



الجزء
الثاني

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



دولة فلسطين
وزارة التربية والتعليم

الرياضيات

فريق التأليف:

أ. فلاح الترك

أ. ربي داود

أ. محمود كميل (منسقاً)

أ. أروى مشاركة

أ. محاسن سحويل



أ. نسرين دويكات

أ. قيس شبانة

قررت وزارة التربية والتعليم في دولة فلسطين
تدريس هذا الكتاب في مدارسها بدءاً من العام الدراسي ٢٠١٧/٢٠١٨ م

الإشراف العام

د. صبري صيدم	رئيس لجنة المناهج
د. بصري صالح	نائب رئيس لجنة المناهج
أ. ثروت زيد	رئيس مركز المناهج

الدائرة الفنية

أ. كمال فحماوي	إشراف فني
إبتهاال صوالحة - مازن حشيمة	تصميم فني

د. نبيل الجندي	تحكيم علمي
د. سعيد عساف	مراجعة

أ. رائد شريدة	تحرير لغوي
أ. نيفين حماد	قراءة

د. سميرة التخاله	متابعة المحافظات الجنوبية
------------------	---------------------------

الطبعة الثانية

٢٠١٩ م / ١٤٤٠ هـ

جميع حقوق الطبع محفوظة ©



mohe.ps | mohe.pna.ps | moehe.gov.ps

f.com/MinistryOfEducationWzartAltrbytWaltlym

هاتف +970-2-2983280 | فاكس +970-2-2983250

حي الماصيون، شارع المعاهد

ص. ب 719 - رام الله - فلسطين

pcdc.mohe@gmail.com | pcdc.edu.ps

يتصف الإصلاح التربوي بأنه المدخل العقلاني العلمي التابع من ضرورات الحالة، المستند إلى واقعية النشأة، الأمر الذي انعكس على الرؤية الوطنية المطورة للنظام التعليمي الفلسطيني في محاكاة الخصوصية الفلسطينية والاحتياجات الاجتماعية، والعمل على إرساء قيم تعزز مفهوم المواطنة والمشاركة في بناء دولة القانون، من خلال عقد اجتماعي قائم على الحقوق والواجبات، يتفاعل المواطن معها، ويعي تراكيبها وأدواتها، ويسهم في صياغة برنامج إصلاح يحقق الآمال، ويلامس الأماني، ويرنو لتحقيق الغايات والأهداف.

ولما كانت المناهج أداة التربية في تطوير المشهد التربوي، بوصفها علماً له قواعده ومفاهيمه، فقد جاءت ضمن خطة متكاملة عالجت أركان العملية التعليمية التعلمية بجميع جوانبها، بما يسهم في تجاوز تحديات النوعية بكل اقتدار، والإعداد لجيل قادر على مواجهة متطلبات عصر المعرفة، دون التورط بإشكالية التشتت بين العولمة والبحث عن الأصالة والانتماء، والانتقال إلى المشاركة الفاعلة في عالم يكون العيش فيه أكثر إنسانية وعدالة، وينعم بالرفاهية في وطن نحمله ونعظمه.

ومن منطلق الحرص على تجاوز نمطية تلقّي المعرفة، وصولاً لما يجب أن يكون من إنتاجها، وباستحضار وإعٍ لعدد من المنطلقات التي تحكم رؤيتنا للطالب الذي نريد، وللبنية المعرفية والفكرية المتوخّاة، جاء تطوير المناهج الفلسطينية وفق رؤية محكومة بإطار قوامه الوصول إلى مجتمع فلسطيني ممتلك للقيم، والعلم، والثقافة، والتكنولوجيا، وتلبية المتطلبات الكفيلة بجعل تحقيق هذه الرؤية حقيقة واقعة، وهو ما كان له ليكون لولا التناغم بين الأهداف والغايات والمنطلقات والمرجعيات، فقد تألفت وتكاملت؛ ليكون النتاج تعبيراً عن توليفة تحقق المطلوب معرفياً وتربوياً وفكرياً.

ثمّة مرجعيات تؤطّر لهذا التطوير، بما يعزّز أخذ جزئية الكتب المقرّرة من المنهاج دورها المأمول في التأسيس؛ لتوازن إبداعي خلاق بين المطلوب معرفياً، وفكرياً، ووطنياً، وفي هذا الإطار جاءت المرجعيات التي تم الاستناد إليها، وفي طليعتها وثيقة الاستقلال والقانون الأساسي الفلسطيني، بالإضافة إلى وثيقة المنهاج الوطني الأول؛ لتوجّه الجهد، وتعكس ذاتها على مجمل المخرجات.

ومع إنجاز هذه المرحلة من الجهد، يغدو إجزاء الشكر للطواقم العاملة جميعها؛ من فرق التأليف والمراجعة، والتدقيق، والإشراف، والتصميم، واللجنة العليا أقل ما يمكن تقديمه، فقد تجاوزنا مرحلة الحديث عن التطوير، ونحن واثقون من تواصل هذه الحالة من العمل.

وزارة التربية والتعليم

مركز المناهج الفلسطينية

كانون أول / ٢٠١٧ م

تُعدُّ مرحلة التمكين مرحلة تعليمية مهمة؛ كونها تأتي محصلة للمعارف والمفاهيم التي اكتسبها الطلبة من مرحلة التهيئة، وهي مرحلة تبدأ من الصف الخامس، وتنتهي بالصف العاشر، يميل الطلبة خلال هذه المرحلة إلى الاستقلالية في التفكير، والبحث، والاستقصاء؛ لذا ما ينبغي مراعاته إشراكهم في المناقشة، وحل المشكلات المطروحة التي يتم من خلالها بناء شخصية الطالب القادر على مجاراة التطور العلمي والتكنولوجي الهائل، في عالم مليء بالتغيرات التي تتطلب منه اكتساب روح المبادرة، والتكيف مع مستجدات العصر المتسارعة، بما يضمن له استكشاف المعارف، وفي هذه المرحلة أيضًا، يتم تقديم المحتوى التعليمي بقالب عصري؛ ليكون امتدادًا للمحتوى الرياضي الذي تم في مرحلة التأسيس، ويستمر المنهاج المبني على الأنشطة أصلاً في ربط التعلم بالسياقات الحياتية بطريقة جاذبة محببة؛ لتكوين طالب متفاعل نشط، ينفذ الأنشطة والتمارين المتنوعة المطلوبة منه.

تشكّل العملية التعليمية التعلمية في هذه المرحلة الركيزة الأساسية في تمكين الطالب من المفاهيم والمعارف والمهارات، وتوظيفها ضمن سياقات مناسبة، تقوم على حل مشكلات حياتية، ولا يكون ذلك إلا بالقيام بأنشطة محفزة، ومثيرة للتفكير، تحاكي البيئة الفلسطينية في المجالات الاجتماعية، والاقتصادية، وغيرها، كما تمّ توظيف التكنولوجيا في تنفيذ هذه الأنشطة بطريقة سلسلة جذابة، مع الأخذ بعين الاعتبار التدرج في مستوى الأنشطة، بما يتناسب ومستويات الطلبة، والتعامل مع كل مستوى بما يضمن علاج الضعف، وصولاً لتنمية مهارات التفكير العليا لديهم.

تكوّن هذا الكتاب من أربع وحدات اهتمت بتوظيف الرياضيات في سياقات متعددة، وقد تضمنت هذه الوحدات على الترتيب: الجبر، والهندسة والقياس، والاحتمالات. وقد تناولت الخامسة حل المعادلة التربيعية بطرق التحليل، وإكمال المربع، والقانون العام، وتناولت تحليل الفرق بين مكعبين ومجموعهما، وتناولت الوحدة السادسة متوازي الأضلاع، وقطاع الدائري، والقطع الدائرية، والاسطوانة، والمخروط، وبعض تطبيقاتها العملية، وتناولت الوحدة السابعة النسب المثلثية للزوايا الحادة، وبعض تطبيقاتها، أما الوحدة الثامنة فتناولت الاحتمالات بما فيها متممة الحادث، وبعض تطبيقاتها.

أملنا بهذا العمل، وقد حققنا مطالب العملية التعليمية التعلمية كافة، من خلال منهاج فلسطيني واقعي منظم، وإننا إذ نضع بين أيديكم ثمرة جهد متواصل، وكلنا ثقة بكم معلمين ومشرفين تربويين ومديري مدارس، وأولياء أمور، وخبراء ذوي علاقة في ردد هذا الكتاب بمقترحاتكم، وتغذيتكم الراجعة، بما يعمل على تجويده وتحسينه؛ لما فيه مصلحة الطلبة قادة المستقبل.

المحتويات

الوحدة السابعة

٦٤	النسب المثلثية
٦٦	١-٤ النسب المثلثية للزوايا الحادة (١)
٧١	٢-٤ النسب المثلثية للزوايا الحادة (٢)
٧٥	٣-٤ زوايا الارتفاع والانخفاض
٧٩	٤-٤ تمارين عامة

الوحدة الثامنة

٨٢	الاحتمالات
٨٤	١-٧ احتمال الحادث
٨٨	٢-٧ قوانين الإحتمالات
	٣-٧ احتمال المتممة لحادث واحتمال
٩٣	الفرق بين حادثين
٩٨	٤-٧ تمارين عامة

الوحدة الخامسة

٢	الجبر
٤	١-٦ حل المعادلة التربيعية بالتحليل
٩	٢-٦ حل المعادلة التربيعية بطريقة إكمال المربع
	٣-٦ حل المعادلة التربيعية باستخدام
١٦	القانون العام
٢١	٤-٦ تحليل الفرق بين مكعبين
٢٤	٥-٦ تحليل مجموع مكعبين
٢٧	٦-٥ حل معادلتين خطيتين بمتغيرين
٣٣	٦-٦ تمارين عامة

الوحدة السادسة

٣٥	الهندسة والقياس
٣٧	١-٨ متوازي الأضلاع
٤٢	٢-٨ القطاع الدائري
٤٧	٣-٨ القطعة الدائرية
٥٠	٤-٨ الأسطوانة
٥٦	٥-٨ المخروط
٦٢	٦-٨ تمارين عامة

الجبر

الوحدة

٥



أتأملُ: صورة أحد المدافع التي دافعت عن عكا إبان حملة نابليون،
أبحثُ في كيفية إيجاد الزمن اللازم لعودة قذيفة إلى نفس الارتفاع
الذي أُطلقت منه.

يتوقع من الطلبة بعد الإنتهاء من دراسة هذه الوحدة والتفاعل مع أنشطتها أن يكونوا قادرين على توظيف حلّ المعادلات التربيعيّة، وتحليل مجموع وفرق بين مربعين في الحياة العمليّة من خلال الآتي:

- ١- التعرف إلى الصّورة العامة للمعادلة التربيعيّة.
- ٢- حلّ المعادلة التربيعيّة بطرقٍ مختلفة.
- ٣- التعرف إلى مجموع وفرق مكعبين.
- ٤- تحليل مجموع وفرق بين مكعبين.
- ٥- استخدام حلّ المعادلة التربيعيّة، والتحليل في حلّ مسائلٍ حياتيّة.

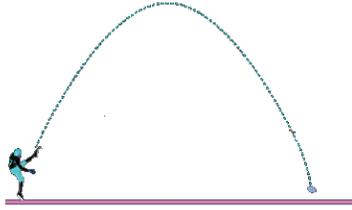


١-٥ حل المعادلة التربيعية بالتحليل



نشاط ١:

تَحظى لعبة كرة القدم بشعبية واسعة في فلسطين، ويمارسها الشباب على نطاقٍ واسع، ومن المهم إتقان اللاعبين التمريرات بأنواعها، ركل لاعب الكرة فكان ارتفاعها عن سطح الأرض في أية لحظة ممثلاً بالعلاقة: $f = -5n^2 + 20n$ ، حيث n يمثل الزمن المارّ بالثواني، فماذا تُسمّى هذه العلاقة؟ وما ارتفاع الكرة عن سطح الأرض عندما: $n = 2$ ث، $n = 4$ ث؟
أرسم شكلاً توضيحياً لمسار الكرة، كما في الشكل المجاور



عندما: $n = 2$ ث، يكون ارتفاع الكرة $= -5(2)^2 + 20 \times 2 = 20$ م
وعندما: $n = 4$ ث، يكون ارتفاع الكرة $= -5(4)^2 + 20 \times 4 = 0$
ألاحظ أنّ: $f = 0$ ، عندما: $n = 4$ ث،

فماذا يُسمّى العدد ٤ بالنسبة إلى هذه المعادلة؟

تعريف: المعادلة التربيعية: هي المعادلة التي يمكن كتابتها على الصورة
 $أس^٢ + ب س + ج = ٠$ ، حيث: $أ، ب، ج \in \mathbb{R}$ ، $أ \neq ٠$ *
وتُسمّى قيم s التي تحقّق المعادلة، حلول (جذور) هذه المعادلة.



نشاط ٢:

أحدّد المعادلة التربيعية في كلّ ممّا يأتي، وأوضّح السبب:

(أ) $٣س^٢ - ٤س + ١ = ٠$ معادلة تربيعية؛ لأنها تحقّق الصورة العامة.

(ب) $١ + س = ٠$ ليست معادلة تربيعية، (لماذا؟)

.....

(ج) $٢ = س(س - ١)$

.....

(د) $٤ = \sqrt{٣س}$

* الأعداد الحقيقية (ح) تشمل الأعداد النسبية والأعداد غير النسبية.

خاصية (١): لأيّ عددين حقيقيين أ، ب، إذا كان $أ \times ب = ٠$ ، فإن $أ = ٠$ ، أو $ب = ٠$ ، أو كليهما يساوي صفر.



نشاط ٣:

أكمل إيجاد قيمة س في كلّ ممّا يأتي:

أ) $٠ = (س + ٥)(س - ١)$

إمّا: $س + ٥ = ٠$ ومنها: $س = -٥$

أو: $س - ١ = ٠$ ومنها: $س = ١$

ب) $٠ = (س - ٨)(س + ٢)$

إمّا: $س + ٢ = ٠$ ومنها: $س = -٢$

أو: $س - ٨ = ٠$ ومنها: $س = ٨$



نشاط ٤:

أكمل حلّ المعادلات الآتية:

أ) $٠ = ٥س^٢ + ٣س$

(لماذا؟)

أحلّل العبارة التربيعية، فينتج أنّ: $س(٥س + ٣) = ٠$

إمّا $س = ٠$ ، أو $٥س + ٣ = ٠$ ومنها: $س = -\frac{٣}{٥}$

ب) $٠ = ٥س^٢ - ٦س$

أحلّل العبارة التربيعية، فينتج أنّ: $س(٥س - ٦) = ٠$

إمّا: $س - ٦ = ٠$ ومنها: $س = ٦$

أو: $٥س = ٠$ ومنها: $س = ٠$

ج) $٠ = ٥س^٢ + ١٣س - ٦$

أحلّل العبارة التربيعية، فينتج أنّ:

$٠ = (س + ٣)(٥س - ٢)$

إمّا: $٥س - ٢ = ٠$ ومنها: $س = \frac{٢}{٥}$

أو: $س + ٣ = ٠$ ومنها: $س = -٣$



أتعلّم: يمكن أحياناً حلّ المعادلة التربيعيّة: أس^٢ + ب س + ج = ٠، عن طريق التحليل ومن ثم استخدام الخاصية (١).



نشاط ٥:

أكمل حلّ المعادلات التربيعيّة الآتية:

(أ) $س^٢ = ٧س$

أكتب المعادلة على الصورة العامّة، فتصبح $س^٢ - ٧س = ٠$

ومنها: $س (س - ٧) = ٠$ (لماذا؟)

إمّا: $س = ٠$ ،

أو: $س - ٧ = ٠$ ، ومنها: $س = ٧$ ،

(ب) $س^٢ - ٥س = ٤$

أكتب المعادلة على الصورة العامّة، فتصبح: $س^٢ - ٥س - ٤ = ٠$

ومنها: $س (س - ٥) = ٤$ (لماذا؟)

إمّا: $س - ٥ = ٠$ ، ومنها: $س = ٥$ ،

أو: $س + ١ = ٠$ ، ومنها: $س = -١$ ،



نشاط ٦:

عددان زوجيّان متتاليان، حاصل ضربهما ١٦٨، فما هذان العددان؟

أفرض أن العدد الأوّل س، فيكون العدد الثاني س + ٢

$س (س + ٢) = ١٦٨$

$س^٢ + ٢س = ١٦٨$ (لماذا؟)

$س^٢ + ٢س - ١٦٨ = ٠$ (لماذا؟)

$س (س + ١٤) = ١٦٨$

إمّا: $س + ١٤ = ٠$ ، ومنها: $س = -١٤$ ،

أو: $س - ١٢ = ٠$ ، ومنها: $س = ١٢$ ،

إذا كانت س = ١٤، فإنّ العدد الزوجي التالي له -١٢.

إذا كانت س = ١٢، فإنّ العدد الزوجي التالي له ١٢.



نشاط ٧:



(استاد) الشهيد فيصل الحسيني
يقع في مدينة الرام، وتأسس سنة
٢٠٠٨م، وتبلغ مساحة الملعب
فيه ٧٠٠٠م^٢، فإذا كان طوله يزيد
عن عرضه بمقدار ٣٠م، فما أبعاد
الملعب؟

أفرض عرض الملعب ص،

فيكون طول الملعب ص + ٣٠

مساحة الملعب = الطول × العرض

(لماذا؟)

ومنها مساحة الملعب = ص (ص + ٣٠) = ٧٠٠٠

ص^٢ + ٣٠ص = ٧٠٠٠

(لماذا؟)

ص^٢ + ٣٠ص - ٧٠٠٠ = ٠

(ص + ١٠٠)(ص - ٧٠) = ٠

إمّا : ص + = ٠ ، ومنها: ص = ١٠٠- (هل نقبل -١٠٠ كطول ضلع؟)

أو : ص - ٧٠ = ٠ ، ومنها: ص = ٧٠

أي أنّ: عرض الملعب = ٧٠م ، وطول الملعب = ٧٠٠م



تمارين ومسائل:

(١) أيّ من المعادلات الآتية تربيعة؟

(أ) $s^2 - 4s + 1 = 0$

(ب) $s(s^2 - 2) = 0$

(ج) $s^2 = (s - 1)^2$

(د) $s^2 + 2 = s + 3$

(٢) أحلّ المعادلات التربيعة الآتية:

(أ) $s^2 - 5(s + 1) = 0$

(ب) $s^2 - 6s + 5 = 0$

(ج) $s^2 - 9 = 0$

(د) $s^2 + 8s = 20$

(هـ) $s^2 + 6s + 16 = 0$

(٣) أجدّ عددين، حاصل ضربهما ١٠٤، ومجموعهما ٢١.

(٤) أجدّ طول قاعدة مثلث مساحته ٢م^٢، علماً بأنّ طول قاعدته يزيد ٣م عن ارتفاعها.

