S.N.S

المراجعة المكثفة

مدارس سكاي الوطنية

لمادة

الرياضيات

منهاجي
متعة التعليم الهادف

الوحدة الاولى النهايات و الاتصال

للفرع الأدبي

جيل ٢٠٠١

اعداد الأستاذ

محمد حميدي

٠٧٩٥٩٨٦٦٥٦

<u>الوحدة الأولى : النهايات والاتصال</u>

[١] أوجد قيمة كل مما يلي :

١) $\underset{س\to ٣}{\text{نهـا}} \frac{س^{٢}+١}{٢س+٨} = \frac{٩+١}{٦+٨} = \boxed{\frac{١٠}{١٤}}$

٢) $\underset{س\to ١}{\text{نهـا}} \frac{س^{٢}-١}{٢س+٥} = \frac{١-١}{٢+٥} = \frac{٠}{٧} = \boxed{٠}$

٣) $\underset{س\to -١}{\text{نهـا}} \frac{١-س}{س+١} = \frac{١--١}{-١+١} = \frac{٢}{٠} =$ غير موجودة

٤) $\underset{س\to -٢}{\text{نهـا}} \frac{س-٤}{س} + \sqrt{٧-س}$

الحل : $= \frac{-٢-٤}{-٢} + \sqrt{٧--٢} = \frac{-٦}{-٢} + \sqrt{٩}$

$= +٣ + ٣ = \boxed{٦}$

٥) $\underset{س\to -٥}{\text{نهـا}} \sqrt[٣]{٣-س} + \frac{س+٥}{س^{٢}-س}$

الحل : $= \sqrt[٣]{٣--٥} + \frac{-٥+٥}{٢٥--٥} = \sqrt[٣]{٨} + \frac{٠}{٣٠}$

$= ٢ + ٠ = \boxed{٢}$

٦) $\underset{س\to -٤}{\text{نهـا}} \sqrt{٥-س} + \frac{١}{٢س}$

الحل : $= \sqrt{٥--٤} + \frac{١}{٢\times -٤} = \sqrt{٩} + \frac{١}{-٨}$

$= ٣ - \frac{١}{٨} = \frac{٢٤}{٨} - \frac{١}{٨} = \boxed{\frac{٢٣}{٨}}$

٧) $\underset{س\to ٢}{\text{نهـا}} \frac{١٦-(٣س-٥)^{٢}}{س^{٢}-٩}$

الحل : $= \frac{١٦-(٦-٥)^{٢}}{٤-٩} = \frac{١٦-١}{-٥} = \frac{١٥}{-٥} = \boxed{-٣}$

٨) إذا كانت $\underset{س\to -١}{\text{نهـا}}(ل\,س^{٢}+٣) = ٧$ جد الثابت ل :

الحل : $ل(-١)^{٢}+٣ = ٧ \longrightarrow ل+٣ = ٧ \longrightarrow \boxed{ل = ٤}$

[٢] إذا كانت $\underset{س\to ٣}{\text{نهـا}} ق(س) = ٤$ ، $\underset{س\to ٣}{\text{نهـا}} هـ(س) = -٨$ ، جد

$\underset{س\to ٣}{\text{نهـا}} \left(\sqrt{٢ق(س) - هـ(س)} + س\,هـ(س) \right)$:

الحل : $\underset{س\to ٣}{\text{نهـا}} \sqrt{٢ق(س) - هـ(س)} + \underset{س\to ٣}{\text{نهـا}} س\,هـ(س)$

$= \sqrt{٢\times ٤ - (-٨)} + ٣ \times -٨ = \sqrt{٨+٨} + -٢٤ = \boxed{-٢٠}$

[٣] إذا كانت $\underset{س\to ٢}{\text{نهـا}} ق(س) = -٦$ ، $\underset{س\to ٢}{\text{نهـا}} هـ(س) = ٤$ ، جد

$\underset{س\to ٢}{\text{نهـا}} \left(ق(س) + (هـ(س)+١)^{٢} - ٣س\right)$

الحل : $\underset{س\to ٢}{\text{نهـا}} ق(س) + \underset{س\to ٢}{\text{نهـا}} (هـ(س)+١)^{٢} - \underset{س\to ٢}{\text{نهـا}} ٣س$

$= -٦ + ٢٥ - ٦ = \boxed{١٣}$

[٤] إذا كانت $\underset{س\to ٢}{\text{نهـا}} (ق(س) - ٣) = ٢$ ، $\underset{س\to ٢}{\text{نهـا}} هـ(س) = ٦$ ،

جد ما يلي :

أ) $\underset{س\to ٢}{\text{نهـا}} \left(س^{٢}ق(س) - ٣(هـ(س))^{٢} + ٥\right)$

ب) جد الثابت م التي تجعل $\underset{س\to ٢}{\text{نهـا}} \frac{ق(س) - م}{هـ(س)} = ١$

الحل : $\boxed{\underset{س\to ٢}{\text{نهـا}} ق(س) = ٥}$ ، $\boxed{\underset{س\to ٢}{\text{نهـا}} هـ(س) = ٦}$

أ) $\underset{س\to ٢}{\text{نهـا}} س^{٢}ق(س) - \underset{س\to ٢}{\text{نهـا}} ٣(هـ(س))^{٢} + ٥$

$= ٤ \times ٥ - ٣ \times ٣٦ + ٥ = ٢٠ - ١٠٨ + ٥ = \boxed{-٨٣}$

ب) $\frac{٥ - م}{٦} = ١ \Longleftarrow ٥ - م = ٦ \Longleftarrow \boxed{م = -١}$

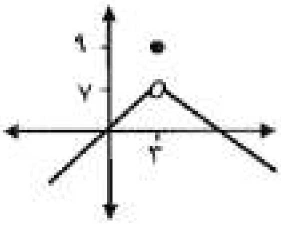
[٥] $\underset{س\to ٢}{\text{نهـا}} (\frac{١}{٢} هـ(س) - ٣) = ٥$ ، جد $\underset{س\to ٢}{\text{نهـا}} (٢هـ(س) + س)$

الحل : $\underset{س\to ٢}{\text{نهـا}} \frac{١}{٢} هـ(س) = ٨ \Longleftarrow \boxed{\underset{س\to ٢}{\text{نهـا}} هـ(س) = ١٦}$

* المطلوب : $\underset{س\to ٢}{\text{نهـا}} ٢هـ(س) + \underset{س\to ٢}{\text{نهـا}} س$

$= ١٦ \times ٢ + ٢ = ٣٤$

[٦] اعتماداً على الشكل التالي الذي يمثل منحنى ق(س) جد ما يليه :



أ) $\underset{س\to ٣}{\text{نهـا}} ق(س)$

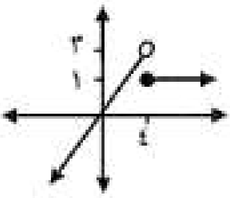
ب) $\underset{س\to ٣^{+}}{\text{نهـا}} ق(س)$

ج) $\underset{س\to ٣^{-}}{\text{نهـا}} ق(س)$

د) ق(٣)

الحل : أ) ٧ ، ب) ٧ ، ج) ٧ ، د) ٩

[٧]



اعتماداً على الشكل السابق جد ما يلي :

أ) $\underset{س\to ٤}{\text{نهـا}} ق(س)$ ، ب) $\underset{س\to ٤^{+}}{\text{نهـا}} ق(س)$

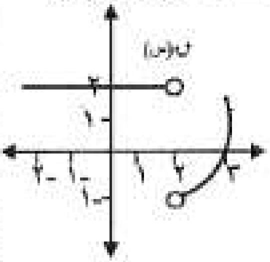
ج) $\underset{س\to ٤^{-}}{\text{نهـا}} ق(س)$ ، د) ق(٤) ، هـ) $\underset{س\to ٤}{\text{نهـا}} (ق(س) + ٢س)$

الحل : أ) غير موجودة ، ب) ١ ، ج) ٣

د) ١ ، هـ) $٣ + ٨ = \boxed{١١}$

محمد عبد الرحمن حميدي	مراجعة وحدة أولى	مدارس سكاي الوطنية

٨ اعتماداً على الشكل التالي الذي يمثل منحنى الاقتران ق(س) المعرف على ح جد ما يلي :



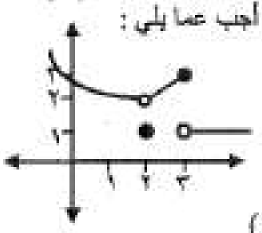
أ) $\underset{س \to ٢^{+}}{\text{نهـا}}$ ق(س)

ب) $\underset{س \to ٢^{-}}{\text{نهـا}} \sqrt[٣]{٤ق(س)} + \frac{١}{٤}س^{٣}$

الحل : أ) -١

ب) $\sqrt[٣]{٤ \times ٢} + \frac{١}{٤} \times (-٢)^{٣} = \sqrt[٣]{٨} + -٢ = \boxed{٠}$

٩ اعتماداً على الشكل التالي الذي يمثل منحنى الاقتران ق(س) المعرف على مجموعة الأعداد الحقيقية ، أجب عما يلي :



أ) $\underset{س \to ٢^{+}}{\text{نهـا}}$ ق(س)

ب) $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \left(٢ق(س) - \frac{٢س - ٨}{٢}\right)$

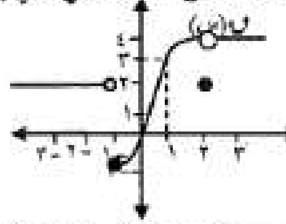
جـ) اكتب قيم س التي يكون عندها ق <u>غير متصل</u>

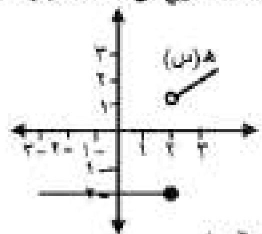
الحل : أ) ١

ب) $٢ \times ٣ - \frac{٢ \times ٠ - ٨}{٢} = ٦ - \frac{-٨}{٢} = ٦ + ٤ = ١٠$

جـ) القفزة + الحلقة = { ٣ ، ٢ }

١٠ اعتماداً على الشكل الآتي الذي يمثل منحنيي ق ، هـ ، أجب عما يلي :





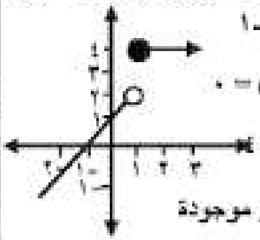
أ) $\underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \left(٥ق(س) - (هـ(س))^{٢} + ٦س\right)$

ب) $\underset{س \to ٢^{+}}{\text{نهـا}} \frac{٣ق(س)}{هـ(س)}$

الحل : أ) $٥ \times ٣ - (-٢)^{٢} + ٦ \times ١ = ١٥ - ٤ + ٦ = \boxed{١٧}$

ب) $\frac{٣ \times ٤}{١} = \frac{١٢}{١} = \boxed{١٢}$

١١ اعتماداً على الشكل الذي يمثل منحنى الاقتران ق(س) جد مايلي



أ) قيمة الثابت أ حيث $\underset{س \to أ}{\text{نهـا}}$ ق(س) = -١

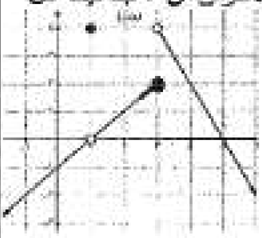
ب) قيمة الثابت ب حيث $\underset{س \to ب}{\text{نهـا}}$ ق(س) = ٠

جـ) قيم جـ التي تجعل $\underset{س \to جـ}{\text{نهـا}}$ ق(س) = ٤

د) قيم د التي تجعل $\underset{س \to د}{\text{نهـا}}$ ق(س) غير موجودة

الحل : أ) {-٢}   ب) {-١}   جـ) (١ ، ∞)   د) ١ القفزة

١٢ اعتماداً على الشكل الذي يمثل منحنى الاقتران ق ، جد قيمة كل مما يأتي (إن وجدت) :



١) $\underset{س \to ٢^{-}}{\text{نهـا}}$ ق(س)

٢) الثابت أ ، حيث $\underset{س \to أ}{\text{نهـا}}$ ق(س) = ٠

٣) الثابت ب ، حيث $\underset{س \to ب}{\text{نهـا}}$ ق(س) غير موجودة

الحل : ١) $\underset{س \to ٢^{-}}{\text{نهـا}}$ ق(س) = ١   ٢) أ = { ١ ، ٥ }

٣) ب = القفزة = { ٣ }

<u>نهاية الاقتران النسبي</u>

١ جد قيمة كل مما يلي :

١) $\underset{س \to -٤}{\text{نهـا}} \frac{س^{٣} + ٦٤}{س^{٢} - ١٦} = \frac{٠}{٠}$

$= \underset{س \to -٤}{\text{نهـا}} \frac{\cancel{(س + ٤)}(س^{٢} - ٤س + ١٦)}{(س - ٤)\cancel{(س + ٤)}}$

$\underset{س \to -٤}{\text{نهـا}} \frac{س^{٣} + ٦٤}{س^{٢} - ١٦} = \underset{س \to -٤}{\text{نهـا}} \frac{س^{٢} - ٤س + ١٦}{س - ٤}$

$= \frac{١٦ + ١٦ + ١٦}{-٤ - ٤} = \frac{٤٨}{-٨}$

٢) $\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} \frac{س^{٢} - ٣س + ٢}{س^{٢} - ٤} = \frac{٠}{٠}$

