جا}^٢س} \right)$

$\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نها}} \left(\dfrac{٢س}{\text{جاس}} \times \dfrac{س}{\text{جاس}} + \dfrac{س}{\text{جاس}} \times \dfrac{\text{ظا}٢س}{\text{جاس}} \right) =$

$٢ \times ١ + ١ \times ٢ = ٢ + ٢ = ٤$.

يمكن حل السؤال بقسمة كل حد على $س^٢$

س١٢ $\underset{س \leftarrow \frac{\pi}{٤}}{\text{نها}} \dfrac{\text{جتا}^٢س - \text{جا}^٢س}{س - \frac{\pi}{٤}} = \underset{س \leftarrow \frac{\pi}{٤}}{\text{نها}} \dfrac{\text{جتا}٢س}{س - \frac{\pi}{٤}}$

$\underset{س \leftarrow \frac{\pi}{٤}}{\text{نها}} \dfrac{\text{جا}(\frac{\pi}{٢} - ٢س)}{س - \frac{\pi}{٤}} = \underset{س \leftarrow \frac{\pi}{٤}}{\text{نها}} \dfrac{\text{جا}\,٢(\frac{\pi}{٤} - س)}{س - \frac{\pi}{٤}}$

ص $= \frac{\pi}{٤} -$ س
س $\leftarrow \frac{\pi}{٤}$
ص $\leftarrow ٠$

$\underset{ص \leftarrow ٠}{\text{نها}} \dfrac{\text{جا}٢ص}{-ص} = -٢$

س١٣ $\lim\limits_{\text{س}\to 0} \dfrac{1-\text{جتا}6\text{س}}{1-\text{جتا}8\text{س}} \times \dfrac{1+\text{جتا}6\text{س}}{1+\text{جتا}6\text{س}} \times \dfrac{\text{جتا}8\text{س}+1}{\text{جتا}8\text{س}+1}$

$\lim\limits_{\text{س}\to 0} \dfrac{1-\text{جتا}^2 6\text{س}}{\text{جتا}^2 8\text{س}-1} \times \dfrac{\text{جتا}8\text{س}+1}{1+\text{جتا}6\text{س}}$

$= \lim\limits_{\text{س}\to 0} \dfrac{\text{جا}^2 6\text{س}}{-\text{جا}^2 8\text{س}} \times \dfrac{(1+1)}{(1+1)} =$

$= \lim\limits_{\text{س}\to 0} \dfrac{\text{جا}6\text{س}}{-\text{جا}8\text{س}} \times \dfrac{\text{جا}6\text{س}}{\text{جا}8\text{س}} \times 1 =$

$-\dfrac{6}{8} \times \dfrac{6}{8} \times 1 = -\dfrac{36}{64} = \dfrac{-9}{16}$

س١٤ $\lim\limits_{\text{س}\to 0} 3\text{س}\,(\text{ظتا}2\text{س} + \text{قتا}3\text{س}) =$

$= \lim\limits_{\text{س}\to 0} 3\text{س}\left(\dfrac{1}{\text{ظا}2\text{س}} + \dfrac{1}{\text{جا}3\text{س}}\right) =$

$= \lim\limits_{\text{س}\to 0} \left(\dfrac{3\text{س}}{\text{ظا}2\text{س}} + \dfrac{3\text{س}}{\text{جا}3\text{س}}\right)$

$\dfrac{3}{2} + 1 = \dfrac{5}{2}$

س١٥ $\lim\limits_{\text{س}\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\text{ظتا س}}{\pi - 2\text{س}} = \lim\limits_{\text{س}\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\text{ظا}\left(\frac{\pi}{2}-\text{س}\right)}{2\left(\frac{\pi}{2}-\text{س}\right)}$

ص $= \frac{\pi}{2} -$ س
س $\to \frac{\pi}{2}$
ص $\to 0$

$= \lim\limits_{\text{ص}\to 0} \dfrac{\text{ظا ص}}{2\text{ص}}$

$\dfrac{1}{2}$.

س١٦ $\lim\limits_{\text{س}\to 1} \dfrac{\text{س جا}\frac{\pi}{\text{س}}}{\text{س}-1} = \lim\limits_{\text{س}\to 1} \dfrac{\cancel{\text{س}}\,\text{جا}\left(\pi - \frac{\pi}{\text{س}}\right)}{\cancel{\text{س}}\left(1-\frac{1}{\text{س}}\right)}$

$\lim\limits_{\text{س}\to 1} \dfrac{\text{جا}\,\pi\left(1-\frac{1}{\text{س}}\right)}{\left(1-\frac{1}{\text{س}}\right)}$

ص $= 1 - \frac{1}{\text{س}}$
س $\to 1$
ص $\to 0$

$\lim\limits_{\text{ص}\to 0} \dfrac{\text{جا}\,\pi\text{ص}}{\text{ص}} = \pi$.

س١٧ $\lim\limits_{\text{س}\to -4} \dfrac{\text{جا}(\text{س}+4)}{\text{س}^2-16} = \lim\limits_{\text{س}\to -4} \dfrac{\text{جا}(\text{س}+4)}{(\text{س}+4)(\text{س}-4)}$

$\lim\limits_{\text{س}\to -4} \left(\dfrac{\text{جا}(\text{س}+4)}{\text{س}+4} \times \dfrac{1}{\text{س}-4}\right)$

ص $=$ س $+ 4$
س $\to -4$
ص $\to 0$

$\lim\limits_{\text{ص}\to 0} \dfrac{\text{جا ص}}{\text{ص}} \times \dfrac{1}{-8}$

$1 \times -\dfrac{1}{8} = -\dfrac{1}{8}$.

س١٨ $\sqrt{1-\text{جتا}2\text{س}} = \sqrt{1-(1-2\,\text{جا}^2\text{س})} =$

$\sqrt{2\,\text{جا}^2\text{س}} = \sqrt{2}\,|\text{جاس}|$.

$\lim\limits_{\text{س}\to 0^+} \dfrac{2\text{س}-\text{جاس}}{\sqrt{1-\text{جتا}2\text{س}}} = \lim\limits_{\text{س}\to 0^+} \dfrac{2\text{س}-\text{جاس}}{\sqrt{2}\,\text{جاس}}$

$\lim\limits_{\text{س}\to 0^+} \left(\dfrac{2\text{س}}{\sqrt{2}\,\text{جاس}} - \dfrac{\text{جاس}}{\sqrt{2}\,\text{جاس}}\right) = \dfrac{2}{\sqrt{2}} - \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\lim\limits_{\text{س}\to 0^-} \dfrac{2\text{س}-\text{جاس}}{\sqrt{1-\text{جتا}2\text{س}}} = \lim\limits_{\text{س}\to 0^-} \dfrac{2\text{س}-\text{جاس}}{-\sqrt{2}\,\text{جاس}}$

$\lim\limits_{\text{س}\to 0^-} \left(\dfrac{2\text{س}}{-\sqrt{2}\,\text{جاس}} + \dfrac{\text{جاس}}{\sqrt{2}\,\text{جاس}}\right) = -\dfrac{2}{\sqrt{2}} + 1 = \dfrac{-1}{\sqrt{2}}$

$\therefore \lim\limits_{\text{س}\to 0} \dfrac{2\text{س}-\text{جاس}}{\sqrt{1-\text{جتا}2\text{س}}}$ غير موجودة .

س١٩ $\text{نها}_{س \to ٣\pi} \frac{\text{جا}\,س}{\frac{س}{٣} - \pi} = \text{نها}_{س \to ٣\pi} \frac{\text{جا}(٣\pi - س)}{\frac{س}{٣} - \pi}$

$\text{نها}_{س \to ٣\pi} \frac{\text{جا}\,٣(\pi - \frac{س}{٣})}{\frac{س}{٣} - \pi}$

$ص = \pi - \frac{س}{٣}$ ، $س \to ٣\pi$ ، $ص \to ٠$

$\text{نها}_{ص \to ٠} \frac{\text{جا}\,٣ص}{-ص} = -٣$

س٢٠ $\text{نها}_{س \to ٢} \frac{س - ٢}{\text{ظا}\,\pi س} = \text{نها}_{س \to ٢} \frac{س - ٢}{-\text{ظا}(٢\pi - \pi س)}$

$\text{نها}_{س \to ٢} \frac{س - ٢}{-\text{ظا}\,\pi(٢ - س)}$

$ص = ٢ - س$ ، $س \to ٢$ ، $ص \to ٠$

$\text{نها}_{ص \to ٠} \frac{-ص}{-\text{ظا}\,\pi ص} = \frac{١}{\pi}$.

س٢١ $\text{نها}_{س \to -أ} \frac{\text{جا}\,س + \text{جا}\,أ}{س + أ} =$

$\text{نها}_{س \to -أ} \frac{٢\,\text{جا}\left(\frac{س+أ}{٢}\right)\text{جتا}\left(\frac{س-أ}{٢}\right)}{س + أ}$

$ص = س + أ$ ، $س \to -أ$ ، $ص \to ٠$

$\text{نها}_{ص \to ٠} \frac{٢\,\text{جا}\frac{ص}{٢}}{ص} \times \text{جتا}\left(\frac{-أ-أ}{٢}\right)$

$= \cancel{٢} \times \frac{١}{\cancel{٢}} \times \text{جتا}(-أ) =$

$\text{جتا}\,أ$.

س٢٢ $\text{نها}_{س \to ٠} \frac{\text{جا}\,أس}{٢س} = \frac{أ}{٢} = ٦ \Leftarrow أ = ١٢$

$\text{نها}_{س \to ٠} \frac{\text{ظا}\,٣س}{ب\,س - س} = \text{نها}_{س \to ٠} \frac{\text{ظا}\,٣س}{س(ب - ١)} = \frac{٣}{ب - ١} = ٦$

$٣ = ٦ب - ٦ \Leftarrow \frac{٦ب}{٦} = \frac{٩}{٦} \Leftarrow ب = \frac{٣}{٢}$

س٢٣ $\text{جا}(٢\pi - ٢س) = -\text{جا}\,٢س$.

$\text{نها}_{س \to ٠} \frac{\text{جا}(٢\pi - ٢س)}{-٥س} =$

$\text{نها}_{س \to ٠} \frac{-\text{جا}\,٢س}{-٥س} = \frac{٢}{٥}$.

نهايات الاقترانات الدائرية (النهايات والاتصال)

اسئلة وزارية:

١) $\displaystyle \text{نها}_{\text{س}\to 0} \frac{\text{ظاس} - \text{جاس}}{\text{س}^3}$

٢) $\displaystyle \text{نها}_{\text{س}\to 0} \frac{\text{قا}(2\text{س}) - 1}{\text{س}^2}$

٣) $\displaystyle \text{نها}_{\text{س}\to \frac{\pi}{4}} \frac{\text{جتاس} - \text{جاس}}{\text{س} - \frac{\pi}{4}}$

٤) $\displaystyle \text{نها}_{\text{س}\to 0} 3\text{س}\left(\text{ظتا}2\text{س} + \text{قتا}3\text{س}\right)$

٥) $\displaystyle \text{نها}_{\text{س}\to \frac{\pi}{2}} \frac{\text{جتاس}}{2\text{س} - \pi}$

٦) $\displaystyle \text{نها}_{\text{س}\to 0} \frac{1 - \text{جتاس}}{\text{س جاس}}$

٧) $\displaystyle \text{نها}_{\text{س}\to 1} \frac{\text{جتا}\frac{\pi}{2}\text{س}}{\text{س} - 1}$

٨) $\displaystyle \text{نها}_{\text{س}\to \frac{\pi}{2}} \frac{\text{جا}2\text{س}}{\text{س}^2 - \frac{\pi}{2}\text{س}}$

٩) $\displaystyle \text{نها}_{\text{س}\to 3} \frac{\text{س} - 3}{\text{ظا}\pi\text{س}}$

١٠) اذا كانت

$\displaystyle \text{نها}_{\text{س}\to 0} \frac{\text{ظا أس}}{5\text{س}} = \text{نها}_{\text{س}\to 0} \frac{\text{جا}6\text{س}}{\text{ب س} - \text{س}} = 2$

جد كلاً من الثابتين أ ، ب

١١) $\displaystyle \text{نها}_{\text{س}\to \pi} \frac{1 + \text{جتاس}}{(\text{س} - \pi)^2}$

١٢) $\displaystyle \text{نها}_{\text{س}\to \frac{\pi}{6}} \frac{\text{جتاس} - \sqrt{3}\,\text{جاس}}{6\text{س} - \pi}$

١٣) $\displaystyle \text{نها}_{\text{س}\to 0} \frac{2\text{س} - \text{جاس}}{\sqrt{1 - \text{جتا}2\text{س}}}$

١٤) $\displaystyle \text{نها}_{\text{س}\to 0} \frac{4 - \text{س ظاس} - 4\,\text{جتاس}}{\text{س جا}4\text{س}}$

حلول أسئلة وزارية :

1) $\lim\limits_{س\to 0} \dfrac{\frac{\text{جاس}}{\text{جتاس}} - \text{جاس}}{س^3}$

$= \lim\limits_{س\to 0} \dfrac{\text{جاس} - \text{جاس جتاس}}{س^3 \times \text{جتاس}}$

$= \lim\limits_{س\to 0} \dfrac{\text{جاس}(1-\text{جتاس})}{س^3\ \text{جتاس}} \times \dfrac{1+\text{جتاس}}{1+\text{جتاس}}$

$= \lim\limits_{س\to 0} \dfrac{\text{جاس}(1-\text{جتا}^2س)}{س^3\ \text{جتاس}\ (1+\text{جتاس})}$

$= \lim\limits_{س\to 0} \dfrac{\text{جاس} \cdot \text{جا}^2س}{س^3\ \text{جتاس}\ (1+\text{جتاس})}$

$= \lim\limits_{س\to 0} \dfrac{\text{جاس}}{س} \times \dfrac{\text{جاس}}{س} \times \dfrac{\text{جاس}}{س} \times \dfrac{1}{\text{جتاس}(1+\text{جتاس})}$

$= 1 \times 1 \times 1 \times \dfrac{1}{1(1+1)} = \dfrac{1}{2}$

2) $\lim\limits_{س\to 0} \dfrac{\frac{1}{\text{جتا}2س} - 1}{س^2} = \lim\limits_{س\to 0} \dfrac{1-\text{جتا}2س}{\text{جتا}2س \times س^2}$

$\lim\limits_{س\to 0} \dfrac{1-\text{جتا}2س}{\text{جتا}2س \times س^2} \times \dfrac{1+\text{جتا}2س}{1+\text{جتا}2س}$

$\lim\limits_{س\to 0} \dfrac{1-\text{جتا}^2 2س}{\text{جتا}2س \times س^2 \times (1+\text{جتا}2س)}$

$\lim\limits_{س\to 0} \dfrac{\text{جا}^2 2س}{س^2 \times \text{جتا}2س \times (1+\text{جتا}2س)}$

$\lim\limits_{س\to 0} \dfrac{\text{جا}2س}{س} \times \dfrac{\text{جا}2س}{س} \times \dfrac{1}{\text{جتا}2س(1+\text{جتا}2س)}$

$2 \times 2 \times \dfrac{1}{1(1+1)} = 2$.

3) $\lim\limits_{س\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\text{جتاس} - \text{جاس}}{\frac{\pi}{4} - س} = \lim\limits_{س\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\text{جتاس} - \text{جتا}(\frac{\pi}{2}-س)}{\frac{\pi}{4} - س}$

$\lim\limits_{س\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{-2\ \text{جا}\left(\frac{س+\frac{\pi}{2}-س}{2}\right) \text{جا}\left(\frac{س-\frac{\pi}{2}+س}{2}\right)}{\frac{\pi}{4} - س}$

$\lim\limits_{س\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{-2\ \text{جا}\frac{\pi}{4}\ \text{جا}(س-\frac{\pi}{4})}{\frac{\pi}{4} - س}$

نفرض أن
$ص = \frac{\pi}{4} - س$
$س \to \frac{\pi}{4}$
$ص \to 0$

$\lim\limits_{ص\to 0} -2 \times \dfrac{1}{\sqrt{2}} \dfrac{\text{جاص}}{ص}$

$\dfrac{-2}{\sqrt{2}} \lim\limits_{ص\to 0} \dfrac{\text{جاص}}{ص} = \dfrac{-2}{\sqrt{2}} \times 1 = -\sqrt{2}$.

4) $\lim\limits_{س\to 0} 3س \left(\dfrac{1}{\text{ظا}2س} + \dfrac{1}{\text{جا}3س}\right)$

$\lim\limits_{س\to 0} \dfrac{3س}{\text{ظا}2س} + \lim\limits_{س\to 0} \dfrac{3س}{\text{جا}3س}$

$\dfrac{3}{2} + 1 = \dfrac{5}{2}$

5) $\lim\limits_{س\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\text{جتاس}}{2س - \pi} = \lim \dfrac{\text{جا}(\frac{\pi}{2}-س)}{2(\frac{\pi}{2}-س)}$

$= \lim\limits_{ص\to 0} \dfrac{\text{جاص}}{-2ص} = \dfrac{-1}{2}$.

$ص = \frac{\pi}{2} - س$
عندما $س \to \frac{\pi}{2}$
$ص \to 0$

٦) $\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \dfrac{١ - \text{جتا}س}{س\,\text{جا}س} \times \dfrac{١ + \text{جتا}س}{١ + \text{جتا}س}$

$\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \dfrac{١ - \text{جتا}^٢س}{س\,\text{جا}س\,(١ + \text{جتا}س)}$

$\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \dfrac{\text{جا}^٢س}{٢س\,\text{جا}س} =$

$\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \dfrac{\text{جا}س}{٢س} = \dfrac{١}{٢}$.

٧) $\underset{س \to ١}{\text{نها}} \dfrac{\text{جتا}\frac{\pi}{٢}س}{س - ١} =$

$\underset{س \to ١}{\text{نها}} \dfrac{\text{جا}\left(\frac{\pi}{٢} - \frac{\pi}{٢}س\right)}{س - ١}$

$\underset{س \to ١}{\text{نها}} \dfrac{\text{جا}\frac{\pi}{٢}(١ - س)}{س - ١}$

ص = ١ − س ، س ← ١ ، ص ← ٠

$\underset{ص \to ٠}{\text{نها}} \dfrac{\text{جا}\frac{\pi}{٢}ص}{-ص} = -\dfrac{\pi}{٢}$.

٨) $\underset{س \to \frac{\pi}{٢}}{\text{نها}} \dfrac{\text{جا}٢س}{س\left(س - \frac{\pi}{٢}\right)} =$

$\underset{س \to \frac{\pi}{٢}}{\text{نها}} \dfrac{١}{س} \times \underset{س \to \frac{\pi}{٢}}{\text{نها}} \dfrac{\text{جا}(\pi - ٢س)}{س - \frac{\pi}{٢}}$

$\dfrac{٢}{\pi} \underset{س \to \frac{\pi}{٢}}{\text{نها}} \dfrac{\text{جا}٢\left(\frac{\pi}{٢} - س\right)}{س - \frac{\pi}{٢}}$

ص = $\frac{\pi}{٢}$ − س ، س ← $\frac{\pi}{٢}$ ، ص ← ٠

$\dfrac{٢}{\pi} \times \underset{ص \to ٠}{\text{نها}} \dfrac{\text{جا}٢ص}{-ص}$

$\dfrac{٢}{\pi} \times -٢ = \dfrac{-٤}{\pi}$

٩) $\underset{س \to ٢}{\text{نها}} \dfrac{س - ٢}{\text{ظا}\,\pi س} =$

$\underset{س \to ٢}{\text{نها}} \dfrac{س - ٢}{-\text{ظا}(٢\pi - \pi س)} = \underset{س \to ٢}{\text{نها}} \dfrac{س - ٢}{-\text{ظا}\,\pi(٢ - س)}$

$\underset{ص \to ٠}{\text{نها}} \dfrac{-ص}{-\text{ظا}\,\pi ص} = \dfrac{١}{\pi}$

ص = ٢ − س ، س ← ٢ ، ص ← صفر

١٠) $\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \dfrac{\text{ظا}\,م س}{٥س} = \dfrac{م}{٥} = ٢ \Leftarrow م = ١٠$

$\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \dfrac{\text{جا}٦س}{س(ب - ١)} = \underset{س \to ٠}{\text{نها}} \dfrac{\text{جا}٦س}{س} \times \dfrac{١}{ب - ١} = ٢$

$٦ \times \dfrac{١}{ب - ١} = ٢$

$\Leftarrow ٦ = ٢ب - ٢ \Leftarrow ٢ب = ٨ \Leftarrow ب = ٤$

١١) $\underset{س \to \pi}{\text{نها}} \dfrac{١ + \text{جتا}س}{(س - \pi)^٢} \times \dfrac{١ - \text{جتا}س}{١ - \text{جتا}س}$.

$\underset{س \to \pi}{\text{نها}} \dfrac{١ - \text{جتا}^٢س}{(س - \pi)^٢(١ + ١)} = \underset{س \to \pi}{\text{نها}} \dfrac{\text{جا}^٢س}{٢(س - \pi)^٢}$

$\underset{س \to \pi}{\text{نها}} \dfrac{\text{جا}^٢(\pi - س)}{٢(\pi - س)^٢}$

ص = π − س ، س ← π ، ص ← ٠ .

$\underset{ص \to ٠}{\text{نها}} \dfrac{\text{جا}^٢ص}{٢(-ص)^٢}$

$\underset{ص \to ٠}{\text{نها}} \dfrac{١}{٢} \times \dfrac{\text{جا}ص}{-ص} \times \dfrac{\text{جا}ص}{-ص} = \dfrac{١}{٢} \times -١ \times -١$

$= \dfrac{١}{٢}$.

١٢) $\displaystyle نها_{س \to \frac{\pi}{6}} \frac{جتا س - \sqrt{3}\ جا س}{6س - \pi}$

نفرض $ص = س - \frac{\pi}{6} \Leftarrow س = ص + \frac{\pi}{6}$

$س \to \frac{\pi}{6} \quad \leftarrow \quad ص \to 0$

* $جتا س = جتا(ص + \frac{\pi}{6})$

$= جتاص\ جتا\frac{\pi}{6} - جاص\ جا\frac{\pi}{6}$

$= \frac{\sqrt{3}}{2} جتاص - \frac{1}{2} جاص$

* $\sqrt{3}\ جا س = \sqrt{3}\ جا(ص + \frac{\pi}{6})$

$\sqrt{3}\left(جاص\ جتا\frac{\pi}{6} + جتاص\ جا\frac{\pi}{6}\right)$

$\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} جاص + \frac{1}{2} جتاص\right)$

$= \frac{3}{2} جاص + \frac{\sqrt{3}}{2} جتاص$

* $جتا س - \sqrt{3}\ جا س =$

$\left(\frac{\sqrt{3}}{2} جتاص - \frac{1}{2} جاص\right) - \left(\frac{3}{2} جاص + \frac{\sqrt{3}}{2} جتاص\right)$

$= -2\ جاص$

* $6س - \pi = 6\left(س - \frac{\pi}{6}\right) = 6ص$

تكون $\displaystyle نها_{س \to \frac{\pi}{6}} \frac{جتا س - \sqrt{3}\ جا س}{6س - \pi}$

$\displaystyle نها_{ص \to 0} \frac{-2\ جاص}{6ص}$

$= \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3}$

---

١٣) $\displaystyle نها_{س \to 0} \frac{2س - جاس}{\sqrt{1 - جتا 2س}}$

$جتا 2س = 1 - 2جا^2 س$
$1 - جتا 2س = 2 جا^2 س$

$\displaystyle نها_{س \to 0} \frac{2س - جاس}{\sqrt{2 جا^2 س}} = نها_{س \to 0} \frac{2س - جاس}{\sqrt{2}\ |جاس|}$

$\displaystyle نها_{س \to 0^+} \frac{2س - جاس}{\sqrt{2}\ جاس} = نها_{س \to 0} \frac{2س}{\sqrt{2}\ جاس} - نها_{س \to 0} \frac{\cancel{جاس}}{\sqrt{2}\ \cancel{جاس}}$

$= \frac{2}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\displaystyle نها_{س \to 0^-} \frac{2س - جاس}{-\sqrt{2}\ جاس} =$

$\displaystyle نها_{س \to 0^-} \frac{2س}{-\sqrt{2}\ جاس} + نها \frac{جاس}{\sqrt{2}\ جاس} = \frac{-2}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$

$\therefore \displaystyle نها_{س \to 0} \frac{2س - جاس}{\sqrt{1 - جتا 2س}}$ غير موجودة.