(٥) يعدّ التبريد أحد طرق حفظ الأطعمة، ويعطى عدد البكتيريا في الأطعمة المبردة لكل غرام بالمعادلة $E = 20^2 - 20 + 120$ ، حيث E تمثل درجة الحرارة التي تحفظ بها الأطعمة. ماهي درجة الحرارة التي يكون عندها عدد البكتيريا ١١٥ في الغرام الواحد؟



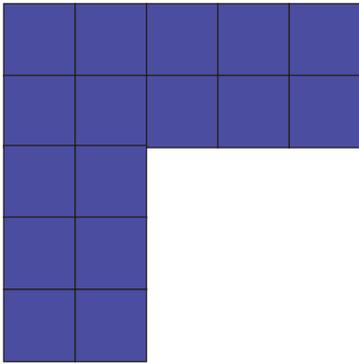


٢-٥ حلّ المعادلة التربيعة بطريقة إكمال المربع



نشاط ١:

كان للعالم الإسلامي الخوارزمي دورٌ بارزٌ في علم الجبر، فقد توصل إلى حلّ المعادلة التربيعة من خلال الهندسة، فكيف أحلّ المعادلة: $س^2 + ٦س = ١٦$ هندسياً؟ أمثّل المقدار $س^2 + ٦س$ ، والمقدار ١٦ هندسياً، كما في الشكل*:

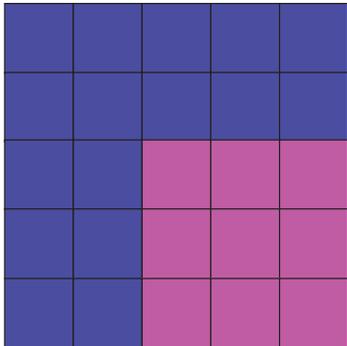


المساحة = ١٦ وحدة مربعة

$س^2$	3	3	3
س			
س			
س			

المساحة = $س^2 + ٦س$ وحدة مربعة

أضيفُ ٩ وحدات مربعة إلى كلّ منهما؛ ليصبح التمثيل كالاتي:



$س^2$	3	3	3
س			
س			
س			

(لماذا؟)

طول ضلع المربع الأول = $س + ٣$ وحدة طول

(لماذا؟)

طول ضلع المربع الثاني = ٥ وحدة طول

أي أنّ: $س + ٣ = ٥$ ، ومنها: $س = ٢$ وحدة طول (لماذا؟)

فكيف يمكن حلّ المعادلة السابقة بطريقة جبرية؟ وهل يمثّل العدد ٨- حلاً لتلك المعادلة؟

* يمكن معرفة الجواب هندسياً من الشكل.

لحلّ المعادلة التربيعيّة المكتوبة على صورة مربعٍ كاملٍ، يمكن استخدامُ التعريف الآتي:

تعريف: إذا كان $s^2 = k$ ، $k \geq 0$ ، فإنّ $s = \pm \sqrt{k}$ ، يُسمّى \sqrt{k} الجذر التربيعيّ الموجب للعدد s ، ويُسمّى $-\sqrt{k}$ الجذر التربيعيّ السالب للعدد s .



نشاط ٢:

أكمل حلّ المعادلات الآتية:

(أ) $s^2 = 25$

$s = \pm \sqrt{25}$ ، ومنها: $s = \pm 5$

(ب) $(s - 4)^2 = 81$

$s - 4 = \pm 9$ (لماذا؟)

إما: $s - 4 = 9$ ، ومنها: $s = 13$

أو: $s - 4 = -9$ ، ومنها: $s = -5$

(ج) $(s - 2)^2 = 49 - 4$

$(s - 2)^2 = 45$

$s - 2 = \pm \sqrt{45}$ (لماذا؟)

إما: $s - 2 = \sqrt{45}$ ، ومنها: $s = 2 + \sqrt{45}$ (لماذا؟)

أو: $s - 2 = -\sqrt{45}$ ، ومنها: $s = 2 - \sqrt{45}$

قد يتعذر أحياناً استخدامُ طريقة التحليل إلى العوامل في حلّ المعادلات التربيعيّة، فيتم اللجوء

إلى كتابة المعادلة بالصورة $(s \pm h)^2 = k$ ، $k < 0$ ، هـ عدد حقيقي باستخدام طريقة إكمال

المربع؛ وذلك بإضافة $\left(\frac{\text{معامل } s}{2}\right)^2$ إلى طرفيّ المعادلة، عندما يكون معامل $s^2 = 1$

مثال ١:



أحلّ المعادلة التربيعيّة: $s^2 + 6s - 2 = 0$

أكتب المعادلة على الصورة: $s^2 + 6s + 2 = 2$

أجد: $\left(\frac{\text{معامل } s}{2}\right) = \left(\frac{6}{2}\right) = (3)$



أضيفُ مربّعه إلى طرفي المعادلة، فينتج:

$$س^2 + 6س + 2 = (س + 3)^2 + 2$$

$$س^2 + 6س + 9 + 2 = 9 + 6س + 9 + 2$$

$$(ألاحظ أنّ الطرف الأيمن أصبح مربّعاً كاملاً) \quad 11 = (س + 3)^2$$

$$\sqrt{11} \pm = (س + 3)$$

$$\text{إمّا: } (س + 3) = \sqrt{11} \text{ ، ومنها: } س = \sqrt{11} - 3$$

$$\text{أو: } (س + 3) = -\sqrt{11} \text{ ، ومنها: } س = -\sqrt{11} - 3$$



نشاط ٣:

أكمل حلّ المعادلات الآتية:

$$(أ) \quad س^2 - 10س + 25 = 11 \quad \text{ألاحظ أنّ: } 5 \times 2 = 10$$

$$11 = (س - 5)(س - 5)$$

$$11 = (س - 5)^2$$

$$\sqrt{11} \pm = (س - 5)$$

(لماذا؟)

$$\text{ومنها: } س = 5 \pm \sqrt{11}$$

$$(ب) \quad س^2 + 3س - 10 = 0 \quad \text{أكتب المعادلة على الصورة } س^2 + 3س + 10 = 0$$

أجد (معامل $\frac{3}{2}$ ص) = $(\frac{3}{2})$ ، وأضيف مربّعه إلى طرفي المعادلة، فتصبح:

$$س^2 + 3س + \frac{9}{4} + 10 = (\frac{3}{2}س + \frac{9}{4}) + 10$$

$$س^2 + 3س + \frac{9}{4} + 10 = \frac{9}{4} + 3س + 10 + \frac{9}{4}$$

$$\dots = \frac{9}{4} + 3س + 10 + \frac{9}{4}$$

$$\frac{49}{4} = (\frac{3}{2}س + \frac{7}{2})^2$$

(لماذا؟)

$$\frac{7}{2} \pm = (\frac{3}{2}س + \frac{7}{2})$$

$$\text{إمّا: } (\frac{3}{2}س + \frac{7}{2}) = \frac{7}{2} \text{ ، ومنها: } س = \frac{3}{2} - \frac{7}{2} = -2$$

$$\text{أو: } (\frac{3}{2}س + \frac{7}{2}) = -\frac{7}{2} \text{ ، ومنها: } س = -\frac{7}{2} - \frac{3}{2} = -5$$





نشاط ٤:

أجد حلّ المعادلة $٢س + ٥س - ٣ = ٠$.

أقسم جميع الحدود على ٢ لأجعل (معامل س = ١)، فتصبح المعادلة بالصورة:

$$٠ = \frac{٣}{٢} - س + \frac{٥}{٢}س$$

أكتب المعادلة على الصورة $٢س + \frac{٥}{٢}س = \frac{٣}{٢}$

أجد: $\left(\frac{\text{معامل س}}{٢}\right) = \frac{٥}{٤}$ (لماذا؟)

أضيف مربعه إلى طرفي المعادلة، فتصبح:

$$٢س + \frac{٥}{٢}س + \left(\frac{٥}{٤}\right)^٢ = \frac{٣}{٢} + \left(\frac{٥}{٤}\right)^٢$$

$$٢س + \frac{٥}{٢}س + \frac{٢٥}{١٦} = \frac{٣}{٢} + \frac{٢٥}{١٦}$$

$$٢س + \frac{٥}{٢}س + \frac{٤٩}{١٦} = \frac{٢٥}{١٦} + \frac{٣}{٢}$$

$$\frac{٤٩}{١٦} = ٢(س + \dots)$$

أضف $\pm \left(\frac{٧}{٤}\right)$ (لماذا؟)

إما: $\left(\frac{٧}{٤}\right) = \left(\frac{٥}{٤} + س\right)$ ، ومنها: $س = \frac{٧}{٤} - \frac{٥}{٤} = \dots$

أو: $\left(\frac{٧}{٤}\right) = \left(\frac{٥}{٤} + س\right)$ ، ومنها: $س = \frac{٧}{٤} - \frac{٥}{٤} = \dots$

أناقش: حلّ كلٌّ من أيمن وهبة المعادلة التربيعيّة: $س^2 + 8س - 20 = 0$ = صفر باستخدام إكمال المربع كما يأتي، أيهما قام بالحل بطريقة صحيحة؟



حلّ هبة:

$$\begin{aligned} 0 &= 20 - 8س + س^2 \\ 20 &= 8س + س^2 \\ 20 &= 2(4) + 8س + س^2 \\ 20 &= 2(س + 4) \\ \sqrt{20} \pm &= (س + 4) \\ 4 - \sqrt{20} &= س \text{ ومنها إمّا: } \\ 4 - \sqrt{20} &= س \text{ أو: } \end{aligned}$$

حلّ أيمن:

$$\begin{aligned} 0 &= 20 - 8س + س^2 \\ 20 &= 8س + س^2 \\ 20 + 2(4) &= 2(4) + 8س + س^2 \\ 36 &= 2(س + 4) \\ 6 \pm &= (س + 4) \\ 2 &= س \text{ ومنها إمّا: } \\ 10 &= س \text{ أو: } \end{aligned}$$



نشاطه:



تتوسط دوار نافورة ماءٍ دائريّةٌ كما في الشكل المجاور، وتحيط بها منطقةٌ خضراءٍ مساحتها 8π م²، فما طول نصف قطر الدائرة الخارجية المحيطة بالمنطقة الخضراء، الذي يزيد 1م عن قطر النافورة؟
أعتبر نصف قطر دائرة النافورة r

فيكون نصف قطر الدائرة الخارجية المحيطة بالمنطقة الخضراء $1 + r$ (لماذا؟)
مساحة المنطقة المحيطة بالنافورة = مساحة الدائرة الخارجية المحيطة بالمنطقة الخضراء - مساحة دائرة النافورة

$$8\pi = \pi(1+r)^2 - \pi r^2$$

$$8 = (1+r)^2 - r^2 \text{ (لماذا؟)}$$

$$8 = 1 + 2r + r^2 - r^2$$

$$7 = 2r + 1 \text{ (لماذا؟)}$$

$$r = \frac{4}{2} = 2 \text{ (لماذا؟)}$$

$$r^2 \left(\frac{2}{3} \right) + \frac{7}{3} = r^2 \left(\frac{2}{3} \right) + r \frac{4}{3} + r^2$$

$$\frac{4}{9} + \frac{7}{3} = \frac{4}{9} + r \frac{4}{3} + r^2$$

$$\frac{25}{9} = r^2 \left(\frac{2}{3} + r \right) \quad (\text{لماذا؟})$$

$$\frac{5}{3} \pm = \left(\frac{2}{3} + r \right) \sqrt{\frac{25}{9}} \quad \pm = \left(\frac{2}{3} + r \right)$$

$$\text{إما } \frac{5}{3} = \left(\frac{2}{3} + r \right) \text{ ، ومنها } r = \dots \text{ م}$$

$$\text{أو } \frac{5}{3} = \left(\frac{2}{3} + r \right) \text{ ، ومنها } r = \frac{7}{3} \text{ م (هل تقبل قيمة ر هذه؟)}$$

نصف قطر النافورة = ١ م

ومنها نصف قطر الدائرة الخارجية المحيطة بالمنطقة الخضراء = $\dots = ١ + \dots = \dots$ م



تمارين ومسائل:

(١) أحلُّ كلاً من المعادلات الآتية:

$$\text{أ) } ٠ = ٣٦ - ٢$$

$$\text{ب) } \frac{٤}{٩} = ٢ \left(\frac{١}{٣} + س \right)$$

$$\text{ج) } ١٣ = ١٦ + ٨س + ٢$$

$$\text{د) } ٠ = ٥ - ٢س٣$$

(٢) أستخدم طريقة إكمال المربع لأجد جذور المعادلات الآتية:

$$\text{أ) } ٤ - = ص٥ - ٢$$

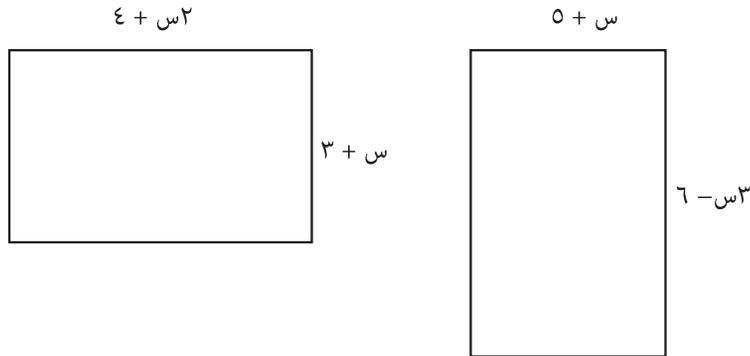
$$\text{ب) } ٠ = ٤ + ٨س + ٢$$

$$\text{ج) } ٧ = ٢ + ٣س + ٢$$

$$\text{د) } ٧س = ٣ + ٢س$$

$$\text{هـ) } ٠ = ١ + ٣س - ٢س٢$$

(٣) ما قيمة/ قيم س التي تجعل مساحتيّ المستطيلين الموضّحة أبعادهما أدناه متساوية؟



(٤) إذا كانت المساحة (س) التي يغطيها جهاز العرض الضوئي على حائط، تُعطى بالمعادلة:

س = ١٦، ف٢، حيث: ف تمثل البعد الأفقي بين جهاز العرض والحائط.

ما البعد عن الحائط الذي يجب أن يوضع عليه جهاز العرض، حتى تكون المساحة على الحائط ٤م٢؟



٣-٥ حلّ المعادلة التربيعيّة باستخدام القانون العام



نشاط ١:

بلغت نسبة الادّخار في فلسطين ٦,١ ٪ عام ٢٠١٥م، وفق التقرير السنوي لسلطة النقد الفلسطينية، فإذا كانت قيمة مبلغ بعد استثماره لمدة سنتين تُعطى بالمعادلة: $1000(1+s)^2$ ، حيث: s تمثل قيمة الفائدة. أجد s إذا كان المبلغ في نهاية السنتين ١١٠٠ ديناراً.

تكون s في نهاية السنتين = ١١٠٠

ومنها: $1000(1+s)^2 = 1100$ ، أقسم طرفي المعادلة على ١٠٠٠، فتصبح:

$$(1+s)^2 = 1,1$$

ومنها: $(1+s) = \pm \sqrt{1,1}$

إمّا: $1+s = \sqrt{1,1}$ ، ومنها: $s = \sqrt{1,1} - 1$

أو: $1+s = -\sqrt{1,1}$ ، ومنها: $s = -\sqrt{1,1} - 1$ (تُهمل، لماذا؟)

وهل يمكن تحديد عدد الحلول للمعادلة التربيعيّة دون حلّها؟

تعريف: يُسمّى المقدار $ax^2 + bx + c = 0$ معيّز المعادلة التربيعيّة:

أ $s^2 + bs + c = 0$ ، ويُحدّد معيّز المعادلة التربيعيّة عدد الحلول (الجذور) لتلك المعادلة.



نشاط ٢:

أكمل إيجاد المميز، وجذور المعادلة: $s^2 + 5s + 4 = 0$ (إن أمكن)

$a = 1$ ، $b = 5$ ، $c = 4$

المميز = $b^2 - 4ac = 5^2 - 4 \times 1 \times 4 = 25 - 16 = 9$ ؛ أي أنّ: المميز موجب.

لإيجاد جذور المعادلة $s^2 + 5s + 4 = 0$

أحلّل العبارة فتصبح: $(s+4)(s+1) = 0$

إمّا: $s = -4$ ، ومنها: $s = -1$

أو: $س + ١ = ٠$ ، ومنها: $س = ٠٠٠$

ألاحظ أنّ المميز موجب، وأن للمعادلة التربيعية جذرين مختلفين.

أتعلم: إذا كان مميّز المعادلة التربيعية (أ $س^2 + ب س + ج = صفر$) موجباً، فإنّ لهذه المعادلة جذرين حقيقيّين مختلفين.



نشاط ٣:

أكمل إيجاد المميّز وجذور المعادلة: $٤ص^2 + ١٢ص + ٩ = ٠$

أ = ٤، ب = ١٢، ج = ٩

المميز = $ب^2 - ٤أج = ١٢^2 - ٤(٩) = ١٤٤ - ٣٦ = ١٠٨$

لإيجاد جذور المعادلة: $٤ص^2 + ١٢ص + ٩ = ٠$

أحلّ العبارة التربيعية فتصبح المعادلة بالصورة: $(٢ص + ٣)^2 = ٠$ (لماذا؟)

أمّا: $٢ص + ٣ = ٠$ ، ومنها: $ص = ٠٠٠$

أو: $٢ص + ٣ = ٠$ ، ومنها: $ص = ٠٠٠$

ألاحظ أنّ جذريّ المعادلة التربيعية متساويان.

أتعلم: إذا كان مميّز المعادلة التربيعية (أ $س^2 + ب س + ج = ٠$) يساوي صفر، فإنّ لهذه المعادلة جذراً واحداً مكرراً.



نشاط ٤:

أكمل إيجاد المميّز وجذور المعادلة: $س^2 - ٢س + ٣ = ٠$

أ = ١، ب = -٢، ج = ...

المميز = $ب^2 - ٤أج = (-٢)^2 - ٤(٣) = ٤ - ١٢ = -٨$ (لماذا؟)

* أحلّ المعادلة بإكمال المربع، فينتج أنّ: $س^2 - ٢س + ١ = ٢ - ١$

ومنها: $س^2 - ٢س + ١ = ١ - ١$

: $(س - ١)^2 = ٠$

: $(س - ١) \pm \sqrt{٠} = ٠$

لكن $\sqrt{٠} = ٠$ عدد غير حقيقيّ؛ أي: أنّه لا يوجد حلّ في مجموعة الأعداد الحقيقية.



أتعلم: إذا كان ممیز المعادلة التربيعية (أ س^٢ + ب س + ج = صفر) سالباً، فلا يوجد لها جذور حقيقية (لا يوجد لها حل في مجموعة الأعداد الحقيقية).