$= \underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} \frac{\cancel{(س - ٢)}(س - ١)}{\cancel{(س - ٢)}(س + ٢)}$

$= \underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} \frac{س - ١}{س + ٢} = \frac{١}{٤}$

٣) $\underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \frac{س^{٢} + س - ٢}{س^{٢} - ٤س + ٣} = \frac{٠}{٠}$

$= \underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \frac{(س + ٢)\cancel{(س - ١)}}{(س - ٣)\cancel{(س - ١)}} = \underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \frac{س + ٢}{س - ٣} = \frac{٣}{-٢}$

٤) $\underset{س \to ٣}{\text{نهـا}} \frac{س^{٢} - ٩}{س^{٢} - ٣س} = \frac{٠}{٠}$

$= \underset{س \to ٣}{\text{نهـا}} \frac{\cancel{(س - ٣)}(س + ٣)}{س\cancel{(س - ٣)}} = \underset{س \to ٣}{\text{نهـا}} \frac{س + ٣}{س} = \frac{٣ + ٣}{٣} = ٢$

٥) $\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} \frac{س^{٢} + ٢س - ٨}{س^{٢} - ٢س} = \frac{٠}{٠}$

$= \underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} \frac{(س + ٤)(س - ٢)}{س(س - ٢)} = \underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} \frac{س + ٤}{س} = \frac{٦}{٢} = ٣$

٦) $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}} \dfrac{(\text{س}+١)^٢ - ٩}{\text{س} - ٢} = \dfrac{٠}{٠}$

$= \underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}} \dfrac{(\text{س}+١-٣)(\text{س}+١+٣)}{\text{س}-٢}$

$= \underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}} \dfrac{\cancel{(\text{س}-٢)}(\text{س}+٤)}{\cancel{\text{س}-٢}} = \dfrac{٢+٤}{١} = \dfrac{٦}{١} = \boxed{٦}$

٧) $\underset{\text{س}\to ٣}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}^٣ - ٩\text{س}}{\text{س}^٣ - ٢٧} = \dfrac{٠}{٠}$

$= \underset{\text{س}\to ٣}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}(\text{س}^٢ - ٩)}{(\text{س}-٣)(\text{س}^٢+٣\text{س}+٩)}$

$= \underset{\text{س}\to ٣}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}\cancel{(\text{س}-٣)}(\text{س}+٣)}{\cancel{(\text{س}-٣)}(\text{س}^٢+٣\text{س}+٩)} = \dfrac{٣ \times ٦}{٩+٩+٩} = \dfrac{١٨}{٢٧}$

٨) $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}^٣ - ٤\text{س}^٢ + ٤\text{س}}{\text{س} - ٢} = \dfrac{٠}{٠}$

$= \underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}(\text{س}^٢ - ٤\text{س} + ٤)}{\text{س}-٢}$

$= \underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}\cancel{(\text{س}-٢)}(\text{س}-٢)}{\cancel{\text{س}-٢}} = \dfrac{٢ \times ٠}{١} = \boxed{٠}$

٩) $\underset{\text{س}\to ٥}{\text{نهـا}} \left(\sqrt{٦ - ٢\text{س}} + \dfrac{\text{س}+٥}{\text{س}^٢ - ٢٥}\right)$

الحل: $\underset{\text{س}\to ٥}{\text{نهـا}} \sqrt{٦ - ٢\text{س}} + \underset{\text{س}\to ٥}{\text{نهـا}} \dfrac{\overset{١}{\cancel{\text{س}+٥}}}{(\text{س}-٥)\cancel{(\text{س}+٥)}}$

$= \sqrt{٦+١٠} + \dfrac{١}{١٠-} = ٤ + \dfrac{١-}{١٠} = \dfrac{٤٠ - ١}{١٠} = \boxed{\dfrac{٣٩}{١٠}}$

* <u>الضرب بمرافق الجذر التربيعي : (هام)</u>

$\boxed{\sqrt{} - \text{رقم} \quad ، \quad \text{رقم} - \sqrt{} \quad ، \quad \sqrt{} - \sqrt{}}$

١) $\underset{\text{س}\to ٢٤}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt{\text{س}+١} - ٥}{\text{س} - ٢٤} = \dfrac{٠}{٠}$

الحل: $\underset{\text{س}\to ٢٤}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt{\text{س}+١} - ٥}{\text{س} - ٢٤} \times \dfrac{\sqrt{\text{س}+١} + ٥}{\sqrt{\text{س}+١} + ٥}$

$\underset{\text{س}\to ٢٤}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س} + ١ - ٢٥}{(\text{س} - ٢٤)(\sqrt{\text{س}+١} + ٥)}$

$= \underset{\text{س}\to ٢٤}{\text{نهـا}} \dfrac{\cancel{(\text{س} - ٢٤)}}{\cancel{(\text{س} - ٢٤)}(\sqrt{\text{س}+١} + ٥)}$

$= \underset{\text{س}\to ٢٤}{\text{نهـا}} \dfrac{١}{\sqrt{\text{س}+١} + ٥} = \underset{\text{س}\to ٢٤}{\text{نهـا}} \dfrac{١}{\sqrt{٢٤+١} + ٥} = \dfrac{١}{١٠}$

٢) $\underset{\text{س}\to ١١}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س} - ١١}{\sqrt{\text{س} - ٢} - ٣} = \dfrac{٠}{٠}$

الحل: $\underset{\text{س}\to ١١}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س} - ١١}{\sqrt{\text{س} - ٢} - ٣} \times \dfrac{\sqrt{\text{س} - ٢} + ٣}{\sqrt{\text{س} - ٢} + ٣}$

$= \underset{\text{س}\to ١١}{\text{نهـا}} \dfrac{(\text{س} - ١١)(\sqrt{\text{س} - ٢} + ٣)}{\text{س} - ٢ - ٩}$

$= \underset{\text{س}\to ١١}{\text{نهـا}} \dfrac{\cancel{(\text{س} - ١١)}(\sqrt{\text{س} - ٢} + ٣)}{\cancel{\text{س} - ١١}}$

$= \underset{\text{س}\to ١١}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt{\text{س} - ٢} + ٣}{١} = \dfrac{\sqrt{١١ - ٢} + ٣}{١} = \dfrac{٦}{١} = ٦$

٣) $\underset{\text{س}\to ٧}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt{٣\text{س} + ٤} - ٥}{\text{س}^٢ - ٤٩} = \dfrac{٠}{٠}$

الحل: $\underset{\text{س}\to ٧}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt{٣\text{س} + ٤} - ٥}{(\text{س} - ٧)(\text{س} + ٧)} \times \dfrac{\sqrt{٣\text{س} + ٤} + ٥}{\sqrt{٣\text{س} + ٤} + ٥}$

$= \underset{\text{س}\to ٧}{\text{نهـا}} \dfrac{٣\text{س} + ٤ - ٢٥}{(\text{س} - ٧)(\text{س} + ٧)(\sqrt{٣\text{س} + ٤} + ٥)}$

$= \underset{\text{س}\to ٧}{\text{نهـا}} \dfrac{٣\text{س} - ٢١}{(\text{س} - ٧)(\text{س} + ٧)(\sqrt{٣\text{س} + ٤} + ٥)}$

$= \underset{\text{س}\to ٧}{\text{نهـا}} \dfrac{٣\cancel{(\text{س} - ٧)}}{\cancel{(\text{س} - ٧)}(\text{س} + ٧)(\sqrt{٣\text{س} + ٤} + ٥)}$

$= \dfrac{٣}{١٤ \times ١٠} = \boxed{\dfrac{٣}{١٤٠}}$

* <u>توحيد المقامات : (هام)</u>

٤) $\underset{\text{س}\to ٥}{\text{نهـا}} \dfrac{\dfrac{١}{٥} - \dfrac{١}{\text{س}}}{\text{س} - ٥} = \dfrac{٠}{٠}$

الحل: $\underset{\text{س}\to ٥}{\text{نهـا}} \dfrac{\dfrac{\text{س} - ٥}{(\text{س})(٥)}}{\text{س} - ٥} = \dfrac{\cancel{\text{س} - ٥}}{(٥)(\text{س})\cancel{(\text{س} - ٥)}}$

$= \dfrac{١}{(٥)\times(٥)} = \dfrac{١}{٢٥}$

٥) $\underset{\text{س}\to ١}{\text{نهـا}} \dfrac{\dfrac{٣}{٢} - \dfrac{٣}{\text{س} + ١}}{\text{س} - ١} = \dfrac{٠}{٠}$

الحل: $\underset{\text{س}\to ١}{\text{نهـا}} \dfrac{\dfrac{٣\text{س} + ٣ - ٦}{(٢)(\text{س} + ١)}}{(\text{س} - ١)} = \underset{\text{س}\to ١}{\text{نهـا}} \dfrac{(٣\text{س} - ٣)}{(٢)(\text{س} + ١)(\text{س} - ١)}$

$= \underset{\text{س}\to ١}{\text{نهـا}} \dfrac{٣\cancel{(\text{س} - ١)}}{(٢)(\text{س} + ١)\cancel{(\text{س} - ١)}} = \dfrac{٣}{(٢)(١ + ١)} = \dfrac{٣}{٤}$

٦) $\underset{\text{س}\to ٧}{\text{نهـا}} \dfrac{\dfrac{١}{٥} - \dfrac{١}{\text{س} - ٢}}{\text{س} - ٧} = \dfrac{٠}{٠}$

الحل: $\underset{\text{س}\to ٧}{\text{نهـا}} \dfrac{\dfrac{\text{س} - ٢ - ٥}{(٥)(\text{س} - ٢)}}{(\text{س} - ٧)} = \underset{\text{س}\to ٧}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س} - ٧}{(٥)(\text{س} - ٢)(\text{س} - ٧)}$

$= \dfrac{١}{(٥)(٧ - ٢)} = \dfrac{١}{(٥)\times(٥)} = \dfrac{١}{٢٥}$

٧) $\lim\limits_{س \to ٠} \dfrac{\dfrac{١}{س - ٥} + \dfrac{٢}{٤س + ١٠}}{٣س}$

الحل : $= \lim\limits_{س \to ٠} \dfrac{\dfrac{٤س + ١٠ + ٢س - ١٠}{(س - ٥)(٤س + ١٠)}}{(س - ٥)(٤س + ١٠)(٣س)}$

$= \lim\limits_{س \to ٠} \dfrac{٤س + \cancel{١٠} + ٢س - \cancel{١٠}}{(س - ٥)(٤س + ١٠)(٣س)}$

$= \lim\limits_{س \to ٠} \dfrac{٦س}{(س - ٥)(٤س + ١٠)(٣س)}$

$= \dfrac{٦}{-٥ \times ١٠ \times ٣} = \dfrac{-٦}{١٥٠}$

الاتصال

* **كثيرات الحدود :** متصلة على مجموعة الأعداد الحقيقية (ح) دائماً
* **النسبي :** متصل على ح ما عدا أصفار المقام
* **الرسم :** غير متصل عند القفزة والحلقة
* **المتشعب :** نجد ق(أ) : عند (=) ، $\lim\limits_{س \to أ}$ ق(س) : عند ≠ ، عند > يمين ، عند < يسار
* **الثوابت :** تساوي الصورة بالنهاية

* جد قيم س (إن وجدت) التي يكون عندها كل اقتران مما يأتي غير متصل :

١) ق(س) = $س^٢ + ٥س + ١$

الحل : ق(س) كثير حدود متصل على ح

لا يوجد أصفار مقام لذلك لا يوجد نقاط عدم اتصال

٢) ق(س) = $\dfrac{س^٢ - ١}{س - ٣}$

الحل : ق(س) غير متصل عند س − ٣ = ٠ ⟸ س = ٣

٣) ق(س) = $\dfrac{س + ٢}{س^٢ - ١} + \dfrac{٥}{س}$

الحل : ق(س) غير متصل عند أصفار المقام

$س^٢ - ١ = ٠$ ⟸ $س^٢ = ١$ ⟸ س = ±١

س = ٠

ق(س) غير متصل عند {٠ ، ١ ، −١}

٤) ق(س) = $\begin{cases} س^٢ + ٢ & ، س > ٢ \\ ٢س + ٢ & ، س < ٢ \\ ٦ & ، س = ٢ \end{cases}$

ابحث في اتصال ق(س) عند س = ٢

الحل : ق(٢) = ٦

$\lim\limits_{س \to ٢}$ ق(س) = ٦

$\lim\limits_{س \to ٢^+}$ ق(س) ، $\lim\limits_{س \to ٢^-}$ ق(س)

$\lim\limits_{س \to ٢^+} (س^٢ + ٢) = ٦$ ، $\lim\limits_{س \to ٢^-} (٢س + ٢) = ٦$

∴ ق(س) متصل عند س = ٢

٥) ق(س) = $\begin{cases} س^٢ + ٩ & ، س > ٤ \\ ٥س + ٥ & ، س < ٤ \\ ٢٠ & ، س = ٤ \end{cases}$

ابحث في اتصال ق(س) عند س = ٤

الحل : ق(٤) = ٢٠

$\lim\limits_{س \to ٤}$ ق(س) = ٢٥

$\lim\limits_{س \to ٤^+} (س^٢ + ٩)$ ، $\lim\limits_{س \to ٤^-}$ ق(س)

