الفصل الدراسي الأول

الوحدة 1 الاقترانات والمقادير الجبرية

الدرس 1 نظريتا الباقي والعوامل

الدرس 2 الكسور الجزئية

اختبار نهاية الوحدة

الوحدة 2 المتطابقات والمعادلات المثلثية

الدرس 1 المتطابقات المثلثية 1

الدرس 2 المتطابقات المثلثية 2

الدرس 3 حلُّ المعادلات المثلثية

اختبار نهاية الوحدة

الوحدة 3 التفاضل وتطبيقاته

الدرس 1 مشتقة اقترانات خاصة

الدرس 2 مشتقتا الضرب والقسمة والمشتقات العليا

الدرس 3 قاعدة السلسلة

الدرس 4 الاشتقاق الضمني

الدرس 5 المُعدَّلات المرتبطة

اختبار نهاية الوحدة

الوحدة 4 الأعداد المُركَّبة

الدرس 1 الأعداد المُركَّبة

الدرس 2 العمليات على الأعداد المُركَّبة

الدرس 3 المحل الهندسي في المستوى المُركَّب

اختبار نهاية الوحدة

الاستاذ حمزة ابو الفول

الملاذ في مهارات الرياضيات

الصف الثاني عشر- المسار الأكاديمي

الفصل الدراسي الأول

12

الوحدة 1 الاقترانات والمقادير الجبرية

الدرس 1 نظريتا الباقي والعوامل

الدرس 2 الكسور الجزئية

اختبار نهاية الوحدة

الصف الثاني عشر- المسار الأكاديمي

الفصل الدراسي الأول

الوحدة 1 الاقترانات والمقادير الجبرية

الدرس 1 نظريتا الباقي والعوامل

تمهيد ومراجعة

القسمة باستعمال الجدول

نظرية الباقي

نظرية العوامل

نظرية الأصفار النسبية

حلُّ معادلات كثيرات الحدود

تطبيقات حياتية

القسمة باستعمال الجدول

مراجعة

الاقتران وحيد الحدّ بمُتغيِّر واحد

هوَ اقتران قاعدته ناتج ضرب عدد حقيقيٍّ (يسمّى المعامل) في مُتغيِّرٍ أسُّهُ عددٌ صحيحٌ غيرُ سالب

والجدولُ الآتي يعرِضُ بعضَ الأمثلةِ على وحيدِ الحدِّ، وأسِّهِ، ومعاملِهِ:

وحيدُ الحدِّ	9	x	$\sqrt{7}x^3$	$-\frac{1}{2}x^5$	$3x^2$
الأُسُّ	0	1	3	5	2
المعاملُ	9	1	$\sqrt{7}$	$-\frac{1}{2}$	3

الاقتران كثيرُ الحدود بمُتغير واحد

هوَ اقترانٌ يتكوَّنُ منْ وحيدِ حدٍّ واحدٍ، أوْ مجموع عِدَّةِ اقتراناتِ وحيدةِ الحدِّ بمُتغيِّرٍ واحدٍ

ومنْ أمثلتِهِ الاقتراناتُ الآتيةُ

$$f(x)=2 \quad , \quad f(x)=3x-4 \quad , \quad f(x)=x^2+4x-5 \quad , \quad g(x)=-3x^2+1.5x^4-3$$

الصورة العامة لكثير الحدودِ: $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\ldots+a_1x^1+a_0$

حيث: n: عددٌ صحيحٌ غيرُ سالبٍ.

$a_n , a_{n-1} , a_{n-2} , \ldots, a_1 , a_0$: أعدادٌ حقيقيةٌ تُسمّى معاملاتِ حدودِ كثير الحدود.

لكتابة كثير الحدود بالصورة القياسية، يتم ترتيب حدوده من **القوة الأعلى إلى القوة الأقل**

ومنْ أمثلته الاقترانات الآتية

$$f(x)=x^3-6x^2+8x \quad , \quad P(x)=5 \quad , \quad P(x)=2-x$$

يسمّى اقتران كثير الحدود أحيانًا كثير حــدود فقط اختصارًا.

الوحدة 1 الاقترانات والمقادير الجبرية | الدرس 1 نظريتا الباقي والعوامل | الاستاذ حمزة ابو الفول

القسمة باستعمال الجدول

مراجعة قسـمة كثير حدود على كثير حدود آخر باسـتعمال القسـمة الطويلة

طرقُ قسمة كثيرات الحدود

- القسمة الطويلة
- طريقة الجدول
- القسمة التركيبية

القسمة الطويلة :

- طريقة موجودة في الصف العاشر الاساسي
- تُستخدم لقسمة كثير حدود (المقسوم) على كثير حدود آخر (المقسوم عليه).
- يجب كتابة كل من المقسوم والمقسوم عليه بالصورة القياسية (من أعلى قوة إلى أقل قوة) قبل البدء بالقسمة

⇐ لقسـمة كثير حدودٍ على آخر

⇐ أكتبُ المقسـومَ والمقسومَ عليْه بالصورةِ القياسـيةِ

⇐ وإذا كانَتْ إحدى قوى المُتغيِّر في المقسوم مفقودةً، فإنّي أضيفها في موقعِها، وأكتبُ معاملها 0

⇐ ثم قسمة الحد الرئيس (الذي يحتوي على أعلى درجة) في المقسوم على الحد الرئيس في المقسوم عليه

⇐ ثم يتم ضرب الناتج بالكامل المقسوم عليه.

⇐ بعد الضرب، يتم طرح الناتج من الجزء المقابل في المقسوم، أو يمكن عكس إشارات الناتج ثم الجمع.

⇐ تتكرر عملية قسـمةِ كثيـراتِ الحدودِ حتى تصبح درجة الباقي أقل من درجة المقسوم عليه

⇐ يكتب ناتج القسمة عادةً بالصورة التالية : $\text{ناتج القسمة} + \dfrac{\text{الباقي}}{\text{المقسوم عليه}}$

⇐ درجة ناتج القسـمة تساوي **الفرق** بين درجتي المقسـوم والمقسـوم عليـه.

⇐ للتحقق من صحة الحل، يمكن استخدام العلاقة : **(ناتج القسمة × المقسوم عليه) + الباقي = المقسوم**

ادرس وطبق خطوات القسمة كما في الامثلة التالية

قسمةُ كثيرات الحدود

مثال أَجد ناتجَ قسمةِ $f(x) = 2x^3 + 24x - 15$ على $g(x) = x + 5$ ، وباقيَها.

$$
\begin{array}{r}
2x^2 - 10x + 74 \\
x+5 \,\big)\, \overline{2x^3 + 0x^2 + 24x - 15} \\
\underline{(-)\ 2x^3 + 10x^2} \qquad\qquad \\
-10x^2 + 24x \qquad \\
\underline{(-)\ -10x^2 - 50x} \qquad \\
74x - 15 \\
\underline{(-)\ 74x + 370} \\
-385
\end{array}
$$

بقسمةِ $2x^3$ على x، وكتابةِ النتيجةِ $2x^2$ فوقَ الحدِّ المشابِهِ

بضربِ المقسومِ عليْهِ $(x + 5)$ في $2x^2$

بالطرحِ، وإضافة الحدِّ $(24x)$

بقسمةِ $-10x^2$ على x، وكتابةِ النتيجةِ $-10x$ فوقَ الحدِّ المشابِهِ، ثمَّ ضربِ المقسومِ عليْهِ $(x + 5)$ في $-10x$

بالطرحِ، وإضافة الحدِّ (-15)

بقسمةِ $74x$ على x، وكتابةِ النتيجةِ 74 فوقَ الحدِّ الثابتِ، وضربِ المقسومِ عليْهِ $(x + 5)$ في 74

بالطرحِ

درجةُ باقي القسمةِ أقلُّ منْ درجةِ المقسومِ عليهِ. تنتهي عملية القسمة

إذنْ، ناتجُ القسمةِ هوَ: $2x^2 - 10x + 74$، والباقي -385، ويُمكِنُ كتابةُ ذلكَ كما يأْتي:

$$\frac{2x^3 + 24x - 15}{x + 5} = \left(2x^2 - 10x + 74\right) + \left(\frac{-385}{x + 5}\right), \quad x \neq -5$$

أتحقَّقُ منْ صحَّةِ الحلِّ: يُمكِنُ التحققُ منْ صحَّةِ القسمةِ بضربِ الناتجِ في المقسوم عليْهِ، وإضافة الباقي فإذا كانَتِ النتيجةُ مساويةً للمقسوم كانَ الحلُّ صحيحًا.

(المقسوم) = (الباقي) + (المقسوم عليْه)(الناتج)

$$\left(\overset{\text{الناتج}}{\boxed{2x^2 - 10x + 74}}\right)\left(\overset{\text{المقسوم عليه}}{\boxed{x + 5}}\right) + \left(\overset{\text{الباقي}}{\boxed{-385}}\right) = 2x^3 - 10x^2 + 74x + 10x^2 - 50x + 370 - 385$$

$$= 2x^3 + (-10 + 10)x^2 + (74 - 50)x - 15$$

$$= \left(\overset{\text{المقسوم}}{\boxed{2x^3 + 24x - 15}}\right) \checkmark$$

القسمة باستعمال الجدول

مراجعة قســمة كثير حدود على كثير حدود آخر باســتعمال القســمة الطويلة

مثال استعمل القسمة الطويلة لإيجاد ناتج قسمة $(x^3+2x^2-11x-12)$ على $(x+4)$ كما يأتي:

قبل البدء بقسمة كثيرات الحدود، أكتب المقسوم والمقسوم عليه بالصورة القياسية

ناتج القسمة $\rightarrow x^2-2x-3$

المقسوم عليه $\rightarrow x+4$

المقسوم $\leftarrow x^3+2x^2-11x-12$

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2-2x-3 \\
\hline
x+4 & x^3+2x^2-11x-12 \\
 & \underline{x^3+4x^2} \\
 & -2x^2-11x \\
 & \underline{-2x^2-8x} \\
 & -3x-12 \\
 & \underline{-3x-12} \\
 & 0
\end{array}
$$

بالضرب في x^2

بالطرح

بالضرب في $-2x$

بالطرح

بالضرب في -3

بالطرح

باقي القسمة $\rightarrow 0$

تتوقَّف عملية قسمة كثيرات الحدود عندما تصبح درجة باقي القسمة أقل من درجة المقسوم عليه.