نشاطه:

أكمل إيجاد ممیز المعادلات الآتية، وأبين عدد جذورها:

$$(أ) \quad ٠ = ٤ + ٥س - ٢س٣$$

$$أ = ٣، ب = -٥، ج = ٤$$

$$\text{المميز} = ب^2 - ٤أج = (-٥)^2 - ٤ \times ٣ \times ٤ = ٢٥ - ٤٨ = \dots$$

وبما أن المميز سالب، فإن عدد جذور المعادلة يساوي

$$(ب) \quad ٠ = ١ + ٤س - ٢س٤$$

$$أ = ٤، ب = -٤، ج = \dots$$

$$\text{المميز} = ب^2 - ٤أج = (-٤)^2 - ٤ \times ٤ \times \dots = \dots$$

وبما أن المميز, فإن عدد جذور المعادلة يساوي

$$(ج) \quad ٠ = ١ - ٤ص - ٣ص٢$$

$$أ = \dots، ب = \dots، ج = -١$$

$$\text{المميز} = ب^2 - ٤أج = (\dots)^2 - ٤ \times (\dots) \times (-١) = \dots$$

$$\dots = ١٦ - ١٢ = \dots$$

وبما أن المميز موجب، فإن عدد جذور المعادلة يساوي

أناقش: أيهما أخطأ في إيجاد ممیز المعادلة التربيعية حسام أم سعاد؟ أفسر إجابتي.



حلّ سعاد:

$$٥ص^٢ - ٣ص = ٢$$

$$٥ص^٢ - ٣ص - ٢ = ٠$$

$$\text{المميز} = ب^2 - ٤أج = ٤ - ٤٠ = -٣٦$$

$$= (-٣٦) - ٤ \times ٥ \times ٢ = -٩٦$$

وبما أن المميز موجب، فإنه يوجد للمعادلة جذران حقيقيان.

حلّ حسام:

$$٥ص^٢ - ٣ص = ٢$$

$$\text{المميز} = ب^2 - ٤أج = ٤ - ٤٠ = -٣٦$$

$$= (-٣٦) - ٤ \times ٥ \times ٢ = -٩٦$$

$$= -٣٦ - ٤٠ = -٧٦$$

لا يوجد حلول حقيقية للمعادلة.

تعريف: يمكن إيجاد جذور المعادلة التربيعية المكتوبة بالصورة:

أ²س + ب س + ج = ٠ ، أ ≠ ٠ (إن أمكن حلها) باستخدام القانون العام

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^2 - ٤أج}}{٢أ}$$



نشاط ٦:

أكمل حلّ المعادلة التربيعية الآتية، مستخدماً القانون العام:

$$١,٥س + ٢,٥س^2 = ٠$$

$$٠ = ١,٥ - ٢,٥س - ٢س^2$$

$$٢س^2 - ٥س - ٣ = ٠ \quad (\text{لماذا؟})$$

$$أ = ٢ ، ب = ٥ ، ج = -٣$$

$$\text{ومنها: المميّز} = (-٥)^2 - ٤(٢)(-٣) = ٤٩$$

$$٢٥ + ٢٤ = ٤٩$$

$$س = \frac{-(-٥) \pm \sqrt{٤٩}}{٢ \times ٢}$$

$$\text{ومنها: } س = \frac{٥ \pm ٧}{٤}$$

$$\text{إمّا: } س = ١ ، \text{ أو: } س = -٠,٥$$



نشاط ٧:

إذا كان جذرا المعادلة $س^2 + ٢(١ + م)س + م^2 = ٠$ متساويين، أكمل إيجاد قيمة الثابت م:

$$\text{مميز المعادلة التربيعية} = ٠ \quad \text{أي أن } ب^2 - ٤أج = ٠ \quad (\text{لماذا؟})$$

$$٠ = ٤(١ + م)^2 - ٤م^2 = ٤(١ + ٢م + م^2) - ٤م^2 = ٤ + ٨م$$

$$\text{ومنها: } ٤ + ٨م = ٠ \Rightarrow ٨م = -٤$$

$$٨م = -٤ \Rightarrow م = -٠,٥$$

$$٨م = -٤$$

$$\text{ومنها } م = -٠,٥$$



تمارين ومسائل:

- (١) أجد مميّز كلٍّ من المعادلات الآتية، وأحدّد عدد جذورها:
أ) $٥س^٢ + ٣س - ١ = ٠$
ب) $٤ = ١٣س - س^٢$
ج) $٤٠ص = ٢٥ + ١٦ص^٢$

- (٢) أستخدم القانون العام لحلّ كلٍّ من المعادلات الآتية (إنّ أمكن):
أ) $٢ص^٢ + ١ = ٦ص$
ب) $٥- = ١٢س - ٤س^٢$
ج) $١٦ = ٦س + س^٢$
د) $١٠ - س = ٢٥س + ١١$

(٣) ما قيمة ك التي تجعل جذريّ المعادلة: $٣س^٢ - ٦س + ك = ٠$ ، متساويين؟

(٤) أحلّ المعادلة: $٢ص^٢ = ٢- - ٥ص$ بطريقتين.

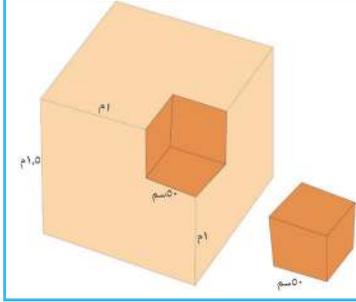
(٥) يسدد لاعبو كرة السلة كراتهم نحوى المرمى بمسار يمكن تمثيله بالمعادلة:
 $ع = ٩س^٢ + ٨١س + ٥$ حيث ع تمثل ارتفاع الكرة بالمتري بعد س ثانية. أحسب الزمن اللازم لتكون الكرة على ارتفاع ٣م.



٤-٥ تحليل الفرق بين مكعبين



نشاط ١:



يعتبر الحصول على مسكن مناسب من المتطلبات الأساسية للأفراد، تُشيرُ معطياتُ جهاز الإحصاء المركزي إلى ازديادٍ في البناء العمراني عام ٢٠١٦م. وفي ظل الاستخدام المتزايد للحجر الطبيعي في البناء؛ يُراد قطع قاعدة عمود مكعبة الشكل طول حرفها ٥٠سم من صخرة مكعبة الشكل طول حرفها ١,٥م، كما في الشكل المجاور، ما حجم الصخرة بعد قطع هذه القاعدة؟

حجم الصخرة بعد قطع القاعدة = حجم الصخرة - حجم قاعدة العمود

$${}^3(٠,٥) - {}^3(١,٥) =$$

$${}^2م٣,٢٥ = \dots - ٣,٣٧٥ =$$

هل يمكن حساب حجم الصخرة بطريقة أخرى؟



نشاط ٢:

أكمل إيجاد ناتج ضرب المقادير الجبرية الآتية:

$$(أ) (س - ٢)(٤ + س٢ + س٤) = (س٢ + س٤ + س٨) - (٤س + ٨س٢ + ١٦س٤) =$$

$$= ٨س٢ + ٨س٤ - ٤س - ٨س٢ - ١٦س٤ - \dots =$$

$$= ٨س٤ - ٤س - ٨س٤ =$$

$$(ب) (٢س - ص)(٤س٢ + ٢س٤ + ص) =$$

$$= ٨س٢ + ٨س٤ + ٢س٤ - (٤س٢ + ٨س٤ + ٢س٤) =$$

$$= ٨س٢ + ٨س٤ + ٢س٤ - ٤س٢ - ٨س٤ - ٢س٤ =$$

$$= ٨س٢ + ٨س٤ + ٢س٤ - ٤س٢ - ٨س٤ - ٢س٤ =$$

$$= ٨س٢ - ٤س٢ = ٤س٢$$



أنعلم: يُسمّى المقدار الجبري $أ - ب$ فرقاً بين مكعبين، ويتمّ تحليله؛ وفقاً للقاعدة:

$$أ^٣ - ب^٣ = (أ - ب) (أ^٢ + أب + ب^٢)$$


نشاط ٣:

أكمل تحليل المقادير الجبرية الآتية:

$$(١) \quad ٢٧ - س^٣ = س^٢(٣) - س^٢(٣) = (٣ - س)(٩ + ٣س + س^٢)$$

$$(٢) \quad ١٢٥ - أ^٣ = ٣(٤٠٠٠) - أ^٣(٥) = (٥ - أ)(٥٠٠ + ١٠٠أ + أ^٢)$$

$$(٣) \quad ٨ - ٦٤س^٢ = ٢(٢) - ٢(٤س) = (٤س - ٢)(٤س + ٢)$$

$$(٤) \quad ١٢٥ص - ٨ص^٢ = ٥(٢٥ص) - ٢(٤ص) = (٢٥ص - ٤)(٥ص + ٤)$$

$$(٥) \quad (٥س - ٤٠٠٠) = (٢٥س^٢ + ١٠س + ٤ص)$$

$$(٥) \quad ٨أ - ٣٤٣ = ٢(٤) - ٢(٧) = (٧ - ٤أ)(٧ + ١٤أ + ٤٠٠٠)$$



نشاط ٤:

يضمّ مصنعٌ للزيوت خزّان زيتٍ مكعّب الشكل، مملوءاً بالزيت، طولُ حرفه ٢م، فإذا تمّ تعبئة ٢٧ عبوة مكعّبة من الخزّان، طولُ حرف كلٍّ منها ٣سم، أجد كمية الزيت المتبقية في الخزّان، باستخدام تحليل الفرق بين مكعبين.

$$\text{حجم الخزّان} = (\text{طول ضلع الخزّان})^٣ = (٢)^٣$$

$$\text{حجم العبوة} = (\text{طول الضلع})^٣ = (٣)^٣$$

$$\text{كمية الزيت المتبقية في الخزّان} = \text{حجم الخزّان} - \text{حجم العبوات الـ ٢٧}$$

$$= (٢)^٣ - ٢٧ \times (٣)^٣$$

$$= (٢)^٣ - (٣)^٣$$

$$= (٢)^٣ - (٩)^٣ \quad (\text{لماذا؟}) *$$

$$= (٢ - ٩)(٢ + ٩ + ٨١)$$

$$= (١, ١)(٤ + ٨, ١ + ٨١) \quad \text{ومنها: كمية الزيت المتبقية في الخزّان}$$

$$= (١, ١)(٦١, ٦) = ٦٠٠٠ م^٣$$

* (س ص) = (ص ص) = (س ص)



تمارين ومسائل:

(١) أكتب كلاً من الآتية في أبسط صورة:

$$(أ) (1 - s^3)(1 + s^3 + s^6)$$

$$(ب) (l - \frac{1}{4})(\frac{1}{4} + l + l^2)$$

$$(ج) (n^2 - 1)(n^2 + n + 1)$$

(٢) أحلل المقادير الآتية إلى عواملها الأولية:

$$(أ) s^3 - 64$$

$$(ب) 8 - 216s^3$$

$$(ج) s^3 - \frac{27}{125}$$

$$(د) 16 - 2l^3$$

(٣) أستخدم تحليل الفرق بين مكعبين في إيجاد قيمة كل من الآتية:

$$(أ) (5 - 7)(5 + 7 + 5 \times 7 + 7^2)$$

$$(ب) (\frac{5}{6} - \frac{2}{3})(\frac{5}{6} + \frac{2}{3} + \frac{5}{6} \times \frac{2}{3})$$

$$(ج) (17 - 20)(17 + 20 + 17 \times 20)$$

(٤) إذا كان $s = ص + ٤$ ، $s^2 + ص + ص^2 = ٤٩$ ، فما قيمة $s^3 - ص^3$ ؟

(٥) تشتهر قباطية بمقالع الحجر (المحاجر) ومناشير قص الحجر، يريد صاحب منشار القص من قطعة صخر مكعبة الشكل طول ضلعها ١,٨م لانتاج ٦٤ قطعة حجر مكعبة الشكل طول حرف كل منها ٤٠سم، أجد بطريقتين الحجم المتبقي من قطعة الصخرة بعد انتاج القطع المشار إليها.



٥-٥ تحليل مجموع مكعّين



نشاط ١:

تشتهر مدينة نابلس بصناعة الصابون منذ ما يزيد عن ألف عام، يقوم مصنعُ بصناعة الصّابون في قوالبٍ مكعّبةٍ، طولُ حرفها ٤ سم، و٢ سم، فإذا أراد المصنّعُ تصميمَ قالبٍ جديدٍ مكعّبٍ الشكل، حجمه يساوي مجموع حجمي قالبين قديمين مختلفين، ما حجم هذا القالب؟
حجم القالب الجديد = $(٤)^٢ + (٢)^٢ = ٦٤ + ٠٠٠٠ = ٠٠٠٠$ سم^٣، وهل يمكن حساب حجم هذا القالب بطريقة أخرى؟



نشاط ٢:

أكمل تحليل المقدار: " $أ^٣ + ب^٣$ " ، باستخدام قانون الفرق بين مكعبين:

أكتب المقدار $أ^٣ + ب^٣$ على الصورة: $أ^٣ - (ب^-)$

$$أ^٣ - (ب^-) = (أ^٣ - (ب^-)) = (أ + ب^-) (أ^٢ - (ب^-) + (ب^-)^٢)$$

$$= (أ + ب^-) (أ^٢ - (ب^-) + (ب^-)^٢)$$

أتعلّم: يُسمّى المقدار الجبري $أ^٣ + ب^٣$ مجموعَ مكعّين، وتم تحليله وفقاً للقاعدة: $أ^٣ + ب^٣ = (أ + ب^-) (أ^٢ - (ب^-) + (ب^-)^٢)$.



نشاط ٣:

أكمل تحليل المقادير الجبرية الآتية:

أ) $ص^٣ + ٦٤ = ص^٣ + ٤^٢ = (ص + ٤) (ص^٢ - ٤ص + ١٦)$

ب) $٨ + م^٣ = ٢^٢ + م^٣ = (٢ + م^-) (٢^٢ - (م^-) + (م^-)^٢)$

ج) $٣٤٣ + أ^٣ = ٧^٢ + أ^٣ = (٧ + أ^-) (٧^٢ - (أ^-) + (أ^-)^٢)$

د) $١ + س^٣ = ١ + س^٣ = (١ + س^-) (١^٢ - (س^-) + (س^-)^٢)$



نشاط ٤:

خزان ماء إسمنتي على شكل متوازي مستطيلات، عرضُ قاعدته (س + ص) متر، وارتفاعُ الماء فيه ١ م، يُراد ضخُّ كامل الماء الموجود فيه لملئ خزّانين مكعبيّ الشكل، طول حرف الأوّل س متر، وطولُ حرف الثاني ص متر. أجدُ بدلالة س، ص المقدار الجبريّ الذي يمثّل طولَ قاعدةِ الخزان الإسمنتي.

$$\text{حجم الماء في الخزّانين المكعبين} = \text{س}^2 + \text{ص}^2 \quad (\text{لماذا؟})$$

$$\text{حجم الماء في الخزان الإسمنتي} = \text{مساحة القاعدة} \times \text{الارتفاع}$$

$$= \text{طول القاعدة} \times \text{عرضها} \times \text{الارتفاع}$$

$$= \text{طول القاعدة} \times (\text{س} + \text{ص}) \quad (١)$$

$$\text{حجم الماء في الخزّانين المكعبين} = \text{حجم الماء في الخزان الإسمنتي}$$

$$\text{س}^2 + \text{ص}^2 = (\text{س} + \text{ص}) \times \text{طول القاعدة}$$

$$(\text{س} + \text{ص}) (\text{س} - \text{ص}) = (\text{س} + \text{ص}) \times \text{طول القاعدة}$$

أقسّم الطرفين على

ومنها: المقدار الجبري الذي يعبر عن طول قاعدة الخزان الإسمنتي = $(\text{س}^2 - \text{ص}^2 + \text{ص} + \text{س})$



تمارين ومسائل:

١) أحلل المقادير الآتية إلى عواملها الأولية:

$$\text{أ) } ١ + ٣ع$$

$$\text{ب) } ٢٧ + ٦٤ك$$

$$\text{ج) } ١ + \frac{٢١٦}{٣ب}$$

$$\text{د) } ١٩٢ + ٣ع$$

٢) أجد بطريقتين قيمة كل من الآتي:

$$\text{أ) } \left(\frac{١}{٩} + \frac{١}{٦} - \frac{١}{٤} \right) \left(\frac{١}{٣} + \frac{١}{٢} \right)$$

$$\text{ب) } ٢ \left(\frac{٣}{٤} \right) + ٢ \left(\frac{١}{٢} \right)$$

٣) إذا كان $س = ٢ - ص$ ، $س + ص = ١$ ، أحسب قيمة $س^٣ - ص^٣$.

٤) أكتب المقدار الآتي بأبسط صورة: $س^٣ - ص^٣ - س^٢ + ص^٢$.

٥) تخطط مديرة مدرسة لاستبدال خزاني مياه مكعبي الشكل طول ضلع الأول $١,٥$ م، وطول ضلع الثاني ١ م؛ بخزان يتسع لمقدار ما يتسع له الخزانان معاً من الماء. أجد بطريقتين حجم هذا الخزان.



٦-٥ حلّ معادلتين خطّيتين بمتغيرين



نشاط ١:



تُعَدُّ معالجة المياه العادمة من طرق توفير المياه للزراعة، فإذا قامت محطة تنقية بضخّ المياه المعالَجة عبر أنبوبين، كما في الشكل المجاور، بحيث يزيد معدل ضخّ الأنبوب (أ) ٥٠ لتراً / د عن معدل الضخّ في الأنبوب (ب)، فإذا ضخّ الأنبوبان معاً بمعدل ٣٣٠ لتراً/د، فما معدل ضخّ الأنبوب (ب)؟

أفرضُ أنّ معدّل الضخّ في الأنبوب (ب) = س لتر / د

فيكون معدّل الضخّ في الأنبوب (أ) = س + ٥٠ لتر / د

أحلّ المعادلة س + (س + ٥٠) = ٣٣٠

٢س + ٥٠ = ٣٣٠، ومنها س = ١٤٠ لتر/د، وهل يمكن حساب معدّل الضخّ هذا بطريقة أخرى؟

أذكر: تُسمّى عملية إيجاد جميع قيم س التي تحقّق المعادلة عمليّة حلّ المعادلة، وتُسمّى مجموعة قيم س التي تحقّق المعادلة مجموعة الحلّ للمعادلة.



أولاً- حلّ معادلتين خطّيتين بطريقة التعويض:

يمكن حلّ معادلتين خطّيتين بمتغيرين بطريقة التعويض، من خلال الخطوات الآتية:

- اختارُ إحدى المعادلتين، ثم أجعلُ أحد المتغيرين فيها موضوعاً للقانون*.

- أعوضُ قيمة المتغير موضوع القانون في المعادلة الأخرى.

- أحلّ المعادلة الناتجة التي تضم متغيراً واحداً.