= ١٦ + ٩ = ٢٥ ، = ٢٠ + ٥ = ٢٥

ق(س) غير متصل عند س = ٤ لأن الصورة ≠ النهاية

٦) ق(س) = $\begin{cases} \dfrac{س^٢ - ٩}{س - ٣} & ، س \neq ٣ \\ ٦ & ، س = ٣ \end{cases}$

ابحث في اتصال ق(س) عند س = ٣

الحل : ق(٣) = ٦

$\lim\limits_{س \to ٣}$ ق(س) = $\lim\limits_{س \to ٣} \dfrac{س^٢ - ٩}{س - ٣} = \dfrac{٠}{٠}$

$= \lim\limits_{س \to ٣} \dfrac{(س - ٣)(س + ٣)}{س - ٣} = ٦$

∴ ق(س) متصل عند س = ٣ لأن الصورة = النهاية

٧) ق(س) = { أس + ٥ ، س < ٣
س² + ٩ ، س ≥ ٣ }

جد (أ) التي تجعل ق(س) متصل عند س = ٣

الحل : ق(٣) = ٣² + ٩ = ١٨

نهـا س←٣ ق(س)

نهـا س←٣⁻ ق(س) = نهـا س←٣⁻ أس + ٥ = ٣أ + ٥

نهـا س←٣⁺ ق(س) = نهـا س←٣⁺ س² + ٩ = ١٨

٣أ + ٥ = ١٨

٣أ = ١٣

أ = ١٣/٣

٨) ق(س) = { ٥س - ٣ ، س ≠ أ
١٢ ، س = أ }

جد (أ) التي تجعل ق(س) متصل عند س = أ

الحل : ق(أ) = ١٢

نهـا س←أ ق(س) = نهـا س←أ ٥س - ٣ = ٥أ - ٣

٥أ - ٣ = ١٢ ⟸ ٥أ = ١٥ ⟸ أ = ٣

٩) ق(س) = { أس - ٣ ، س > ٢
بس² + أ ، س < ٢
١١ ، س = ٢ }

جد (أ) ، (ب) التي تجعل ق(س) متصل عند س = ٢

الحل : ق(٢) = ١١

نهـا س←٢ ق(س)

نهـا س←٢⁺ (أس - ٣) = ٢أ - ٣

نهـا س←٢⁻ (بس² + أ) = ٤ب + أ

٢أ - ٣ = ١١ ⟵ أ = ١٤ ⟵ أ = ٧

٤ب + أ = ١١ ⟵ ٤ب + ٧ = ١١ ⟵ ٤ب = ٤

ب = ١

١٠) إذا كان ق(س) = { ٢أس + ب ، س < ٢
٨ ، س = ٢
أس² + ٣بس ، س > ٢ }

وكان الاقتران ق(س) متصلاً عندما س = ٢ ، جد قيمة كل من (أ) ، (ب) :

الحل : ق(٢) = ٨

نهـا س←٢⁻ ق(س) = ٨

نهـا س←٢⁻ ٢أس + ب = ٨ ⟸ ٤أ + ب = ٨ (١)

نهـا س←٢⁺ ق(س) = ٨

نهـا س←٢⁺ أس² + ٣بس = ٨ ⟸ ٤أ + ٦ب = ٨ (٢)

-٤أ - ب = -٨ (المعادلة رقم ١ ضرب -١)

٤أ + ٦ب = ٨

٥ب = ٠ ⟸ ب = ٠

نعوض ب = ٠ في ١ ⟸ ٤أ = ٨ ⟸ أ = ٢

١١) إذا كان ل(س) = { أس - ب ، س < ١
٤ ، س = ١
أس³ + ب + ٢ ، س > ١ }

وكان الاقتران ل(س) متصلاً عندما س = ١ ، جد قيمة كل من (أ) ، (ب) :

الحل : ل(١) = ٤

نهـا س←١⁻ ل(س) = ٤

نهـا س←١⁻ (أس - ب = ٤) ⟸ أ - ب = ٤ (١)

نهـا س←١⁺ ل(س) = ٤

نهـا س←١⁺ (أس³ + ب + ٢) = ٤ ⟸ أ + ب + ٢ = ٤ (٢)

أ - ب = ٤

أ + ب = ٢

٢أ = ٦ ⟸ أ = ٣

نعوض في ١ ⟸ ٣ - ب = ٤ ⟸ ب = -١

١٢) إذا كان

ق(س) = $س^{٣}$ + ٥ س

هـ(س) = { ٥ س ، س ≤ ٠ ؛ $س^{٢}$ ، س > ٠ }

وكان ل(س) = (ق × هـ)(س) ابحث اتصال ل(س) عند س = ٠

الحل : ندرس اتصال ق(س) عند س = ٠

ق(س) = $س^{٣}$ + ٥ س كثير حدود من الدرجة الثالثة متصل عند س = ٠

ندرس اتصال هـ(س) عند س = ٠

هـ(٠) = ٠

نهـا (س←٠) هـ(س) = ٠

نهـا (س←٠+) $س^{٢}$ = ٠ ، نهـا (س←٠−) (٥ س) = ٠

∴ هـ(س) متصل عند س = ٠

∴ ل(س) = (ق × هـ)(س) متصل عند س = ٠ لأنه حاصل ضرب اقترانين متصلين

---

١٣) إذا كان

ق(س) = { $س^{٢}$ + ٥ ، س > ١ ؛ ٢س + ٣ ، س < ١ ؛ ٤ ، س = ١ }

هـ(س) = { ٣ س + ١ ، س > ١ ؛ $س^{٢}$ + ٤ ، س < ١ ؛ ٦ ، س = ١ }

ابحث في اتصال ل(س) = ق(س) + هـ(س) عند س = ١

الحل : ندرس اتصال ق(س) عند س = ١

ق(١) = ٤

نهـا (س←١+) ق(س) = ٦

نهـا (س←١−) ق(س) = ٥

نهـا (س←١) ق(س) غير موجودة

∴ ق(س) غير متصل عند س = ١

ندرس اتصال هـ(س) عند س = ١

هـ(١) = ٦

نهـا (س←١+) هـ(س) = ٤

نهـا (س←١−) هـ (س) = ٥

نهـا (س←١) هـ(س) غير موجودة

∴ هـ(س) غير متصل عند س = ١

الطريقة الأولى:

ل(س) = ق(س) + هـ(س) = { $س^{٢}$ + ٣س + ٦ ، س > ١ ؛ $س^{٢}$ + ٢س + ٧ ، س < ١ ؛ ١٠ ، س = ١ }

ل(١) = ١٠

نهـا (س←١+) ل(س) = ١٠

نهـا (س←١−) ل(س) = ١٠

نهـا (س←١) ل(س) = ١٠

∴ ل(س) = ق(س) + هـ(س) متصل عند س = ١

الطريقة الثانية :

* الصورة = ٤ + ٦ = ١٠
* اليمين = ٦ + ٤ = ١٠
* اليسار = ٥ + ٥ = ١٠

∴ ل(س) متصل عند س = ١

---

١٤) إذا كان

ق(س) = $س^{٢}$ ،

هـ(س) = { ٢س + ١ ، س > ٠ ؛ $س^{٢}$ + ٢ ، س < ٠ ؛ ٥ ، س = ٠ }

ابحث اتصال ق(س) × هـ(س) عند س = ٠

الحل : ندرس اتصال ق(س) عند س = ٠

ق(٠) = ٠

نهـا (س←٠) ق(س) = ٠

كثير حدود متصل

∴ ق(س) متصل عند س = ٠

ندرس اتصال هـ(س) عند س = ٠

هـ(٠) = ٥

نهـا (س←٠) هـ(س)

نهـا (س←٠+) ٢ س + ١ = ١ ، نهـا (س←٠−) $س^{٢}$ + ٢ = ٢

∴ هـ(س) غير متصل عند س = ٠

* الصورة = ٠ × ٥ = ٠
* اليمين = ٠ × ١ = ٠
* اليسار = ٠ × ٢ = ٠

ق(س) × هـ(س) متصل عند س = ٠

---

١٥) إذا كان ق(س) متصل عند س = ٢ وكان

ق(٢) = ٥ ، أوجد نهـا (س←٢) (ق(س) + $س^{٢}$ + ٥)

الحل : نهـا (س←٢) (ق(س) + $س^{٢}$ + ٥)

= ق(٢) + $٢^{٢}$ + ٥ = ٥ + ٤ + ٥ = ١٤

١٦) إذا كان ق ، هـ اقترانين متصلين عند س = ٢ وكان ق(٢) = ٦ ، $\underset{\text{س}\to\text{٢}}{\text{نهــا}}\left(\text{ق(س)} - \text{٤ هـ(س)}\right) = \text{-١٤}$ ، جد :

أ) جد قيمة هـ(٢)

ب) جد قيمة الثابت ل التي تجعل $\underset{\text{س}\to\text{٢}}{\text{نهــا}}\dfrac{(\text{ق(س)})^{\text{٢}} - \text{ل}}{\text{هـ(س)}} = \text{٤}$

الحل : ق(٢) − ٤ هـ(٢) = −١٤ ⟵ ٦ − ٤هـ(٢) = −١٤

−٤هـ(٢) = −٢٠ ⟵ $\boxed{\text{هـ(٢) = ٥}}$ ، $\boxed{\text{ق(٢) = ٦}}$

أ) هـ(٢) = ٥

ب) $\dfrac{(\text{ق(٢)})^{\text{٢}} - \text{ل}}{\text{هـ(٢)}} = \text{٤} \longleftarrow \dfrac{\text{٣٦ - ل}}{\text{٥}} = \text{٤}$

٣٦ − ل = ٢٠ ⟵ −ل = −١٦ ⟵ $\boxed{\text{ل = ١٦}}$

١٧) إذا كان ق(س) ، هـ(س) كثيري حدود وكانت :

$\underset{\text{س}\to\text{٢}}{\text{نهــا}}\ \text{ق(س)} = \text{١٢}$ ، $\underset{\text{س}\to\text{٢}}{\text{نهــا}}\ \text{س هـ(س)} = \text{١٠}$ ، أجب عما يلي

أ) جد $\underset{\text{س}\to\text{٢}}{\text{نهــا}}\left(\dfrac{\text{ق(س)}}{\text{١ - س}^{\text{٢}}} + \text{٨ هـ(س)}\right)$

ب) جد قيمة الثابت م التي تجعل $\underset{\text{س}\to\text{٢}}{\text{نهــا}}\left(\text{م}(\text{هـ(س)})^{\text{٢}} - \text{٦ ق(س)}\right) = \text{٢٨}$

الحل : $\boxed{\text{ق(٢) = ١٢}}$ ، ٢ هـ(٢) = ١٠ ⟵ $\boxed{\text{هـ(٢) = ٥}}$

أ) $\dfrac{\text{١٢}}{\text{١ - ٤}} + \text{٨} \times \text{٥} = \dfrac{\text{١٢}}{\text{-٣}} + \text{٤٠} = \text{-٤} + \text{٤٠} = \boxed{\text{٣٦}}$

ب) ٢٥م − ٦ × ١٢ = ٢٨ ⟵ ٢٥م = ٢٨ + ٧٢

$\dfrac{\text{٢٥م}}{\text{٢٥}} = \dfrac{\text{١٠٠}}{\text{٢٥}} \longleftarrow \boxed{\text{م = ٤}}$

١٨) ق(س) = $\begin{cases} \dfrac{\text{س}^{\text{٢}} + (\text{٢ - أ})\text{س}}{\text{س}} & \text{، س > ٠} \\ \text{٦} & \text{، س = ٠} \\ \text{٥ − س + ب} & \text{، س < ٠} \end{cases}$

وكان ق(س) متصل عند س = ٠ جد أ ، ب :

الحل : ق(٠) = ٦

$\underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نهــا}}\dfrac{\text{س}^{\text{٢}} + (\text{٢ - أ})\text{س}}{\text{س}}$ $\underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نهــا}}(\text{٥ − س + ب})$

$\underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نهــا}}\dfrac{\text{س(س + ٢ - أ)}}{\text{س}}$ = $\boxed{\text{٥ − ٠ + ب}}$

= $\boxed{\text{٠ + ٢ - أ}}$

٠ + ٢ − أ = ٦ ⟵ −أ = ٤ ⟵ $\boxed{\text{أ = -٤}}$

٥ + ب = ٦ ⟵ $\boxed{\text{ب = ١}}$

١٩) إذا كان ق(س) = $\begin{cases} \text{٥ - س} & \text{، س < ٥} \\ \text{س - ٥} & \text{، س} \geq \text{٥} \end{cases}$

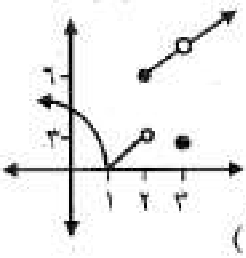
هـ(س) = $\dfrac{\text{س - ٣}}{\text{س}^{\text{٢}} \text{- ٢٥}}$ إبحث في اتصال ق(س) × هـ(س) عندما س = ٥ :

الحل : ق(س) × هـ(س) غير متصل عند أصفار المقام

* س^٢ − ٢٥ = ٠ ⟵ س^٢ = ٢٥ ⟵ $\boxed{\text{س = ± ٥}}$

∴ ق(س) × هـ(س) غير متصل عند س = ٥

٢٠) اعتماداً على الشكل التالي الذي يمثل منحنى ق(س) المعرف على مجموعة الأعداد الحقيقية ، أجب عما يلي :



