S.N.S
SKY NATIONAL SCHOOLS
مدارس سكاي الوطنية
الشموع

الرياضيات

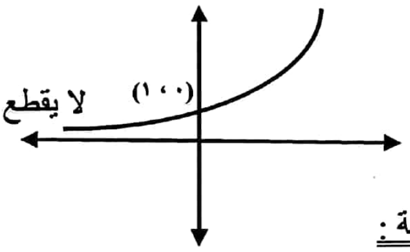
الأستاذ
محمد حميدي
0795986656

Scanned by CamScanner

أولاً : الاقتران الأسي الطبيعي :

هو اقتران على صورة $\text{هـ}^{\text{ق(س)}}$ وهو عبارة عن اقتران أساسه ثابت هو هـ وهو العدد النيبيري ٢,٧ وحده الأعلى متغير هو س أو ٢س أو جاس

$\text{هـ}^{\text{س}}$ ، $\text{هـ}^{\text{٢س}}$ ، $\text{هـ}^{\text{س}^{\text{٢}}}$ ، $\text{هـ}^{\text{جا س}}$ ، $\text{هـ}^{\text{م(س)}}$



*** قواعد هامة :**

$\text{هـ}^{\text{٠}} = \text{١}$

$\text{هـ}^{\text{س}} \times \text{هـ}^{\text{ص}} = \text{هـ}^{\text{س+ص}}$

$\frac{\text{هـ}^{\text{س}}}{\text{هـ}^{\text{ص}}} = \text{هـ}^{\text{س - ص}}$

$(\text{هـ}^{\text{س}})^{\text{٢}} = \text{هـ}^{\text{٢س}}$

$\sqrt{\text{هـ}^{\text{س}}} = \text{هـ}^{\frac{\text{١}}{\text{٢}}\text{س}}$

$\sqrt[\text{ن}]{\text{هـ}^{\text{س}}} = \text{هـ}^{\frac{\text{١}}{\text{ن}}\text{س}}$

*** قاعدة : مشتقة الاقتران الأسي الطبيعي**

$\text{ص} = \text{هـ}^{\text{م(س)}} \Leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{هـ}^{\text{م(س)}} \times \text{مَ(س)}$

العلاقة	المشتقة
$\text{هـ}^{\text{س}}$	$\text{هـ}^{\text{س}} \times \text{١}$
$\text{هـ}^{\text{٢س+١}}$	$\text{هـ}^{\text{٢س+١}} \times \text{٢}$
$\text{هـ}^{\text{جا س}}$	$\text{هـ}^{\text{جا س}} \times \text{جتاس}$
$\text{هـ}^{\text{س}^{\text{٢}}\text{+١}}$	$\text{هـ}^{\text{س}^{\text{٢}}\text{+١}} \times \text{٢س}$
$\text{هـ}^{\text{١ − ٥س}}$	$\text{هـ}^{\text{١ − ٥س}} \times \text{-٥}$
$\text{هـ}^{\text{س}^{\text{٢}}\text{+ جا س}}$	$\text{هـ}^{\text{س}^{\text{٢}}\text{+ جا س}} \times (\text{٢س+جتاس})$

١) إذا كان $\text{ص} = \sqrt[\text{٥}]{\text{هـ}^{\text{س}}}$ ، جد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$:

الحل : $\text{ص} = \text{هـ}^{\frac{\text{١}}{\text{٥}}\text{س}} \longleftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{١}}{\text{٥}} \times \text{هـ}^{\frac{\text{١}}{\text{٥}}\text{س}}$

---

٢) إذا كان $\text{ص} = \sqrt{\text{س}}\ \text{هـ}^{\text{جا س}}$ ، جد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$:

الحل : $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \sqrt{\text{س}} \times \text{جتا س}\ \text{هـ}^{\text{جا س}} + \text{هـ}^{\text{جا س}} \times \frac{\text{١}}{\text{٢}\sqrt{\text{س}}}$

---

٣) $\text{ص} = \frac{\text{هـ}^{\text{٥س}}}{\text{هـ}^{\text{٢س}}}$ ، جد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$:

الحل : $\text{ص} = \text{هـ}^{\text{٣س}} \longleftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{٣} \times \text{هـ}^{\text{٣س}}$

---

٤) إذا كان $\text{ص} = \text{هـ}^{\text{أس}}$ ، $\text{أ} \in \text{ح}$ ، جد قيمة أ بحيث أن :

$\text{صً} + \text{٣صَ} + \text{٢ص} = \text{٠}$

الحل : $\text{ص} = \text{هـ}^{\text{أس}}$ ، $\text{صَ} = \text{أ}\ \text{هـ}^{\text{أس}}$ ، $\text{صً} = \text{أ}^{\text{٢}}\ \text{هـ}^{\text{أس}}$

$\text{أ}^{\text{٢}}\ \text{هـ}^{\text{أس}} + \text{٣} \times \text{أ}\ \text{هـ}^{\text{أس}} + \text{٢هـ}^{\text{أس}} = \text{٠}$

$\text{هـ}^{\text{أس}}\ (\text{أ}^{\text{٢}} + \text{٣أ} + \text{٢}) = \text{٠}$

$(\text{أ} + \text{٢})(\text{أ} + \text{١}) = \text{٠} \longleftarrow \text{أ} = \text{-٢} \text{ ، } \text{-١}$

---

٥) إذا كان $\text{ص} = \text{هـ}^{\text{س}}\text{جا س}$ ، أثبت أن :

$\text{صً} - \text{٢صَ} + \text{٢ص} = \text{٠}$

الحل : $\text{ص} = \text{هـ}^{\text{س}}\text{جاس}$ ، $\text{صَ} = \text{هـ}^{\text{س}}\text{جتاس} + \text{جاس}\ \text{هـ}^{\text{س}}$

$\text{صً} = \cancel{\text{هـ}^{\text{س}} \times \text{-جاس}} + \text{جتاس}\ \text{هـ}^{\text{س}} + \cancel{\text{جاس}\ \text{هـ}^{\text{س}}} + \text{هـ}^{\text{س}}\text{جتاس}$

$\therefore \text{صً} = \text{٢ جتاس}\ \text{هـ}^{\text{س}} \longleftarrow \text{صً} - \text{٢صَ} + \text{٢ص}$

$\text{٢جتاس}\ \text{هـ}^{\text{س}} - \text{٢هـ}^{\text{س}}\text{جتاس} - \text{٢جاس}\ \text{هـ}^{\text{س}} + \text{٢جاس}\ \text{هـ}^{\text{س}} = \text{٠}$

$\therefore \text{صً} - \text{٢صَ} + \text{٢ص} = \text{٠}$

---

٦) جد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ لكل من الإقترانات الآتية :

أ) $\text{ص} = (\text{هـ}^{\text{٤س+٥}})^{\text{٦}}$

الحل : $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{٦}(\text{هـ}^{\text{٤س+٥}})^{\text{٥}} \times \text{هـ}^{\text{٤س+٥}} \times \text{٤}$

ب) $\text{ص} = \text{هـ}^{\text{٢}} + \text{س}^{\text{٣}}\ \text{هـ}^{\text{جا س}}$

الحل : $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{٠} + \text{س}^{\text{٣}} \times \text{هـ}^{\text{جا س}} \times \text{جتا س} + \text{هـ}^{\text{جا س}} \times \text{٣س}^{\text{٢}}$

ج) $\text{ص} = \frac{\text{١} + \text{هـ}^{\text{٢س}}}{\text{هـ}^{\text{٥س}}}$

الحل : $\text{ص} = \text{هـ}^{\text{−٥س}} + \text{هـ}^{\text{−٣س}}$

$\text{صَ} = \text{هـ}^{\text{−٥س}} \times \text{-٥} + \text{هـ}^{\text{−٣س}} \times \text{-٣}$

منهاجي

Scanned by CamScanner

٧) إذا كان $\text{هـ}^{\text{س ص}} = \text{س} - \text{ص}$ ، أثبت أن

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{ص}^{\text{٢}} - \text{س ص} + \text{١}}{\text{س}^{\text{٢}} - \text{س ص} + \text{١}}$$

الحل : $\text{هـ}^{\text{س ص}}(\text{س}\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} + \text{ص}) = \text{١} - \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$

$$\text{س هـ}^{\text{س ص}}\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} + \text{هـ}^{\text{س ص}}\text{ص} = \text{١} - \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$$

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}(\text{س هـ}^{\text{س ص}} + \text{١}) = \text{١} - \text{هـ}^{\text{س ص}}\text{ص}$$

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{١} - \text{س ص} + \text{ص}^{\text{٢}}}{\text{س}^{\text{٢}} - \text{س ص} + \text{١}}$$

ثانياً : اقتران اللوغاريتم الطبيعي :

هو اقتران غير ثابت قابل للاشتقاق على مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة بحيث أن :

$\text{ق}(\text{أ ب}) = \text{ق}(\text{أ}) + \text{ق}(\text{ب})$ لكن $\text{أ} > \text{٠}$ ، $\text{ب} > \text{٠}$

* $\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\,(\text{ق}(\text{س}))$

---

* قوانين اللوغاريتمات :

١) $\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س} \times \text{ص}) = \text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س} + \text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{ص}$

٢) $\text{لو}_{\text{هـ}}\left(\frac{\text{س}}{\text{ص}}\right) = \text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س} - \text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{ص}$

٣) $\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}^{\text{ن}}) = \text{ن}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س}$

٤) $\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{١}) = \text{٠}$

٥) $\text{لو}_{\text{هـ}}\left(\text{هـ}^{\text{ق}(\text{س})}\right) = \text{ق}(\text{س})$

$$\left(\text{هـ}^{\text{لو}_{\text{هـ}}\text{ق}(\text{س})}\right) = \text{ق}(\text{س})$$

$$\text{هـ}^{\text{٢لو}_{\text{هـ}}\text{س}} = \text{س}^{\text{٢}}$$

$$\text{هـ}^{(\text{س} + \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})} = \text{هـ}^{\text{س}} \times \text{هـ}^{\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}} = \text{س} \times \text{هـ}^{\text{س}}$$

قاعدة :

١) إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س}$ ، $\text{س} > \text{٠}$ ، فإن $\text{قَ}(\text{س}) = \frac{\text{١}}{\text{س}}$

٢) إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{ل}(\text{س})$ وكان $\text{ل}(\text{س})$ قابلاً للاشتقاق

فإن : $\text{قَ}(\text{س}) = \frac{\text{لَ}(\text{س})}{\text{ل}(\text{س})}$

---

١) جد $\text{قَ}(\text{س})$ لكل مما يأتي :

أ) $\text{ق}(\text{س}) = \text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}^{\text{٢}} + \text{٥})$

ب) $\text{ق}(\text{س}) = \text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{جا ٢س}$

جـ) $\text{ق}(\text{س}) = \text{لو}_{\text{هـ}}\sqrt{\text{س}^{\text{٢}} + \text{٧}}$

الحل : أ) $\text{قَ}(\text{س}) = \frac{\text{٢س}}{\text{س}^{\text{٢}} + \text{٥}}$

ب) $\text{قَ}(\text{س}) = \frac{\text{٢جتا ٢س}}{\text{جا ٢س}} = \text{٢ظتا ٢س}$

جـ) $\text{ق}(\text{س}) = \text{لو}_{\text{هـ}}\sqrt{\text{س}^{\text{٢}} + \text{٧}} = \frac{\text{١}}{\text{٢}}\,\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}^{\text{٢}} + \text{٧})$

$\therefore \text{قَ}(\text{س}) = \frac{\text{١}}{\text{٢}} \times \frac{\text{٢س}}{\text{س}^{\text{٢}} + \text{٧}} = \frac{\text{س}}{\text{س}^{\text{٢}} + \text{٧}}$

---

٢) إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \text{لو}_{\text{هـ}}\left(\frac{\text{جتاس}}{\sqrt{\text{٤} - \text{٣س}^{\text{٢}}}}\right)$ ، فجد $\text{قَ}(\text{س})$:

الحل : $\text{ق}(\text{س}) = \text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{جتا س} - \text{لو}_{\text{هـ}}\sqrt{\text{٤} - \text{٣س}^{\text{٢}}}$

$$= \text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{جتا س} - \frac{\text{١}}{\text{٢}}\,\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{٤} - \text{٣س}^{\text{٢}})$$

$$\text{قَ}(\text{س}) = \frac{-\text{جاس}}{\text{جتاس}} - \frac{\text{١}}{\text{٢}} \times \frac{-\text{٦س}}{\text{٤} - \text{٣س}^{\text{٢}}} = -\text{ظاس} + \frac{\text{٣س}}{\text{٤} - \text{٣س}^{\text{٢}}}$$

---

٣) إذا كان $\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\left|\text{س}^{\text{٢}} - \text{٥}\right|$ فإن $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$:

[✓ أ) $\frac{\text{٢س}}{\text{س}^{\text{٢}} - \text{٥}}$]   ب) $\frac{-\text{٢س}}{\text{س}^{\text{٢}} - \text{٥}}$ جـ) ٠   د) ٢س

---

٤) إذا كان $\text{ص} = \text{هـ}^{\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}^{\text{٢}}}$ فإن $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$:

أ) ٠   ب) $\text{س}^{\text{٢}}$ [✓ جـ) ٢س]   د) ١

---

٥) إذا كان $\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}(\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}|)$ فإن $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$:

[✓ أ) $\frac{\text{١}}{\text{س لو}_{\text{هـ}}\text{س}}$]   ب) $\frac{\text{س}}{\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}}$

جـ) $\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س}$ د) $\text{هـ}^{\text{س}}$

---

٦) $\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}^{\text{٣}}\ \text{جاس})$ جد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$:

الحل : $\text{ص} = \text{٣لو}_{\text{هـ}}\,\text{س} + \text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{جاس}$

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{٣}}{\text{س}} + \frac{\text{جتاس}}{\text{جاس}} = \frac{\text{٣}}{\text{س}} + \text{ظتاس}$$

Scanned by CamScanner

٧) $\text{ص} = \text{هـ}^{\text{س}^{٢}}\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}^{٥}$ ، جد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$:

الحل : $\text{ص} = ٥\,\text{هـ}^{\text{س}^{٢}} \times \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}$

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٥\,\text{هـ}^{\text{س}^{٢}} \times \frac{١}{\text{س}} + \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} \times ٥\text{هـ}^{\text{س}^{٢}} \times ٢\text{س}$$

٨) تمرين : جد المشتقة الأولى لكل من الإقترانات الآتية :

أ) $\text{ق}(\text{س}) = (\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})^{٣}$

الحل : $\text{ق}'(\text{س}) = ٣(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})^{٢} \times \frac{١}{\text{س}}$

ب) $\text{ق}(\text{س}) = \text{ظا}(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})$

الحل : $\text{ق}'(\text{س}) = \text{قا}^{٢}(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}) \times \frac{١}{\text{س}}$

جـ) $\text{ق}(\text{س}) = \text{لو}_{\text{هـ}}\frac{(٤\text{س}^{٢}+٥)^{٦}}{(٧-٢\text{س})^{٥}}$

الحل : $\text{ق}(\text{س}) = ٦\,\text{لو}_{\text{هـ}}(٤\text{س}^{٢}+٥) - ٥\text{لو}_{\text{هـ}}(٧-٢\text{س})$

$$\text{ق}'(\text{س}) = \frac{٦ \times ٨\text{س}}{٤\text{س}^{٢}+٥} - \frac{٥ \times -٢}{٧-٢\text{س}}$$

٩) إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س} + \sqrt{\text{س}^{٢}-١})$ أثبت أن $\text{ق}'(\text{س}) = \frac{١}{\sqrt{\text{س}^{٢}-١}}$:

الحل : $\text{ق}'(\text{س}) = \frac{١ + \frac{\cancel{٢}\text{س}}{\cancel{٢}\times\sqrt{\text{س}^{٢}-١}}}{\text{س}+\sqrt{\text{س}^{٢}-١}}$

$$= \frac{\cancel{\sqrt{\text{س}^{٢}-١}+\text{س}}}{(\sqrt{\text{س}^{٢}-١})\cancel{(\text{س}+\sqrt{\text{س}^{٢}-١})}} = \frac{١}{\sqrt{\text{س}^{٢}-١}}$$

١٠) جد $\text{ق}'(\text{س})$ لكل ما يلي :

أ) $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{هـ}^{\text{س}^{٢}})$

الحل : $\text{ق}(\text{س}) = \text{س} \times \text{س}^{٢}$

$\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{٣} \longrightarrow \text{ق}'(\text{س}) = ٣\text{س}^{٢}$

ب) $\text{ق}(\text{س}) = \text{هـ}^{٣\text{لو}_{\text{هـ}}(١+\text{جاس})}$

الحل : $\text{ق}(\text{س}) = (١+\text{جاس})^{٣}$

$\text{ق}'(\text{س}) = ٣(١+\text{جاس})^{٢} \times (\text{جتاس})$

جـ) $\text{ص} = \text{هـ}^{\frac{١}{\text{س}}} + \text{لو}_{\text{هـ}}\sqrt{\text{س}}$

الحل : $\text{ص} = \text{هـ}^{\frac{١}{\text{س}}} + \frac{١}{٢}\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}$

$\text{ص}' = \text{هـ}^{\frac{١}{\text{س}}} \times \frac{-١}{\text{س}^{٢}} + \frac{١}{٢} \times \frac{١}{\text{س}}$

د) $\text{ص} = \text{هـ}^{٥} + \text{لو}_{\text{هـ}}\text{قاس}$

الحل : $\text{ص}' = ٠ + \frac{\cancel{\text{قاس}}\,\text{ظاس}}{\cancel{\text{قاس}}} = ٠ + \text{ظاس}$

١١) إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = ٣^{\text{ل}(\text{س})}$ حيث ل(س) قابل للاشتقاق
فاثبت أن : $\text{ق}'(\text{س}) = ٣^{\text{ل}(\text{س})} \times \text{ل}'(\text{س}) \times \text{لو}_{\text{هـ}}٣$

الحل : $\text{لو}_{\text{هـ}}\text{ق}(\text{س}) = \text{لو}_{\text{هـ}}٣^{\text{ل}(\text{س})}$

$\text{لو}_{\text{هـ}}\text{ق}(\text{س}) = \text{ل}(\text{س}) \times \text{لو}_{\text{هـ}}٣$

$\frac{\text{ق}'(\text{س})}{\text{ق}(\text{س})} = \text{لو}_{\text{هـ}}٣ \times \text{ل}'(\text{س})$

$\text{ق}'(\text{س}) = \text{لو}_{\text{هـ}}٣ \times \text{ل}'(\text{س}) \times \text{ق}(\text{س})$

$\text{ق}'(\text{س}) = \text{لو}_{\text{هـ}}٣ \times \text{ل}'(\text{س}) \times ٣^{\text{ل}(\text{س})}$

١٢) إذا كان $\text{ص} = \text{س}^{\text{س}}$ جد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$:

الحل :

منهاجي

١٣) إذا كان $\text{ص}^{٢} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س ص} - \text{هـ}^{\text{س}^{٢}}$ جد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$:

الحل : $\text{ص}^{٢} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} + \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص} - \text{هـ}^{\text{س}^{٢}}$

$٢\text{ص}\,\text{ص}' = \frac{١}{\text{س}} + \frac{\text{ص}'}{\text{ص}} - \text{هـ}^{\text{س}^{٢}} \times ٢\text{س}$

$٢\text{ص}\,\text{ص}' - \frac{\text{ص}'}{\text{ص}} = \frac{١}{\text{س}} - \text{هـ}^{\text{س}^{٢}} \times ٢\text{س}$

$\text{ص}'(٢\text{ص} - \frac{١}{\text{ص}}) = \frac{١}{\text{س}} - \text{هـ}^{\text{س}^{٢}} \times ٢\text{س}$

$\text{ص}' = (\frac{١}{\text{س}} - \text{هـ}^{\text{س}^{٢}} \times ٢\text{س})(\frac{\text{ص}}{٢\text{ص}^{٢}-١})$

Scanned by CamScanner

ثالثاً : معكوس المشتقة :

تعريف : إذا كان ق اقتراناً متصلاً على [أ ، ب] فإن م(س) يسمى معكوساً لمشتقة الاقتران ق(س) إذا كان م$'$(س) = ق(س) لكل س $\in$ (أ ، ب)

---

١) بين أن الاقتران م(س) = س^{٥} + ٤س^{٢} + ٢ هو معكوس لمشتقة الاقتران ق(س) = ٥س^{٤} + ٨س :

الحل : ق(س) اقتران متصل على ح لأنه كثير حدود

م$'$(س) = ٥س^{٤} + ٨س = ق(س)

$\therefore$ م(س) معكوس لمشتقة الاقتران ق(س)

---

٢) بين أن الاقتران م(س) = $\frac{س}{س + ١}$ هو معكوس لمشتقة الاقتران ق(س) = (س + ١)$^{-٢}$ ، س $\neq$ -١ :

الحل : ق(س) = (س + ١)$^{-٢}$ متصل ما عدا س = -١

$\therefore$ ق(س) متصل على مجاله

م$'$(س) = $\frac{(س + ١)(١) - (س)(١)}{(س + ١)^{٢}}$ = $\frac{١}{(س + ١)^{٢}}$

م$'$(س) = ق(س)

$\therefore$ م(س) معكوس لمشتقة الاقتران ق(س)

---

٣) إذا كان م(س) = ٢س^{٤} + $\sqrt{س^{٢} + ٣}$ معكوساً لمشتقة الاقتران ق(س) جد ق(١) :

الحل : م$'$(س) = ق(س) = ٨س^{٣} + $\frac{\cancel{٢}س}{\cancel{٢}\sqrt{س^{٢} + ٣}}$

م$'$(١) = ق(١) = ٨ + $\frac{١}{٢}$ = $\frac{١٧}{٢}$

---

٤) إذا كان م(س) معكوساً لمشتقة الاقتران ق(س) حيث ق(س) = ظتاس + ١ جد م$''$($\frac{\pi}{٤}$) :

الحل : م$'$(س) = ق(س) = ظتاس + ١

م$''$(س) = ق$'$(س) = - قتا^{٢}س

م$''$($\frac{\pi}{٤}$) = - قتا^{٢} $\frac{\pi}{٤}$ = -٢

---

٥) أحد الإقترانات التالية معكوساً لمشتقة الاقتران :

ق(س) = ٣س^{٢} + ٢ :

[✓ أ) س^{٣} + ٢س]   ب) ٣س^{٢} + ٢   ج) س^{٣} د) ٦س

---

٦) أحد الإقترانات التالية ليس معكوساً لمشتقة الاقتران :

ق(س) = ٩س^{٢} - ٤س :

أ) ٣س^{٣} - ٢س^{٢} ب) -٢س^{٢} + ٣س^{٣} + ٥

ج) ٣س^{٣} - ٢س^{٢} + ١٠   [✓ د) ١٨س - ٤]

---

٧) إذا كان م(س) = جتا^{٢}(س) معكوساً لمشتقة الاقتران ق(س) فإن ق(س) :

أ) ٢جا س   ب) جا ٢س

[✓ ج) - جا ٢س]   د) ٢جتا س

---

٨) إذا كان م(س) معكوساً لمشتقة الاقتران ق(س) ، ق(س) كثير حدود من الدرجة الأولى ، جد قاعدة ق(س) علماً بأن م$'$(١) = ٥ ، م$''$(٢) = ١٠ :

الحل :

ملاحظة هامة : طرح أي اقترانين معكوسين لمشتقة اقتران دائماً (ثابت) .