القسمة باستعمال الجدول

طريقة الجدول (grid method)

هي طريقة لقســمة كثيرات الحدود تعتمد بشــكل أساسي على ضرب كثيرات الحدود، بوصفها عملية عكسية لعملية القسمة.

وهذه الطريقة هـي تشبه كثيرا القسمة الطويلة حيث يمكن اعتبارها صورة ثانية للقسمة الطويلة واعادة ترتيب على شكل جدول وخطواتها الاساسية باختصار (قسمة أعلى درجة على أعلى درجة، ضرب، طرح (عكس اشارة ثم جمع) ثم تكرار كما في القسمة الطويلة

خطوات طريقة الجدول في قسمة كثيرات الحدود

1. تحديد حجم الجدول :
   - **عدد الصفوف** يساوي درجة المقسوم عليه + 2
   - **عدد الأعمده** يساوي درجة الناتج + 2

     درجة كثير الحدود الناتج = درجة المقسوم - درجة المقسوم عليه

2. إنشاء الجدول وتحديد الأجزاء :
   - رسم جدول بالعدد المحدد من الأعمده والصفوف.
   - **العمود الأول** يخصص لحدود المقسوم عليه.
   - **الصف الأول** يخصص للنواتج (الناتج النهائي للقسمة).
   - الخلية العلوية اليسرى (الصف الأول، العمود الأول) لا تستخدم
   - تكتب حدود المقسوم بجانب الجدول او فوقه
   - تكتب حدود المقسوم عليه في **العمود الأول**، بدءاً من الصف الثاني
   - يخصص مكان في الصف الأول من منطقة العمل (المربعات المتبقية) للباقي
   - تمثل بقية المربعات منطقة العمل

القسمة باستعمال الجدول

3. **تنفيذ عملية القسمة التكرارية :** (مثل القسمة الطويلة)

- **القسمة :**يتم قسمة أعلى درجة في منطقة العمل (التي تكون دائماً في الصف الأول منها) على أعلى درجة في المقسوم عليه (وهي الحد الأول في العمود الأول)

يُكتب ناتج هذه القسمة في **الصف الأول** المخصص للنواتج

- **الضرب :** يتم ضرب ناتج القسمة الذي حصلت عليه (في الصف الأول) في **كل حد** من حدود المقسوم عليه المكتوبة في العمود الأول

تُكتب نتائج عمليات الضرب هذه في المربعات المقابلة في منطقة العمل

- **عكس الإشارة والجمع :** (مكافئة للطرح في القسمة الطويلة)

يتم **عكس إشارات** نتائج الضرب التي كتبتها في منطقة العمل. ثم يتم **جمع** الحدود المتشابهة (التي لها نفس الدرجة).

يتم الجمع بين الحدود المتبقية من المقسوم (التي لم يتم استخدامها بعد) والحدود المناظرة لها في منطقة العمل بعد عكس إشاراتها

- يُكتب ناتج الجمع (الحدود المتشابهة) في الصف الأول من منطقة العمل
- يُشطب الحد الذي تم استخدامه من المقسوم المكتوب بجانب او فوق الجدول
- **التكرار :**تُكرر الخطوات (القسمة، الضرب، عكس الإشارة، الجمع) حتى تصبح درجة الحد المتبقي في الصف الأول من منطقة العمل أقل من درجة المقسوم عليه

4. **النتيجة النهائية :**

- الحدود المكتوبة في الصف الأول (غير خلية الباقي) هي معاملات حدود **ناتج القسمة** مرتبة حسب الدرجة التنازلية
- الحد النهائي المكتوب في الخلية المخصصة **للباقي** هو الباقي النهائي للقسمة
- يُكتب الناتج النهائي على صورة: **ناتج القسمة** + $\frac{\text{الباقي}}{\text{المقسوم عليه}}$
- درجة ناتج القسمة **تساوي الفرق** بين درجتي المقسوم والمقسوم عليه.
- للتحقق من صحة الحل، يمكن استخدام العلاقة : **(ناتج القسمة × المقسوم عليه) + الباقي = المقسوم**

القسمة باستعمال الجدول

طريقة الجدول باختصار

- انشـــاء الجدول بالعدد المحدد من الأعمده والصفوف.
- القسمة بالتعامل مع أعلى درجة في المقسوم، قسمتها على أعلى درجة في المقسوم عليه

  وكتابة الناتج في الصف الأول المخصص للنواتج.
- تُضرب النتيجة في حدود المقسوم عليه وتُكتب في منطقة العمل

  بعد ذلك، تُعكس إشارات نواتج الضرب ويتم جمعها مع الحدود المتشابهة في المقسوم، مع الانتقال درجة بدرجة.
- تتكرر العملية حتى الوصول إلى الباقي

تابـــع وتدرب على طريقة الجدول من خلال الامثلة التالية

مثال 1 أستعمل طريقة الجدول لإيجاد ناتج: $(9x^3 - x + 3) \div (3x-2)$، ثمَّ أتحقَّق من صِحَّة الحلِّ.

$$9x^3 + 0x^2 - x + 3$$

$9x^3$

$+0x \quad +6x^2$

$-x \quad +4x$

$+3 \quad +2$

الباقي

$\times$	$3x^2$	$2x$	1	
$3x$	$9x^3$	$6x^2$	$3x$	5
-2	$-6x^2$	$-4x$	-2	

إذن، ناتج القسمة هو: $3x^2 + 2x + 1$، والباقي 5، ويُمكِنني كتابة ذلك كما يأتي:

$$\frac{9x^3 - x + 3}{3x-2} = 3x^2 + 2x + 1 + \frac{5}{3x-2}$$

أتحقَّق من صِحَّة الحلِّ:

يُمكِنني التحقُّق من صِحَّة الحلِّ بإيجاد مجموع الحدود في منطقة العمل، والتحقُّق من مساواتها للمقسوم.

$$9x^3 - 6x^2 + 6x^2 - 4x + 3x - 2 + 5 = 9x^3 - x + 3$$

القسمة باستعمال الجدول

أتحقق من فهمي 1 a) أستعمل طريقة الجدول لإيجاد ناتج $(x^3 + 6x^2 - 9x - 14) \div (x + 1)$

$$x^3 + 6x^2 - 9x - 14$$

x^3

$+6x^2 - x^2$

$-9x - 5x$

$-14 + 14$

×	x^2	$+5x$	-14	
x	x^3	$5x^2$	$-14x$	0
$+1$	$+x^2$	$+5x$	-14	

ناتج القسمة هو $(x^2 + 5x - 14)$ والباقي (0)

ويمكنني كتابة ذلك كما يأتي:

$$\frac{x^3 + 6x^2 - 9x - 14}{x + 1} = x^2 + 5x - 14$$

أتحقق من فهمي 1 b) أستعمل طريقة الجدول لإيجاد ناتج $(2x^3 - x^2 + 3) \div (x - 3)$

$$2x^3 - x^2 + 0x + 3$$

$+2x^3$

$-x^2 \quad +5x^2$

$+0x \quad +15x$

$-3 + 48$

×	$2x^2$	$+5x$	$+15$	
x	$2x^3$	$+5x^2$	$+15x$	48
-3	$-6x^2$	$-15x$	-45	

ناتج القسمة هو $(2x^2 + 5x - 45)$ والباقي (48)

ويمكنني كتابة ذلك كما يأتي:

$$\frac{2x^3 - x^2 + 3}{x - 3} = 2x^2 + 5x + 15 + \frac{48}{x - 3}$$

نظرية الباقي

باقي قسمة كثير الحدود $P(x)$ على $(x-c)$ هو $P(c)$.

بوجه عام، فإنَّ باقي قسمة $P(x)$ على $(ax-b)$ هو $P(\frac{b}{a})$، حيث: $a \neq 0$.

باقي قسمة كثير حدود على خطي تساوي صورة صفر الخطي في كثير الحدود

تتيح نظرية الباقي إمكانية معرفة باقي قسمة كثير حدود على كثير حدود **خطي** دون الحاجة لإجراء **عملية القسمة الطويلة**

ملاحظة

نظرية الباقي تطبق فقط عندما يكون المقسوم عليه كثير حدود خطي (من الدرجة الأولى)

وإذا كان المقسوم عليه من درجة أعلى، فلا يمكن استخدام نظرية الباقي لإيجاد الباقي مباشرة

بل يجب اللجوء إلى القسمة الطويلة

خطوات تطبيق نظرية الباقي :

- **نجـد صفر المقسوم عليه بمساواته بالصفر وحل المعادلة**
- **نعوض قيمة صفر المقسوم عليه في المقسوم**
- **الباقي يساوي ناتج التعويض**

نظرية الباقي

مثال 2 أستعمل نظرية الباقي لإيجاد باقي قسمة $P(x)$ على $h(x)$ في كل ممّا يأتي:

1 $P(x) = x^3 + 7x^2 - 6x + 2,\ h(x) = x - 3$

$h(x) = x - 3 = 0$

$x = +3$

الباقي $= P(3) = (3)^3 + 7(3)^2 - 6(3) + 2$

$= 27 + 63 - 18 + 2 = 74$

إذن، باقي قسمة $P(x)$ على $h(x)$ يساوي 74

2 $P(x) = 2x^3 - 5x^2 - 4x + 9,\ h(x) = x + 2$

$h(x) = x + 2 = 0$

$x = -2$

الباقي $= P(-2) = 2(-2)^3 - 5(-2)^2 - 4(-2) + 9$

$= -16 - 20 + 8 + 9 = -19$

إذن، باقي قسمة $P(x)$ على $h(x)$ يساوي -19

3 $P(x) = 2x^3 - 4x^2 - 2x + 1,\ h(x) = 2x - 1$

$h(x) = 2x - 1 = 0$

$x = \frac{1}{2}$

الباقي $= P(\frac{1}{2}) = 2(\frac{1}{2})^3 - 4(\frac{1}{2})^2 - 2(\frac{1}{2}) + 1$

$= \frac{1}{4} - 1 - 1 + 1 = -\frac{3}{4}$

إذن، باقي قسمة $P(x)$ على $h(x)$ يساوي $-\frac{3}{4}$

نظرية الباقي

أتحقّق من فهمي 2 أستعمل نظرية الباقي لإيجاد باقي قسمة $P(x)$ على $h(x)$ في كلٍّ ممّا يأتي:

a) $P(x) = 4x^4 - 7x^3 + 5x^2 + 2,\ h(x) = x - 1$

الباقـــي $= P(1) = 4(1)^4 - 7(1)^3 + 5(1)^2 + 2 = 4$

b) $P(x) = 3x^3 + 8x^2 - 3x - 6,\ h(x) = x + 3$

الباقـــي $= P(-3) = 3(-3)^3 + 8(-3)^2 - 3(-3) - 6 = -6$

c) $P(x) = -2x^3 - 5x^2 + 10x + 9,\ h(x) = 2x + 8$

الباقـــي $= P(\frac{-8}{2}) = P(-4) = -2(-4)^3 - 5(-4)^2 + 10(-4) + 9 = 17$

الوحدة 1 الاقترانات والمقادير الجبرية | الدرس 1 نظريتا الباقي والعوامل | الاستاذ حمزة ابو الفول

نظرية العوامل (factor theorem) حالة خاصة من نظرية الباقي.

يكون $(x-c)$ عاملًا من عوامل $P(x)$ إذا وفقط إذا كان: $P(c)=0$

بوجه عام، يكون $(ax-b)$ عاملًا من عوامل $P(x)$ إذا وفقط إذا كان: $P\left(\frac{b}{a}\right)=0$، حيث: $a \neq 0$

يكون الخطي عامل من عوامل كثير حدود اذا كان قسمة كثير الحدود عليه تساوي صفر

اي اذا كان ناتج تعويض صفره (الخطي) في كثير الحدود يساوي صفر

ملاحظـــات

- **تعتمد نظرية العوامل على نظرية الباقي لتحديد ما اذا كان كثير حدود خطي عامل لكثير حدود اخر**

  حيث تنص على أن كثير الحدود الخطي $(ax-b)$ عاملًا لكثير الحدود $P(x)$ إذا وفقط إذا كان باقي قسمة $P(x)$ على $(ax-b)$ يساوي صفرًا.

  وبصيغة اخرى يكون $(ax-b)$ عاملًا لـ $P(x)$ إذا كان $P\left(\frac{b}{a}\right)=0$

- **وهذا يشبه مفهوم العوامل في الاعداد حيث يكون العدد B من عوامل العدد A اذا كان باقي قسمة A على B يساوي صفر وبالمثل اذا كان باقي قسمه $P(x)$ على $(ax-b)$ يساوي صفر فان $(ax-b)$ هو احد عوامل $P(x)$**

- **لتحديد ما إذا كان الباقي صفرًا أم لا**
  - **اذا كان المقسوم عليه ليس خطيا نستعمـــل طريقة القسمـــة (خوارزمية القسمة الطويلة او طريقة الجدول)**
  - **اذا كان المقسوم عليه خطيا (من الدرجة الاولى) نستعمـــل طريقة القسمـــة أو نظريـــة الباقي وهي الافضل والاسرع**

- **خطوات تحليل كثير حدود $P(x)$ تحليلاً كاملاً إذا علمنا أحد عوامله الخطية $(ax-b)$ ؟**
  - **نتأكد ان العامل المعطى هو بالفعل عامل من عوامل $P(x)$ يجب ان يكون باقي قسمة $P(x)$ على هذا العامل المعطى يساوي صفرا**
  - **نقسم $P(x)$ على العامل الخطي** باستخدام القسمة الطويلة او طريقة الجدول **لينتج كثير حدود درجته اقل بواحد من درجة وليكن $h(x)$**
  - **نحلل كثير الحدود $h(x)$ الناتج عن من القسمة (ان امكن) لنصل الى التحليل الكامل**

  والتحليل الكامل هو الوصول الى حاصل ضرب مجموعة من كثيرات الحدود التي لا يمكن تحليلها أي تكون اما
  - **عوامل خطية من الدرجة الاولى**
  - **أو تربيعية من الدرجة الثانية وليس لها اصفار ويكون المميز يساوي صفرا**

الوحدة 1 الاقترانات والمقادير الجبرية | الدرس 1 نظريتا الباقي والعوامل | الاستاذ حمزة ابو الفول

نظرية العوامل

مثال 3 إذا كان: $P(x) = x^3 + 6x^2 + 5x - 12$، فأجيب عن السؤالين الآتيين:

1) أُبيِّن أنَّ $(x+4)$ عامل من عوامل $P(x)$.

يكون $(x+4)$ عاملًا من عوامل $P(x)$ إذا كان: $P(-4) = 0$؛ لذا أجد $P(-4)$.

$$P(-4) = (-4)^3 + 6(-4)^2 + 5(-4) - 12$$
$$= -64 + 96 - 20 - 12 = 0$$

إذن، $(x+4)$ عامل من عوامل $P(x)$

2) أُحلِّل $P(x)$ تحليلًا كاملًا.

بما أنَّ $(x+4)$ عامـــل من عوامل $P(x)$، فإنَّه يُمكِن إيجاد العوامل الأُخرى بقســمة $P(x)$ علـى $(x+4)$، ثـمَّ تحليـل كثير الحدود الناتج (إنْ أمكن):

$$x^3 + 6x^2 + 5x - 12$$

$\times$	x^2	$2x$	-3	
x	x^3	$2x^2$	$-3x$	0
$+4$	$4x^2$	$8x$	-12	

$$P(x) = x^3 + 6x^2 + 5x - 12$$
$$= (x+4)(x^2 + 2x - 3)$$
$$= (x+4)(x+3)(x-1)$$

إذن، $P(x) = (x+4)(x+3)(x-1)$.

(التحليل الكامل)

تذكر التحليل الكامل لكثير الحدود يعني كتابته

في صورة حاصل ضرب مجموعة من كثيرات الحدود التي لا يمكن تحليلها

(من الدرجة 1 او من الدرجة 2 وليس لها اصفار)

أتحقّق من فهمي إذا كان: $P(x) = x^3 - 2x^2 - 13x - 10$، فأُجيب عن السؤالين الآتيين:

a) أُبيِّن أنَّ $(x-5)$ عامل من عوامل $P(x)$.

b) أُحلِّل $P(x)$ تحليلًا كاملًا.

$$P(5) = 5^3 - 2(5)^2 - 13(5) - 10$$
$$= 125 - 50 - 65 - 10 = 0$$

إذن، $(x - 5)$ عامل من عوامل $P(x)$

لتحليل $P(x)$ أقسم $P(x)$ على $(x - 5)$

×	x^2	$+3x$	$+2$	
x	x^3	$+3x^2$	$+2x$	0
-5	$-5x^2$	$-15x$	-10	

$$P(x) = (x-5)(x^2 + 3x + 2)$$
$$= (x-5)(x+2)(x+1)$$

الوحدة 1 الاقترانات والمقادير الجبرية | الدرس 1 نظريتا الباقي والعوامل | الاستاذ حمزة ابو الفول

نظرية الأصفار النسبية

مقدمة

صفر كثير الحدود هو قيمة المتغير x التي تجعل قيمة كثير الحدود تساوي صفر.

وعند التمثيل البياني فإن نقاط تقاطع منحنى كثير الحدود مع محور x تمثل أصفاره.

ذلك لأن عند أي نقطة على محور x تكون قيمة y التي تمثل قيمة كثير الحدود $P(x)$ تساوي صفر.

وعدد أصفار كثير الحدود الحقيقية على الأكثر يساوي درجة كثير الحدود.

فإذا كان كثير الحدود من الدرجة n ، فإن عدد أصفاره على الأكثر هو n

فمثلا اذا كان كثير الحدود من الدرجة 3 فإن عدد اصفاره يمكن ان يساوي 3 أو 2 أو 1 أو لا يوجد أصفار حقيقية

وكثير الحدود من الدرجة 2 فإن عدد اصفاره يمكن ان يساوي 2 أو 1 أو لا يوجد أصفار حقيقية

وكثير الحدود من الدرجة 1 فإن عدد اصفاره يمكن ان يساوي 1 أو لا يوجد أصفار حقيقية وهكذا

وبالنسبة لكثير الحدود التربيعي ($ax^2 + bx + c$) ، يحدد مميز المعادلة ($\Delta = b^2 - 4ac$) عدد الأصفار الحقيقية

- إذا كان $\Delta > 0$: يوجد صفران حقيقيان.
- إذا كان $\Delta = 0$: يوجد صفر واحد حقيقي (مكرر).
- إذا كان $\Delta < 0$: لا يوجد أصفار حقيقية.