---

١٤) $\displaystyle نها_{س \to 0} \frac{4 - 4\ جتاس - س\ ظاس}{س\ جا4س}$

$\displaystyle نها_{س \to 0} \frac{4 - 4\ جتاس}{س\ جا4س} - نها \frac{س\ ظاس}{س\ جا4س}$

$\displaystyle = نها_{س \to 0} \frac{4(1 - جتاس)}{س\ جا4س} \times \frac{(1 + جتاس)}{(1 + جتاس)} - نها_{س \to 0} \frac{\frac{ظاس}{س}}{\frac{جا4س}{س}}$

$\displaystyle = نها_{س \to 0} \frac{4(1 - جتا^2 س)}{س\ جا4س\ (1+1)} - \frac{1}{4}$

$\displaystyle = نها_{س \to 0} \frac{\cancel{4}^{2}\ جا^2 س}{س\ جا4س\ \cancel{2}} - \frac{1}{4}$

$\displaystyle = 2 \times نها_{س \to 0} \frac{جاس}{س} \times نها_{س \to 0} \frac{جاس}{جا4س} - \frac{1}{4}$

$= 2 \times 1 \times \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

أسئلة اضافية على نهاية الاقترانات الدائرية

① $\lim\limits_{س \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{1 - ظاس}{جتا٢س}$

$= \lim\limits_{س \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{1 - \frac{جاس}{جتاس}}{جتا^2س - جا^2س}$

$= \lim\limits_{س \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\frac{جتاس - جاس}{جتاس}}{(جتاس - جاس)(جتاس + جاس)}$

$\lim\limits_{س \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{-1\,\cancel{(جاس - جتاس)}}{\cancel{(جتاس - جاس)}(جتاس + جاس)(جتاس)}$

$\lim\limits_{س \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{-1}{(جتاس + جاس)(جتاس)} = \dfrac{-1}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}$

$= \dfrac{-1}{\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} = \dfrac{-1}{\frac{2}{2}} = -1$

② $\lim\limits_{س \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{1 - جا٢س}{جاس - جتاس}$

جا٢س = ٢جاس جتاس

$\lim\limits_{س \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{1 - ٢جاس\,جتاس}{جاس - جتاس}$

لأن $1 = جا^2س + جتا^2س$

$\lim\limits_{س \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{جا^2س + جتا^2س - ٢جاس\,جتاس}{جاس - جتاس}$

$\lim\limits_{س \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{جا^2س - ٢جاس\,جتاس + جتا^2س}{جاس - جتاس}$

$\lim\limits_{س \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{(جاس - جتاس)\cancel{(جاس - جتاس)}}{\cancel{جاس - جتاس}}$

$\lim\limits_{س \to \frac{\pi}{4}} (جاس - جتاس) = جا\frac{\pi}{4} - جتا\frac{\pi}{4}$

$=$ صفر

③ $\lim\limits_{س \to م} \dfrac{جا^2س - جا^2م}{س - م}$

$\lim\limits_{س \to م} \dfrac{(جاس - جام)(جاس + جام)}{س - م}$

$\lim\limits_{س \to م} \dfrac{٢\,جتا\left(\frac{س+م}{2}\right) جا\left(\frac{س-م}{2}\right) × (جاس + جام)}{س - م}$

$\lim\limits_{س \to م} ٢\,جتا\left(\frac{س+م}{2}\right) × \lim\limits_{س \to م} \dfrac{جا\left(\frac{س-م}{2}\right)}{\left(\frac{س-م}{2}\right) × 2} × \lim\limits_{س \to م} (جاس + جام)$

$\cancel{2}\,جتا\left(\frac{م+م}{2}\right) × \frac{1}{\cancel{2}} × 1 × (جام + جام)$

$جتا\left(\frac{2م}{\cancel{2}}\right) × ٢جام$

$٢جتام\,جام = جا٢م$

اسئلة اضافية على نهاية الاقترانات الدائرية

④ اثبت ان $\text{نها}_{س \to \frac{\pi}{6}} \frac{2\,جاس - 1}{4\,جتا^2 س - 3} = \frac{-1}{2}$

$$\text{نها}_{س \to \frac{\pi}{6}} \frac{2\,جاس - 1}{4\,جتا^2 س - 3} = \text{نها}_{س \to \frac{\pi}{6}} \frac{2\,جاس - 1}{4(1 - جا^2 س) - 3}$$

$$\text{نها}_{س \to \frac{\pi}{6}} \frac{2\,جاس - 1}{4 - 4\,جا^2 س - 3}$$

$$\text{نها}_{س \to \frac{\pi}{6}} \frac{2\,جاس - 1}{1 - 4\,جا^2 س}$$

$$\text{نها}_{س \to \frac{\pi}{6}} \frac{\cancel{2\,جاس - 1}^{\,-1}}{\cancel{(1 - 2\,جاس)}(1 + 2\,جاس)}$$

$$\frac{-1}{1 + 2\,جا\frac{\pi}{6}} = \frac{-1}{1 + 2 \times \frac{1}{2}} = \frac{-1}{2}.$$

⑤ اثبت ان $\text{نها}_{س \to 0} \frac{س^2}{\sqrt[3]{جتاس} - 1} = -6$

$$\text{نها}_{س \to 0} \frac{س^2}{\sqrt[3]{جتاس} - 1} \times \frac{\sqrt[3]{جتا^2 س} + \sqrt[3]{جتاس} + 1}{\sqrt[3]{جتا^2 س} + \sqrt[3]{جتاس} + 1}$$

$$\text{نها}_{س \to 0} \frac{س^2 \times 3}{جتاس - 1} \times \frac{جتاس + 1}{جتاس + 1}$$

$$\text{نها}_{س \to 0} \frac{3 س^2}{جتا^2 س - 1} \times \text{نها} (جتاس + 1)$$

$$\text{نها}_{س \to 0} \frac{3 س^2}{- جا^2 س} \times \text{نها} (جتاس + 1)$$

$$3 \times -1 \times 2 = -6.$$

⑥ $\text{نها}_{س \to 0} \frac{1 + ظاس\,جاس - جتا2س}{5\,جا^2 س}$

$$\text{نها}_{س \to 0} \frac{1 + ظاس\,جاس - (1 - 2\,جا^2 س)}{5\,جا^2 س}$$

$$\text{نها}_{س \to 0} \frac{1 + ظاس\,جاس - 1 + 2\,جا^2 س}{5\,جا^2 س}$$

$$\text{نها}_{س \to 0} \frac{ظاس\,جاس + 2\,جا^2 س}{5\,جا^2 س}$$

$$\text{نها}_{س \to 0} \frac{ظاس\,جاس}{5\,جاس\,جاس} + \text{نها}_{س \to 0} \frac{2\,\cancel{جا^2 س}}{5\,\cancel{جا^2 س}}$$

$$\frac{1}{5} + \frac{2}{5} = \frac{3}{5}.$$

أسئلة إضافية على نهاية الاقترانات الدائرية

٧)

$$\lim_{\text{س}\to 0} \frac{\left(1-\sqrt{\text{س}+1}\right)\text{جا}\,5\text{س}}{7\,\text{س}^2}$$

$$\lim_{\text{س}\to 0} \frac{1-\sqrt{\text{س}+1}}{\text{س}} \times \lim_{\text{س}\to 0} \frac{\text{جا}\,5\text{س}}{7\,\text{س}}$$

$$\lim_{\text{س}\to 0} \left(\frac{1-\sqrt{\text{س}+1}}{\text{س}} \times \frac{1+\sqrt{\text{س}+1}}{1+\sqrt{\text{س}+1}}\right) \times \frac{5}{7}$$

$$\frac{5}{7} \lim_{\text{س}\to 0} \frac{1-1-\text{س}}{\text{س}\left(1+\sqrt{\text{س}+1}\right)}$$

$$\frac{5}{7} \times \frac{-1}{1+\sqrt{1}} = \frac{-5}{14}$$

٨)

$$\lim_{\text{س}\to \pi} \frac{\text{جا}\,\text{س}}{\pi^2-\text{س}^2}$$

$$\lim_{\text{س}\to \pi} \frac{\text{جا}(\pi-\text{س})}{(\pi-\text{س})(\pi+\text{س})}$$

$$\lim_{\text{س}\to \pi} \frac{\text{جا}(\pi-\text{س})}{\pi-\text{س}} \times \lim_{\text{س}\to \pi} \frac{1}{\pi+\text{س}}$$

$$1 \times \frac{1}{\pi+\pi}$$

$$1 \times \frac{1}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}$$

٩)

$$\lim_{\text{س}\to \frac{\pi}{4}} \frac{\text{جا}\,\text{س} - \text{جتا}\,\text{س}}{2\text{س} - \frac{\pi}{2}}$$

$$\lim_{\text{س}\to \frac{\pi}{4}} \frac{\text{جا}\,\text{س} - \text{جا}\left(\frac{\pi}{2}-\text{س}\right)}{2\left(\text{س}-\frac{\pi}{4}\right)}$$

$$\lim_{\text{س}\to \frac{\pi}{4}} \frac{2\,\text{جا}\left(\frac{\text{س}-\left(\frac{\pi}{2}-\text{س}\right)}{2}\right)\text{جتا}\left(\cancel{\frac{\text{س}+\frac{\pi}{2}-\text{س}}{2}}\right)}{2\left(\text{س}-\frac{\pi}{4}\right)}$$

$$\lim_{\text{س}\to \frac{\pi}{4}} \frac{\cancel{2}\,\text{جا}\left(\frac{2\text{س}-\frac{\pi}{2}}{2}\right)\text{جتا}\,\frac{\pi}{4}}{\cancel{2}\left(\text{س}-\frac{\pi}{4}\right)}$$

$$\lim_{\text{س}\to \frac{\pi}{4}} \frac{\text{جا}\left(\text{س}-\frac{\pi}{4}\right)}{\text{س}-\frac{\pi}{4}} \times \text{جتا}\,\frac{\pi}{4}$$

$$= 1 \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

١٠)

$$\lim_{\text{س}\to 0} \frac{\text{جتا}\,\text{س} - 1}{\text{جتا}\,2\text{س} - 1} \times \frac{\text{جتا}\,\text{س}+1}{\text{جتا}\,\text{س}+1}$$

$$\lim_{\text{س}\to 0} \frac{\text{جتا}^2\text{س} - 1}{\left((\text{جتا}^2\text{س}-\text{جا}^2\text{س})-(\text{جا}^2\text{س}+\text{جتا}^2\text{س})\right)(\text{جتا}\,\text{س}+1)}$$

$$\lim_{\text{س}\to 0} \frac{-\text{جا}^2\text{س}}{\cancel{\text{جتا}^2\text{س}}-\text{جا}^2\text{س}-\text{جا}^2\text{س}-\cancel{\text{جتا}^2\text{س}}} \times \frac{1}{(\text{جتا}\,\text{س}+1)}$$

$$\lim_{\text{س}\to 0} \frac{-\text{جا}^2\text{س}}{-2\,\cancel{\text{جا}^2\text{س}}\,(\text{جتا}\,\text{س}+1)} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{1+\text{جتا}\,0}$$

$$= \frac{1}{4}$$

أسئلة إضافية على نهاية الاقترانات الدائرية

(11) $\lim\limits_{س \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\text{جاس} - \text{جتاس}}{1 - \text{ظاس}}$

$\lim\limits_{س \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\text{جاس} - \text{جتاس}}{1 - \dfrac{\text{جاس}}{\text{جتاس}}}$

$\lim\limits_{س \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\text{جاس} - \text{جتاس}}{\dfrac{\text{جتاس} - \text{جاس}}{\text{جتاس}}}$

$\lim\limits_{س \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\cancel{(\text{جاس} - \text{جتاس})}\,(\text{جتاس})}{\cancel{\text{جتاس} - \text{جاس}}}$

$-1 \times \text{جتا}\,\frac{\pi}{4} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$

(12) $\lim\limits_{س \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{1 - \text{ظاس}}{\text{جتا}2س}$

$\lim\limits_{س \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{1 - \dfrac{\text{جاس}}{\text{جتاس}}}{\text{جتا}^2س - \text{جا}^2س}$

$\lim\limits_{س \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\cancel{\text{جتاس} - \text{جاس}}}{\text{جتاس}} \times \dfrac{1}{\cancel{(\text{جتاس} - \text{جاس})}(\text{جتاس} + \text{جاس})}$

$\dfrac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)}$

$\dfrac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)} = \dfrac{1}{\frac{2}{2}} = 1$

(13) $\lim\limits_{س \to 0} \dfrac{(\text{ظاس} - 3س)^2}{1 - \text{جتا}7س}$

$\lim\limits_{س \to 0} \dfrac{(\text{ظاس} - 3س)^2}{1 - \text{جتا}7س} \times \dfrac{1 + \text{جتا}7س}{1 + \text{جتا}7س}$

$\lim\limits_{س \to 0} \dfrac{\text{ظا}^2س - 6س\,\text{ظاس} + 9س^2}{1 - \text{جتا}^2 7س}\,(1 + \text{جتا}7س)$

$\text{جا}^2 7س \leftarrow$

$\left(\lim\limits_{س \to 0} \dfrac{\text{ظاس} \times \text{ظاس}}{\text{جا}7س \times \text{جا}7س} - \lim\limits_{س \to 0} \dfrac{6س\,\text{ظاس}}{\text{جا}7س \times \text{جا}7س} + \right.$

$\left.\lim\limits_{س \to 0} \dfrac{9س \times س}{\text{جا}7س \times \text{جا}7س}\right) \times \lim\limits_{س \to 0}(1 + \text{جتا}7س)$

$\left(\frac{1}{7} \times \frac{1}{7} - \frac{1}{7} \times \frac{6}{7} + \frac{1}{7} \times \frac{9}{7}\right)(1 + \text{جتا}\,0)$

$\frac{4}{49}(1 + 1) = \frac{8}{49}$

(14) $\lim\limits_{س \to 0} \dfrac{1 - \text{جا}2س - \text{جتا}^2س}{4س}$

$\lim\limits_{س \to 0} \dfrac{\text{جا}^2س + \cancel{\text{جتا}^2س} - \text{جا}2س - \cancel{\text{جتا}^2س}}{4س}$

$\lim\limits_{س \to 0} \dfrac{\text{جا}^2س - \text{جا}2س}{4س}$

$\lim\limits_{س \to 0} \dfrac{\text{جاس}}{س} \times \dfrac{\text{جاس}}{4} - \lim\limits_{س \to 0} \dfrac{\text{جا}2س}{4س}$

$1 \times \text{صفر} - \frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$

أسئلة إضافية على نهايات الاقترانات الدائرية

(15)

$$\text{نها}_{س \to \frac{\pi}{4}} \frac{\text{ظاس} - 1}{س - \frac{\pi}{4}}$$

توحيد مقامات في البسط

$$\text{نها}_{س \to \frac{\pi}{4}} \frac{\frac{\text{جاس}}{\text{جتاس}} - \frac{\text{جتاس}}{\text{جتاس}}}{س - \frac{\pi}{4}}$$

$$\text{نها}_{س \to \frac{\pi}{4}} \frac{\frac{\text{جاس} - \text{جتاس}}{\text{جتاس}}}{س - \frac{\pi}{4}}$$

$$\text{نها}_{س \to \frac{\pi}{4}} \frac{\frac{\text{جاس} - \text{جا}(\frac{\pi}{2} - س)}{\text{جتاس}}}{س - \frac{\pi}{4}}$$

$$\text{نها}_{س \to \frac{\pi}{4}} \frac{2\,\text{جا}\left(\frac{س - \frac{\pi}{2} + س}{2}\right) \text{جتا}\left(\frac{س + \frac{\pi}{2} - س}{2}\right)}{\text{جتاس}} \times \frac{1}{(س - \frac{\pi}{4})}$$

$$2\,\text{نها}_{س \to \frac{\pi}{4}} \frac{\text{جا}\left(\frac{2س - \frac{\pi}{2}}{2}\right) \text{جتا}\frac{\pi}{4}}{\text{جتاس}} \times \frac{1}{(س - \frac{\pi}{4})}$$

$$2\,\text{نها}_{س \to \frac{\pi}{4}} \frac{\text{جا}(س - \frac{\pi}{4})\,\text{جتا}\frac{\pi}{4}}{(س - \frac{\pi}{4})\;\text{جتاس}}$$

$$2\,\text{نها}_{س \to \frac{\pi}{4}} \frac{\text{جا}(س - \frac{\pi}{4})}{(س - \frac{\pi}{4})} \times \cancel{\frac{\text{جتا}\frac{\pi}{4}}{\text{جتا}\frac{\pi}{4}}}$$

$$2 \times 1 = 2$$

(16)

$$\text{نها}_{س \to 0} \frac{\text{جا}2س - 2\,\text{جاس}}{س^3}$$

$$\text{نها}_{س \to 0} \frac{2\,\text{جاس جتاس} - 2\,\text{جاس}}{س^3}$$

$$\text{نها}_{س \to 0} \frac{2\,\text{جاس}\,(\text{جتاس} - 1)}{س^3} \times \frac{(\text{جتاس} + 1)}{(\text{جتاس} + 1)}$$

$$\text{نها}_{س \to 0} \frac{2\,\text{جاس} \times \text{جا}^2\text{س}}{س^3\ (\text{جتاس} + 1)}$$

$$\text{نها}_{س \to 0} \frac{2}{(\text{جتاس} + 1)} \times \text{نها}_{س \to 0} \frac{\text{جا}^3\text{س}}{س^3} = \frac{2}{2} \times 1^3 = 1$$

(17)

$$\text{نها}_{س \to 0} \frac{\text{جا}^2\text{س}}{\text{قاس} - 1}$$

$$\text{نها}_{س \to 0} \frac{\text{جا}^2\text{س}}{\frac{1}{\text{جتاس}} - \frac{\text{جتاس}}{\text{جتاس}}} = \text{نها}_{س \to 0} \frac{\text{جا}^2\text{س}}{\frac{1 - \text{جتاس}}{\text{جتاس}}}$$

$$\text{نها}_{س \to 0} \frac{\text{جا}^2\text{س} \times \text{جتاس}}{1 - \text{جتاس}}$$

$$\text{نها}_{س \to 0} \frac{(1 - \text{جتا}^2\text{س})\ \text{جتاس}}{1 - \text{جتاس}}$$

$$\text{نها}_{س \to 0} \frac{\cancel{(1 - \text{جتاس})}\ (1 + \text{جتاس}) \times \text{جتاس}}{\cancel{1 - \text{جتاس}}}$$

$$(1 + \text{جتا}0)\ (\text{جتا}0)$$

$$(1 + 1) \times 1 = 2$$

اسئلة اضافية على نهاية الاقترانات الدائرية

(١٨) $\lim\limits_{س \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{جتا^2 س - جتا^2 \frac{\pi}{4}}{٤س - \pi} = -\dfrac{1}{٤}$

$\lim\limits_{س \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{1 - جا^2 س - 1 + جا^2 \frac{\pi}{4}}{٤س - \pi}$

$\lim\limits_{س \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{جا^2 \frac{\pi}{4} - جا^2 س}{٤س - \pi}$

$\lim\limits_{س \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{(جا \frac{\pi}{4} - جا س)(جا \frac{\pi}{4} + جا س)}{٤س - \pi}$

$\lim\limits_{س \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{جا \frac{\pi}{4} - جا س}{٤س - \pi} \times \lim\limits_{س \to \frac{\pi}{4}} (جا \frac{\pi}{4} + جا س)$

$\lim\limits_{س \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{٢ جتا\left(\frac{س + \frac{\pi}{4}}{٢}\right) جا\left(\frac{\frac{\pi}{4} - س}{٢}\right)}{٤س - \pi} \left(٢ \times \dfrac{1}{\sqrt{٢}}\right)$

$\lim\limits_{س \to \frac{\pi}{4}} ٢ جتا\left(\frac{س + \frac{\pi}{4}}{٢}\right) \times \lim\limits_{س \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\frac{\pi - ٤س}{٨}}{٤س - \pi} \times \dfrac{٢}{\sqrt{٢}}$

$٢ \times \dfrac{1}{\sqrt{٢}} \times \dfrac{1}{٨} \lim\limits_{س \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\frac{1}{٨}(\pi - ٤س)}{-\frac{1}{٨} \times (\pi - ٤س)} \times \cancel{\dfrac{٢}{\sqrt{٢}}}$

$٢ \times \dfrac{1}{٨} \times -1$

$-\dfrac{1}{٤}$

(١٩) $\lim\limits_{س \to ٠} \dfrac{جا^3 س}{جا س^3}$

$\lim\limits_{س \to ٠} \dfrac{\frac{جا^3 س}{س^3}}{\frac{جا س^3}{س^3}}$

$= \dfrac{\lim\limits_{س \to ٠} \left(\frac{جا س}{س}\right)^3}{\lim\limits_{س \to ٠} \frac{جا س^3}{س^3}} = \dfrac{1^3}{1} = 1$

(٢٠) $\lim\limits_{س \to ٠} س^2 \, قتا^2 ٢س$

$= \lim\limits_{س \to ٠} \dfrac{س^2}{جا^2 ٢س}$

$\lim\limits_{س \to ٠} \dfrac{س}{جا ٢س} \times \dfrac{س}{جا ٢س}$ قسمة جميع الاطراف على س

$\lim\limits_{س \to ٠} \dfrac{\frac{س}{س}}{\frac{جا ٢س}{س}} \times \lim\limits_{س \to ٠} \dfrac{\frac{س}{س}}{\frac{جا ٢س}{س}}$

$\dfrac{1}{٢} \times \dfrac{1}{٢} = \dfrac{1}{٤}$

١ أسئلة إضافية على نهاية الاقترانات المثلثية

(٢١) $$\lim_{س \to ٠} \frac{(١ - \sqrt{س+١})\ جا ٥س}{٧ س^٢}$$

$$\lim_{س \to ٠} \frac{١ - \sqrt{س+١}}{س} \times \lim_{س \to ٠} \frac{جا ٥س}{٧س}$$

ضرب بالمرافق $\times \frac{٥}{٧}$

$$-\frac{١}{٢} \times \frac{٥}{٧} = -\frac{٥}{١٤}.$$

(٢٢) $$\lim_{س \to ٠} \frac{ظا ٧س - جا ٥س}{جا ٣س + ظا ٢س}$$

$$\frac{\lim_{س \to ٠} \frac{ظا ٧س}{س} - \lim_{س \to ٠} \frac{جا ٥س}{س}}{\lim_{س \to ٠} \frac{جا ٣س}{س} + \lim \frac{ظا ٢س}{س}}$$

$$\frac{٧ - ٥}{٣ + ٢} = \frac{٢}{٥}.$$

(٢٣) $$\lim_{س \to ٠} \frac{١ - جتا ٢س + جا^٢ س}{س^٢}$$

$$\lim_{س \to ٠} \frac{١ - جتا ٢س}{س^٢} + \lim_{س \to ٠} \frac{جا^٢ س}{س^٢}$$

$$\lim_{س \to ٠} \frac{١ - ١ + ٢ جا^٢ س}{س^٢} + \lim_{س \to ٠} \frac{جاس}{س} \times \lim_{س \to ٠} \frac{جاس}{س}$$

$$\lim_{س \to ٠} \frac{٢ جاس}{س} \times \lim \frac{جاس}{س} + ١ \times ١$$

$$٢ \times ١ + ١ = ٣$$

$$جتا ٢س = ١ - ٢ جا^٢ س$$

(٢٤) $$\lim_{س \to \frac{\pi}{٤}} \frac{جا ٢س + جتا ٢س - ١}{جاس - جتاس}$$

$$\lim_{س \to \frac{\pi}{٤}} \frac{٢ جاس جتاس + ١ - ٢ جا^٢ س - ١}{جاس - جتاس}.$$

$$\lim_{س \to \frac{\pi}{٤}} \frac{-٢ جاس\ (جاس - جتاس)}{جاس - جتاس}$$

$$-٢ جا \frac{\pi}{٤} = -٢ \times \frac{١}{\sqrt{٢}} = -\sqrt{٢}.$$

(٢٥) $$\lim_{س \to \frac{\pi}{٤}} \frac{جاس - جتاس}{س - \frac{\pi}{٤}}$$

$ص = س - \frac{\pi}{٤}$

$س = ص + \frac{\pi}{٤}$

$$\lim_{ص \to ٠} \frac{جا(ص + \frac{\pi}{٤}) - جتا(ص + \frac{\pi}{٤})}{ص}$$

$$\lim_{ص \to ٠} \frac{جاص جتا \frac{\pi}{٤} + جتاص جا \frac{\pi}{٤} - (جتاص جتا \frac{\pi}{٤} - جاص جا \frac{\pi}{٤})}{ص}$$

$$\lim_{ص \to ٠} \frac{جاص جتا \frac{\pi}{٤}}{ص} + \lim_{ص \to ٠} \frac{جاص جا \frac{\pi}{٤}}{ص}$$

$$١ \times \frac{١}{\sqrt{٢}} + ١ \times \frac{١}{\sqrt{٢}} = \frac{٢}{\sqrt{٢}}.$$

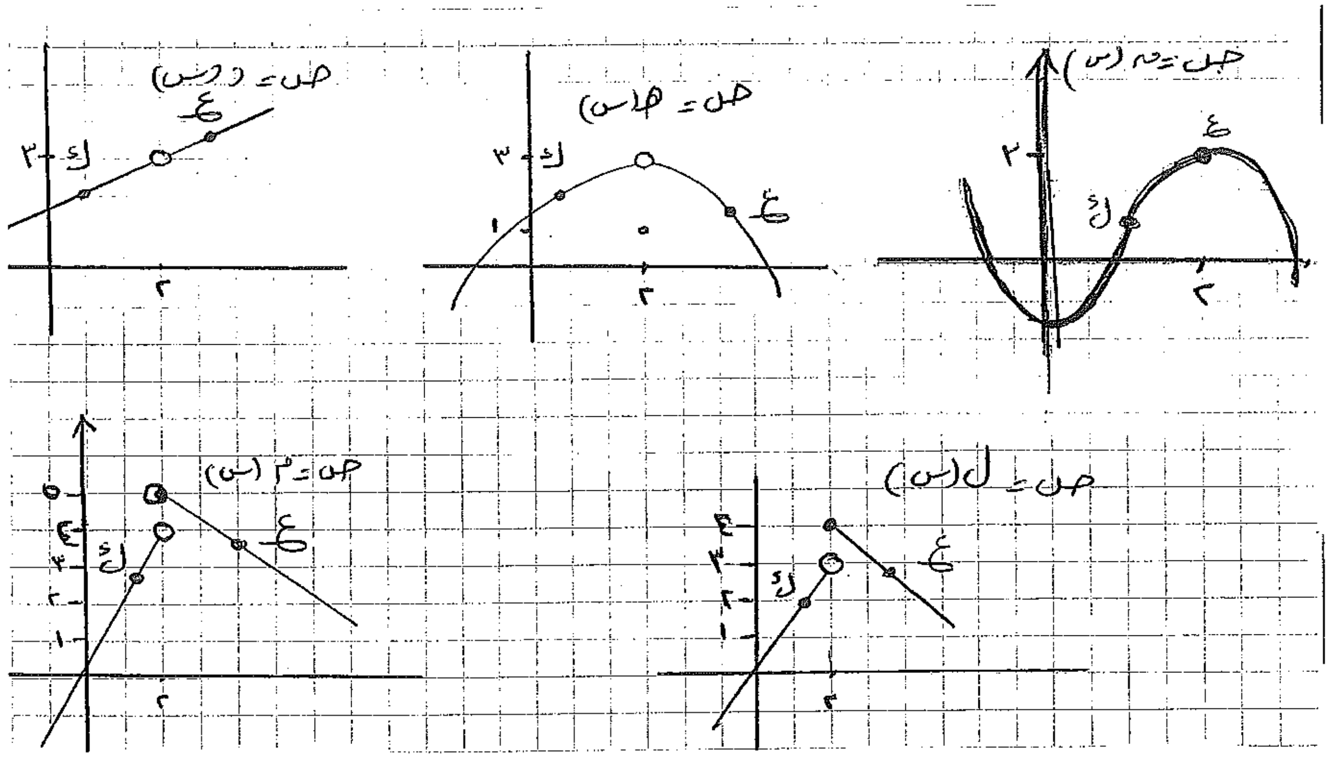
(٢٦) $$\lim_{س \to \frac{\pi}{٤}} \frac{\sqrt{٢} جتاس - ١}{\frac{\pi}{٤} - س} \times \frac{\sqrt{٢} جتاس + ١}{\sqrt{٢} جتاس + ١}$$

$$\lim_{س \to \frac{\pi}{٤}} \frac{٢ جتا^٢ س - ١}{(\frac{\pi}{٤} - س)} = \lim_{س \to \frac{\pi}{٤}} \frac{جتا ٢س}{(\frac{\pi}{٤} - س)(\sqrt{٢} جتاس + ١)}$$

$$\lim_{س \to \frac{\pi}{٤}} \frac{جا(\frac{\pi}{٢} - ٢س)}{(\frac{\pi}{٤} - س)(\sqrt{٢} جتاس + ١)} = \lim_{س \to \frac{\pi}{٤}} \frac{جا ٢(\frac{\pi}{٤} - س)}{(\frac{\pi}{٤} - س)(\sqrt{٢} \times \frac{١}{\sqrt{٢}} + ١)}$$

$$= ٢ \times \frac{١}{١+١} = ٢ \times \frac{١}{٢} = ١.$$

اذا تأملت الأشكال التالية تلاحظ أن ق(س) فقط يمثل اقتراناً متصلاً عند س=٢ لأنه الوحيد الذي لا يوجد فيه ثقب أو قفزة او انقطاع عند س=٢ ، ويمكن الانتقال من النقطة ك إلى النقطة ع على منحناه دون رفع القلم عن الورقة ، وهذا ما لا يتحقق في باقي الأشكال لوجود ثقب عند س=٢ في منحنى كل من الاقترانين هـ ، د ولوجود قفزة عند س=٢ في كل من الاقترانين ل ، م .



وإذا تأملت الجدول الآتي الذي يبين حالات الاقترانات الممثلة في الأشكال السابقة

الاقتران	ق	هـ	د	ل	م
نهاية الاقتران عندما س←٢	٣	٣	٣	غير موجودة	غير موجودة
قيمة الاقتران عند س=٢	٣	١	غير معرف	٤	غير معرف

* تلاحظ أن ما ميز الاقتران ق وجعله متصلاً عند النقطة س=٢ هو أن قيمته عند س=٢ مساوية لنهايته عندما س←٢

تعريف: يكون الاقتران ق متصلاً عند س = أ اذا حقق الشروط الآتية:

١) الاقتران معرف عند س = أ

٢) $\lim_{س \leftarrow أ}$ ق(س) موجودة.

٣) $\lim_{س \leftarrow أ}$ ق(س) = ق(أ).

مثال ١: ق(س) = $س^{٣} - ٥س + ١$

ابحث في اتصال ق(س) عند س = −١.

١) ق(−١) = $(-١)^{٢} - ٥ \times -١ + ١$
= −١ + ٥ + ١ = ٥

٢) $\lim_{س \leftarrow -١}$ ق(س) = $(-١)^{٢} - ٥ \times -١ + ١$
= ٥ .

٣) $\lim_{س \leftarrow -١}$ ق(س) = ق(−١)

∴ ق(س) متصل عند س = −١

نتيجة: اذا كان ق(س) كثير حدود فإنه يكون متصلاً لجميع الأعداد الحقيقية

مثال ٢: ق(س) = $\begin{cases} س+١ &، س > ٢ \\ ٤س &، س < ٢ \end{cases}$

ابحث في اتصال ق(س) عند س = ٢

١) ق(٢) غير معرف.

∴ ق(س) غير متصل عند س = ٢ .