---

٩) إذا كان الاقترانان م(س) ، هـ(س) معكوسين لمشتقة الاقتران المتصل ق(س) وكان ل(س) = م(س) - هـ(س) ، فجد ل$'$(٤) :

الحل : الاقترانان م ، هـ معكوسان لمشتقة الاقتران ق

إذن م(س) - هـ(س) = جـ (ثابت) ، ومنه ل(س) = جـ

ل$'$(س) = ٠ ، ل$'$(٤) = ٠

---

١٠) إذا كان الاقترانان م$_{١}$(س) ، م$_{٢}$(س) معكوسين لمشتقة الاقتران ق وكان م$_{١}$(س) = ٣س^{٢} - ٢س + ٥ ، م$_{٢}$(٢) = ٤ ، فجد قاعدة م$_{٢}$(س) :

الحل :

منهاجي

---

١١) إذا كان الاقترانان م(س) ، هـ(س) معكوسين لمشتقة الاقتران المتصل ق(س) وكان : ل(س) = ٣م(س) - ٥هـ(س) ، جد ل$'$(س) بدلالة ق(س) :

الحل : م$'$(س) = هـ$'$(س) = ق(س)

ل$'$(س) = ٣م$'$(س) - ٥هـ$'$(س)

= ٣ق(س) - ٥ق(س) = -٢ق(س)

Scanned by CamScanner

١٢) إذا كان م(س) = س^{٣} + ب س^{٢} - ١ معكوساً لمشتقة الاقتران ق(س) ، ق(٢) = ٢٤ ، فجد قيمة الثابت ب :

الحل : ق(س) = مَ(س) = ٣س^{٢} + ٢ب س – ٠

ق(٢) = ١٢ + ٤ب = ٢٤ ← ٤ب = ١٢ ← $\boxed{\text{ب} = ٣}$

<u>التكامل :</u>

التكامل غير المحدود ↓ $\int$ <u>ءس</u> ↓ للدلالة على المتغير

التكامل المحدود ↓ $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}}$ ءس ، الجواب رقم

* المشتقة تلغي التكامل والتكامل يلغي المشتقة

*مشتقة التكامل المحدود صفراً

---

١) إذا كان $\int$ ق(س) ءس = س^{٢} - جتا س + ٢ ، فجد ق(س) ، قَ(س) :

الحل : $\int$ ق(س) ءس = س^{٢} - جتا س + ٢

ق(س) = ٢س + جا س (اشتقاق الطرفين)

قَ(س) = ٢ + جتا س

---

٢) إذا كان ق اقتراناً متصلاً على مجاله ، وكان $\int$ ق(س) جا $\frac{٣\pi}{٢}$ ءس = ١ + س^{٣} فجد ق(س) :

الحل : - ق(س) = ٣س^{٢}

ق(س) = -٣س^{٢}

---

٣) إذا كان ق اقتراناً متصلاً على ح : وكان $\int$ (ق(س) + ٢) ءس = س^{٣} + ب س^{٢} + ٩ ، ق(١) = ٧ ، فجد قيمة الثابت ب :

الحل : $\int$ (ق(س) + ٢) ءس = س^{٣} + ب س^{٢} + ٩

ق(س) + ٢ = ٣س^{٢} + ٢ب س

ق(١) + ٢ = ٣(١)^{٢} + ٢ب (١)

٧ + ٢ = ٣ + ٢ب ← ٩ = ٣ + ٢ب

٢ب = ٦ ومنه ب = ٣

---

٣) إذا كان $\int$ قَ(س) ءس = جا^{٢}س – أ جتا س + ١

قَ($\frac{\pi}{٤}$) = ٠ ، فجد قيمة الثابت أ :

---

٤) إذا كان $\int$ قَ(س) ءس = هـ$^{١ - \text{س}^{٢}}$ + ٤هـ

وكان قَ(ب) = -٢ب ، ب ≠ ٠ جد قيم الثابت (ب)

الحل : نشتق الطرفين ← قَ(س) = هـ$^{١ - \text{س}^{٢}}$ × -٢س + ٠

قَ(ب) = هـ$^{١ - \text{ب}^{٢}}$ × -٢ب = -٢ب ← هـ$^{١ - \text{ب}^{٢}}$ = ١

هـ$^{١ - \text{ب}^{٢}}$ = هـ^{٠} ← ١ - ب^{٢} = ← $\boxed{\text{ب} = \pm ١}$

---

٥) إذا كان $\int$ ق(س) ءس = جا س – جتا س + ٣ . فأثبت أن ق($\frac{\pi}{٢}$) – قَ($\frac{\pi}{٢}$) = ٢ :

الحل : ق(س) = جتا س + جا س

قَ(س) = - جا س + جتا س

($\frac{\pi}{٢}$) – قَ($\frac{\pi}{٢}$) = (٠ + ١) – (-١ + ٠) = ١ + ١ = ٢

---

٦) إذا كان ص = $\int \sqrt[٥]{٣\text{س}^{٢} - ٤\text{س} + ١٢}$ ءس ، فجد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\Big|_{\text{س} = -٢}$:

الحل : صَ = $\sqrt[٥]{٣\text{س}^{٢} - ٤\text{س} + ١٢}$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\Big|_{\text{س} = -٢} = \sqrt[٥]{١٢ + ٨ + ١٢} = \sqrt[٥]{٣٢} = ٢$

---

٧) إذا كان ص = هـ$^{\text{ظاس}}$ + أ لوهـ جتاس + $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٣}} \frac{\text{ءس}}{١ + \text{ظا}^{٢}\text{س}}$

وكان $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\Big|_{\text{س} = \frac{\pi}{٤}}$ = ٢هـ + ١ ، فجد قيمة الثابت أ :

الحل : صَ = هـ$^{\text{ظاس}}$ × قا^{٢}س × ١ + أ × $\frac{-\text{جاس}}{\text{جتاس}}$ + ٠

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\Big|_{\text{س} = \frac{\pi}{٤}}$ = هـ^{١} × ٢ × ١ + أ × -١ = ٢هـ + ١

٢ هـ – أ = ٢هـ + ١ ← $\boxed{\text{أ} = -١}$

---

٨) إذا كان $\int$ (قَ(س) – س) ءس = لوهـ |قاس + ظاس| + س^{٢}

فأثبت أن : قَ(س) = ٢س + قاس :

الحل : <u>نشتق الطرفين</u>

قَ(س) – س = $\frac{\text{قاس ظاس + قا}^{٢}\text{س}}{\text{قاس + ظاس}}$ + ٢س

قَ(س) – س = $\frac{\text{قاس}\cancel{(\text{ظاس + قاس})}}{\cancel{\text{قاس + ظاس}}}$ + ٢س

قَ(س) = قاس + ٢س

---

٩) بين أن الاقتران م(س) = لوهـ جاس هو معكوس لمشتقة الاقتران ق(س) = ظتاس :

الحل : مَ(س) = $\frac{\text{جتاس}}{\text{جاس}}$ ، جاس ≠ ٠ لأن جاس > ٠

مَ(س) = ظتاس = ق(س) المتصل لذلك م(س) هو معكوس مشتقة ق(س)

Scanned by CamScanner

رابعاً : التكامل غير المحدود :

قواعد التكامل غير المحدود

١ $\int م\,ءس = م\,س + ج$

أوجد كلاً مما يلي :

أ) $\int -٥\,ءس = -٥س + ج$

ب) $\int \pi\,ءع = \pi\,ع + ج$

ج) $\int ءس = س + ج$

ء) $\int \frac{-١}{٤}\,ءل = \frac{-١}{٤}\,ل + ج$

منهاجي

٢ $\int س^{ن}\,ءس = \frac{س^{ن+١}}{ن+١} + ج \text{ ، } ن \neq -١$

الاقتران	التكامل
$س^{٥}$	$\frac{س^{٦}}{٦} + ج$
$س^{٧}$	$\frac{س^{٨}}{٨} + ج$
$٣س^{٢}$	$\frac{٣س^{٣}}{٣} + ج$
$س^{-٥}$	$\frac{س^{-٤}}{-٤} + ج$
$س^{-٢}$	$\frac{س^{-١}}{-١} + ج$
$٤س^{-٣}$	$\frac{٤س^{-٢}}{-٢} + ج = \frac{-١}{٢}س^{-٢} + ج$
$س^{\frac{٣}{٢}}$	$\frac{س^{\frac{٥}{٢}}}{\frac{٥}{٢}} + ج = \frac{٢}{٥}س^{\frac{٥}{٢}} + ج$
$س$	$\frac{س^{٢}}{٢} + ج$
$س^{\frac{-٥}{٢}}$	$\frac{-٢}{٣}س^{\frac{-٣}{٢}} + ج$

ملاحظة : التكامل يتوزع على الجمع والطرح

* يجب التخلص من الضرب والقسمة والجذر قبل إجراء عملية التكامل

أوجد كلاً مما يلي :

أ) $\int (٩س^{٢} - ٨س - ٣)\,ءس$

الحل : $= \frac{٩س^{٣}}{٣} - \frac{٨س^{٢}}{٢} - ٣س + ج$

$= ٣س^{٣} - ٤س^{٢} - ٣س + ج$

ب) $\int (٣س^{-٣} - ٤س^{-٢} + ٥س + ٣)\,ءس$

الحل : $= \frac{٣س^{-٢}}{-٢} - \frac{٤س^{-١}}{-١} + \frac{٥س^{٢}}{٢} + ٣س + ج$

$= \frac{٣}{-٢س^{٢}} + \frac{٤}{س} + \frac{٥}{٢}س^{٢} + ٣س + ج$

ج) $\int (\sqrt{س} - \sqrt[٣]{س^{٢}} + ٢س^{\frac{٥}{٢}})\,ءس$

الحل : $\int (س^{\frac{١}{٢}} - س^{\frac{٢}{٣}} + ٢س^{\frac{٥}{٢}})\,ءس$

$= \frac{٢}{٣}س^{\frac{٣}{٢}} - \frac{٣}{٥}س^{\frac{٥}{٣}} + ٢ \times \frac{٢}{٧}س^{\frac{٧}{٢}} + ج$

ء) $\int (\sqrt[٥]{س^{٢}} + \sqrt{س^{١٠١}} + \frac{١}{\sqrt[٧]{س^{٢}}})\,ءس$

الحل : $\int (س^{\frac{٢}{٥}} - س^{\frac{١٠١}{٢}} + س^{\frac{-٢}{٧}})\,ءس$

$= \frac{٥}{٧}س^{\frac{٧}{٥}} + \frac{٢}{١٠٣}س^{\frac{١٠٣}{٢}} + \frac{٧}{٥}س^{\frac{٥}{٧}} + ج$

هـ) $\int \sqrt{س}\,(س + ٥)\,ءس$

الحل : $\int (س^{\frac{١}{٢}}(س + ٥))\,ءس = \int س^{\frac{٣}{٢}} + ٥\,س^{\frac{١}{٢}}\,ءس$

$= \frac{٢}{٥}س^{\frac{٥}{٢}} + ٥ \times \frac{٢}{٣}س^{\frac{٣}{٢}} + ج$

٢) جد كلاً مما يأتي :

أ) $\int (٣س^{٣} + ٥س - ٤)\,ءس$ ب) $\int \frac{س^{٢} + ٢س - ١٥}{س - ٣}\,ءس$

ج) $\int \frac{س - ٥}{\sqrt[٣]{س}}\,ءس$

الحل : أ) $\int (٣س^{٣} + ٥س - ٤)\,ءس$

$= \frac{٣س^{٤}}{٤} + \frac{٥س^{٢}}{٢} - ٤س + ج$

Scanned by CamScanner

ب) $\int \frac{س^{٢} + ٢س - ١٥}{س - ٣} \, ءس = \int \frac{(س + ٥)(س - ٣)}{س - ٣} \, ءس$

$= \int (س + ٥) \, ءس = \frac{س^{٢}}{٢} + ٥س + جـ$

ج) $\int \frac{س - ٥}{\sqrt[٣]{س}} \, ءس = \int (س - ٥) \, س^{\frac{-١}{٣}} \, ءس$

$= \int (س^{\frac{٢}{٣}} - ٥س^{\frac{-١}{٣}}) \, ءس$

$= \frac{٣}{٥} س^{\frac{٥}{٣}} - ٥ \times \frac{٣}{٢} س^{\frac{٢}{٣}} + جـ = \frac{٣}{٥} \sqrt[٣]{س^{٥}} - \frac{١٥}{٢} \sqrt[٣]{س^{٢}} + جـ$

٣) جد $\int \frac{س^{٣} - ٤س^{٢}}{\sqrt{س} - ٢} \, ءس$

الحل : $\int \frac{س^{٣} - ٤س^{٢}}{\sqrt{س} - ٢} \, ءس = \int \frac{س^{٢}(س - ٤)}{\sqrt{س} - ٢} \, ءس$

$= \int \frac{س^{٢}(\sqrt{س} - ٢)(\sqrt{س} + ٢)}{\sqrt{س} - ٢} \, ءس$

$= \int (س^{\frac{٥}{٢}} + ٢س^{٢}) \, ءس = \frac{٢}{٧} س^{\frac{٧}{٢}} + \frac{٢}{٣} س^{٣} + جـ$

$= \frac{٢}{٧} \sqrt{س^{٧}} + \frac{٢}{٣} س^{٣} + جـ$

٤) جد $\int \frac{(٢ - س)^{٣}}{س \sqrt{س}} \, ءس$

الحل : $\int \frac{٨ + ٦س^{٢} - ١٢س - س^{٣}}{س^{\frac{٣}{٢}}} \, ءس$

$= \int (٨س^{\frac{-٣}{٢}} + ٦س^{\frac{١}{٢}} - ١٢س^{\frac{-١}{٢}} - س^{\frac{٣}{٢}}) \, ءس$

$= ٨ \times \frac{٢}{-١} س^{\frac{-١}{٢}} + ٦ \times \frac{٢}{٣} س^{\frac{٣}{٢}} - ١٢ \times \frac{٢}{١} س^{\frac{١}{٢}} - \frac{٢}{٥} س^{\frac{٥}{٢}} + جـ$

$= -١٦س^{\frac{-١}{٢}} + ٤س^{\frac{٣}{٢}} - ٢٤س^{\frac{١}{٢}} - \frac{٢}{٥} س^{\frac{٥}{٢}} + جـ$

$\boxed{٣}$ $\int (أس + ب)^{ن} \, ءس = \frac{(أس + ب)^{ن + ١}}{(ن + ١) \times أ} + جـ$

، $أ \neq ٠$ ، $ن \neq -١$

١) جد كلاً مما يأتي :

أ) $\int (٦ - ٥س)^{٨} \, ءس$ ب) $\int \sqrt[٣]{٤س + ٢} \, ءس$

الحل : أ) $\int (٦ - ٥س)^{٨} \, ءس = \frac{(٦ - ٥س)^{٨ + ١}}{(٨ + ١) \times (-٥)} + جـ$

$= \frac{(٦ - ٥س)^{٩}}{-٤٥} + جـ$

ب) $\int \sqrt[٣]{٤س + ٢} \, ءس = \int (٤س + ٢)^{\frac{١}{٣}} \, ءس$

$= \frac{(٤س + ٢)^{\frac{٤}{٣}}}{٤ \times \frac{٤}{٣}} + جـ = \frac{٣}{١٦} \sqrt[٣]{(٤س + ٢)^{٤}} + جـ$

٢) جد كلاً مما يلي :

أ) $\int \frac{٣}{(٧س + ٥)^{٤}} \, ءس$ ب) $\int س^{٤}(٥ - \frac{٣}{س})^{٤} \, ءس$

الحل : أ) $\int \frac{٣}{(٧س + ٥)^{٤}} \, ءس = \int ٣(٧س + ٥)^{-٤} \, ءس$

$= \frac{٣(٧س + ٥)^{-٣}}{-٣ \times ٧} + جـ = \frac{-١}{٧(٧س + ٥)^{٣}} + جـ$

ب) $\int س^{٤}(\frac{٥س - ٣}{س})^{٤} \, ءس$

$= \int \frac{س^{٤}(٥س - ٣)^{٤}}{س^{٤}} \, ءس = \frac{(٥س - ٣)^{٥}}{٥ \times ٥} + جـ$

أمثلة تزويدية إضافية

جد كلاً من التكاملات الآتية :

أ) $\int (س^{٦} + \frac{٣}{س^{٥}} - \sqrt[٥]{س^{٢}}) \, ءس$ ب) $\int (٥ + ٣ص)^{٤} \, ءص$

ج) $\int \frac{س^{٣} - ٨}{س - ٢} \, ءس$ ء) $\int (٤س^{٢} + ٢٠س + ٢٥)^{٥} \, ءس$

هـ) $\int \frac{(س + ٣)^{٢} - ٩}{س} \, ءس$ و) $\int (١ - س)(س - ١)^{٥} \, ءس$

ز) $\int س \sqrt[٣]{\frac{٥}{س^{٣}} - \frac{١}{س^{٢}}} \, ءس$ ح) $\int \frac{س - \sqrt{س}}{\sqrt{س} - ١} \, ءس$

ط) $\int \sqrt[٣]{س} \, (\sqrt[٣]{س} + \frac{٥}{\sqrt[٣]{س}}) \, ءس$

ي) $\int \frac{٥س}{\sqrt{٧س + ٣} + \sqrt{٢س + ٣}} \, ءس$

الحل : أ) $\int س^{٦} + ٣س^{-٥} - س^{\frac{٢}{٥}} \, ءس$

$= \frac{س^{٧}}{٧} + \frac{٣س^{-٤}}{-٤} - \frac{٥}{٧} س^{\frac{٧}{٥}} + جـ$

ب) $\frac{(٥ + ٣ص)^{٤}}{٥ \times ٣} + جـ$

Scanned by CamScanner

ج) $\int \frac{(س-٢)(س^{٢}+٢س+٤)}{س-٢}\,ءس$

$= \frac{س^{٣}}{٣}+\frac{٢س^{٢}}{٢}+٤س+ج$

ء) $\int ((٢س+٥)(٢س+٥))^{٥}\,ءس$

$= \int (٢س+٥)^{١٠}\,ءس = \frac{(٢س+٥)^{١١}}{١١\times ٢}+ج$

ه) $\int \frac{(س+٣-٣)(س+٣+٣)}{س}\,ءس$

$= \frac{س^{٢}}{٢}+٦س+ج$

و) $\int -(س-١)(س-١)^{٥}\,ءس$

$= \int -(س-١)^{٦}\,ءس = \frac{-(س-١)^{٧}}{٧\times ١}+ج$

ز) $\int س\sqrt[٣]{\frac{٥-س}{س^{٣}}}\,ءس$

$= \int س\times\frac{(٥-س)^{\frac{١}{٣}}}{س}\,ءس = \frac{٣}{٤\times -١}(٥-س)^{\frac{٤}{٣}}+ج$