تختلف طرق إيجاد أصفار كثير الحدود حسب درجته وشكله حيث نساوي كثير الحدود بالصفر ونحل المعادلة الناتجة بالتحليل الى حاصل ضرب عوامل خطية أو تربيعية لا تحلل (مميزها سالب)

بعد التحليل، نساوي كل عامل بالصفر لإيجاد الأصفار

- تحليل كثير الحدود من الدرجة الثانية نستخدم طرق التحليل البسيطة واذا واجهنا صعوبة نستخدم المميز لتحديد عدد الاصفار ونطبق القانون العام
- تحليل كثير الحدود من الدرجة الثالثة فما فوق نستخدم نظرية الاصفار النسبية التي نحن بصدد دراستها ان شاء الله

نظرية الأصفار النسبية

مراجعة

- اوجد اصفار كثير الحدود التالي : $P(x) = 2x - 14$

المعادلة خطية $2x - 14 = 0 \Rightarrow 2x = 14 \Rightarrow x = 7$

اذن حل المعادلة $x = 7$

اصفار كثير الحدود 7

- اوجد اصفار كثير الحدود التالي : $P(x) = x^2 - x$

تربيعية - عامل مشترك $x^2 - x = 0 \Rightarrow x(x-1) = 0$

$\Rightarrow x = 0$

or $\Rightarrow x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$

اذن حل المعادلة $x = 0 \text{ ، } 1$

اصفار كثير الحدود $0 \text{ ، } 1$

- اوجد اصفار كثير الحدود التالي : $P(x) = x^2 - 49$

تربيعية - فرق بين مربعين $x^2 - 49 = 0 \Rightarrow (x-7)(x+7) = 0$

$\Rightarrow x - 7 = 0 \Rightarrow x = 7$

or $\Rightarrow x + 7 = 0 \Rightarrow x = -7$

اذن حل المعادلة $x = -7, 7$

اصفار كثير الحدود $-7, 7$

نظرية الأصفار النسبية

مراجعة

- اوجد اصفار كثير الحدود التالي : $P(x) = x^2 - 8x + 12$

تربيعية - ثلاثي حدود $x^2 - 8x + 12 = 0 \Longrightarrow (x-6)(x-2) = 0$

$\Longrightarrow x - 6 = 0 \Rightarrow x = 6$

or $\Longrightarrow x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$

اذن حل المعادلة $x = 6, 2$

اصفار كثير الحدود $6, 2$

- اوجد اصفار كثير الحدود التالي : $P(x) = 3x^2 - 4x + 1$

تربيعية - ثلاثي حدود $3x^2 - 4x + 1 = 0 \Longrightarrow (3x-1)(x-1) = 0$

$\Longrightarrow 3x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$

or $\Longrightarrow x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$

اذن حل المعادلة $x = \frac{1}{3}, 1$

اصفار كثير الحدود $\frac{1}{3}, 1$

- اوجد اصفار كثير الحدود التالي : $P(x) = x^2 + 4x + 4$

تربيعية - مربع كامل $x^2 + 4x + 4 = 0 \Longrightarrow x^2 + 2(x)(2) + 2^2 = 0$

$\Longrightarrow (x+2)(x+2) = 0$

$\Longrightarrow x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$

اذن حل المعادلة $x = -2$ حل واحد

اصفار كثير الحدود -2 صفر واحد

نظرية الأصفار النسبية

مراجعة

- اوجد اصفار كثير الحدود التالي : $P(x) = 2x^2 - 15x + 19$

تربيعية - ثلاثي حدود – تحليله صعب $\Longleftarrow$ $2x^2 - 15x + 19 = 0$

اذا واجهت صعوبة في التحليل فالمنقذ هو المميز والقانون العام

مميز موجب $\Delta = b^2 - 4ac = (-15)^2 - 4(2)(19) = 73$ $\Longrightarrow$

بما أن $0 < \Delta$ إذنْ للمُعادلةِ حلّانِ حقيقيّانِ مختلفانِ.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-15) \pm \sqrt{73}}{2(2)} = \frac{15 \pm \sqrt{73}}{4}$$

$$x = \frac{15 - \sqrt{73}}{4} \quad \text{or} \quad x = \frac{15 + \sqrt{73}}{4}$$

إذنْ، جذرا المُعادلةِ $\frac{15 - \sqrt{73}}{4}, \frac{15 + \sqrt{73}}{4}$

اصفار كثير الحدود $\frac{15 - \sqrt{73}}{4}, \frac{15 + \sqrt{73}}{4}$

- اوجد اصفار كثير الحدود التالي : $P(x) = x^2 - x + 1$

تربيعية - ثلاثي حدود – تحليله صعب $\Longleftarrow$ $x^2 - x + 1 = 0$

اذا واجهت صعوبة في التحليل فالمنقذ هو المميز والقانون العام

مميز سالب $\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4(1)(1) = -3$ $\Longrightarrow$

بما أنَّ $\Delta < 0$، إذنْ ليسَ للمُعادلةِ أيُّ حلٍّ حقيقيٍّ.

اصفار كثير الحدود لا يوجـد

- اوجد اصفار كثير الحدود التالي : $P(x) = x^2 - 2x + 1$

تربيعية - ثلاثي حدود $\Longleftarrow$ $x^2 - 2x + 1 = 0$

$\Longrightarrow$ $\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4(1)(1) = 0$

بما أنَّ $\Delta = 0$، إذنْ للمُعادلةِ حلٌّ حقيقيٌّ واحدٌ.

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{2}{2} = 1$$

نظرية الأصفار النسبية

مراجعة

- اوجد اصفار كثير الحدود التالي : $P(x) = x^3 - 8$

$$x^3 - 8 = 0 \Rightarrow (x-2)(x^2+2x+4) = 0$$ (تكعيبي - فرق مكعبين)

$$\Rightarrow x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

$$\text{or} \Rightarrow x^2 + 2x + 4 = 0$$

$\Rightarrow$ لا يوجدُ حلٌّ حقيقيٌّ للمُعادلةِ

اصفار كثير الحدود لا يوجـد

- اوجد اصفار كثير الحدود التالي : $P(x) = x^3 + 8$

$$x^3 + 8 = 0 \Rightarrow (x+2)(x^2-2x+4) = 0$$ (تكعيبي - مجموع مكعبين)

$$\Rightarrow x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$$

$$\text{or} \Rightarrow x^2 + 2x + 4 = 0$$

$\Rightarrow$ مميزه سالب لا يوجدُ حلٌّ حقيقيٌّ للمُعادلةِ

اصفار كثير الحدود $x = -2$

المعادلات من الدرجة 3 فما فوق نستخدم نظرية الاصفار النسبية في تحليلها

وهذه النظرية موضوع درسنا القادم ان شاء الله

نظرية الأصفار النسبية

إذا كان: $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ كثير حدود معاملاته **أعداد صحيحة**
فإنَّ كل صفر نسبي لـ $P(x)$ يكون في صورة $\frac{p}{q}$، حيث p أحد عوامل الحدِّ الثابت (a_0)، و q أحد عوامل المعامل الرئيس (a_n).

نتيجة من نظرية الأصفار النسبية إذا كان: $a_n = 1$، فإنَّ كل صفر نسبي لـ $P(x)$ يكون أحد عوامل الحدِّ الثابت (a_0).

ملاحظات

- عند إيجاد أحد الأصفار النسبية لكثير الحدود فإنه يمكِن إيجاد أصفاره الأُخرى باستعمال القسمة والتحليل.
- عدد أصفار كثير الحدود أقل من أو يساوي درجته.

إذا كان: $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ كثير حدود

وعلم العدد الحقيقي c صفر للاقتران كثير الحدود $P(x)$ فإن العبارات الرياضية التالية صحيحة

- ناتج تعويض العدد c في كثير الحدود يساوي صفر أي ان $P(c) = 0$
- $x = c$ هو احد حلول (جذور) معادلة كثير الحدود أي ان $P(c) = 0$
- العامل $(x - c)$ هو احد عوامل كثير الحدود $P(x)$ أي ان $P(x) = (x - c)(f(x)$ كثير حدود $)$
  نجد $f(x)$ بقسمة $P(x)$ على $(x - c)$
- النقطة $(c, 0)$ هي نقطة تقاطع منحنى كثير الحدود $P(x)$ مع محور x

خطوات ايجاد اصفار كثير الحدود

- أجد الأصفار النسبية المُحتمَلة لكثير الحدود.
- اجد احد الاصفار بالتجريب بتعويض الاصفار النسبية المحتملة في كثير الحدود في البداية أعوض من عوامل الحد الثابت
- أُحلِّل كثير الحدود تحليلًا كاملًا باستعمال القسمة والتحليل.
- أجد أصفار كثير الحدود بمساواة كل عامل من عوامله بالصفر

الوحدة 1 الاقترانات والمقادير الجبرية | الدرس 1 نظريتا الباقي والعوامل | الاستاذ حمزة ابو الفول

نظرية الأصفار النسبية

مثال 4 (1) أجد جميع أصفار كثير الحدود: $P(x) = 2x^3 + x^2 - 13x + 6$.

أجد الأصفار النسبية المُحتمَلة لكثير الحدود.

أجد عوامل الحدِّ الثابت (6)، وهي: $\pm1, \pm2, \pm3, \pm6$

أجد عوامل المعامل الرئيس (2)، وهي: $\pm1, \pm2$

إذن، الأصفار النسبية المُحتمَلة لكثير الحدود $P(x)$ هي: $\pm1, \pm2, \pm3, \pm6, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}$

اعوض لاختبار بعض الأصفار النسبية المُحتمَلة. في البداية أعوض من عوامل الحد الثابت

$P(-1) = 2(-1)^3 + (-1)^2 - 13(-1) + 6 = 18$ ✗

$P(1) = 2(1)^3 + (1)^2 - 13(1) + 6 = -4$ ✗

$P(2) = 2(2)^3 + (2)^2 - 13(2) + 6 = 0$ ✓

أتوقَّف عن التعويض عندما أجد أوَّل صفر لكثير الحدود.

بما أنَّ: $P(2) = 0$، فإنَّه يوجد لكثير الحدود صفر عندما $x = 2$. إذن، $(x-2)$ عامل من عوامل $P(x)$.

أحلِّل كثير الحدود تحليلًا كاملًا باستعمال القسمة والتحليل.