أ) $\underset{\text{س}\to\text{٢}^{+}}{\text{نهــا}}\ \text{ق(س)}$

ب) $\underset{\text{س}\to\text{١}}{\text{نهــا}}\left((\text{ق(س) - ٤})^{\text{٢}} + \dfrac{\text{٥س - ٣}}{\text{٢}}\right)$

جـ) قيم س التي تكون عندها ق(س) غير متصل

الحل : أ) $\boxed{\text{٦}}$

ب) $(\text{٠ − ٤})^{\text{٢}} + \dfrac{\text{٥ - ٣}}{\text{٢}} = \text{١٦ + ١} = \boxed{\text{١٧}}$

جـ) قفزة + حلقة = {٢ ، ٣}

٢١) إذا كان ق(س) = $\dfrac{\text{٦ - ٣س}}{\text{س}^{\text{٢}} + \text{٣س - ١٠}}$ ، أجب عما يلي :

أ) جد قيمة (قيم س) التي تجعل ق(س) غير متصل

ب) جد $\underset{\text{س}\to\text{٢}}{\text{نهــا}}\ \text{ق(س)}$

الحل : أ) ق(س) غير متصل عند أصفار المقام

س^٢ + ٣س − ١٠ = ٠ ⟵ (س + ٥)(س − ٢) = ٠

س = −٥ ، س = ٢

ب) $\underset{\text{س}\to\text{٢}}{\text{نهــا}}\dfrac{\text{-٣}\cancel{(\text{س - ٢})}}{(\text{س + ٥})\cancel{(\text{س - ٢})}} = \dfrac{\text{-٣}}{\text{٧}}$

٢٢) إذا كان ق(س) = س + ٣ ، هـ(س) = س^٢ − ٩ ، ابحث في اتصال $\dfrac{\text{ق(س)}}{\text{هـ(س)}}$ عند س = −٣ :

الحل : $\dfrac{\text{ق(س)}}{\text{هـ(س)}}$ غير متصل عند أصفار المقام

س^٢ − ٩ = ٠ ⟵ س^٢ = ٩ ⟵ س = ± ٣

∴ $\dfrac{\text{ق(س)}}{\text{هـ(س)}}$ غير متصل عند س = −٣

<u>أسئلة متنوعة :</u>

١) $\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} ٥\text{س} + \text{أ} & \text{، س} \le ٢ \\ ٩\text{س} & \text{، س} > ٢ \end{cases}$

كانت النهاية موجودة عند س = ٢ ، أوجد قيمة أ علماً بأن $\lim_{\text{س} \to ٢} \text{ق}(\text{س})$ موجودة :

الحل : اليمين = اليسار

$$\lim_{\text{س} \to ٢^+} ٩\text{س} = \lim_{\text{س} \to ٢^-} (٥\text{س} + \text{أ})$$

$$١٨ = ١٠ + \text{أ} \longleftarrow \text{أ} = ١٨ - ١٠ = \boxed{٨}$$

٢) $\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} ٥\text{س}^٢ + \text{أ} & \text{، س} \le ١ \\ ٣ + \text{ب س} & \text{، س} > ١ \end{cases}$

أوجد أ ، ب التي تجعل $\lim_{\text{س} \to ١} \text{ق}(\text{س}) = ١٠$:

الحل : اليمين = ١٠

$٣ + \text{ب س} = ١٠$

$٣ + \text{ب} = ١٠$

$\boxed{\text{ب} = ٧}$

اليسار = ١٠

$٥\text{س}^٢ + \text{أ} = ١٠$

$٥ + \text{أ} = ١٠$

$\boxed{\text{أ} = ٥}$

٣) إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س} + ٦ & \text{، س} \in \text{ص} \\ ٤\text{س} + ١ & \text{، س} \notin \text{ص} \end{cases}$

حيث ص = مجموعة الأعداد الصحيحة ، جد $\lim_{\text{س} \to ٣} \text{ق}(\text{س})$ (إن وجدت) :

الحل : $\lim_{\text{س} \to ٣} \text{ق}(\text{س}) = ١٣$

$\lim_{\text{س} \to ٣^+} ٤\text{س} + ١ = ١٣$ | $\lim_{\text{س} \to ٣^-} ٤\text{س} + ١ = ١٣$

٤) إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^٢ + ٩ & \text{، س} \ge ٤ \\ ٤\text{س} + ٩ & \text{، س} < ٤ \end{cases}$

جد أ) $\lim_{\text{س} \to ٤} \text{ق}(\text{س}) =$

الحل :

$\lim_{\text{س} \to ٤^+} (\text{س}^٢ + ٩) = ١٦ + ٩ = \boxed{٢٥}$ | $\lim_{\text{س} \to ٤^-} (٤\text{س} + ٩) = ١٦ + ٩ = \boxed{٢٥}$

$\therefore \lim_{\text{س} \to ٤} \text{ق}(\text{س}) = \boxed{٢٥}$

ب) $\lim_{\text{س} \to ٥} \text{ق}(\text{س}) = \lim_{\text{س} \to ٥} (\text{س}^٢ + ٩) = ٢٥ + ٩ = \boxed{٣٤}$

ج) $\lim_{\text{س} \to ٣} \text{ق}(\text{س}) = \lim_{\text{س} \to ٣} (٤\text{س} + ٩) = ١٢ + ٩ = \boxed{٢١}$

٥) إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^٢ + ٥ & \text{، س} \ne -١ \\ ١٠ & \text{، س} = -١ \end{cases}$

جد $\lim_{\text{س} \to -١} \text{ق}(\text{س})$:

الحل : $\lim_{\text{س} \to -١} \text{ق}(\text{س}) = \lim_{\text{س} \to -١} \text{س}^٢ + ٥$

$= (-١)^٢ + ٥ = ٦$

٦) إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} ٤\text{س} + ٥ & \text{، س} < \text{أ} \\ ٢\text{س} + ١٥ & \text{، س} > \text{أ} \end{cases}$

جد (أ) التي تجعل $\lim_{\text{س} \to \text{أ}} \text{ق}(\text{س})$ <u>موجودة</u> :

الحل : $\lim_{\text{س} \to \text{أ}^+} \text{ق}(\text{س}) = \lim_{\text{س} \to \text{أ}^-} \text{ق}(\text{س})$

$\lim_{\text{س} \to \text{أ}^+} (٤\text{س} + ٥) = \lim_{\text{س} \to \text{أ}^-} (٢\text{س} + ١٥)$

$٤\text{أ} + ٥ = ٢\text{أ} + ١٥$

$٢\text{أ} + ٥ = ١٥ \longleftarrow ٢\text{أ} = ١٠ \longleftarrow \boxed{\text{أ} = ٥}$

٧) إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} ٥\text{س} - \text{أ} & \text{، س} < ١ \\ \text{ب س}^٢ + ٧ & \text{، س} \ge ١ \end{cases}$

وكانت $\lim_{\text{س} \to ٠} \text{ق}(\text{س}) = ١٦$ ، $\lim_{\text{س} \to ١} \text{ق}(\text{س})$ موجودة ، فما قيمة كل من الثابتين : أ ، ب :

الحل : $\lim_{\text{س} \to ٠} (٥\text{س} - \text{أ}) = ١٦ \longleftarrow ٠ - \text{أ} = ١٦ \longleftarrow -\text{أ} = ١٦$

$\lim_{\text{س} \to ١^+} (٤\text{س} + ٥) = \lim_{\text{س} \to ١^-} (٥\text{س} - \text{أ})$ $\boxed{\text{أ} = -١٦}$

$\text{ب} + ٧ = ٥ - -١٦$

$\text{ب} + ٧ = ٢١ \longleftarrow \boxed{\text{ب} = ١٤}$

٨) جد $\lim_{\text{س} \to ٥} \dfrac{٢ - \sqrt{\text{س} - ١}}{\text{س} - ٥}$

الحل : $\lim_{\text{س} \to ٥} \dfrac{٢ - \sqrt{\text{س} - ١}}{\text{س} - ٥} \times \dfrac{٢ + \sqrt{\text{س} - ١}}{٢ + \sqrt{\text{س} - ١}}$

$$\lim_{\text{س} \to ٥} \frac{٤ - (\text{س} - ١)}{(\text{س} - ٥)(٢ + \sqrt{\text{س} - ١})}$$

$$= \lim_{\text{س} \to ٥} \frac{٤ - \text{س} + ١}{(\text{س} - ٥)(٢ + \sqrt{\text{س} - ١})}$$

$$= \frac{\cancel{-(\text{س} - ٥)}}{\cancel{(\text{س} - ٥)}(٢ + \sqrt{\text{س} - ١})} = \frac{-١}{٢ + ٢} = \frac{-١}{٤}$$

S.N.S

المراجعة المكثفة

مدارس سكاي الوطنية

لمادة

الرياضيات

منهاجي
متعة التعليم الهادف

الوحدة الثانية التفاضل

للفرع الأدبي

جيل
٢٠٠١

اعداد الأستاذ

محمد حميدي

٠٧٩٥٩٨٦٦٥٦

محمد عبد الرحمن حميدي	مراجعة وحدة ثانية	مدارس سكاي الوطنية

قواعد الاشتقاق:

١) مشتقة الثابت = ٠

٢) مشتقة أ س = أ

٣) مشتقة أ س^{ن} = أ × ن × س$^{ن-١}$

٤) ق(س) = هـ(س) + م(س) − ل(س)
ق̀(س) = هـ̀(س) + م̀(س) − ل̀(س)

٥) **مشتقة الضرب:**

(الأول يبقى) (نشتق الثاني) + (الثاني يبقى) (نشتق الأول)

٦) **مشتقة الجذر التربيعي:** $\frac{\text{مشتقة ما بداخل الجذر}}{٢ \times \sqrt{\text{نفسه}}}$

٧) مشتقة جا ( ) ⟵ جتا (نفسه)
جتا ( ) ⟵ − جا (نفسه)
ظا ( ) ⟵ قا^{٢}(نفسه)
× مشتقة الزاوية

٨) **مشتقة أبو قوس:** (ق(س))^{ن}

ن (ق(س))$^{ن-١}$ × ق̀(س)

٩) **مشتقة القسمة**

$\frac{\text{اقتران}}{\text{ثابت}}$ ⟵ $\frac{\text{مشتقة الاقتران}}{\text{الثابت نفسه}}$

$\frac{\text{ثابت}}{\text{اقتران}}$ ⟵ $\frac{\text{عكس إشارة الثابت × مشتقة الاقتران}}{(\text{الاقتران})^{٢}}$

$\frac{\text{اقتران}}{\text{اقتران}}$ ⟵ $\frac{(\text{المقام})(\text{مشتقة البسط}) - (\text{البسط})(\text{مشتقة المقام})}{(\text{المقام})^{٢}}$

١٠) **مشتقة الجذر غير التربيعي:**

ق(س) = $\sqrt[٩]{(\text{س}^{٢} - ١)^{٥}}$ ⟵ ق(س) = (س^{٢} - ١)$^{\frac{٥}{٩}}$

ق̀(س) = $\frac{٥}{٩}$ (س^{٢} - ١)$^{\frac{-٤}{٩}}$ × ٢س

---

١ جد المشتقة الأولى لكل مما يلي :

أ) ق(س) = ٦ ظا س − جتا ٤س

الحل : ق̀(س) = ٦ قا^{٢}(س) × ١ − − جا(٤س) × ٤

ب) ل(س) = (٤س + ١)^{٣}

الحل : ل̀(س) = ٣(٤س + ١)^{٢} × ٤

٢) إذا كان ق(س) = س^{٢} + ٥س + ١ ، أوجد ق̀(س) :

الحل : ق̀(س) = ٢س + ٥

٣) إذا كان ق(س) = س^{٣} + س^{٢} + س$^{-٥}$ ، أوجد ق̀(س) :

الحل : ق̀(س) = ٣س^{٢} + ٢س + -٥س$^{-٦}$

٤) إذا كان ق(س) = ٧س^{٣} - ٤س ، أوجد ق̀(س) :

الحل : ق̀(س) = ٢١س^{٢} - ٤

٥) إذا كان ق(س) = س^{٩} + س$^{\frac{٣}{٢}}$ + ٥س^{٢} - ٤س، أوجد ق̀(س) :

الحل : ق̀(س) = ٩س^{٨} + $\frac{٣}{٢}$س$^{\frac{١}{٢}}$ + ١٠س - ٤

٦) إذا كان ق(س) = ٧س^{٢} - ٥س + ١ ، أوجد ق̀(٢) :

الحل : ق̀(س) = ١٤س − ٥

ق̀(٢) = ١٤ × ٢ − ٥ = ٢٨ − ٥ = ٢٣

٧) إذا كان ق(س) = ٧س^{٢} - ٥س ، أوجد ق̀(٠) :

الحل : ق̀(س) = ١٤س - ٥

ق̀(٠) = ١٤× ٠ - ٥ = ٠ − ٥ = -٥

٨) إذا كان ق(س) = (س^{٢} + ٥س)(٢س^{٢} + ٤س) ، أوجد ق̀(س) :

الحل :