ح) $\int \frac{\sqrt{س}\,\cancel{(\sqrt{س}-١)}}{\cancel{\sqrt{س}-١}}\,ءس = \int س^{\frac{١}{٢}}\,ءس$

$= \frac{٢}{٣}س^{\frac{٣}{٢}}+ج$

ط) $\int (س^{\frac{٢}{٣}}+٥)\,ءس = \frac{٣}{٥}س^{\frac{٥}{٣}}+٥س+ج$

ي) $\int \frac{٥س}{\sqrt{٧س+٣}+\sqrt{٢س+٣}}\times\frac{\sqrt{٧س+٣}-\sqrt{٢س+٣}}{\sqrt{٧س+٣}-\sqrt{٢س+٣}}\,ءس$

$= \int \frac{(٥س)((٧س+٣)^{\frac{١}{٢}}-(٢س+٣)^{\frac{١}{٢}})}{٧س+٣-٢س-٣}\,ءس$

$= \int ((٧س+٣)^{\frac{١}{٢}}-(٢س+٣)^{\frac{١}{٢}})\,ءس$

$= \frac{٢}{٣\times ٧}(٧س+٣)^{\frac{٣}{٢}}-\frac{٢}{٣\times ٢}(٢س+٣)^{\frac{٣}{٢}}+ج$

$$\boxed{٤}\quad \int هـ^{(أس+ب)}\,ءس = \frac{هـ^{(أس+ب)}}{أ}+ج$$

١) جد كلاً من التكاملات الآتية :

أ) $\int هـ^{٥س}\,ءس$ ب) $\int هـ^{٣-٤س}\,ءس$

الحل : أ) $\int هـ^{٥س}\,ءس = \frac{١}{٥}هـ^{٥س}+ج$

ب) $\int هـ^{٣-٤س}\,ءس = \frac{-١}{٤}هـ^{٣-٤س}+ج$

---

٢) جد $\int (هـ^{٢}+هـ^{س})\,ءس$

الحل : $\int (هـ^{٢}+هـ^{س})\,ءس = هـ^{٢}س+هـ^{س}+ج$

---

٣) جد كلاً من التكاملات الآتية :

أ) $\int هـ^{٣س}(١+هـ^{٢س})\,ءس$

الحل : $= \int هـ^{٣س}+هـ^{٥س}\,ءس$

$= \frac{هـ^{٣س}}{٣}+\frac{هـ^{٥س}}{٥}+ج$

ب) $\int \frac{هـ^{٣س}-٢٧}{هـ^{س}-٣}\,ءس$

الحل : $= \int \frac{\cancel{(هـ^{س}-٣)}(هـ^{٢س}+٣هـ^{س}+٩)}{\cancel{هـ^{س}-٣}}\,ءس$

$= \frac{هـ^{٢س}}{٢}+\frac{٣هـ^{س}}{١}+٩س+ج$

---

٤) جد $\int ٣س\,هـ^{(٢+\text{لو}_{هـ}س^{٢})}\,ءس$

الحل : $\int ٣س\,(هـ^{٢}\times هـ^{\text{لو}_{هـ}س^{٢}})\,ءس$

$= \int ٣هـ^{٢}س^{٣}\,ءس = \frac{٣هـ^{٢}س^{٤}}{٤}+ج$

ج) $\int (هـ^{(٢س+٥)})^{٢}\,ءس$

الحل : $= \int هـ^{٤س+١٠}\,ءس = \frac{هـ^{٤س+١٠}}{٤}+ج$

---

٤) جد $\int هـ^{٥س}\sqrt{هـ^{٢س}+٤هـ^{س}+٤}\,ءس$

الحل : $\int هـ^{٥س}\sqrt{(هـ^{س}+٢)^{٢}}\,ءس = \int هـ^{٥س}(هـ^{س}+٢)\,ءس$

$= \int هـ^{٦س}+٢هـ^{٥س}\,ءس = \frac{هـ^{٦س}}{٦}+\frac{٢هـ^{٥س}}{٥}+ج$

Scanned by CamScanner

٥) $\int \frac{٢}{(٤س^{٢} - ٢٠س + ٥^{٢})^{-٧}} \, ءس$

الحل : $= \int \frac{٢}{((٢س - ٥)(٢س - ٥))^{-٧}} \, ءس$

$= \int ٢(٢س - ٥)^{١٤} \, ءس = \frac{٢(٢س - ٥)^{١٥}}{١٥ \times ٢} + جـ$

$\boxed{٥}$ الاقتران الذي جوابة لـو

$\int \frac{ثابت}{خطي} = \frac{الثابت}{معامل\ س} لوهـ \left| خطي \right| + جـ$

$\int \frac{ق'(س)}{ق(س)} = لوهـ \left| ق(س) \right| + جـ$

١) $\int \frac{٥}{٥ - ٦س} \, ءس = \frac{-٥}{٦} لوهـ \left| ٥ - ٦س \right| + جـ$

٢) $\int \frac{٤}{١ + ١٠س} \, ءس = \frac{٤}{١٠} لوهـ \left| ١ + ١٠س \right| + جـ$

قاعدة : $\int \frac{ق'(س)}{ق(س)} \, ءس = لوهـ \left| ق(س) \right| + جـ$

٣) $\int \frac{٣س^{٢} + ٢}{س^{٣} + ٢س + ١٠} \, ءس = لوهـ \left| س^{٣} + ٢س + ١٠ \right| + جـ$

٤) $\int \frac{٢س + ٧}{س^{٢} + ٧س - ١} \, ءس = لوهـ \left| س^{٢} + ٧س - ١ \right| + جـ$

٥) $\int \frac{-١٤س}{١ - ٧س^{٢}} \, ءس = لوهـ \left| ١ - ٧س^{٢} \right| + جـ$

٦) $\int ظاس \, ءس = \int \frac{جاس}{جتاس} \, ءس = -لوهـ \left| جتاس \right| + جـ$

٧) $\int ظتاس \, ءس = \int \frac{جتاس}{جاس} \, ءس = لوهـ \left| جاس \right| + جـ$

٨) $\int \frac{هـ^{س}}{١ + هـ^{س}} \, ءس$ على صورة $\frac{ق'}{ق}$

الحل : $= لوهـ \left| ١ + هـ^{س} \right| + جـ$

٩) جد $\int \left(\frac{جتا^{٢}س - جا^{٢}س}{جتاس \, جاس} \right) ءس$

١٠) جد $\int \frac{٢س - ٣}{٢س^{٢} - ٦س + ٥} \, ءس$:

الحل : $\frac{١}{٢} \int \frac{٤س - ٦}{٢س^{٢} - ٦س + ٥} \, ءس$

$= \frac{١}{٢} لوهـ \left| ٢س^{٢} - ٦س + ٥ \right| + جـ$

١١) جد $\int \frac{٥ + ٥ظتا^{٢}س}{ظتاس} \, ءس$:

الحل : $= \int \frac{٥}{ظتاس} + \frac{٥ظتا^{٢}س}{ظتاس} \, ءس$

$= \int (٥ظاس + ٥ظتاس) \, ءس$

$= -٥لوهـ \left| جتاس \right| + ٥لوهـ \left| جاس \right| + جـ$

١٢) جد $\int \frac{جا٣س}{١ + جتا٣س} \, ءس$:

الحل : $= \frac{-١}{٣} \int \frac{-٣جا٣س}{١ + جتا٣س} \, ءس$

$= \frac{-١}{٣} لوهـ \left| ١ + جتا٣س \right| + جـ$

١٣) جد $\int \frac{٤هـ^{٤س} - ٣}{هـ^{٤س} - ٣س} \, ءس$

الحل : $= لوهـ \left| هـ^{٤س} - ٣س \right| + جـ$

$\boxed{٦}$ $\int جا(أس + ب) \, ءس = \frac{-١}{أ} جتا(أس + ب) + جـ$

$\boxed{٧}$ $\int جتا(أس + ب) \, ءس = \frac{١}{أ} جا(أس + ب) + جـ$

$\boxed{٨}$ $\int قا^{٢}(أس + ب) \, ءس = \frac{١}{أ} ظا(أس + ب) + جـ$

$\boxed{٩}$ $\int قتا^{٢}(أس + ب) \, ءس = \frac{-١}{أ} ظتا(أس + ب) + جـ$

$\boxed{١٠}$ $\int قا(أس + ب) ظا(أس + ب) \, ءس$

$= \frac{١}{أ} قا(أس + ب) + جـ$

$\boxed{١١}$ $\int قتا(أس + ب) ظتا(أس + ب) \, ءس$

$= \frac{-١}{أ} قتا(أس + ب) + جـ$

منهاجي

Scanned by CamScanner

المتطابقات المثلثية

١) جا^{٢}( ) + جتا^{٢}( ) = ١

قا^{٢}( ) – ظا^{٢}( ) = ١

قتا^{٢}( ) – ظتا^{٢}( ) = ١

جتا^{٢}( ) – جا^{٢}( ) = جتا (ضعف)

حذار من الترتيب

---

٢) **ضعف الزاوية :**

* ٢جا( ) جتا ( ) = جا (ضعف)

جا( ) جتا ( ) = $\frac{١}{٢}$ جا (ضعف)

* جتا( ) = جتا^{٢}($\frac{١}{٢}$ ( )) - جا^{٢}($\frac{١}{٢}$ ( ))

= ١ - ٢جا^{٢}($\frac{١}{٢}$ ( ))

= ٢جتا^{٢}($\frac{١}{٢}$ ( )) – ١

---

٣) جا^{٢}( ) = $\frac{١}{٢}$ (١ - جتا (ضعف))

جتا^{٢}( ) = $\frac{١}{٢}$ (١ + جتا (ضعف))

ظا^{٢}( ) = قا^{٢}( ) – ١

ظتا^{٢}( ) = قتا^{٢}( ) - ١

---

٤) $\frac{١}{جا(\ \ )}$ = قتا ( ) ، $\frac{١}{جتا(\ \ )}$ = قا ( )

ظا ( ) = $\frac{جا(\ \ )}{جتا(\ \ )}$ ، ظتا ( ) = $\frac{جتا(\ \ )}{جا(\ \ )}$ = $\frac{١}{ظا(\ \ )}$

---

٥) **في المقام :**

١ - جا( )

١ + جا( )

الضرب المرافق

١ - جتا( ) = ٢جا^{٢} $\frac{١}{٢}$ ( )

١ + جتا( ) = ٢جتا^{٢} $\frac{١}{٢}$ ( )

أو الضرب بالمرافق

---

٦) جتا (ﻡ ± ب) ءس = جتا ﻡ جتا ب ∓ جا(ﻡ) جا(ب)

جا (ﻡ ± ب) ءس = جا ﻡ جتا ب ± جتا(ﻡ) جا(ب)

---

٧) جتا ﻡ جتا ب = $\frac{١}{٢}$ (جتا(ﻡ – ب) + جتا(ﻡ + ب))

جا ﻡ جا ب = $\frac{١}{٢}$ (جتا(ﻡ – ب) - جتا(ﻡ + ب))

جا ﻡ جتا ب = $\frac{١}{٢}$ (جا(ﻡ – ب) + جا(ﻡ + ب))

---

٨) ١ + جا ٢س = (جاس + جتاس)^{٢}

١ - جا ٢س = (جاس - جتاس)^{٢}

= (جتاس - جاس)^{٢}

*** تمارين متنوعة :**

الاقتران	التكامل
جا ﻡس + جتا ﻡس	
جا ٥س + جتا ٣س	
جا ٧س + جتا ٩س	
جا(٥س + ١) + جتا(٧س + ٢)	

الاقتران	التكامل
قا^{٢} ﻡس + قتا^{٢} ﻡس	
قا^{٢} ٦س + قتا^{٢} ٨س	
قا^{٢} ٢س + قتا^{٢} ٦س	
قا^{٢} ٥س + قتا^{٢} ٥س	

الاقتران	التكامل
قا ﻡس ظا ﻡس	
قا ٥س ظا ٥س	
قا ٧س ظا ٧س	
قا ٢٠س ظا ٢٠س	
قتا ٦س ظتا ٦س	
قتا ٩س ظتا ٩س	

Scanned by CamScanner

* أوجد كلاً من التكاملات التالية :

١) ∫ (جا^{٢}س + جتا^{٢}س) ى س = ∫ ١ ى س = س + جـ

٢) ∫ (٢جتا^{٢} ٥س + ٢جا^{٢} ٥س) ى س
= ∫ ٢(جتا^{٢} ٥س + جا^{٢} ٥س) ى س = ∫ ٢ ى س = ٢س + جـ

٣) ∫ (-جا^{٢}س - جتا^{٢}س) ى س
= ∫ -(جا^{٢}س + جتا^{٢}س) ى س = ∫ -١ ى س = -س + جـ

٤) ∫ (ظا^{٢} ٢س – قا^{٢} ٢س) ى س = ∫ -١ ى س = -س + جـ

٥) ∫ (٧قتا^{٢}س – ٧ظتا^{٢}س) ى س
= ∫ ٧(قتا^{٢}س - ظتا^{٢}س) ى س = ∫ ٧ ى س = ٧س + جـ

٦) ∫ (جتا^{٢}س – جا^{٢}س) ى س
= ∫ جتا ٢س ى س = $\frac{\text{جا٢س}}{٢}$ + جـ

٧) ∫ (جا^{٢} $\frac{\text{س}}{٢}$ – جتا^{٢} $\frac{\text{س}}{٢}$) ى س
= ∫ -جتا س ى س = -جاس + جـ

٨) ∫ (جا $\frac{\text{س}}{٢}$ جتا $\frac{\text{س}}{٢}$) ى س
= ∫ $\frac{١}{٢}$ جا س ى س = $\frac{-١}{٢}$ جتاس + جـ

٩) ∫ (جا س + جتاس)^{٢} ى س
= ∫ (جا^{٢}س + ٢جا س جتا س + جتا^{٢}س) ى س
= ∫ (١ + جا ٢س) ى س = س + $\frac{\text{-جتا٢س}}{٢}$ + جـ

١٠) ∫ (قا س + ظاس)^{٢} ى س
= ∫ (قا^{٢}س + ٢قا س ظا س + ظا^{٢}س) ى س
= ظا س + ٢قا س + ظا س – س + جـ

١١) ∫ جتا^{٢}س ى س = ∫ $\frac{١}{٢}$ (١ + جتا ٢س) ى س
= $\frac{١}{٢}$ (س + $\frac{\text{جا٢س}}{٢}$) + جـ

١٢) ∫ جتا^{٢}(٥س) ى س = ∫ $\frac{١}{٢}$ (١ + جتا ١٠س) ى س
= $\frac{١}{٢}$ (س + $\frac{\text{جا١٠س}}{١٠}$) + جـ

١٣) ∫ جا^{٢}($\frac{\text{س}}{٢}$) ى س = ∫ $\frac{١}{٢}$ (١ - جتا س) ى س
= $\frac{١}{٢}$ (س – جا س) + جـ

١٤) ∫ (جا^{٢}س + جتا^{٢}($\frac{\text{س}}{٢}$)) ى س
= ∫ ($\frac{١}{٢}$ (١ - جتا ٢س) + $\frac{١}{٢}$ (١ + جتا س)) ى س
= $\frac{١}{٢}$ (س - $\frac{\text{جا٢س}}{٢}$) + $\frac{١}{٢}$ (س + جا س) + جـ

١٥) ∫ $\frac{٣}{\text{جا}^{٢}\text{س}}$ ى س = ∫ ٣قتا^{٢}س ى س = -٣ظتا س + جـ

١٦) ∫ جتا ٤س ظا ٤س + $\frac{١}{\text{جتا}^{٢}\text{ ٦س}}$ ى س
= ∫ ($\cancel{\text{جتا ٤س}}$ × $\frac{\text{جا ٤س}}{\cancel{\text{جتا٤س}}}$ + قا^{٢} ٦س) ى س
= $\frac{\text{- جتا ٤س}}{٤}$ + $\frac{\text{ظا ٦س}}{٦}$ + جـ

١٧) ∫ (قا س × جتا س) ى س
= ∫ $\frac{١}{\cancel{\text{جتاس}}}$ × $\cancel{\text{جتاس}}$ ى س = س + جـ

١٨) ∫ (قتا س × جا ٢س) ى س

١٩) ∫ $\frac{\text{جا س}}{\text{جتا}^{٢}\text{س}}$ ى س = ∫ $\frac{\text{جا س}}{\text{جتا س × جتا س}}$ ى س
= ∫ ظا س قا س ى س = قا س + جـ

٢٠) ∫ $\frac{\text{جا س + جتا}^{٢}\text{س}}{\text{١ - جا}^{٢}\text{س}}$ ى س

منهاجي

Scanned by CamScanner

٢١) $\int \frac{\text{جتا }٢\text{س}}{١ - \text{جتا}^{٢}\,٢\text{س}}\,\text{ءس}$

$= \int \frac{\text{جتا }٢\text{س}}{\text{جا}^{٢}\,٢\text{س}}\,\text{ءس} = \int \frac{\text{جتا }٢\text{س}}{\text{جا }٢\text{س} \times \text{جا }٢\text{س}}\,\text{ءس}$

$= \int \text{ظتا }٢\text{س} \times \text{قتا }٢\text{س}\,\text{ءس} = \frac{-١}{٢}\,\text{قتا }٢\text{س} + \text{جـ}$

---

٢١) $\int \frac{١}{\text{قا}^{٢}\,٢\text{س}}\,\text{ءس} = \int \text{جتا}^{٢}\,٢\text{س}\,\text{ءس}$

$= \int \frac{١}{٢}(١ + \text{جتا }٤\text{س})\,\text{ءس} = \frac{١}{٢}(\text{س} + \frac{١}{٤}\,\text{جا }٤\text{س}) + \text{جـ}$

---

٢٢) $\int \frac{١}{\text{قتا}^{٢}\frac{\text{س}}{٢}}\,\text{ءس} = \int \text{جا}^{٢}\frac{\text{س}}{٢}\,\text{ءس}$

$= \int \frac{١}{٢}(١ - \text{جتا س})\,\text{ءس} = \frac{١}{٢}(\text{س} - \text{جا س}) + \text{جـ}$

---

٢٣) $\int \frac{\text{جتا}^{٢}\text{س} - \text{جا}^{٢}\text{س}}{\text{جتا}^{٢}\text{س جا}^{٢}\text{س}}\,\text{ءس}$

$= \int \left(\frac{\cancel{\text{جتا}^{٢}\text{س}}}{\cancel{\text{جتا}^{٢}\text{س}}\,\text{جا}^{٢}\text{س}} - \frac{\cancel{\text{جا}^{٢}\text{س}}}{\text{جتا}^{٢}\text{س}\,\cancel{\text{جا}^{٢}\text{س}}}\right)\text{ءس}$

$= \int (\text{قتا}^{٢}\text{س} - \text{قا}^{٢}\text{س})\,\text{ءس}$

$= -\text{ظتا س} - \text{ظا س} + \text{جـ}$

---

٢٤) $\int \frac{\text{جتا }٢\text{س}}{\text{جتا}^{٢}\text{س جا}^{٢}\text{س}}\,\text{ءس}$

---

٢٥) $\int \frac{\text{جتا}^{٣}\text{س} - ٥}{١ - \text{جا}^{٢}\text{س}}\,\text{ءس}$

$= \int \frac{\text{جتا}^{٣}\text{س} - ٥}{\text{جتا}^{٢}\text{س}}\,\text{ءس} = \int \frac{\text{جتا}^{٣}\text{س}}{\text{جتا}^{٢}\text{س}} - \frac{٥}{\text{جتا}^{٢}\text{س}}\,\text{ءس}$

$= \int (\text{جتا س} - ٥\text{قا}^{٢}\text{س})\,\text{ءس} = \text{جا س} - ٥\text{ظا س} + \text{جـ}$

---

٢٦) $\int \frac{١}{١ + \text{جا س}}\,\text{ءس}$

$= \int \frac{١}{١ + \text{جا س}} \times \frac{١ - \text{جا س}}{١ - \text{جا س}}\,\text{ءس} = \int \frac{١ - \text{جا س}}{١ - \text{جا}^{٢}\text{س}}\,\text{ءس}$

$= \int \frac{١ - \text{جا س}}{\text{جتا}^{٢}\text{س}}\,\text{ءس} = \int \frac{١}{\text{جتا}^{٢}\text{س}} - \frac{\text{جا س}}{\text{جتا}^{٢}\text{س}}\,\text{ءس}$

$= \int (\text{قا}^{٢}\text{س} - \text{قا س ظا س})\,\text{ءس} = \text{ظا س} - \text{قا س} + \text{جـ}$

---

٢٧) $\int \frac{\text{جا س}}{١ - \text{جا س}}\,\text{ءس}$

منهاجي

---

٢٨) $\int \frac{٢}{١ + \text{جتا }٢\text{س}}\,\text{ءس}$

$= \int \frac{٢}{٢\text{جتا}^{٢}\text{س}}\,\text{ءس} = \int \text{قا}^{٢}\text{س}\,\text{ءس} = \text{ظا س} + \text{جـ}$