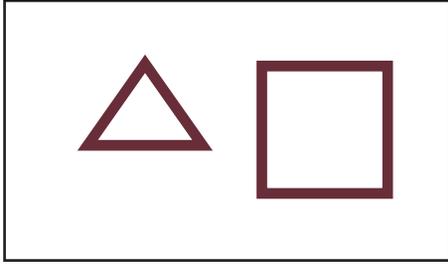
- أعوضُ قيمة هذا المتغير الناتجة في إحدى المعادلتين لأجد قيمة المتغير الثاني.

* التعبير عن أحد المتغيرين في معادلة بدلالة المتغير الآخر.

مثال ١:



يستخدم محلّ لبيع الحلويات أحبال زينة مضيئة، طول كلّ منها ١٤٠ سم، بحيث يقسم الحبل إلى مربع ومثلث متساوي الأضلاع، فإذا كان طول ضلع المربع يزيد ٧ سم عن طول ضلع المثلث. فما طول ضلع كلّ من المربع والمثلث؟



أرسم رسماً توضيحياً كما في الشكل المجاور، وأعتبر أنّ طول ضلع المثلث = س، وأنّ طول ضلع المربع = ص ومنها محيط المثلث = ٣س، محيط المربع = ٤ص طول حبل الزينة = محيط المربع + محيط المثلث = ١٤٠

$$٤ص + ٣س = ١٤٠ \dots\dots\dots (١)$$

$$\text{طول ضلع المربع} = ٧ + \text{طول ضلع المثلث}$$

$$\text{ومنها: } ص = ٧ + س \dots\dots\dots (٢)$$

الأحظ أنّ ص هي موضوع القانون، وبتعويض قيمة ص من المعادلة (٢) في المعادلة (١)، ينتج:

$$٤ص + ٣س = ١٤٠$$

$$٤(٧ + س) + ٣س = ١٤٠$$

$$٢٨ + ٧س = ١٤٠ \text{ (لماذا؟)}$$

$$س = ١٦ \text{ سم وهي طول ضلع المثلث}$$

ولإيجاد قيمة ص، نعوض قيمة س في المعادلة (٢)،

$$\text{ومنها } ص = ٢٣ \text{ سم وهي طول ضلع المربع}$$

للتحقّق من صحة الحلّ، نعوض قيم س، ص في إحدى المعادلتين.

$$\text{ومنها: } ٤(٢٣) + ٣(١٦) = ٩٢ + ٤٨ = ١٤٠$$



نشاط ٢:

أكمل حلّ المعادلتين الآتيتين بطريقة التعويض:

$$(١) \dots\dots\dots ١٦ = ٣ص + ٢س$$

$$(٢) \dots\dots\dots ٢ = ٣ص - ٢س$$

أجعل ص موضوع القانون في المعادلة (٢)

$$\text{ومن هنا } ٣ص = ٢س - ٢ \text{ (لماذا؟)}$$

أعوّض قيمة ص في المعادلة (١)، فينتج:

$$١٦ = (٣ \dots\dots\dots) + ٢س$$

$$\text{ومن هنا قيمة } ٢س = ٢ \text{ (لماذا؟)}$$

$$\text{أعوّض قيمة } ٢س = ٢ \text{ في المعادلة: } ٢ = ٣ص - ٢س$$

$$\text{فينتج أن } ٤ = ٣ص \text{ (لماذا؟)}$$

أتحقق من صحّة الحلّ.

أفكر: هل تختلف مجموعة حلّ المعادلتين السابقتين عندما تجعل ص موضوعاً للقانون؟ 



نشاط ٣:

أناقش: حلّ ربي وسمير للمعادلتين:

$$٣ = ٣ص + ٢س$$

$$٧ = ٢ص + ٣س$$

حلّ سمير:

$$٣ = ٣ص + ٢س، \text{ ومنها } ٣ - ٢س = ٣ص$$

$$٧ = ٢ص + ٣س$$

$$٧ = ٢(٣ - ٢س) + ٣س$$

$$٧ = ٦ - ٤س + ٣س$$

$$\text{ومنها: } ١ = -٤س$$

$$٤ = ٤س$$

حلّ ربي:

$$٣ = ٣ص + ٢س$$

$$٧ = ٢ص + (٣ص + ٢س)$$

$$٧ = ٥ص + ٢س$$

$$\text{ومنها } ٤ = ٥ص - ٢س$$

$$١ = ٥ص - ٢س$$



نشاط ٤ :

أُكْمِلُ حلّ المعادلتين الآتيتين بطريقة التعويض:

$$س + ٣ص = ١ \quad \dots\dots\dots (١)$$

$$٣س - ٤ص = ٢٣ \quad \dots\dots\dots (٢)$$

أختارُ المعادلة (١)، وأجعلُ س موضوع القانون فيها،

$$\text{ومنها } س = (١ - ٣ص) \dots\dots\dots (٣)$$

أعوّضُ قيمة س في المعادلة (٢)، فينتجُ أنّ:

$$٣(١ - ٣ص) - ٤ص = ٢٣$$

$$٣(١ - ٣ص) - ٤ص = ٢٣$$

$$\text{ومنها: } ٣ - ٩ص - ٤ص = ٢٣$$

$$\text{قيمة } ١٣ص = ٢٦ \quad \text{(لماذا؟)}$$

$$\text{ومنها: } ٢ = ٣ص \quad \text{(لماذا؟)}$$

لإيجاد قيمة س، أعوّضُ قيمة ص في المعادلة (٣)، فينتجُ أنّ:

$$س = ١ - ٣ \times ٢ = ٥ \quad \text{(لماذا؟)}$$

ثانياً - حلّ معادلتين خطيتين بطريقة الحذف:

تقوم فكرة حلّ معادلتين خطيتين بطريقة الحذف على جمع أو طرح المعادلتين، أو صورهما المختلفة* لحذف أحد المتغيرين، بحيث تنتجُ معادلة بمتغير واحد.

* يمكن كتابة المعادلة الخطية بصورة مختلفة بضربها بأي عدد حقيقي لا يساوي صفر



نشاط ٥:

أُكْمِلُ حَلَّ المعادلتَيْنِ الآتِيَتَيْنِ بطريقة الحذف:

$$٣س + ص = ١٠ \dots\dots\dots (١)$$

$$س + ص = ٤ \dots\dots\dots (٢)$$

أَطْرَحُ المعادلتَيْنِ: $٣س - س + ص - ص = ١٠ - \dots$

$$\text{ومنها: } ٢س = \dots \text{ (لماذا؟)}$$

$$\dots = س$$

لِإِجَادِ قِيَمَةِ ص، أَعُوِّضُ قِيَمَةَ س فِي المعادلة (١)

$$١٠ = ص + (٣)٢$$

$$\text{ومنها: } ص = \dots \text{ (لماذا؟)}$$



نشاط ٦:

أُكْمِلُ حَلَّ المعادلتَيْنِ الآتِيَتَيْنِ بطريقة الحذف:

$$٢س + ٣ص = ١ \dots\dots\dots (١)$$

$$٣س - ٤ص = ١٠ \dots\dots\dots (٢)$$

أُلاحِظُ أَنَّ معاملات س و ص غير متساوية فِي المعادلتَيْنِ،

أَضْرِبُ طَرَفِي المعادلة (١) بِالعدد ٣- فَيَنْتُجُ: $٣-ص - ٩ص = ٣-$

أَضْرِبُ طَرَفِي المعادلة (٢) بِالعدد ٢ فَيَنْتُجُ: $٦س - ٨ص = ٢٠$

أَجْمَعُ المعادلتَيْنِ:

$$\begin{array}{r} ٣-ص - ٩ص \\ + \\ ٦س - ٨ص = ٢٠ \\ \hline ١٧-ص = ١٧ \end{array}$$

$$\text{ومنها: } ص = \dots\dots\dots \text{ (لماذا؟)}$$

وِلِإِجَادِ قِيَمَةِ س، نَعُوِّضُ قِيَمَةَ ص فِي المعادلة (١)

$$١ = ص + ٣س$$

$$\text{ومنها: } ٢س + ٣(-١) = ١$$

$$\dots\dots\dots = س$$

أفكر: هل تختلف قيمة س إذا عُوِّضَتْ قِيَمَةُ ص فِي المعادلة الثانية؟





تَمَارِينُ وَمَسَائِلُ :

(١) أَحْلُ كُلَّ زَوْجٍ مِنَ الْمَعَادِلَاتِ فِيمَا يَأْتِي بِطَرِيقَةِ التَّعْوِيزِ :

(أ) $٤س + ص = ١$ ، $٥س - ٣ص = ٢٠$

(ب) $٢س - ص = ٥$ ، $٣س + ٥ص = ١$

(٢) أَحْلُ كُلَّ زَوْجٍ مِنَ الْمَعَادِلَاتِ فِيمَا يَأْتِي بِطَرِيقَةِ الْحَذْفِ :

(أ) $٦ = ٣ص + س$ ، $١٠ = ٤ص + س$

(ب) $١٠ = أ + ب$ ، $٤ = ب + \frac{٣}{٢}أ$

(ج) $٣ = أ + ٤ب$ ، $١٦ = أ + ١ب$

(٣) مَثَلَتْ مَتَسَاوِي الْأَضْلَاعِ، أَطْوَالَ أَضْلَاعِهِ بِالسَّنْتِمِترِ هِيَ: (٢س + ٣ص)،

(٣س + ٢ص)، ١٠. أَجِدْ قِيَمَةَ كُلِّ مِنَ س، ص.

(٤) تَبَاعَ التِّذَاكِرُ فِي مَدِينَةِ مَلَاهٍ بِسَعْرِ دِينَارٍ وَاحِدٍ لِلْأَطْفَالِ، وَدِينَارَيْنِ لِلْكَبَارِ، فَإِذَا كَانَ الْعَائِدُ مِنْ

بَيْعِ التِّذَاكِرِ فِي أَحَدِ الْأَيَّامِ ٥٦٠ دِينَاراً، وَكَانَ عَدَدُ الزَّائِرِينَ مِنَ الصِّغَارِ يَزِيدُ ٨٠ شَخْصاً عَنِ

عَدَدِ الزَّائِرِينَ مِنَ الْكِبَارِ. فَمَا عَدَدُ زَائِرِي مَدِينَةِ الْمَلَاهِي فِي ذَلِكَ الْيَوْمِ؟



٧-٥ تمارين عامة

(١) أضع دائرةً حول رمز الإجابة الصحيحة فيما يأتي:

١ أيّ المعادلات الآتية تكافئ المعادلة $س^2 + ٥س = ١٤$ ؟

(أ) $\frac{٨١}{٤} = ٢\left(\frac{٥}{٢} + س\right)$ (ب) $\frac{٤٥}{٤} = ٢\left(\frac{٥}{٢} + س\right)$
(ج) $\frac{٨١}{٤} = ٢\left(\frac{٥}{٢} - س\right)$ (د) $\frac{٥-}{٤} = ٢\left(\frac{٥}{٢} - س\right)$

٢ ما عدد الجذور الحقيقية للمعادلة $س^2 - ٥س + ٨ = ٠$ ؟

(أ) صفر (ب) ١
(ج) ٢ (د) لا يمكن تحديده.

٣ ما جذور المعادلة $س^2 + ٥س + ١ = ٠$ ؟

(أ) $\frac{١٧ \pm \sqrt{٣٣}}{٤}$ (ب) $\frac{٣٣ \pm \sqrt{١٧}}{٤}$
(ج) $\frac{١٧ \pm \sqrt{١٧}}{٤}$ (د) $\frac{٣٣ \pm \sqrt{٣٣}}{٤}$

٤ ما قيمة $م$ التي تجعل المقدار $(س - م)(س^2 + ٢س + ٤)$ فرقاً بين مكعبين؟

(أ) ٤ (ب) ٢ (ج) ٢- (د) ٨-

٥ ما حلول المعادلة $٢ب^2 - ب - ٣ = ٠$ ؟

(أ) $\frac{٢-}{٣}$ ، ١ (ب) $\frac{٢}{٣}$ ، ١-
(ج) $\frac{٣-}{٢}$ ، ١ (د) $\frac{٣}{٢}$ ، ١-

(٢) أحلّ المعادلات الآتية:

(أ) $١٦ = ٤ + ب^2$
(ب) $٥ = ٣٦ + ص^2$
(ج) $١٠ = (س + ٣)(س - ٤)$

(٣) إذا كان العدد ٢ أحد جذريّ المعادلة: $s^2 - ٥s + n = ٠$ صفر، أجد قيمة الثابت n ، ثمّ أجد الجذر الثاني.

(٤) انطلقت سيّارتان من مفترق طرقٍ في الوقت نفسه، حيث توجّهت إحداهما نحو الشمال، فيما توجّهت الأخرى نحو الغرب، فإذا قطعت السيّارة المتوجّهة نحو الشمال مسافة ٢٠ م زيادةً عن المسافة التي قطعتها السيّارة المتوجّهة نحو الغرب، أجد المسافة التي قطعتها كلٌّ من السيّارتين، منذ انطلاقيهما من المفترق، عندما تكون المسافة (ف) بين السيّارتين ١٠٠ م.

(٥) أحلّل المقادير الآتية إلى عواملها الأولية:

(أ) $\frac{1}{125} - \frac{27}{64}$ ص^٣ (ب) $٤٠س^٣ + ٥ص^٣$ (ج) $٤٥س^٤ - ٢س$

(٦) أ ب جـ مثلث متساوي الأضلاع، طول ضلعه ٨ سم، أنزل العمود أد على القاعدة ب جـ، ما طول ذلك العمود؟

أقيم ذاتي:



بعد دراستي لهذه الوحدة، اكتب ما الذي تعلمته منها بما لا يزيد عن ثلاثة أسطر.



مشروع الوحدة:

يعتبر الحق في الحصول على بيئة آمنة من الحقوق الأساسية للأفراد، يتعرض طلبة المدارس في بعض الأحيان لمخاطر الدهس، نتيجة للسرعة الزائدة. أتعاون وأفراد مجموعتي للتقليل من هذه المخاطر من خلال القيام بالإجراءات الآتية:

- (١) أحدد ما الإشارات التحذيريّة التي يلزم وضعها للسائقين على طريق المدرسة.
- (٢) أبحث عن المسافات التي يجب أن توضع عندها هذه الإشارات وفقاً لقوانين السير.
- (٣) أستخدم معادلة التوقف $v^2 = ٠,٤٤ع^٢ + ١,١ع$ ، لتحديد السرعة التي يجب أن يسير بها السائقون حال وجود هذه الإشارات.

<http://www.mathwarehouse.com/quadratic/quadratic-formula-calculator.php>

<http://www.math.com/students/calculators/source/quadratic.htm>

روابط الكترونية:

الهندسة والقياس



الوحدة

٦

يُعتبر الجامع الأحمر من أهم معالم مدينة صُفد، وقد بُني تبعاً
لأسس هندسيّة على الطراز المملوكي. أبحثُ عن المعالم التي
اعتمد عليها الطراز المملوكي في الفن المعماريّ.

يتوقع من الطلبة بعد الإنتهاء من دراسة هذه الوحدة والتفاعل مع أنشطتها أن يكونوا قادرين على توظيف الأشكال والمجسمات الهندسية في الحياة العمليّة من خلال الآتي:

- ١- التعرّف إلى رسم متوازي أضلاعٍ من مثلثٍ معلوم.
- ٢- إيجاد مساحة متوازي الأضلاع، بدلالة مساحة المثلث المشترك معه في القاعدة والارتفاع.
- ٣- التعرّف إلى القطاع الدائري وخصائصه.
- ٤- إيجاد مساحة القطاع الدائري، وطول قوس القطاع الدائري، وزاوية القطاع الدائري.
- ٥- التعرّف إلى القطعة الدائريّة.
- ٦- التعرّف إلى الأسطوانة الدائريّة القائمة.
- ٧- إيجاد المساحتين الجانبيّة والكلية للأسطوانة.
- ٨- إيجاد حجم الأسطوانة.
- ٩- التعرّف إلى المخروط الدائري القائم.
- ١٠- إيجاد المساحتين الجانبيّة والكلية للمخروط.
- ١١- إيجاد حجم المخروط.
- ١٢- توظيف المساحات والحجوم في حلّ مشكلاتٍ حياتيّة.



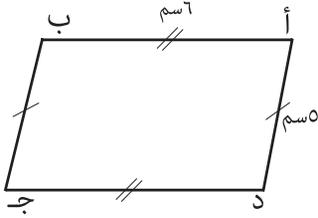
١-٦ متوازي الأضلاع



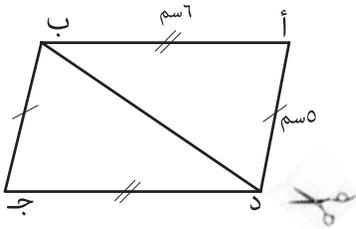
نشاط ١:



أتأمل النجمة الكنعانية الثمانية التي تبرز في العديد من الأزياء الشعبية الفلسطينية، وتتكوّن من ثمانية متوازيات أضلاع، فما بعض خصائص متوازي الأضلاع؟



أرسم نموذجاً لمتوازي الأضلاع، كما في الشكل المجاور.
أب // ج د، أ د // ب ج (لماذا؟)



أ ب = ٦ سم، ج د = ٥ سم؛ لأنّ كلّ ضلعين متقابلين متساويان
أ د = ٥ سم، ب ج = ٦ سم (لماذا؟)
أقصّ على القطر د ب، وألاحظ أنّ المثلث أ د ب
يطابق المثلث ج د ب.

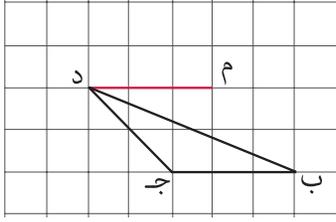
أفكّر: ما المثلثان المتطابقان إذا تمّ القصّ على القطر أ ج؟



أندكر: من خصائص متوازي الأضلاع : كلّ ضلعين متقابلين متساويان في الطول.



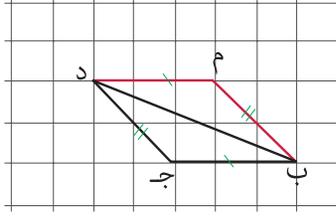
نشاط ٢:



الشكل (١)

كيف يُمكن إنشاء متوازي الأضلاع د ج ب م من المثلث د ج ب؟
أرسم المثلث د ج ب على ورق مربّعات، كما في الشكل (١).

أصل د م يوازي ب ج، ويساويه في الطول. (لماذا؟)



الشكل (٢)

أصل م ب، كما في الشكل (٢)، فيتكوّن متوازي الأضلاع ب ج د م
الاحظ أن المثلثين د م ب، د ج ب متطابقان. (لماذا؟)

أناقش: يمكن إكمال أيّ مثلث إلى متوازي أضلاع.