مثال ٣: ق(س) = $\begin{cases} س+١ &، س \geq ٢ \\ ٤س &، س < ٢ \end{cases}$

ابحث في اتصال ق(س) عند س = ٢

١) ق(٢) = ٢ + ١ = ٣

٢) $\lim_{س \leftarrow ٢^{+}}$ ق(س) = ٢ + ١ = ٣

$\lim_{س \leftarrow ٢^{-}}$ ق(س) = ٤ × ٢ = ٨

$\lim_{س \leftarrow ٢}$ ق(س) غير موجوده .

∴ ق(س) غير متصل عند س = ٢

مثال ٤: ق(س) = $\begin{cases} ٢ - ٣س &، س < ٢ \\ ٣ &، س = ٢ \\ س^{٢} - ٨ &، س > ٢ \end{cases}$

ابحث في اتصال ق(س) عند س = ٢

١) ق(٢) = ٣

٢) $\lim_{س \leftarrow ٢^{+}}$ ق(س) = $٢^{٢} - ٨$ = −٤

$\lim_{س \leftarrow ٢^{-}}$ ق(س) = ٢ − ٢ × ٢ = −٤

$\lim_{س \leftarrow ٢}$ ق(س) = −٤ .

٣) $\lim_{س \leftarrow ٢}$ ق(س) $\neq$ ق(٢)

∴ ق(س) غير متصل عند س = ٢

مثال ١:

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{|٦-٢\text{س}|}{٣-\text{س}} & \text{،} \ \text{س} \neq ٣ \\ ٢ & \text{،} \ \text{س} = ٣ \end{cases}$$

ابحث في اتصال الاقتران ق عند س = ٣

الحل: نعيد تعريف ق(س) دون استعمال رمز القيمة المطلقة

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{٢(٣-\text{س})}{٣-\text{س}} & \text{،} \ \text{س} < ٣ \\ \dfrac{-٢(٣-\text{س})}{٣-\text{س}} & \text{،} \ \text{س} > ٣ \\ ٢ & \text{،} \ \text{س} = ٣ \end{cases}$$

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} ٢ & \text{،} \ \text{س} < ٣ \\ -٢ & \text{،} \ \text{س} > ٣ \\ ٢ & \text{،} \ \text{س} = ٣ \end{cases}$$

تحقق من شروط الاتصال عند س = ٣

① ق(٣) = ٢

② $\displaystyle \lim_{\text{س} \to ٣^+} \text{ق}(\text{س}) = -٢$

$\displaystyle \lim_{\text{س} \to ٣^-} \text{ق}(\text{س}) = ٢$

$\displaystyle \lim_{\text{س} \to ٣} \text{ق}(\text{س})$ غير موجودة.

⟸ ق غير متصل عند س = ٣.

مثال ٢:

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{\text{جا}٣\text{س}}{\text{س}} & \text{،} \ \text{س} \neq ٠ \\ ٣ & \text{،} \ \text{س} = ٠ \end{cases}$$

ابحث في اتصال ق عند س = ٠.

① ق(٠) = ٣

② $\displaystyle \lim_{\text{س} \to ٠} \text{ق}(\text{س}) = \lim_{\text{س} \to ٠} \frac{\text{جا}٣\text{س}}{\text{س}} = ٣$

③ $\displaystyle \lim_{\text{س} \to ٠} \text{ق}(\text{س}) = \text{ق}(٠)$

∴ ق(س) متصل عند س = ٠.

مثال ٣:

$$\text{ع}(\text{س}) = \frac{\text{س}^٣ - ١}{\text{س} - ١} \text{ ،} \ \text{س} \neq ١$$

ابحث في اتصال الاقتران ع عند س = ١

الحل: ① ع(١) غير معرف.

∴ ع(س) غير متصل عند س = ١

سؤال ١: ابحث في اتصال الاقتران ق حيث

ق(س) = س [س+١] عند س = ١

مثال ٤: ليكن $\text{ق}(\text{س}) = ٨\text{س} - \text{أ}\text{س}^٣ - ٣٠$

وكان $\displaystyle \lim_{\text{س} \to ٣} \text{ق}(\text{س}) = ٦$ ما قيمة أ.

الحل: ق(س) كثير حدود متصل ∴ $\displaystyle \text{ق}(٣) = \lim_{\text{س} \to ٣} \text{ق}(\text{س})$

∴ $٨ \times ٣ - \text{أ}(٣)^٣ - ٣٠ = ٦$

$٢٤ - ٢٧\text{أ} - ٣٠ = ٦$

$٢٤ - ٣٠ - ٦ = ٢٧\text{أ}$

$\text{أ} = \dfrac{-١٢}{٢٧} = \dfrac{-٤}{٩}$

مثال ١: $ق(س) = \begin{cases} ١٢ - ٣س \text{ ، } س \geq ٢ \\ أ س \text{ ، } س < ٢ \end{cases}$

فما قيمة أ اذا كان ق(س) متصلاً عند س = ٢

الحل: $\lim_{س \to ٢^-} ق(س) = \lim_{س \to ٢^+} ق(س)$

$$١٢ - ٣ \times ٢ = أ \times ٢$$

$$أ = ٣$$

سؤال١: $ق(س) = \begin{cases} \frac{س^٢ - ١}{س - ١} \text{ ، } س \neq ١ \\ جـ \text{ ، } س = ١ \end{cases}$

ما قيمة جـ التي تجعل ق(س) متصلاً عند س = ١

سؤال٢: $ق(س) = \begin{cases} س \text{ جتا } س \text{ ، } س \geq \pi \\ س - ٢\pi \text{ ، } س < \pi \end{cases}$

ابحث في اتصال ق(س) عند $س = \pi$

ملاحظات هامة

١ يكون الاقتران النسبي متصلاً على مجاله عدا أصفار المقام

مثال ① $ق(س) = \frac{س^٢ - ١}{س - ٣}$ متصل على ح - {٣}

② $ق(س) = \frac{س + ٥}{٤ - س^٢}$ متصل على ح - {± ٢}

③ $ق(س) = \frac{٥}{س^٢ + ١}$ متصل على ح

④ $ق(س) = \frac{س^٢ + ٧}{س^٣ + ١}$ متصل على ح - {-١}

٢ اقترانا جاس ، جتاس اقترانان مثلثيان متصلان في مجالهما.

مثال ① ق(س) = جا٤س متصل في مجاله

② $ق(س) = \frac{١}{٢} \text{ جتا } \frac{س}{٣}$ متصل في مجاله

٣ اقترانات القيمة المطلقة بالصورة ق(س) = |هـ(س)| حيث هـ(س) كثير حدود تكون متصلة دائماً

مثال: ① ق(س) = |٢س - ٤| متصل على ح.

② $ق(س) = |٢س^٢ - ٤س + ١|$ متصل على ح

③ $ق(س) = \left|\frac{س^٢ - ١}{س}\right|$ متصل على ح - {٠}

٤ الاقترانات بالصورة $ص = س^{\frac{م}{ن}}$ ، م ، ن ∈ ط* متصلة على مجالها.

مثال: ① $ق(س) = س^{\frac{٣}{٢}}$ متصل في مجاله

② $ق(س) = \sqrt[٣]{س^٢}$ متصل في مجاله.

٥ الاقتران ق(س) = [هـ(س)] متصل في مجاله عدا عند القيم التي تجعل هـ(س) عدداً صحيحاً.

مثال: ① ق(س) = [س] متصل ∀ س ∉ ص

مجموعة نقاط الانفصال {س : س ∈ ص}.

② ق(س) = [أس + ب] متصل ∀ س تجعل أس + ب ∉ ص ومنفصل ∀ س تجعل أس + ب ∈ ص وتكون مجموعة نقاط الانفصال $\{\frac{ن}{أ} : ن \in ص ، أ ، ب \in ص\}$.

③ ق(س) = [٥س]

مجموعة نقاط الانفصال هي $\{\frac{س}{٥} : س \in ص\}$

ملاحظة ١

السبب في أن ق(س) = [هـ(س)] غير متصل عند القيم التي تجعل هـ(س) ∈ ص هو أن النهاية من اليمين ≠ النهاية من اليسار

مثال: $[\frac{س}{٢}]$ منفصل عند س = ٤ لأن

$$\lim_{س \to ٤^+} [\frac{س}{٢}] = ٢$$

لكن

$$\lim_{س \to ٤^-} [\frac{س}{٢}] = ١$$

مثال:

$$ل(س) = \begin{cases} [س] + أ & ، س \geq ٢ \\ أ س & ، س < ٢ \end{cases}$$

جد قيمة أ التي تجعل الاقتران ل متصلاً عند س = ٢ .

الحل: بما أن ل متصل عند س = ٢ فإن

$$\lim_{س \to ٢^+} ل(س) = \lim_{س \to ٢^-} ل(س)$$

$$\lim_{س \to ٢^+} ([س] + أ) = \lim_{س \to ٢^-} أ س$$

$$٢ + أ = ٢ أ$$

$$أ = ٢ .$$

سؤال:

$$ق(س) = \begin{cases} أ س^٢ - ب س + ١ & ، س < ١ \\ ٥ & ، س = ١ \\ س^٢ - (أ + ب) س + ٣ & ، س > ١ \end{cases}$$

جد قيم أ ، ب التي تجعل ق متصلاً عند س = ١

نظريات في الاتصال

نظرية ١ : اذا كان ق اقتراناً كثير حدود ، فإن ق متصل عند س لكل س ∈ ح

نظرية ٢ : اذا كان ق ، د اقترانين متصلين عند س = أ فإن :

١) كلا من الاقترانين ق + د ، ق − د اقتران متصل عند س = أ

٢) الاقتران ق × د متصل عند س = أ

٣) الاقتران $(\frac{ق}{د})$ متصل عند س = أ بشرط أن د(أ) ≠ ٠ .

نظرية ٣ : اذا كان ق اقتراناً متصلاً عند س = أ ، ق(س) ≥ ٠ في فترة مفتوحة تحوي أ ، فإن هـ حيث هـ(س) = $\sqrt{ق(س)}$ اقتران متصل عند س = أ .

* لاحظ أنه اذا كان الاقتران (ق + هـ) متصلاً عند س = أ فإنه ليس من الضروري أن يكون كل من الاقترانين ق ، هـ متصلين عند س = أ وهذا ينطبق على الاقترانين (ق − هـ) ، ق × هـ .

سنبرهن الفرع (٢) من النظرية (٢) السابقة

نظرية ٢: اذا كان ق، د اقترانين متصلين عند س = أ فإن الاقتران (ق × د) متصل عند س = أ .

البرهان: افرض أن هـ = ق × د

① هـ(أ) = ق(أ) × د(أ) .

ق ، د اقترانان متصلان عند س = أ

② نها هـ(س) = نها (ق(س) × د(س))
  س←أ

= نها ق(س) × نها د(س)
  س←أ

= ق(أ) × د(أ) = هـ(أ)

⟸ هـ اقتران متصل عند س = أ

نتيجة: اذا كان ق اقتراناً نسبياً معرفاً عند س = أ فإن ق متصل عند س = أ .

مثال ١: اذا كان ق(س) = $\frac{١ - س^٢}{س - ١}$ ، هـ(س) = $\sqrt{س^٢ + ٤}$. ابحث في اتصال ق × هـ عند س = ٢

ق اقتران نسبي معرف عند س = ٢

⟸ ق متصل عند س = ٢

س^٢ + ٤ ≥ ٠ في فترة مفتوحة تحتوي ٢ مثل (١، ٣)

لذلك $\sqrt{س^٢ + ٤}$ متصل عند س = ٢ (الجذر [illegible])

⟸ هـ(س) متصل عند س = ٢

بما ان كلاً من ق ، هـ متصل عند س = ٢

ينتج أن ق × هـ متصل عند س = ٢

مثال ٢: اذا كان ق(س) = (س − ٢)^٣

هـ(س) = [س + ١] فابحث في اتصال ق(س) × هـ(س) عند س = ٢ .

الحل: هـ(س) = [س + ١]

= { ٢ ، ١ ≤ س < ٢
  { ٣ ، ٢ ≤ س < ٣

بما أن هـ(س) غير متصل عند س = ٢ لذلك نقوم بعملية الضرب .

ق(س) × هـ(س) = { (س − ٢)^٣ × ٢ ، ١ ≤ س < ٢
        { (س − ٢)^٣ × ٣ ، ٢ ≤ س < ٣

① (ق × هـ)(٢) = صفر .

② نها (ق × هـ)(س) = صفر
  س←٢+

نها (ق × هـ)(س) = صفر
س←٢−

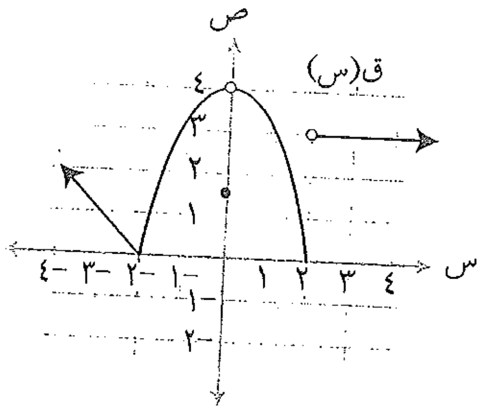
نها (ق × هـ)(س) = صفر
س←٢

③ نها (ق × هـ)(س) = (ق × هـ)(٢) .
  س←٢

∴ ق × هـ متصل عند س = ٢

تمارين ومسائل

١) ليكن ق اقترانًا معرفًا على ح. اعتماداً على الشكل (١-٢١) الذي يمثل منحنى الاقتران ق



الشكل (١-٢١)

حدد قيم س التي يكون عندها ق غير متصل.

٢) إذا كان د (س) = $\begin{cases} ١ - ٤\,س & ،\ س \leq -٢ \\ ٣\,س^{٢} - ٥ & ،\ س > -٢ \end{cases}$

فابحث في اتصال الاقتران د عند كل من: س = -٢ ، س = ٠

٣) ليكن ق(س) = $\begin{cases} \dfrac{|ظا\,س|}{س} & ،\ س < ٠ \\ ١ - ٢\,جتاس & ،\ س \geq ٠ \end{cases}$

ابحث في اتصال الاقتران ق عند س = ٠

٤) إذا كان ك (س) = $\begin{cases} \sqrt{س - ٢} & ،\ س > ٢ \\ \left|٢\,س - س^{٢}\right| & ،\ س \leq ٢ \end{cases}$

فابحث في اتصال الاقتران ك عند كل من س = ٠ ، س = ٢

٥) إذا كان ق(س) = $\left[\frac{١}{٢}\text{س}\right]$ ، فابحث في اتصال ق عند كل من : س = ١ ، س = ٣

٦) إذا كان ك (س) = $\begin{cases} \dfrac{\text{حا}\sqrt{\text{س}^{٢}}}{\text{س}} & ، \text{س} \neq ٠ \\ ١ & ، \text{س} = ٠ \end{cases}$

فابحث في اتصال ك عند س = ٠

٧) إذا كان د (س) = $\begin{cases} \dfrac{\text{س}\sqrt{\text{س}}-١}{\text{س}-١} & ، \text{س} > ١ \\ \text{ب} & ، \text{س} = ١ \\ ٢\,\text{أس} & ، \text{س} < ١ \end{cases}$

متصلا عند س = ١، فجد كلا من أ، ب.

٨) إذا كان م (س) = $\begin{cases} \dfrac{\frac{١}{٨}\text{س}^{٣}+١}{\text{س}+٢} & ، \text{س} > -٢ \\ \dfrac{٣}{٢} & ، \text{س} \leq -٢ \end{cases}$ ، هـ (س) = $\dfrac{\text{جتا}\,\frac{\pi\,\text{س}}{٤}}{\text{س}}$

فابحث في اتصال الاقتران م + هـ عند س = ـ٢

٩) أعط مثالا لاقترانين مثل ق ، د، بحيث يكونان غير متصلين عند س = ٣،
والاقتران ق + د متصلا عند س = ٣

حل تمارين ومسائل صفحة ٦٣

س١ ق(س) غير متصل عند س = ٠ ، ٢ .

لأن $ق(٠) \neq \underset{س \to ٠}{\text{نها}}\, ق(س)$

و $\underset{س \to ٢}{\text{نها}}\, ق(س)$ غير موجودة .

س٢ (أ) عند س = −٢

① $د(-٢) = ١ - ٤ \times -٢ = ٩$

② $\underset{س \to -٢^{+}}{\text{نها}}\, د(س) = ٣(-٢)^{٢} - ٥ = ٧$

$\underset{س \to -٢^{-}}{\text{نها}}\, د(س) = ١ - ٤ \times -٢ = ٩$

∴ $\underset{س \to -٢}{\text{نها}}\, د(س)$ غير موجودة

د(س) غير متصل عند س = −٢ .

(ب) عند س = صفر

① $د(٠) = ٣(٠)^{٢} - ٥ = -٥$

② $\underset{س \to ٠}{\text{نها}}\, د(س) = ٣(٠)^{٢} - ٥ = -٥$

③ $\underset{س \to ٠}{\text{نها}}\, د(س) = د(٠)$

∴ د(س) متصل عند س = ٠ .

س٣ ① $ق(٠) = ١ - ٢\, جتا\, صفر = ١ - ٢ \times ١ = -١$

② $\underset{س \to ٠^{+}}{\text{نها}}\, ق(س) = ١ - ٢ \times ١ = -١$

$\underset{س \to ٠^{-}}{\text{نها}}\, ق(س) = \underset{س \to ٠^{-}}{\text{نها}} - \frac{ظاس}{س} = -١$

$\Leftarrow \underset{س \to ٠}{\text{نها}}\, ق(س) = -١$

③ $\underset{س \to ٠}{\text{نها}}\, ق(س) = ق(٠)$

∴ ق(س) متصل عند س = ٠ .

س٤ $٢س - س^{٢} = ٠ \Leftarrow س(٢ - س) = ٠$

$\boxed{س = ٠}$ / $٢ - س = ٠ \Leftarrow \boxed{س = ٢}$

$|٢س - س^{٢}|$: $س^{٢} - ٢س$ (−) | ٠ | $٢س - س^{٢}$ (+) | ٢ | $س^{٢} - ٢س$ (−)

ل(س) : $س^{٢} - ٢س$ | ٠ | $٢س - س^{٢}$ | ٢ | $\sqrt{س - ٢}$

$$ل(س) = \begin{cases} \sqrt{س - ٢} & ، س > ٢ \\ ٢س - س^{٢} & ، ٠ \leq س \leq ٢ \\ س^{٢} - ٢س & ، س < ٠ \end{cases}$$

عند س = ٠

١) ل(٠) = صفر

٢) $\underset{س \to ٠^{+}}{\text{نها}}\, ل(س) = ٠$ ، $\underset{س \to ٠^{-}}{\text{نها}}\, ل(س) = ٠$ $\Leftarrow \underset{س \to ٠}{\text{نها}}\, ل(س) = ٠$

٣) $ل(٠) = \underset{س \to ٠}{\text{نها}}\, ل(س)$

ل(س) متصل عند س = صفر .

عند س = ٢

١) ل(٢) = ٠

٢) $\underset{س \to ٢^{+}}{\text{نها}}\, ل(س) = صفر$ ، $\underset{س \to ٢^{-}}{\text{نها}}\, ل(س) = صفر$ $\Leftarrow \underset{س \to ٢}{\text{نها}}\, ل(س) = ٠$

٣) $\underset{س \to ٢}{\text{نها}}\, ل(س) = ل(٢)$

∴ ل(س) متصل عند س = ٢ .

تابع حل تمارين ومسائل صفحة ٦٣.

س٥ ل = $\frac{١}{\frac{١}{٢}}$ = ٢

$[\frac{١}{٢}\text{س}] = \begin{cases} ٠ ، & ٠ \leq \text{س} < ٢ \\ ١ ، & ٢ \leq \text{س} < ٤ \end{cases}$

عند س = ١

١) م(١) = ٠

٢) $\lim_{\text{س} \to ١}$ م(س) = ٠

٣) $\lim_{\text{س} \to ١}$ م(س) = م(١)

∴ م(س) متصل عند س = ١

عند س = ٣

١) م(٣) = ١

٢) $\lim_{\text{س} \to ٣}$ م(س) = ١

٣) $\lim_{\text{س} \to ٣}$ م(س) = م(٣)

∴ م(س) متصل عند س = ٣.

س٦ $\frac{\text{جا}|\text{س}|}{\text{س}} = \frac{\text{جا}|\text{س}|}{\text{س}}$.

$\text{ل}(\text{س}) = \begin{cases} \frac{\text{جاس}}{\text{س}} ، & \text{س} > ٠ \\ \frac{\text{جا}(-\text{س})}{\text{س}} ، & \text{س} < ٠ \\ ١ ، & \text{س} = ٠ \end{cases}$

$\text{ك}(\text{س}) = \begin{cases} ١ ، & \text{س} \geq ٠ \\ -١ ، & \text{س} < ٠ \end{cases}$

عند س = ٠

١) ل(٠) = ١

٢) $\left. \begin{array}{l} \lim_{\text{س} \to ٠^+} \text{ل}(\text{س}) = ١ \\ \lim_{\text{س} \to ٠^-} \text{ل}(\text{س}) = -١ \end{array} \right\} \Leftarrow$ $\lim_{\text{س} \to ٠}$ ل(س) غير موجودة

∴ ل(س) غير متصل عند س = صفر.

س٧ $\lim_{\text{س} \to ١} \frac{\text{س}\sqrt{\text{س}} - \sqrt{\text{س}} + \sqrt{\text{س}} - ١}{\text{س} - ١}$

$\lim_{\text{س} \to ١} \frac{\text{س}\sqrt{\text{س}} - \sqrt{\text{س}}}{\text{س} - ١} + \lim_{\text{س} \to ١} \frac{\sqrt{\text{س}} - ١}{\text{س} - ١} \times \frac{\sqrt{\text{س}} + ١}{\sqrt{\text{س}} + ١}$

$\lim_{\text{س} \to ١} \frac{\sqrt{\text{س}}\cancel{(\text{س} - ١)}}{\cancel{\text{س} - ١}} + \lim_{\text{س} \to ١} \frac{\cancel{\text{س} - ١}}{\cancel{(\text{س} - ١)}(\sqrt{\text{س}} + ١)}$

$\lim_{\text{س} \to ١} \sqrt{\text{س}} + \lim_{\text{س} \to ١} \frac{١}{\sqrt{\text{س}} + ١} = ١ + \frac{١}{٢} = \frac{٣}{٢}$

د(س) متصل عند س = ١ $\Leftarrow$

$\lim_{\text{س} \to ١^+}$ د(س) = $\lim_{\text{س} \to ١^-}$ د(س) = د(١)

$\frac{٣}{٢}$ = ٢م × ١ = ب

$\Leftarrow$ ب = $\frac{٣}{٢}$.

$\Leftarrow$ ٢م = $\frac{٣}{٢}$ $\Leftarrow$ م = $\frac{٣}{٤}$

س٨) ١) م(−٢) = ٣/٢

٢) نهـا م(س) = ٣/٢
س ← −٢⁻

نهـا م(س) = نهـا (١/٨ س^٣ + ١) / (س + ٢)
س ← −٢⁺

نهـا (½ س + ١)(¼ س² − ½ س + ١) / (س + ٢)
س ← −٢⁺

نهـا ½ ~~(س + ٢)~~ (¼ س² − ½ س + ١) / ~~(س + ٢)~~
س ← −٢⁺

= ½ (١ + ١ + ١)

= ٣/٢ .

٣) م(−٢) = نهـا م(س)
س ← −٢

∴ م(س) متصل عند س = −٢

ب) ١) هـ(−٢) = جتا (π × −٢ / ٤) / −٢

= جتا (−π/٢) / −٢ = صفر

٢) نهـا هـ(س) = صفر
س ← −٢

٣) نهـا هـ(س) = هـ(−٢)
س ← −٢

∴ هـ(س) متصل عند س = −٢

∴ م + هـ متصل عند س = −٢

لأنه ناتج جمع متصلين.

س٩) ق(س) = ٥ + [س]

ل(س) = ٧ − [س]

ق + ل = ١٢

ق + ل متصل عند س = ٣

لكن كل من ق ، ل غير متصل عند س = ٣ .

تدريب (١):

اذا كان ق(س) = $\frac{|س-٤|}{س+٤}$ ، س ≠ ٤

فابحث في اتصال ق عند س = ٤ .

الحل: (١) ق(٤) غير معرف .

ق(س) غير متصل عند س = ٤ .

تدريب (٢):

(١) اذا كان ق(س) = [س] فما مجموعة قيم س التي يكون عندها ق اقتراناً غير متصل؟

الحل: ق(س) غير متصل لكل س ∈ ص لأنه النهاية تكون غير موجودة .

(٢) اقترح قاعدة لاقتران أكبر عدد صحيح بحيث يكون متصلاً عند س = ١ وغير متصل عند س = ٢

الحل: ق(س) = $\left[\frac{س}{٢} + ١\right]$

ق(س) = $\begin{cases} ١ ، & ٠ \leq س < ٢ \\ ٢ ، & ٢ \leq س < ٤ \end{cases}$

عند س = ١

① ق(١) = ١ ② $\underset{س \to ١}{نها}$ ق(س) = ١

③ $\underset{س \to ١}{نها}$ ق(س) = ق(١) ⟸ ق متصل عند س = ١

عند س = ٢

① ق(٢) = ٢ ② $\underset{س \to ٢^+}{نها}$ ق(س) = ٢ ، $\underset{س \to ٢^-}{نها}$ ق(س) = ١ ⟸ $\underset{س \to ٢}{نها}$ ق(س) غير موجودة

∴ ق غير متصل عند س = ٢

تدريب (٣):

اذا كان ق(س) = $\begin{cases} أس^٢ + ب ، & س < ٣ \\ ٦ ، & س = ٣ \\ أس - ٢ب ، & س > ٣ \end{cases}$

متصلاً عند س = ٣ ، فجد قيمة كل من الثابتين أ ، ب؟

الحل: $\underset{س \to ٣^-}{نها}$ ق(س) = $\underset{س \to ٣^+}{نها}$ ق(س) = ق(٣) (لأنه ق متصل عند س = ٣)

$\underset{س \to ٣^-}{نها}$ ق(س) = ق(٣)

٩أ + ب = ٦ --- ①

$\underset{س \to ٣^+}{نها}$ ق(س) = ق(٣)

٣أ − ٢ب = ٦ --- ②

(٩أ + ب = ٦) × ٢

١٨أ + ٢ب = ١٢

\+ ٣أ − ٢ب = ٦

$\frac{٢١أ}{٢١} = \frac{١٨}{٢١}$ ⟸ $\boxed{أ = \frac{٦}{٧}}$

بالتعويض في ①

٩أ + ب = ٦

٩ × $\frac{٦}{٧}$ + ب = ٦

$\frac{٥٤}{٧}$ + ب = ٦ ⟸ ب = ٦ − $\frac{٥٤}{٧}$

ب = $\frac{٤٢ - ٥٤}{٧}$

$\boxed{ب = \frac{-١٢}{٧}}$

تدريب ٥:

إذا كان ق(س) = $\begin{cases} ٢س + ١ &، س < ١ \\ ٣س^{٢} &، س \geq ١ \end{cases}$

ع(س) = $\begin{cases} س^{٢} &، س < ١ \\ |س| &، س \geq ١ \end{cases}$ ⇐ $\begin{cases} س^{٢} &، س < ١ \\ س &، س \geq ١ \end{cases}$

فابحث في اتصال (ق × ع) عند س = ١ بالطريقتين

الحل: الطريقة الأولى

١) ق(١) = ٣

٢) $\lim_{س \to ١^-}$ ق(س) = ٣ ، $\lim_{س \to ١^+}$ ق(س) = ٣ ⇐ $\lim_{س \to ١}$ ق(س) = ٣

٣) $\lim_{س \to ١}$ ق(س) = ق(١) ∴ ق متصل عند س = ١

---

١) ع(١) = ١

٢) $\lim_{س \to ١^+}$ ع(س) = ١ ، $\lim_{س \to ١^-}$ ع(س) = ١ ⇐ $\lim_{س \to ١}$ ع(س) = ١

٣) $\lim_{س \to ١}$ ع(س) = ع(١) ∴ ع متصل عند س = ١

(ق × ع) متصل عند س = ١

الطريقة الثانية: نجد قاعدة الاقتران ق × ع

ق × ع = $\begin{cases} (١ + ٢س) \times س^{٢} &، س < ١ \\ ٣س^{٣} &، س \geq ١ \end{cases}$

١) (ق × ع)(١) = ٣

٢) $\lim_{س \to ١^+}$ (ق × ع) = ٣ ، $\lim_{س \to ١^-}$ (ق × ع) = ٣ ⇐ $\lim_{س \to ١}$ (ق × ع) = ٣

٣) $\lim_{س \to ١}$ (ق × ع)(س) = (ق × ع)(١)

∴ (ق × ع)(س) متصل عند س = ١

تدريب ٦: إذا كان ق(س) = $(س - ٥)^{٣}$ ، هـ(س) = [س + ٣] فابحث في اتصال الاقتران (ق × هـ) عند كل من س = -٢ ، س = ٥ .