---

٢٩) $\int \frac{\text{جا}^{٢}\text{س} + \text{جتا}^{٢}\text{س}}{١ - \text{جتا }٤\text{س}}\,\text{ءس}$

$= \int \frac{١}{٢\text{جا}^{٢}\,٢\text{س}}\,\text{ءس} = \int \frac{١}{٢}\,\text{قتا}^{٢}\,٢\text{س}\,\text{ءس}$

$= \frac{-١}{٢}\,\frac{\text{ظتا }٢\text{س}}{٢} + \text{جـ}$

---

٣٠) $\int \text{جا}^{٤}\left(\frac{\text{س}}{٢}\right)\text{ءس}$

الحل : $= \int \left(\text{جا}^{٢}\left(\frac{\text{س}}{٢}\right)\right)^{٢}\text{ءس}$

$= \int \left(\frac{١}{٢}(١ - \text{جتا س})\right)^{٢}\text{ءس}$

$= \int \frac{١}{٤}(١ - ٢\text{جتا س} + \text{جتا}^{٢}\text{س})\,\text{ءس}$

$= \int \frac{١}{٤}\left(١ - ٢\text{جتا س} + \frac{١}{٢}(١ + \text{جتا }٢\text{س})\right)\text{ءس}$

$= \frac{١}{٤}\left(\text{س} - ٢\text{جا س} + \frac{١}{٢}(\text{س} + \frac{١}{٢}\,\text{جا }٢\text{س})\right) + \text{جـ}$

---

٣١) $\int (\text{جتا}^{٤}\text{س} - \text{جا}^{٤}\text{س})\,\text{ءس}$

الحل : $= \int (\text{جتا}^{٢}\text{س} - \text{جا}^{٢}\text{س})(\text{جتا}^{٢}\text{س} + \text{جا}^{٢}\text{س})\,\text{ءس}$

$= \int \text{جتا }٢\text{س} \times ١\,\text{ءس} = \frac{\text{جا }٢\text{س}}{٢} + \text{جـ}$

Scanned by CamScanner

٣٢) $\int (\text{جا ٥س جتا ٣س})\,\text{ء س}$

الحل : $= \int \frac{١}{٢}\,(\text{جا}(\text{٢س}) + \text{جا}(\text{٨س}))\,\text{ء س}$

$= \frac{١}{٢}\,(-\frac{١}{٢}\,\text{جتا}(\text{٢س}) - \frac{١}{٨}\,\text{جتا}(\text{٨س})) + \text{ج}$

٣٣) $\int \text{جتا ٣س جتا ٧س}\,\text{ء س}$

الحل : $= \int \frac{١}{٢}\,(\text{جتا}(-\text{٤س}) + \text{جتا}(\text{١٠س}))\,\text{ء س}$

$= \frac{١}{-٨}\,\text{جا}(-\text{٤س}) + \frac{١}{٢٠}\,\text{جا}(\text{١٠س}) + \text{ج}$

٣٤) $\int \text{جا ٦س جا ٤س}\,\text{ء س}$

الحل : $= \int \frac{١}{٢}\,(\text{جتا}(\text{٢س}) - \text{جتا}(\text{١٠س}))\,\text{ء س}$

$= \frac{١}{٢}\,(\frac{\text{جا ٢س}}{٢} - \frac{\text{جا ١٠س}}{١٠}) + \text{ج}$

٣٥) $\int \frac{\text{جتا}(\text{٣س})}{\text{جتا س}}\,\text{ء س}$

الحل : $= \int \frac{\text{جتا}(\text{٢س} + \text{س})}{\text{جتا س}}\,\text{ء س}$

$= \int \frac{\text{جتا}(\text{٢س})\,\text{جتا}(\text{س}) - \text{جا}(\text{٢س})\,\text{جا}(\text{س})}{\text{جتا س}}\,\text{ء س}$

$= \int \frac{\text{جتا}(\text{٢س})\,\text{جتا}(\text{س})}{\text{جتا س}} - \frac{\text{٢جا}(\text{س})\,\text{جتا}(\text{س})\,\text{جا س}}{\text{جتا س}}\,\text{ء س}$

$= \int \text{جتا}(\text{٢س}) - ٢ \times \frac{١}{٢}\,(١ - \text{جتا ٢س})\,\text{ء س}$

$= \frac{١}{٢}\,\text{جا ٢س} - \text{س} + \frac{١}{٢}\,\text{جا ٢س} + \text{ج} = \text{جا ٢س} - \text{س} + \text{ج}$

* أمثلة متنوعة إضافية :

١) $\int (\text{ظتا س} - \text{قتا س})^{٢}\,\text{ء س}$

الحل : $= \int (\text{ظتا}^{٢}\text{س} - \text{٢ظتا س قتا س} + \text{قتا}^{٢}\text{س})\,\text{ء س}$

$= \int (\text{قتا}^{٢}\text{س} - ١ - \text{٢ظتا س قتا س} + \text{قتا}^{٢}\text{س})\,\text{ء س}$

$= -\text{٢ظتا س} - \text{س} + \text{٢قتا س} + \text{ج}$

٢) $\int \frac{١ - \text{جا}^{٢}\text{س}}{\text{جا}^{٢}\frac{\text{س}}{٢} \times \text{جتا}^{٢}\frac{\text{س}}{٢}}\,\text{ء س}$

الحل : $= \int \frac{\text{جتا}^{٢}\text{س}}{\frac{١}{٤} \times \text{جا}^{٢}\text{س}}\,\text{ء س} = \int \text{٤ظتا}^{٢}\text{س}\,\text{ء س}$

$= \int ٤(\text{قتا}^{٢}\text{س} - ١)\,\text{ء س} = ٤(-\text{ظتا س} - \text{س}) + \text{ج}$

٣) $\int \frac{١ - \text{جا ٢س}}{\text{جا س} - \text{جتا س}}\,\text{ء س}$

الحل : $= \int \frac{(\text{جا س} - \text{جتا س})^{٢}}{\text{جا س} - \text{جتا س}}\,\text{ء س}$

$= \int (\text{جا س} - \text{جتا س})\,\text{ء س} = -\text{جتا س} - \text{جا س} + \text{ج}$

٤) $\int \frac{١}{\text{جا}^{٢}\text{س} - \text{جا}^{٤}\text{س}}\,\text{ء س}$

الحل : $\int \frac{١}{\text{جا}^{٢}\text{س}(١ - \text{جا}^{٢}\text{س})}\,\text{ء س} = \int \frac{١}{\text{جا}^{٢}\text{س جتا}^{٢}\text{س}}\,\text{ء س}$

$= \int \frac{١}{\frac{١}{٤}\,\text{جا}^{٢}\,\text{٢س}}\,\text{ء س} = \int \text{٤قتا}^{٢}(\text{٢س})\,\text{ء س}$

$= \frac{-٤}{٢}\,\text{ظتا}(\text{٢س}) + \text{ج}$

٥) $\int \frac{١}{\text{قا س} - ١}\,\text{ء س}$

الحل : $\int \frac{١}{\text{قا س} - ١} \times \frac{\text{قا س} + ١}{\text{قا س} + ١}\,\text{ء س} = \int \frac{\text{قا س} + ١}{\text{قا}^{٢}\text{س} - ١}\,\text{ء س}$

$= \int \frac{\text{قا س} + ١}{\text{ظا}^{٢}\text{س}}\,\text{ء س} = \int \frac{\text{قا س}}{\text{ظا}^{٢}\text{س}} + \text{ظتا}^{٢}\text{س}\,\text{ء س}$

$= \int (\frac{١}{\text{جتا س}} \times \frac{\text{جتا}^{٢}\text{س}}{\text{جا}^{٢}\text{س}} + \text{قتا}^{٢}\text{س} - ١)\,\text{ء س}$

$= \int (\text{قتا س ظتا س} + \text{قتا}^{٢}\text{س} - ١)\,\text{ء س}$

$= -\text{قتا س} - \text{ظتا س} - \text{س} + \text{ج}$

٦) $\int \text{هـ}^{(٥ + \text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{جتا س})}\,\text{ء س}$

الحل : $= \int \text{هـ}^{٥} \times \text{هـ}^{\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{جتا س}}\,\text{ء س}$

$= \int \text{هـ}^{٥}\,\text{جتا س}\,\text{ء س} = \text{هـ}^{٥}\,\text{جا س} + \text{ج}$

٧) $\int \frac{\text{٢جا ٣س جتا س}}{\text{جتا ٢س}}\,\text{ء س}$

الحل : $= \int \frac{٢ \times \frac{١}{٢}\,(\text{جا}(\text{٢س}) + \text{جا}(\text{٤س}))}{\text{جتا ٢س}}\,\text{ء س}$

$= \int \text{ظا ٢س} + \frac{\text{٢جا}(\text{٢س})\,\text{جتا}(\text{٢س})}{\text{جتا ٢س}}\,\text{ء س}$

$= -\frac{١}{٢}\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{جتا ٢س}| + \frac{-٢}{٢}\,\text{جتا}(\text{٢س}) + \text{ج}$

$= -\frac{١}{٢}\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{جتا ٢س}| - \text{جتا}(\text{٢س}) + \text{ج}$

Scanned by CamScanner

٨) $\int \text{جا ٣س قتا س ء س}$

الحل : $= \int \frac{\text{جا٣س}}{\text{جا س}}\,\text{ء س} = \int \frac{\text{جا (٢س + س)}}{\text{جا س}}\,\text{ء س}$

$= \int \frac{\text{جا ٢س جتا س + جتا ٢س جا س}}{\text{جا س}}\,\text{ء س}$

$= \int \frac{\text{٢جا س جتا س جتا س}}{\text{جا س}} + \text{جتا ٢س ء س}$

$= \int \text{٢} \times \frac{\text{١}}{\text{٢}}\,(\text{١ + جتا ٢س}) + \text{جتا ٢س ء س}$

$= \text{س} + \frac{\text{١}}{\text{٢}}\,\text{جا ٢س} + \frac{\text{١}}{\text{٢}}\,\text{جا ٢س + جـ}$

$= \text{س + جا ٢س + جـ}$

جدمعكوساً لمشتقة كل من الاقترانات الآتية :

١) $\text{ق(س)} = \text{٣س}^{\text{٢}}$ علماً بأن $\text{م(٢)} = \text{٥}$

الحل : $\text{م(س)} = \int \text{ق(س) ءس} = \int \text{٣س}^{\text{٢}}\,\text{ءس}$

$\text{م(س)} = \text{س}^{\text{٣}} + \text{جـ} \longrightarrow \text{م(٢)} = \text{٥}$

$\text{٨ + جـ} = \text{٥} \longrightarrow \boxed{\text{جـ} = \text{-٣}}$

$\boxed{\text{م(س)} = \text{س}^{\text{٣}}\text{- ٣}}$

٢) $\text{ق(س)} = \text{٥ + ٥ظا}^{\text{٢}}\text{س}$:

الحل : $\text{م(س)} = \int \text{٥ + ٥(قا}^{\text{٢}}\text{س - ١) ءس}$

$= \text{٥س + ٥(ظا س – س) + جـ} = \text{٥ ظا س + جـ}$

٣) $\text{ق(س)} = \frac{\text{جتا ٣س}}{\text{٥ + جا ٣س}}$:

الحل : $\text{م(س)} = \int \frac{\text{جتا ٣س}}{\text{٥ + جا ٣س}}\,\text{ءس}$

$= \frac{\text{١}}{\text{٣}} \int \frac{\text{٣جتا ٣س}}{\text{٥ + جا ٣س}}\,\text{ءس}$

$= \frac{\text{١}}{\text{٣}} \times \text{لوهـ}\left|\text{٥ + جا ٣س}\right| + \text{جـ}$

خامساً : التكامل المحدود

ق١ : $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{جـ ء س} = \text{جـ (ب – أ)}$

حيث $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{جـ ء س} = \text{جـ س}\Big|_{\text{أ}}^{\text{ب}} = \text{(جـ ب) - (جـ أ)}$

---

١) $\int_{\text{١}}^{\text{٥}} \text{٧ ء س}$ تساوي :

أ) ٢٦ ب) ٢٧ [✓ جـ) ٢٨] ء) ٢٩

الحل : $\int_{\text{١}}^{\text{٥}} \text{٧ ء س} = \text{٧(٥ – ١)} = \text{٧} \times \text{٤} = \text{٢٨}$

---

٢) $\int_{\text{١}}^{\text{٣}} \pi\ \text{ء س}$ تساوي :

أ) π ب) ٠ [✓ جـ) $\text{٢}\pi$] ء) $\text{-٢}\pi$

الحل : $\int_{\text{١}}^{\text{٣}} \pi\ \text{ء س} = \pi\text{(٣ – ١)} = \text{٢}\pi$

---

٣) إذا كان $\int_{\text{١}}^{\text{٣}} \text{أ ء س} = \text{١٠}$ ، فإن قيمة أ هي :

[✓ أ) ٥] ب) -٥ جـ) $\frac{\text{١}}{\text{٥}}$ ء) - $\frac{\text{١}}{\text{٥}}$

الحل : $\int_{\text{١}}^{\text{٣}} \text{أ ء س} = \text{١٠} \longrightarrow \text{أ(٣ – ١)} = \text{١٠}$

$\text{٢أ} = \text{١٠} \longrightarrow \boxed{\text{أ} = \text{٥}}$

---

٤) إذا علمت أن $\int_{\text{١}}^{\text{٥}} \text{أ ء س} = \text{٢٠}$ ، جد قيمة أ :

أ) -٤ ب) ٤ جـ) -٥ [✓ ء) ٥]

الحل : $\int_{\text{١}}^{\text{٥}} \text{أ ء س} = \text{٢٠} \longrightarrow \text{٤أ} = \text{٢٠} \longrightarrow \boxed{\text{أ} = \text{٥}}$

---

٥) $\int_{\text{١}}^{\text{٧}} \frac{\text{١}}{\text{٢}}\,\text{ء س} = \frac{\text{١}}{\text{٢}}\,\text{(٧ – ١)} = \text{٣}$

---

٦) $\int_{\text{١}}^{\text{٥}} \text{ء س} = \text{١(٥ – ١)} = \text{١} \times \text{٤} = \text{٤}$

ق٢ : $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{س}^{\text{ن}}\,\text{ء س} = \frac{\text{س}^{\text{ن+١}}}{\text{ن + ١}}\Big|_{\text{أ}}^{\text{ب}}$

$= \frac{\text{ب}^{\text{ن+١}}}{\text{ن + ١}} - \frac{\text{أ}^{\text{ن+١}}}{\text{ن + ١}}$

منهاجي

Scanned by CamScanner

١) $\int_{١}^{٢} س^{٢} \, ء س$ تساوي :

أ) ٣ ب) -٣ [✓ ج) $\frac{٧}{٣}$] ء) $\frac{٣}{٧}$

الحل : $\int_{١}^{٢} س^{٢} \, ء س = \left. \frac{س^{٣}}{٣} \right|_{١}^{٢} = \frac{٨}{٣} - \frac{١}{٣} = \frac{٧}{٣}$

---

٢) $\int_{٠}^{١} \sqrt[٣]{س} \, ء س$ تساوي :

أ) $\frac{٤}{٣}$ [✓ ب) $\frac{٣}{٤}$] ج) ١ ء) -١

الحل : $\int_{٠}^{١} س^{\frac{١}{٣}} \, ء س = \left. \frac{س^{\frac{١}{٣} + ١}}{\frac{٤}{٣}} \right|_{٠}^{١} = \frac{١}{\frac{٤}{٣}} = \frac{٣}{٤}$

---

٣) إذا علمت $\int_{٠}^{أ} س \, ء س = ٨$ ، فإن قيمة أ هي :

أ) ٧ ب) ٨ ج) $\pm \sqrt{٨}$ [✓ ء) ± ٤]

الحل : $\int_{٠}^{أ} س \, ء س = \left. \frac{س^{٢}}{٢} \right|_{٠}^{أ} = \frac{أ^{٢}}{٢} - ٠ = ٨$

$أ^{٢} = ١٦ \longrightarrow \boxed{أ = \pm ٤}$

---

٤) أوجد قيمة $\int_{٠}^{١} س(س^{٢} + ١) \, ء س = ٨$:

الحل : $\int_{٠}^{١} (س^{٣} + س) \, ء س = \left. \frac{س^{٤}}{٤} + \frac{س^{٢}}{٢} \right|_{٠}^{١}$

$= (\frac{١}{٤} + \frac{١}{٢}) - (٠) = \frac{١}{٤} + \frac{٢}{٤} = \frac{٣}{٤}$

---

٥) أوجد قيمة $\int_{٣}^{٥} \frac{س^{٣} - ٨}{س - ٢} \, ء س$:

الحل : $\int_{٣}^{٥} \frac{(س - ٢)(س^{٢} + ٢س + ٤)}{(س - ٢)} \, ء س$

$= \left. \frac{س^{٣}}{٣} + \frac{٢س^{٢}}{٢} + ٤س \right|_{٣}^{٥}$

$= (\frac{١٢٥}{٣} + ٢٥ + ٢٠) - (\frac{٢٧}{٣} + ٩ + ١٢)$

$= \frac{١٢٥}{٣} + ٤٥ - ٣٠ = \frac{١٢٥}{٣} + ١٥ = \frac{١٧٠}{٣}$

---

٦) أوجد قيمة $\int_{١}^{٤} \frac{س - ٩}{\sqrt{س} - ٣} \, ء س$:

الحل : $\int_{١}^{٤} \frac{(\sqrt{س} - ٣)(\sqrt{س} + ٣)}{\sqrt{س} - ٣} \, ء س$

$\int_{١}^{٤} (س^{\frac{١}{٢}} + ٣) \, ء س = \left. \frac{س^{\frac{٣}{٢}}}{\frac{٣}{٢}} + ٣س \right|_{١}^{٤}$

$= \left. \frac{٢}{٣} \sqrt{س^{٣}} + ٣س \right|_{١}^{٤} = (\frac{٢}{٣} \times ٨ + ١٢) - (\frac{٢}{٣} + ٣)$

$= \frac{١٦}{٣} + ١٢ - \frac{٢}{٣} - ٣ = \frac{١٤}{٣} + ٩ = \frac{٤١}{٣}$

---

٧) أوجد قيمة $\int_{١}^{٣} (٢س + \int_{٠}^{٢} ٣ص^{٢} \, ء ص) \, ء س$:

الحل : <u>نهتم بالداخل أولاً</u>

$\int_{٠}^{٢} ٣ص^{٢} \, ء ص = \left. ص^{٣} \right|_{٠}^{٢} = ٨ - ٠ = ٨$

$= \int_{١}^{٣} (٢س + ٨) \, ء س = \left. س^{٢} + ٨س \right|_{١}^{٣}$

$= (٩ + ٢٤) - (١ + ٨) = ٢٤$

---

٨) أوجد كلاً من التكاملات الآتية :

أ) $\int_{\frac{\pi}{٢}}^{\frac{\pi}{٣}} (\text{جا } س) \, ء س = \left. - \text{جتا } س \right|_{\frac{\pi}{٢}}^{\frac{\pi}{٣}} = \frac{-١}{٢} - ٠ = \frac{-١}{٢}$

ب) $\int_{٠}^{١} (س^{٢} + ٣س) \, ء س = \left. \frac{س^{٣}}{٣} + \frac{٣س^{٢}}{٢} \right|_{٠}^{١}$

$= (\frac{١}{٣} + \frac{٣}{٢}) - (٠) = \frac{١١}{٦}$

ج) إذا كان $د(٣) = ٥$ ، $د(٤) = ١٠$ أوجد :

$\int_{٣}^{٤} د'(س) \, ء س = \left. د(س) \right|_{٣}^{٤} = د(٤) - د(٣)$

$= ١٠ - ٥ = ٥$

ء) إذا كان $\int د(س) \, ء س = س + ج$ أوجد $\int_{١}^{٢} د(س) \, ء س$:

الحل : $(٢ + ج) - (١ + ج) = ١$

هـ) $\int د(س) \, ء س = س^{٢} + ٢س + ٥$ أوجد $\int_{٠}^{٣} د(س) \, ء س$:

الحل : $(٩ + ٦ + ٥) - (٠ + ٠ + ٥) = ١٥$

Scanned by CamScanner

٩) إذا كان ق اقتراناً متصلاً ، ق(١) = ٤ ، ق(٢) = ١٢ ، $\int_{١}^{٢} أ\,قَ(س)\,ءس = ١٦$ ، فجد قيمة الثابت أ :

الحل : $أ\,ق(س)\Big|_{١}^{٢} = ١٦$ ← $١٢أ - ٤أ = ١٦$

$٨أ = ١٦$ ← $\boxed{أ = ٢}$

* أمثلة متنوعة تزويدية :

١) $\int_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{\pi}{٢}} (جا\,٢س)\,ءس = -\frac{١}{٢}\,جتا\,٢س\Big|_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{\pi}{٢}}$