أتعلّم: يمكن إنشاء متوازي أضلاع من مثلث معلوم باستخدام خاصية متوازي
الأضلاع (كلّ ضلعين متقابلين متساويين في الطول).



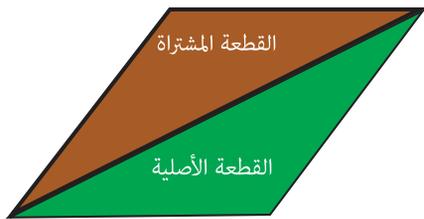
نشاط ٣:



يملك مزارع قطعة أرضٍ مثلثة الشكل مساحتها ١٠٠٠ م^٢، فإذا قام المزارع بشراء قطعة أرضٍ
مجاورة، لها الأبعاد نفسها، لتصبح أرضه على شكل متوازي أضلاع، فما مساحة قطعة الأرض

التي أصبح يمتلكها المزارع؟

أرسم رسماً توضيحياً كما في الشكل المجاور.



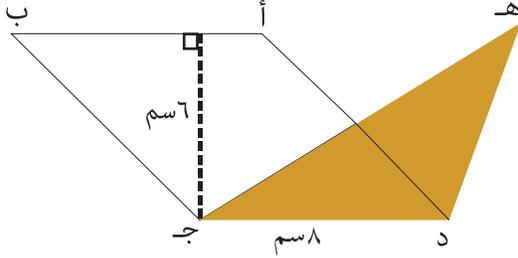
مساحة قطعة الأرض = مساحة متوازي الأضلاع = ٢ × مساحة المثلث (لماذا؟)

$$= 2 \times \dots = 2000 \text{ م}^2$$



نشاط ٤:

بيِّن الشكل المجاور متوازي الأضلاع أ ب ج د، المشترك مع المثلث ه د ج في القاعدة والارتفاع، أكمل:



ارتفاع المثلث ه د ج = ٦ سم (لماذا ؟)

ارتفاع متوازي الأضلاع أ ب ج د = سم

طول قاعدة المثلث ه د ج = ٨ سم

طول قاعدة متوازي الأضلاع أ ب ج د = سم

مساحة المثلث ه د ج = $\frac{1}{2} \times$ القاعدة \times الارتفاع.

$$24 \text{ سم}^2 = \dots \times 8 \times \frac{1}{2} =$$

مساحة متوازي الأضلاع أ ب ج د = القاعدة \times الارتفاع

$$48 \text{ سم}^2 = \dots \times 8 =$$

فما العلاقة بين مساحة المثلث ومساحة متوازي الأضلاع المشترك معه في القاعدة والارتفاع ؟

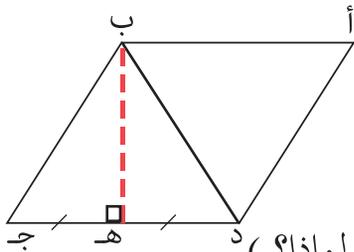
أتعلَّم:



مساحة متوازي الأضلاع = ٢ \times مساحة المثلث المشترك معه في القاعدة والارتفاع.



نشاط ٥:



د ب ج مثلث متساوي الأضلاع، طول ضلعه ٦ سم،

أجد مساحة متوازي الأضلاع أ ب ج د.

مساحة متوازي الأضلاع أ ب ج د = ٢ \times مساحة المثلث د ب ج (لماذا ؟)

مساحة المثلث د ب ج = $\frac{1}{2} \times$ القاعدة \times الارتفاع

$$= \frac{1}{2} \times د ج \times ب ه$$

$$= 3 ب ه$$

أستخدم نظرية فيثاغورس لإيجاد ب ه (لماذا؟)

$$(ب د)^2 = (ب ه)^2 + (د ه)^2 ، ومنها: 36 = (ب ه)^2 + 9$$

$$ب ه = \sqrt{27} = 3\sqrt{3} \text{ سم}$$

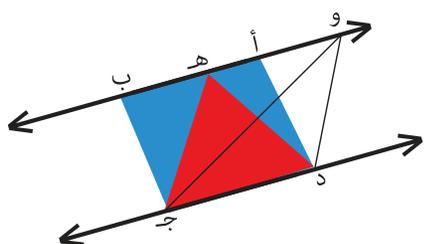
ومنها: مساحة المثلث د ب ج = $3 \times 3\sqrt{3} \times \frac{1}{2} = \frac{9\sqrt{3}}{2} \text{ سم}^2$

مساحة متوازي الأضلاع = $2 \times \frac{9\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{3} \text{ سم}^2$



نشاط ٦:

أتأمل الشكل المجاور الذي يتضمن متوازي الأضلاع أ ب ج د، والذي مساحته ٥٠ سم^٢، فما مساحة المثلثين د ه ج، د و ج.



المثلث د ه ج، والمثلث د و ج مشتركان في القاعدة والارتفاع مع متوازي الأضلاع أ ب ج د (لماذا؟)

ومنها: مساحة المثلث د ه ج = $\frac{1}{4}$ مساحة متوازي الأضلاع أ ب ج د

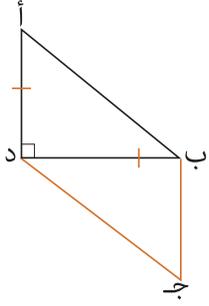
$$= \frac{1}{4} \times 50 =$$

$$= 12.5 \text{ سم}^2$$

وبالمثل: مساحة المثلث د و ج = 25 سم^2 (لماذا؟)

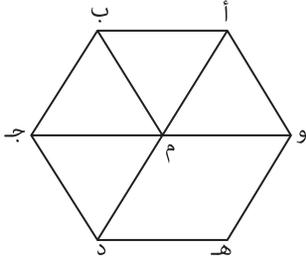


تمارين ومسائل:



١) أ ب ج د متوازي أضلاع، أ د ب مثلث متساوي الساقين، وقائم الزاوية في د،

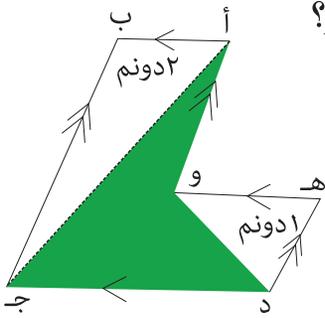
إذا كان أ د = ٤ سم، أجد مساحة متوازي الأضلاع أ ب ج د؟



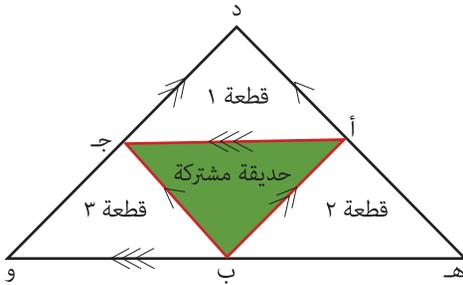
٢) بالاعتماد على الشكل المجاور، الذي فيه أ ب // و ج ،

مساحة متوازي الأضلاع أ ب ج م تساوي ٢٠ سم^٢،

ما مساحة الشكل الرباعي أ و ج ب؟



٣) أجد مساحة المنطقة المظللة أ ج د و، الموضحة في الشكل المجاور؟



٤) ورث ثلاثة إخوة قطعة أرض، مثلثة الشكل، فأرادوا

تقسيمها بينهم بالتساوي، اقترح أحدهم تقسيم قطعة الأرض،

كما في الشكل المجاور، على أن تبقى المنطقة أ ب ج

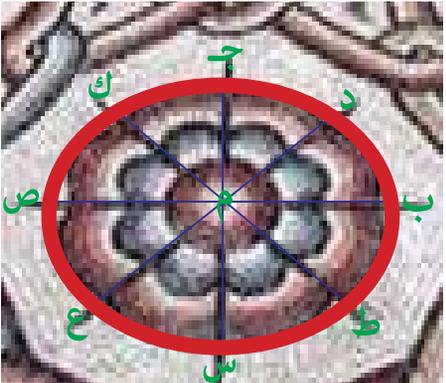
حديقة مشتركة. فهل تتساوى الحصص في قطعة الأرض بناءً

على هذا الاقتراح؟ أوضح اجابتي؟



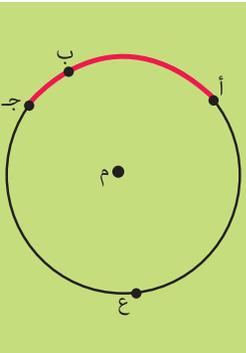
٢-٦ القطع الدائري

نشاط ١:

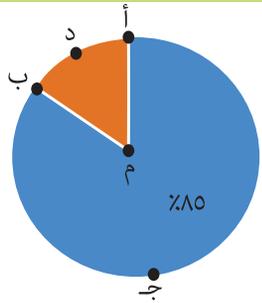


- يضم قصر هشام بن عبد الملك في مدينة أريحا واحدة من أهم لوحات الفسيفساء في العالم، تأمل الصورة المجاورة، ثم أكمل:
- تقع النقاط س، ص، ... على الدائرة التي مركزها م.
 - تمثل د م، ج م، ... أنصاف أقطار في هذه الدائرة.
 - تمثل ب ص، ج س، ... أقطاراً في هذه الدائرة.
 - يُقدَّر قياس زاوية القطاع الدائري ج م ب د $\approx 90^\circ$ (لماذا؟)
 - يُسمَّى ج م ب د قطاعاً دائرياً، فماذا يُسمَّى ج د ب؟

تعريف: لتكن أ، ج نقطتين على الدائرة، كما في الشكل المجاور، تقسمان الدائرة إلى جزأين، يُسمَّى كل جزءٍ منهما قوساً للدائرة، ويرمز له بالرمز $\widehat{أ ج}$.
القوس الأصغر $\widehat{أ ج}$ ، ويُسمَّى بالرمز $\widehat{أ ب ج}$.
القوس الأكبر $\widehat{أ ج}$ ، ويُسمَّى بالرمز $\widehat{أ ع ج}$.



نشاط ٢:



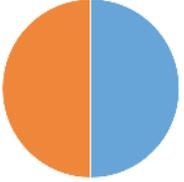
- بلغت نسبة النجاح في فلسطين، عام ٢٠١٦م في امتحان الثانوية العامة للفرع العلمي ٨٥%. تأمل الشكل المجاور، ثم أكمل:
- يُرمز للقوس الأصغر بالرمز $\widehat{أ د ب}$ ، فيما يُرمز للقوس الأكبر بالرمز
- تمثل منطقة الرسوب بالقطاع الدائري أ م ب د، فيما تمثل منطقة النجاح بالقطاع الدائري
- زاوية قطاع منطقة النجاح = $85\% \times 360 = \dots$ (لماذا؟)

أتذكّر: القطاع الدائري هو: الجزء المحصور بين نصفيّ قطرين وقوسٍ في دائرة، وتُسمّى الزاوية المركزية المحصورة بين نصفيّ قطرين فيه زاوية القطاع الدائريّ.



نشاط ٣:

أتأملُ القطاعات الدائرية في الجدول الآتي، ثم أكمل:

القطاع	الكسر الذي يمثله طول القوس الأصغر	قياس زاوية القطاع الأصغر	نسبة طول قوس القطاع الأصغر إلى محيط الدائرة	نسبة مساحة القطاع الأصغر إلى مساحة الدائرة	نسبة قياس زاوية القطاع الأصغر إلى زاوية الدورة الكاملة
	$\frac{1}{2}$	180°	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} = \frac{180^\circ}{360^\circ}$
		90°	$\frac{1}{4}$		$\dots = \frac{90^\circ}{360^\circ}$
	$\frac{1}{8}$			$\frac{1}{8}$	

أتعلّم: إذا كانت (هـ) زاوية القطاع الدائري في دائرة، فإن:

$$\frac{\text{زاوية القطاع (هـ)}}{360^\circ} = \frac{\text{طول قوس القطاع}}{\text{محيط الدائرة}} = \frac{\text{مساحة القطاع}}{\text{مساحة الدائرة}}$$





نشاط ٤:

قطاع دائري في دائرة نصف قطرها ١٤ سم، وطول قوسه ١١ سم، أجد قياس زاوية قطاعه.

$$\frac{\text{زاوية القطاع}}{360^\circ} = \frac{\text{طول قوس القطاع}}{2\pi}$$

$$\text{زاوية القطاع} = 360^\circ \times \frac{\text{طول قوس القطاع}}{2\pi} \quad (\text{لماذا؟})$$

$$\text{زاوية القطاع} = 360^\circ \times \frac{11}{\frac{22}{7} \times 14 \times 2}$$

$$= 360^\circ \times \frac{1}{8}$$

$$\text{زاوية القطاع} = 45^\circ$$

$$\text{أتعلم: زاوية القطاع الدائري} = \frac{\text{طول قوس القطاع}}{\text{محيط الدائرة}} \times 360^\circ$$



نشاط ٥:

رسم قطاع دائري في دائرة نصف قطرها ٣,٥ سم، فكانت زاوية هذا القطاع ٣٠°، فما طول القوس المقابل للزاوية ٣٠°؟

$$\frac{\text{زاوية القطاع}}{360^\circ} = \frac{\text{طول قوس القطاع}}{\text{محيط الدائرة}}$$

$$\text{طول قوس القطاع} = \text{محيط الدائرة} \times \frac{\text{زاوية القطاع}}{360^\circ} \quad (\text{لماذا؟})$$

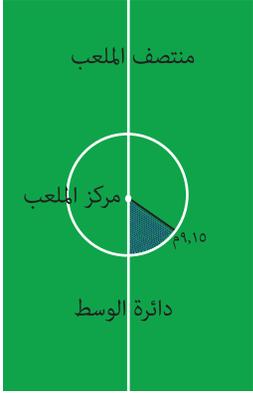
$$\text{طول قوس القطاع} = 2\pi \times \frac{30^\circ}{360^\circ}$$

$$= \frac{1}{12} \times \pi \times 3,5 \times 2 = 0,58 \text{ سم}$$

أتعلم: طول قوس القطاع الدائري = $\frac{\text{زاوية القطاع}}{360^\circ} \times \text{محيط الدائرة}$.



نشاط ٦:



أراد مهندس إعادة تعشيب المنطقة التالفة من دائرة الوسط في ملعب كرة قدم، كما في الرسم التوضيحي المجاور. أكمل إيجاد مساحة القطاع الدائري المراد إعادة تعشيبه، علماً بأن نصف قطر دائرة وسط الملعب = ٩,١٥ م، وطول قوس قطاع المنطقة التالفة ٢٢ م.

مساحة القطاع الدائري = $\frac{\text{طول قوس القطاع}}{\text{محيط الدائرة}} \times \text{مساحة الدائرة}$ (لماذا؟)

$$= \frac{\text{طول قوس القطاع}}{\pi \times \text{نق} \times 2} \times \pi \times \text{نق}^2$$

$$= \frac{1}{2} \times \text{طول قوس القطاع} \times \text{نق}$$
 (لماذا؟)

$$= \frac{1}{2} \times 22 \times 9,15$$

$$= 1000 \text{ م}^2$$

أتعلم: مساحة القطاع الدائري = $\frac{\text{طول قوس القطاع}}{\text{محيط الدائرة}} \times \text{مساحة الدائرة}$.



$$= \frac{1}{2} \times \text{طول قوس القطاع} \times \text{نق}$$

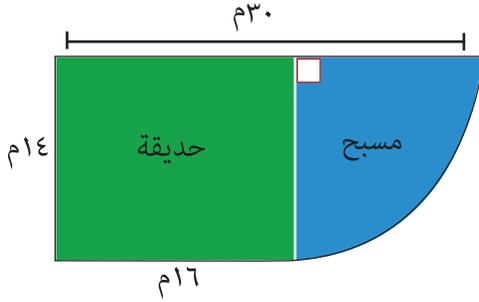


تمارين ومسائل:

(١) قطاع دائري مساحته ٥٠ سم^٢، ونصف قطره دائرته ٧ سم، فما طول قوس هذا القطاع؟

(٢) ما قياس زاوية قطاع دائري، نصف قطره دائرته ١٥ سم، ومساحته ٤٥٠ سم^٢؟

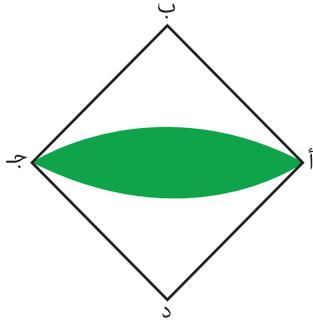
(٣) يُمثّل الشكل المجاور مخطط مسبح وحديقة منزل. أجد:



أ) مساحة سطح المسبح.

ب) محيط الحديقة والمسبح.

(٤) قطاع دائري محيطه ٢٥ سم، ومساحته ٣٦ سم^٢، أجد نصف قطره دائرته، وطول قوسه.



(٥) رُسمت دائرة مركزها النقطة ب، ونصف قطرها ٧ سم، ورُسمت دائرة

مركزها د، ونصف قطرها ٧ سم، وتمّ تظليل المنطقة المحصورة بين

الدائرتين، كما في الشكل المجاور، فما مساحة المنطقة المظللة، علماً

بأنّ أ ب ج د مربع طول ضلعه ٧ سم؟

(٦) يبلغ نصف قطر دائرة المنتصف في ملعب كرة القدم الخماسية ٣ م، فما مساحة قطاع دائري

رسم في دائرة الملعب ويقابل زاوية مركزية قياسها ٦٠°؟



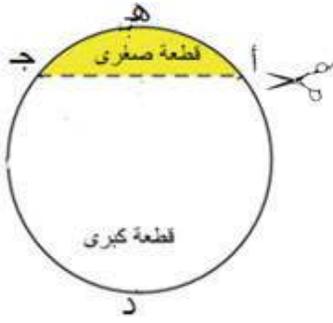
٣-٦ القطعة الدائرية



نشاط ١:



وزعت معلّمة طالبات الصف إلى مجموعات، وكلّفت كلّ مجموعة بتصميم شعار، كما في الشكل المجاور، فكيف يمكن تصميم هذا الشعار؟ وماذا تُسمّى المنطقة المزينة بالعلم؟



أرسم دائرة، ثمّ أحدد الوتر أ ج، كما في الشكل المجاور. أقصّ الشكل الدائريّ على الوتر أ ج.

ألاحظ أنّ سطح الدائرة انقسم إلى قطعتين: قطعة صغيرة، وقطعة كبرى.

تُسمّى القطعة أ هـ ج القطعة الدائرية الصّغرى، فيما تُسمّى القطعة أ د ج القطعة الدائرية الكبرى.

تُحدّد القطعة أ هـ ج بالقرس أ هـ ج والوتر أ ج.

أرسم علم فلسطين على القطعة الكبرى، فيتكوّن الشعار المطلوب.