الحل: عند س = -٢

هـ(س) = $\begin{cases} -١ &، -٣ \leq س < -٢ \\ ٠ &، -٢ \leq س < -١ \end{cases}$

(ق × هـ)(س) = $\begin{cases} -(س - ٥)^{٣} &، -٣ \leq س < -٢ \\ ٠ &، -٢ \leq س < -١ \end{cases}$

١) (ق × هـ)(-٢) = ٠

٢) $\lim_{س \to -٢^+}$ (ق × هـ)(س) = ٠

$\lim_{س \to -٢^-}$ (ق × هـ)(س) = $-(-٧)^{٣}$ = ٣٤٣

⇐ $\lim_{س \to -٢}$ (ق × هـ)(س) غير موجودة ∴ ق × هـ غير متصل عند س = -٢

عند س = ٥

هـ(س) = $\begin{cases} ٦ &، ٤ \leq س < ٥ \\ ٧ &، ٥ \leq س < ٦ \end{cases}$

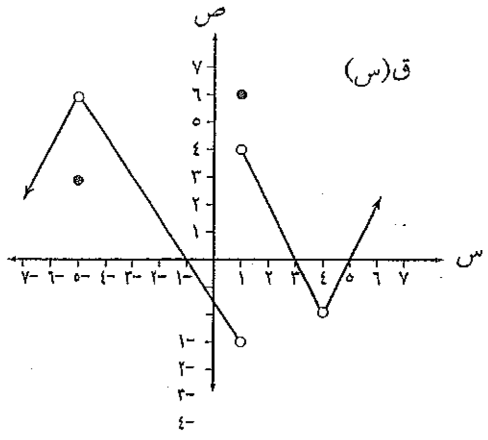
(ق × هـ)(س) = $\begin{cases} ٦(س - ٥)^{٣} &، ٤ \leq س < ٥ \\ ٧(س - ٥)^{٣} &، ٥ \leq س < ٦ \end{cases}$

١) (ق × هـ)(٥) = صفر

٢) $\lim_{س \to ٥^-}$ (ق × هـ) = صفر ، $\lim_{س \to ٥^+}$ (ق × هـ) = صفر ⇐ $\lim_{س \to ٥}$ (ق × هـ) = صفر

٣) (ق × هـ)(٥) = $\lim_{س \to ٥}$ (ق × هـ) = صفر ⇐ (ق × هـ) متصل عند س = ٥ .

١) معتمدًا الشكل (١–٢٧) الذي يمثل منحنى الاقتران ق، ما قيم س التي يكون عندها ق غير متصل مع ذكر السبب ؟



الشكل (١–٢٧)

٢) إذا كان ق(س) = [٤س – ٤] ،فابحث في اتصال الاقتران ق عند س= ١,٢٥

٣) ابحث في اتصال الاقتران ق(س) = $\frac{١ - س^٢}{س - ١}$ عند س = ١

٤) ابحث في اتصال الاقتران هـ (س) = $\frac{س^٢ - ٤}{س - ٢}$ عند س = ٢

٥) إذا كان ق(س) = $\begin{cases} \frac{|ظا س|}{س} & ، س < ٠ \\ ١ - جتاس & ، س \geq ٠ \end{cases}$

فابحث في اتصال الاقتران ق عند س= ٠

٦) إذا كان ل (س) = $\begin{cases} \sqrt{س - ٣} & ، س > ٣ \\ |س^٢ - ٩| & ، س \leq ٣ \end{cases}$

فابحث في اتصال الاقتران ل عند س = ٣

٧) إذا كان ق(س) = $\begin{cases} \dfrac{|\text{س}|-٢}{\text{س}-٢} & ، \text{س} \neq ٢ \\ ٥ & ، \text{س} = ٢ \end{cases}$

فابحث في اتصال الاقتران ق عند س=٢

٨) إذا كان ك(س) = $\begin{cases} ٦+\text{س} & ، \text{س} \leq -٢ \\ ٢-\text{س} & ، -٢ \leq \text{س} < ٢ \\ ٢\text{س}-١ & ، \text{س} \geq ٢ \end{cases}$

فابحث في اتصال الاقتران ك عند س= ٢

٩) إذا كان ع (س) = $\begin{cases} \dfrac{\text{أ}}{\text{س}}+\text{س}^{٢} & ، ٠ < \text{س} \leq ٢ \\ [\text{س}]+٣ & ، ٢ < \text{س} < ٣ \\ ٧ & ، \text{س} = ٣ \end{cases}$

متصلًا عند س= ٢ ، فجد قيمة الثابت أ.

١٠) إذا كان ل(س) = $\begin{cases} \dfrac{\text{س}^{٣}+\text{س}^{٢}+٢\text{س}-٤}{\text{س}-١} & ، \text{س} \neq ١ \\ ٥\text{س}-١ & ، \text{س} = ١ \end{cases}$

فابحث في اتصال الاقتران ل عند س= ١

١١) إذا كان ق(س) = $\begin{cases} \text{س}^{٢}+\text{س} & ، \text{س} < ٢ \\ [\text{س}+٤] & ، \text{س} = ٢ \\ \sqrt{\text{س}^{٢}+٥}+\dfrac{٦}{\text{س}} & ، \text{س} > ٢ \end{cases}$

فابحث في اتصال الاقتران ق عند س = ٢

$$
١٢) \text{ إذا كان } ل(س) = \begin{cases} س^٢ + ب & ، \quad ٠ \leq س < ٢ \\ |س| - ٥ & ، \quad ٢ \leq س \leq ٣ \end{cases}
$$

فجد قيمة الثابت ب التي تجعل الاقتران ل متصلاً عند س = ٢

$$
١٣) \text{ إذا كان } ق(س) = \begin{cases} ٣س + ٥ & ، \quad س \in ص \\ ٢س^٢ - ٤ & ، \quad س \notin ص \text{ حيث ص مجموعة الأعداد الصحيحة} \end{cases}
$$

فابحث في اتصال الاقتران ق عند س= ٣

س١ الاقتران ق غير متصل عند

س = ٤ ، ١ ، -٥ .

السبب : ق(٤) غير معرف

$\lim_{س \to ١}$ ق(س) غير موجودة

ق(-٥) $\neq \lim_{س \to -٥}$ ق(س) .

س٢ ق(س) = $[\,٤س - ٤\,]$

ل = $\frac{1}{٤}$ = ٠,٢٥

ق(س) = $\begin{cases} ٠ \ ، & ١ \le س < ١,٢٥ \\ ١ \ ، & ١,٢٥ \le س < ١,٥ \end{cases}$

١) ق(١,٢٥) = ١

٢) $\lim_{س \to ١,٢٥^+}$ ق(س) = ١ ، $\lim_{س \to ١,٢٥^-}$ ق(س) = ٠ $\Leftarrow \lim_{س \to ١,٢٥}$ ق(س) غير موجودة

∴ ق(س) غير متصل عند س = ١,٢٥ .

س٣ ق(س) = $\frac{١ - س^٢}{١ - س}$ عند س = ١

لأن ق(١) غير معرف $\Leftarrow$

ق(س) غير متصل عند س = ١

س٤ هـ(س) = $\frac{س^٢ - ٤}{س - ٢}$ عند س = ٢

هـ(٢) غير معرف $\Leftarrow$ هـ(س) غير متصل عند س = ٢

س٥ ق(س) = $\begin{cases} \frac{|ظاس|}{س} \ ، & س < ٠ \\ ١ - جتاس \ ، & س \ge ٠ \end{cases}$

ق(س) = $\begin{cases} \frac{-ظاس}{س} \ ، & س < ٠ \\ ١ - جتاس \ ، & س \ge ٠ \end{cases}$

١) ق(١) = ١ - جتا٠ = ١ - ١ = صفر

٢) $\lim_{س \to ١^+}$ ق(س) = ١ - ١ = صفر

$\lim_{س \to ١^-}$ ق(س) = $\lim \frac{-ظاس}{س}$ = -١

$\Leftarrow \lim_{س \to ١}$ ق(س) غير موجودة .

$\Leftarrow$ ق(س) غير متصل عند س = ١

س٦ ١) ل(٣) = صفر

٢) $\lim_{س \to ٣^-}$ ل(س) = صفر ، $\lim_{س \to ٣^+}$ ل(س) = صفر $\Leftarrow \lim_{س \to ٣}$ ل(س) = صفر

٣) $\lim_{س \to ٣}$ ل(س) = ل(٣)

∴ ل(س) متصل عند س = ٣

س٧ |س| = { س ، س ≥ ٠ ؛ -س ، س < ٠

-س　　　س
٠　　　٢

|س| = س حول س = ٢

ه(س) = { (س - ٢)/(س - ٢) = ١ ، س ≠ ٢ ؛ ٥ ، س = ٢

١) ه(٢) = ٥

٢) نها ه(س) = ١
　س←٢

٣) نها ه(س) ≠ ه(٢) ⟸ ه غير متصل عند س = ٢
　س←٢

س٨ ١) ك(٢) = ٢×٢ - ١ = ٣

٢) { نها ك(س) = ٣ ، س←٢⁺ ؛ نها ك(س) = ٢-٢ = ٠ ، س←٢⁻ } ⟸ نها ك(س) غير موجودة
　س←٢

⟸ ك(س) غير متصل عند س = ٢

س٩ ع(س) متصل عند س = ٢

نها ع(س) = نها ع(س)
س←٢⁻　　س←٢⁺

٢ + ٣ = ٤ + أ/٢

٥ = ٤ + أ/٢

١ = أ/٢

⟸ أ = ٢

س١٠ ١) ل(١) = ٥×١ - ١ = ٤

٢) نها ل(س) = نها (س³ + س² + ٢س - ٤)/(س - ١)
　س←١　　س←١

= نها (~~س - ١~~)(س² + ٢س + ٤)/(~~س - ١~~)
　س←١

= ١ + ٢ + ٤ = ٧

٣) ل(١) ≠ نها ل(س) ∴ ل(س) غير متصل عند س = ١
　　　　س←١

س١١ ١) ه(٢) = [٢ + ٤] = ٦

٢) نها ه(س) = √(٤ + ٥) + ٦/٢ = ٣ + ٣ = ٦
　س←٢⁺

نها ه(س) = ٢² + ٢ = ٦
س←٢⁻

نها ه(س) = ٦
س←٢

٣) نها ه(س) = ه(٢)
　س←٢

∴ ه متصل عند س = ٢

س١٢ نها ل(س) = نها ل(س)
س←٢⁺　　س←٢⁻

٢ - ٥ = ٤ + ب ⟸ -٣ = ٤ + ب

⟸ ب = -٧

س١٣ ١) ه(٣) = ٣×٣ + ٥ = ١٤

٢) نها ه(س) = ١٤
　س←٣

٣) نها ه(س) = ه(٣)
　س←٣

∴ ه متصل عند س = ٣

خطوات بحث اتصال اقتران متشعب على فترة:

١) نبحث اتصال كل قاعدة على فترتها الجزئية.

٢) نبحث الاتصال عند نقاط التحول والأطراف التي في المجال.

مثال ١: ق(س) = { ٢س + ٣ ، ٠ ≤ س ≤ ٢ ؛ س² + ١ ، ٢ < س ≤ ٦ }

ابحث الاتصال في الفترة [٠ ، ٦].

الحل: ٢س + ٣ كثير حدود متصل على (٠ ، ٢)

س² + ١ كثير حدود متصل على (٢ ، ٦)

نبحث الاتصال عند س = ٠ ، س = ٢ ، س = ٦

أ) س = ٢

١- ق(٢) = ٢ × ٢ + ٣ = ٧

٢- نهـا ق(س) (س ← ٢⁺) = ٥
نهـا ق(س) (س ← ٢⁻) = ٧ ⇐ نهـا ق(س) (س ← ٢) غير موجودة

$\boxed{\text{∴ ق(س) غير متصل عند س = ٢}}$

ب) س = ٠

١- ق(٠) = ٢ × ٠ + ٣ = ٣

٢- نهـا ق(س) (س ← ٠⁺) = ٢ × ٠ + ٣ = ٣

٣- نهـا ق(س) (س ← ٠⁺) = ق(٠) ⇐ $\boxed{\text{ق متصل عند س = ٠}}$

جـ) س = ٦ ١) ق(٦) = ٣٧

٢) نهـا ق(س) (س ← ٦⁻) = ٣٧ ⇐ $\boxed{\text{ق متصل عند س = ٦}}$

٣) نهـا ق(س) (س ← ٦⁻) = ق(٦)

∴ ق(س) متصل على [٠ ، ٦] − {٢}.

سؤال: ابحث في اتصال ق(س) في الفترة [٢ ، ٨]

حيث ق(س) = { ٢س ، ٢ ≤ س ≤ ٤ ؛ ٨ ، ٤ < س ≤ ٥ ؛ ١٥ − س ، ٥ < س ≤ ٨ }.

مثال ٢: ق(س) = { ٢س ، ١ ≤ س ≤ ٣ ؛ [س + ٤] ، ٣ < س ≤ ٥ }

ابحث في اتصال ق(س) في [١ ، ٥].

الحل: ٢س متصل في (١ ، ٣) لأنه كثير حدود

ق(س) = [س + ٤] = [س] + ٤ اقتران أكبر عدد صحيح منفصل لكل س ∈ ص في (٣ ، ٥) وهي س = ٤

* عند س = ١ متصل لأنه نهـا ق(س) (س ← ١⁺) = ق(١) = ٢
* عند س = ٣ غير متصل لأن نهـا ق(س) (س ← ٣⁻) = ٦
نهـا ق(س) (س ← ٣⁺) = ٧
* عند س = ٥ غير متصل لأن نهـا ق(س) (س ← ٥⁻) = [٥⁻ + ٤] = ٨

لكن ق(٥) = [٩] = ٩.

∴ مجموعة نقاط الانفصال هي {٣ ، ٤ ، ٥}

* ملاحظة: يمكن حل السؤال السابق بإعادة التعريف كما يلي:

ق(س) = { ٢س ، ١ ≤ س ≤ ٣ ؛ ٧ ، ٣ < س < ٤ ؛ ٨ ، ٤ ≤ س < ٥ ؛ ٩ ، س = ٥ }

٢س كثير حدود متصل على (١ ، ٣)
٧ كثير حدود متصل على (٣ ، ٤)
٨ كثير حدود متصل على (٤ ، ٥)

عند س = ١ متصل لأنه نهـا ق(س) (س ← ١⁺) = ق(١)

عند س = ٣ غير متصل لأن نهـا ق(س) (س ← ٣⁻) = ٦ ، نهـا ق(س) (س ← ٣⁺) = ٧

عند س = ٤ غير متصل لأن نهـا ق(س) (س ← ٤⁺) = ٨ ، نهـا ق(س) (س ← ٤⁻) = ٧

عند س = ٥ غير متصل لأن ق(٥) = ٩ لكن نهـا ق(س) (س ← ٥⁻) = ٨

∴ نقاط الانفصال {٣ ، ٤ ، ٥}.

سؤال ١: ق(س) = $\begin{cases} ٤ & ، -٢ < س < ٢ \\ |س-١| + ٢ & ، س < -٢ \\ س^2 & ، س \geq ٢ \\ ١ & ، س = -٢ \end{cases}$

ابحث في اتصال ق في مجاله.

سؤال ٢: ق(س) = $\begin{cases} س + ٢ & ، |س-١| \leq ٢ \\ س^2 & ، |س-١| > ٢ \end{cases}$

ابحث في اتصال ق(س) على مجاله.

مثال ١: ق(س) = $\begin{cases} \dfrac{س^3 - ٨}{س - ٢} & ، س < ٢ \\ ٣س + ٦ & ، س \geq ٢ \end{cases}$

ابحث في اتصال ق(س) على ح.

الحل: $\dfrac{س^3-٨}{س-٢}$ اقتران نسبي متصل على (-∞، ٢) لأن صفر المقام لا ينتمي للفترة (-∞، ٢)

٣س + ٦ كثير حدود متصل على الفترة (٢، ∞)

عند س = ٢

١) ق(٢) = ٣ × ٢ + ٦ = ١٢

٢) $\lim_{س \to ٢^+}$ ق(س) = ٣ × ٢ + ٦ = ١٢

$\lim_{س \to ٢^-}$ ق(س) = $\lim_{س \to ٢^-} \dfrac{\cancel{(س-٢)}(س^2+٢س+٤)}{\cancel{س-٢}}$

= ١٢

⟸ $\lim_{س \to ٢}$ ق(س) = ١٢

٣) $\lim_{س \to ٢}$ ق(س) = ق(٢) ⟸ ق متصل عند س = ٢

∴ ق متصل على ح.

مثال ٢: ع(س) = |٢س - ٥| ابحث في اتصال الاقتران ع على [٠، ٣].

الحل: نعيد تعريف الاقتران

ع(س) = $\begin{cases} -٢س + ٥ & ، صفر \leq س < ٢,٥ \\ ٢س - ٥ & ، ٢,٥ \leq س \leq ٣ \end{cases}$

٥ - ٢س كثير حدود متصل في (٠، ٢,٥)

٢س - ٥ كثير حدود متصل في (٢,٥، ٣).

عند س = ٠ متصل لأن ع(٠) = $\lim_{س \to ٠^+}$ ع(س) = ٥

عند س = ٣ متصل لأن ع(٣) = $\lim_{س \to ٣^-}$ ع(س) = ١

عند س = ٢,٥

١) ع(٢,٥) = صفر

٢) $\lim_{س \to ٢,٥^+}$ ع(س) = صفر
$\lim_{س \to ٢,٥^-}$ ع(س) = صفر
⟸ $\lim_{س \to ٢,٥}$ ع(س) = صفر

٣) $\lim_{س \to ٢,٥}$ ع(س) = ع(٢,٥)

∴ ع متصل عند س = ٢,٥

∴ الاقتران ع متصل على [٠، ٣].

سؤال ٣: اذا كان

ل(س) = $\dfrac{س^2 - ٢٥}{س - ٥}$ ، س ≠ ٥

ابحث في اتصال الاقتران ل على ح.

مثال ١:
$$ق(س) = \begin{cases} \frac{جا أس}{٣س} & ، -\pi \le س < ٠ \\ ٢ & ، س = ٠ \\ ب(٢+س) & ، ٠ < س \le \pi \end{cases}$$

اذا كان ق متصلاً على $[-\pi ، \pi]$ جد قيمة كل من أ ، ب .

الحل: بما أن ق متصل على $[-\pi ، \pi]$

فهو متصل عند س = ٠ ⇐

$\underset{س \to ٠}{نها} ق(س) = ق(٠) = ٢$

$\underset{س \to ٠^-}{نها} ق(س) = \underset{س \to ٠}{نها} \frac{جا(أس)}{٣س} = \frac{أ}{٣} = ٢$

⇐ $\boxed{أ = ٦}$

$\underset{س \to ٠^+}{نها} ق(س) = \underset{س \to ٠^+}{نها} ب(٢+س) = ٢ب = ٢$

⇐ $\boxed{ب = ١}$

مثال ٢:
$$ق(س) = \begin{cases} \frac{س^2+٢س}{س} & ، -٢ \le س < ٠ \\ ٢ & ، س = ٠ \\ [س+٢] & ، ٠ < س \le ١ \end{cases}$$

ادرس اتصال الاقتران ق على $[-٢ ، ١]$

الحل: نعيد تعريف الاقتران

$$ق(س) = \begin{cases} \frac{س^2+٢س}{س} & ، -٢ \le س < ٠ \\ ٢ & ، ٠ \le س < ١ \\ ٣ & ، س = ١ \end{cases}$$

$\frac{س^2+٢س}{س}$ اقتران نسبي متصل في الفترة $[-٢ ، ٠)$

٢ كثير حدود متصل في الفترة $(٠ ، ١)$

* عند س = ٠ :

١) ق(٠) = ٢

٢) $\underset{س \to ٠^+}{نها} ق(س) = ٢$ ، $\underset{س \to ٠^-}{نها} ق(س) = ٢$ ⇐ $\underset{س \to ٠}{نها} ق(س) = ٢$

٣) $\underset{س \to ٠}{نها} ق(س) = ق(٠)$ ⇐ الاقتران ق متصل عند س = ٠

* عند س = ١

١) ق(١) = ٣

٢) $\underset{س \to ١^-}{نها} ق(س) = ٢$

٣) $\underset{س \to ١^-}{نها} ق(س) \ne ق(١)$ ⇐ ق غير متصل عند س = ١

* عند س = -٢

١) $ق(-٢) = \frac{(-٢)^2 + ٢ \times -٢}{-٢} =$ صفر

٢) $\underset{س \to -٢^+}{نها} ق(س) =$ صفر

٣) $\underset{س \to -٢^+}{نها} ق(س) = ق(-٢)$

⇐ ق متصل على $[-٢ ، ١)$.

تمارين ومسائل

١) إذا كان $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \frac{١}{\text{س}} + ٥ & ، \text{س} \geq ١ \\ ٢\text{س}^{٢} + ٤ & ، \text{س} < ١ \end{cases}$

فابحث في اتصال الاقتران د على ح.

٢) ليكن $\text{ف}(\text{س}) = |٢\text{س} + ٧|$ ، ابحث في اتصال الاقتران ف على $[-٥ ، ٠]$.

٣) إذا كان $\text{ك}(\text{س}) = \sqrt{٢\text{س} + ٦}$ ، فابحث في اتصال الاقتران ك على $[-٣ ، \infty)$.

٤) إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} [٢\text{س}] & ، -١ \leq \text{س} \leq ٠ \\ ٢\text{س} - ١ & ، ٠ < \text{س} \leq ٢ \end{cases}$

فابحث في اتصال الاقتران ق على $[-١ ، ٢]$.

٥) اذا كان $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \frac{|\text{س}|}{\text{س}} & ، \text{س} < ١ ، \text{س} \neq ٠ \\ \frac{١}{٢}\text{س} + \frac{١}{٢} & ، \text{س} \geq ١ \end{cases}$

فابحث في اتصال الاقتران د على ح.

٦) اذا كان $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{\text{س}^{٢} - \text{س} - ٣٠}{\text{أ س} - ٦\,\text{أ}} & ، \text{س} > ٦ \\ ١ & ، \text{س} = ٦ \\ \text{ب س} & ، \text{س} < ٦ \end{cases}$

اقترانًا متصلا على ح ، فجد قيمة كل من أ، ب.

٧) إذا علمت أن: $\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{\text{س}^{٢} - (٣ - ٢\,\text{جـ})\,\text{س} - ٦\,\text{جـ}}{\text{س} - ٣} & ، \text{س} \neq ٣ \\ ٤\,\text{س} - ١ & ، \text{س} = ٣ \end{cases}$

اقتران متصل على ح ، فجد قيمة جـ .

٨) إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \dfrac{\text{س}^{٢} - ٣\,\text{س} - ٥}{\text{س}^{٢} - \text{أ س} + ٣}$ متصلا على ح ، فجد مجموعة قيم أ .

حل تمارين ومسائل صفحة ٧١

س١ ٢س^٢ + ٤ كثير حدود متصل على (−∞ ، ∞)

$\frac{١}{س}$ + ٥ اقتران نسبي متصل على (١ ، ∞)
صفر المقام ∉ للفترة.

عند س = ١

١) ق(١) = ١ + ٥ = ٦

٢) نها ق(س) = ٦ (س ← ١⁺)
نها ق(س) = ٦ (س ← ١⁻)
⇐ نها ق(س) = ٦ (س ← ١)

٣) ق(١) = نها ق(س) (س ← ١)

∴ ق(س) متصل عند س = ١
∴ ق(س) متصل على ح.

س٢ ٢س + ٧ = ٠ ⇐ س = −٣٫٥

−٢س−٧ | ٢س+٧
−٥ ، −٣٫٥ ، ٠

−٢س − ٧ كثير حدود متصل على (−٥ ، −٣٫٥)
٢س + ٧ كثير حدود متصل على (−٣٫٥ ، ٠)

* س = −٣٫٥

١) ق(−٣٫٥) = صفر

٢) نها ق(س) = ٠ (س ← −٣٫٥⁺)
نها ق(س) = ٠ (س ← −٣٫٥⁻)
⇐ نها ق(س) = ٠ (س ← −٣٫٥)

٣) نها ق(س) = ق(−٣٫٥) (س ← −٣٫٥)

ق(س) متصل عند س = −٣٫٥

* س = −٥

نها ق(س) = ق(−٥) = ٣ (س ← −٥⁺)

ق(س) متصل عند س = −٥

* س = ٠

نها ق(س) = ق(٠) = ٧ (س ← ٠⁻)

ق(س) متصل عند س = ٠

∴ ق(س) متصل على [−٥ ، ٠].

س٣ نبحث في إشارة ما بداخل الجذر

٢س + ٦ = ٠ ⇐ س = −٣

$\sqrt{٢س+٦}$ متصل على (−٣ ، ∞)

− | + (−٣ ، ∞)

لأن ما داخل الجذر متصل وموجب

عند س = −٣

١) ل(−٣) = صفر

٢) نها ل(س) = صفر (س ← −٣⁺)

٣) نها ل(س) = ل(−٣) (س ← −٣⁺)

∴ ل(س) متصل عند س = −٣ من اليمين
∴ ل(س) متصل على [−٣ ، ∞)

الاتصال على فترة

ع ٤

ق(س) = { -٢ ، -١ ≤ س < -٠,٥
-١ ، -٠,٥ ≤ س < ٠
صفر ، س = صفر
٢س - ١ ، ٠ < س ≤ ٢

-٢ متصل على (-١ ، -½) كثيرة حدود
-١ متصل على (-٠,٥ ، ٠) كثيرة حدود
٢س - ١ متصل على (٠ ، ٢) كثيرة حدود

$\boxed{\text{عند س} = -\frac{1}{2}}$

١) ق(-½) = -١

٢) نهـا ق(س) = -١ (س ← -½⁺)
نهـا ق(س) = -٢ (س ← -½⁻)
⇐ نهـا ق(س) غير موجودة (س ← -½)

∴ ق(س) غير متصل عند س = -½ .

$\boxed{\text{عند س} = -1}$

١) ق(-١) = -٢

٢) نهـا ق(س) = -٢ (س ← -١⁺)

٣) نهـا ق(س) = ق(-١) (س ← -١⁺)

∴ ق متصل عند س = -١

$\boxed{\text{عند س} = 0}$

١) ق(٠) = صفر

٢) نهـا ق(س) = -١ (س ← ٠⁺)
نهـا ق(س) = -١ (س ← ٠⁻)
⇐ نهـا ق(س) = -١ (س ← ٠)

٣) نهـا ق(س) ≠ ق(٠) (س ← ٠)

∴ ق غير متصل عند ٠

عند س = ٢

١) ق(٢) = ٢ × ٢ - ١ = ٣

٢) نهـا ق(س) = ٣ (س ← ٢⁻)

٣) نهـا ق(س) = ق(٢) (س ← ٢⁻)

∴ ق متصل عند س = ٢

⇐ ق متصل على [-١ ، ٢] - {-½ ، ٠}

ثم نعيد تعريف |س| + ١

-س | س
٠ ١

د(س) = { $\frac{\text{س}}{-\text{س}}$ = -١ ، س < ٠
$\frac{\text{س}}{\text{س}}$ = ١ ، ٠ < س < ١
½س + ½ ، س ≥ ١

-١ كثيرة حدود متصل على (-∞ ، ٠)
١ كثيرة حدود متصل على (٠ ، ١)
½س + ½ كثيرة حدود متصل على (١ ، ∞)

$\boxed{\text{عند س} = 0}$

١) د(٠) = غير معرفة

د(س) غير متصل عند س = ٠

∴ عند س = ١

١) د(١) = ½ + ½ = ١

٢) نهـا د(س) = ١ (س ← ١⁻)
نهـا د(س) = ١ (س ← ١⁺)
⇐ نهـا د(س) = ١ (س ← ١)

٣) نهـا د(س) = د(١) (س ← ١)

د(س) متصل عند س = ١

∴ د(س) متصل على ح - {٠} .