$= (\frac{-١}{٢}\,جتا\,(\pi)) - (\frac{-١}{٢}\,جتا\,\frac{\pi}{٢})$

$= \frac{-١}{٢} \times -١ + \frac{١}{٢} \times ٠ = \frac{١}{٢}$

٢) $\int_{\frac{\pi}{٢}}^{٠} (س + جتا\,س)\,ءس = \frac{س^{٢}}{٢} + جا\,س\Big|_{\frac{\pi}{٢}}^{٠}$

$= (٠) - (\frac{\pi^{٢}}{٨} + ١) = \frac{-\pi^{٢}}{٨} - ١$

٣) $\int_{٢}^{٤} \frac{١}{(س - ١)^{٢}}\,ءس = \int_{٢}^{٤} (س - ١)^{-٢}\,ءس$

$= (\frac{(س - ١)^{-١}}{-١ \times ١})\Big|_{٢}^{٤} = \frac{-١}{س - ١}\Big|_{٢}^{٤}$

$= (\frac{-١}{٣}) - (\frac{-١}{١}) = \frac{-١}{٣} + ١ = \frac{٢}{٣}$

٣) $\int_{٠}^{١} \sqrt{س}\,(\sqrt{س} + ٢)^{٢}\,ءس$

$= \int_{٠}^{١} \sqrt{س}\,(س + ٤\sqrt{س} + ٤)\,ءس$

$= \int_{٠}^{١} (س^{\frac{٣}{٢}} + ٤س + ٤س^{\frac{١}{٢}})\,ءس$

$= \frac{٢}{٥}س^{\frac{٥}{٢}} + ٢س^{٢} + ٤ \times \frac{٢}{٣}س^{\frac{٣}{٢}}\Big|_{٠}^{١}$

$= (\frac{٢}{٥} + ٢ + \frac{٨}{٣}) - (٠) = \frac{٦ + ٣٠ + ٤٠}{١٥} = \frac{٧٦}{١٥}$

٤) إذا كان $\int_{ب}^{٢} ٢ب\,ءس = -٣٠$ ، حيث ب ∈ ح ، فجد الثابت ب :

الحل : $٢ب(٢ - ب) = -٣٠$

$٤ب - ٢ب^{٢} = -٣٠$

$٢ب^{٢} - ٤ب - ٣٠ = ٠$

$ب^{٢} - ٢ب - ١٥ = ٠$

$(ب - ٥)(ب + ٣) = ٠$ ← ب = ٥ ، -٣

٥) إذا كان $\int_{٠}^{ج} س(١ - س)\,ءس = ٠$ ، حيث ج ∈ ح ، فجد قيمة ج :

الحل : $\int_{٠}^{ج} س - س^{٢}\,ءس = ٠$

$\frac{س^{٢}}{٢} - \frac{س^{٣}}{٣}\Big|_{٠}^{ج} = ٠$

$\frac{ج^{٢}}{٢} - \frac{ج^{٣}}{٣} = ٠$ ← $٣ج^{٢} - ٢ج^{٣} = ٠$

$ج^{٢}(٣ - ٢ج)$ ← ج = ٠ ، $\frac{٣}{٢}$

٦) إذا كان $\int_{-١}^{٣} (٣س^{٢} - ٢\int_{٠}^{ج} ٣م\,ءم)\,ءس = -٢٠$ ، فجد قيمة الثابت ج :

الحل : $\int_{-١}^{٣} (٣س^{٢} - (٢ \times \frac{٣م^{٢}}{٢}\Big|_{٠}^{ج}))\,ءس = -٢٠$

$\int_{-١}^{٣} (٣س^{٢} - ٣ج^{٢})\,ءس = -٢٠$

$س^{٣} - ٣ج^{٢}س\Big|_{-١}^{٣} = -٢٠$

$(٢٧ - ٩ج^{٢}) - (-١ + ٣ج^{٢}) = -٢٠$

$٢٨ - ١٢ج^{٢} = -٢٠$ ← $-١٢ج^{٢} = -٤٨$

$ج^{٢} = ٤$ ← ج = ±٢

٧) إذا كان $\int_{٢}^{ب} (٢س - ٣)\,ءس = ٢٠$ ، فجد قيمة الثابت ب :

الحل : $س^{٢} - ٣س\Big|_{٢}^{ب} = ٢٠$

$(ب^{٢} - ٣ب) - (٤ - ٦) = ٢٠$

$ب^{٢} - ٣ب - ١٨ = ٠$

$(ب - ٦)(ب + ٣) = ٠$ ← ب = ٦ ، -٣

Scanned by CamScanner

٨) إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{٢} - \int \left(٣\text{س}^{٢} - \int_{٠}^{١} ٢\text{ص}\,\text{دص}\right)\text{دس}$ ، فجد $\text{ق}'(\text{س})$:

الحل : $\text{ق}'(\text{س}) = ٢\text{س} - \left(٣\text{س}^{٢} - \int_{٠}^{١} ٢\text{ص}\,\text{دص}\right)$

$= ٢\text{س} - ٣\text{س}^{٢} + \left(\text{ص}^{٢} \Big|_{٠}^{١}\right)$

$\text{ق}'(\text{س}) = ٢\text{س} - ٣\text{س}^{٢} + ١$

---

٩) إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \int \left(\int_{٠}^{-٢} ٤\,\text{دس} - ٣\text{س}^{٢}\right)\text{دس}$ ، فجد $\text{ق}'(-١)$:

الحل : $\text{ق}'(\text{س}) = \int_{٠}^{-٢} ٤\,\text{دس} - ٣\text{س}^{٢}$

$= ٤(-٢ - ٠) - ٣\text{س}^{٢}$

$\text{ق}'(\text{س}) = -٨ - ٣\text{س}^{٢}$

$\text{ق}'(-١) = -٨ - ٣ = -١١$

---

١٠) جد $\int_{١}^{٣} \frac{٦\text{س}}{٣\text{س}^{٢} - ٥}\,\text{دس}$:

الحل : $= \text{لو}_{\text{هـ}}\left|٣\text{س}^{٢} - ٥\right| \Big|_{١}^{٣}$

$= \text{لو}_{\text{هـ}}٢٢ - \text{لو}_{\text{هـ}}٢ = \text{لو}_{\text{هـ}}\left(\frac{٢٢}{٢}\right) = \text{لو}_{\text{هـ}}١١$

---

١١) جد $\int_{\frac{-\pi}{٤}}^{\frac{\pi}{٤}} \frac{\text{قا}^{٢}\text{س}}{٢ + \text{ظاس}}\,\text{دس}$:

الحل : $= \text{لو}_{\text{هـ}}\left|٢ + \text{ظاس}\right| \Big|_{\frac{-\pi}{٤}}^{\frac{\pi}{٤}}$

$= \left(\text{لو}_{\text{هـ}}(٢ + ١)\right) - \text{لو}_{\text{هـ}}(٢ - ١) = \text{لو}_{\text{هـ}}٣ - ٠$

---

١٢) جد $\int_{٣}^{٥} \frac{\text{س} - ٢}{\text{س}^{٢} - ٤}\,\text{دس}$:

الحل : $\int_{٣}^{٥} \frac{١}{\text{س} + ٢}\,\text{دس} = \text{لو}_{\text{هـ}}\left|\text{س} + ٢\right| \Big|_{٣}^{٥}$

$= \text{لو}_{\text{هـ}}٧ - \text{لو}_{\text{هـ}}٥ = \text{لو}_{\text{هـ}}\left(\frac{٧}{٥}\right)$

---

١٣) جد $\int_{٠}^{١} (١ + \text{هـ}^{\text{س}})^{٢}\,\text{دس}$:

الحل : $\int_{٠}^{١} (١ + ٢\text{هـ}^{\text{س}} + \text{هـ}^{٢\text{س}})\,\text{دس}$

$= \left(\text{س} + ٢\text{هـ}^{\text{س}} + \frac{١}{٢}\text{هـ}^{٢\text{س}}\right) \Big|_{٠}^{١}$

$= \left(١ + ٢\text{هـ}^{١} + \frac{١}{٢}\text{هـ}^{٢}\right) - \left(٠ + ٢ + \frac{١}{٢}\right)$

$= \frac{-٣}{٢} + ٢\text{هـ} + \frac{١}{٢}\text{هـ}^{٢}$

---

١٤) جد $\int_{١}^{\text{هـ}^{٢}} \frac{١}{\text{هـ} - ١}\,\text{دس}$:

الحل : $\frac{١}{\text{هـ} - ١}(\text{هـ}^{٢} - ١) = \text{هـ} + ١$

---

١٥) جد $\int_{١}^{٣} \text{هـ}^{٤}\,\text{دس} = ٢\text{هـ}^{٤}$

---

١٦) ما قيمة $\int_{١}^{\text{هـ}} ٢\text{س}^{٢} \cdot \text{هـ}^{\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}}\,\text{دس}$:

أ) $\frac{١}{٢}(\text{هـ}^{٣} - ١)$ ب) $\frac{١}{٢}(\text{هـ}^{٣} + ١)$

[✓ جـ)] $\frac{١}{٢}(\text{هـ}^{٤} - ١)$ د) $\frac{١}{٢}(\text{هـ}^{٤} + ١)$

---

١٧) إذا كان ق اقتران كثير حدود من الدرجة الثانية ، وكان $\text{ق}(٠) = ٥$ ، $\text{ق}''(\text{س}) = ٤$ ، $\int_{٠}^{١} \text{ق}'(\text{س})\,\text{دس} = ٣$ ، فجد قاعدة الاقتران ق :

الحل : $\text{ق}(\text{س}) = \text{أ}\text{س}^{٢} + \text{ب}\,\text{س} + \text{جـ}$

$\text{ق}(٠) = ٥$ ، $\text{ق}''(\text{س}) = ٤$ ، $\text{ق}(\text{س}) \Big|_{٠}^{١} = ٣$

$\text{ق}(١) - \text{ق}(٠) = ٣$ ، $\text{ق}(١) - ٥ = ٣ \longrightarrow \text{ق}(١) = ٨$

$\text{ق}'(\text{س}) = ٢\text{أ}\text{س} + \text{ب}$

$\text{ق}''(\text{س}) = ٢\text{أ} \longrightarrow ٢\text{أ} = ٤ \longrightarrow \text{أ} = ٢$

$\text{ق}(٠) = ٥ \longrightarrow ٠ + ٠ + \text{جـ} = ٥ \longrightarrow \text{جـ} = ٥$

$\text{ق}(١) = ٨ \longrightarrow \text{أ} + \text{ب} + \text{جـ} = ٨$

$٢ + \text{ب} + ٥ = ٨ \longrightarrow \text{ب} = ١$

$\text{ق}(\text{س}) = ٢\text{س}^{٢} + \text{س} + ٥$

---

١٧) جد كثير حدود ق(س) من الدرجة الأولى بحيث $\int_{-١}^{١} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = ٤$ ، $\int_{١}^{٣} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = ٢$:

الحل :

منهاجي

Scanned by CamScanner

سادساً : خصائص التكامل المحدود :

١ خاصية تساوي المحدود :

*إذا تساوت حدود التكامل فإن جواب التكامل يساوي صفراً

* $\int_{\text{أ}}^{\text{أ}} \text{ق(س) دس} = ٠$

جد : $\int_{٣}^{٣} \text{س}\sqrt{\text{س}^{٢}+١}\ \text{دس} =$

أ) ١   ب) ٢   جـ) $\frac{١}{٢}$ [✓ د) ٠]

إذا كان $\int_{٢+\text{أ}}^{\text{أ}^{٢}-٤} \text{ق(س) دس} = ٠$ ، جد الثابت أ :

أ) -٢، ٣   [✓ ب) ٣، -٢]   جـ) ٢، -٢   د) ٠، -٢

---

٢ خاصية قلب الحدود

عند قلب الحدود نقلب إشارة الناتج :

$\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق(س) دس} = \text{جـ}$ فإن $\int_{\text{ب}}^{\text{أ}} \text{ق(س) دس} = -\text{جـ}$:

إذا كان : $\int_{٠}^{\sqrt{٨}} \frac{\text{س}}{\sqrt{\text{س}^{٢}+١}}\ \text{دس} = ٢$ جد $\int_{\sqrt{٨}}^{٠} \frac{\text{س}}{\sqrt{\text{س}^{٢}+١}}\ \text{دس}$:

الحل : $\int_{\sqrt{٨}}^{٠} \frac{\text{س}}{\sqrt{\text{س}^{٢}+١}}\ \text{دس} = -\int_{٠}^{\sqrt{٨}} \frac{\text{س}}{\sqrt{\text{س}^{٢}+١}}\ \text{دس} = -٢$

---

٣ الخاصية الخطية :

التكامل يتوزع على الجمع والطرح والثابت بطلع بره التكامل

---

١) إذا كان : $\int_{١}^{٥} \frac{١}{٢}\ \text{ق (س) دس} = -٣$ ، $\int_{٥}^{١} ٣\text{هـ(س) دس} = ١٨$

فجد $\int_{١}^{٥} (٤\text{ق(س)} - ٥\text{هـ(س)})\ \text{دس}$:

الحل : $\int_{١}^{٥} \frac{١}{٢}\ \text{ق(س) دس} = -٣$ ، $\frac{١}{٢}\int_{١}^{٥} \text{ق(س) دس} = -٣$

$\therefore \boxed{\int_{١}^{٥} \text{ق(س) دس} = -٦}$

$\int_{٥}^{١} ٣\text{هـ(س) دس} = ١٨$ ، $٣\int_{٥}^{١} \text{هـ(س) دس} = ١٨$ ، $\boxed{\int_{١}^{٥} \text{هـ(س) دس} = -٦}$

$\int_{١}^{٥} (٤\text{ق(س)} - ٥\text{هـ(س)})\ \text{دس} = ٤\int_{١}^{٥} \text{ق(س) دس} - ٥\int_{١}^{٥} \text{هـ(س) دس}$

$= ٤ \times -٦ - ٥ \times -٦ = ٦$

---

٢) إذا كان : $\int_{١}^{٣} (٤\ \text{ق (س)} + ٧\ \text{هـ(س)})\ \text{دس} = ١٩$

، $\int_{١}^{٣} ٣\text{ق(س) دس} = ٩$ فاحسب قيمة $\int_{٣}^{١} ٥\text{هـ(س) دس}$:

الحل : $٣\int_{١}^{٣} \text{ق (س) دس} = ٩ \longrightarrow \boxed{\int_{١}^{٣} \text{ق(س) دس} = ٣}$

$٤\int_{١}^{٣} \text{ق(س) دس} + ٧\int_{١}^{٣} \text{هـ(س) دس} = ١٩$

$١٢ + ٧\int_{١}^{٣} \text{هـ(س) دس} = ١٩ \longrightarrow \boxed{\int_{١}^{٣} \text{هـ(س) دس} = ١}$

$\int_{٣}^{١} ٥\text{هـ(س) دس} = ٥\int_{٣}^{١} \text{هـ(س) دس} = ٥ \times -١ = -٥$

---

٣) إذا كان $\int_{١}^{٣} (٢\text{ق(س)} + \frac{١}{\text{س}^{٢}} - ٦)\ \text{دس} = ١٢$ ، فجد

$\int_{١}^{٣} (\frac{\text{ق(س)}}{٢} - \text{س}^{٢})\ \text{دس}$:

الحل : $٢\int_{١}^{٣} \text{ق(س) دس} + \int_{١}^{٣} (\text{س}^{-٢} - ٦)\ \text{دس} = ١٢$

$٢\int_{١}^{٣} \text{ق(س) دس} + (\frac{\text{س}^{-١}}{-١} - ٦\text{س} \Big|_{١}^{٣}) = ١٢$

$٢\int_{١}^{٣} \text{ق(س) دس} + ((\frac{-١}{٣} - ١٨) - (-١ - ٦)) = ١٢$

$٢\int_{١}^{٣} \text{ق(س) دس} - \frac{١}{٣} - ١٨ + ٧ = ١٢$

$٢\int_{١}^{٣} \text{ق(س) دس} = ٢٣ + \frac{١}{٣}$ $٢\int_{١}^{٣} \text{ق(س) دس} = \frac{٧٠}{٣}$

$\therefore \boxed{\int_{١}^{٣} \text{ق(س) دس} = \frac{٣٥}{٣}}$

* $\frac{١}{٢}\int_{١}^{٣} \text{ق(س) دس} - \int_{١}^{٣} \text{س}^{٢}\ \text{دس}$

$= \frac{١}{٢} \times \frac{٣٥}{٣} - (\frac{\text{س}^{٣}}{٣} \Big|_{١}^{٣}) = \frac{٣٥}{٦} - (\frac{٢٧}{٣} - \frac{١}{٣})$

$= \frac{٣٥}{٦} - \frac{٢٦}{٣} = \frac{٣٥ - ٥٢}{٦} = \frac{-١٧}{٦}$

---

٤) إذا كان م(س) ، هـ(س) معكوسين لمشتقة الاقتران ق(س) :

وكان $\int_{-١}^{٣} (\text{م(س)} - \text{هـ(س)})\ \text{دس} = ١٢$ ، فجد

$\int_{٠}^{٤} ٢\text{س م(س) دس} + \int_{٤}^{٠} ٢\text{س هـ(س) دس}$

الحل : م'(س) = هـ'(س) = ق(س)

م(س) – هـ(س) = ثابت = أ

$\int_{-١}^{٣} \text{أ دس} = ١٢ \longrightarrow ٤\text{أ} = ١٢ \longrightarrow \boxed{\text{أ} = ٣}$

Scanned by CamScanner

$\int_{\text{٠}}^{\text{٤}} \text{٢س م(س) ءس} - \int_{\text{٠}}^{\text{٤}} \text{٢س هـ(س) ءس}$

$= \int_{\text{٠}}^{\text{٤}} \text{٢س(م(س) − هـ(س)) ءس}$

$= \int_{\text{٠}}^{\text{٤}} \text{٦س ءس} = \text{٣س}^{\text{٢}} \Big|_{\text{٠}}^{\text{٤}} = \text{٤٨}$

٥) إذا كان $\int_{\text{٣}}^{\text{١}} \text{(٢ق(س))} + \int_{\text{٠}}^{\text{٢}} \text{٢م ءم) ءس} = \text{١٤}$ ، فجد

$\int_{\text{١}}^{\text{٣}} \text{٣ق(س) ءس}$:

الحل : $\int_{\text{٣}}^{\text{١}} \left(\text{٢ق(س)} + (\text{م}^{\text{٢}} \Big|_{\text{٠}}^{\text{٢}})\right) \text{ءس} = \text{١٤}$

$\int_{\text{٣}}^{\text{١}} \text{(٢ق(س) + ٤) ءس} = \text{١٤}$

$\text{٢}\int_{\text{٣}}^{\text{١}} \text{ق(س) ءس} + \text{٤(١ − ٣)} = \text{١٤}$

$\text{٢}\int_{\text{٣}}^{\text{١}} \text{ق(س) ءس} + \text{-٨} = \text{١٤}$

$\text{٢}\int_{\text{٣}}^{\text{١}} \text{ق(س) ءس} = \text{٢٢} \longrightarrow \boxed{\int_{\text{٣}}^{\text{١}} \text{ق(س) ءس} = \text{١١}}$

$\int_{\text{١}}^{\text{٣}} \text{٣ق(س) ءس} = \text{٣}\int_{\text{١}}^{\text{٣}} \text{ق(س) ءس} = \text{٣} \times \text{-١١} = \text{-٣٣}$

٦) إذا كان $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق(س)} = \text{٥}$ ، فما قيمة

$\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق(س) ءس} - \int_{\text{ب}}^{\text{أ}} \text{ق(س) ءس}$:

الحل : $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق(س) ءس} - \int_{\text{ب}}^{\text{أ}} \text{ق(س) ءس}$

$= \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق(س) ءس} + \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق(س) ءس}$

$= \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{(ق(س) + ق(س)) ءس}$

$= \text{٢}\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق(س) ءس} = \text{٢} \times \text{٥} = \text{١٠}$

٧) إذا كان $\text{ع} = \int_{\frac{\pi}{\text{٤}}}^{\frac{\text{٣}\pi}{\text{٤}}} \text{قتا}^{\text{٢}}\text{س ءس}$ ، $\text{ل} = \int_{\frac{\text{٣}\pi}{\text{٤}}}^{\frac{\pi}{\text{٤}}} \text{ظتا}^{\text{٢}}\text{س ءس}$

فما قيمة (ع + ل) :

الحل : $\text{ع + ل} = \int_{\frac{\pi}{\text{٤}}}^{\frac{\text{٣}\pi}{\text{٤}}} \text{قتا}^{\text{٢}}\text{س ءس} + \int_{\frac{\text{٣}\pi}{\text{٤}}}^{\frac{\pi}{\text{٤}}} \text{ظتا}^{\text{٢}}\text{س ءس}$

$= \int_{\frac{\pi}{\text{٤}}}^{\frac{\text{٣}\pi}{\text{٤}}} \text{قتا}^{\text{٢}}\text{س ءس - ظتا}^{\text{٢}}\text{س ءس} = \int_{\frac{\pi}{\text{٤}}}^{\frac{\text{٣}\pi}{\text{٤}}} \text{١ ءس}$