ق̀(س) = (س^{٢} + ٥س)(٤س + ٤) + (٢س^{٢} + ٤س)(٢س + ٥)

٩) إذا كان ق(س) = $\frac{\text{س}^{٣} + ٧\text{س}}{٢}$ ، جد ق̀(س) :

الحل : ق̀(س) = $\frac{٣\text{س}^{٢} + ٧}{٢}$

١٠) أوجد ق̀(س) لكل من :

أ) ق(س) = س^{٢} + س^{٣} + س$^{\frac{٥}{٣}}$

الحل : ق̀(س) = ٢س + ٣س^{٢} + $\frac{٥}{٣}$س$^{\frac{٢}{٣}}$

ب) ق(س) = ٢س^{٣} - ٤س^{٢} + س$^{\frac{٧}{٣}}$

الحل : ق̀(س) = ٦س^{٢} - ٨س + $\frac{٧}{٣}$س$^{\frac{٤}{٣}}$

ج) $\text{ق}(\text{س}) = (\text{س}^2 + 5)(2\text{س} + 1)$

الحل : $\text{ق}'(\text{س}) = (\text{س}^2 + 5)(2 + 0) + (2\text{س} + 1)(2\text{س} + 0)$

١١) إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \frac{2}{\text{س}^2 + 5}$ ، جد $\text{ق}'(\text{س})$:

الحل : $\text{ق}'(\text{س}) = \frac{-2 \times 2\text{س} + 0}{(\text{س}^2 + 5)^2}$

١٢) إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \frac{\text{س}^2 + 5}{1 + 2\text{س}}$ ، جد $\text{ق}'(\text{س})$:

الحل : $\text{ق}'(\text{س}) = \frac{(1 + 2\text{س})(2\text{س} + 0) - (\text{س}^2 + 5)(0 + 2)}{(1 + 2\text{س})^2}$

١٣) إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \sqrt{\text{س}^2 + 7}$ ، جد $\text{ق}'(3)$:

الحل : $\text{ق}'(\text{س}) = \frac{2\text{س} + 0}{2 \times \sqrt{\text{س}^2 + 7}}$

$\text{ق}'(3) = \frac{6}{2 \times \sqrt{16}} = \frac{6}{2 \times 4} = \frac{6}{8}$

١٤) إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \sqrt{\text{س}^2 - 9}$ ، أوجد $\text{ق}'(5)$:

الحل : $\text{ق}'(\text{س}) = \frac{2\text{س} - 0}{2 \times \sqrt{\text{س}^2 - 9}}$

$\text{ق}'(5) = \frac{10}{2 \times \sqrt{16}} = \frac{10}{2 \times 4} = \frac{10}{8}$

١٥) إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = (7\text{س} - 5)^{100}$ ، أوجد $\text{ق}'(\text{س})$:

الحل : $\text{ق}'(\text{س}) = 100(7\text{س} - 5)^{99} \times 7 - 0$

١٦) إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = (2\text{س}^2 - 4\text{س})^9$ ، أوجد $\text{ق}'(\text{س})$:

الحل : $\text{ق}'(\text{س}) = 9(2\text{س}^2 - 4\text{س})^8 \times (4\text{س} - 4)$

١٧) إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \sqrt[9]{2\text{س}^2 - 4\text{س}}$ ، جد $\text{ق}'(\text{س})$:

الحل : $\text{ق}(\text{س}) = (2\text{س}^2 - 4\text{س})^{\frac{1}{9}}$

$\text{ق}'(\text{س}) = \frac{1}{9}(2\text{س}^2 - 4\text{س})^{\frac{-8}{9}} \times (4\text{س} - 4)$

١٨) إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \sqrt[5]{(\text{س}^2 - 2\text{س})^7}$ ، جد $\text{ق}'(\text{س})$:

الحل : $\text{ق}(\text{س}) = (\text{س}^2 - 2\text{س})^{\frac{7}{5}}$

$\text{ق}'(\text{س}) = \frac{7}{5}(\text{س}^2 - 2\text{س})^{\frac{2}{5}} \times (2\text{س} - 2)$

١٩) إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \text{جاس} + \text{جتا}\,2\text{س} + \text{ظا}\,5\text{س}$ ، أوجد $\text{ق}'(\text{س})$:

الحل : $\text{ق}'(\text{س}) = \text{جتا}(\text{س}) \times 1 - \text{جا}(2\text{س}) \times 2 + \text{قا}^2(5\text{س}) \times 5$

٢٠) إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = 3\text{جا}(2\text{س}) + 4\text{ظا}(5\text{س} + 1)$ ، أوجد $\text{ق}'(\text{س})$:

الحل : $\text{ق}'(\text{س}) = 3\text{جتا}(2\text{س}) \times 2 + 4\text{قا}^2(5\text{س} + 1) \times 5$

٢١) إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \text{جا}^3(5\text{س})$ ، أوجد $\text{ق}'(\text{س})$:

الحل : $\text{ق}'(\text{س}) = 3\text{جا}^2(5\text{س}) \times \text{جتا}(5\text{س}) \times 5$

٢٢) إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \text{جتا}^{100}(2\text{س})$ ، أوجد $\text{ق}'(\text{س})$:

الحل : $\text{ق}'(\text{س}) = 100\text{جتا}^{99}(2\text{س}) \times -\text{جا}(2\text{س}) \times 2$

* أوجد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ لكل مما يلي :

١) $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}\ \text{جا}(\text{س}^2 + 5)$:

الحل :

$\text{ق}'(\text{س}) = (\text{س})(\text{جتا}(\text{س}^2 + 5)) \times 2\text{س} + (\text{جا}(\text{س}^2 + 5))(1)$

٢) $\text{ق}(\text{س}) = (\text{س}^2 + 5)\ \text{ظا}(2\text{س})$:

الحل : $\text{ق}'(\text{س}) = (\text{س}^2 + 5)(\text{قا}^2(2\text{س}) \times 2) + (\text{ظا}(2\text{س}))(2\text{س})$

٣) $\text{ص} = \text{س}^2\ \text{جتاس} + \text{ظا}^2(5\text{س})$

الحل : $\text{ص}' = \text{س}^2 \times -\text{جا}(\text{س}) \times 1 + \text{جتاس} \times 2\text{س}$
$+\ 2(\text{ظا}5\text{س})^1 \times \text{قا}^2(5\text{س}) \times 5$

٤) $\text{ص} = \text{س}^2\text{ظا}\,2\text{س} + \frac{1}{\text{س}}$

الحل : $\text{ص}' = \text{س}^2 \times \text{قا}^2(2\text{س}) \times 2 + \text{ظا}(2\text{س}) \times 2\text{س} + \frac{-1 \times 1}{\text{س}^2}$

٥) $\text{ص} = \frac{8}{2\text{س} - 3} - \text{جا}^5(2\text{س})$

الحل : $\text{ص} = \frac{8}{2\text{س} - 3} - (\text{جا}(2\text{س}))^5$

$\text{ص}' = \frac{-8 \times 2}{(2\text{س} - 3)^2} - 5(\text{جا}\,2\text{س})^4 \times \text{جتا}(2\text{س}) \times 2$

٦) $\text{ص} = \text{ع}^2 - 3\text{ع}$ ، $\text{ع} = 1 - 4\text{س}$

الحل : $\frac{\text{دص}}{\text{دع}} = 2\text{ع} - 3$ ، $\frac{\text{دع}}{\text{دس}} = -4$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{دص}}{\text{دع}} \times \frac{\text{دع}}{\text{دس}}$

$= (2\text{ع} - 3)(-4) = (2(1 - 4\text{س}) - 3)(-4)$

٧) $\text{ص} = \sqrt{\text{ع} + 1}$ ، $\text{ع} = 1 - 2\text{س}$

الحل : $\frac{\text{دص}}{\text{دع}} = \frac{1}{2 \times \sqrt{\text{ع} + 1}}$ ، $\frac{\text{دع}}{\text{دس}} = -2$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{دص}}{\text{دع}} \times \frac{\text{دع}}{\text{دس}} = \left(\frac{1}{2 \times \sqrt{\text{ع} + 1}}\right)(-2)$

$= \left(\frac{1}{2 \times \sqrt{1 - 2\text{س} + 1}}\right)(-2)$

٨) إذا كان $ص = ع^2 + 3ع$ ، $ع = 3 - 2س^2$

، فجد $\left.\frac{ءص}{ءس}\right|_{س = 1}$:

الحل: $\frac{ءص}{ءع} = 2ع + 3$ ، $\frac{ءع}{ءس} = -4س$

$$\frac{ءص}{ءس} = \frac{ءص}{ءع} \times \frac{ءع}{ءس} = (2ع + 3)(-4س)$$

$$= (2(3 - 2س^2) + 3)(-4س) = (2(3 - 2) + 3)(-4)$$

$$= 5 \times -4 = -20$$

٩) إذا كان

$ق(س) = م(س) \times ل(س)$ ، وكان $م(1) = 5$

$ل(1) = 2$ ، $م'(1) = 3$ ، $ل'(1) = -2$ ، جد $ق'(1)$:

الحل: $ق'(س) = (م(س) \times ل'(س)) + (ل(س) \times م'(س))$

$$ق'(1) = (م(1) \times ل'(1)) + (ل(1) \times م'(1))$$

$$= (5 \times -2) + (2 \times 3) = -10 + 6 = -4$$

١٠) إذا كان $ق(س) = س^2 \times م(س)$ وكان $م(2) = 5$

$م'(2) = -2$ ، جد $ق'(2)$

الحل: $ق'(س) = س^2 \times م'(س) + م(س) \times 2س$

$$ق'(2) = 4 \times -2 + 5 \times 4$$

$$= -8 + 20 = 12$$

١١) إذا كان $ق(1) = 4$ ، $ق'(1) = -2$ ، $هـ(1) = -2$ ، $هـ'(1) = 1$ ، جد

أ) $(ق \times هـ)'(1)$ ، ب) $\left(\frac{ق}{هـ}\right)'(1)$ ، جـ) $\left(\frac{3}{هـ}\right)'(1)$

د) $(ق + هـ)'(1)$ ، هـ) $(3ق - 2هـ)'(1)$ ، و) $((ق \times هـ)(1))'$

الحل: أ) $(ق \times هـ)'(1) = ق(1) \times هـ'(1) + هـ(1) \times ق'(1)$

$$= 4 \times 1 + -2 \times -2 = 4 + 4 = 8$$

ب) $$\left(\frac{ق}{هـ}\right)'(1) = \frac{هـ(1) \times ق'(1) - ق(1) \times هـ'(1)}{(هـ(1))^2}$$

$$= \frac{(-2 \times -2) - (4 \times 1)}{4} = \frac{0}{4} = 0$$

جـ) $$\left(\frac{3}{هـ}\right)'(1) = \frac{-3 \times هـ'(1)}{(هـ(1))^2} = \frac{-3 \times 1}{(-2)^2} = \frac{-3}{4}$$

د) $(ق + هـ)'(1) = ق'(1) + هـ'(1) = -2 + 1 = -1$

هـ) $(3ق - 2هـ)'(1) = 3ق'(1) - 2هـ'(1) = (3 \times -2) - (2 \times 1)$

$$= -6 - 2 = -8$$

و) $((ق \times هـ)(1))' = (ق(1) \times هـ(1))' = (4 \times -2)' = (-8)' = 0$

١٢) إذا كان $ق(س) = (5س - 1)^3$ جد $\lim\limits_{هـ \to 0} \frac{ق(1 + هـ) - ق(1)}{هـ}$

الحل: $ق'(س) = 3(5س - 1)^2 \times 5$

$$ق'(1) = 3 \times 16 \times 5 = 48 \times 5 = 240$$

١٣) إذا كان $ق(س) = \sqrt{2س + 1}$ جد $\lim\limits_{ع \to 4} \frac{ق(ع) - ق(4)}{ع - 4}$

الحل: $ق'(س) = \frac{2}{2 \times \sqrt{2س + 1}}$

$$ق'(4) = \frac{1}{\sqrt{8 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{9}} = \frac{1}{3}$$

١٤) إذا كان $ق(س) = 2س + 5$ ، أوجد $ق'(س)$ باستخدام تعريف المشتقة :

الحل: $ق'(س) = \lim\limits_{هـ \to 0} \frac{ق(س + هـ) - ق(س)}{هـ}$

$$= \lim_{هـ \to 0} \frac{2(س + هـ) + 5 - 2س - 5}{هـ}$$

$$= \lim_{هـ \to 0} \frac{2س + 2هـ + 5 - 2س - 5}{هـ} = \lim_{هـ \to 0} \frac{2هـ}{هـ} = 2$$

١٥) إذا كان $ق(س) = 1 - 2س$ ، أوجد $ق'(س)$ باستخدام تعريف المشتقة :

الحل: $ق'(س) = \lim\limits_{هـ \to 0} \frac{ق(س + هـ) - ق(س)}{هـ}$

$$= \lim_{هـ \to 0} \frac{1 - 2(س + هـ) - 1 + 2س}{هـ}$$

$$= \lim_{هـ \to 0} \frac{1 - 2س - 2هـ - 1 + 2س}{هـ} = \lim_{هـ \to 0} \frac{-2هـ}{هـ} = -2$$

١٦) إذا كان $ق(س) = س^2 + 5$ ، أوجد $ق'(س)$ باستخدام تعريف المشتقة :