$\times$	$2x^2$	$5x$	-3	
x	$2x^3$	$5x^2$	$-3x$	0
-2	$-4x^2$	$-10x$	6	

$$P(x) = 2x^3 + x^2 - 13x + 6$$
$$= (x-2)(2x^2 + 5x - 3)$$
$$= (x-2)(2x-1)(x+3)$$

أجد أصفار كثير الحدود بمساواة كل عامل من عوامله بالصفر

$x-2 = 0 \longrightarrow x = 2$

or $2x-1 = 0 \longrightarrow x = \frac{1}{2}$

or $x+3 = 0 \longrightarrow x = -3$

أصفار $P(x)$ الناتجة من تحليله هي: $2, \frac{1}{2}, -3$

نظرية الأصفار النسبية

مثال 4 2 أجد جميع أصفار كثير الحدود: $P(x) = x^3 - 3x + 2$.

أجد الأصفار النسبية المُحتمَلة لكثير الحدود.

بمـــا أنَّ معامل الحدِّ الرئيس 1، فإنَّ الأصفار النســبية المُحتمَلة هي عوامل الحدِّ الثابت الذي يساوي (2).

إذن، الأصفار النسبية المُحتمَلة لكثير الحدود $P(x)$ هي: $\pm 1, \pm 2$

اعوض لاختبار بعض الأصفار النسبية المُحتمَلة. في البداية أعوض من عوامل الحد الثابت

$P(-1) = (-1)^3 - 3(-1) + 2 = 4$ ✗

$P(1) = (1)^3 - 3(1) + 2 = 0$ ✓

أتوقَّــف عــن التعويض عندمـــا أجــد أوَّل صفر لكثير الحدود.

بمــا أنَّ: $P(1) = 0$، فإنَّــه يوجـد لكثيـر الحـدود صفـر عندمـا $x = 1$. إذن، $(x-1)$ عامل من عوامل $P(x)$.

أُحلِّل كثير الحدود تحليلًا كاملًا.

$\times$	x^2	x	-2	
x	x^3	x^2	$-2x$	0
-1	$-x^2$	$-x$	2	

ناتج القسمة يساوي $(x^2 + x - 2)$. ومنه، يُمكِن تحليل كثير الحدود كما يأتي:

$$\begin{aligned} P(x) &= x^3 - 3x + 2 \\ &= (x-1)(x^2 + x - 2) \\ &= (x-1)(x+2)(x-1) \end{aligned}$$

أجد أصفار كثير الحدود بمســاواة كل عامــل من عوامله بالصفر

$x - 1 = 0 \longrightarrow x = 1$

or $x + 2 = 0 \longrightarrow x = -2$

أصفار $P(x)$ الناتجة من تحليله هي: $-2, 1$

نظرية الأصفار النسبية

أتحقّق من فهمي **a)** أجد جميع أصفار كثير الحدود $P(x) = 5x^3 - x^2 - 5x + 1$

أجد الأصفار النسبية المُحتمَلة لكثير الحدود.

أجد عوامل الحدّ الثابت (1)، وهي: ± 1

أجد عوامل المعامل الرئيس (5)، وهي: $\pm 1, \pm 5$

إذن، الأصفار النسبية المُحتمَلة لكثير الحدود $P(x)$ هي: $\pm 1, \pm \frac{1}{5}$

اعوض لاختبار بعض الأصفار النسبية المُحتمَلة. في البداية أعوض من عوامل الحد الثابت

$P(1) = 5(1)^3 - (1)^2 - 5(1) + 1 = 0$ ✓

أتوقّف عن التعويض عندما أجد أوّل صفر لكثير الحدود.

بما أنّ: $P(1) = 0$، فإنه يوجد لكثير الحدود صفر عندما $x = 1$. إذن، $(x-1)$ عامل من عوامل $P(x)$.

أُحلّل كثير الحدود تحليلًا كاملًا باستعمال القسمة والتحليل.

$\times$	$5x^2$	$4x$	1	
x	$5x^3$	$4x^2$	x	0
-1	$-5x^2$	$-4x$	-1	

$$\begin{aligned} P(x) &= 2x^3 + x^2 - 13x + 6 \\ &= (x-1)(5x^2 + 4x + 1) \\ &= (x-1)(5x-1)(x+1) \end{aligned}$$

أجد أصفار كثير الحدود بمساواة كل عامل من عوامله بالصفر

$x-1 = 0 \longrightarrow x = 1$

or $5x-1 = 0 \longrightarrow x = \frac{1}{5}$

or $x+1 = 0 \longrightarrow x = -1$

أصفار $P(x)$ الناتجة من تحليله هي: $1, \frac{1}{5}, -1$

نظرية الأصفار النسبية

أتحقَّق من فهمي **b)** أجد جميع أصفار كثير الحدود $Q(x) = x^4 + 6x^3 + 7x^2 - 6x - 8$

أجد الأصفار النسبية المُحتمَلة لكثير الحدود.

بمـا أنَّ معامل الحدِّ الرئيس 1، فإنَّ الأصفار النسـبية المُحتمَلة هي عوامل الحدِّ الثابت الذي يساوي (8).

إذن، الأصفار النسبية المُحتمَلة لكثير الحدود $Q(x)$هي: $\pm1, \pm2\ , \pm4, \pm8$

اعوض لاختبار بعض الأصفار النسبية المُحتمَلة.

$$Q(1) = 1^4 + 6(1)^3 + 7(1)^2 - 6(1) - 8 = 0 \quad ✓$$

أتوقَّـف عـن التعويض عندمـا أجـد أوَّل صفر لكثير الحدود.

بمـا أنَّ: $Q(1) = 0$، فإنَّـه يوجـد لكثيـر الحـدود صفـر عندمـا $x = 1$. إذن، $(x-1)$ عامل من عوامل $Q(x)$.

×	x^3	$7x^2$	14	8	
x	x^4	$7x^3$	$14x^2$	$8x$	0
-1	$-x^3$	$-7x^2$	$-14x$	-8	

$$Q(x) = x^4 + 6x^3 + 7x^2 - 6x - 8$$
$$= (x-1)(x^3 + 7x^2 + 14x + 8)$$

أُحلِّل كثير الحدود تحليلًا كاملًا $x^3 + 7x^2 + 14x + 8$ باسـتعمال القسمة والتحليل.

بمـا أن معامل الحدِّ الرئيس 1، فإن الأصفار النسـبية المُحتمَلة هي عوامل الحدِّ الثابت الذي يساوي (8).

إذن، الأصفار النسبية المُحتمَلة لكثير الحدود $Q(x)$هي: $\pm1, \pm2\ , \pm4, \pm8$

اعوض لاختبار بعض الأصفار النسبية المُحتمَلة.

$$(-1)^3 + 7(-1)^2 + 14(-1) + 8 = 0 \quad ✓$$

إذن، $(x+1)$ عامل من عوامل $x^3 + 7x^2 + 14x + 8$

×	x^2	$+6x$	$+8$	
x	x^3	$6x^2$	x	0
$+1$	x^2	$+6x$	$+8$	

$$x^3 + 7x^2 + 14x + 8 = (x+1)(x^2 + 6x + 8)$$
$$= (x+1)(x+4)(x+2)$$

$$Q(x) = x^4 + 6x^3 + 7x^2 - 6x - 8$$
$$= (x-1)(x^3 + 7x^2 + 14x + 8)$$
$$= (x-1)\ (x+1)(x^2 + 6x + 8)$$
$$= (x-1)\ (x+1)(x+4)\ (x+2)$$

$x-1 = 0 \longrightarrow x = 1$

or $x + 1 = 0 \longrightarrow x = -1$

or $x+4 = 0 \longrightarrow x = -4$

or $x + 2 = 0 \longrightarrow x = -2$

أصفار $Q(x)$الناتجة من تحليله هي: $1\ , -1\ , -4\ , -2$

حلُّ معادلات كثيرات الحدود

معادلة كثير الحدود هي معادلة يمكِن كتابتها في صورة: $P(x) = 0$

حيث $P(x)$ كثير حدود من أيِّ درجة ويسمّى كثير الحدود المرتبط بالمعادلة.

خطوات حل معادلة كثير حدود

يمكِن حلُّ بعض معادلات كثيرات الحدود باستعمال طرائق التحليل البسيطة التـي درست سابقا

مثل التحليل بإخراج عامل مشترك أو باستعمال التجميع

لكن عندما لا توجد طريقة واضحة للتحليل بالاعتماد على طرق التحليل البسيطة السابقة

(مثل إخراج العامل المشـترك أو استعمال التجميع) طبــق ما يلي لحـل المعادلة

- نكتب كثير الحدود المرتبط بالمعادلة
- نستخدم نظرية الاصفار النسبية لتحليل كثير الحدود

(طريقة التجميع طريقة أسرع وأسهل مع المعادلات ذات الأربعة حدود)

- أجد الأصفار النسبية المُحتمَلة لكثير الحدود المرتبط بالمعادلة
- اعوض لاختبار بعض الأصفار النسبية المُحتمَلة.