$= \text{١}\left(\frac{\text{٢}\pi}{\text{٤}}\right) = \frac{\pi}{\text{٢}}$

٤ الخاصية الإضافة

$\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق(س) ءس} = \int_{\text{أ}}^{\text{جـ}} \text{ق(س) ءس} + \int_{\text{جـ}}^{\text{ب}} \text{ق(س) ءس}$

١) إذا كان : $\int_{\text{٣}}^{\text{٥}} \left(\frac{\text{ق(س)}}{\text{٢}} - \text{٣}\right) \text{ءس} = \text{٤}$ ، $\int_{\text{٨}}^{\text{٥}} \text{ق(س) ءس} = \text{٦}$

فجد $\int_{\text{٣}}^{\text{٨}} \text{(ق(س) + ٤س) ءس}$:

الحل : $\int_{\text{٣}}^{\text{٥}} \left(\frac{\text{ق(س)}}{\text{٢}} - \text{٣}\right) \text{ءس} = \text{٤}$

$\int_{\text{٣}}^{\text{٥}} \frac{\text{ق(س)}}{\text{٢}} \text{ءس} - \int_{\text{٣}}^{\text{٥}} \text{٣ ءس} = \text{٤}$

$\int_{\text{٣}}^{\text{٥}} \frac{\text{ق(س)}}{\text{٢}} \text{ءس} - \text{٣(٥ − ٣)} = \text{٤}$ ، $\int_{\text{٣}}^{\text{٥}} \frac{\text{ق(س)}}{\text{٢}} \text{ءس} = \text{١٠}$

$\boxed{\therefore \int_{\text{٣}}^{\text{٥}} \text{ق(س) ءس} = \text{٢٠}}$

$\int_{\text{٣}}^{\text{٨}} \text{(ق(س) + ٤س) ءس} = \int_{\text{٣}}^{\text{٨}} \text{ق(س) ءس} + \int_{\text{٣}}^{\text{٨}} \text{٤س ءس}$

$\int_{\text{٣}}^{\text{٥}} \text{ق(س) ءس} + \int_{\text{٥}}^{\text{٨}} \text{ق(س) ءس} + \left(\text{٢س}^{\text{٢}} \Big|_{\text{٣}}^{\text{٨}}\right)$

$= \text{(٢٠ + -٦) + (١٢٨ − ١٨)} = \text{١٢٤}$

٢) إذا كان $\int_{\text{٩}}^{\text{٢}} \text{(٢ق(س) + ٣) ءس} = \text{-١٧}$

، $\int_{\text{٢}}^{\text{٥}} \frac{\text{ق(س)}}{\text{٣}} \text{ءس} = \text{-٢}$ ، فجد $\int_{\text{٥}}^{\text{٩}} \text{(٤ق(س) - ١) ءس}$

الحل :

منهاجي

Scanned by CamScanner

٣) إذا كان $\int_{-١}^{١}(٤ق(س) + ٣)\,ؤس = ١٨$ ، $\int_{١}^{٤}٢ق(س)\,ؤس = ٢٠$ ، فجد $\int_{٤}^{-١}(٢س - ق(س))\,ؤس$:

الحل : $٤\int_{-١}^{١}ق(س)\,ؤس + \int_{-١}^{١}٣\,ؤس = ١٨$

$٤\int_{-١}^{١}ق(س)\,ؤس + ٦ = ١٨ \longrightarrow ٤\int_{-١}^{١}ق(س)\,ؤس = ١٢$

$\boxed{\int_{-١}^{١}ق(س)\,ؤس = ٣}$ ، $\boxed{\int_{١}^{٤}ق(س)\,ؤس = ١٠}$

$\int_{٤}^{-١}٢س\,ؤس - \int_{٤}^{-١}ق(س)\,ؤس$

$= س^٢\Big|_{٤}^{-١} - (\int_{٤}^{١}ق(س)\,ؤس + \int_{١}^{-١}ق(س)\,ؤس)$

$= (١) - (١٦) - (-١٠ + -٣) = -١٥ + ١٣ = -٢$

*** تكامل الإقتران المتشعب :**

١) إذا كان ق(س) = $\begin{cases} -س & ، -٣ < س \leqslant ٠ \\ س & ، ٠ < س \leqslant ٤ \end{cases}$

فجد $\int_{-٣}^{٤}ق(س)\,ؤس$:

الحل : $\int_{-٣}^{٤}ق(س)\,ؤس = \int_{-٣}^{٠}-س\,ؤس + \int_{٠}^{٤}س\,ؤس$

$= \frac{-س^٢}{٢}\Big|_{-٣}^{٠} + \frac{س^٢}{٢}\Big|_{٠}^{٤} = (٠) - (\frac{-٩}{٢}) + \frac{١٦}{٢} - ٠ = \frac{٢٥}{٢}$

---

٢) إذا كان ق(س) = $\begin{cases} ٢س + أ & ، ١ \le س < ٣ \\ ٦ & ، ٣ \le س \leqslant ٨ \end{cases}$

وكان $\int_{٢}^{٤}ق(س)\,ؤس = ٨$ ، جد الثابت (أ) :

الحل : $\int_{٢}^{٣}(٢س + أ)\,ؤس + \int_{٣}^{٤}٦\,ؤس = ٨$

$= س^٢ + أس\Big|_{٢}^{٣} + ٦(٤ - ٣) = ٨$

$(٩ + ٣أ) - (٤ + ٢أ) + ٦ = ٨$

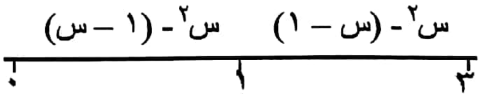
$٥ + أ = ٢ \longrightarrow \boxed{أ = -٣}$

ملاحظة : في اقتران القيمة المطلقة واقتران أكبر عدد صحيح نعيد التعريف قبل الحل .

---

٣) أوجد : $\int_{٠}^{٣}(س^٢ - |س - ١|)\,ؤس$

الحل :



$= \int_{٠}^{١}(س^٢ + س - ١)\,ؤس + \int_{١}^{٣}(س^٢ - س + ١)\,ؤس$

$= \frac{س^٣}{٣} + \frac{س^٢}{٢} - س\Big|_{٠}^{١} + \frac{س^٣}{٣} - \frac{س^٢}{٢} + س\Big|_{١}^{٣}$

$= (\frac{١}{٣} + \frac{١}{٢} - ١) - (٠) + (٩ - \frac{٩}{٢} + ٣) - (\frac{١}{٣} - \frac{١}{٢} + ١)$

$= \cancel{\frac{١}{٣}} + \cancel{\frac{١}{٢}} - \cancel{١} + ٩ - \frac{٩}{٢} + ٣ - \cancel{\frac{١}{٣}} + \cancel{\frac{١}{٢}} - ١$

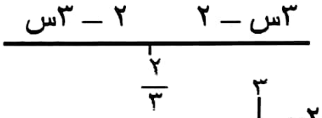
$= ١١ - \frac{٩}{٢} = \frac{٢٢ - ٩}{٢} = \frac{١٣}{٢}$

---

٤) جد قيمة $\int_{٢}^{٣}\sqrt[٣]{٩س^٢ - ١٢س + ٤}\,ؤس$

الحل : $\int_{٢}^{٣}\sqrt{(٣س - ٢)(٣س - ٢)}\,ؤس$

$\int_{٢}^{٣}|٣س - ٢|\,ؤس$



$= \int_{٢}^{٣}(٣س - ٢)\,ؤس = \frac{٣س^٢}{٢} - ٢س\Big|_{٢}^{٣}$

$= (\frac{٢٧}{٢} - ٦) - (٢) = \frac{٢٧}{٢} - ٨ = \frac{٢٧ - ١٦}{٢} = \frac{١١}{٢}$

---

٥) جد $\int_{٠}^{٣}\sqrt{س^٢ - ٤س + ٤}\,ؤس$

الحل : $\int_{٠}^{٣}\sqrt{س^٢ - ٤س + ٤}\,ؤس = \int_{٠}^{٣}\sqrt{(س - ٢)^٢}\,ؤس$

$= \int_{٠}^{٣}|س - ٢|\,ؤس$

$\therefore \int_{٠}^{٢}(٢ - س)\,ؤس + \int_{٢}^{٣}(س - ٢)\,ؤس$

$= (٢س - \frac{س^٢}{٢})\Big|_{٠}^{٢} + (\frac{س^٢}{٢} - ٢س)\Big|_{٢}^{٣}$

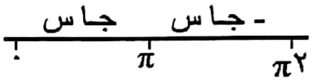
$= (٤ - ٢) - (٠) + (\frac{٩}{٢} - ٦) - (٢ - ٤) = ٢,٥$

---

٦) إذا كان : $\int_{٠}^{٢\pi}\sqrt{\frac{١ - جتا ٢س}{٢}}\,ؤس$

الحل : $\int_{٠}^{٢\pi}\sqrt{\frac{٢جا^٢س}{٢}}\,ؤس$

$\int_{٠}^{٢\pi}|جاس|\,ؤس$



$= \int_{٠}^{\pi}جاس\,ؤس + \int_{\pi}^{٢\pi}-جاس\,ؤس$

$= -جتاس\Big|_{٠}^{\pi} + جتاس\Big|_{\pi}^{٢\pi}$

$= (١) - (-١) + (١) - (-١) = ٢ + ٢ = ٤$

Scanned by CamScanner

٧) جد : $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \frac{\sqrt{١ + \text{جا } ٢\text{س}}}{\text{جا س} + \text{جتا س}}\,\text{ءس}$

الحل : $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \frac{\sqrt{(\text{جا س} + \text{جتا س})^{٢}}}{\text{جا س} + \text{جتا س}}\,\text{ءس}$

$= \int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \frac{|\text{جا س} + \text{جتا س}|}{\text{جا س} + \text{جتا س}}\,\text{ءس} = \int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \frac{\text{جا س} + \text{جتا س}}{\text{جا س} + \text{جتا س}}\,\text{ءس}$

$= \int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} ١\,\text{ءس} = \frac{\pi}{٢}$

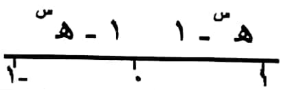
---

٨) إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} |\text{هـ}^{\text{س}} - ١| & ، -١ \leq \text{س} \leq ١ \\ [٣ - \text{س}] & ، ١ < \text{س} \leq ٢ \end{cases}$

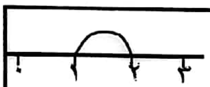
جد $\int_{-١}^{٢} \text{ق}(\text{س})\,\text{ءس}$

الحل : $\int_{-١}^{١} |\text{هـ}^{\text{س}} - ١|\,\text{ءس} + \int_{١}^{٢} [٣ - \text{س}]\,\text{ءس}$

$\text{هـ}^{\text{س}} - ١ = ٠ \longrightarrow \text{هـ}^{\text{س}} = ١ \longrightarrow \text{س} = ٠$



$\text{ل} = ١$



$= \int_{-١}^{٠} (١ - \text{هـ}^{\text{س}})\,\text{ءس} + \int_{٠}^{١} (\text{هـ}^{\text{س}} - ١)\,\text{ءس} + \int_{١}^{٢} ١\,\text{ءس}$

$= (\text{س} - \text{هـ}^{\text{س}})\Big|_{-١}^{٠} + (\text{هـ}^{\text{س}} - \text{س})\Big|_{٠}^{١} + ١$

$= (٠ - ١) - (-١ - \text{هـ}^{-١}) + (\text{هـ}^{١} - ١) - (١ - ٠) + ١$

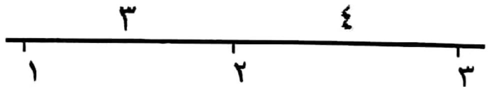
$= -١ + ١ + \frac{١}{\text{هـ}} + \text{هـ} - ١ - ١ + ١$

$= \frac{١}{\text{هـ}} + \text{هـ} - ١$

---

٩) $\int_{١}^{٣} [\text{س} + ٢]\,\text{ءس}$

الحل :



$\int_{١}^{٣} [\text{س} + ٢]\,\text{ءس} = \int_{١}^{٢} ٣\,\text{ءس} + \int_{٢}^{٣} ٤\,\text{ءس}$

$= ٣(٢ - ١) + ٤(٣ - ٢)$

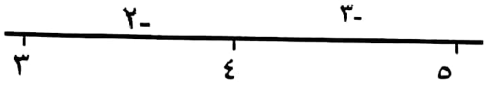
$= ٣ + ٤ = ٧$

---

١٠) إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = [٢ - \text{س}]$ فإن $\int_{٣}^{٥} \text{ق}(\text{س})\,\text{ءس}$ تساوي :

أ) -٦ [✓ ب) -٥] ج) -٤ د) -٣

الحل :



$= \int_{٣}^{٤} -٢\,\text{ءس} + \int_{٤}^{٥} -٣\,\text{ءس} = -٢ + -٣ = -٥$

---

١١) إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \int_{\text{ن}}^{٢\text{ن}} [\frac{\text{س}}{\text{ن}}]\,\text{ءس}$ ، حيث ن عدد طبيعي ، [ ] اقتران أكبر عدد صحيح :

أ) ١ ب) ٢ن [✓ ج) ن] د) ٢

الحل : $[\frac{\text{س}}{\text{ن}}] = \begin{cases} ٠ & ، ٠ \leq \text{س} < \text{ن} \\ ١ & ، \text{ن} \leq \text{س} < ٢\text{ن} \end{cases}$

$= \int_{٠}^{\text{ن}} ٠\,\text{ءس} + \int_{\text{ن}}^{٢\text{ن}} ١\,\text{ءس} = ٠ + ١(٢\text{ن} - \text{ن}) = \text{ن}$

---

١٢) إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} ٢\text{س} & ، ٠ \leq \text{س} \leq ٢ \\ ٥ & ، ٢ < \text{س} \leq ١٠ \end{cases}$

و كان $\int_{٠}^{\text{ج}} \text{ق}(\text{س})\,\text{ءس} = ٢٠$ ، جد الثابت ج :

الحل : $\int_{٠}^{٢} ٢\text{س}\,\text{ءس} + \int_{٢}^{\text{ج}} ٥\,\text{ءس} = ٢٠$

$\text{س}^{٢}\Big|_{٠}^{٢} + ٥(\text{ج} - ٢) = ٢٠$

$٤ + ٥\text{ج} - ١٠ = ٢٠$

$٥\text{ج} = ٢٦ \longrightarrow \boxed{\text{ج} = \frac{٢٦}{٥}}$

---

١٣) إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \int_{١}^{\text{ج}} [\frac{١}{٣}\text{س} + ١]\,\text{ءس} = ١٢$ ، جد الثابت ج حيث $\text{ج} \in \text{ح}^{+}$:

الحل : $\text{ل} = ٣$

$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} ١ & ، ١ \leq \text{س} < ٣ \longrightarrow \int_{١}^{٣} ١\,\text{ءس} = ٢ \\ ٢ & ، ٣ \leq \text{س} < ٦ \longrightarrow \int_{٣}^{٦} ٢\,\text{ءس} = ٦ \\ ٣ & ، ٦ \leq \text{س} < ٩ \longrightarrow \int_{٦}^{٩} ٣\,\text{ءس} = ٩ \end{cases}$

$\int_{١}^{٣} ١\,\text{ءس} + \int_{٣}^{٦} ٢\,\text{ءس} = \int_{٦}^{\text{ج}} ٣\,\text{ءس} = ١٢$

$٢ + ٦ + ٣(\text{ج} - ٦) = ١٢$

$٣\text{ج} - ١٨ = ٢$

$\frac{٣}{٣}\text{ج} = \frac{٢٢}{٣} \longrightarrow \boxed{\text{ج} = \frac{٢٢}{٣}}$

Scanned by CamScanner

٥ خاصية المقارنة :

* تكامل الموجب يبقى موجب تكامل السالب يبقى سالب وتكامل الأكبر يبقى أكبر وتكامل الأصغر يبقى أصغر

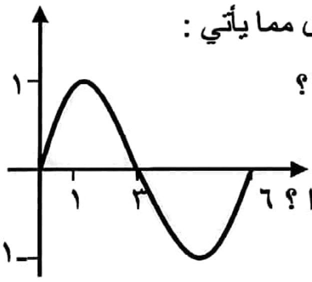
١) دون حساب قيمة التكامل ، بين أن $\int_{٠}^{٢\pi}$ (١ + جا س) ءس ≥ ٠

الحل : إشارة (١ + جا س) في الفترة [٠ ، ٢π]

١+ جا س ≥ ٠ لكل س ∈ [٠ ، ٢π]

∴ $\int_{٠}^{٢\pi}$ (١ + جا س) ءس ≥ ٠

٢)اعتماداً على الشكل الذي يمثل منحنى الاقتران ق المتصل على الفترة [٠ ، ٦] أجب عن كل مما يأتي :



أ) ما إشارة $\int_{١}^{٣}$ ق(س) ءس ، لماذا ؟

ب) ما إشارة $\int_{٣}^{٦}$ ق(س) ءس ، لماذا ؟

الحل : أ) $\int_{١}^{٣}$ ق(س) ءس ≥ ٠ موجب

أ) $\int_{٣}^{٦}$ ق(س) ءس ≤ ٠ سالب

٣) بين أن $\int_{-٢}^{٥}$ (س^{٢} + ٤) ءس ≥ $\int_{-٢}^{٥}$ ٣س ءس ، دون حساب قيمة كل من التكاملين :

الحل : افرض أن ق(س) = س^{٢} + ٤ ، هـ(س) = ٣س

ل(س) = ق(س) – هـ(س)

ادرس إشارة ل(س)

ل(س) ≥ ٠ لكل س ∈ [-٢ ، ٥]

س^{٢} - ٣س + ٤ ≥ ٠

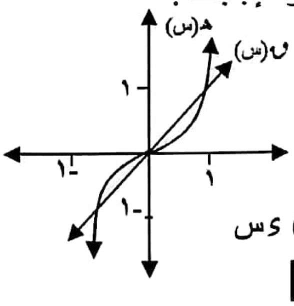
س^{٢} + ٤ ≥ ٣س

لكل س ∈ [-٢ ، ٥]

∴ $\int_{-٢}^{٥}$ (س^{٢} + ٤) ءس ≥

$\int_{-٢}^{٥}$ ٣س ءس

٤)اعتماداً على الشكل الذي يمثل منحنيي الاقتران ق ، هـ قارن بين قيمتي التكامل في كل مما يلي، مبرراً إجابتك :



أ) $\int_{٠}^{١}$ ق(س) ءس ، $\int_{٠}^{١}$ هـ(س) ءس

ب) $\int_{-١}^{٠}$ ق(س) ءس ، $\int_{-١}^{٠}$ هـ(س) ءس

الحل : أ) $\int_{٠}^{١}$ ق(س) ءس ≥ $\int_{٠}^{١}$ هـ(س) ءس

لأن ق(س) ≥ هـ(س) على [٠ ، ١]

ب) $\int_{-١}^{٠}$ هـ(س) ءس ≥ $\int_{-١}^{٠}$ ق(س) ءس

لأن هـ(س) ≥ ق(س) على [-١ ، ٠]

٥) إذا كان ق(س) ≥ س + ٢ ، أوجد أقل قيمة للمقدار

$\int_{٠}^{٢}$ ٢ق(س) ءس :

الحل : ق(س) ≥ س + ٢ ← ٢ق(س) ≥ ٢س + ٤

$\int_{٠}^{٢}$ ٢ق(س) ءس ≥ $\int_{٠}^{٢}$ (٢س + ٤) ءس

$\int_{٠}^{٢}$ ٢ق(س) ءس ≥ (س^{٢} + ٤س $\Big|_{٠}^{٢}$) ءس

$\int_{٠}^{٢}$ ٢ق(س) ءس ≥ ١٢ ← أقل قيمة

٦) إذا كان ق(س) ≥ ١٠ ، جد أكبر قيمة للمقدار

$\int_{٠}^{٣}$ (٢ - ق(س)) ءس :

الحل : ق(س) ≥ ١٠ ← -ق(س) ≤ -١٠

٢ – ق(س) ≤ ٢ – ١٠

$\int_{٠}^{٣}$ (٢ – ق(س)) ءس ≤ $\int_{٠}^{٣}$ -٨ ءس

$\int_{٠}^{٣}$ (٢ - ق(س)) ءس ≤ -٢٤ ← أكبر قيمة

٧) إذا كان ٢ ≤ ق(س) ≤ ٦ ، في الفترة [١ ، ٣] ، وكان

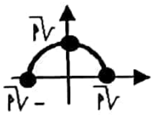
أ ≤ $\int_{١}^{٣}$ (ق(س) + ٢س) ءس ≤ ب ، جد أ ، ب

الحل :

منهاجي

<u>ملاحظة خطيرة :</u>

في خاصية المقارنة إن لم تكن المتباينية موجودة



٠ ≤ $\sqrt{أ - س^{٢}}$ ≤ $\sqrt{أ}$

-١ ≤ جا ، جتا ≤ ١ (أو أي قوة فردية)

٠ ≤ جا^{٢} ، جتا^{٢} ≤ ١(أو أي قوة زوجية)