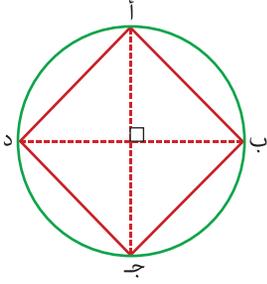
أفكر: كيف يمكن رسم قطعة دائرية من قطاع دائريّ معلوم؟



أتعلم: يُسمّى الجزء المحصور بين قوسٍ ووترٍ يمرّ بنهايتيّ ذلك القوس في الدائرة القطعة الدائرية.



نشاط ٢:



كيف يمكن رسم مربع من دائرة، نصف قطرها ٣,٥ سم؟
(١) أرسم دائرة نصف قطرها ٣,٥ سم.

(٢) زاوية القطاع الدائري $= \frac{360^\circ}{4} = 90^\circ$ (لماذا؟)

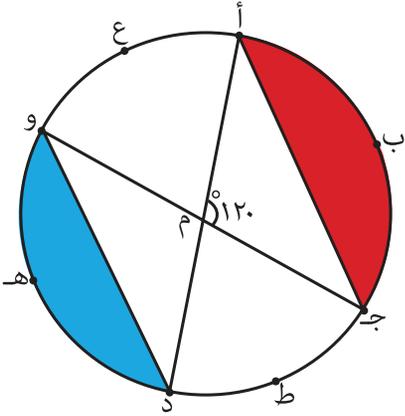
(٣) أرسم القطاعات الدائرية التي زاوية كل منها 90° ، أصل الأوتار: أ ب، ب ج، ج د، د أ.

(٤) أقص الشكل على الأوتار: أ ب، ب ج، ج د، د أ، فينتج المربع أ ب ج د.

نشاط ٣:



أتأمل الشكل المجاور، ثم أكمل:



- زاوية القطعة الدائرية أ ب ج = زاوية القطاع الدائري أ م ج ب
 $= 120^\circ$ (لماذا؟)

- زاوية القطعة الدائرية د هـ و = زاوية القطاع الدائري
 $..... =$

- زاوية القطعة الدائرية ج ط د =

أتعلم: زاوية القطعة الدائرية تساوي زاوية القطاع الدائري المشتركة معه في القوس نفسه.



نشاط ٤:



أجد زاوية قطعة دائرية في قطاع دائري، طول قوسه $5,6\pi$ سم، ونصف قطر دائرته ٧ سم.

زاوية القطعة الدائرية = زاوية القطاع الدائري = $\frac{\text{طول قوس القطاع}}{\pi \times 2} \times 360^\circ$

$..... = 360^\circ \times \frac{\pi \ 5,6}{\pi \ (7) \ 2} =$



تمارين ومسائل

١) أجد طول قوس قطعة دائرية في دائرة نصف قطرها ٢١ سم، وقياس زاوية قطاعها 36° .

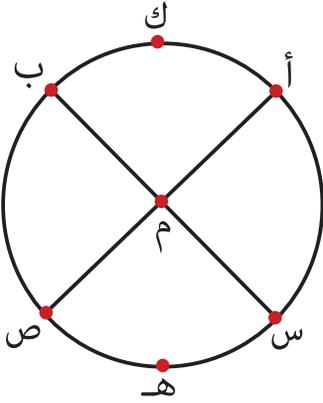


٢) يبين الشكل المجاور صورة زخرفية من سقف قبّة الصخرة

المشرفة، والتي تتضمن شكلاً ثمانية منتظماً، أرسم شكلاً

ثمانياً منتظماً داخل دائرة قطرها ١٠ سم.

(إرشاد: أجد قياس زاوية القطعة الدائرية).



٣) رُسمَ قطران في دائرة مركزها م، كما في الشكل المجاور فإذا كانت

مساحة القطعة الدائرية أك ب = ٥ سم^٢، وكانت مساحة القطاع الدائري

ص م س هـ = ١١ سم^٢، فما مساحة المثلث م س ص.



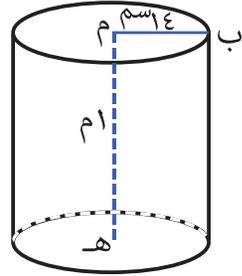
٤-٦ الأستوانة



نشاط ١:



يضمُّ المسجد الإبراهيميَّ في مدينة الخليل الغارَ الشريف ، الذي تتمُّ إضاءته بقناديل الزيت عبر فتحةٍ أسطوانية، القسم العلوي عليه غطاءٌ دائريّ، قطره ثمانية وعشرون سنتمراً، والقسم السفلي قطره مماثلٌ للعلويّ، وارتفاع الصّخرة التي توجد فيها الفتحةُ مترٌ تقريباً، فما عناصر الأستوانة؟



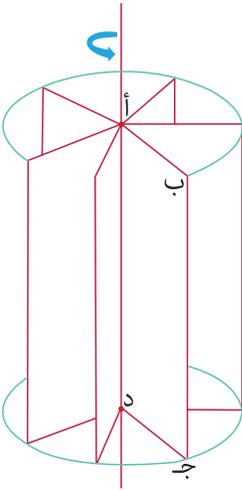
- أرسمُ رسماً توضيحياً كما في الشكل المجاور.

- نصف قطر قاعدة الأستوانة = م ب = ٠.٠٠٠ سم

- ارتفاع الأستوانة = م هـ = ٠.٠٠٠ سم



نشاط ٢:



(١) أقصّ من الورق المقوّى مستطيلاً، طوله ٧ سم، وعرضه ٤ سم.

(٢) أحضّرُ عوداً يزيد طوله عن بعديّ المستطيل، ثم أُلصقُ العودَ على أحد أضلاعِ المستطيل.

(٣) أَلفُ العودَ بسرعةٍ دَوْرَةٍ كاملةٍ.

(٤) يُسمّى المجسّمُ الناتجُ عن دورانِ المستطيلِ حولِ العودِ أسطوانةً دائريّةً قائمةً .

(٥) يُسمّى العودُ (أ د) محورَ الدوران، ويُسمّى ب جـ مولّدَ سطحِ الأستوانة.

ألاحظُ أنّ ارتفاع الأستوانة = عرض المستطيل = ٤ سم،

ونصف قطر الأستوانة = طول المستطيل = ٧ سم.

أتعلم: الأسطوانة الدائرية القائمة: هي الجسم المتولد من دوران المستطيل دورة كاملة حول أحد أضلاعه.



نشاط ٣:



الشكل (١)

(١) أحضر علبة معدنية أسطوانية مغلقة من القاعدتين، وأرسم مولداً لهذه الأسطوانة.
(٢) أحضر قطعة كرتون مستطيلة الشكل، بحيث يكون عرضها مساوياً لطول مولد الأسطوانة، وأضعها على سطح مستو.

(٣) أثبت مولد الأسطوانة عند حافة قطعة الكرتون كما في الشكل (١).

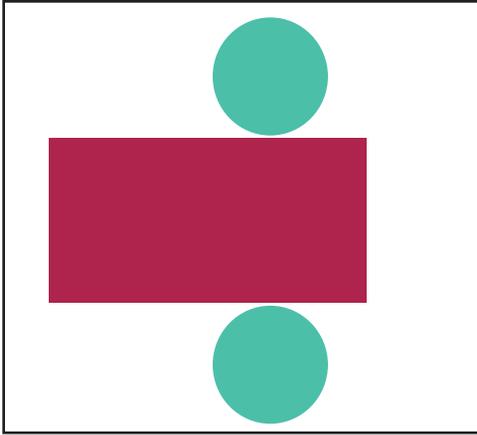
(٤) أدور الأسطوانة على قطعة الكرتون حتى يعود مولد الأسطوانة ملاصقاً لسطح القطعة.

(٥) أحدد المنطقة التي دارت عليها الأسطوانة.

(٦) أقص المنطقة المستطيلة الناتجة والتي طولها يساوي محيط قاعدة الأسطوانة، وعرضها يساوي ارتفاع الأسطوانة.

(٧) أرسم قاعدتي الأسطوانة، وأقصهما.

فتكون شبكة الأسطوانة كما في الشكل (٢).



الشكل (٢)

أتعلم: شبكة الأسطوانة الدائرية القائمة: هي مستطيل طول أحد أضلاعه محيط القاعدة، وطول الضلع الآخر للمستطيل ارتفاع الأسطوانة، ودائرتان متطابقتان تُسمّى الدائرتان قاعدتي الأسطوانة.



أفكر: هل يمكن التوصل إلى شبكة الأسطوانة بطرق أخرى؟





نشاط ٤:

يُرادُ بناءُ أسطوانةٍ مفتوحةٍ من القاعدتين من مستطيلٍ، طوله يساوي ٧π سم، وعرضه ٣ سم،
فما المساحة الجانبيّة للأسطوانة؟
ارتفاع الأسطوانة = عرض المستطيل = ٣ سم.

محيط قاعدة الأسطوانة = طول المستطيل = ٧π سم (لماذا؟)

المساحة الجانبيّة للأسطوانة = محيط قاعدة الأسطوانة \times الارتفاع (لماذا؟)

$$٣ \times ٧ \pi =$$

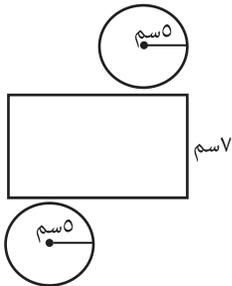
$$= ٢١ \pi \text{ سم}^2$$

أتعلّم: المساحة الجانبيّة للأسطوانة = محيط القاعدة \times الارتفاع = $٢ \pi \times$ الارتفاع.



نشاط ٥:

معتمداً على شبكة الأسطوانة المبيّنة في الشكل المجاور، أجدُ المساحة الكليّة لهذه الأسطوانة.
المساحة الجانبيّة للأسطوانة = مساحة المستطيل.



محيط الدائرة \times ارتفاع الأسطوانة (لماذا؟) =

$$= ٢ \pi \times ٧$$

$$= ١٤ \pi \text{ سم}^2$$

مساحة قاعدة الأسطوانة = مساحة الدائرة.

$$= \pi \times ٥^2$$

المساحة الكليّة للأسطوانة = المساحة الجانبيّة للأسطوانة + مساحة القاعدتين

$$= ١٤ \pi + ٢ \pi \times ٥^2$$

$$= ١٤ \pi + ٥٠ \pi = ٦٤ \pi \text{ سم}^2$$

أتعلم: المساحة الكلية للأسطوانة = المساحة الجانبيّة + مساحة القاعدتين.



$$\pi^2 \text{ نق } 2 + \epsilon \pi^2 =$$



نشاط ٦:

ما المساحة الكلية للأسطوانة نصف قطر قاعدتها ٣,٥ سم، وارتفاعها ٨ سم؟

$$\text{المساحة الكلية للأسطوانة} = \pi^2 \text{ نق } 2 + \epsilon \pi^2 =$$

$$= \pi^2 (3,5)^2 + (\pi (8)) \pi (3,5)^2 =$$

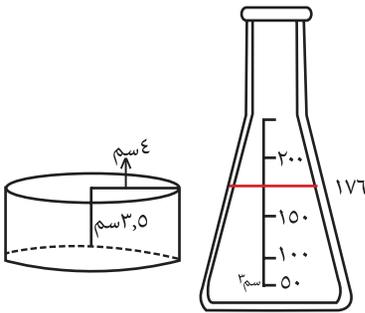
$$= \pi (12,25)^2 + \pi 56 =$$

$$= \dots + \pi 56 =$$

$$= \dots \text{ سم}^2 =$$



نشاط ٧:



وعاءٌ على شكل أسطوانة نصف قطر قاعدته ٤ سم، وارتفاعه ٣,٥ سم، مُلئ بالماء، وأُفرغ في مدرجٍ مخبريٍّ لقياس الحجم، فأشار التدرج إلى أنّ حجم الماء في الأسطوانة ١٧٦ سم^٣، كما في الشكل التوضيحي المجاور.

ما العلاقة بين حجم الماء في الأسطوانة وحاصل ضرب مساحة قاعدتها في ارتفاعها؟

$$\text{مساحة القاعدة} \times \text{الارتفاع} = \text{نق } 2 \times \pi \times \epsilon$$

$$= (4)^2 \times \frac{22}{7} \times 3,5 = \dots \times 11 \text{ (لماذا؟)}$$

$$= 176 \text{ سم}^3 =$$

ألاحظ أنّ: حجم الأسطوانة = مساحة القاعدة × الارتفاع.



أتعلم: حجم الأسطوانة = مساحة القاعدة × الارتفاع.

$$= \text{نق}^2 \times \pi \times \text{ع}$$



نشاط ٨:

زجاجة من عسل النحل إسطوانية الشكل، مساحة قاعدتها ٣٣ سم^٢، وارتفاعها ١٠ سم، أجد حجم الزجاجة. حجم الأسطوانة = مساحة القاعدة × الارتفاع.

$$= 33 \times \dots\dots$$

$$= \dots\dots \text{سم}^3$$



نشاط ٩:



تُستخدم الرّحى في طحن الحبوب؛ يتكوّن الجزء السفليّ منها من أسطوانة، قطر قاعدتها ٥٠ سم، وارتفاعها ٥ سم، تُثبّت فيها قطعة من الخشب أسطوانية الشكل، قطرها ٦ سم، أجد حجم حجر الرّحى السفليّ.

حجم الرّحى السفلي = مساحة قاعدة الرّحى × ارتفاع الرّحى.

$$= \text{نق}^2 \times \pi \times \dots\dots \text{ (نق: نصف قطر قاعدة الرّحى)}$$

$$= \dots\dots \times \pi \times (25)^2$$

$$= \dots\dots \times \pi \times 625$$

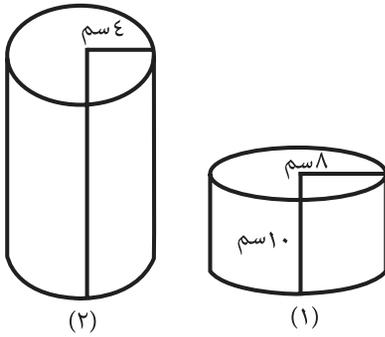
$$= \dots\dots \text{سم}^3$$



تمارين ومسائل

١) أسطوانة قائمة، محيط قاعدتها 20π سم، وارتفاعها 10 سم، أجد مساحتها الجانبية.

٢) علبة إسطوانية الشكل ارتفاعها 10 سم، وحجمها 250π سم^٣، فما نصف قطر قاعدة هذه العلبة؟



٣) معتمداً على الشكل المجاور، ما ارتفاع الأسطوانة الثانية، بحيث يكون للأسطوانتين الحجم نفسه؟



٤) يُراد طلي خزان وقود أسطواني الشكل بالدهان من الخارج، نصف قطر قاعدته $1,5$ م، وارتفاعه 12 م، فما تكلفة طلاء الخزان، إذا كانت تكلفة المتر المربع الواحد 7 دنانير؟

٥) وعاءان لتخزين الزيت الأول على شكل إسطوانة قطرها 14 سم وارتفاعها 14 سم، والثاني على شكل مكعب طول ضلعه 14 سم، فأى الوعائين يتسع لكمية أكبر من الزيت؟

٦) علبة صابون على شكل أسطوانة قائمة، حجمها 320π سم^٣، فإذا كان نصف قطرها 8 سم، فكم يبلغ ارتفاع هذه العلبة؟



٥-٦ المخروط



نشاط ١:



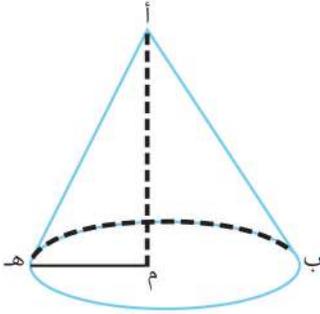
يشتهرُ الجليلُ الأعلى بالغطاء النباتي، وتكسو العديد من مرتفعاته الأشجارُ الحرجية، ومن أبرزها أشجارُ الصنوبر، هذا وتُسمى ثمرةُ شجرةِ الصنوبرِ المخروطِ الصنوبري، فما المخروط؟ وما أهمُّ عناصره؟

- ارسمُ رسماً توضيحياً كما في الشكل الآتي.

- تُسمى رأسُ المخروط، وتُسمى النقطة مركزَ دائرة قاعدة المخروط.

- تمثلُ القطعة المستقيمة نصف قطر المخروط.

- يُسمى \overline{AM} ارتفاعُ المخروط، فيما يُسمى \overline{AB} راسمَ المخروط.



نشاط ٢:

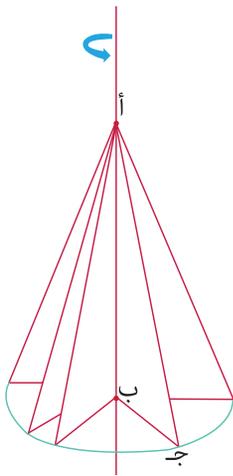
- ارسم مثلثاً قائم الزاوية على ورق كرتونٍ مقوى، ثم أقصُ المثلث.

- أحضرُ عوداً بطولٍ مناسبٍ، ثم ألصقُ هذا العودَ على أحدِ أضلاعه القائمة.

- ألقُ العودَ بسرعة، وألاحظُ أنّ المجسم الناتج عن دوران المثلث القائم حول العود، هو مخروطٌ دائريُّ قائم.

- يُسمى \overline{AJ} راسمُ المخروط (مولد المخروط).

- يُسمى \overline{AB} محورَ الدوران (ارتفاع المخروط).



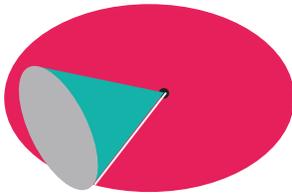


أتعلّم: المخروط القائم: هو المجسّم المتولّد من دوران مثلث قائم الزاوية دورة كاملة حول أحد ضلعي القائمة.

راسم المخروط القائم: قطعة مستقيمة تصل رأس المخروط وأيّة نقطة تقع على دائرة قاعدته.
ارتفاع المخروط القائم: العمود النَّازل من رأس المخروط على قاعدة المخروط.



نشاط ٣:



الشكل (١)

(١) أحضّر مخروطاً مُغلَقاً من القاعدة وأرسم مولداً لهذا المخروط.

(٢) أرسم دائرة نصف قطرها يساوي طول راسم المخروط.

(٣) أضع المخروط على سطح الدائرة، بحيث يكون المولّد (الراسم) منطبقاً على نصف قطر الدائرة، ورأس المخروط في مركز الدائرة كما في الشكل (١).

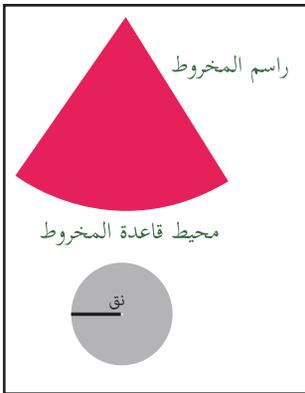
(٤) أدورّ المخروط إلى أن يعود المولّد ملامساً لسطح الدائرة من جديد.

وألحظ أن الشكل الناتج عن دوران المخروط دورة كاملة هو قطاع دائريّ.