س٦ د(٦) = ١

نهـا د(س) = د(٦)
س ← ٦⁻

٦ب = ١ ⟸ ب = ١/٦ .

نهـا د(س) = د(٦)
س ← ٦⁺

نهـا (س² - س - ٣٠) / (أ(س - ٦)) = ١
س ← ٦⁺

نهـا (~~(س - ٦)~~ (س + ٥)) / (أ ~~(س - ٦)~~) = ١
س ← ٦⁺

(٦ + ٥) / أ = ١ ⟸ أ = ١١

س٧ ق(٣) = ٤ × ٣ - ١ = ١١

نهـا ق(س) = نهـا (س² - (٣ - ٢جـ)س - ٦جـ) / (س - ٣)
س ← ٣

نهـا (~~(س - ٣)~~ (س + ٢جـ)) / ~~(س - ٣)~~ = ١١
س ← ٣

٣ + ٢جـ = ١١

⟸ ٢جـ / ٢ = ٨ / ٢

جـ = ٤ .

س٨ حتى ق يكون متصلاً على ح يجب أن يكون

المقام ≠ صفر .

أي أن المقام لا يتحلل .

أي أن المميز < صفر

ب² - ٤أجـ < صفر

(-أ)² - ٤ × ١ × ٣ < صفر

أ² - ١٢ < صفر

أ² - ١٢ = صفر
+١٢   +١٢

√أ² = √١٢

أ = ∓ √١٢

+ + | - - | + +
-√١٢   √١٢

أ ∈ (-√١٢ ، √١٢) .

الاتصال على فترة

تدريب (1):

اذا كان $ه(س) = \begin{cases} س^2 ، & 3 \le س < 5 \\ س + 20 ، & 5 \le س < 7 \\ 9 ، & س = 7 \end{cases}$

ابحث في اتصال الاقتران ه على الفترة $[3 ، 7)$ والفترة $[3 ، 7]$.

الحل: $س^2$ كثير حدود متصل على $(3 ، 5)$

$س + 20$ كثير حدود متصل على $(5 ، 7)$

نبحث الاتصال عند الاطراف $س = 3 ، 7$

عند نقاط التحول $س = 5$

$\boxed{عند\ س = 3}$

1) $ه(3) = 9$

2) $\lim_{س \to 3^+} ه(س) = 9$

3) $\lim_{س \to 3^+} ه(س) = ه(3)$

∴ ه متصل عند $س = 3$

$\boxed{عند\ س = 5}$

1) $ه(5) = 5 + 20 = 25$

2) $\left.\begin{array}{l} \lim_{س \to 5^+} ه(س) = 25 \\ \lim_{س \to 5^-} ه(س) = 5^2 = 25 \end{array}\right\} \Leftarrow \lim_{س \to 5} ه(س) = 25$

3) $\lim_{س \to 5} ه(س) = ه(5)$ ∴ ه متصل عند $س = 5$

$\boxed{عند\ س = 7}$

1) $ه(7) = 9$

2) $\lim_{س \to 7^-} ه(س) = 27$

3) $\lim_{س \to 7^-} ه(س) \ne ه(7)$ ∴ ه غير متصل عند $س = 7$

ه متصل على الفترة $[3 ، 7)$

تدريب 2:

اذا كان $ل(س) = \begin{cases} \dfrac{س^2 - 25}{س - 5} ، & س \ne 5 \\ 5 + س ، & س = 5 \end{cases}$

ابحث في اتصال الاقتران ل على مجاله

الحل: $\dfrac{س^2 - 25}{س - 5}$ نسبي متصل على مجاله (لأن صفر المقام لا ينتمي للمجال)

عند $س = 5$

1) $ل(5) = 5 + 5 = 10$

2) $\lim_{س \to 5} ل(س) = \lim_{س \to 5} \dfrac{س^2 - 25}{س - 5}$

$\lim_{س \to 5} \dfrac{\cancel{(س - 5)}(س + 5)}{\cancel{س - 5}} = 5 + 5 = 10$

3) $\lim_{س \to 5} ل(س) = ل(5)$

ل(س) متصل عند $س = 5$

∴ ل(س) متصل على ح .

تدريب ٣: اذا كان ق(س) = |١٠ − س| فابحث في اتصال ق على الفترة [٠.١ ، ٩٠]

الحل: ١٠ − س = صفر ⟸ س = ١٠

$$+ \qquad -$$
٠.١ ——— ١٠ ——— ٩٠

ق(س) = { س − ١٠ ، ١٠ < س ≤ ٩٠
{ ١٠ − س ، ٠.١ ≤ س ≤ ١٠

س − ١٠ كثير حدود متصل لجميع قيم س > ١٠

١٠ − س كثير حدود متصل لجميع قيم س < ١٠

$\boxed{\text{عند س = ١٠}}$

١) ق(١٠) = صفر

٢) نها ق(س) (س ← ١٠⁺) = صفر
نها ق(س) (س ← ١٠⁻) = صفر } ⟸ نها ق(س) (س ← ١٠) = صفر

∴ ق متصل عند س = ١٠

$\boxed{\text{عند س = ٠.١}}$

١) ق(٠.١) = ١٠ − ٠.١ = ٩.٩

٢) نها ق(س) (س ← ٠.١⁺) = ٩.٩

٣) نها ق(س) (س ← ٠.١⁺) = ق(٠.١) ∴ ق متصل عند س = ٠.١

$\boxed{\text{عند س = ٩٠}}$

١) ق(٩٠) = ٩٠ − ١٠ = ٨٠

٢) نها ق(س) (س ← ٩٠⁻) = ٨٠

٣) نها ق(س) (س ← ٩٠⁻) = ق(٩٠) ∴ ق متصل عند س = ٩٠

ق(س) متصل على [٠.١ ، ٩٠].

تدريب ٤: اذا كان ع(س) = { جا أس / ٥س ، −π ≤ س < ٠
{ ٢ ، س = ٠
{ ب(٢ + س) ، ٠ < س ≤ π

متصلاً على الفترة [−π ، π] فجد قيمة كل من أ ، ب ؟

الحل: نها ع(س) (س ← ٠⁺) = نها ع(س) (س ← ٠⁻) = ع(٠)

ع(٠) = نها ع(س) (س ← ٠⁻)

٢ = نها (جا أس / ٥س) (س ← ٠⁻)

٢ = أ/٥ ⟸ $\boxed{\text{أ = ١٠}}$

ع(٠) = نها ع(س) (س ← ٠⁺)

٢ = ب(٢ + ٠)

٢/٢ = ٢ب/٢

$\boxed{\text{ب = ١}}$

١) إذا كان ق(س) = $\begin{cases} ٣س^{٢} + ٥ &،\quad -٢ \leq س < ١ \\ ٨\,س &،\quad ١ \leq س \leq ٢ \end{cases}$

فابحث في اتصال الاقتران ق على الفترة [−٢، ٢].

٢) إذا كان ل(س) = |٢س − ١٠ |، فابحث في اتصال الاقتران ل على الفترة[−١٠، ٨].

٣) إذا كان ع(س) = $\begin{cases} \dfrac{س^{٣} - ٢٧}{٣ - س} &،\quad س < ٣ \\ ٥ + س &،\quad س \geq ٣ \end{cases}$

فابحث في اتصال الاقتران ع على ح.

٤) إذا كان ل(س) = $\begin{cases} \sqrt{٤ - س} &،\quad س < ٤ \\ |س^{٢} - ١٦| &،\quad س \geq ٤ \end{cases}$

فابحث في اتصال الاقتران ل على مجاله.

٥) إذا كان ع(س) = $\begin{cases} ٥ &،\quad س = ٣ \\ [س] + ٥ &،\quad ٣ < س < ٤ \\ ٤ &،\quad س = ٤ \end{cases}$

فابحث في اتصال الاقتران ع على الفترة [٣، ٤].

٦) إذا كان ق(س) =

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \sqrt{\text{س} + ١} &، \quad ٠ \leq \text{س} < ٣ \\ [٠,٢٥\,\text{س} + ٢] &، \quad ٣ \leq \text{س} < ٦ \\ |٩ - \text{س}| &، \quad \text{س} = ٦ \end{cases}$$

فابحث في اتصال الاقتران ق على الفترة [٠، ٦].

٧) إذا كان الاقتران ع(س) =

$$\text{ع}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{\text{س}^٢ + ٢(\text{هـ} - ١)\,\text{س} - ٤\text{هـ}}{\text{س} - ٢} &، \quad \text{س} \neq ٢ \\ ٥ + \text{س} &، \quad \text{س} = ٢ \end{cases}$$

متصلاً على ح، فجد قيمة الثابت هـ.

٨) إذا كان ع(س) =

$$\text{ع}(\text{س}) = \begin{cases} ٢\text{س} &، \quad \text{س} < ٢ \\ [٠,٥\,\text{س} + ٢] &، \quad ٢ \leq \text{س} < ٤ \\ \dfrac{٥\text{س}}{\text{س}^٢ - ٣٦} &، \quad \text{س} \geq ٤ \end{cases}$$

فابحث في اتصال الاقتران ع لجميع قيم س الحقيقية.

٩) إذا كان ق(س) =

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} [\text{س}] + \text{س} &، \quad -١ \leq \text{س} < ٠ \\ \dfrac{٣\text{س}^٢}{٥} + \sqrt{\text{س}} &، \quad ٠ \leq \text{س} \leq ٢ \end{cases}$$

فابحث في اتصال الاقتران ق على الفترة [−١، ٢].

١٠) إذا كان ل(س) = $\dfrac{\text{س}^٢ + ٥\text{س} + ٢}{\text{أ}\,\text{س}^٢ + \text{س} + ٣}$ ، فما قيم أ التي تجعل الاقتران ل متصلاً على مجموعة الأعداد الحقيقية ح ؟

حل: $٣س^٢ + ٥$ كثير حدود متصل على $(-٢، ١)$

$٨س$ كثير حدود متصل على $(١، ٢)$

نبحث الاتصال عند $س = -٢ ، ١ ، ٢$

$\boxed{س = -٢}$

١) $د(-٢) = ٣ \times ٤ + ٥ = ١٧$

٢) $\lim\limits_{س \to -٢^+} د(س) = ١٧$

٣) $\lim\limits_{س \to -٢^+} د(س) = د(-٢)$ ∴ د متصل عند $س = -٢$

$\boxed{س = ١}$

١) $د(١) = ٨$

٢) $\lim\limits_{س \to ١^+} د(س) = ٨$ ، $\lim\limits_{س \to ١^-} د(س) = ٣(١) + ٥ = ٨$ ⟸ $\lim\limits_{س \to ١} د(س) = ٨$

٣) $\lim\limits_{س \to ١} د(س) = د(١)$ ∴ د متصل عند $س = ١$

$\boxed{س = ٢}$

١) $د(٢) = ٨ \times ٢ = ١٦$

٢) $\lim\limits_{س \to ٢^-} د(س) = ١٦$

٣) $\lim\limits_{س \to ٢^-} د(س) = د(٢)$ ∴ د متصل عند $س = ٢$

د متصل على $[-٢، ٢]$.

حل: $ق(س) = \begin{cases} ٢س - ١٠ ، & ٥ \le س \le ٨ \\ ١٠ - ٢س ، & -١٠ \le س < ٥ \end{cases}$

$١٠ - ٢س$ $٢س - ١٠$

-١٠ ——— ٥ ——— ٨

$٢س - ١٠$ كثير حدود متصل على $(٥، ٨)$

$١٠ - ٢س$ " " " على $(-١٠، ٥)$

$\boxed{س = ٥}$

١) $د(٥) = ٠$

٢) $\lim\limits_{س \to ٥^+} د(س) = ٠$ ، $\lim\limits_{س \to ٥^-} د(س) = ٠$ ⟸ $\lim\limits_{س \to ٥} د(س) = ٠$

٣) $\lim\limits_{س \to ٥} د(س) = د(٥)$ ∴ د متصل عند $س = ٥$

$\boxed{س = ٨}$

١) $د(٨) = ١٦ - ١٠ = ٦$

٢) $\lim\limits_{س \to ٨^-} د(س) = ٦$

٣) $\lim\limits_{س \to ٨^-} د(س) = د(٨)$ ∴ د متصل عند $س = ٨$

$\boxed{س = -١٠}$

١) $د(-١٠) = ١٠ - ٢ \times -١٠ = ٣٠$

٢) $\lim\limits_{س \to -١٠^+} د(س) = ٣٠$

٣) $\lim\limits_{س \to -١٠^+} د(س) = د(-١٠)$

∴ د متصل عند $س = -١٠$

د متصل على $[-١٠، ٨]$.

س٣ $\frac{\text{س}^3 - ٢٧}{\text{س} - ٣}$ نسبية متصل على مجاله

٥ + س كثير حدود متصل لجميع قيم س > ٣

نبحث الاتصال عند س = ٣

١) ع(٣) = ٥ + ٣ = ٨

٢) نها س←٣⁻ $\frac{\text{س}^3 - ٢٧}{\text{س} - ٣}$ =

= نها س←٣⁻ $\frac{(\cancel{\text{س} - ٣})(\text{س}^2 + ٣\text{س} + ٩)}{\cancel{\text{س} - ٣}}$

= (٩ + ٩ + ٩) = ٢٧ .

نها س←٣⁺ ع(س) = ٥ + ٣ = ٨

نها س←٣ ع(س) غير موجودة ،

∴ ع(س) غير متصل عند س = ٣

ع(س) متصل على ح − {٣}

س٤ ا س² − ١٦ = س² − ١٦ عند س ≥ ٤

√(٤ − س) | س² − ١٦
٤

√(٤ − س) متصل على (−∞، ٤) لأن ما داخل الجذر متصل وموجب .

س² − ١٦ كثير حدود متصل على (٤، ∞)

$\boxed{\text{عند س = ٤}}$

١) ل(٤) = صفر

٢) نها س←٤⁺ ل(س) = ٠ ⟸ نها س←٤ ل(س) = ٠

نها س←٤⁻ ل(س) = ٠

٣) نها س←٤ ل(س) = ل(٤)

ل(س) متصل عند س = ٤

ل(س) متصل على ح .

س٥ [س] = ٣ ، ٣ ≤ س < ٤

ع(س) = { ٥ ، س = ٣
٨ ، ٣ < س < ٤
٤ ، س = ٤ }

٨ متصل على (٣، ٤) (ثابت)

$\boxed{\text{عند س = ٣}}$

١) ع(٣) = ٥

٢) نها س←٣⁺ ع(س) = ٨

٣) نها س←٣⁺ ع(س) ≠ ع(٣)

ع(س) غير متصل عند س = ٣

$\boxed{\text{عند س = ٤}}$

١) ع(٤) = ٤

٢) نها س←٤⁻ ع(س) = ٨

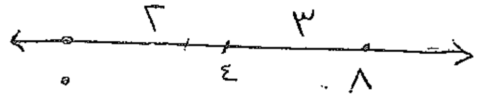
٣) نها س←٤⁻ ع(س) ≠ ع(٤)

ع(س) غير متصل عند س = ٤

ع(س) متصل على (٣ ، ٤) .

س٦ [٠٫٢٥ ، س + ٢]

ل = $\frac{١}{٠٫٢٥}$ = $\frac{١}{\frac{١}{٤}}$ = ٤



ق(س) = { √(س+١) ، ٠ ≤ س < ٣
 ٢ ، ٣ ≤ س < ٤
 ٣ ، ٤ ≤ س < ٦
 |٩ − س| ، س = ٦

√(س+١) متصل على (٠،٣) لأن ما داخل الجذر متصل وموجب.

٢ متصل على (٣،٤) (ثابت)

٣ متصل على (٤،٦) (ثابت)

$\boxed{\text{عند س = ٣}}$

١) ق(٣) = ٢

٢) نها ق(س) = ٢ (س ← ٣⁻)
 نها ق(س) = ٢ (س ← ٣⁺) ⟸ نها ق(س) = ٢ (س ← ٣)

٣) نها ق(س) = ق(٣) (س ← ٣) ∴ ق متصل عند س = ٣

$\boxed{\text{عند س = ٤}}$

١) ق(٤) = ٣

٢) نها ق(س) = ٣ (س ← ٤⁺)
 نها ق(س) = ٢ (س ← ٤⁻) ⟸ نها ق(س) (س ← ٤) غير موجودة

ق غير متصل عند س = ٤.

$\boxed{\text{عند س = ٠}}$

١) ق(٠) = ١

٢) نها ق(س) = ١ (س ← ٠⁺)

٣) نها ق(س) = ق(٠) (س ← ٠⁺) ∴ ق متصل عند س = ٠

$\boxed{\text{عند س = ٦}}$

١) ق(٦) = |٩ − ٦| = ٣

٢) نها ق(س) = ٣ (س ← ٦⁻)

٣) نها ق(س) = ق(٦) (س ← ٦⁻) ∴ ق متصل عند س = ٦

∴ ق(س) متصل على [٠، ٦] − {٤}.

س٧ ع(س) متصل عند س = ٢ ⟸ نها ع(س) (س ← ٢) = ع(٢).

نها (س ← ٢) $\frac{\text{س}^٢ + ٢\text{هـ س} - ٢\text{س} - ٤\text{هـ}}{\text{س} - ٢}$ = ٥ + ٢

نها (س ← ٢) $\frac{\text{س}^٢ - ٢\text{س}}{\text{س} - ٢}$ + نها (س ← ٢) $\frac{٢\text{هـ س} - ٤\text{هـ}}{\text{س} - ٢}$ = ٧

نها (س ← ٢) $\frac{\text{س}(\text{س} - ٢)}{\text{س} - ٢}$ + نها (س ← ٢) $\frac{٢\text{هـ}(\text{س} - ٢)}{\text{س} - ٢}$ = ٧

٢ + ٢هـ = ٧

$\frac{٢\text{هـ}}{٢} = \frac{٥}{٢}$

هـ = $\frac{٥}{٢}$.

س٨ $[٠,٥س + ٢]$

ل $= \frac{١}{٠,٥} = \frac{١}{\frac{١}{٢}} = ٢$

٠ — ٢ — ٤

$[٠,٥س + ٢] = ٣$ ، $٢ \leq س < ٤$

$$ع(س) = \begin{cases} ٢س &، س < ٢ \\ ٣ &، ٢ \leq س < ٤ \\ \frac{٥س}{س^٢ - ٣٦} &، س \geq ٤ \end{cases}$$

٢س كثير حدود متصل لجميع قيم س < ٢

٣ ثابت متصل على $(٢ ، ٤)$

$\frac{٥س}{س^٢ - ٣٦}$ نسبي متصل $(٤ ، \infty) - \{٦\}$.

$\boxed{\text{عند } س = ٢}$

١) $ع(٢) = ٣$

٢) $\lim_{س \to ٢^+} ع(س) = ٣$ ، $\lim_{س \to ٢^-} ع(س) = ٤$ ⇐ نها ه(س) غير موجودة

ع(س) غير متصل عند س = ٢

$\boxed{\text{عند } س = ٤}$

١) $ع(٤) = \frac{٥ \times ٤}{١٦ - ٣٦} = \frac{٢٠}{-٢٠} = -١$

٢) $\lim_{س \to ٤^+} ع(س) = -١$ ، $\lim_{س \to ٤^-} ع(س) = ٣$ ← نها ع(س) غير موجودة

∴ ع(س) غير متصل عند س = ٤

ع(س) متصل على ح $- \{٢ ، ٤ ، ٦\}$

س٩ $[س] = -١$ ، $-١ \leq س < ٠$

$$ه(س) = \begin{cases} -١ + س &، -١ \leq س < ٠ \\ \frac{٣س^٢}{٥} + \sqrt{٦س} &، ٠ \leq س \leq ٢ \end{cases}$$

$-١ + س$ كثير حدود متصل على $(-١ ، ٠)$

$\frac{٣}{٥}س^٢ + \sqrt{٦س}$ متصل على $(٠ ، ٢)$ لأنه $\frac{٣}{٥}س^٢$ كثير حدود وما داخل الجذر متصل وموجب .

$\boxed{\text{عند } س = ٠}$

١) $ه(٠) = ٠$

٢) $\lim_{س \to ٠^-} ه(س) = -١$ ، $\lim_{س \to ٠^+} ه(س) = ٠$ ⇐ نها ه(س) غير موجودة

∴ ه(س) غير متصل عند س = ٠

$\boxed{\text{عند } س = -١}$

١) $ه(-١) = -٢$

٢) $\lim_{س \to -١^+} ه(س) = -٢$

٣) $\lim_{س \to -١^+} ه(س) = ه(-١)$

ه متصل عند س = −١

$\boxed{\text{عند } س = ٢}$

١) $ه(٢) = \frac{١٢}{٥} + \sqrt{١٢}$

٢) $\lim_{س \to ٢^-} ه(س) = \frac{١٢}{٥} + \sqrt{١٢}$

٣) $\lim_{س \to ٢^-} ه(س) = ه(٢)$

ه متصل عند س = ٢

ه متصل $[-١ ، ٢] - \{٠\}$.

س١٠ يجب أن يكون المقام ≠ صفر ⇐ العبارة التربيعية لا تحلل ⇐ المميز سالب

$\boxed{أ = أ \ / \ ب = ١ \ / \ جـ = ٣}$

$ب^٢ - ٤أجـ < صفر$

$١ - ٤أ \times ٣ < صفر$

$١ - ١٢أ < صفر$

$\frac{١}{١٢} < \frac{١٢أ}{١٢}$

$\frac{١}{١٢} < أ$

+ + | − − عند $\frac{١}{١٢}$

أسئلة وزارية :

س١ $ق(س) = \begin{cases} \frac{أ}{س} + س^٢ & ، ٠ < س \leq ٢ \\ [س] + ٣ & ، ٢ < س < ٣ \\ ٧ & ، س = ٣ \end{cases}$

ق متصل عند س = ٢ .

أجب عما يلي:

أ) جد قيمة الثابت أ .

ب) ابحث في اتصال الاقتران ق على الفترة $[٠ ، ٣]$

س٢ ابحث في اتصال الاقتران على الفترة $[-٢ ، ١)$.

$ق(س) = \begin{cases} \frac{س^٢ - ١}{س + ١} & ، -٢ \leq س < -١ \\ س[س] + ١ & ، -١ \leq س < ١ \end{cases}$

س٣ ابحث في اتصال الاقتران

$ق(س) = \sqrt{[س] + س}$ على الفترة $(١ ، ٢]$

س٤ اذا كان $ل(س) = \frac{س^٢ - ١}{س + ٢}$ ، $هـ(س) = [س]$ فابحث في اتصال الاقتران

$ق(س) = ل(س) \times هـ(س)$ في الفترة $[١ ، ٢]$

س٥ $ق(س) = \begin{cases} ٥س - ٩ & ، س \leq ٢ \\ [٢ - \frac{١}{٢}س] & ، ٢ < س \leq ٤ \\ |س - ١٤| & ، س > ٤ \end{cases}$

ابحث في اتصال الاقتران ق(س) على مجموعة الأعداد الحقيقية .

س٦ $ق(س) = \begin{cases} س^٢ - ٢س + ١ & ، س < ٣ \\ [س + ١] & ، ٣ \leq س < ٤ \\ ٢س - ٩ & ، س \geq ٤ \end{cases}$

ابحث في اتصال ق(س) على مجموعة الأعداد الحقيقية

س٧ $ق(س) = \begin{cases} \frac{س^٣ + س^٢ + ٢س - ٤}{س - ١} & ، س \neq ١ \\ ٥س - ١ & ، س = ١ \end{cases}$

ابحث في اتصال الاقتران ق(س) عند س = ١

س٨ $ق(س) = \begin{cases} س^٢ + ١ & ، س \leq ٢ \\ [س + ٣] & ، س > ٢ \end{cases}$

ابحث في اتصال ق(س) عند س = ٢

س٩ $ق(س) = \begin{cases} ٢س + ٢ & ، س < ١ \\ ٣س^٢ & ، س \geq ١ \end{cases}$

$هـ(س) = \begin{cases} س^٢ & ، س < ١ \\ |س - ١| & ، س \geq ١ \end{cases}$

ابحث في اتصال الاقتران

(ق + هـ)(س) عندما س = ١ .

تابع أسئلة وزارية

س١٠

$$ق(س) = \begin{cases} \left|\frac{س}{2} - 1\right| & ، \ -1 \le س < 3 \\ \left[\frac{1}{2}س + 3\right] & ، \ 3 \le س < 4 \end{cases}$$

ابحث في اتصال ق(س) عند س = ٣

س١١

$$ق(س) = \begin{cases} 4س + 2 & ، \ 0 \le س < 2 \\ 10 & ، \ س = 2 \\ \frac{(2س+1)^2 - 25}{س - 2} & ، \ 2 < س \le 4 \end{cases}$$

ابحث في اتصال ق عند س = ٢ .

س١٢

$$ل(س) = \begin{cases} \frac{جا(ب س) - 9س^2}{س \ جا5س} & ، \ -\frac{\pi}{6} \le س < 0 \\ 11 & ، \ س = 0 \\ \frac{س^2 + (2-أ)س}{أ س} & ، \ 0 < س < \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

اذا كان ل(س) اقتراناً متصلاً عند س = صفر جد قيم كل من الثابتين أ ، ب .

س١٣

$$ق(س) = \begin{cases} \frac{9س^2 - 1}{\sqrt{1 - 6س + 9س^2}} & ، \ -\frac{1}{3} < س < \frac{1}{3} \\ -2 & ، \ س = \frac{1}{3} \\ -6س - [س] & ، \ \frac{1}{3} < س < \frac{4}{3} \end{cases}$$

ابحث في اتصال الاقتران ق(س) عند س = $\frac{1}{3}$

س١٤

$$ق(س) = \begin{cases} \frac{(5 - س^2) - [2س + 3]}{1 - س} & ، \ 0 < س < 1 \\ 2س - |1 - س^2| & ، \ 1 \le س < 2 \end{cases}$$

ابحث في اتصال الاقتران ق(س) عند س = ١ .

حل الأسئلة الوزارية

لو ق متصل عند س = ٢ ⟸

أ) $\lim_{س \to ٢^+}$ ق(س) = $\lim_{س \to ٢^-}$ ق(س)

$\lim_{س \to ٢^-} \left(\frac{أ}{س} + س^٢\right) = \lim_{س \to ٢^+} \left([س] + ٣\right)$

$\frac{أ}{٢} + ٤ = ٢ + ٣$

$\frac{أ}{٢} = ٥ - ٤ = ١ \Leftarrow أ = ٢$.

ب) [س] = ٢ ، ٢ < س < ٣

$$ق(س) = \begin{cases} \frac{٢}{س} + س^٢ & ،\ صفر < س \leq ٢ \\ ٥ & ،\ ٢ < س < ٣ \\ ٧ & ،\ س = ٣ \end{cases}$$

$\frac{٢}{س}$ نسبي وصفر المقام ∉ (٠، ٢)

ق(س) = $\frac{٢}{س} + س^٢$ متصل على (٠، ٢)

ناتج جمع متصلين

٥ متصل على (٢، ٣) كثير حدود

* عند س = ٢

ق متصل عند س = ٢ (معطى بالسؤال)

* عند س = ٣

١) ق(٣) = ٧

٢) $\lim_{س \to ٣^-}$ ق(س) = ٥ .

٣) ق(٣) ≠ $\lim_{س \to ٣^-}$ ق(س)

∴ ق غير متصل عند س = ٣

∴ ق متصل على (٠، ٣) .

حل: $[س] = \begin{cases} -١ & ،\ -١ \leq س < ٠ \\ صفر & ،\ ٠ \leq س < ١ \end{cases}$

$$ق(س) = \begin{cases} \frac{س^٢ - ١}{س + ١} & ،\ -٢ \leq س < -١ \\ -س + ١ & ،\ -١ \leq س < ٠ \\ ١ & ،\ ٠ \leq س < ١ \end{cases}$$

$\frac{س^٢ - ١}{س + ١}$ نسبي متصل على (−٢، −١) لأن صفر المقام ∉ (−٢، −١) .