٠ ≤ | جا ، جتا | ≤ ١

* أي اقتران آخر نشتق ونساوي بالصفر ونجد القيمة العظمى والقيمة الصغرى

Scanned by CamScanner

٨) بين أن $\int_{٠}^{٢\pi}(٣ + \text{جتا}^{٢}\text{س})\,\text{ءس}$ ينحصر بين ٦π ، ٨π دون إيجاد قيمة التكامل :

الحل : $-١ \le \text{جتا س} \le ١$ لكل $\text{س} \in [\,٠ ، ٢\pi\,]$

$٠ \le \text{جتا}^{٢}\text{س} \le ١$

$٣ \le ٣ + \text{جتا}^{٢}\text{س} \le ٤$

$$\int_{٠}^{٢\pi} ٣\,\text{ءس} \le \int_{٠}^{٢\pi}(٣ + \text{جتا}^{٢}\text{س})\,\text{ءس} \le \int_{٠}^{٢\pi} ٤\,\text{ءس}$$

ومنه $٦\pi \le \int_{٠}^{٢\pi}(٣ + \text{جتا}^{٢}\text{س})\,\text{ءس} \le ٨\pi$

∴ المقدار $\int_{٠}^{٢\pi}(٣ + \text{جتا}^{٢}\text{س})\,\text{ءس}$ ينحصر بين ٦π ، ٨π

---

٩) دون حساب تكامل المقدار $\int_{٠}^{\pi}\frac{١}{٣\text{جتا}^{٢}\text{س} + ٢}\,\text{ءس}$ ، بين أن $\frac{\pi}{٥} \le \int_{٠}^{\pi}\frac{١}{٣\text{جتا}^{٢}\text{س} + ٢}\,\text{ءس} \le \frac{\pi}{٢}$:

الحل : $٠ \le \text{جتا}^{٢}\text{س} \le ١$

$٠ \le ٣\text{جتا}^{٢}\text{س} \le ٣$

$٠ + ٢ \le ٣\text{جتا}^{٢}\text{س} + ٢ \le ٥$

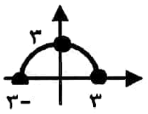
$$\frac{١}{٥} \le \frac{١}{٣\text{جتا}^{٢}\text{س} + ٢} \le \frac{١}{٢}$$

$$\int_{٠}^{\pi}\frac{١}{٥}\,\text{ءس} \le \int_{٠}^{\pi}\frac{١}{٣\text{جتا}^{٢}\text{س} + ٢}\,\text{ءس} \le \int_{٠}^{\pi}\frac{١}{٢}\,\text{ءس}$$

$$\frac{\pi}{٥} \le \int_{٠}^{\pi}\frac{١}{٣\text{جتا}^{٢}\text{س} + ٢}\,\text{ءس} \le \frac{\pi}{٢}$$

---

١٠) إذا علمت أن $\text{م} \le \int_{-٣}^{٣}\sqrt{٩ - \text{س}^{٢}}\,\text{ءس} \le \text{ك}$ ، فجد م ، ك التي تحقق المتباينة دون حساب قيمة $\int_{-٣}^{٣}\sqrt{٩ - \text{س}^{٢}}\,\text{ءس}$:



الحل : $٠ \le \sqrt{٩ - \text{س}^{٢}} \le ٣$

$$\int_{-٣}^{٣} ٠\,\text{ءس} \le \int_{-٣}^{٣}\sqrt{٩ - \text{س}^{٢}}\,\text{ءس} \le \int_{-٣}^{٣} ٣\,\text{ءس}$$

$$٠ \le \int_{-٣}^{٣}\sqrt{٩ - \text{س}^{٢}}\,\text{ءس} \le ١٨$$

$\text{م} = ٠$ ، $\text{ك} = ١٨$

منهاجي

---

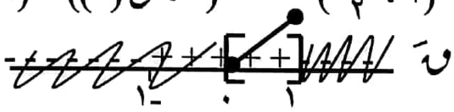
١١) إذا علمت أن $\text{م} \le \int_{٠}^{١}\frac{\text{س}}{١ + \text{س}^{٢}}\,\text{ءس} \le \text{ك}$ فجد(م)، (ك) التي تحقق المتباينة دون حساب قيمة $\int_{٠}^{١}\frac{\text{س}}{١ + \text{س}^{٢}}\,\text{ءس}$:

الحل : $\text{ق(س)} = \frac{\text{س}}{١ + \text{س}^{٢}}$

$$\text{ق}'\text{(س)} = \frac{(١ + \text{س}^{٢})(١) - (\text{س})(٢\text{س})}{(١ + \text{س}^{٢})^{٢}}$$

$$= \frac{\text{س}^{٢} + ١ - ٢\text{س}^{٢}}{(١ + \text{س}^{٢})^{٢}} = \frac{١ - \text{س}^{٢}}{(١ + \text{س}^{٢})^{٢}}$$

$(١ ، \frac{١}{٢})$ $\qquad (٠ ، \text{ق}(٠)) = (٠ ، ٠)$



$$٠ \le \text{ق(س)} \le \frac{١}{٢}$$

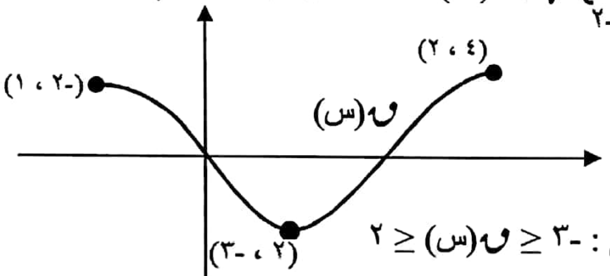
$$\int_{٠}^{١} ٠\,\text{ءس} \le \int_{٠}^{١}\text{ق(س)}\,\text{ءس} \le \int_{٠}^{١}\frac{١}{٢}\,\text{ءس}$$

$$٠ \le \int_{٠}^{١}\text{ق(س)}\,\text{ءس} \le \frac{١}{٢}$$

$\text{م} = ٠$ ، $\text{ك} = \frac{١}{٢}$

---

١٢) يمثل الشكل المجاور منحنى الاقتران ق(س) المعرف على $[\,-٢ ، ٤\,]$ ، إذا علمت أن : $\text{أ} \le \int_{-٢}^{٤}\sqrt{\text{ق}^{٢}\text{(س)} + ١٦}\,\text{ءس} \le \text{ب}$ ، جد أ ، ب :



الحل : $-٣ \le \text{ق(س)} \le ٢$

$٠ \le \text{ق}^{٢}\text{(س)} \le ٩$

$١٦ \le \text{ق}^{٢}\text{(س)} + ١٦ \le ٢٥$

$٤ \le \sqrt{\text{ق(س)}^{٢} + ١٦} \le ٥$

$$\int_{-٢}^{٤} ٤\,\text{ءس} \le \int_{-٢}^{٤}\sqrt{\text{ق}^{٢}\text{(س)} + ١٦}\,\text{ءس} \le \int_{-٢}^{٤} ٥\,\text{ءس}$$

$$٢٤ \le \int_{-٢}^{٤}\sqrt{\text{ق}^{٢}\text{(س)} + ١٦}\,\text{ءس} \le ٣٠$$

$\text{أ} = ٢٤$ ، $\text{ب} = ٣٠$

Scanned by CamScanner

سابعاً : طرائق التكامل

أولاً : التكامل بالكسور الجزئية :

$$\boxed{\int \frac{\text{بسط}}{\text{مقام}} ءس}$$

١) تحليل مع اختصار

٢) فصل البسط على المقام

٣) $\int \frac{\text{ثابت}}{\text{خطي}} ءس = \frac{\text{الثابت}}{\text{معامل س}} \text{لوهـ} \left| \text{المقام} \right| + جـ$

٤) $\int \frac{ق'(س)}{ق(س)} ءس = \text{لوهـ} \left| ق(س) \right| + جـ$

٥) درجة البسط $\geq$ درجة المقام نستخدم القسمة الطويلة :

$$= \int \text{الناتج } ءس + \int \frac{\text{الباقي}}{\text{المقسوم عليه}} ءس$$

٦) درجة البسط < درجة المقام
* المقام يحلل لمقادير خطية مختلفة } نستخدم تجزئة الكسور (التوزيع)

---

١) $\int \frac{س^٣ + س}{س - ١} ءس$

الحل : $س^٢ + س + ٢$

$$\begin{array}{r|l} س^٣ + س & س - ١ \\ \cancel{-س^٣} + س^٢ & \\ \hline \cancel{س^٢} + س & \\ \cancel{-س^٢} + س & \\ \hline \cancel{٢س} & \\ \cancel{-٢س} + ٢ & \\ \hline ٢ & \end{array}$$

$$\int (س^٢ + س + ٢) ءس + \int \frac{٢}{س - ١} ءس$$

$$\frac{س^٣}{٣} + \frac{س^٢}{٢} + ٢س + ٢ \text{ لوهـ} \left| س - ١ \right| + جـ$$

---

١) جد $\int \frac{٢}{س^٢ - ٤} ءس$

الحل : $\int \frac{٢}{(س - ٢)(س + ٢)} ءس = \int \frac{م}{س - ٢} + \frac{ب}{س + ٢} ءس$

$م(س + ٢) + ب(س - ٢) = ٢$

$س = ٢ \longrightarrow ٤م = ٢ \longrightarrow م = \frac{١}{٢}$

$س = -٢ \longrightarrow -٤ب = ٢ \longrightarrow ب = \frac{-١}{٢}$

$$= \int \frac{\frac{١}{٢}}{س - ٢} ءس + \int \frac{\frac{-١}{٢}}{س + ٢} ءس$$

$$= \frac{١}{٢} \text{لوهـ} \left| س - ٢ \right| - \frac{١}{٢} \text{ لوهـ} \left| س + ٢ \right| + جـ$$

---

٣) جد $\int_{٢}^{٤} \frac{٤س - ١}{س^٢ + س - ٢} ءس$

الحل : $\int_{٢}^{٤} \frac{٤س - ١}{(س + ٢)(س - ١)} ءس$

$$= \int_{٢}^{٤} \left(\frac{م}{س + ٢} + \frac{ب}{س - ١}\right) ءس$$

$م(س - ١) + ب(س + ٢) = ٤س - ١$

$س = ١ \longrightarrow ٣ب = ٣ \longrightarrow ب = ١$

$س = -٢ \longrightarrow -٣م = -٩ \longrightarrow م = ٣$

$$= \int_{٢}^{٤} \left(\frac{٣}{س + ٢} + \frac{١}{س - ١}\right) ءس$$

$$= \left(٣\text{لوهـ} \left| س + ٢ \right| + \text{لوهـ} \left| س - ١ \right| \right) \Big|_{٢}^{٤}$$

$$= (٣\text{لوهـ } ٦ + \text{لوهـ } ٣) - (٣\text{لوهـ } ٤ + ٠)$$

$$= \text{لوهـ} \left(\frac{٦^٣ \times ٣}{٤^٣}\right) = \text{لوهـ} \left(\frac{٨١}{٨}\right)$$

---

٤) جد $\int \frac{س - ١٣}{٢س^٢ - ٧س + ٣} ءس$

الحل : $\int \frac{س - ١٣}{(٢س - ١)(س - ٣)} ءس$

$$= \int \left(\frac{م}{٢س - ١} + \frac{ب}{س - ٣}\right) ءس$$

$م(س - ٣) + ب(٢س - ١) = س - ١٣$

$س = ٣ \longrightarrow ٥ب = -١٠ \longrightarrow ب = -٢$

$س = \frac{١}{٢} \longrightarrow \frac{-٥م}{٢} = \frac{-٢٥}{٢} \longrightarrow م = ٥$

$$= \int \left(\frac{٥}{٢س - ١} + \frac{-٢}{س - ٣}\right) ءس$$

$$= \frac{٥}{٢}\text{لوهـ} \left| ٢س - ١ \right| - ٢\text{لوهـ} \left| س - ٣ \right| + جـ$$

منهاجي

Scanned by CamScanner

٥) جد $\int_{١-}^{١} \frac{|١ - س|}{س^٢ - ٥س + ٦}$ ءس :

منهاجي

٦) $\int \frac{س^٢ + س + ٥}{س^٢ + س}$ ءس

الحل : $\int ١$ ءس $+ \int \frac{٥}{س^٢ + س}$ ءس

$$\begin{array}{r|l} & ١ \\ \hline س^٢ + س & س^٢ + س + ٥ \\ & - س^٢ \mp س \\ \hline & ٥ \end{array}$$

$= س + \int \frac{م}{س} + \frac{ب}{س + ١}$ ءس

$م(س + ١) + ب(س) = ٥$

$س = ١- \longrightarrow -ب = ٥ \longrightarrow ب = ٥-$

$س = ٠ \longrightarrow م = ٥$

$= س + \int \frac{٥}{س} + \frac{٥-}{س + ١}$ ءس

$= س + ٥لوهـ|س| - ٥لوهـ|س + ١| + جـ$

٧) جد : $\int \frac{س^٣ + ٤س - ٨}{س^٢ - ٩}$ ءس

الحل :

$$\begin{array}{r|l} & س \\ \hline س^٢ - ٩ & س^٣ + ٤س - ٨ \\ & - س^٣ \pm ٩س \\ \hline & ١٣س - ٨ \end{array}$$

$= \int س$ ءس $+ \int \frac{١٣س - ٨}{(س - ٣)(س + ٣)}$ ءس

$= \frac{س^٢}{٢} + \int \frac{م}{س - ٣} + \frac{ب}{س + ٣}$ ءس

$م(س + ٣) + ب(س - ٣) = ١٣س - ٨$

$س = ٣ \longrightarrow ٦م = ٣١ \longrightarrow م = \frac{٣١}{٦}$

$س = ٣- \longrightarrow ٦-ب = ٤٧- \longrightarrow ب = \frac{٤٧}{٦}$

$= \frac{س^٢}{٢} + \frac{٣١}{٦}لوهـ|س - ٣| + \frac{٤٧}{٦}لوهـ|س + ٣| + جـ$

٨) جد : $\int_{٣}^{٤} \frac{٧}{س^٢ - ٤س + ٤}$ ءس :

الحل : $\int_{٣}^{٤} ٧(س - ٢)^{٢-}$ ءس $= \left. \frac{٧(س - ٢)^{١-}}{١-} \right|_{٣}^{٤}$

$= \left. \frac{٧-}{س - ٢} \right|_{٣}^{٤} = (\frac{٧-}{٢}) - (\frac{٧-}{١}) = \frac{٧- + ١٤}{٢} = \frac{٧}{٢}$

ثانياً : التكامل بالأجزاء :

التكامل بالأجزاء :

١) $\int$ مندس (خطي)^{قوة} ءس

٢) $\int$ مندس هـ^{خطية} ءس

٣) $\int$ مندس دائري زاويته خطية ءس

٤) $\int$ اللوغاريتم ءس

٥) $\int$ هـ^{خطية} × دائري زاويته خطية ءس

ق = الاشتقاق   ءهـ = التكامل

$$\begin{tikzcd} \text{ق} \arrow[dr, "\times"] & \\ ءق = \arrow[r, "-\int"] & هـ = \end{tikzcd}$$

$\int$ ق ءهـ $=$ ق × هـ $- \int$ هـ . ءق

ق = اللوغاريتم

ءهـ = (خطي)^{سالبة} ، $\frac{ثابت}{خطي}$ أولويات ↓ الفرض

ق = المندس (كثير الحدود)

في الحالات الثلاثة الأولى إذا كان المندس (كثير الحدود) ليس خطياً نستخدم طريقة الجدول

١) $\int س(س + ٢)^٥$ ءس

الحل : ق = س   ءهـ = $(س + ٢)^٥$ ءس

$$\begin{tikzcd} ق = س \arrow[dr, "\times"] & \\ ءق = ١ \text{ ءس} \arrow[r, "-\int"] & هـ = \frac{١}{٦}(س + ٢)^٦ \end{tikzcd}$$

$=$ ق × هـ $- \int$ هـ × ءق

$= \frac{١}{٦}س(س + ٢)^٦ - \int \frac{١}{٦}(س + ٢)^٦$ ءس

$= \frac{١}{٦}س(س + ٢)^٦ - \frac{١}{٦} \frac{(س + ٢)^٧}{٧ \times ١} + جـ$

Scanned by CamScanner

٢) $\int \frac{٥س + ١}{س^{٢} + ٢س + ١}$ ءس

الحل : = $\int \frac{٥س + ١}{(س + ١)^{٢}}$ ءس = $\int$ (٥س + ١)(س + ١)$^{-٢}$ ءس

ن = ٥س + ١ × ءهـ = (س + ١)$^{-٢}$ ءس

ءن = ٥ ءس $\xleftarrow{-\int}$ هـ = - (س + ١)$^{-١}$

= $\frac{-(٥س + ١)}{س + ١}$ + $\int \frac{٥}{س + ١}$ ءس

= $\frac{-(٥س + ١)}{س + ١}$ + $\frac{٥}{١}$ لوهـ $\left|س + ١\right|$ + ج

---

٣) $\int_{-٢}^{١}$ ٥س $\sqrt{س + ٣}$ ءس

الحل : = $\int_{-٢}^{١}$ ٥س(س + ٣)$^{\frac{١}{٢}}$ ءس

ن = ٥س × ءهـ = (س + ٣)$^{\frac{١}{٢}}$ ءس

ءن = ٥ ءس $\xleftarrow{-\int}$ هـ = $\frac{٢}{٣}$ (س + ٣)$^{\frac{٣}{٢}}$

= $\frac{١٠}{٣}$ س(س + ٣)$^{\frac{٣}{٢}}$ - $\int \frac{١٠}{٣}$ (س + ٣)$^{\frac{٣}{٢}}$ ءس

= $\frac{١٠}{٣}$ س(س + ٣)$^{\frac{٣}{٢}}$ - $\frac{١٠}{٣}$ × $\frac{٢}{٥}$ (س + ٣)$^{\frac{٥}{٢}}$ $\Big|_{-٢}^{١}$

= ($\frac{١٠}{٣}$ (٤)$^{\frac{٣}{٢}}$ – $\frac{٤}{٣}$ (٤)$^{\frac{٥}{٢}}$) – ($\frac{١٠}{٣}$ × -٢ - $\frac{٤}{٣}$ × ١)

= $\frac{٨٠}{٣}$ - $\frac{٣٢ \times ٤}{٣}$ + $\frac{٢٤}{٣}$ = $\frac{٨٠ - ١٢٨ + ٢٤}{٣}$ = $\frac{-٢٤}{٣}$ = - ٨

---

٤) $\int$ ٢س جا س ءس

الحل : ن = ٢س × ءهـ = جا س ءس

ءن = ٢ ءس $\xleftarrow{-\int}$ هـ = - جتا س

= -٢س جتا س + $\int$ ٢جتا س ءس

= -٢س جتا س + ٢جا س + ج

---

٥) $\int \frac{٤س + ٧}{قا س}$ ءس

الحل : $\int$ (٤س + ٧) جتا س ءس

ن = ٤س + ٧ × ءهـ = جتا س ءس

ءن = ٤ $\xleftarrow{-\int}$ هـ = جا س

= (٤س + ٧) جا س - $\int$ ٤جا س ءس

= (٤س + ٧) جا س + ٤جتا س + ج

---

٦) جد $\int$ س جا^{٢}س ءس

الحل : ن = س × ءهـ = جا^{٢}س = $\frac{١}{٢}$ (١ - جتا٢س)

ءن = ١ ءس $\xleftarrow{-\int}$ هـ = $\frac{١}{٢}$ (س - $\frac{١}{٢}$ جا ٢س)

= $\frac{١}{٢}$ س(س - $\frac{١}{٢}$ جا ٢س) - $\int \frac{١}{٢}$ (س - $\frac{١}{٢}$ جا ٢س)ءس

= $\frac{١}{٢}$ س(س - $\frac{١}{٢}$ جا ٢س) - $\frac{١}{٢}$ ($\frac{س^{٢}}{٢}$ + $\frac{١}{٤}$ جتا ٢س) + ج

---

٧) جد $\int$ س ظا^{٢}س ءس

الحل : ن = س × ءهـ = ظا^{٢}س = (قا^{٢}س - ١) ءس

ءن = ١ ءس $\xleftarrow{-\int}$ هـ = (ظا س – س)

= س(ظا س – س) - $\int$ (ظا س – س) ءس

= س(ظا س - س) – (- لوهـ $\left|جتاس\right|$ - $\frac{س^{٢}}{٢}$) + ج

= س(ظا س - س) + لوهـ $\left|جتاس\right|$ + $\frac{س^{٢}}{٢}$ + ج

---

٨) جد : $\int \frac{س}{١ - جتا ٢س}$ ءس

الحل :

منهاجي

Scanned by CamScanner

٩) جد $\int \text{س}\,(\text{جا س} + \text{جتا س})^{٢}\ \text{ءس}$

الحل : $\text{ں} = \text{س}$ × $\text{ءه} = (١ + \text{جا ٢س})\ \text{ءس}$

$\text{ءں} = ١\ \text{ءس}$ $\int -$ $\text{ه} = \text{س} - \frac{١}{٢}\,\text{جتا ٢س}$