— يتم تجريب أعداد من عوامل الحد الثابت في كثير الحدود اولا

— العدد الذي يجعل قيمة كثير الحدود صفر هو أول صفر (حل) للمعادلة

- أُحلِّل كثير الحدود باستعمال الأصفار النسبية

— بمجرد إيجاد الصفر الأول يتم قسمة كثير الحدود الأصلي على هذا العامل باستخدام

طريقة الجدول او القسمة الطويلة للحصول على كثير حدود من درجة أقل

— يتم تحليل كثير الحدود الناتج عن القسمة (غالبًا ما يكون عبارة تربيعية) لإيجاد باقي الأصفار

- نجد حلول المعادلة

— يتم مساواة كل عامل من عوامل كثير الحدود (بعد التحليل الكامل) بالصفر لإيجاد جميع حلول المعادلة

سنطبق هذه الخطوات والحالات في الامثلة التالية ان شاء الله

ونذكــر ان حل معادلات كثيرات الحدود يشبه تمامًا إيجاد الأصفار حيث أن أصفار كثيرات الحدود هي نفسها حلول معادلتها

وفي التمثيل البياني فإن اصفار الاقتران نجدها عند نقطة التقاطع مع محور x

حلُّ معادلات كثيرات الحدود

طريقة التجميع (لتحليل بعض المعادلات الرباعية الحدود)

تعتمد الطريقة على إخراج العامل المشترك من كل حدين متجاورين

إذا نتج أقواس متشابهة نخرج عامل مشترك مرة أخرى ونكمل عملية التحليل

طريقة التجميع طريقة أسرع وأسهل مع المعادلات ذات الأربعة حدود

ملاحظة : اذا كانت المعادلة من اربعة حدود عند التحليل بالتجميع ليس بالضرورة ان ينتج اقواس متشابهة

عندها تفشل هذه الطريقة ونعود لطريقة الاصفار النسبية بالتجريب والقسمة

مثال أحُلُّ المعادلة: $x^3 - x^2 - 16x + 16 = 0$

يمكن تحليل $x^3 - x^2 - 16x + 16$ بتجميع الحدود ثم عامل مشترك

$$x^2(x-1) - 16(x-1) = 0$$
$$(x-1)(x^2-16) = 0$$
$$(x-1)(x-4)(x+4) = 0$$

المعادلة من اربعة حدود نتج اقواس متشابهة يمكن التحليل بالتجميع

نجد حلول المعادلة

$x-1=0 \longrightarrow x=1$

or $x+4=0 \longrightarrow x=-4$

or $x-4=0 \longrightarrow x=4$

إذن، حلول المعادلة هي: $x = 1, x = -1$.

مثال أحُلُّ المعادلة: $x^3 - x^2 - x + 1 = 0$

يمكن تحليل $x^3 - x^2 - x + 1$ بتجميع الحدود ثم عامل مشترك

$$x^2(x-1) - (x-1) = 0$$
$$(x-1)(x^2-1) = 0$$
$$(x-1)(x-1)(x+1) = 0$$

المعادلة من اربعة حدود نتج اقواس متشابهة يمكن التحليل بالتجميع

نجد حلول المعادلة

$x-1=0 \longrightarrow x=1$

or $x+1=0 \longrightarrow x=-1$

إذن، حلول المعادلة هي: $x = 1, x = -1$.

حلُّ معادلات كثيرات الحدود

مثال 5 أَحُلُّ المعادلة: $x^3 - x^2 - 14x + 24 = 0$

- لاحظ لا توجد طريقة واضحة للتحليل بالاعتماد على طرق التحليل البسيطة السابقة
- نكتب كثير الحدود المرتبط بالمعادلة $P(x) = x^3 - x^2 - 14x + 24$
- نستخدم نظرية الاصفار النسبية لتحليل كثير الحدود

أجد الأصفار النسبية المُحتمَلة لكثير الحدود المرتبط بالمعادلة.

بما أنَّ معامل الحدِّ الرئيس هو (1)، فإنَّ الأصفار النسبية المُحتمَلة هي عوامل الحدِّ الثابت الذي يساوي (24).

إذن، الأصفار النسبية المُحتمَلة لكثير الحدود $P(x)$ هي: $\pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm6, \pm8, \pm12, \pm24$

اعوض لاختبار بعض الأصفار النسبية المُحتمَلة.

$P(1) = (1)^3 - (1)^2 - 14(1) + 24 = 10$ ✗

$P(2) = (2)^3 - (2)^2 - 14(2) + 24 = 0$ ✓

بما أنَّ: $P(2) = 0$، فإنَّه يوجد لكثير الحدود صفر عندما $x = 2$. إذن، $(x-2)$ عامل من عوامل $P(x)$.

أُحلِّل كثير الحدود باستعمال الأصفار النسبية

$$x^3 - x^2 - 14x + 24 = 0$$
$$(x-2)(x^2 + x - 12) = 0$$
$$(x-2)(x+4)(x-3) = 0$$

$\times$	x^2	x	-12	
x	x^3	x^2	$-12x$	0
-2	$-2x^2$	$-2x$	24	

- نجد حلول المعادلة

$x-2 = 0 \longrightarrow x = 2$

or $x + 4 = 0 \longrightarrow x = -4$

or $x - 3 = 0 \longrightarrow x = 3$

إذن، حلول المعادلة هي: $x = 2, x = -4, x = 3$.

ملاحظة: لاحظ أن المعادلة $x^3 - x^2 - 14x + 24 = 0$ من اربعة حدود فهل يمكن التحليل بتجميع الحدود

$$x^2(x - 1) - 14(x - 2) = 0$$

لم ينتج اقواس متشابهه لذلك تفشل هذه الطريقة ونعود لطريقة الاصفار النسبية بالتجريب والقسمة

اذا كانت المعادلة من اربعة حدود عند التحليل بالتجميع ليس بالضرورة ان ينتج اقواس متشابهة عندها تفشل هذه الطريقة ونعود لطريقة الاصفار النسبية بالتجريب والقسمة

الوحدة 1 الاقترانات والمقادير الجبرية | الدرس 1 نظريتا الباقي والعوامل | الاستاذ حمزة ابو الفول

حلُّ معادلات كثيرات الحدود

المعادلة من اربعة حدود نتج اقواس متشابهة يمكن التحليل بالتجميع

أتحقّق من فهمي a) أحُلُّ المعادلة: $x^3 - x^2 - 9x + 9 = 0$

يمكن تحليل $x^3 - x^2 - 9x + 9$ بتجميع الحدود ثم عامل مشترك

$$x^2(x-1) - 9(x-1) = 0$$

$$(x-1)(x^2-9) = 0$$

$$(x-1)(x-3)(x+3) = 0$$

- نجد حلول المعادلة

$$x-1=0 \longrightarrow x=1$$

$$\text{or} \quad x+3=0 \longrightarrow x=-3$$

$$\text{or} \quad x-3=0 \longrightarrow x=3$$

إذن، حلول المعادلة هي: $x = 1, x = -3, x = 3$.

- لاحظ يمكن تحليل $x^3 - x^2 - 9x + 9$ باستخدام نظرية الاصفار النسبية
- نكتب كثير الحدود المرتبط بالمعادلة

كثيـــر الحدود المرتبط بالمعادلة هو: $P(x) = x^3 - x^2 - 9x + 9$

- نستخدم نظرية الاصفار النسبية لتحليل كثير الحدود

أجد الأصفار النسبية المُحتمَلة لكثير الحدود المرتبط بالمعادلة.

بمـــا أنَّ معامل الحدِّ الرئيس هو (1)، فإنَّ الأصفار النســـبية المُحتمَلة هي عوامل الحدِّ الثابت الذي يساوي (9).

إذن، الأصفار النسبية المُحتمَلة لكثير الحدود $P(x)$ هي: $\pm 1, \pm 2, \pm 3$

اعوض لاختبار بعض الأصفار النسبية المُحتمَلة.

$P(1) = 0 \longleftarrow$ $(x-1)$ عامـل مـن عوامـل $P(x)$

أُحلِّل كثير الحدود باستعمال الأصفار النسبية

$$x^3 - x^2 - 9x + 9 = (x-1)(x^2-9)$$

$$= (x-1)(x-3)(x+3)$$

×	x^2	-9		
x	x^3	$-9x$		0
-1	$-x^2$	9		

حلُّ معادلات كثيرات الحدود

أتحقَّق من فهمي b) أحُلُّ المعادلة: $x^3 + 3x^2 - 4 = 0$

كثيــر الحدود المرتبط بالمعادلة هو: $P(x) = x^3 + 3x^2 - 4$

$P(1) = 0 \longrightarrow$ $(x-1)$ عامـل مـن عوامـل $P(x)$

$$x^3 + 3x^2 - 4 = 0$$
$$(x-1)(x^2+4x+4) = 0$$
$$(x-1)(x+2)(x+2) = 0$$

×	x^2	$4x$	4	
x	x^3	$4x^2$	$4x$	0
-1	$-x^2$	$-4x$	-4	

$x-1=0 \longrightarrow x=1$

or $x+2=0 \qquad x=-2$

إذن، حلول المعادلة هي: $x = 1, x = -2$.

يمكن الحل بالطريقة التالية

$x^3 + 3x^2 - 4 = 0 \longrightarrow x^3 + 3x^2 - 1 - 3 = 0$

$\longrightarrow (x^3 - 1) + (3x^2 - 3) = 0$

$\longrightarrow (x^3 - 1) + 3(x^2 - 1) = 0$

$\longrightarrow (x-1)(x^2+x+1) + 3(x-1)(x+1) = 0$

$\longrightarrow (x-1)\big((x^2+x+1) + 3(x+1)\big) = 0$

$\longrightarrow (x-1)\big(x^2+x+1+3x+3\big) = 0$

$\longrightarrow (x-1)(x^2+4x+4) = 0$

$\longrightarrow (x-1)(x+2)(x+2) = 0$

$x-1=0 \longrightarrow x=1$

or $x+2=0 \longrightarrow x=-2$

إذن، حلول المعادلة هي: $x = 1, x = -2$.