−س + ١ كثير حدود متصل على (−١، ٠)

١ كثير حدود متصل على (٠، ١)

* عند س = −١

١) ق(−١) = ١ + ١ = ٢

٢) $\lim_{س \to -١^+}$ ق(س) = ١ + ١ = ٢

٣) $\lim_{س \to -١^+}$ ق(س) = ٢

$\lim_{س \to -١^-}$ ق(س) = $\lim_{س \to -١^-} \frac{(س - ١)(س + ١)}{س + ١} = -٢$

$\lim_{س \to -١}$ ق(س) غير موجودة .

⟸ ق(س) غير متصل عند س = −١

* عند س = ٠

١) ق(٠) = ١   ٢) $\lim_{س \to ٠^+}$ ق(س) = ١

$\lim_{س \to ٠^-}$ ق(س) = ١ ⟸ $\lim_{س \to ٠}$ ق(س) = ١

٣) $\lim_{س \to ٠}$ ق(س) = ق(٠) ⟸ ق متصل عند س = ٠

∴ ق متصل على [−٢، ١) − {١} .

تابع حل الأسئلة الوزارية:

س٣ د(س) = { √(١+س) ، ١ < س < ٢
            { √(٢+س) ، س = ٢

√(١+س) متصل على (١، ٢) لأن ما داخل الجذر متصل وموجب

(أو لأن د(أ) = نها د(س) لكل أ ∈ (١، ٢))
                  س←أ

عند س = ٢

١) د(٢) = √(٢+٢) = ٢

٢) نها د(س) = √(١+٢) = √٣
   س←٢⁻

٣) د(٢) ≠ نها د(س)
           س←٢⁻

∴ د غير متصل عند س = ٢ من اليسار

∴ د(س) متصل على (١، ٢) .

* عند س = ١

١) د(١) = صفر

٢) نها د(س) = صفر
   س←١⁺
   نها د(س) = صفر } ⟸ نها د(س) = صفر
   س←١⁻   س←١

٣) نها د(س) = د(١)
   س←١

د متصل عند س = ١

* عند س = ٢

١) د(٢) = (٤ − ١)/(٢ + ٢) × ٢ = ٣/٤ × ٢ = ٣/٢

٢) نها د(س) = (٤ − ١)/(٢ + ٢) = ٣/٤ .
   س←٢⁻

٣) نها د(س) ≠ د(٢) ⟸ د غير متصل عند س = ٢
   س←٢⁻

∴ د متصل على [٠، ٢) .

س٤ [س] = { صفر ، ٠ ≤ س < ١
          { ١ ، ١ ≤ س < ٢
          { ٢ ، س = ٢

د(س) = ل(س) × هـ(س) =

{ صفر ، ٠ ≤ س < ١
{ (س² − ١)/(س + ٢) ، ١ ≤ س < ٢
{ ٢ × (س² − ١)/(س + ٢) ، س = ٢

صفر : اقتران ثابت متصل على (٠، ١)

(س² − ١)/(س + ٢) نسبي متصل على (١، ٢) والصفر المقام ∉ (١، ٢)

س٥ [٢ − ½ س] = صفر ، ٢ < س ≤ ٤

|س − ٤| = س − ٤ ، س > ٤

٥س − ٩ | صفر | س − ٤
        ٢   ٤

٥س − ٩ كثير حدود متصل على (−∞، ٢)

صفر ثابت متصل على (٢، ٤)

س − ٤ كثير حدود متصل على (٤، ∞)

* عند س = ٢

١) د(٢) = ١٠ − ٩ = ١

٢) نها د(س) = ١
   س←٢⁻

نها د(س) = صفر
س←٢⁺

نها د(س) غير موجودة
س←٢

د غير متصل عند س = ٢

* عند س = ٤

١) د(٤) = صفر

٢) نها د(س) = نها د(س) = ٠
   س←٤⁻   س←٤⁺

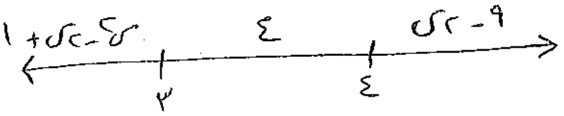
٣) د(٤) = نها د(س)
           س←٤

∴ د متصل عند س = ٤

∴ د متصل على ح − {٢}

تابع حل الأسئلة الوزارية

س٦ [س+١] = ٤ ، ٣ ≤ س < ٤



س٢−٢س+١ متصل على (−∞ ، ٣) كثير حدود

٤ اقتران ثابت متصل على (٣ ، ٤)

٩−٢س كثير حدود متصل على (٤ ، ∞)

* عند س = ٣

١) ق(٣) = ٤

٢) نهـا ق(س) (س ← ٣⁻) = ٩ − ٦ + ١ = ٤
نهـا ق(س) (س ← ٣⁺) = ٤
⟸ نهـا ق(س) (س ← ٣) = ٤

٣) نهـا ق(س) (س ← ٣) = ق(٣)

∴ ق متصل عند س = ٣.

* عند س = ٤

١) ق(٤) = ٩ − ٢ × ٤ = ١

٢) نهـا ق(س) (س ← ٤⁻) = ٤
نهـا ق(س) (س ← ٤⁺) = ٩ − ٨ = ١
نهـا ق(س) (س ← ٤) غير موجودة

∴ ق(س) غير متصل عند س = ٤

ق متصل على ح − {٤}.

س٧ ١) ق(١) = ٥ × ١ − ١ = ٤

٢) نهـا ق(س) (س ← ١) = نهـا (س ← ١) $\frac{س^٣ + س^٢ + ٢س − ٤}{س − ١}$

نهـا (س ← ١) $\frac{(\cancel{س − ١})(س^٢ + ٢س + ٤)}{\cancel{س − ١}}$ = ١ + ٢ + ٤ = ٧

باستخدام خوارزمية القسمة أو القسمة التركيبية.

٣) نهـا ق(س) (س ← ١) ≠ ق(١).

∴ ق(س) غير متصل عند س = ١

س٨ [س+٣] = ٥ ، ٢ ≤ س < ٣

ق(س) = { س٢ + ١ ، س ≤ ٢
٥ ، ٢ < س < ٣ }

١) ق(٢) = ٢٢ + ١ = ٥

٢) نهـا ق(س) (س ← ٢⁺) = ٥
نهـا ق(س) (س ← ٢⁻) = ٥
⟸ نهـا ق(س) (س ← ٢) = ٥.

٣) نهـا ق(س) (س ← ٢) = ق(٢).

∴ ق(س) متصل عند س = ٢.

تابع حل الأمثلة الوزارية.

$$\text{ه}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س} \ ، & \text{س} < 1 \\ 2\text{س} \ ، & \text{س} \geq 1 \end{cases}$$

$$\text{ل}(\text{س}) = (\text{م} + \text{ه})(\text{س}) = \begin{cases} 2 + 2\text{س} + \text{س}^2 \ ، & \text{س} < 1 \\ 3\text{س}^2 + 2\text{س} \ ، & \text{س} \geq 1 \end{cases}$$

1) $\text{ل}(1) = 3 + 2 = 5$.

2) $\lim\limits_{\text{س} \to 1^+} \text{ل}(\text{س}) = 3 + 2 = 5$

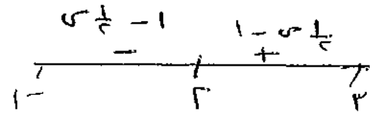
$\lim\limits_{\text{س} \to 1^-} \text{ل}(\text{س}) = 1 + 2 + 2 = 5$

$\Leftarrow \lim\limits_{\text{س} \to 1} \text{ل}(\text{س}) = 5$.

3) $\lim\limits_{\text{س} \to 1} \text{ل}(\text{س}) = \text{ل}(1)$

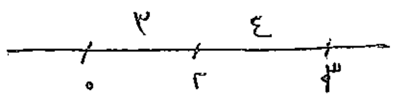
$\therefore$ $(\text{م}+\text{ه})(\text{س})$ متصل عند $\text{س} = 1$

حل: $\frac{\text{س}}{2} - 1 = 0 \Leftarrow \text{س} = 2$



$[\frac{1}{2}\text{س} + 3]$

$\text{ل} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$



$$\text{م}(\text{س}) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{2}\text{س} \ ، & -1 \leq \text{س} < 2 \\ \frac{1}{2}\text{س} - 1 \ ، & 2 \leq \text{س} < 3 \\ 4 \ ، & 3 \leq \text{س} \leq 4 \end{cases}$$

1) $\text{م}(3) = 4$

2) $\lim\limits_{\text{س} \to 3^+} \text{م}(\text{س}) = 4$

$\lim\limits_{\text{س} \to 3^-} \text{م}(\text{س}) = \frac{1}{2} \times 3 - 1 = \frac{1}{2}$

$\Leftarrow \lim\limits_{\text{س} \to 3} \text{م}(\text{س})$ غير موجودة

$\therefore$ $\text{م}(\text{س})$ غير متصل عند $\text{س} = 3$.

حل (11) $\text{م}(2) = 10$

2) $\lim\limits_{\text{س} \to 2^+} \text{م}(\text{س}) = \lim\limits_{\text{س} \to 2} \frac{(2\text{س}+1)^2 - 25}{\text{س} - 2}$

$= \lim\limits_{\text{س} \to 2^+} \frac{(2\text{س}+1-5)(2\text{س}+1+5)}{\text{س} - 2}$

$= \lim\limits_{\text{س} \to 2^+} \frac{(2\text{س}-4)(2\text{س}+6)}{\text{س}-2} = \lim\limits_{\text{س} \to 2^+} \frac{2\cancel{(\text{س}-2)}(2\text{س}+6)}{\cancel{\text{س}-2}}$

$= 2(2 \times 2 + 6) = 20$

$\lim\limits_{\text{س} \to 2^-} \text{م}(\text{س}) = 4 \times 2 + 2 = 10$

$\Leftarrow \lim\limits_{\text{س} \to 2} \text{م}(\text{س}) =$ غير موجودة .

$\therefore$ $\text{م}(\text{س})$ غير متصل عند $\text{س} = 2$.

تابع حل الأسئلة الوزارية:

س٢ $\text{ق}(0) = 11$

$$\underset{\text{س}\to 0^-}{\text{نها}}\ \text{ق}(\text{س}) = \underset{\text{س}\to 0^-}{\text{نها}}\ \frac{\text{جا}^2(\text{ب س}) - 9\,\text{س}^2}{\text{س جا } 5\text{س}} = 11$$

نقسم على س^2

$$\underset{\text{س}\to 0^-}{\text{نها}}\ \frac{\frac{\text{جا}^2(\text{ب س})}{\text{س}^2} - \frac{9\,\text{س}^2}{\text{س}^2}}{\frac{\text{س جا } 5\text{س}}{\text{س}^2}} = 11$$

$$\underset{\text{س}\to 0^-}{\text{نها}}\ \frac{\frac{\text{جا ب س}}{\text{س}} \times \frac{\text{جا ب س}}{\text{س}} - 9}{\frac{\text{جا } 5\text{س}}{\text{س}}} = 11$$

$$\frac{\text{ب} \times \text{ب} - 9}{5} = 11 \Leftarrow \text{ب}^2 - 9 = 55$$

$\Leftarrow \text{ب}^2 = 64 \Leftarrow \text{ب} = \mp 8$.

$$\underset{\text{س}\to 0^+}{\text{نها}}\ \frac{\text{س}^2 + (2 - \text{م})\text{س}}{\text{م س}} = 11$$

$$\underset{\text{س}\to 0^+}{\text{نها}}\ \frac{\cancel{\text{س}}(\text{س} + 2 - \text{م})}{\text{م}\cancel{\text{س}}} = 11$$

$$\frac{0 + 2 - \text{م}}{\text{م}} = 11$$

$2 - \text{م} = 11\text{م} \Leftarrow 12\text{م} = 2$

$\text{م} = \frac{2}{12}$

$\text{م} = \frac{1}{6}$

س١٣ ١) $\text{ق}(\frac{1}{3}) = -2$

٢) $\underset{\text{س}\to \frac{1}{3}^+}{\text{نها}}\ \text{ق}(\text{س}) = \underset{\text{س}\to \frac{1}{3}^+}{\text{نها}}\ -6\text{س} - [\text{س}]$

$= -6 \times \frac{1}{3} - 0 = -2$

$$\underset{\text{س}\to \frac{1}{3}^-}{\text{نها}}\ \text{ق}(\text{س}) = \underset{\text{س}\to \frac{1}{3}^-}{\text{نها}}\ \frac{9\text{س}^2 - 1}{\sqrt{1 - 6\text{س} + 9\text{س}^2}}$$

$$= \underset{\text{س}\to \frac{1}{3}^-}{\text{نها}}\ \frac{9\text{س}^2 - 1}{\sqrt{(1 - 3\text{س})^2}} = \underset{\text{س}\to \frac{1}{3}^-}{\text{نها}}\ \frac{9\text{س}^2 - 1}{|1 - 3\text{س}|}$$

$$= \underset{\text{س}\to \frac{1}{3}^-}{\text{نها}}\ \frac{\overset{-1}{\cancel{(3\text{س} - 1)}}(3\text{س} + 1)}{\cancel{1 - 3\text{س}}} = -2$$

$\therefore \underset{\text{س}\to \frac{1}{3}}{\text{نها}}\ \text{ق}(\text{س}) = -2$

٣) $\underset{\text{س}\to \frac{1}{3}}{\text{نها}}\ \text{ق}(\text{س}) = \text{ق}(\frac{1}{3}) \Leftarrow$ ق(س) متصل عند $\text{س} = \frac{1}{3}$.

س١٤ $[2\text{س} + 3] = 4 \quad ، \frac{1}{2} \leq \text{س} < 1$

$|1 - \text{س}^2| = \text{س}^2 - 1 \quad ، 1 < \text{س} < 2$

① $\text{ق}(1) = 2 \times 1 - 0 = 2$

② $$\underset{\text{س}\to 1^-}{\text{نها}}\ \text{ق}(\text{س}) = \underset{\text{س}\to 1^-}{\text{نها}}\ \frac{5 - \text{س}^2 - 4}{1 - \text{س}} = \underset{\text{س}\to 1^-}{\text{نها}}\ \frac{\cancel{(1 - \text{س})}(1 + \text{س})}{\cancel{1 - \text{س}}}$$

$= 1 + 1 = 2$

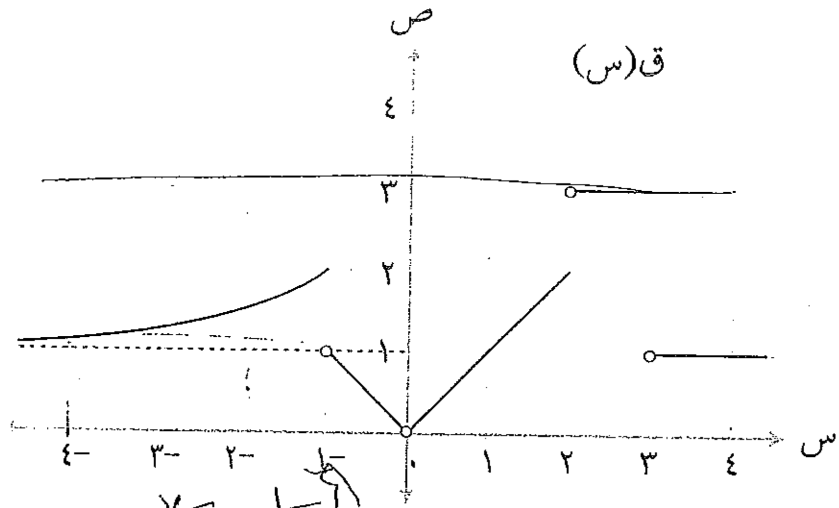
$\underset{\text{س}\to 1^+}{\text{نها}}\ \text{ق}(\text{س}) = \underset{\text{س}\to 1^+}{\text{نها}}\ 2\text{س} - (\text{س}^2 - 1) = 2 - 0 = 2$

$\underset{\text{س}\to 1}{\text{نها}}\ \text{ق}(\text{س}) = 2$

③ $\underset{\text{س}\to 1}{\text{نها}}\ \text{ق}(\text{س}) = \text{ق}(1)$

$\therefore$ ق(س) متصل عند $\text{س} = 1$.

١) اعتمادًا على الشكل (١-٢٣) الذي يمثل منحنى الاقتران ق، أجب عن الفروع:
أ، ب، جـ، د



الشكل (١-٢٣)

أ) ما قيمة كل من:

$\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـا}}\ ق(س)$ ، $\underset{س \leftarrow ٢^{+}}{\text{نهـا}}\ ق(س)$ ، $\underset{س \leftarrow \infty}{\text{نهـا}}\ ق(س)$ ، $\underset{س \leftarrow -\infty}{\text{نهـا}}\ ق(س)$.

ب) ما مجموعة قيم أ حيث $\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهـا}}\ ق(س) = ٣$ ؟ {٣، ٤}

جـ) ما مجموعة قيم ب حيث $\underset{س \leftarrow ب}{\text{نهـا}}\ ق(س)$ غير موجودة؟ {٣}

د) ما مجموعة قيم جـ حيث ق غير متصل عند س = جـ ؟

٢) جد كلاً من النهايات الآتية:

أ) $\underset{س \leftarrow ٤}{\text{نهـا}}\ \dfrac{٤٨ - ٣ س^{٢}}{س^{٣} - ٦٤}$

ب) $\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـا}}\ \dfrac{١}{س - ١}\left(\dfrac{١}{\sqrt{س}} - ١\right)$

جـ) $\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـا}}\ \dfrac{س^{٢}\sqrt{س} - ١}{س - ١}$

د) $\underset{س \leftarrow -\frac{١}{٢}}{\text{نهـا}}\ \dfrac{\sqrt{١ + ٤ س + ٤ س^{٢}}}{٢ س + ١}$

هـ) $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{|س - ٣| - |٢س - ٣|}{س}$ و) $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جتا}س - \text{جتا}٥س}{س\,\text{جا}٢س}$

ز) $\underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \dfrac{س - ١}{\text{جا}(س^{٣} - ١)}$ ح) $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{١ - \text{قا}س}{\text{ظا}^{٢}س}$

ط) $\underset{س \to ١٢٤}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt[٣]{س + ١} - ٥}{س - ١٢٤}$ ي) $\underset{س \to ٢^{+}}{\text{نهـا}} \dfrac{س - [س]}{س^{٢} - ٤}$

٣) إذا كانت $\underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \dfrac{ق(س) - ٦}{س - ١} = ٨$ ، فما قيمة $\underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \dfrac{س^{٢} + ٢س - ٣}{ق(س) - ٦}$ ؟

٤) جد كلًّا من النهايات الآتية:

أ) $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \dfrac{٩ - ٢س^{٣} - (٣ + س)^{٣}}{س^{٢} + س^{٣} - ١}$ ب) $\underset{س \to -\infty}{\text{نهـا}} \dfrac{٦ + س - س^{٤}}{(١ - س^{٢})^{٣}}$

جـ) $\underset{س \to -\infty}{\text{نهـا}} \dfrac{٩ - ٢س^{٥}}{٧ + س^{٤}}$ د) $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \left(\dfrac{-س^{٢}}{س + ٢} + \dfrac{٢س^{٢}}{٣س + ١}\right)$

٥) إذا كانت $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \dfrac{(١ + ٢س^{٢})^{٢}}{أس^{٢}(١ + س)^{ن}} = -٢$، فما قيمة كل من أ، ن؟

٦) إذا كان $د(س) = \begin{cases} \dfrac{\text{جا}^{٢}(ب\,س) - س^{٢}}{س\,\text{جا}\,٢س} & ، \quad -\dfrac{\pi}{٤} \leq س < ٠ \\ ٢ & ، \quad س = ٠ \\ \dfrac{س^{٢} + (١ - أ)\,س}{أس} & ، \quad ٠ < س \leq ٢ \end{cases}$

اقترانًا متصلا عند س = ٠ ، فجد قيم كل من أ ، ب.

٧) إذا كان ل (س) = $\begin{cases} \dfrac{\text{س}^{٢} - ٢\text{س} - ١٥}{٥\text{س} - \text{س}^{٢}} + \dfrac{٨}{٥} & ، \quad \text{س} > ٥ \\ \sqrt{٥ - \text{س}} & ، \quad \text{س} \leq ٥ \end{cases}$

فابحث في اتصال الاقتران ل على ح.

٨) إذا كان ع (س) = $\begin{cases} \left|٢\text{س} - ١\right| & ، \quad -١ \leq \text{س} \leq ١ \\ \left[\dfrac{١}{٢}\text{س} + ٢\right] & ، \quad ١ < \text{س} \leq ٣ \end{cases}$

فابحث في اتصال الاقتران ع على [−١، ٣] .

حل أسئلة المراجعة

س١ أ) $\underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}}\ \text{د(س)} = \text{صفر}$

$\underset{\text{س}\to 2^+}{\text{نها}}\ \text{د(س)} = 3$

ب) قيم أ $= (2, 3)$

جـ) قيم ب $= \{-1, 2, 3\}$.

د) قيم جـ $= \{-1, 0, 2, 3\}$.

س٢ أ) $\underset{\text{س}\to 4}{\text{نها}} \dfrac{48 - 3\text{س}^2}{\text{س}^3 - 64} = \dfrac{0}{0}$

$\underset{\text{س}\to 4}{\text{نها}} \dfrac{3\cancel{(4-\text{س})}^{-1}(4+\text{س})}{\cancel{(\text{س}-4)}(\text{س}^2+4\text{س}+16)} = \dfrac{-3\times 8}{48} = -\dfrac{1}{2}$

ب) $\underset{\text{س}\to 1}{\text{نها}} \dfrac{1}{\text{س}-1}\left(\dfrac{1}{\sqrt{\text{س}}} - 1\right) =$

$\underset{\text{س}\to 1}{\text{نها}} \dfrac{1}{\text{س}-1}\left(\dfrac{1-\sqrt{\text{س}}}{\sqrt{\text{س}}}\right) \times \dfrac{1+\sqrt{\text{س}}}{1+\sqrt{\text{س}}}$

$\underset{\text{س}\to 1}{\text{نها}} \dfrac{1}{\cancel{\text{س}-1}} \times \dfrac{\cancel{1-\text{س}}^{-1}}{\sqrt{\text{س}}(1+\sqrt{\text{س}})} = \dfrac{-1}{2}$

جـ) $\underset{\text{س}\to 1}{\text{نها}} \dfrac{\text{س}^2\sqrt{\text{س}} - 1}{\text{س} - 1} = \dfrac{0}{0}$

نضيف ونطرح س^2

$\underset{\text{س}\to 1}{\text{نها}} \dfrac{\text{س}^2\sqrt{\text{س}} - \text{س}^2}{\text{س}-1} + \underset{\text{س}\to 1}{\text{نها}} \dfrac{\text{س}^2 - 1}{\text{س}-1}$

$\underset{\text{س}\to 1}{\text{نها}} \dfrac{\text{س}^2(\sqrt{\text{س}} - 1)}{\text{س}-1} \times \dfrac{(\sqrt{\text{س}}+1)}{(\sqrt{\text{س}}+1)} + \underset{\text{س}\to 1}{\text{نها}} \dfrac{(\text{س}+1)(\text{س}-1)}{\text{س}-1}$

$\underset{\text{س}\to 1}{\text{نها}} \dfrac{\text{س}^2\cancel{(\text{س}-1)}}{(\sqrt{\text{س}}+1)\cancel{(\text{س}-1)}} + \underset{\text{س}\to 1}{\text{نها}} (\text{س}+1)$

$\underset{\text{س}\to 1}{\text{نها}} \dfrac{\text{س}^2}{\sqrt{\text{س}}+1} + (1+1)$

$\dfrac{1}{2} + 2 = \dfrac{5}{2}$.

د) $\underset{\text{س}\to -\frac{1}{2}}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt{1+4\text{س}+4\text{س}^2}}{2\text{س}+1} = \dfrac{0}{0}$

$\underset{\text{س}\to -\frac{1}{2}}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt{(1+2\text{س})(1+2\text{س})}}{2\text{س}+1} = \underset{\text{س}\to -\frac{1}{2}}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt{(1+2\text{س})^2}}{2\text{س}+1}$

$\underset{\text{س}\to -\frac{1}{2}}{\text{نها}} \dfrac{|1+2\text{س}|}{2\text{س}+1}$ نفيد التعريف $1+2\text{س} = 0$

$\text{س} = -\dfrac{1}{2}$

$-1-2\text{س}$ ، $1+2\text{س}$

$-$ ، $+$

$-\dfrac{1}{2}$

$\underset{\text{س}\to -\frac{1}{2}^+}{\text{نها}} \dfrac{2\text{س}+1}{1+2\text{س}} = 1$

$\underset{\text{س}\to -\frac{1}{2}^-}{\text{نها}} \dfrac{-(2\text{س}+1)}{1+2\text{س}} = -1$

$\Leftarrow \underset{\text{س}\to -\frac{1}{2}}{\text{نها}} \dfrac{|2\text{س}+1|}{1+2\text{س}} =$ غير موجودة.

هـ) $\underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}} \dfrac{|\text{س}-3| - |2\text{س}-3|}{\text{س}} = \dfrac{0}{0}$ نفيد التعريف

$\underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}} \dfrac{3-\text{س} - (3-2\text{س})}{\text{س}} = \underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}} \dfrac{3-\text{س}-3+2\text{س}}{\text{س}}$

$\underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}} \dfrac{\text{س}}{\text{س}} = \underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}}\ 1 = 1$

س٤ (و) $\lim\limits_{س \to ٠} \frac{جتاس - جتا٥س}{س\ جا٢س} = \frac{٠}{٠}$

$\because$ جتاس − جتا٥س =

$-٢\ جا\ \frac{س + ٥س}{٢}\ جا\ \frac{س - ٥س}{٢}$

$= -٢\ جا٣س\ جا(-٢س)$

$= ٢\ جا٣س\ جا٢س$

جا(−س) = −جاس

$\lim\limits_{س \to ٠} \frac{جتاس - جتا٥س}{س\ جا٢س} =$

$\lim\limits_{س \to ٠} \frac{٢جا٣س\ \cancel{جا٢س}}{س\ \cancel{جا٢س}} =$

$\lim\limits_{س \to ٠} \frac{٢\ جا٣س}{س} = ٢ \times ٣ = ٦$

(ز) $\lim\limits_{س \to ١} \frac{س - ١}{جا(س^٣ - ١)} = \frac{٠}{٠}$

$\lim\limits_{س \to ١} \frac{س - ١}{جا(س^٢ - ١)} \times \frac{(س^٢ + س + ١)}{(س^٢ + س + ١)} =$

$\lim\limits_{س \to ١} \frac{س^٣ - ١}{جا(س^٣ - ١)} \times \lim\limits_{س \to ١} \frac{١}{س^٢ + س + ١}$

$\lim\limits_{ص \to ٠} \frac{ص}{جاص} \times \frac{١}{٣}$

$١ \times \frac{١}{٣}$

ص = $س^٣ - ١$

س → ١ ، ص → ٠

(ح) $\lim\limits_{س \to ٠} \frac{١ - قاس}{ظا^٢س} = \frac{٠}{٠}$

$\lim\limits_{س \to ٠} \frac{١ - قاس}{ظا^٢س} \times \frac{١ + قاس}{١ + قاس}$ ،

$\lim\limits_{س \to ٠} \frac{١ - قا^٢س}{ظا^٢س} \times \lim\limits_{س \to ٠} \frac{١}{١ + قاس}$

$\lim\limits_{س \to ٠} \frac{-\cancel{ظا^٢س}}{\cancel{ظا^٢س}} \times \frac{١}{٢} = -\frac{١}{٢}$

(ط) $\lim\limits_{س \to ١٢٤} \frac{\sqrt[٣]{س + ١} - ٥}{س - ١٢٤} = \frac{٠}{٠}$

$\lim\limits_{س \to ١٢٤} \frac{\sqrt[٣]{س + ١} - ٥}{س - ١٢٤} \times \frac{\sqrt[٣]{س + ١}^٢ + ٥\sqrt[٣]{س + ١} + ٢٥}{\sqrt[٣]{س + ١}^٢ + ٥\sqrt[٣]{س + ١} + ٢٥}$

$\lim\limits_{س \to ١٢٤} \frac{\cancel{س + ١ - ١٢٥}}{٧٥ \times \cancel{(س - ١٢٤)}} = \frac{١}{٧٥}$.