$= (\text{س}^{٢} - \frac{١}{٢}\text{س جتا ٢س}) - \int (\text{س} - \frac{١}{٢}\,\text{جتا ٢س})\text{ءس}$

$= \text{س}^{٢} - \frac{١}{٢}\text{س جتا ٢س} - (\frac{\text{س}^{٢}}{٢} - \frac{١}{٤}\ \text{جا ٢س}) + \text{ج}$

$= \text{س}^{٢} - \frac{١}{٢}\text{س جتا ٢س} - \frac{\text{س}^{٢}}{٢} + \frac{١}{٤}\text{جا ٢س} + \text{ج}$

---

١٠) $\int \frac{\text{س}}{\text{ه}^{٢\text{س}}}\ \text{ءس}$

الحل : $= \int \text{س ه}^{-٢\text{س}}\ \text{ءس}$

$\text{ں} = \text{س}$ × $\text{ءه} = \text{ه}^{-٢\text{س}}\ \text{ءس}$

$\text{ءں} = ١\ \text{ءس}$ $\int -$ $\text{ه} = \frac{١}{-٢}\text{ه}^{-٢\text{س}}$

$= \frac{-١}{٢}\text{س ه}^{-٢\text{س}} + \int \frac{١}{٢}\text{ه}^{-٢\text{س}}\ \text{ءس}$

$= \frac{-١}{٢}\text{س ه}^{-٢\text{س}} + \frac{-١}{٤}\text{ه}^{-٢\text{س}} + \text{ج}$

---

١١) $\int \text{ه}^{(\text{س} + \text{لوه س})}\ \text{ءس}$

الحل : $= \int \text{ه}^{\text{س}} \times \text{ه}^{\text{لوه س}}\text{ءس} = \int \text{ه}^{\text{س}} \times \text{س ءس}$

$\text{ں} = \text{س}$ × $\text{ءه} = \text{ه}^{\text{س}}\ \text{ءس}$

$\text{ءں} = ١\ \text{ءس}$ $\int -$ $\text{ه} = \text{ه}^{\text{س}}$

$= \text{س ه}^{\text{س}} - \int \text{ه}^{\text{س}}\ \text{ءس} = \text{س ه}^{\text{س}} - \text{ه}^{\text{س}} + \text{ج}$

---

١٢) $\int \frac{\text{س ه}^{\text{س}}}{(\text{س} + ١)^{٢}}\ \text{ءس}$

الحل : $= \int \text{س ه}^{\text{س}}\ (\text{س} + ١)^{-٢}\ \text{ءس}$

$\text{ں} = \text{س ه}^{\text{س}}$ × $\text{ءه} = (\text{س} + ١)^{-٢}\text{ءس}$

$\text{ءں} = (\text{س ه}^{\text{س}} + \text{ه}^{\text{س}})\text{ءس}$ $\int -$ $\text{ه} = -(\text{س} + ١)^{-١}$

$= \frac{-\text{س ه}^{\text{س}}}{\text{س} + ١} + \int \frac{\text{ه}^{\text{س}}\cancel{(\text{س} + ١)}}{\cancel{\text{س} + ١}}\ \text{ءس}$

$= \frac{-\text{س ه}^{\text{س}}}{\text{س} + ١} + \text{ه}^{\text{س}} + \text{ج}$

---

١٣) جد : $\int_{٠}^{\pi} (٢\text{س} + ١)\ \text{جتا}\ (٣\text{س})\ \text{ءس}$

الحل : $\text{ں} = (٢\text{س} + ١)$ × $\text{ءه} = \text{جتا}\ (٣\text{س})\ \text{ءس}$

$\text{ءں} = ٢\ \text{ءس}$ $\int -$ $\text{ه} = \frac{١}{٣}\ \text{جا}\ (٣\text{س})$

$= \frac{١}{٣}\ (٢\text{س} + ١)\text{جا ٣س} - \int \frac{٢}{٣}\ \text{جا}\ (٣\text{س})\ \text{ءس}$

$= \left(\frac{١}{٣}\ (٢\text{س} + ١)\text{جا ٣س} + \frac{٢}{٩}\ \text{جتا}\ (٣\text{س})\right)\Big|_{٠}^{\pi}$

$= (٠ + \frac{٢}{٩} \times -١) - (٠ + \frac{٢}{٩})$

$= \frac{-٢}{٩} - \frac{٢}{٩} = \frac{-٤}{٩}$

---

*<u>جد كلاً من التكاملات الآتية :</u>

١) $\int (\text{س}^{٢} - ٢\text{س})\ \sqrt{\text{س} + ٣}\ \text{ءس}$

الحل :

ں		ءه
$\text{س}^{٢} - ٢\text{س}$		$(\text{س} + ٣)^{\frac{١}{٢}}$
$٢\text{س} - ٢$	+	$\frac{٢}{٣}\ (\text{س} + ٣)^{\frac{٣}{٢}}$
٢	-	$\frac{٤}{١٥}\ (\text{س} + ٣)^{\frac{٥}{٢}}$
٠	+	$\frac{٨}{١٠٥}\ (\text{س} + ٣)^{\frac{٧}{٢}}$

$= \frac{٢}{٣}\ (\text{س} + ٣)^{\frac{٣}{٢}}(\text{س}^{٢} - ٢\text{س}) - (٢\text{س} - ٢) \times \frac{٤}{١٥}\ (\text{س} + ٣)^{\frac{٥}{٢}}$

$+ ٢(\frac{٨}{١٠٥})(\text{س} + ٣)^{\frac{٧}{٢}} + \text{ج}$

---

٢) $\int \text{س}^{٢}\text{جتا ٤س ءس}$

الحل :

ں		ءه
$\text{س}^{٢}$		جتا ٤س
٢س	+	$\frac{١}{٤}\ \text{جا ٤س}$
٢	-	$\frac{-١}{١٦}\ \text{جتا ٤س}$
٠	+	$\frac{-١}{٦٤}\ \text{جا ٤س}$

Scanned by CamScanner

$= \text{س}^{٢} \times \frac{١}{٤}\,\text{جا ٤س} + ٢\text{س} \times \frac{١}{١٦}\,\text{جتا ٤س}$

$+ ٢ \times \frac{-١}{٦٤}\,\text{جا ٤س} + \text{جـ}$

٣) $\int (\text{س}^{٢} - \text{س})\ \text{جا ٢س ءس}$

الحل :

ق		ءهـ
$\text{س}^{٢} - \text{س}$	+	جا ٢س
$٢\text{س} - ١$	-	$\frac{-١}{٢}\,\text{جتا ٢س}$
٢	+	$\frac{-١}{٤}\,\text{جا ٢س}$
٠		$+\frac{١}{٨}\,\text{جتا ٢س}$

$= \frac{-١}{٢}\,\text{جتا ٢س}\,(\text{س}^{٢} - \text{س}) + \frac{١}{٤}\,\text{جا ٢س}\,(٢\text{س} - ١)$

$+ ٢ \times \frac{١}{٨}\,\text{جتا}\,(٢\text{س}) + \text{جـ}$

٤) $\int (\text{س}^{٣} + ٢\text{س})\ \text{هـ}^{\text{س}}\ \text{ءس}$

الحل :

ق		ءهـ
$\text{س}^{٣} + ٢\text{س}$	+	$\text{هـ}^{\text{س}}$
$٣\text{س}^{٢} + ٢$	-	$\text{هـ}^{\text{س}}$
٦س	+	$\text{هـ}^{\text{س}}$
٦	-	$\text{هـ}^{\text{س}}$
٠		$\text{هـ}^{\text{س}}$

$= (\text{س}^{٣} + ٢\text{س})\text{هـ}^{\text{س}} - (٣\text{س}^{٢} + ٢)\ \text{هـ}^{\text{س}} + ٦\text{س}\ \text{هـ}^{\text{س}} - ٦\text{هـ}^{\text{س}} + \text{جـ}$

١) جد : $\int_{\text{هـ}}^{\text{هـ}^{٢}} \text{لوهـس ءس}$

الحل : $\text{ق} = \text{لوهـس} \quad \times \quad \text{ءهـ} = ١\ \text{ءس}$

$\text{ءق} = \frac{١}{\text{س}}\,\text{ءس} \quad -\int \quad \text{هـ} = \text{س}$

$= \text{س لوهـس} - \int_{\text{هـ}}^{\text{هـ}^{٢}} \frac{١}{\cancel{\text{س}}} \times \cancel{\text{س}}\,\text{ءس}$

$= \text{س لوهـس} - \text{س} \Big|_{\text{هـ}}^{\text{هـ}^{٢}}$

$= (\text{هـ}^{٢} \times ٢ - \text{هـ}^{٢}) - (\text{هـ} \times ١ - \text{هـ}) = \text{هـ}^{٢}$

٢) جد : $\int \text{س لوهـس}^{٣}\ \text{ءس}$

الحل : $\int ٣\text{س لوهـس ءس}$

$\text{ق} = \text{لوهـس} \quad \times \quad \text{ءهـ} = ٣\text{س ءس}$

$\text{ءق} = \frac{١}{\text{س}}\,\text{ءس} \quad -\int \quad \text{هـ} = \frac{٣}{٢}\text{س}^{٢}$

$= \frac{٣}{٢}\text{س}^{٢}\ \text{لوهـس} - \int \frac{١}{\text{س}} \times \frac{٣}{٢}\text{س}^{٢}\ \text{ءس}$

$= \frac{٣}{٢}\text{س}^{٢}\ \text{لوهـس} - \int \frac{٣}{٢}\text{س ءس}$

$= \frac{٣}{٢}\text{س}^{٢}\ \text{لوهـس} - \frac{٣}{٢} \times \frac{\text{س}^{٢}}{٢} + \text{جـ}$

٣) جد : $\int \text{س}\ (\text{لوهـس})^{٢}\ \text{ءس}$

الحل : $\text{ق} = (\text{لوهـس})^{٢} \qquad \text{ءهـ} = \text{س ءس}$

$\text{ءق} = ٢(\text{لوهـس})^{١} \times \frac{١}{\text{س}} \quad \times \quad -\int \quad \text{هـ} = \frac{١}{٢}\text{س}^{٢}$

$= \frac{١}{٢}\text{س}^{٢}(\text{لوهـس})^{٢} - \boxed{\int \text{س لوهـس ءس}}$ أجزاء

$= \frac{١}{٢}\text{س}^{٢}(\text{لوهـس})^{٢} - \frac{١}{٢}\text{س}^{٢}\ \text{لوهـس} + \frac{١}{٤}\text{س}^{٢} + \text{جـ}$

$\text{ق} = \text{لوهـس} \quad \times \quad \text{ءهـ} = \text{س ءس}$

$\text{ءق} = \frac{١}{\text{س}}\,\text{ءس} \quad -\int \quad \text{هـ} = \frac{١}{٢}\text{س}^{٢}$

$= \frac{١}{٢}\text{س}^{٢}\text{لوهـس} - \int \frac{١}{٢}\text{س ءس}$

$= \frac{١}{٢}\text{س}^{٢}\text{لوهـس} - \frac{١}{٤}\text{س}^{٢} + \text{جـ}$

٤) جد : $\int \text{س}^{\text{ن}}\ \text{لوهـس ءس}$:

الحل :

منهاجي

Scanned by CamScanner

٥) جد : ∫ قا^{٢}س لوهـ (ظاس) ءس

الحل : و = لوهـ (ظاس)   ءهـ = قا^{٢}س ءس

ءو = $\frac{\text{قا}^{٢}\text{س}}{\text{ظاس}}$ ءس   هـ = ظاس

= ظاس لوهـ (ظاس) - ∫ $\cancel{\text{ظاس}}$ × $\frac{\text{قا}^{٢}\text{س}}{\cancel{\text{ظاس}}}$ ءس

= ظاس لوهـ (ظاس) - ظاس + جـ

---

٦) جد : ∫ قا^{٢}س لوهـ (جاس) ءس

الحل : و = لوهـ (جاس)   ءهـ = قا^{٢}س ءس

ءو = $\frac{\text{جتاس}}{\text{جاس}}$ ءس   هـ = ظاس

= ظاس لوهـ (جاس) - ∫ $\frac{\cancel{\text{جتاس}}}{\cancel{\text{جاس}}}$ × $\frac{\cancel{\text{جاس}}}{\cancel{\text{جتاس}}}$ ءس

= ظاس - لوهـ (جاس) - س + جـ

---

٧) جد : ∫ جتاس لوهـ (جاس) ءس

---

٨) جد : ∫ $\frac{\text{لوهـ (س + ٣)}}{\sqrt{\text{س + ٣}}}$ ءس

الحل : و = لوهـ (س + ٣)   ءهـ = (س + ٣)$^{\frac{-١}{٢}}$ ءس

ءو = $\frac{١}{\text{س + ٣}}$ ءس   هـ = $\frac{٢}{١}$ (س + ٣)$^{\frac{١}{٢}}$

= ٢$\sqrt{\text{س + ٣}}$ لوهـ (س + ٣) - ∫ ٢(س + ٣)$^{\frac{-١}{٢}}$ ءس

= ٢$\sqrt{\text{س + ٣}}$ لوهـ (س + ٣) - ٢× $\frac{٢}{١}$ (س + ٣)$^{\frac{١}{٢}}$ + جـ

---

٩) جد : ∫ $\frac{١}{\text{س}}$ لوهـ س ءس

---

١٠) جد : ∫ لوهـ (س^{٢} + ٢س) ءس

الحل : و = لوهـ (س^{٢} + ٢س)   ءهـ = ١ ءس

ءو = $\frac{\text{٢س + ٢}}{\text{س}^{٢}\text{ + ٢س}}$ ءس   هـ = س

= س لوهـ (س^{٢} + ٢س) – ∫ $\frac{\text{(٢س + ٢)}\cancel{\text{س}}}{\cancel{\text{س}}\text{(س + ٢)}}$ ءس

= س لوهـ (س^{٢} + ٢س)

- (∫ ٢ ءس + ∫ $\frac{-٢}{\text{س + ٢}}$ ءس)

٢

س + ٢) ٢س + ٢

-٢س ∓ ٤

-٢

= س لوهـ (س^{٢} + ٢س) – ٢س + $\frac{٢}{١}$ لوهـ |س + ٢| + جـ

---

١١) جد : ∫ هـ^{٢س} جاس ءس

الحل : و = هـ^{٢س} ءهـ = جاس ءس

ءو = ٢هـ^{٢س} ءس   هـ = - جتاس

= - هـ^{٢س}جتاس + $\boxed{\text{∫ ٢هـ}^{٢س}\text{ جتاس ءس}}$ أجزاء

و = ٢هـ^{٢س} ءهـ = جتاس ءس

ءو = ٤هـ^{٢س} ءس   هـ = جاس

∴ ∫ هـ^{٢س}جاس ءس = - هـ^{٢س}جتاس + ٢هـ^{٢س}جاس

- ∫ ٤هـ^{٢س}جاس ءس

٥ ∫ هـ^{٢س}جاس ءس = - هـ^{٢س}جتاس + ٢هـ^{٢س}جاس

∫ هـ^{٢س}جاس ءس = $\frac{\text{- هـ}^{٢س}\text{جتاس + ٢هـ}^{٢س}\text{جاس}}{٥}$ + جـ

---

١٢) جد : ∫ ٢هـ^{س} جاس جتاس ءس

الحل : ∫ ٢هـ^{س}× $\frac{١}{٢}$ جا٢س ءس = ∫ هـ^{س} جا٢س ءس

و = جا ٢س   ءهـ = هـ^{س} ءس

ءو = ٢جتا (٢س) ءس   هـ = هـ^{س}

= هـ^{س}جا ٢س – $\boxed{\text{∫ ٢هـ}^{س}\text{ جتا ٢س ءس}}$ أجزاء

و = ٢جتا ٢س   ءهـ = هـ^{س} ءس

ءو = -٤جا ٢س ءس   هـ = هـ^{س}

منهاجي

Scanned by CamScanner

∴ $\int$ هـ^{س}جا ٢س ءس = جا ٢س هـ^{س} − ٢جتا ٢س هـ^{س}

− $\int$ ٤هـ^{س}جا ٢س ءس

$\frac{٥}{٥}\int$ هـ^{س}جا ٢س ءس = $\frac{\text{جا ٢س هـ}^{س}\text{ - ٢جتا ٢س هـ}^{س}}{٥}$ + جـ

∴ $\int$ هـ^{س}جا ٢س ءس = $\frac{\text{جا ٢س هـ}^{س}\text{ - ٢جتا ٢س هـ}^{س}}{٥}$ + جـ

---

١٣) إذا كان $\int_{١}^{٢}$ ق(س) ءس = ٣ ، ق (١) = ٥ ، ق(٢) = ٨

احسب قيمة $\int_{١}^{٢}$ س قَ(س) ءس :

الحل : ق = س   ×   ءهـ = قَ(س) ءس

ءق = ١ ءس   −$\int$ هـ = ق(س)

= س ق(س) $\Big|_{١}^{٢}$ - $\int_{١}^{٢}$ ق(س) ءس

= (٢ × ٨) − (١ × ٥) − ٣ = ١٦ − ٥ − ٣ = ٨

---

١٤) إذا علمت أن $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}}$ س جـاس ءس = $\int_{٠}^{٢}$ (مس^{٢} + ٢س) ءس

أوجد قيمة م :

الحل : نجد <u>الطرف الأيمن</u> $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}}$ س جـاس ء س

ق = س   ×   ءهـ = جـا س ءس

ءق = ١ ءس   −$\int$ هـ = -جتـا س

= - س جتـا س + $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}}$ جتـا س ءس = - س جتـا س + جـا س $\Big|_{٠}^{\frac{\pi}{٢}}$

= (٠ + ١) − (٠) = $\boxed{١}$

* <u>الطرف الأيسر = الطرف الأيمن</u>

$\int_{٠}^{٢}$ (مس^{٢} + ٢س) ءس = $\frac{م}{٣}$ س^{٣} + س^{٢} $\Big|_{٠}^{٢}$ = ١

$\frac{٨م}{٣}$ + ٤ = ١ ⟵ $\frac{٨م}{٣}$ = -٣ ⟵ م = $\frac{-٩}{٨}$

---

١٥) إذا كان ع$_{ن}$ = $\int$ س^{ن} هـ^{مس} ءس أثبت أن

ع$_{ن}$ = $\frac{\text{س}^{ن}\text{ هـ}^{مس}}{م}$ - $\frac{ن}{م}$ ع$_{ن-١}$:

الحل : ق = س^{ن} ×   ءهـ = هـ^{مس}

ءق = ن س$^{ن-١}$ −$\int$ هـ = $\frac{\text{هـ}^{مس}}{م}$

= $\frac{\text{س}^{ن}\text{ هـ}^{مس}}{م}$ − $\int\frac{ن}{م}$ هـ^{مس} س$^{ن-١}$ ءس

= $\frac{\text{س}^{ن}\text{ هـ}^{مس}}{م}$ - $\frac{ن}{م}$ ع$_{ن-١}$

---

١٦) إذا كان ع$_{ن}$ = $\int$ (لـوهـ س)^{ن} ءس أثبت أن

ع$_{ن}$ = س (لـوهـ س)^{ن} - ن ع$_{ن-١}$:

الحل : ق = (لـوهـ س)^{ن} ×   ءهـ = ءس

ءق = $\frac{\text{ن(لـوهـ س)}^{ن-١}}{س}$ −$\int$ هـ = س

= س (لـوهـ س)^{ن} − $\int\frac{ن س}{س}$ (لـوهـ س)$^{ن-١}$ ءس

= س (لـوهـ س)^{ن} - ن ع$_{ن-١}$

<u>تمرين :</u>جد كلاً مما يلي:

١) $\int$ جتـاس لـوهـ (جـاس) ءس

٢) $\int$ س^{٣}هـ^{س} ءس

٣) $\int$ هـ^{س}جتـا ٣س ءس

٤) $\int\frac{\text{٤لـوهـ س}}{\text{(س - ١)}^{٢}}$ ءس

٥) $\int\frac{\text{س + جـاس}}{\text{١ + جتـاس}}$ ءس

٦) $\int$ ظتـا س لـوهـ (جـاس) ءس

٧) $\int$ لـوهـ $|$س^{٢}- ٩$|$ ءس

٨) $\int\frac{\text{لـوهـ}\sqrt{\text{س + ٢}}}{\text{س + ٢}}$ ءس

٩) $\int$ هـ^{س}(٢جتـا ٣س جتـا س − جتـا ٢س) ءس

١٠) $\int\frac{١}{\text{لـو}_{س}\text{ هـ}}$ ءس

١١) $\int\frac{\text{٢س}^{٢}\text{ + ٣}}{\text{س}^{٢}\text{ - س}}$ ءس

١٢) $\int\frac{\text{٣س}^{٢}\text{ + ٣}}{\text{٣س}^{٢}\text{ - س - ٤}}$ ءس

١٣) $\int$ س^{٢} (٢س + ١)^{٥} ءس

١٤) $\int$ ٥س $\sqrt{\text{س + ٣}}$ ءس

منهاجي

Scanned by CamScanner