الحل: $ق'(س) = \lim\limits_{هـ \to 0} \frac{ق(س + هـ) - ق(س)}{هـ}$

$$= \lim_{هـ \to 0} \frac{(س + هـ)^2 + 5 - س^2 - 5}{هـ}$$

$$= \lim_{هـ \to 0} \frac{س^2 + هـ^2 + 2سهـ + 5 - س^2 - 5}{هـ} = \lim_{هـ \to 0} \frac{هـ^2 + 2سهـ}{هـ}$$

$$= \lim_{هـ \to 0} \frac{هـ(هـ + 2س)}{هـ} = 0 + 2س = 2س$$

١٧) إذا كان $ق(س) = 3س^2 + 2$ ، أوجد $ق'(س)$ باستخدام تعريف المشتقة :

الحل: $ق'(س) = \lim\limits_{هـ \to 0} \frac{ق(س + هـ) - ق(س)}{هـ}$

$$= \lim_{هـ \to 0} \frac{3(س + هـ)^2 + 2 - 3س^2 - 2}{هـ}$$

$$= \lim_{هـ \to 0} \frac{3(س^2 + هـ^2 + 2سهـ) + 2 - 3س^2 - 2}{هـ}$$

$$= \lim_{\text{هـ}\to 0} \frac{3\text{س}^2 + 3\text{هـ}^2 + 6\text{س}\text{هـ} + 2 - 3\text{س}^2 - 2}{\text{هـ}}$$

$$= \lim_{\text{هـ}\to 0} \frac{3\text{هـ}^2 + 6\text{س}\text{هـ}}{\text{هـ}} = \lim_{\text{هـ}\to 0} \frac{\text{هـ}(\text{هـ} + 6\text{س})}{\text{هـ}} = 0 + 6\text{س} = 6\text{س}$$

١٨) إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^3 + 5$، أوجد $\text{ق}'(\text{س})$ باستخدام تعريف المشتقة

الحل: $\text{ق}'(\text{س}) = \lim_{\text{هـ}\to 0} \frac{\text{ق}(\text{س} + \text{هـ}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{هـ}}$

$$= \lim_{\text{هـ}\to 0} \frac{(\text{س} + \text{هـ})^3 + 5 - \text{س}^3 - 5}{\text{هـ}}$$

$$= \lim_{\text{هـ}\to 0} \frac{\text{س}^3 + \text{هـ}^3 + 3\text{س}^2\text{هـ} + 3\text{س}\text{هـ}^2 + 5 - \text{س}^3 - 5}{\text{هـ}}$$

$$= \lim_{\text{هـ}\to 0} \frac{\text{هـ}^3 + 3\text{س}^2\text{هـ} + 3\text{س}\text{هـ}^2}{\text{هـ}}$$

$$= \lim_{\text{هـ}\to 0} \frac{\text{هـ}(\text{هـ}^2 + 3\text{س}^2 + 3\text{س}\text{هـ})}{\text{هـ}} = 0 + 3\text{س}^2 + 0 = 3\text{س}^2$$

١٩) إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \frac{1}{\text{س} + 1}$، أوجد $\text{ق}'(\text{س})$ باستخدام تعريف المشتقة :

الحل: $\text{ق}'(\text{س}) = \lim_{\text{هـ}\to 0} \frac{\text{ق}(\text{س} + \text{هـ}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{هـ}}$

$$= \lim_{\text{هـ}\to 0} \frac{\frac{1}{\text{س} + \text{هـ} + 1} - \frac{1}{\text{س} + 1}}{\text{هـ}} = \lim_{\text{هـ}\to 0} \frac{\text{س} + 1 - \text{س} - \text{هـ} - 1}{(\text{س} + \text{هـ} + 1)(\text{س} + 1)(\text{هـ})}$$

$$= \lim_{\text{هـ}\to 0} \frac{-\text{هـ}}{(\text{س} + \text{هـ} + 1)(\text{س} + 1)(\text{هـ})} = \frac{-1}{(\text{س} + 0 + 1)(\text{س} + 1)}$$

$$= \frac{-1}{(\text{س} + 1)(\text{س} + 1)} = \frac{-1}{(\text{س} + 1)^2}$$

٢٠) إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \text{جـ}$، أوجد $\text{ق}'(\text{س})$ باستخدام تعريف المشتقة

الحل: $\text{ق}'(\text{س}) = \lim_{\text{هـ}\to 0} \frac{\text{ق}(\text{س} + \text{هـ}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{هـ}} = \lim_{\text{هـ}\to 0} \frac{\text{جـ} - \text{جـ}}{\text{هـ}} = 0$

٢١) إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^2 - 2\text{س}$، جد $\text{ق}'(3)$ باستخدام تعريف المشتقة الأولى عند نقطة :

الحل: $\text{ق}'(3) = \lim_{\text{هـ}\to 0} \frac{\text{ق}(\text{س} + \text{هـ}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{هـ}}$

$$= \lim_{\text{هـ}\to 0} \frac{(\text{س} + \text{هـ})^2 - 2(\text{س} + \text{هـ}) - \text{س}^2 + 2\text{س}}{\text{هـ}}$$

$$= \lim_{\text{هـ}\to 0} \frac{\text{س}^2 + \text{هـ}^2 + 2\text{س}\text{هـ} - 2\text{س} - 2\text{هـ} - \text{س}^2 + 2\text{س}}{(\text{س} + \text{هـ} + 1)(\text{س} + 1)(\text{هـ})}$$

$$= \lim_{\text{هـ}\to 0} \frac{\text{هـ}(\text{هـ} + 2\text{س} - 2)}{\text{هـ}} = 0 + 2\text{س} - 2$$

$$\text{ق}'(3) = 6 - 2 = 4$$

٢٢) إذا كان $\text{ص} = \text{ق}(\text{س})$، وكان معدل تغير الاقتران $\text{ق}(\text{س})$ هو $(\text{س}^2\text{هـ} - 2\text{س}\text{هـ}^2)$، جد $\text{ق}'(\text{س})$:

الحل: $\text{ق}'(\text{س}) = \lim_{\Delta\text{س}\to 0} \frac{\Delta\text{ص}}{\Delta\text{س}}$

$$= \lim_{\text{هـ}\to 0} (\text{س}^2\text{هـ} - 2\text{س}\text{هـ}^2) = 0$$

٢٣) إذا كان $\text{ص} = \text{ق}(\text{س})$، وكان مقدار التغير في قيمة الاقتران $\text{ق}(\text{س})$ عندما تتغير س من س_1 إلى $\text{س}_1 + \text{هـ}$ هو :

$\Delta\text{ص} = 4\text{س}\text{هـ} + 2\text{هـ}^2$، جد قيمة $\text{ق}'(\text{س})$:

الحل: $\text{ق}'(\text{س}) = \lim_{\Delta\text{س}\to 0} \frac{\Delta\text{ص}}{\Delta\text{س}}$

$$= \lim_{\text{هـ}\to 0} \frac{4\text{س}\text{هـ} + 2\text{هـ}^2}{\text{هـ}} = \lim_{\text{هـ}\to 0} \frac{\text{هـ}(4\text{س} + 2\text{هـ})}{\text{هـ}} = 4\text{س}$$

* معدل التغير للاقتران:

التغير في السينات: $(\Delta\text{س} = \text{هـ})$ $\quad \Delta\text{س} = \text{س}_2 - \text{س}_1$

مقدار التغير في الاقتران (الصادات)

$$\Delta\text{ص} = \text{ص}_2 - \text{ص}_1 = \text{ق}(\text{س}_2) - \text{ق}(\text{س}_1)$$

معدل التغير في الاقتران (متوسط التغير)

$$\frac{\Delta\text{ص}}{\Delta\text{س}} = \frac{\text{ص}_2 - \text{ص}_1}{\text{س}_2 - \text{س}_1} = \frac{\text{ق}(\text{س}_2) - \text{ق}(\text{س}_1)}{\text{س}_2 - \text{س}_1}$$

١) إذا كان $\text{ق}(1) = 5$، $\text{ق}(4) = 20$ وتغيرت س من 1 إلى 4، أوجد معدل التغير الاقتران $\text{ق}(\text{س})$:

الحل: $\frac{\Delta\text{ص}}{\Delta\text{س}} = \frac{\text{ق}(4) - \text{ق}(1)}{4 - 1} = \frac{20 - 5}{3} = \frac{15}{3} = 5$

٢) جد قيمة معدل التغير في الاقتران $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^2 - (\text{س} - 2)^2$، عندما تتغير س من 2 إلى 5 :

الحل: $\frac{\Delta\text{ص}}{\Delta\text{س}} = \frac{\text{ق}(5) - \text{ق}(2)}{5 - 2} = \frac{(25 - (27)) - (4 - 0)}{3}$

$$= \frac{-2 - 4}{3} = \frac{-6}{3} = -2$$

٣) إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} 5 & ، \text{س} = 3 \\ \text{س}^2 - 1 & ، 3 < \text{س} \leq 7 \end{cases}$

جد معدل التغير للاقتران $\text{ق}(\text{س})$ عندما تتغير س من 4 إلى 6 :

الحل: $\frac{\Delta\text{ص}}{\Delta\text{س}} = \frac{\text{ق}(6) - \text{ق}(4)}{6 - 4} = \frac{35 - 15}{2} = \frac{20}{2} = 10$

٤) يتحرك جسيم حسب العلاقة $\text{ف}(\text{ن}) = \text{ن}^2 + 3$، حيث ن الزمن بالثواني، ف(ن) المسافة بالأمتار احسب السرعة المتوسطة للجسيم في الفترة الزمنية على [١، ٢] ثانية :

الحل: $\text{ن}_1 = 1$، $\text{ن}_2 = 2$ ثانية

السرعة المتوسطة للجسم في الفترة الزمنية [١، ٢] ثانية تساوي:

$$\bar{\text{ع}} = \frac{\text{ف}(\text{ن}_2) - \text{ف}(\text{ن}_1)}{\text{ن}_2 - \text{ن}_1} = \frac{\text{ف}(2) - \text{ف}(1)}{2 - 1}$$

$$= \frac{((2)^2 + 3) - ((1)^2 + 3)}{2 - 1} = \frac{7 - 4}{1} = 3 \text{ م/ث}$$

٢٦) مكعب معدني تعرض للحرارة بحيث تغير طول ضلعه من (١) سم الى (٣) سم ، جد مقدار التغير في حجم هذا المكعب :

الحل : $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{٣}$

$\Delta \text{ص} = \text{ق}(٣) - \text{ق}(١)$

$= ٢٧ - ١ = ٢٦$

---

٢٧) صفيحة معدنية مربعة الشكل تغير طول ضلعها من ٢ سم إلى ٤ سم جد مقدار معدل التغير في مساحة هذه الصفيحة

الحل : $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{٢}$

$\Delta \text{س} = ٤ - ٢ = ٢$

$\Delta \text{ص} = \text{ق}(٤) - \text{ق}(٢)$

$= ١٦ - ٤ = ١٢$

$\frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}} = \frac{١٢}{٢} = ٦$

---

٢٨) ما قيمة تغير $\text{ص} = ٣\text{س}^{٣}$ عندما تتغير س من $\text{س}_{١} = ٢$ بمقدار $\Delta \text{س} = -١$

الحل : $\Delta \text{ص} = \text{ق}(\text{س}_{١} + \Delta \text{س}) - \text{ق}(\text{س}_{١})$

$= \text{ق}(٢ + -١) - \text{ق}(٢)$

$= \text{ق}(١) - \text{ق}(٢) = ٣ - ٢٤ = -٢١$

---

٢٩) إذا كان معدل تغير الاقتران ق في الفترة [-٣ ، ١] يساوي (٢) وكان : $\text{هـ}(\text{س}) = ٣\text{ق}(\text{س}) - \text{س}^{٢}$ ، جد معدل تغير الاقتران هـ في الفترة [-٣ ، ١] :

الحل : <u>معدل تغير ٣ق(س) :</u> $٣ \times ٢ = ٦$

<u>معدل تغير س² :</u>

$\Delta \text{س} = ١ - -٣ = ٤$

$\Delta \text{ص} = \text{ق}(١) - \text{ق}(-٣)$

$= ١ - ٩ = -٨$

$\frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}} = \frac{-٨}{٤} = -٢$

الجواب النهائي : $٦ - {}^{-}٢ = ٨$

---

٣٠) إذا كان

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^{٢} & ، \ ١ \le \text{س} \le ٣ \\ \text{أ}\text{س} & ، \ ٣ \le \text{س} \le ٥ \end{cases}$$

وكان معدل تغير الاقتران ق عندما تتغير س من ٢ إلى ٥ يساوي (٤) جد قيمة الثابت (أ) :

الحل : $\frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}} = \frac{\text{ق}(\text{س}_{٢}) - \text{ق}(\text{س}_{١})}{\text{س}_{٢} - \text{س}_{١}} = ٤$

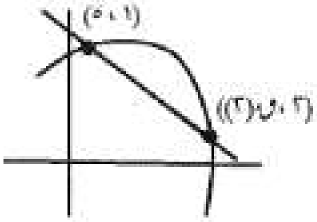
$= \frac{\text{ق}(٥) - \text{ق}(٢)}{٥ - ٢} = ٤$