حلُّ معادلات كثيرات الحدود

ملاحظـــات

- أصفار كثيرات الحدود هي نفسها حلول معادلاتها، وهي أيضاً جذور المعادلة وإحداثيات نقاط تقاطع منحنى كثير الحدود مع محور x
- يمكن إيجاد الحل الأول (أو الصفر الأول) لمعادلة كثير الحدود
  - نساوي المعادلة بالصفــر ثم نجرب أعداد من عوامل الحد الثابت في كثير الحدود اولا
    واذا لم نجد نلجأ الى تجريب باقي الاصفار المحتملة
  - العدد الذي يجعل قيمة كثير الحدود تساوي صفر عند التعويض به هو الحل الأول للمعادلة (أو الصفر الأول)
- إيجاد باقي حلول المعادلة بعد الحل الأول
  - اذا كان الحل الاول $x=a$ ، فإن $(x-a)$ هو عامل من عوامل كثير الحدود
  - بما أننا وجدنا العامل الاول وهو $(x-a)$ نقوم بقسمة كثير الحدود الأصلي على $(x-a)$
    باستخدام القسمة الطويلة او طريقة الجدول
  - ناتج القسمة سيكون كثير حدود من درجة أقل وغالباً ما يكون عبارة تربيعية يمكن تحليلها لإيجاد باقي الحلول
- طريقة "تجميع الحدود" في حل معادلات كثيرات الحدود
  - طريقة تجميع الحدود تُستخدم لتحليل كثيرات الحدود ذات الأربعة حدود بشكل أساسي
  - تعتمد على تقسيم كثير الحدود الى مجموعتين كل حدين مع بعض ثم اخراج عامل مشترك من كل مجموعة
  - اذا نتج قوس مشترك بين المجموعتين نخرجه كعامل مشترك جديد ونكمل التحليل
  - اذا لم ينتج قوس مشترك بين المجموعتين تفشل هذه الطريقة ونعود الى طريقة الاصفار النسبية
  - تعتبر هذه الطريقة اسرع من طريقة الاصفار النسبية
- التعامل مع العبارة التربيعية الناتجة عن القسمة
  - العبارة التربيعية الناتجة عن القسمة تحلل عادةً باستخدام طرق تحليل العبارة التربيعية
  - يمكن أيضاً استخدام المميز للتأكد مما إذا كانت العبارة التربيعية قابلة للتحليل إلى جذور حقيقية

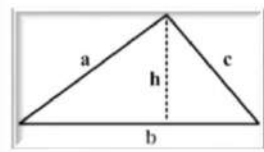
الوحدة 1 الاقترانات والمقادير الجبرية | الدرس 1 نظريتا الباقي والعوامل | الاستاذ حمزة ابو الفول

تطبيقات حياتية

- يمكن نمذجة كثير من المواقف الحياتية والعلمية باســتعمال معادلات كثيرات حدود يتطلَّب حلُّها استعمال نظرية الأصفار النسبية.
- عند حل المسائل الحياتية المتعلقة بالحجوم التي تقود إلى معادلات تكعيبية أو من درجات أعلى، يتم اتباع نفس خطوات حل معادلات كثيرات الحدود
- مع الانتباه إلى أن الأبعاد الفيزيائية (مثل الطول، العرض، الارتفاع، نصف القطر) يجب أن تكون قيمًا موجبة لذلك لا نجرب قيما سالبة ونرفض القيم السالبة الناتجة من الحل

قوانين متعلقة ببعض الاشكال الهندسية

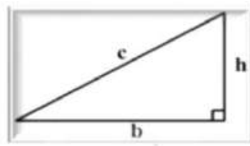
المثلث



$$A = \frac{1}{2} b\, h$$

$$P = a + b + c$$

المثلث قائم الزاوية

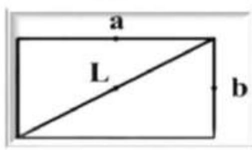


$$A = \frac{1}{2} bh$$

$$P = b + h + c$$

$$c = \sqrt{b^2 + h^2}$$

المستطيل

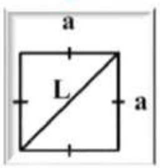


$$A = ab$$

$$P = 2a + 2b$$

$$L = \sqrt{a^2 + b^2}$$

المربع



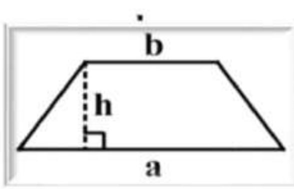
$$A = a^2$$

$$P = 4a$$

$$L = \sqrt{2}\, a$$

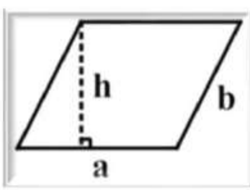
المثلث متطابق الضلعين

شبه المنحرف



$$A = \frac{1}{2}(a + b)(h$$

متوازي الاضلاع



$$A = a\, h$$

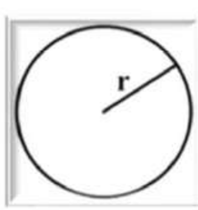
المثلث متطابق الاضلاع

$$A = \frac{\sqrt{3}}{4}\, a^2$$

$$P = 3a$$

قياس كل زاويةٍ في المثلث المتطابق الأضلاع 60

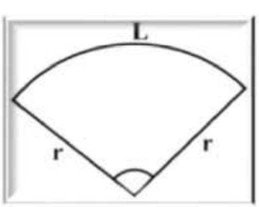
الدائرة



$$A = \pi r^2$$

$$C = 2\,\pi\, r$$

القطاع الدائري

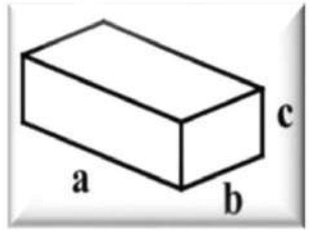


$$A = \frac{1}{2} r^2 \theta$$

$L = r\,\theta$ θ بالراديان

قوانين متعلقة ببعض المجسمات

متوازي المستطيلات

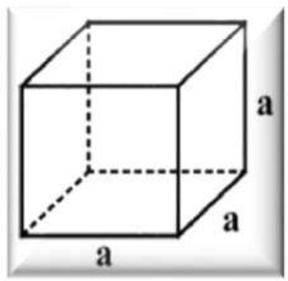


$V = a.b.c$

$A_{\text{الكلية}} = 2ab + 2bc + 2ac$

$A_{\text{القاعدة}} = ab$

المكعب

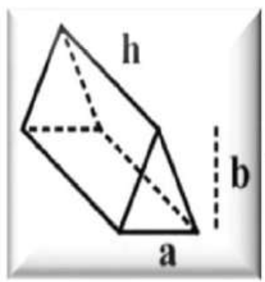


$V = a^3$

$A_{\text{الكلية}} = 6a^2$

$A_{\text{القاعدة}} = a^2$

المنشور الثلاثي

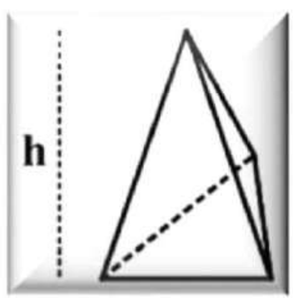


الحجم = مساحة القاعدة × الارتفاع

المساحة الجانبية = محيط القاعدة × ارتفاع المنشور

المساحة الكلية= الجانبية + القاعدتين

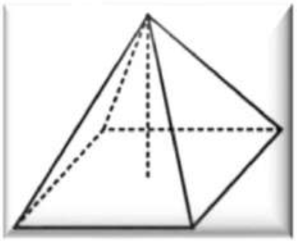
الهرم الثلاثي



الحجم = ثلث × م القاعدة × الارتفاع

$V = \frac{1}{3} A\, h$

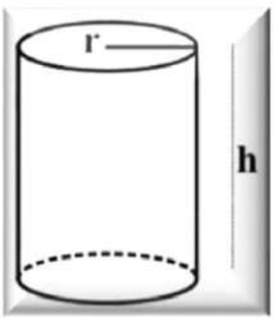
الهرم الرباعي



الحجم = ثلث × م القاعدة × الارتفاع

$V = \frac{1}{3} A\, h$

الاسطوانة

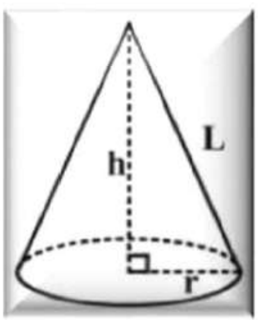


$V = \pi r^2 h$

$A_{\text{الجانبية}} = 2\pi r h$

$A_{\text{الكلية}} = 2\pi r h + 2\pi r^2$

المخروط الدائري



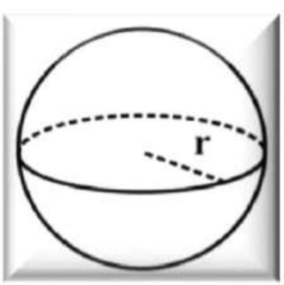
$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

$A_{\text{الجانبية}} = \pi r L$

$A_{\text{الكلية}} = \pi r^2 + \pi r L$

$L = \sqrt{r^2 + h^2}$

الكرة



$V = \frac{4}{3}\pi r^3$

$A_{\text{السطح}} = 4\pi r^2$

تطبيقات حياتية

مثال 6 هندسة العمارة: **صنع مهندس معماري نموذجًا لبناية على هيئة هرم قاعدته مُربَّعة الشكل باستعمال طابعة ثلاثية الأبعاد. إذا كان ارتفاع النموذج يقل 2 dm عن طول ضلع قاعدته، وكان حجمه $25\ dm^3$، فما أبعاد النموذج؟**

أستعمل قانون حجم الهرم لكتابة معادلة.

بما أنَّ قاعدة الهرم مُربَّعة، فإنَّني أفترض أنَّ طول ضلعها x dm. ومنه، فإنَّ مساحتها x^2.

وبما أنَّ ارتفاع الهرم يقل 2 dm عن طول ضلع القاعدة، فإنَّ ارتفاع الهرم هو $(x-2)$ dm.

حجم الهرم $V = \frac{1}{3} \times$ مساحة القاعدة $\times$ الارتفاع $= \frac{1}{3} \times B \times h$

$$25 = \frac{1}{3} \times x^2 \times (x-2)$$

$$x^3 - 2x^2 = 75 \longrightarrow x^3 - 2x^2 - 75 = 0$$

حجم الهرم (V) يساوي ثلث مساحة قاعدته B في ارتفاعه (h).