(ي) $\lim\limits_{س \to ٢^+} \frac{س - [س]}{س^٢ - ٤} = \lim\limits_{س \to ٢^+} \frac{\cancel{س - ٢}}{\cancel{(س - ٢)}(س + ٢)}$

$\lim\limits_{س \to ٢^+} \frac{١}{س + ٢} = \frac{١}{٤}$.

$[٢^+] = ٢$

س٣: $\underset{س \leftarrow ١}{نها} \dfrac{ه(س) - ٦}{س - ١} = ٨$

$\underset{س \leftarrow ١}{نها} ه(س) - ٦ = صفر \Leftarrow$

$\underset{س \leftarrow ١}{نها} ه(س) = ٦$

$\underset{س \leftarrow ١}{نها} \dfrac{س^٢ + ٢س - ٣}{ه(س) - ٦} =$

$= \underset{س \leftarrow ١}{نها} \dfrac{(س - ١)(س + ٣)}{ه(س) - ٦}$

$\underset{س \leftarrow ١}{نها} \dfrac{س - ١}{ه(س) - ٦} \times \underset{س \leftarrow ١}{نها} (س + ٣)$

$\dfrac{١}{٨} \times ٤ = \dfrac{١}{٢}$.

س٤: د(س) متصل عند س = ٠ ⇐

$د(٠) = \underset{س \leftarrow ٠}{نها} د(س) = ٢$

$\underset{س \leftarrow ٠^+}{نها} \dfrac{س^٢ + (١ - أ)س}{أس} = \underset{س \leftarrow ٠^+}{نها} \dfrac{\cancel{س}(س + ١ - أ)}{أ\cancel{س}}$

$\underset{س \leftarrow ٠^+}{نها} \dfrac{س + ١ - أ}{أ} = \dfrac{١ - أ}{أ}$.

$\underset{س \leftarrow ٠^-}{نها} \dfrac{جا^٢(ب س) - س^٢}{س جا ٢س} =$

$\underset{س \leftarrow ٠^-}{نها} \dfrac{جا^٢(ب س)}{س جا ٢س} - \underset{س \leftarrow ٠^-}{نها} \dfrac{س^٢}{س جا ٢س}$

$\underset{س \leftarrow ٠^-}{نها} \dfrac{جا ب س}{س} \times \dfrac{جا ب س}{جا ٢س} - \underset{س \leftarrow ٠^-}{نها} \dfrac{س}{جا ٢س}$

$ب \times \dfrac{ب}{٢} - \dfrac{١}{٢}$

$\dfrac{ب^٢}{٢} - \dfrac{١}{٢}$

بما أن د(س) متصل ⇐

$\underset{س \leftarrow ٠^+}{نها} د(س) = \underset{س \leftarrow ٠^-}{نها} د(س) = د(٠)$

$\dfrac{١ - أ}{أ} = \dfrac{ب^٢ - ١}{٢} = ٢$

$\dfrac{١ - أ}{أ} = ٢ \Leftarrow ٢أ = ١ - أ \Leftarrow أ = \dfrac{١}{٣}$

$\dfrac{ب^٢ - ١}{٢} = ٢ \Leftarrow ب^٢ - ١ = ٤ \Leftarrow ب^٢ = ٥$

$\Leftarrow ب = \pm \sqrt{٥}$.

س٧: $\dfrac{س^٢ - ٢س - ١٥}{٥س - س^٢} + \dfrac{٨}{٥}$ متصل لأنه معرف على الفترة س > ٥ .

دالة نسبية أصفار المقام لا تنتمي للفترة .

$\sqrt{٥ - س}$ متصل لأنه معرف على الفترة س < ٥ ،

نقاط التحول

١) ل(٥) = ٠

٢) $\underset{س \leftarrow ٥^+}{نها} ل(س) = \underset{س \leftarrow ٥^+}{نها} \dfrac{س^٢ - ٢س - ١٥}{٥س - س^٢} + \dfrac{٨}{٥}$

$= \underset{س \leftarrow ٥^+}{نها} \dfrac{(س + ٣)\cancel{(س - ٥)}}{س\cancel{(٥ - س)}} + \dfrac{٨}{٥}$

$= \dfrac{-٨}{٥} + \dfrac{٨}{٥} = صفر$

$\underset{س \leftarrow ٥^-}{نها} \sqrt{٥ - س} = صفر$

$\underset{س \leftarrow ٥}{نها} \sqrt{٥ - س} = صفر$

٣) $\underset{س \leftarrow ٥}{نها} ل(س) = ل(٥)$

∴ ل(س) متصل عند س = ٥

∴ ل(س) متصل على ح .

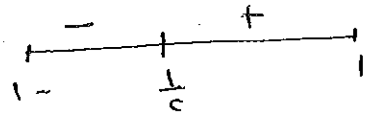
مراجعة :

س٨)

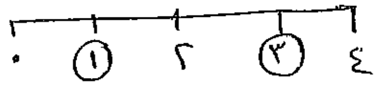
$$ع(س) = \begin{cases} ١ - ٢س & ، -١ \leqslant س \leqslant \frac{١}{٢} \\ ٢س - ١ & ، \frac{١}{٢} \leqslant س \leqslant ١ \\ ٢ & ، ١ < س < ٢ \\ ٣ & ، ٢ \leqslant س \leqslant ٣ \end{cases}$$

$|٢س - ١| \leftarrow ٢س - ١ = ٠$

$س = \frac{١}{٢}$



$[\frac{١}{٢}س + ٢] \leftarrow ل = ٢$



القواعد

١ − ٢س كثير حدود متصل على الفترة $(-١ ، \frac{١}{٢})$

٢س − ١ 〃 〃 〃 〃 $(\frac{١}{٢} ، ١)$

٢ ثابت متصل على الفترة (١ ، ٢)

٣ ثابت متصل على الفترة (٢ ، ٣)

نقاط التحول

$\boxed{عند\ س = \frac{١}{٢}}$

١) $ع(\frac{١}{٢}) = ٠$

٢) $\lim_{س \to \frac{١}{٢}^+} ع(س) = صفر$

$\lim_{س \to \frac{١}{٢}^-} ع(س) = صفر$ $\Leftarrow \lim_{س \to \frac{١}{٢}} ع(س) = صفر$

٣) $\lim_{س \to \frac{١}{٢}} ع(س) = ع(\frac{١}{٢})$

ع متصل عند $س = \frac{١}{٢}$

$\boxed{عند\ س = ١}$

١) ع(١) = ١

٢) $\lim_{س \to ١^+} ع(س) = ٢$

$\lim_{س \to ١^-} ع(س) = ١$ $\Leftarrow \lim_{س \to ١} ع(س)$ غير موجودة

ع(س) غير متصل عند س = ١ .

عند س = ٢

١) ع(٢) = ٣

٢) $\lim_{س \to ٢^+} ع(س) = ٣$

$\lim_{س \to ٢^-} ع(س) = ٢$ $\Leftarrow \lim_{س \to ٢} ع(س)$ غير موجودة

ع(س) غير متصل عند س = ١ .

$\boxed{عند\ س = ٢}$

١) ع(٢) = ٣

٢) $\lim_{س \to ٢^+} ع(س) = ٣$

$\lim_{س \to ٢^-} ع(س) = ٢$ $\leftarrow \lim_{س \to ٢} ع(س)$ غير موجودة

ع(س) غير متصل عند س = ٢

الأطراف عند س = −١

١) ~~ع(−١) = ٣~~ ٢) $\lim_{س \to -١^+} ١ - ٢س = ٣$

٢) $\lim_{س \to -١^+} ١ - ٢س = ع(-١)$ ∴ متصل عند س = −١

عند س = ٣

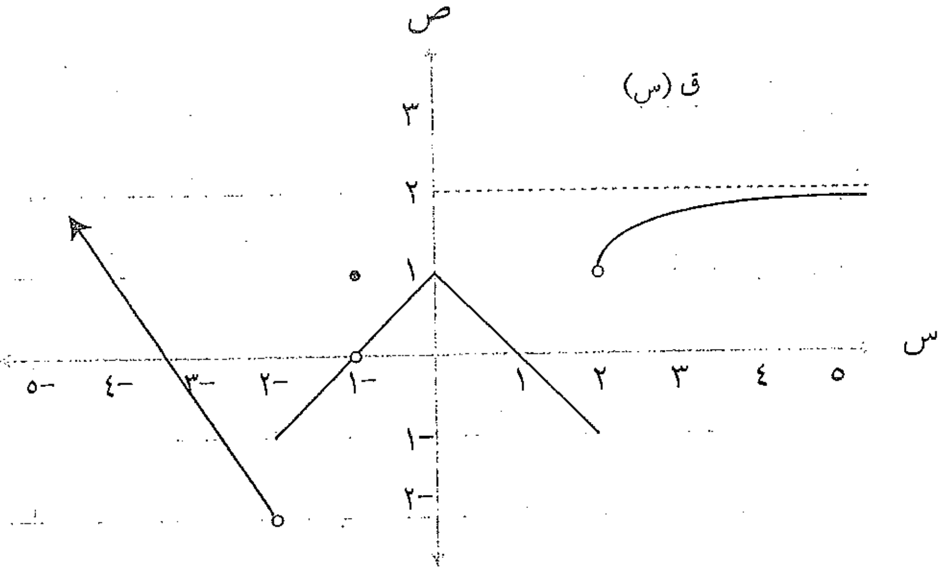
١) ع(٣) = ٣   ٢) $\lim_{س \to ٣^-} ٣ = ٣$

٣) $\lim_{س \to ٣^-} ع(س) = ع(٣)$ $\Leftarrow$ متصل عند س = ٣

∴ ع(س) متصل على [−١ ، ٣] − {١ ، ٢} .

اختبار ذاتي

١) اعتمادًا على الشكل (١-٢٤) الذي يمثل منحنى الاقتران ق، أكمل كلًّا من الفقرات : أ، ب، جـ، د، هـ، و. لتحصل على عبارة صحيحة في كل حالة:



الشكل (١-٢٤)

أ) نهـــــا ق(س) = ...
س ← -٢ $^-$

ب) نهـــــا ق(س) = ...
س ← -١

جـ) نهـــــا ق(س) = ...
س ← ∞

د) نهـــــا ق(س) = ...
س ← -∞

هـ) مجموعة قيم أ حيث ق غير متصل عند س = أ هي ....

و) مجموعة قيم ب حيث نهـــــا ق(س) = ١ هي ....
س ← ب $^+$

٢) يتكون هذا السؤال من ٦ فقرات، لكل منها أربع إجابات، إجابة واحدة منها صحيحة، اختر الإجابة الصحيحة.

(١) إذا كانت $\lim\limits_{س \leftarrow -٢} ق(س) = -١$ ، $\lim\limits_{س \leftarrow -٢} ع(س) = ٩$

فإن $\lim\limits_{س \leftarrow -٢} \left(\frac{س - ١}{ع(س) - ٣} - \sqrt[٣]{ق(س) - ٧} \right)$ تساوي:

أ) $-٢,٥$ ب) -٢ جـ) $١,٥$ د) ٢

(٢) إذا كانت $\lim\limits_{س \leftarrow ٠} \frac{هـ(س) + ٥}{س} = \frac{١}{٢}$ ، وكان هـ (س) كثير حدود

فإن $\lim\limits_{س \leftarrow ٠} \left(هـ(س) - ٥ \right)$ تساوي:

أ) -١٠ ب) $\frac{-١}{٢}$ جـ) صفر د) ١٠

(٣) $\lim\limits_{س \leftarrow ٢} \frac{(٢س + ١)^٣ - ١٢٥}{٢ + س^٢(س - ٢) - س}$ هي:

أ) -٥٠ ب) ٥٠ جـ) ١٥٠ د) غير موجودة

(٤) $\lim\limits_{س \leftarrow -١} \frac{١}{س + ١} \left(\frac{١}{\sqrt[٣]{٢س + ١}} + ١ \right)$ هي:

أ) $\frac{١}{٣}$ ب) $\frac{٢}{٣}$ جـ) $\frac{-٢}{٣}$ د) غير موجودة

(٥) $\lim\limits_{س \leftarrow ٠^-} \frac{١ - ٣س جاس - جتا ٢س}{س ظا ٢س}$ تساوي:

أ) $\frac{٣}{٢}$ ب) $\frac{-٣}{٢}$ جـ) $\frac{١}{٢}$ د) $-\frac{١}{٢}$

(٦) إذا كانت $\lim\limits_{س \leftarrow \infty} \frac{٣ + ٢س^ن - أس^٥}{١ - ٢س^٤} = -١$ ، فإن (أ ،ن) يساوي:

أ) (٥ ، ٠) ب) (٠ ، ٤) جـ) (-١ ، ٤) د) (٠ ، -٤)

٣) احسب كلًّا مما يأتي:

أ) $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{١ - \text{ظتا س}}{\text{قتا س}}$

ب) $\underset{\text{س} \leftarrow ١^{-}}{\text{نهـا}} \dfrac{\left|\dfrac{١}{\text{س}+٣}\right| - \dfrac{١}{٤}}{|\text{س}-١|}$

جـ) $\underset{\text{س} \leftarrow -\infty}{\text{نهـا}} \left(\left(\dfrac{١+٢\text{س}}{\text{س}+٣}\right)^{-٣} - \dfrac{٩+\text{س}^٢}{\text{س}^٢-\text{س}^٣} \right)$

٤) ليكن $\text{ق(س)} = \begin{cases} [٣\text{س}]+١ & ، \; -١ \leq \text{س} \leq ٠ \\ ٣\text{س}^٢+\text{س} & ، \; ٠ < \text{س} \leq ٤ \end{cases}$

فابحث في اتصال الاقتران ق عند كل من: س $= -\dfrac{١}{٣}$ ، س $= ٠$

٥) ليكن $\text{د(س)} = \begin{cases} \dfrac{\frac{١}{٢}\text{س}^٢-\text{س}}{\text{س}-٢} & ، \; \text{س} < ٢ \\ \dfrac{٥\text{س}-٨}{\text{س}} & ، \; \text{س} \geq ٢ \end{cases}$

فابحث في اتصال الاقتران د على ح.

حل الاختبار الذاتي

س١

أ) $\lim_{س\to -2} م(س) = -2$

ب) $\lim_{س\to 1} م(س) = \text{صفر}$

هـ) مج أ $= \{-2 ، -1 ، 2\}$.

و) مج ب $= \{-4 ، 0 ، 2\}$

س٢

(١) $\lim_{س\to 2}\left(\frac{س-1}{ع(س)-3} - \sqrt[3]{م(س)-7}\right) =$

$$\frac{1-4}{9-3} - \sqrt[3]{-1-7}$$

$$-\frac{1}{2} + 2 = 1,5 \quad (د)$$

(٢) بما أن النهاية موجودة والمقام = صفر

⇐ البسط = صفر

هـ(١) + ٥ = صفر ⇐ هـ(١) = -٥

$$\lim_{س\to 1}(هـ(س) - 5) = -5 - 5 = -10 \quad (أ)$$

(٣) ناتج التعويض $= \frac{0}{0}$

$$\lim_{س\to 2}\frac{(2س+1-5)\left((2س+1)^2 + 5(2س+1) + 25\right)}{2 + س^3 - 2س^2 - س}$$

$$\lim_{س\to 2}\frac{2\cancel{(س-2)}\left((2س+1)^2 + 5(2س+1) + 25\right)}{\cancel{(س-2)}(س^2-1)}$$

بالقسمة المطولة أو التركيب

$$= \frac{2\times 75}{3}$$

$$= \frac{150}{3} = 50$$

(٤) $\lim_{س\to -1}\frac{1}{س+1}\left(\frac{\sqrt[3]{2س+1}^{\,2} + \sqrt[3]{2س+1} - 1}{\sqrt[3]{2س+1}^{\,2} + \sqrt[3]{2س+1} - 1}\times\frac{\sqrt[3]{2س+1}+1}{\sqrt[3]{2س+1}^{\,2}}\right)$

$$\lim_{س\to -1}\frac{1}{س+1}\left(\frac{2س+1+1}{\sqrt[3]{2س+1}^{\,2}}\times\frac{1}{3}\right)$$

$$\lim_{س\to -1}\frac{1}{\cancel{س+1}}\left(\frac{\cancel{2س+2}}{\sqrt[3]{2س+1}^{\,2}}\times\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3} \quad (د)$$

(٥) $\lim_{س\to 0}\frac{1 - 3س\,جاس - جتا2س}{س\,ظا2س} = \frac{0}{0}$

$$\lim_{س\to 0}\frac{1 - 3س\,جاس - (1 - 2جا^2س)}{س\,ظا2س}$$

$$\lim_{س\to 0}\frac{\cancel{1} - 3س\,جاس \cancel{-1} + 2جا^2س}{س\,ظا2س}$$

$$\lim_{س\to 0}\frac{-3\cancel{س}\,جاس}{\cancel{س}\,ظا2س} + \frac{2جا^2س}{س\,ظا2س}$$

$$\lim_{س\to 0}\frac{-3جاس}{ظا2س} + \lim_{س\to 0}\frac{2جاس}{س}\times\frac{جاس}{ظا2س}$$

$$(د)\quad -\frac{3}{2} + 2\times\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

جتا٢س = ١ - ٢جا^٢س

س٣ (أ) $\lim\limits_{س \to ٠} \dfrac{١ - \text{ظتا}\,س}{\text{قتا}\,س} = \dfrac{٠}{٠}$

$\lim\limits_{س \to ٠} \dfrac{١ - \dfrac{\text{جتا}\,س}{\text{جا}\,س}}{\dfrac{١}{\text{جا}\,س}}$

$\lim\limits_{س \to ٠} \text{جا}\,س \left(١ - \dfrac{\text{جتا}\,س}{\text{جا}\,س}\right)$

$\lim\limits_{س \to ٠} \left(\text{جا}\,س - \text{جتا}\,س\right) = ٠ - ١$
$= -١$

(ب) $\lim\limits_{س \to ١^-} \dfrac{\left|\dfrac{١}{س+٣}\right| - \dfrac{١}{٤}}{|س - ١|}$

نعيد التعريف

$\left|\dfrac{١}{س+٣}\right| = \dfrac{١}{س+٣}$ عند $س = ١$

$|س - ١| = ١ - س$ عند $س \to ١^-$

$\lim\limits_{س \to ١^-} \dfrac{\dfrac{١}{س+٣} - \dfrac{١}{٤}}{١ - س}$

$\lim\limits_{س \to ١^-} \dfrac{٤ - س - ٣}{(س+٣)(٤)} \times \dfrac{١}{١ - س}$

$\lim\limits_{س \to ١^-} \dfrac{\cancel{١ - س}}{٤(س+٣)} \times \dfrac{١}{\cancel{١ - س}}$

$= \dfrac{١}{٤ \times ٤} = \dfrac{١}{١٦}$

س٤ $[٣س]$

$ل = \dfrac{١}{٣}$

$-١ \quad -\dfrac{٢}{٣} \quad -\dfrac{١}{٣} \quad ٠$

$[٣س] = \begin{cases} -٣ ، & -١ \le س < -\dfrac{٢}{٣} \\ -٢ ، & -\dfrac{٢}{٣} \le س < -\dfrac{١}{٣} \\ -١ ، & -\dfrac{١}{٣} \le س < ٠ \end{cases}$

$د(س) = \begin{cases} -٢ ، & -١ \le س < -\dfrac{٢}{٣} \\ -١ ، & -\dfrac{٢}{٣} \le س < -\dfrac{١}{٣} \\ \text{صفر} ، & -\dfrac{١}{٣} \le س < ٠ \\ ١ ، & س = \text{صفر} \\ ٣س^٢ + س ، & ٠ < س \le ٤ \end{cases}$

$\boxed{س = -\dfrac{١}{٣}}$

١) $د(-\dfrac{١}{٣}) = \text{صفر}$

٢) $\begin{cases} \lim\limits_{س \to -\frac{١}{٣}^+} د(س) = \text{صفر} \\ \lim\limits_{س \to -\frac{١}{٣}^-} د(س) = -١ \end{cases} \Longleftarrow \lim\limits_{س \to -\frac{١}{٣}} د(س)$ غير موجودة

∴ د غير متصل عند $س = -\dfrac{١}{٣}$

$\boxed{س = \text{صفر}}$

١) $د(٠) = ١$

٢) $\begin{cases} \lim\limits_{س \to ٠^-} د(س) = ٠ \\ \lim\limits_{س \to ٠^+} د(س) = ٠ \end{cases} \Longleftarrow \lim\limits_{س \to ٠} د(س) = \text{صفر}$

٣) $د(٠) \ne \lim\limits_{س \to ٠} د(س)$ ∴ د غير متصل عند س = ٠

س٥

القواعد

$\frac{\frac{1}{2}س^2 - س}{س - 2}$ متصل لأنه اقتران نسبي معرف لكل $س < 2$ وأصفار المقام لا تنتمي للفترة.

$\frac{5س - 8}{س}$ اقتران نسبي متصل على الفترة لكل $س > 2$ وصفر المقام لا ينتمي للفترة.

التحول

$س = 2$

١) $ق(2) = \frac{5 \times 2 - 8}{2} = 1$

٢) $\lim_{س \to 2^+} \frac{5س - 8}{س} = 1$

$\lim_{س \to 2^-} \frac{\frac{1}{2}س^2 - س}{س - 2} =$ اخراج العامل المشترك

$\lim_{س \to 2^-} \frac{\frac{1}{2}س\cancel{(س - 2)}}{\cancel{س - 2}} = 1$

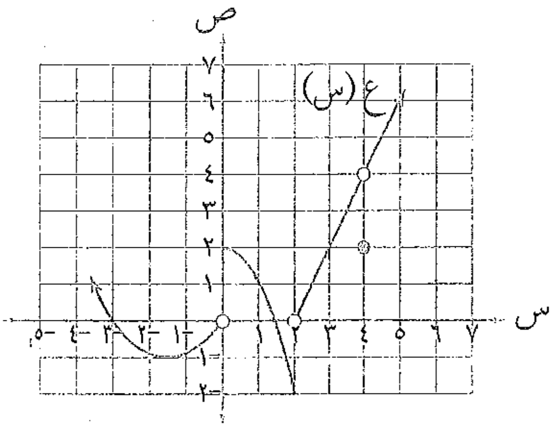
$\Leftarrow \lim_{س \to 2} ق(س) = 1$

٣) $\lim_{س \to 2} ق(س) = ق(2)$.

∴ ق(س) متصل عند $س = 2$

∴ ق(س) متصل على ح.

١) معتمدًا الشكل(١ – ٣٠)، الذي يمثل منحنى الاقتران ع،جد كلًّا مما يأتي:



الشكل (١ – ٣٠)

أ) $\lim_{س \leftarrow ^{+}٠}$ ع(س)

ب) $\lim_{س \leftarrow ^{-}٢}$ ع(س)

جـ) $\lim_{س \leftarrow ٣}$ ع(س)

د) $\lim_{س \leftarrow ٤}$ ع(س)

هـ) مجموعة قيم أ حيث $\lim_{س \leftarrow أ}$ ع(س) غير موجودة.

و) مجموعة قيم ب حيث ع اقتران غير متصل عند س= ب .

٢) إذا كانت $\lim_{س \leftarrow ٣}$ ق(س) = ٤ ، ق(٣) = ٦ ، فجد قيمة:

$$\lim_{س \leftarrow ١} \left(ق^{٢} (٢ س+١) – س +٢ \right)$$

٣) إذا كان ق(س)= $\begin{cases} \dfrac{٣ – س}{|س – ٣|} & ،\quad س > ٣ \\ جـ س^{٢} – ٤ & ،\quad س < ٣ \end{cases}$

وكانت $\lim_{س \leftarrow ٣}$ ق(س) موجودة ، فما قيمة الثابت جـ؟

٤) إذا كان ق(س) = $\dfrac{س^{٢} + (أ+١٣) س + أ}{س – ٢}$ ، فجد قيمة الثابت أ التي تجعل

$\lim_{س \leftarrow ٢}$ ق(س) موجودة.

٥) إذا كان ق(س) = $\begin{cases} \dfrac{|س^٢ - ٤س - ٥|}{|س - ٥|} &، س > ٥ \\ أ\ جتا \dfrac{\pi}{٥}س + ٥ &، س < ٥ \end{cases}$

وكانت $\lim\limits_{س \leftarrow ٥}$ ق(س) موجودة ، فجد قيمة الثابت أ.

٦) جد كلًّا من النهايات الآتية:

أ) $\lim\limits_{س \leftarrow ٠} \dfrac{س - جا\ س}{\sqrt{١ - جتا\ ٢س}}$

ب) $\lim\limits_{س \leftarrow ٠} \dfrac{س + جا\ ٢س}{٣س}$

جـ) $\lim\limits_{س \leftarrow ١} \dfrac{١}{س - ١} \left(\dfrac{١}{\sqrt{س}} - ١ \right)$

د) $\lim\limits_{س \leftarrow ٣} \dfrac{س^٢ - ٣س}{س - \sqrt{س + ١} - ١}$

هـ) $\lim\limits_{س \leftarrow -٣} \dfrac{\dfrac{١}{س} + \dfrac{١}{٣}}{س^٢ + ٢س - ٣}$

و) $\lim\limits_{س \leftarrow ٤} \dfrac{\sqrt{س^٣} - ٢|س|}{٢س^٢ - ٥س - ١٢}$

ز) $\lim\limits_{س \leftarrow ٠} \dfrac{س^٢ + جا\ ٢س}{٣س}$

ح) $\lim\limits_{س \leftarrow \frac{\pi}{٦}} \dfrac{جتا\ س - \sqrt{٣}\ جا\ س}{٦\ س - \pi}$

ط) $\lim\limits_{س \leftarrow ٠} \dfrac{قا٢س - ١}{س^٢}$

ي) $\lim\limits_{هـ \leftarrow ٠} \dfrac{\dfrac{١}{٢} - جتا(\dfrac{\pi}{٣} + هـ)}{هـ}$

ك) $\lim\limits_{س \leftarrow ٠} \dfrac{جتا\ ٣س - جتا\ ٥س}{٢\ س^٢}$

٧) إذا كانت $\lim\limits_{س \leftarrow ٠} \dfrac{٤س^٢ - جا\ ب\ س}{ب\ س - ظا\ ٤س} = \dfrac{١}{٤}$ ، فجد قيمة الثابت ب.

٨) إذا كان ق(س) = $\begin{cases} \dfrac{|\text{س}^{٢}-٤|}{\text{س}-٢} & ، \ \text{س} \neq ٢ \\ ٢+\text{س} & ، \ \text{س} = ٢ \end{cases}$

فابحث في اتصال الاقتران ق عند س= ٢

٩) إذا كا ن ع(س) = $\begin{cases} \left|\dfrac{\text{س}}{٢} - ١\right| & ، \ -١ \leq \text{س} < ٣ \\ [٠,٥\text{س} + ٣] & ، \ ٣ \leq \text{س} < ٤ \end{cases}$

فابحث في اتصال الاقتران ع عند س= ٣

١٠) إذا كان ل(س) = $\begin{cases} \dfrac{٩\text{س}^{٢} - ١}{\sqrt{١ - ٦\text{س} + ٩\text{س}^{٢}}} & ، \ \dfrac{-١}{٣} < \text{س} < \dfrac{١}{٣} \\ -٢ & ، \ \text{س} = \dfrac{١}{٣} \\ -٦\text{س} - [\text{س}] & ، \ \dfrac{١}{٣} < \text{س} < \dfrac{٤}{٣} \end{cases}$

فابحث في اتصال الاقتران ل عند س = $\dfrac{١}{٣}$

١١) ابحث في اتصال الاقتران ع(س) = $\sqrt{[\text{س}] + \text{س}}$ على الفترة (١، ٢] .

١٢) إذا كان هـ(س) = $\begin{cases} \text{س}^{٣} & ، \ \text{س} < ١ \\ ٢\text{س}\sqrt{\text{س}} - ١ & ، \ \text{س} \geq ١ \end{cases}$

فابحث في اتصال الاقتران هـ لجميع قيم س الحقيقية.