$= \frac{٥\text{أ} - ٤}{٣} = ٤ \longrightarrow ٥\text{أ} - ٤ = ١٢$

$= \frac{٥\text{أ}}{٥} = \frac{١٦}{٥} \longrightarrow \boxed{\text{أ} = \frac{١٦}{٥}}$

---

٣١) إذا كان ميل القاطع لمنحنى الاقتران ق(س) في الشكل التالي يساوي (-١) ، جد ق(٣) :



الحل : $\frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}} = \frac{٥ - \text{ق}(٣)}{١ - ٣}$

$-١ = \frac{٥ - \text{ق}(٣)}{-٢}$

$٢ = ٥ - \text{ق}(٣)$

$-٣ = -\text{ق}(٣)$

$\boxed{\text{ق}(٣) = ٣}$

---

٣٢) إذا ق(س) = س² + ٢س ، أوجد ميل القاطع المار بالنقطتين (١ ، ق(١)) ، (٣ ، ق(٣)) :

الحل : $\frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}} = \frac{\text{ق}(\text{س}_{٢}) - \text{ق}(\text{س}_{١})}{\text{س}_{٢} - \text{س}_{١}}$

$= \frac{\text{ق}(٣) - \text{ق}(١)}{٣ - ١}$

$= \frac{(٩ + ٦) - (١ + ٢)}{٣ - ١}$

$= \frac{١٥ - ٣}{٢} = \frac{١٢}{٢} = ٦$

S.N.S

مدارس سكاي الوطنية

المراجعة المكثفة

لمادة

الرياضيات

منهاجي
متعة التعليم الهادف

الوحدة الثالثة تطبيقات التفاضل

للفرع الأدبي

جيل
٢٠٠١

اعداد الأستاذ

محمد حميدي

٠٧٩٥٩٨٦٦٥٦

<u>الوحدة الثالثة : تطبيقات التفاضل</u>

* التفسير الفيزيائي :

١) يتحرك جسيم على خط مستقيم وفق العلاقة
ف(ن) = ن³ - ٤ن² + ٨ ن جد المسافة التي يقطعها الجسيم عندما يكون تسارعه ٤م/ث² :

الحل :

ف(ن) = ن³ - ٤ن² + ٨ن
ع = تشتق ف = ٣ن² - ٨ن + ٨
ت = تشتق ع = ٦ن – ٨

٦ن – ٨ = ٤
٦ن = ١٢
ن = ٢

ف(ن) = ن³ - ٤ن² + ٨ن
ف(٢) = ٨ – ١٦ + ١٦ = ٨ متر

٢) يتحرك جسم في خط مستقيم حسب العلاقة :
ف(ن) = ٢ن³ - ٦ن² + ٢ن + ١ ، أحسب السرعة عندما يكون التسارع = ١٢ م / ث² :

الحل :

ف(ن) = ٢ن³ - ٦ن² + ٢ن + ١
ع = ٦ن² - ١٢ن + ٢
ت = ١٢ن – ١٢

ت = ١٢ن - ١٢
١٢ = ١٢ن – ١٢
$\frac{١٢ن}{١٢} = \frac{٢٤}{١٢}$
ن = ٢

ع = ٦ن² - ١٢ن + ٢
ع(٢) = ٦(٢)² - ١٢(٢) + ٢ = ٢٤ - ٢٤ + ٢ = ٢ م / ث

٣) إذا كانت ف(ن) = ن³ - ٩ن² + ١٥ن هي المسافة التي يقطعها جسيم ، حيث ف المسافة بالأمتار ، ن الزمن بالثواني ، فاحسب تسارع الجسيم في اللحظة التي تنعدم فيها سرعته :

الحل : ف(ن) = ن³ - ٩ن² + ١٥ن

ع (ن) = فَ(ن) = ٣ن² - ١٨ن + ١٥

عندما تنعدم السرعة ، فإن : ع (ن) = ٠

٣ن² - ١٨ن + ١٥ = ٠
ن² - ٦ن + ٥ = ٠
(ن – ٥) (ن – ١) = ٠ ⟸ ن = ٥ ، ن = ١

التسارع ت (ن) = عَ(ن) = ٦ن – ١٨

ت(٥) = ٦(٥) – ١٨ = ٣٠ – ١٨ = ١٢ م / ث²
ت(١) = ٦(١) – ١٨ = ٦ – ١٨ = -١٢ م / ث²

٤) تحرك جسيم بحيث كان بعده عن نقطة الأصل بالأمتار بعد ن ثانية من بدء الحركة معطى بالعلاقة : ف(ن) = ٢ن² ، إذا كانت سرعته المتوسطة في الفترة الزمنية [٠ ، أ] تساوي سرعته اللحظية بعد مرور ٣ ثوانٍ ، فجد قيمة أ :

الحل : $\boxed{\text{ف(ن) = ٢ن² ⟸ ع (ن) = ٤ن ⟸ ت(ن) = ٤}}$

$\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{ف(أ) – ف(٠)}{أ - ٠} = \frac{٢أ² – ٠}{أ} = ٢أ$

ع(٣) = ٤ × ٣ = ١٢

٢أ = ١٢ ⟵ $\boxed{أ = ٦}$

* <u>التفسير الهندسي :</u>

١) إذا كان ق(س) = $\frac{٢س}{٣س + ٤}$ ، جد ميل المماس لمنحنى ق(س) عند س = -١ :

الحل : قَ(س) = $\frac{(٣س + ٤)(٢) - (٢س)(٣)}{(٣س + ٤)^٢}$

قَ(-١) = $\frac{(١ × ٢) - (-٢ × ٣)}{(١)^٢} = \frac{٢ + ٦}{١} = \frac{٨}{١} = ٨$

٢) ق(س) = √(٢س + ٥) + ٢ ، جد ميل المماس لمنحنى ق(س) عند س = ٢ :

الحل : قَ(س) = $\frac{\cancel{٢}}{\cancel{٢} × √(٢س + ٥)}$ ، قَ(٢) = $\frac{١}{√٩} = \frac{١}{٣}$

٣) إذا كان ق(س) = √(٣س² + ٦) ، جد معادلة المماس عند (١ ، ٣) :

الحل : س١ = ١   ص١ = ٣   م = ١

م = $\frac{٦س}{٢ × √(٣س² + ٦)} = \frac{٦}{٢ × √٩} = \frac{٦}{٦} = ١$

ص - ص١ = م (س - س١)
ص – ٣ = ١(س – ١) ⟵ ص –٣= س–١ ⟵ ص = س + ٢

٤) جد معادلة المماس لمنحنى ق(س) = $\frac{٢}{٣س - ١}$ ، عند س = ٠ :

الحل :

س١ = ٠   ص١ = -٢   م = -٦

ص١ = $\frac{٢}{٣س - ١} = \frac{٢}{٠ - ١} = -٢$

م = $\frac{-٢ × ٣}{(٣س - ١)^٢} = \frac{-٦}{(-١)^٢} = \frac{-٦}{١} = -٦$

ص - ص١ = م (س - س١) ⟸ ص +٢= -٦(س – ٠)

ص + ٢ = -٦س ⟸ ص = -٦س - ٢

٥) إذا كان ق(س) = أ س² + ٥س + ٧ ، أوجد قيم أ التي تجعل ميل المماس عند س = ١ تساوي ١٠ :

الحل : ٢أ س + ٥ = ١٠ ⟸ ٢أ × ١ = ٥

$\frac{٢أ}{٢} = \frac{٥}{٢}$ ⟸ $\boxed{أ = \frac{٥}{٢}}$

٦) إذا كان ق(س) متصلاً حيث ق(٠)= ١ ، قَ(٠) = ٠ فإن معادلة المماس لمنحنى ق(س) عند س = ٠

الحل :

س١ = ٠   ص١ = ١   م = ٠

ص - ص١ = م (س - س١) ⟸ ص – ١ = ٠ (س – ٠)
⟸ $\boxed{ص = ١}$

٧) إذا كان ق(س) = (٢س − ٢)^{٤} ، وكان ميل المماس يساوي ٦٤ ، أوجد قيم س :

الحل : ق′(س) = ٤(٢س − ٢)^{٣} × ٢

ق′(س) = ٨(٢س − ٢)^{٣}

$\frac{٦٤}{٨} = \frac{٨}{٨}$ (٢س − ٢)^{٣}

∴ (٢س − ٢)^{٣} = ٨ (نأخذ الجذر التكعيبي للطرفين)

$\sqrt[٣]{(٢س - ٢)^{٣}} = \sqrt[٣]{٨}$

٢س − ٢ = ٢

$\frac{٢}{٢}$س = $\frac{٤}{٢}$ ← $\boxed{∴ س = ٢}$

* التزايد والتناقص والقيم القصوى المحلية وقيم س الحرجة :

(اختبار المشتقة الأولى)

١) إذا ق(س) = س^{٣} − ١٢س ، أوجد :

أ) مجالات التزايد والتناقص

ب) القيم القصوى العظمى والصغرى المحلية

ج) قيم س الحرجة

الحل : ق′(س) = ٣س^{٢} − ١٢

٣س^{٢} − ١٢ = ٠

$\frac{٣س^{٢}}{٣} = \frac{١٢}{٣}$ ← ∴ س^{٢} = ٤

$\boxed{س = ±٢}$

ق(س) متزايد (−∞ ، −٢]

ق(س) متناقص [−٢ ، ٢]

ق(س) متزايد [٢ ، ∞)

عند س = −٢ قيمة عظمى حرجة محلية

وهي : ق(−٢) = ١٦

عند س = ٢ قيمة صغرى حرجة محلية

وهي : ق(٢) = −١٦

---

٢) إذا ق(س) = ٦س^{٢} − س^{٣} + ٨ ، جد :

أ) مجالات التزايد والتناقص

ب) القيم القصوى المحلية وبين نوعها

الحل : $\boxed{ق′(س) = ١٢س - ٣س^{٢}}$

١٢س − ٣س^{٢} = ٠ ← س (١٢ − ٣س) = ٠

← $\boxed{س = ٠}$

١٢ − ٣س = ٠ ← −٣س = −١٢ ← س = ٤

أ) ق(س) متناقص (−∞ ، ٠] ، [٤ ، ∞)

ق(س) متزايد [٠ ، ٤]

ب) س = ٠ صغرى محلية حرجة وهي ق(٠) = ٨

س = ٤ عظمى محلية حرجة

وهي : ق(٤) = ٩٦ − ٦٤ + ٨ = ٣٢ + ٨ = ٤٠

---

٣) إذا ق(س) = $\frac{١}{٣}$س^{٣} − $\frac{١}{٢}$س^{٢} − ٢س + ٧ ، جد :

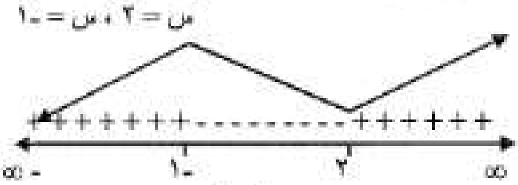
أ) فترات التزايد والتناقص

ب) القيم العظمى والصغرى (أن وجدت)

الحل : $\boxed{ق′(س) = س^{٢} - س - ٢}$

س^{٢} − س − ٢ = ٠ ← (س − ٢)(س + ١) = ٠

س = ٢ ، س = −١



أ) ق(س) متزايد (−∞ ، −١] ، [٢ ، ∞)

ق(س) متناقص [−١ ، ٢]

ب) س = −١ عظمى محلية حرجة ق(−١) = $\frac{-١}{٣} - \frac{١}{٢} + ٢ + ٧$

س = ٢ صغرى محلية حرجة ق(٢) = $\frac{٨}{٣} - \frac{٤}{٢} - ٤ + ٧$

٤) إذا $ق(س) = س^{٣} - ٩س^{٢} + ٢٤س$ ، أوجد :

أ) مجالات التزايد والتناقص

ب) القيم القصوى العظمى والصغرى

جـ) قيم س الحرجة

الحل : $ق'(س) = ٣س^{٢} - ١٨س + ٢٤$

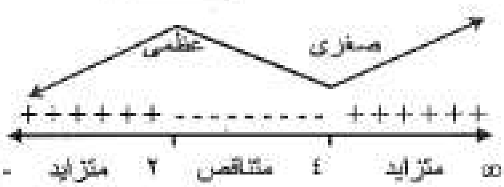
$$\frac{٣س^{٢}}{٣} - \frac{١٨س}{٣} + \frac{٢٤}{٣} = \frac{٠}{٣}$$

$س^{٢} - ٦س + ٨ = ٠$

$(س - ٤)(س - ٢) = ٠$

$س - ٤ = ٠ \longrightarrow \boxed{\therefore س = ٤}$

$س - ٢ = ٠ \longrightarrow \boxed{\therefore س = ٢}$



ق(س) متزايد (-∞ ، ٢]

ق(س) متناقص [٢ ، ٤]

ق(س) متزايد [٤ ، ∞)

عند س = ٢ قيمة عظمى حرجة محلية وهي : ق(٢) = ٢٠

عند س = ٤ قيمة صغرى حرجة محلية وهي : ق(٤) = ١٦

---

٥) إذا $ق(س) = س(س^{٢} - ٢٧)$ ، أوجد :