(٥) أقصّ الشكل الناتج.

(٦) أرسم قاعدة المخروط وأقصّها، فتكون شبكة المخروط

كما في الشكل (٢).



الشكل (٢)

أتعلّم: شبكة مخروط دائري قائم تتكوّن من قطاع دائريّ نصف قطره دائرته يساوي راسم المخروط، ودائرة نصف قطرها يساوي نصف قطر قاعدة المخروط.
طول راسم المخروط = نصف قطر القطاع الدائري،
محيط قاعدة المخروط = طول قوس القطاع الدائري.





نشاط ٤ :

أجد المساحة الجانبية لمخروط دائري قائم، قُطرُ قاعدته ٢م، وطول راسمه ٣,٥م.

المساحة الجانبية للمخروط = $\frac{1}{2} \times$ نصف قطر دائرة القطاع \times طول قوس القطاع

= $\frac{1}{2} \times ل \times ٢ \times$ نصف قطر الدائرة $\times \pi$ ، حيث ل: راسم المخروط. (لماذا؟)

= ل نق π ، حيث نق : نصف قطر قاعدة المخروط. (لماذا؟)

$$\dots \times ١ \times ٣,٥ =$$

$$٢٠٠٠ =$$

أتعلم: المساحة الجانبية للمخروط = ل نق π ، حيث ل: راسم المخروط،

نق: نصف قطر قاعدة المخروط.



نشاط ٥ :

مخروط دائري قائم، نصف قطر قاعدته ٩سم، وارتفاعه ١٢سم، فما مساحته الجانبية؟

$$ل = \text{نق} + ع \text{ ومنها } ل(٩) + (٠٠٠) =$$

أي أن: ل = $١٤٤ + ٠٠٠$ ، ومنها: ل = ٢٢٥ سم، ومنها: ل = ١٥ سم

المساحة الجانبية للمخروط = ل نق π

$$\pi \times ٩ \times ١٥ =$$

$$٤٠٠٠ \text{ سم} =$$



نشاط ٦:

أُبين أن المساحة الكلية لمخروط دائري قائم، طول نصف قطره ٧ سم، وطول راسمه ٢٠ سم، تساوي ٥٩٤ سم^٢.

المساحة الجانبية للمخروط = π نق ل

$$= 3.14 \times 7 \times 20 = 440 \text{ سم}^2$$

مساحة قاعدة المخروط = π نق^٢

$$= 3.14 \times 7 \times 7 =$$

$$154 \text{ سم}^2$$

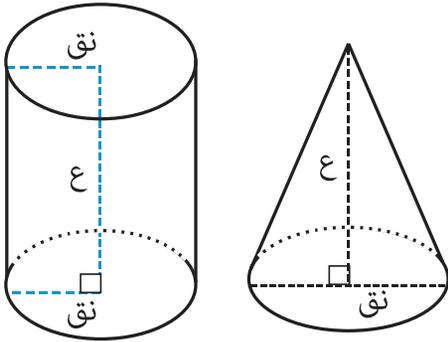
المساحة الكلية = المساحة الجانبية + مساحة القاعدة

$$= 440 + 154 =$$

$$594 \text{ سم}^2$$



نشاط ٧:



- أحضر مخروطاً، وأسطوانةً مشتركين في القاعدة والارتفاع.

- أملأ المخروط بالرمل.

- أفرغ الرمل في الأسطوانة.

- أكرّر حتى تمتلئ الأسطوانة.

- ألاحظ أن عدد المخاريط التي تملأ الأسطوانة = ٣.

أي أن: حجم المخروط = $\frac{1}{3} \times$ حجم الأسطوانة.

أتعلم: حجم المخروط = $\frac{1}{3} \times \text{حجم الأسطوانة المشتركة معه في القاعدة والارتفاع.}$

$$\frac{1}{3} \pi r^2 h =$$



نشاط ٨:



أعلنت شركة عن إمكانية إنشاء مشروع عمل صوامع لتخزين الحبوب، ذات قاعدة مخروطية، نصف قطر قاعدتها ٣م، وارتفاعها ٤م. أجد حجم الصومعة، علماً بأن ارتفاع الصومعة الكلي ١٢م .

ارتفاع الأسطوانة = الارتفاع الكلي - ارتفاع المخروط.

$$= 12 - \dots$$

$$= 000 \text{ م}$$

حجم الصومعة = حجم الأسطوانة + حجم المخروط.

$$= \pi r^2 \times \text{ارتفاع الأسطوانة} + \frac{1}{3} \pi r^2 \times \text{ارتفاع المخروط} \times \pi$$

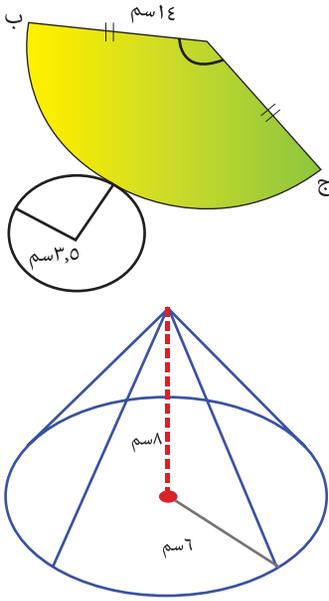
$$= \pi \times 8 \times 9 + \frac{1}{3} \pi \times 4 \times 9$$

$$= \pi 72 + \pi 12$$

$$= 000 \text{ م}^3$$



تمارين ومسائل



(١) الشكل المجاور يمثل شبكة مخروط، أجد طول $\widehat{ب ج}$.

(٢) أجد حجم المخروط الموضح في الشكل المقابل.

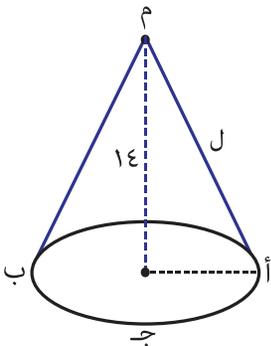
(٣) مخروط دائري قائم نصف قطر قاعدته ٤ سم ومساحته الجانبية ٦٢,٨ سم^٢،
معتبراً $(\pi = 3,14)$ ، أجد:

١- ارتفاع المخروط.

٢- طول راسم المخروط.



(٤) أجد حجم الماء الذي يملأ الكأس في الشكل المجاور،
علماً بأن محيط الحافة العلوية ٧ π سم، وارتفاع المخروط
١٠ سم (الماء يملأ الجزء المخروطي فقط).



(٥) الشكل المجاور مخروط فيه $\widehat{أ ب}$ قطر القاعدة، طول القوس

$\widehat{أ ج ب}$ يساوي ٧ π سم، ارتفاع المخروط يساوي ١٤ سم، أجد
المساحة الكلية للمخروط.



٦-٦ تمارين عامة

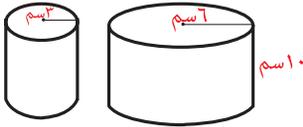
١) أضع دائرةً حول رمز الإجابة الصحيحة فيما يأتي:

١) بماذا تحدّد القطعة الدائريّة؟

- أ) نصفيّ قطريّ وقوسٍ محصورٍ بينهما. (ب) وترين وقوسٍ محصورٍ بينهما.
ج) قوسٍ ووترٍ يمرّ بنهايتيّ القوس. (د) نصفيّ قطريّ ووترٍ في الدائرة.

٢) رُسم شكلٌ سداسيّ منتظمٌ في دائرة نصف قطرها ١٤ سم، ما قياس زاوية القطاع الدائري المقابلة لأحد أضلاع الشكل السداسي؟

- أ) ٤٥° (ب) ٦٠° (ج) ٩٠° (د) ١٢٠°

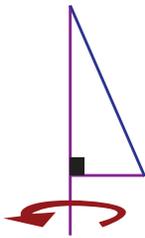


٣) قرّر مصنعٌ مضاعفةً نصف قطر علبة البندورة، كما هو موضّح في الشكل المجاور، كم يتضاعف حجم العلبة؟

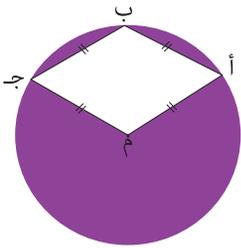
- أ) ضعفين. (ب) ٣ أضعاف. (ج) ٤ أضعاف. (د) ٦ أضعاف.

٤) معتمداً على الرسم التوضيحيّ المجاور، ما ارتفاع المخروط الناتج عن دوران مثلث قائم الزاوية، طول وتره ١٠ سم، وطول قاعدته ٦ سم؟

- أ) ٦ سم (ب) ٨ سم (ج) ١٠ سم (د) ١٦ سم



٢) أجد مساحة المنطقة المظللة في الشكل المجاور، علماً بأن مساحة الدائرة ٦٤π سم^٢، م مركز الدائرة.



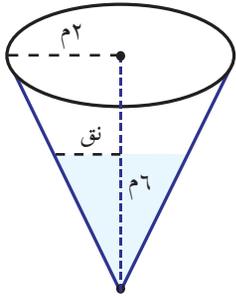


٣) قامت جمعية فلسطينية بعمل أطباق تزيين للساعات؛ للمشاركة في معرض التراث الفلسطيني "كي لا ننسى". أجد مساحة المنطقة التي يغطيها عقرب دقائق، طوله ٢١ سم خلال ٢٠ دقيقة من الحركة.



٤) أرادت طالبات الصف الثامن تصميم ثريا من أعواد، عرض العود الواحد ١ سم، كما في الشكل المجاور، إذا كان عدد الأعواد في كل أسطوانة يتبع النمط الآتي: ٢٢، ٤٤، ٦٦،، فما طول نصف قطر الأسطوانة السادسة في الثريا؟

٥) أسطوانة دائرية قائمة مملوءة بالماء، قطر قاعدتها ٢٠ سم، وارتفاعها ١٠ سم، فرغ ما فيها من ماء في إناء فارغ على شكل مخروط دائري قائم، نصف قطر قاعدته ٣٠ سم، فكم يكون ارتفاع الماء فيه؟



٦) إذا علمت أن خط الاستواء هو دائرة نصف قطرها ٦٦٥٠ كم، فما المسافة بين مدينتين على خط الاستواء التي تقابل زاوية مقدارها ٥٧° عند مركز الأرض؟

٧) بئر ماء على شكل مخروط كما في الشكل المجاور، ارتفاعه ١٠ م ونصف قطره ٢ م، إذا كان حجم الماء فيه $\frac{3}{4}$ حجمه الأصلي وارتفاع الماء ٦ م، احسب نق.

أعبر بلغتي عن المفاهيم التي كانت أكثر متعة في هذه الوحدة.

أقيم ذاتي:



مشروع الوحدة:

يعتبر الحق في الحصول على الماء من الحقوق الأساسية للأفراد، تعاني التجمعات السكانية في فلسطين من إنقطاع المياه لفترات مختلفة.

أتعاون مع أفراد مجموعتي في اقتراح خزان ماء، يلبي احتياجات إحدى المؤسسات في مكان سكني (مدرسة، مسجد، جمعية، ...)، وأوضح الفرق في التكاليف اللازمة لبناء الخزان، إذا كان مجسم الخزان على شكل متوازي مستطيلات، أو على شكل أسطوانة ومصنوعان من نفس المعدن.

<http://mawdoo3.com>

<http://www.mathgoodies.com/lessons/vol2/geometry.html>

روابط الوحدة:

النسب المثلثية



الوحدة



عن المنطقة السهليّة المجاورة.

يتوقع من الطلبة بعد الإنتهاء من دراسة هذه الوحدة والتفاعل مع أنشطتها أن يكونوا قادرين على توظيف النسب المثلثية في الحياة العملية من خلال الآتي:

- ١- تعرّف النسب المثلثية الأساسية للزاوية الحادة.
- ٢- إيجاد النسب المثلثية الأساسية لأي زاوية حادة .
- ٣- استخدام الآلة الحاسبة في إيجاد النسب المثلثية لزاوية حادة.
- ٤- تعرّف العلاقة بين جيب الزاوية وجيب تمام متممها.
- ٥- استنتاج النسب المثلثية لزوايا خاصة.
- ٦- تعريف زاويتي الارتفاع والانخفاض.
- ٧- توظيف النسب المثلثية وزوايا الارتفاع والانخفاض في حلّ مسائل حياتية.



١-٧ النسب المثلثية للزوايا الحادة (١)

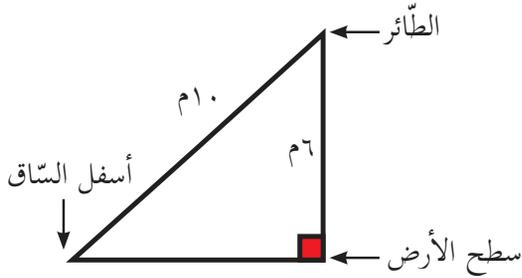


نشاط ١:

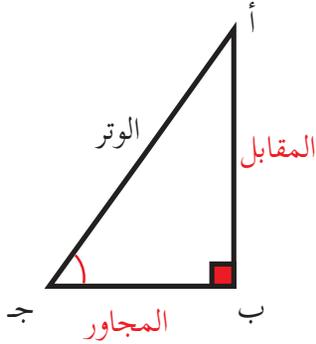


طائر الحُرِّيَّة تشبه ألوانه في تنسيقها ألوان عَلمِ فِلَسْطِين، فإذا وقف طائر الحُرِّيَّة على غُصْنِ شَجَرَةٍ، بحيثُ يرتفع ٦م عن سطح الأرض، فما نسبة ارتفاعه هذا إلى بُعْدِهِ عن أسفلِ ساقِ الشَّجَرَةِ البالغ ١٠م؟
أتأملُ الرَّسْمَ التَّوضيحيَّ المجاور، وأُكْمِلُ:

$$\frac{\text{ارتفاع الطائر عن سطح الأرض}}{\text{بعد الطائر عن أسفل الساق}} = \frac{\text{النسبة المشار إليها}}{\dots} = \dots$$



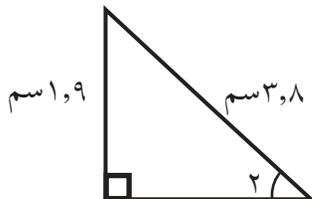
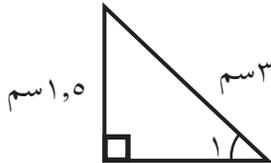
وهل تختلف هذه النسبة إذا كان ارتفاع الطائر عن سطح الأرض ٣م، وكان بُعْدُهُ عن أسفلِ ساقِ الشَّجَرَةِ ٥م؟



تعريف ١: في المثلث أ ب ج القائم الزاوية في ب، يُسمَّى الضلعُ أ ج وترَ المثلث، فيما يُسمَّى الضلعُ أ ب المقابل للزاوية ج، بينما يُسمَّى الضلعُ ب ج المجاور للزاوية ج.



نشاط ٢:

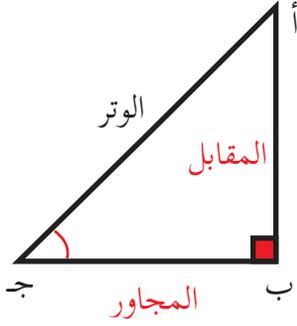


أتأملُ المثلثات القائمة الآتية التي فيها $\angle 1 = \angle 2$ ، ثم أُكْمِلُ:

$$\dots = \frac{1.5}{3} = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} \quad \text{: (للزاوية ١)}$$

$$\dots = \dots = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} \quad \text{: (للزاوية ٢)}$$

ماذا تلاحظ؟



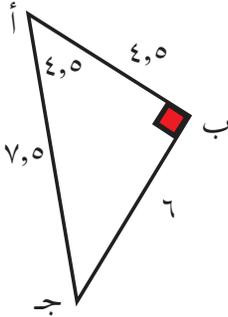
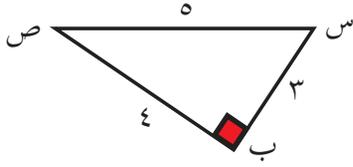
تعريف ٢: في المثلث القائم في الزاوية، يُعرَّف جيبُ الزاوية الحادَّة جـ (جاء) بأنه نسبةُ طولِ الضلعِ المقابلِ للزاوية جـ إلى طولِ الوترِ في المثلث؛ أي أن $\text{جاء} = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$



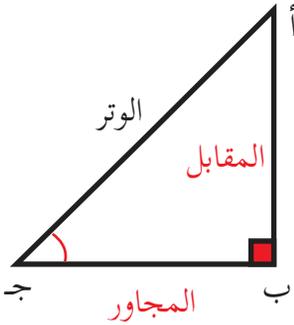
نشاط ٣:

أتأملُ المثلثات القائمة الآتية، وأُكْمِلُ الجدول الآتي:

الزاوية	طولُ مقابلها	طولُ الوتر	جيبُ الزاوية
أ	٦	٧,٥	$\frac{٦}{٧,٥}$
ج			
ص	٥		
س			



أفكّر، وأناقش: هل يمكن أن يزيدَ جيبُ الزاوية الحادَّة عن ١؟



تعريف ٣: في المثلث القائم الزاوية في ب، يُعرَّف جيبُ تمام الزاوية جـ (جتاج): بأنه نسبةُ طولِ الضلعِ المجاورِ للزاوية جـ إلى طولِ الوتر؛ أي أن $\text{جتاج} = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$



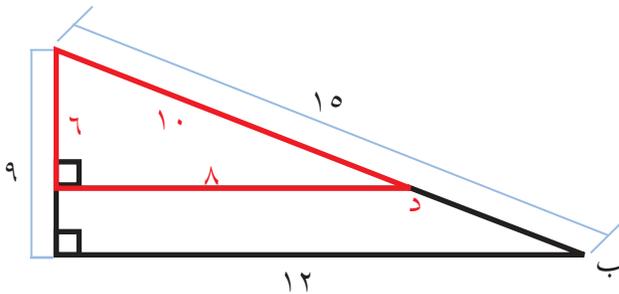
نشاط ٤:

أتأملُ الشكلَ المجاور، ثمَّ أُكْمِلُ:

$$\text{جـ} = \frac{\text{ب}}{\text{أ}} = \text{؟ (لماذا؟)}$$

$$\text{جتاد} = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{\dots}{١٠}$$

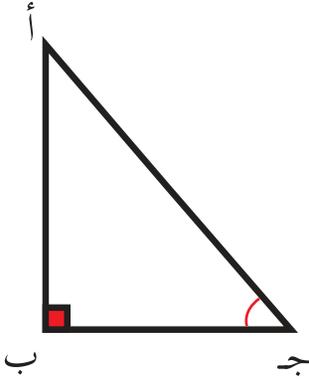
$$\text{جتاب} = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{\dots}{\dots} \text{ ماذا تلاحظ؟}$$