١٣) إذا كان ق(س) = $\begin{cases} \dfrac{س^٢ - ١}{س + ١} & ، \quad -٢ \leq س < -١ \\ س[س] & ، \quad -١ \leq س < ١ \end{cases}$

فابحث في اتصال الاقتران ق على الفترة [−٢، ١).

١٤) إذا كان ل(س) = $\dfrac{س^٢ - ١}{س + ٢}$ ، هـ(س) = [س] ، فابحث في اتصال الاقتران ل × هـ على الفترة [٠، ٢]

١٥) يتكون هذا السؤال من (١٠) فقرات، كل فقرة لها أربعة بدائل مختلفة، واحد منها فقط صحيح، ضع دائرة حول رمز البديل الصحيح في ما يأتي:

(١) إذا كانت $\lim\limits_{س \leftarrow ٣}$ ق(س) = ٤ ، ق(٣) = ٦، فما قيمة $\lim\limits_{س \leftarrow ١}$ (ق^٢ (٢س+١) − س+٧)؟

أ) ١٧ ب) ١٣ جـ) ٢٠ د) ٣٧

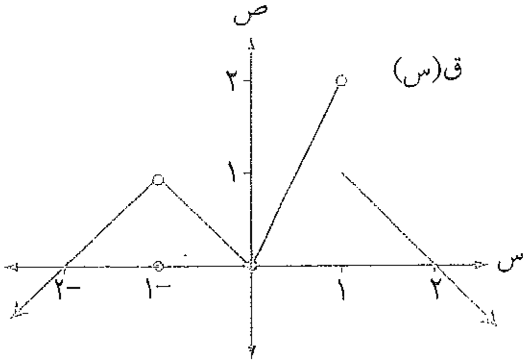
(٢) إذا كان ق اقترانًا متصلًا عند س=٤ ، وكان ٣ق(٤)=٦، وكانت $\lim\limits_{س \leftarrow ^{+}٤}$ ق(س)=٤ب، فإنَّ قيمة الثابت ب تساوي:

أ) $\frac{١}{٣}$ ب) ٢ جـ) $\frac{١}{٢}$ د) −٢

(٣) إذا كان ق اقترانَ كثير حدود ، وكانت $\lim\limits_{س \leftarrow ٢} \dfrac{ق(س)}{س}$ = ٣ ، فإنَّ $\lim\limits_{س \leftarrow ٢} \dfrac{ق^٢(س)}{س}$ تساوي:

أ) ٩ ب) ١٨ جـ) ٦ د) ٣٦

(٤) معتمدًا الشكل(١-٣١) الذي يمثل منحنى الاقتران ق المعرّف على مجموعة الأعداد الحقيقية ح، فإنَّ مجموعة قيم أ حيث $\underset{\text{س}\leftarrow\text{أ}}{\text{نهــا}}$ ق(س) = صفرًا هي:



الشكل (١-٣١)

أ) {−٢ ، ٠}

ب) {٠}

جـ) {٠ ، ٢}

د) {−٢ ، ٠ ، ٢}

(٥) $\underset{\text{س}\leftarrow -\text{٢}}{\text{نهــا}} \dfrac{\text{٤} - \text{س}^{\text{٢}}}{\text{٢} - \text{س}}$ تساوي:

أ) −١ ب) صفر جـ) −٣ د) ٣

(٦) $\underset{\text{س}\leftarrow \text{٠}}{\text{نهــا}} \dfrac{\text{٦س}^{\text{٤}} + \text{١٨س}^{\text{٢}}}{\text{٢س}^{\text{٢}} - \text{٣س}^{\text{٣}}}$ تساوي:

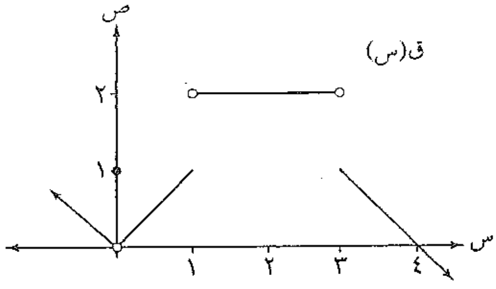
أ) −٦ ب) −٢ جـ) ٣ د) ٩

(٧) إذا كان ق اقترانًا متصلًا عند س= ١ ، وكان ق(١) = ٤ ، فإنَّ

$\underset{\text{س}\leftarrow \text{١}^{+}}{\text{نهــا}} \left(\dfrac{|\text{س} - \text{١}|}{\text{س} - \text{١}} + \text{ق(س)} \right)$ تساوي:

أ) ٣ ب) ١ جـ) ٥ د) غير موجودة

(٨) معتمدًا الشكل (١-٣٢) الذي يمثل منحنى الاقتران ق المعرف على ح، ما مجموعة قيم أ التي تجعل $\underset{\text{س} \leftarrow \text{أ}}{\text{نهـا}}$ ق(س) غير موجودة؟



الشكل (١-٣٢)

أ) {٠، ١، ٣}   ب) {١، ٣، ٤}   جـ) {٠، ١، ٣، ٤}   د) {١، ٣}

(٩) إذا كان ل(س)=
$$\begin{cases} \text{٢ جتا}^{\text{٢}}\text{س} & \text{، س} < \frac{\pi}{\text{٢}} \\ \text{أ س}^{\text{٢}} + \pi^{\text{٢}} & \text{، س} \geq \frac{\pi}{\text{٢}} \end{cases}$$

فإنَّ قيمة أ التي تجعل الاقتران ل متصلًا عند س= $\frac{\pi}{\text{٢}}$ هي:

أ) ‎-٢   ب) صفر   جـ) ‎-٤   د) ٤

(١٠) إذا كان ق(س)=
$$\begin{cases} \text{٣} & \text{، س = ١} \\ [\text{س}] + \text{٥} & \text{، ١} < \text{س} < \text{٢} \\ \text{٤} & \text{، س = ٢} \end{cases}$$

فإنَّ الاقتران ق متصل على الفترة:

أ) [١ ، ٢]   ب) (١، ٢)   جـ) [١ ، ٢)   د) (١ ، ٢]

أسئلة الوحدة | الوحدة الأولى — النهايات والاتصال | المنهاج الجديد (1)

س١ أ) نهـا ع(س) = ٢ ، س ← ٠+

ب) نهـا ع(س) = -٢ ، س ← -٢

جـ) نهـا ع(س) = ٢ ، س ← ٣

د) نهـا ع(س) = ٤ ، س ← ٤

هـ) {٠ ، ٢}

و) {٠ ، ٢ ، ٤} .

س٢ ص = ٢س + ١ ، س ← ١ ، ص ← ٣

نهـا ق²(ص) (ص ← ٣) + نهـا (-س + ٢) (س ← ١)

(نهـا ق(ص))² (ص ← ٣) + -١ + ٢

٤² + ١

١٦ + ١ = ١٧

س٣ ق(س) = { (س - ٣)/(٣ - س) ، س > ٣ ؛ جـس² - ٤ ، س ≤ ٣ }

نهـا ق(س) (س ← ٣+) = نهـا ق(س) (س ← ٣-)

نهـا (س - ٣)/(٣ - س) (س ← ٣+) = ٩جـ - ٤

-١ = ٩جـ - ٤

٣/٩ = ٩جـ/٩ ⟸ جـ = ١/٣

س٤ لأن النهاية موجودة وتعويض المقام = صفر فيكون تعويض البسط = صفر.

٢² + (أ + ١٣) × ٢ + أ = صفر

٤ + ٢أ + ٢٦ + أ = صفر

٣٠ + ٣أ = صفر ⟸ ٣أ/٣ = -٣٠/٣

أ = -١٠

س٥ نهـا ق(س) (س ← ٥+) = نهـا |س² - ٤س - ٥| / |س - ٥| (س ← ٥+)

نهـا (س ← ٥+) ~~|س - ٥|~~ × |س + ١| / ~~|س - ٥|~~ = |٥ + ١| = ٦

نهـا ق(س) (س ← ٥-) = أ جتا π + ٥

= أ × -١ + ٥ = -أ + ٥

نهـا ق(س) (س ← ٥-) = نهـا ق(س) (س ← ٥+)

-أ + ٥ = ٦ ⟸ -أ = ١

أ = -١

س٦ أ) فكرة موجود في التمارين صفحة ٤٨.

ب) نهـا (س + جا٢س)/(٣س) (س ← ٠) = نهـا (س/(٣س) + جا٢س/(٣س)) (س ← ٠)

= ١/٣ + ٢/٣ = ٣/٣ = ١

يمكن حل السؤال بقسمة كل حد على س

الوحدة الأولى

المنهاج الجديد (٢) — النهايات والاتصال — أسئلة الوحدة

س٦ ج) $\underset{س \to 1}{\text{نها}} \frac{1}{س-1}\left(\frac{1}{\sqrt{س}} - 1\right) =$

$\underset{س \to 1}{\text{نها}} \frac{1}{س-1} \times \frac{1-\sqrt{س}}{\sqrt{س}} \times \frac{1+\sqrt{س}}{1+\sqrt{س}} =$

$\underset{س \to 1}{\text{نها}} \frac{\cancel{1-س}}{(\cancel{س-1})(\sqrt{س})(1+\sqrt{س})} = \frac{-1}{(\sqrt{1})(2)} = \frac{-1}{2}$

د) $\underset{س \to 3}{\text{نها}} \frac{س^2 - 3س}{س - \sqrt{س+1} - 1} =$

$\underset{س \to 3}{\text{نها}} \frac{س^2 - 3س}{(س-1) - \sqrt{س+1}} \times \frac{(س-1) + \sqrt{س+1}}{(س-1) + \sqrt{س+1}}$

$= \underset{س \to 3}{\text{نها}} \frac{(س^2 - 3س) \times 4}{(س-1)^2 - (س+1)}$

$= \underset{س \to 3}{\text{نها}} \frac{4 \times (س^2 - 3س)}{س^2 - 2س + \cancel{1} - س - \cancel{1}}$

$\underset{س \to 3}{\text{نها}} \frac{4 \times (\cancel{س^2 - 3س})}{\cancel{س^2 - 3س}} = 4$

هـ) $\underset{س \to -3}{\text{نها}} \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{س}}{س^2 + 2س - 3} =$

$\underset{س \to -3}{\text{نها}} \frac{\cancel{س+3}}{3س} \times \frac{1}{(س-1)(\cancel{3+س})} =$

$\frac{1}{(3 \times -3)(-3-1)} = \frac{1}{-9 \times -4}$

$= \frac{1}{36}$.

و) $|س| = س$ عند $س = 4$

$\underset{س \to 4}{\text{نها}} \frac{\sqrt{س^3} - 2س}{2س^2 - 5س - 12} \times \frac{\sqrt{س^3} + 2س}{\sqrt{س^3} + 2س}$

$= \underset{س \to 4}{\text{نها}} \frac{س^3 - 4س^2}{(س-4)(2س+3)(8+8)}$

$= \underset{س \to 4}{\text{نها}} \frac{س^2(\cancel{س-4})}{(\cancel{س-4})(2س+3) \times 16}$

$\frac{16}{16 \times 11} = \frac{1}{11}$.

ز) $\underset{س \to 0}{\text{نها}} \frac{س^2 + \text{جا}2س}{3س} =$

$\underset{س \to 0}{\text{نها}} \left(\frac{س^2}{3س} + \frac{\text{جا}2س}{3س}\right) =$

$\underset{س \to 0}{\text{نها}}\, س + \frac{2}{3} = 0 + \frac{2}{3}$

$= \frac{2}{3}$.

ح) $\underset{س \to \frac{\pi}{6}}{\text{نها}} \frac{\text{جتا}س - \sqrt{3}\,\text{جا}س}{6(س - \frac{\pi}{6})}$

$س - \frac{\pi}{6} = ص$ ، $س \to \frac{\pi}{6}$ ، $ص \to 0$.

$س = ص + \frac{\pi}{6}$.

$= \underset{ص \to 0}{\text{نها}} \frac{\text{جتا}(ص + \frac{\pi}{6}) - \sqrt{3}\,\text{جا}(ص + \frac{\pi}{6})}{6ص}$

$= \underset{ص \to 0}{\text{نها}} \frac{\text{جتا}ص\,\text{جتا}\frac{\pi}{6} - \text{جا}ص\,\text{جا}\frac{\pi}{6} - \sqrt{3}(\text{جا}ص\,\text{جتا}\frac{\pi}{6} + \text{جتا}ص\,\text{جا}\frac{\pi}{6})}{6ص}$

تابع س٦ فرع ج .

$$\lim_{س \to 0} \frac{\text{جتا}س\ \text{جتا}\frac{\pi}{6} - \text{جا}س\ \text{جا}\frac{\pi}{6} - \sqrt{3}\left(\text{جا}س\ \text{جتا}\frac{\pi}{6} + \text{جتا}س\ \text{جا}\frac{\pi}{6}\right)}{6س}$$

$$\lim_{س \to 0} \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\text{جتا}س - \frac{1}{2}\text{جا}س - \sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\text{جا}س + \frac{1}{2}\text{جتا}س\right)}{6س}$$

$$\lim_{س \to 0} \frac{\cancel{\frac{\sqrt{3}}{2}\text{جتا}س} - \frac{1}{2}\text{جا}س - \frac{3}{2}\text{جا}س - \cancel{\frac{\sqrt{3}}{2}\text{جتا}س}}{6س}$$

$$\lim_{س \to 0} \frac{-2\,\text{جا}س}{6س} = -\frac{1}{3}\lim_{س \to 0} \frac{\text{جا}س}{س}$$

$$= -\frac{1}{3} .$$

هـ) مكرر (محلول في التمارين) .

ي) $$\lim_{هـ \to 0} \frac{\frac{1}{2} - \text{جتا}\left(\frac{\pi}{3} + هـ\right)}{هـ}$$

$$\boxed{\frac{1}{2} = \text{جتا}\frac{\pi}{3}}$$

$$\lim_{هـ \to 0} \frac{\text{جتا}\frac{\pi}{3} - \text{جتا}\left(\frac{\pi}{3} + هـ\right)}{هـ}$$

$$\lim_{هـ \to 0} \frac{-2\,\text{جا}\left(\frac{\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}+هـ}{2}\right)\text{جا}\left(\frac{\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{3}-هـ}{2}\right)}{هـ}$$

$$\lim_{هـ \to 0} \frac{-2\,\text{جا}\left(\frac{\pi}{3} + \frac{هـ}{2}\right)\text{جا}\left(\frac{-هـ}{2}\right)}{هـ}$$

$$\lim_{هـ \to 0} -2\,\text{جا}\left(\frac{\pi}{3} + \frac{هـ}{2}\right) \times \lim_{هـ \to 0} \frac{\text{جا}\frac{-هـ}{2}}{هـ}$$

$$-2\,\text{جا}\frac{\pi}{3} \times -\frac{1}{2} = -2 \times \frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}} \times -\frac{1}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} .$$

ل) $$\lim_{س \to 0} \frac{\text{جتا}3س - \text{جتا}5س}{2س^2} =$$

$$\lim_{س \to 0} \frac{-2\,\text{جا}\left(\frac{3س + 5س}{2}\right)\text{جا}\left(\frac{3س - 5س}{2}\right)}{2س^2} =$$

$$\lim_{س \to 0} \frac{-\cancel{2}\,\text{جا}4س\ \text{جا}(-س)}{\cancel{2}س^2} =$$

$$\lim_{س \to 0} \frac{-\text{جا}4س}{س} \times \lim_{س \to 0} \frac{\text{جا}(-س)}{س} =$$

$$-4 \times -1 = 4 .$$

س٧ بالقسمة على س

$$\lim_{س \to 0} \frac{\frac{4س^2}{س} - \frac{\text{جا}\,ب\,س}{س}}{\frac{ب\,س}{س} - \frac{\text{ظا}4س}{س}} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{0 - ب}{ب - 4} = \frac{1}{4}$$

$$-4ب = ب - 4$$

$$\frac{-5ب}{-5} = \frac{-4}{-5}$$

$$ب = \frac{4}{5} .$$

حل: س² - ٤ = ٠ ← س = ∓ ٢

+	−	+
س² - ٤	٤ - س²	س² - ٤

-٢ ، ٢

١) ن(٢) = ٢ + ٢ = ٤

٢) نها ن(س) (س ← ٢⁺) = نها (س ← ٢⁺) (س² - ٤)/(س - ٢)

= نها (س ← ٢⁺) (س - ٢)(س + ٢)/(س - ٢)

= ٢ + ٢ = ٤ .

نها ن(س) (س ← ٢⁻) = نها (س ← ٢⁻) (٤ - س²)/(س - ٢)

= نها (س ← ٢⁻) -(س - ٢)(س + ٢)/(س - ٢)

= -(٢ + ٢) = -٤

نها ن(س) (س ← ٢) = غير موجودة

ن(س) غير متصل عند س = ٢

ع(س) = { س/٢ - ١ ، ٢ < س < ٣ ؛ ١ - س/٢ ، -١ ≤ س ≤ ٢ ؛ ٤ ، ٣ ≤ س < ٤ }

١) ع(٣) = ٤

٢) نها ع(س) (س ← ٣⁺) = ٤

نها ع(س) (س ← ٣⁻) = ٣/٢ - ١ = ١/٢

⇐ نها ع(س) (س ← ٣) غير موجودة

∴ ع(س) غير متصل عند س = ٣

حل ٩: س/٢ - ١ = صفر ← س/٢ = ١ ← س = ٢

−	+
١ - س/٢	س/٢ - ١

-١ ، ٢ ، ٣

|١ - س/٢| = { س/٢ - ١ ، ٢ < س < ٣ ؛ ١ - س/٢ ، -١ ≤ س ≤ ٢ }

[٠.٥ س + ٣] ل = ١/(١/٢) = ٢

٠ ، ٢ ، ٤

[٠.٥ س + ٣] = ٤ ، ٣ ≤ س < ٤

حل ١٠: [س] = { ٠ ، ٠ ≤ س < ١ ؛ ١ ، ١ ≤ س < ٢ }

٠ ، ١/٢ ، ١ ، ٣/٢ ، ٢

ل(س) = { (٩س² - ١)/√(١ - ٣س)² ، -١/٣ < س < ١/٣ ؛ -٢ ، س = ١/٣ ؛ -٦س - صفر ، ١/٣ ≤ س < ١ ؛ -٦س - ١ ، ١ ≤ س < ٤/٣ }

١) ل(١/٣) = -٢

٢) نها ل(س) (س ← ١/٣⁺) = -٢

نها ل(س) (س ← ١/٣⁻) = نها (س ← ١/٣⁻) (٩س² - ١)/|١ - ٣س|

←

تابع س١٠

$$\text{نها}_{س \to \frac{1}{3}^-} \frac{٩س^2 - ١}{|١ - ٣س|}$$

$١ - ٣س = ٠ \leftarrow س = \frac{1}{3}$

$١ - ٣س$: + ، $٣س - ١$: − ، عند $\frac{1}{3}$

$$\text{نها}_{س \to \frac{1}{3}^-} \frac{٩س^2 - ١}{|١ - ٣س|} = \text{نها}_{س \to \frac{1}{3}^-} \frac{(٣س - ١)(٣س + ١)}{١ - ٣س}$$

$$\text{نها}_{س \to \frac{1}{3}^-} -١(٣س + ١) = -١(١ + ١) = -٢$$

$\Leftarrow \text{نها}_{س \to \frac{1}{3}} ل(س) = -٢$

٣) $\text{نها}_{س \to \frac{1}{3}} ل(س) = ل(\frac{1}{3})$

∴ ل(س) متصل عند $س = \frac{1}{3}$.

س١١ $ع(س) = \sqrt{[س] + س}$ ، $[١، ٢]$.

$$[س] = \begin{cases} ١ ، & ١ \le س < ٢ \\ ٢ ، & س = ٢ \end{cases}$$

$$ع(س) = \begin{cases} \sqrt{١ + س} ، & ١ \le س < ٢ \\ \sqrt{٢ + س} ، & س = ٢ \end{cases}$$

$\sqrt{١ + س}$ متصل على $[١، ٢)$ لأنه ما داخل الجذر متصل وموجب.

$\boxed{\text{عند } س = ٢}$

١) $ع(٢) = \sqrt{٢ + ٢} = \sqrt{٤} = ٢$

٢) $\text{نها}_{س \to ٢^-} ع(س) = \sqrt{٣}$

٣) $ع(٢) \ne \text{نها}_{س \to ٢^-} ع(س)$

ع(س) غير متصل عند س = ٢

∴ ع(س) متصل على (١، ٢).

* لا نبحث الاتصال عند س = ١ لأن العدد (١) لا ينتمي للفترة (فترة مفتوحة).

س١٢ $س^3$ كثير حدود متصل على $(-\infty، ١)$

$٢\sqrt{س} - ١$ متصل على $(١، \infty)$ لأنه كثير حدود وما داخل الجذر متصل وموجب.

$\boxed{\text{عند } س = ١}$

١) $هـ(١) = ٢\sqrt{١} - ١ = ٢ - ١ = ١$

٢) $\text{نها}_{س \to ١^+} هـ(س) = ١$ ، $\text{نها}_{س \to ١^-} هـ(س) = ١$ $\Leftarrow \text{نها}_{س \to ١} هـ(س) = ١$

٣) $هـ(١) = \text{نها}_{س \to ١} هـ(س)$

∴ هـ(س) متصل عند س = ١

∴ هـ(س) متصل على ح.

س١٣

[س] = { ٠ ، ٠ ≤ س < ١
-١ ، -١ ≤ س < ٠ }

ق(س) = { $\frac{(س-١)(س+١)}{س+١}$ ، -٢ ≤ س < -١
-س ، -١ ≤ س < ٠
صفر ، ٠ ≤ س < ١ }

$\frac{س^٢-١}{س+١}$ نسبي متصل على (-٢، -١) لأن أصفار المقام لا تنتمي للفترة.

-س كثير حدود متصل على (-١، ٠)

صفر ثابت متصل على (٠، ١)

$\boxed{\text{عند س = -٢}}$

١) ق(-٢) = -٢ -١ = -٣

٢) نهـا ق(س) (س ← -٢⁺) = -٣

٣) نهـا ق(س) (س ← -٢⁺) = ق(-٢) ∴ ق متصل عند س = -٢

$\boxed{\text{عند س = -١}}$

١) ق(-١) = ١

٢) نهـا ق(س) (س ← -١⁺) = ١
نهـا ق(س) (س ← -١⁻) = -١ -١ = -٢ ⟸ نهـا ق(س) (س ← -١) غير موجودة

∴ ق غير متصل عند س = -١

$\boxed{\text{عند س = ٠}}$

١) ق(٠) = ٠

٢) نهـا ق(س) (س ← ٠⁺) = ٠
نهـا ق(س) (س ← ٠⁻) = ٠ ⟸ نهـا ق(س) (س ← ٠) = ٠

٣) نهـا ق(س) (س ← ٠) = ق(٠) ∴ ق متصل عند س = ٠

$\boxed{\text{عند س = ١}}$

١) ق(١) غير معرف

∴ ق غير متصل عند س = ١

∴ ق متصل على [-٢، ١) - {-١}.

س١٤ هـ(س) = [س] = { ١ ، ١ ≤ س < ٢
٠ ، ٠ ≤ س < ١
٢ ، س = ٢ }

ق(س) = (ل × هـ)(س) = { $\frac{س^٢-١}{س+٢}$ ، ١ ≤ س < ٢
٠ ، ٠ ≤ س < ١
$\frac{٢(س^٢-١)}{س+٢}$ ، س = ٢ }

$\frac{س^٢-١}{س+٢}$ نسبي متصل على مجاله لأن أصفار المقام لا تنتمي للفترة (١، ٢)

٠ ثابت متصل على (٠، ١).

$\boxed{\text{عند س = ١}}$

١) ق(١) = ٠

٢) نهـا ق(س) (س ← ١⁺) = ٠
نهـا ق(س) (س ← ١⁻) = ٠ } ⟸ نهـا ق(س) (س ← ١) = ٠

٣) نهـا ق(س) (س ← ١) = ق(١)

∴ ق متصل عند س = ١

$\boxed{\text{عند س = ٢}}$

١) ق(٢) = $\frac{٣}{٢}$

٢) نهـا ق(س) (س ← ٢⁻) = $\frac{٣}{٤}$

٣) نهـا ق(س) (س ← ٢⁻) ≠ ق(٢)

∴ ق غير متصل عند س = ٢

$\boxed{\text{عند س = ٠}}$

١) ق(٠) = ٠

٢) نهـا ق(س) (س ← ٠⁺) = ٠

٣) نهـا ق(س) (س ← ٠⁺) = ق(٠)

∴ ق متصل عند س = ٠

ق متصل على [٠، ٢).

س١٥ (١) ص = ٢ع + ١

س ← ١ ، ص ← ٣

$\underset{س \leftarrow ١}{نهـا} \left(ق^2(٢ع+١) - س + ٧ \right)$

$= \underset{ص \leftarrow ٣}{نهـا} ق^2(ص) - ١ + ٧$

$= ٤^2 - ١ + ٧ = ٢٢ .$

(٢) ٣ق(٤) = ٦ ⟸ ق(٤) = ٢

بما أن ق متصل عند س = ٤ ⟸

$\underset{س \leftarrow ٤^+}{نهـا} ق(س) = \underset{س \leftarrow ٤^-}{نهـا} ق(س) = ق(٤)$

$\underset{س \leftarrow ٤^+}{نهـا} ق(س) = ٤ب$

$٢ = ٤ب \Leftarrow ب = \frac{١}{٢}$ (ج)

(٣) $\underset{س \leftarrow ٢}{نهـا} \frac{ق(س)}{س} = \frac{ق(٢)}{٢} = ٣$ (ق كثير حدود متصل)

⟸ ق(٢) = ٦ .

$\underset{س \leftarrow ٢}{نهـا} \frac{ق^2(س)}{س} = \frac{ق^2(٢)}{٢} = \frac{٦^2}{٢} = \frac{٣٦}{٢}$

= ١٨ (ب)

(٤) $\underset{س \leftarrow أ}{نهـا} ق(س)$ = صفر هي

{−٢ ، ٠ ، ٢} (د)

(٥) $\underset{س \leftarrow -٢}{نهـا} \frac{٤ - س^2}{س - ٢} = \underset{س \leftarrow -٢}{نهـا} \frac{(س+٢)\cancel{(س-٢)}}{\cancel{س-٢}}$ = صفر (ب)

(٦) $\underset{س \leftarrow ٠}{نهـا} \frac{٦س^4 + ١٨س^2}{٢س^2 - ٣س^3} = \underset{س \leftarrow ٠}{نهـا} \frac{\cancel{س^2}(٦س^2+١٨)}{\cancel{س^2}(٢-٣س)}$

$= \frac{١٨+٠}{٢-٠} = \frac{١٨}{٢} = ٩$ (د)

(٧) $\underset{س \leftarrow ١^+}{نهـا} \left(\frac{|س-١|}{س-١} + ق(س) \right) =$

$\underset{س \leftarrow ١^+}{نهـا} \frac{\cancel{س-١}}{\cancel{س-١}} + \underset{س \leftarrow ١^+}{نهـا} ق(س)$

$١ + ٤ = ٥$ (ج)

(٨) $\underset{س \leftarrow أ}{نهـا} ق(س)$ غير موجودة عند أ ∈ {١ ، ٣} (ج)

(٩) $\underset{س \leftarrow \frac{\pi}{٢}^-}{نهـا} ٢جتا س = \underset{س \leftarrow \frac{\pi}{٢}}{نهـا} أ س^2 + \pi^2$

$٢ جتا \frac{\pi}{٢} = \frac{\pi^2}{٤} \times أ + \pi^2$

$صفر = \frac{أ\pi^2}{٤} + \pi^2$

$\frac{أ\pi^2}{٤} = -\pi^2 \Leftarrow أ = \frac{-\pi^2 \times ٤}{\pi^2}$

أ = −٤ (ج)

(١٠) $ق(س) = \begin{cases} ٣ & ، س = ١ \\ ٦ & ، ١ < س < ٢ \\ ٤ & ، س = ٢ \end{cases}$

ق متصل على الفترة (١ ، ٢) (ب)