أ) مجالات التزايد والتناقص

ب) القيم القصوى العظمى والصغرى

جـ) قيم س الحرجة

الحل : $ق(س) = س^{٣} - ٢٧س$

$ق'(س) = ٣س^{٢} - ٢٧ \longrightarrow ٣س^{٢} - ٢٧ = ٠$

$\frac{٣س^{٢}}{٣} = \frac{٢٧}{٣} \longrightarrow س^{٢} = ٩$

$س = \sqrt{٩} \longrightarrow \boxed{\therefore س = \pm ٣}$

ق(س) متزايد (-∞ ، -٣] ، ق(س) متناقص [-٣ ، ٣]

ق(س) متزايد [٣ ، ∞)

عند س = -٣ قيمة عظمى حرجة وهي : ق(-٣) = ٥٤

عند س = ٣ قيمة صغرى حرجة وهي : ق(٣) = -٥٤

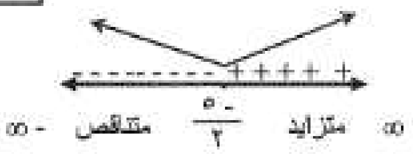
---

٦) إذا كان $ق(س) = (س + ٢)(س + ٣)$ ، جد فترات التزايد والتناقص :

الحل : $ق'(س) = (س + ٢)(١) + (س + ٣)(١)$

$= س + ٢ + س + ٣ = ٢س + ٥$

$٢س + ٥ = ٠ \longrightarrow ٢س = -٥ \longrightarrow \boxed{س = \frac{-٥}{٢}}$



ق(س) متناقص $(-\infty ، \frac{-٥}{٢}]$ ، ق(س) متزايد $[\frac{-٥}{٢} ، \infty)$

---

٧) إذا كان $ق(س) = س^{٣} + ٩س + ١$ ، أثبت أن ق(س) متزايد دائماً على ح :

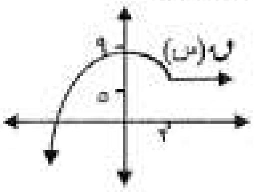
الحل : $ق'(س) = ٣س^{٢} + ٩$

$\frac{٣س^{٢}}{٣} = \frac{-٩}{٣} \longrightarrow \boxed{٣س^{٢} = -٣}$

∴ ق(س) متزايد على (ح) دائماً

---

٨) الشكل التالي الذي يمثل منحنى الاقتران ق(س) جد اقتران التزايد والتناقص والثبات :



الحل:

ق(س) متزايد (-∞ ، ٠]

ق(س) متناقص [٠ ، ٢]

ق(س) ثابت [٢ ، ∞)

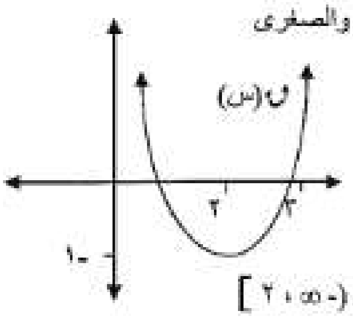
---

٩) اعتماداً على الشكل التالي الذي يمثل منحنى ق(س) أوجد :

أ) مجالات التزايد والتناقص

ب) القيم القصوى العظمى والصغرى

جـ) قيم س الحرجة



الحل : ق(س) متناقص (-∞ ، ٢]

ق(س) متزايد [٢ ، ∞)

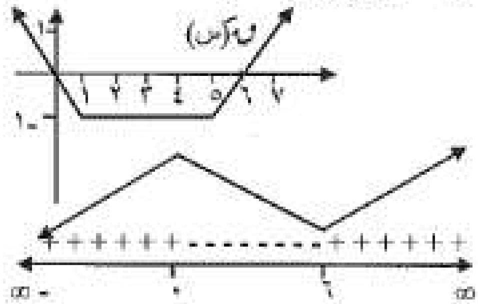
عند س = ٢ قيمة صغرى حرجة محلية وهي ق(٢) = -١

١٠) معتمداً الشكل المجاور الذي يمثل منحنى المشتقة الأولى للاقتران ق(س) ، جد كلاً مما يلي :

أ) مجالات التزايد والتناقص ، ب) القيم القصوى المحلية وبين نوعها

جـ) قيم س الحرجة ، د) نها $\frac{ق(٢ + هـ) - ق(٢)}{هـ}$

هـ) ميل المماس لمنحنى ق(س) عند س = ٧



الحل :

أ) ق(س) متزايد (-∞ ، ٠] ، [٦ ، ∞) ، متناقص [٠ ، ٦]

ب) عند س = ٠ عظمى محلية حرجة وهي ق(٠)

عند س = ٦ صغرى محلية حرجة وهي ق(٦)

جـ) قيم س الحرجة { ٠ ، ٦ } ، د) قَ(٢) = -١ ، هـ) قَ(٧) = ١

---

١١) ق(س) = ٣ س^٢ - أ س + ٤ له قيمة حرجة عند س = ٢ ، جد الثابت (أ) :

الحل : قَ(س) = ٦س - أ

قَ(٢) = ١٢ - أ = ٠ ⟵ $\boxed{أ = ١٢}$

---

١٢) ق(س) = أ س^٣ - ٣ س^٢ له قيمة صغرى محلية عند س = ١ ، جد الثابت (أ) :

الحل : قَ(س) = ٣أ س^٢ - ٦ س

قَ(١) = ٣ أ - ٦ = ٠ ⟵ ٣أ = ٦ ⟵ $\boxed{أ = ٢}$

---

١٣) باستخدام اختبار المشتقة الثانية جد القيم القصوى المحلية (إن وجدت) للاقتران ق حيث :

ق(س) = س^٣ - ٣ س

الحل :

$\boxed{قَ(س) = ٣ س^٢ - ٣}$

$\boxed{قً(س) = ٦ س}$

٣ س^٢ - ٣ = ٠

⟸ ٣ س^٢ = ٣

⟸ س^٢ = ١

⟸ س = ± ١

قً(-١) = -٦ ⟸ سالب عظمى حرجة محلية

قً(١) = ٦ ⟸ موجب صغرى حرجة محلية

---

١٤) إذا كان قَ(س) = هـَ(س) فأثبت إن ق(س) = هـ(س) + جـ حيث جـ عدد ثابت :

الحل : قَ(س) = هـَ(س) ⟵ قَ(س) - هـَ(س) = ٠

⟵ (ق(س) - هـ(س))َ = ٠

∴ ق(س) - هـ(س) = ثابت ⟵ ق(س) = هـ(س) + ثابت

∴ ق(س) = هـ(س) + جـ

التطبيق الاقتصادي

أ) س : عدد القطع

ب) ع : سعر القطعة

جـ) د (س) : الإيراد الكلي

د) ك (س) : التكلفة الكلية

هـ) ر (س) : الربح الكلي

*) الحدية ⟸ مشتقة الكلية

أقل ما يمكن ، أكبر ما يمكن ⟸ نشتق = ٠

إذا شاهدت في السؤال سعر أو ع نجد مباشرة وبدون تردد وبدون خوف د (س)

السعر = ٥	⟸ د (س) = ٥ س
السعر = ١٠	⟸ د (س) = ١٠ س
ع = ٥ س	⟸ د (س) = ٥ س^٢

الربح = الإيراد – التكلفة
ر (س) = د (س) – ك (س)

---

١) إذا كانت التكلفة الكلية لـ س من الوحدات تعطى بالعلاقة ك (س) = س^٢ + ٥ س – ١ أوجد التكلفة الحدية الناتجة عن بيع ٣ قطع ؟

الحل : كَ (س) = ٢ س + ٥

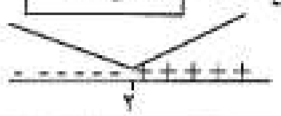
كَ (٣) = ٦ + ٥ = ١١

---

٢) إذا كانت التكلفة الكلية لـ س من القطع تعطى بالعلاقة ك (س) = ٢ س^٢ - ٨ س أوجد قيمة س حتى تكون التكلفة أقل ما يمكن ؟

الحل : كَ (س) = ٤ س – ٨ ⟸ ٤ س – ٨ = ٠

⟸ س = $\frac{٨}{٤}$ ⟸ $\boxed{∴ س = ٢}$



صغرى ، اقل ما يمكن

٣) إذا كان الإيراد الكلي الناتج عن بيع س قطعة من منتج هو :
د(س) = ٥س^{٢} + ٦س وتكلفة الكلية ك(س) = ٣س^{٢} + س + ٥٠
جد الربح الحدي:

الحل :

ر(س) = د(س) – ك(س)
= ٥س^{٢} + ٦س – ٣س^{٢} - س – ٥٠
ر(س) = ٢س^{٢} + ٥س – ٥٠
ر$'$(س) = ٤س + ٥

٤) وجد مصنع لإنتاج الأجهزة الإلكترونية أن التكلفة الكلية بالدينار لإنتاج س من الأجهزة أسبوعياً تعطى بالاقتران
ك (س) = ٥٠٠٠ + ٦٠ س + ٠,٠٠٢ س^{٢}
إذا بيع الجهاز الواحد بمبلغ ٨٠ ديناراً فما عدد الوحدات التي يجب إنتاجها وبيعها أسبوعياً لتحقق أكبر ربح ممكن :

الحل : عدد الأجهزة = س
الإيراد الكلي الناتج من بيع الأجهزة
= عدد الأجهزة × سعر الجهاز
د (س) = س × ٨٠ ⟸ د (س) = ٨٠ س
الربح = الإيراد – التكاليف
ر (س) = ٨٠ س – (٥٠٠٠ + ٦٠ س + ٠,٠٠٢ س^{٢})
ر (س) = ٨٠ س – ٥٠٠٠ - ٦٠ س - ٠,٠٠٢ س^{٢}

∴ $\boxed{\text{ر (س) = ٢٠ س - ٥٠٠٠ - ٠,٠٠٢}}$

ر$'$(س) = ٢٠ - ٠,٠٠٤ س ⟸ ٢٠ - ٠,٠٠٤ س = ٠
٢٠ = ٠,٠٠٤ س ⟸ س = ٥٠٠٠ جهاز

\+ + + + + - - - - - - - -
٥٠٠٠

عظمى أكبر ربح عند بيع ٥٠٠٠ جهاز

٥) وجد مصنع لإنتاج الأجهزة الإلكترونية أن التكلفة الكلية بالدينار لإنتاج س من الأجهزة أسبوعياً تعطى بالاقتران
ك (س) = ٥٠ س + ٣٠٠
إذا بيع الجهاز الواحد بمبلغ (٢٠٠ – س) ديناراً فجد قيمة س التي تجعل الربح الأسبوعي أكبر ما يمكن :

الحل : ك (س) = ٥٠ س + ٣٠٠
د (س) = ٢٠٠ س – س^{٢}
ر (س) = د (س) – ك (س)
ر (س) = ٢٠٠ س – س^{٢} - ٥٠ س - ٣٠٠

∴ $\boxed{\text{ر (س) = ١٥٠ س - س}^{٢}\text{ + ٣٠٠}}$

ر$'$(س) = ١٥٠ - ٢ س
١٥٠ - ٢ س = ٠ ⟸ ١٥٠ = ٢ س ⟸ س = ٧٥ جهاز

\+ + + + + - - - - - - - -
٧٥

عظمى أكبر ربح عند بيع ٧٥ جهاز

٦) وجد مصنع لإنتاج ألعاب الأطفال أن التكلفة الكلية لإنتاج س لعبة أسبوعياً ك(س) = ٦٠س + ٢٠٠ ، وأن الربح الناتج هو
٠,٢س^{٢} + ٢٠س + ٦٥ جد الإيراد الحدي :

الحل : د(س) = ر(س) + ك(س)
= ٠,٢س^{٢} + ٢٠س + ٦٥ + ٦٠س + ٢٠٠

$\boxed{\text{د(س) = ٠,٢س}^{٢}\text{ + ٨٠ س + ٢٦٥}}$

د$'$(س) = ٠,٤س + ٨٠

٧) لاحظ مصنع أن التكلفة الكلية لإنتاج س لعبة هي
ك(س) = ٠,٣ س^{٢} - ٦٠ س + ١٠٠ دينار وأن الربح الناتج من بيع س لعبة هو ر(س) ٠,٥ س دينار جد
١) عدد اللعب اللازم إنتاجها حتى تكون التكاليف أقل ما يمكن
٢) الإيراد الحدي الناتج عن بيع (١٠٠٠) لعبة

الحل :

١) ك$'$(س) = ٠,٦ س – ٦٠
٠,٦ س – ٦٠ = ٠

$\frac{\text{٠,٦ س}}{\text{٠,٦}} = \frac{\text{٦٠}}{\text{٠,٦}}$

س = $\frac{\text{٦٠٠}}{\text{٦}}$ = ١٠٠

\- - - - - - + + + + +   أقل ما يكن
١٠٠

٢) د (س) = ر (س) + ك (س)
= ٠,٥ س + ٠,٣ س^{٢} - ٦٠ س + ١٠٠
= ٠,٣ س^{٢} - ٥٩,٥ س + ١٠٠
د$'$(س) = ٠,٦ س – ٥٩,٥
د$'$(١٠٠٠) = ٠,٦ × ١٠٠٠ – ٥٩,٥
د$'$(١٠٠٠) = $\frac{٦}{١٠}$ × ١٠٠٠ – ٥٩,٥
= ٦٠٠ - ٥٩,٥
= ٥٤٠,٥ دينار