أجد الأصفار النسبية المُحتمَلة لكثير الحدود المرتبط بالمعادلة، وهو: $P(x) = x^3 - 2x^2 - 75$.

الأصفار النسبية المُحتمَلة لكثير الحدود $P(x)$ هي: $\pm1 , \pm3 , \pm5 , \pm15 , \pm25 , \pm75$

اعوض لاختبار بعض الأصفار النسبية المُحتمَلة.

بما أنَّ الطول لا يُمكِن أنْ يكون سالبًا، فإنَّني أختبر الأصفار النسبية الموجبة فقط.

بما أنَّ الارتفاع $(x-2)$، فهذا يدلُّ على أنَّ $x > 2$؛ لذا، أختبر الأصفار النسبية التي تزيد على 2

$$P(3) = (3)^3 - 2(3)^2 - 75 = -66 \quad ✗$$

$$P(5) = (5)^3 - 2(5)^2 - 75 = 0 \quad ✓$$

أُحلِّل المعادلة باستعمال الأصفار النسبية، ثمَّ أحُلُّها.

$$x^3 - 2x^2 - 75 = 0$$

$$(x-5)(x^2 + 3x + 15) = 0$$

$$x - 5 = 0 \quad \text{or} \quad x^2 + 3x + 15 = 0$$

$\times$	x^2	$3x$	15	
x	x^3	$3x^2$	$15x$	0
-5	$-5x^2$	$-15x$	-75	

بما أنَّ العامل التربيعي $(x^2 + 3x + 15)$ مُميِّزه سالب فانه لا توجد له أصفار

إذن $x = 5$ هو الحل الوحيد للمعادلة.

إذن، طول قاعدة النموذج 5 dm، وارتفاعه 3 dm

مُميِّز المعادلة التربيعية $ax^2 + bx + c = 0$ هو: $\Delta = b^2 - 4ac$

تطبيقات حياتية

أتحقَّق من فهمي يزيد ارتفاع أسطوانة $5\ cm$ على طول نصف قُطْر قاعدتها. إذا كان حجم الأسطوانة $72\pi\ cm^3$، فما طول نصف قُطْر قاعدتها وارتفاعها؟

الوحدة 1 الاقترانات والمقادير الجبرية | الدرس 1 نظريتا الباقي والعوامل | الاستاذ حمزة ابو الفول

أتدرّب وأحُلّ المسائل

1. أستعمل طريقة الجدول لإيجاد ناتج القسمة والباقي $(6x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 7x - 12) \div (3x - 4)$

2. أستعمل طريقة الجدول لإيجاد ناتج القسمة والباقي $(2x^5 - 5x^4 + 9x^2 - 10x + 15) \div (1 - 2x)$

3. أستعمل نظرية الباقي لإيجاد باقي قسمة $f(x)$ على $h(x)$ **حيث** $f(x) = 8x^4 + 2x^3 - 53x^2 + 37x - 6,\ h(x) = x + 1$

أتدرّب وأحُلّ المسائل

4 أستعمل نظرية الباقي لإيجاد باقي قسمة $f(x)$ على $h(x)$ حيث $f(x) = 4x^3 + 2x^2 - 6x - 8,\ h(x) = 3x + 4$

5 أُبيِّن أنَّ $h(x)$ عامل من عوامل $f(x)$ حيث $f(x) = x^3 - 37x + 84,\ h(x) = x + 7$

6 أُبيِّن أنَّ $h(x)$ عامل من عوامل $f(x)$ حيث $f(x) = 2x^3 - 5x^2 - x + 6,\ h(x) = 2x - 3$

الوحدة 1 الاقترانات والمقادير الجبرية | الدرس 1 نظريتا الباقي والعوامل | الاستاذ حمزة ابو الفول

أتدرّب وأحُلّ المسائل

7 احلل الاقتران $f(x)=x^3+3x^2-13x-15$ تحليلا كاملا

أتدرّب وأحُلّ المسائل

8 احلل الاقتران $g(x)=x^4-7x^3+13x^2+3x-18$ تحليلا كاملا

أتدرّب وأحُلّ المسائل

9 احلل الاقتران $h(x) = 2x^3 - 13x^2 + 17x + 12$ تحليلا كاملا

الوحدة 1 الاقترانات والمقادير الجبرية | الدرس 1 نظريتا الباقي والعوامل | الاستاذ حمزة ابو الفول

أتدرّب وأحُلّ المسائل

10 احلل الاقتران $q(x) = 3x^3 - 18x^2 + 2x - 12$ تحليلا كاملا

الوحدة 1 الاقترانات والمقادير الجبرية | الدرس 1 نظريتا الباقي والعوامل | الاستاذ حمزة ابو الفول

أتدرّب وأحُلّ المسائل

11 حـل المعادلة التالية $x^3 - 4x^2 - 7x + 10 = 0$

الوحدة 1 الاقترانات والمقادير الجبرية | الدرس 1 نظريتا الباقي والعوامل | الاستاذ حمزة ابو الفول

أتدرّب وأحُلّ المسائل

12 حـل المعادلة التالية $5x^3 - 15x^2 - 47x - 15 = 2x^3 - 10x^2$

أتدرّب وأحُلّ المسائل

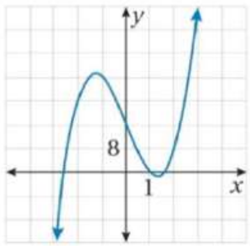
13 حـل المعادلة التالية $3x^3 + 3x^2 - 14x - 8 = 0$

الوحدة 1 الاقترانات والمقادير الجبرية | الدرس 1 نظريتا الباقي والعوامل | الاستاذ حمزة ابو الفول

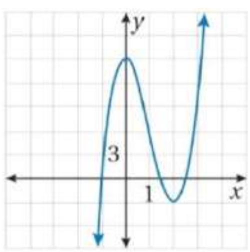
أتدرّب وأحُلّ المسائل

14 حـل المعادلة التالية $6x^3 - 13x^2 + x + 2 = 0$

أتدرّب وأحُلّ المسائل



15 أستعمل التمثيل البياني لمنحنى **الاقتران** $f(x) = 4x^3 - 20x + 16$ لإيجاد أحد أصفاره النسبية، ثمَّ إيجاد جميع أصفار الاقتران $f(x)$



16 أستعمل التمثيل البياني لمنحنى **الاقتران** $f(x) = 4x^3 - 12x^2 - x + 15$ لإيجاد أحد أصفاره النسبية، ثمَّ إيجاد جميع أصفار الاقتران $f(x)$

الوحدة 1 الاقترانات والمقادير الجبرية | الدرس 1 نظريتا الباقي والعوامل | الاستاذ حمزة ابو الفول

أتدرّب وأحُلّ المسائل

17 إذا كان: $x = 1, x = 4$ هما حلّين للمعادلة: $x^3 - 3x^2 + ax + b = 0$، فأجد الحلَّ الثالث لها.

18 إذا كان باقي قسمة: $f(x) = x^3 + ax^2 + x + 5$ على $x - 1$ يساوي مثلي باقي قسمته على $x + 1$، فما قيمة a؟

الوحدة 1 الاقترانات والمقادير الجبرية | الدرس 1 نظريتا الباقي والعوامل | الاستاذ حمزة ابو الفول

أتدرّب وأحُلُّ المسائل

19 منحوتات جليدية: تُصنَع بعض المنحوتات الجليدية عن طريق مِلْءِ قالب بالماء ثمَّ تجميده. إذا كانت إحدى المنحوتات الجليدية على شكل هرم قاعدته مُربَّعة الشكل، وارتفاعها يزيد $1\ m$ على طول قاعدتها، فأجد أبعاد المنحوتة إذا كان حجمها $4\ m^3$

أتدرّب وأحُلّ المسائل

إذا كان: $f(x) = ax^3 + bx^2 - 9x - 9$، حيث: a, b ثابتان، و $a, b \neq 0$، فأُجيب عن الأسئلة الآتية:

20 إذا كان $(x - 3)$ عاملًا من عوامل الاقتران $f(x)$، فأُبيِّن أنَّ: $3a + b = 4$

21 إذا كان باقي قسمة $f(x)$ على $x - 2$ يساوي -15، فأُبيِّن أنَّ: $2a + b = 3$

22 أجد قيمة كلٍّ من: a، و b.

أتدرّب وأحُلّ المسائل

23 أحُلُّ المسألة الواردة في بداية الدرس.

مسألة اليوم صندوق شاحنة على شكل متوازي مستطيلات، أبعاده بالأمتار: $x^2+6x-19$,x ,2. ما قيمة x التي تجعل حجم الصندوق $48\ \text{m}^3$؟

مهارات التفكير العليا

24 **مسألة مفتوحة**: أكتب اقترانًا من الدرجة الثالثة يكون $(x-3)$ أحد عوامله، ويكون باقي قسمته على $(x+1)$ يساوي -8

25 أكتشف الخطأ: أرادت سهام إيجاد الأصفار النسبية المُحتمَلة للاقتران:
$f(x) = -8x^6 + 7x^5 - 3x^4 + 45x^3 - 1500x^2 + 16x$، فكان حلُّها كالآتي:

$$f(x) = -8x^6 + 7x^5 - 3x^4 + 45x^3 - 1500x^2 + 16x$$

$$\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8, \pm \frac{1}{4}, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{16}, \pm \frac{1}{8} \quad ✗$$

أُبيِّن الخطأ الذي وقعت فيه سهام، ثمَّ أُصحِّحه.

الوحدة 1 الاقترانات والمقادير الجبرية | الدرس 1 نظريتا الباقي والعوامل | الاستاذ حمزة ابو الفول

26 تحدٍّ: أُحلِّل المقدار: $x^{13} - 15x^9 - 16x^5$.