تعريف ٤: في المثلث القائم الزاوية في ب، يُعرفُ ظلُّ الزاوية الحادة جـ (ظاجـ): بأنه نسبةُ طولِ الضلع المقابل للزاوية جـ الى طول الضلع المجاور لها؛ أي

$$\text{أنَّ ظاجـ} = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$$



نشاط ٥:

أتأملُ الشكّلَ المجاور، وأحسبُ ظلَّ الزاوية ع بطريقتين:

من المثلث ل م ع

$$\text{فإنَّ ظاع} = \frac{\text{ل م}}{\text{م ع}}$$

$$\dots =$$

ومن المثلث س ص ع

$$\text{فإنَّ ظاع} = \dots$$

$$\dots =$$

(ماذا تلاحظ؟)



نشاط ٦:

أتأملُ الشكّلَ المجاور الذي فيه أ س = ٤ سم، س ص = ٥ سم، ب ج = ٧,٥ سم، ثمَّ أجدُ طول أ ب.

$$\text{أ) } \text{جـ} = \text{ص} \quad (\text{لماذا؟})$$

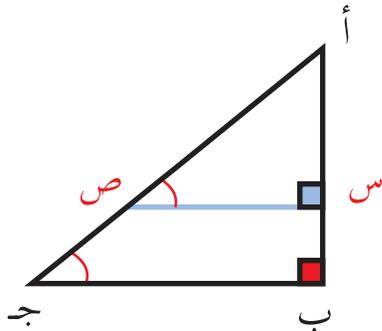
ومنها: ظاجـ = ظاص

$$\frac{\text{أ ب}}{\text{س ص}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{س ص}}$$

$$\frac{4}{5} = \frac{\text{أ ب}}{7,5}$$

$$\text{ومنها: } \dots \times 5 = \dots \times 4$$

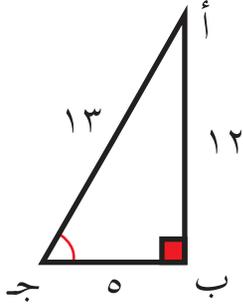
$$\text{ومنها: أ ب} = \dots \text{ سم}$$





نشاط ٧:

أتأملُ الشَّكْلَ المجاور، وَأَبْحَثُ عن العَلاقةِ بينَ ظاج، جاج، جتاج.



$$\frac{\dots}{\dots} = \text{ظاج}$$

$$\frac{\dots}{\dots} = \text{جاج} , \frac{12}{13} = \text{جتاج} = \frac{5}{13}$$

$$\frac{5}{13} \div \frac{12}{13} =$$

$$\frac{\dots}{\dots} \times \frac{12}{13} =$$

$$\dots =$$

أَتَعَلَّم: لأي زاوية حادة ج تسمى النسب: جاج، جتاج، ظاج، بالنسب المثلثية الأساسية للزاوية ج حيث $\frac{\text{جاج}}{\text{جتاج}} = \text{ظاج}$

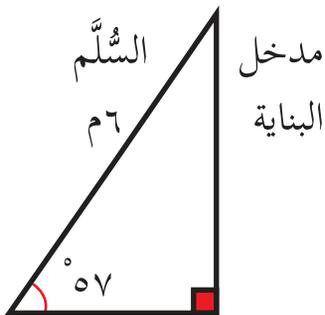


نشاط ٨:

تريدُ لمى تركيز سُلَّمٍ طوله ٦م على حائِطٍ قائمٍ ، فإذا كانت الزاوية المحصورة بين حافة السُّلَّمِ وسطح الأرض ٥٧°، فما بُعْدُ أسفلِ السُّلَّمِ عن مدخلِ البناية (أعتبرُ جتا٥٧° = ٠,٥٤).

أرسمُ رسماً توضيحياً، كما في الشَّكْلَ المجاور:

$$\text{جتا} ٥٧^\circ = \frac{\text{بُعْدُ أسفلِ السُّلَّمِ عن حافةِ البناية}}{\text{طولُ السُّلَّمِ}} \text{ (لماذا؟)}$$



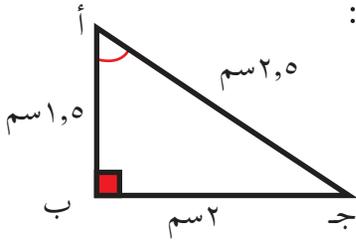
$$\text{ومنها: } ٠,٥٤ = \frac{\text{بُعْدُ أسفلِ السُّلَّمِ عن حافةِ البناية}}{\text{م... م}}$$

ومنها: بُعْدُ أسفلِ السُّلَّمِ عن حافةِ البناية =



تَمَارِينُ وَمَسَائِلُ :

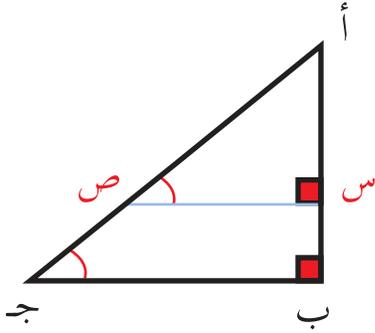
(١) أجدُ النَّسَبَ الْمُتَشَابِهَةَ الْأَسَاسِيَّةَ لِلزَّوَايَةِ أ، معتمداً على الشَّكْلِ الْآتِي :



(٢) أ ب ج مثلث قائم الزاوية في ب، فيه: أ ب = ٨ سم، ب ج = ٦ سم، أ ج = ١٠ سم،

أجدُ كلاً من: ج أ، ج ب، ج ج.

(٣) أتأمل الشَّكْلَ الْآتِي الَّذِي فِيهِ أ س = ٦ سم، س ص = ٨ سم، أ ب = ٩ سم، ثم أجدُ طَوَلَ الضِّلَعِ ب ج.



(٤) أ ب ج مثلث قائم الزاوية في ب، فيه أ ب = ٦ سم، ب ج = ٨ سم. رُسم من النقطة هـ

الواقعة على ب ج عمود على أ ج في النقطة د، فإذا كان هـ د = ٣ سم، د ج = ٤ سم، أجدُ كلاً من:

أ) ج أ ب) ظاه ج) ظاج



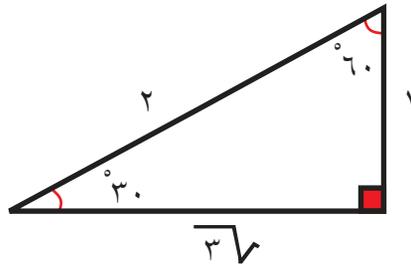
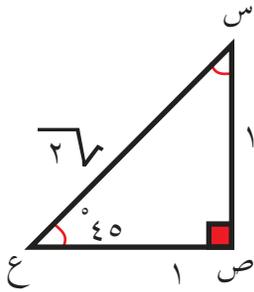
٢-٧ النسب المثلثية للزوايا الحادة (٢)



نشاط ١:

للعرب والمسلمين إنجازات مهمة في علم المثلثات، فكان البتاني أول من استخدم مصطلحي الجيب وجيب التمام، فيما يُعدُّ البيروني من أهم الذين أرسوا أسس علم المثلثات الحديث. فكيف يمكن إيجاد النسب المثلثية للزوايا الخاصة 30° ، 45° ، 60° ؟

أتأمل المثلثات الآتية، وأتعاون مع مجموعتي؛ لإكمال الجدول الآتي:



الزاوية أ	جاء	جتأ	ظأ
30°	$\frac{1}{2}$		
60°		$\frac{1}{\dots}$	
45°			



نشاط ٢:

مع تطوّر الزمن، اخترع (بليز باسكال) الآلة الحاسبة، فكيف يُمكن استخدام الآلة الحاسبة في إيجاد النسب المثلثية للزوايا الحادة؟

- يُكتَبُ جيبُ الزاوية س بالرموز جاس، ويُكتَبُ في الآلة الحاسبة (sinx).
- ويُكتَبُ جيبُ تمام الزاوية س بالرموز جتاس، ويُكتَبُ في الآلة الحاسبة (cosx).
- كما يُكتَبُ ظلُّ الزاوية س بالرموز ظاس، ويُكتَبُ في الآلة الحاسبة (tanx).

أجد النسب المثلثية الآتية لأقرب منزلتين عشريتين كلاً من: جاس 25° ، جتاس 65° ، ظاس 45° .

أضغطُ (sin)، ثمَّ أحددُ الزاوية 25° ، فيظهرُ أن جاس $25^\circ = 0.42$.

أضغطُ (cos)، ثمَّ أحددُ الزاوية 65° ، فيظهرُ أن جتاس $65^\circ = \dots$

أضغطُ tan ثمَّ أحددُ الزاوية 45° فيظهرُ أن ظاس $45^\circ = \dots$





نشاط ٣:

أستخدم الآلة الحاسبة لإيجاد كل من الآتية:



أ) جا $20^\circ = \dots\dots\dots$ ب) جتا $70^\circ = \dots\dots\dots$

ج) جا $65^\circ = \dots\dots\dots$ د) جتا $25^\circ = \dots\dots\dots$

أَتَعَلَّم: جيب الزاوية = جيب تمام الزاوية المتمة لها، والعكس صحيح، وبالرموز: جاس = جتا ($90^\circ - س$)، جتاس = جا ($90^\circ - س$).



نشاط ٤:

إذا كان جا $43^\circ = 0,68$ ، جتا $56^\circ = 0,56$ ، أكمل لإيجاد كل مما يأتي:

أ) جتا $47^\circ = \text{جا} (90^\circ - 47^\circ)$

..... = جا =

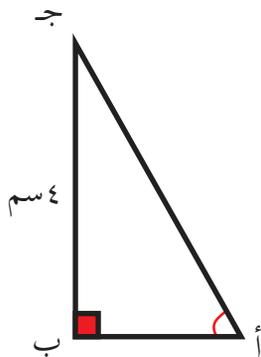
ب) جا $34^\circ = \text{جتا} (90^\circ - 34^\circ)$

..... = جتا =



نشاط ٥:

أب ج مثلث قائم الزاوية في ب، فيه ب ج = ٤ سم، فإذا كان جا $8^\circ = 0,8$ ، فما قيمة أ ج؟



أرسم رسماً توضيحياً، كما في الشكل المجاور:

جا $8^\circ = 0,8$ ، وأيضاً: جا $8^\circ = \frac{\text{ب ج}}{\text{أ ج}}$

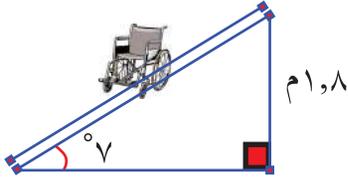
ومنها: $0,8 = \frac{4}{\text{أ ج}}$

$0,8 \times \text{أ ج} = 4$ ، ومنها: أ ج = سم



نشاط ٦:

صُمِّمَ مَمَرٌ لذوي الإعاقة، بحيثُ يميلُ بزاويةٍ مقدارها 7° عن المستوى الأفقيِّ، فإذا كان ارتفاعُ نقطةٍ نهايةِ الممرِّ $1,8$ م، فما طولُ هذا الممرِّ؟



أرسمُ شكلاً توضيحياً، ومن الشكلِ ألاحظُ أنَّ:

$$\text{جا } 7^\circ = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}، \text{ ومنها:}$$

$$\text{طول الممرِّ} \times \dots = 1,8 \text{ (لماذا؟)}$$

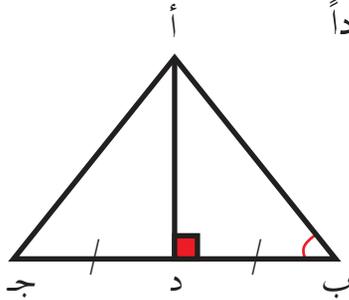
$$\text{طول الممرِّ} = \dots \text{ م.}$$



نشاط ٧:

أ ب ج مثلثٌ متساوي الأضلاع، طولُ ضلعه 8 سم، فما ارتفاعُ هذا المثلث؟

أرسمُ مثلثاً متساوي الأضلاع، كما في الشكلِ المُجاور، وأنزلُ عموداً



من الرأسِ أ على القاعدةِ ب ج.

$$\text{طولُ ب د} = 4 \text{ سم (لماذا؟)}$$

$$\sin 60^\circ = \frac{\text{ب د}}{\text{أ د}} \text{ (لماذا؟)}$$

$$\text{ومنها: ظا } 60^\circ = \frac{\text{أ د}}{4}$$

$$\text{أ د} = \dots \text{ سم}$$



تَمَارِينُ وَمَسَائِلُ :



(١) أستخدمُ الآلةَ الحاسبةَ لإيجادِ كُلِّ من :

$$\text{جا } ٣٣^\circ ، \text{جتا } ٧٠^\circ ، \text{ظا } ١٠^\circ$$

(٢) أجدُ القيمةَ العدديةَ للمقدار: (أ) $\text{جا } ٣٠^\circ + ٢ \text{ جا } ٦٠^\circ$

(ب) $\text{جتا } ٦٠^\circ + ٢ \text{ جا } ٦٠^\circ$

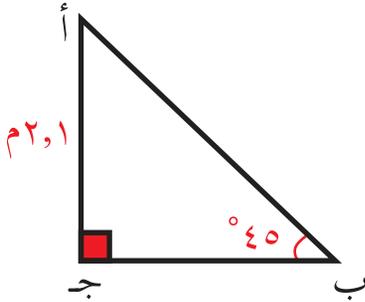
(ج) $٢ (\text{جا } ٤٥^\circ) (\text{جتا } ٤٥^\circ)$

$$(د) \frac{\text{جا } ٧٠^\circ}{\text{جتا } ٧٠^\circ}$$

$$(هـ) \frac{\text{جا } ٤٠^\circ}{\text{جتا } ٥٠^\circ}$$

(٣) إذا كانَ $\text{جا } ١٥^\circ = ٠,٢٦$ ، $\text{جتا } ٥٠^\circ = ٠,٦٤$ ، أجدُ كلاً من :

(أ) $\text{جتا } ٧^\circ$ (ب) $\text{جا } ٤٠^\circ$



(٤) يُوضِّحُ الشَّكْلُ المُجاوِرُ مُثَلَّثًا قائمَ الزَّاويةِ في ج، فإذا

كانَ أ ج = ٢,١ م ، $\text{ب} = ٤٥^\circ$ ، فما محيطُ هذا المُثَلَّثِ؟

(٥) يرتفعُ عمودٌ عن سطحِ الأرض ٤ م، فما طولُ ظلِّ ذلكَ العمودِ، عندما تميلُ أشعةُ الشَّمسِ بزاويةٍ مقدارها ٣٠° عن المستوى الأفقيِّ.

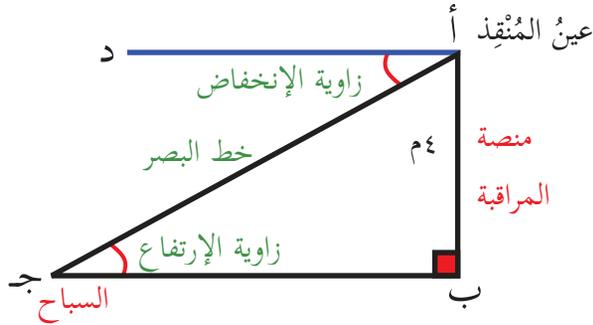


٣-٧ زوايا الارتفاع وزوايا الانخفاض



نشاط ١:

يبلغ طول الساحل الفلسطيني على البحر المتوسط من رأس الناقورة شمالاً إلى رفح جنوباً ٢٢٤ كم، فإذا نظر مراقب إنقاذ يقف على منصبة ارتفاعها عن الشاطئ ٤ م إلى سباح أمامه، يبعد ٢٥ م عن أسفل المنصبة، فماذا تسمى الزاوية التي نظر بها المراقب، وبماذا تختلف هذه الزاوية عن تلك التي ينظر بها السباح إلى المراقب؟



أرسم رسماً توضيحاً، كما في الشكل المجاور، بحيث تمثل القطعة المستقيمة أ ج خط البصر، ومن الشكل المجاور يتضح أن:

$$\angle د أ ج = \angle ب ج أ \text{ (لماذا؟)}$$

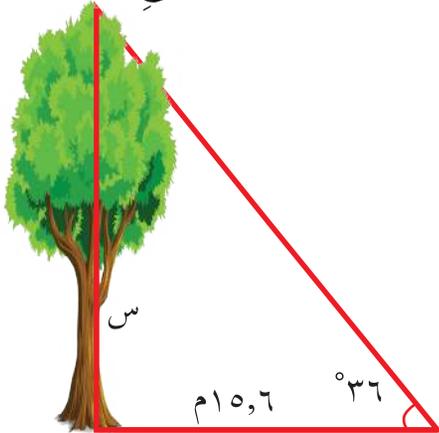
تسمى $\angle د أ ج$ **زاوية الانخفاض**، وهي الزاوية المحصورة بين المستوى الأفقي للنظر، وخط البصر تحت المستوى الأفقي، بينما تسمى $\angle ب ج أ$ **زاوية الارتفاع**، وهي الزاوية المحصورة

.....و.....



نشاط ٢:

من نقطة تبعد مسافة ١٥,٦ متراً من قاعدة شجرة، ووجد أن زاوية ارتفاع قمة الشجرة ٣٦°، فما ارتفاع هذه الشجرة؟



أرسم شكلاً توضيحياً، وأعتبر ارتفاع الشجرة س

$$\frac{س}{١٥,٦} = \tan ٣٦^\circ$$

$$\text{ومنها: } س = ١٥,٦ \times ٠,٧٣$$

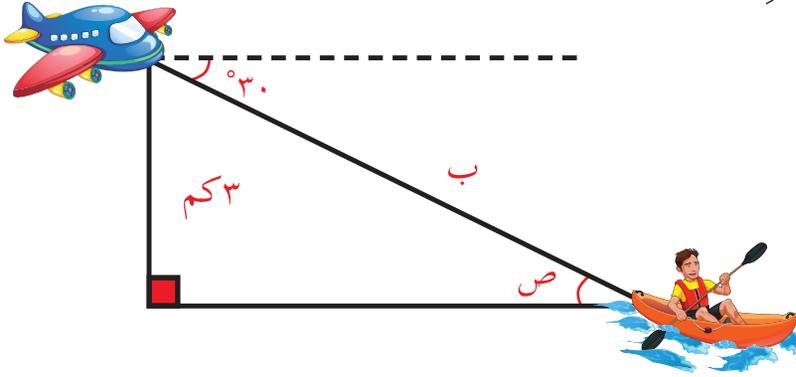
$$س = \dots\dots\dots م$$



نشاط ٣:

رصدَ طيارٌ قارباً بزواوية انخفاضٍ مقدارها 30° ، أجدُ البُعدَ بينَ القاربِ والطائرة، علماً أنَّ الطائرة تُحلِّقُ على ارتفاعِ ٣ كم فوق مستوى سطحِ البحرِ؟

أرسمُ شكلاً توضيحياً، كما في الشكلِ المجاور: أعتبرُ ب: بُعدَ الطائرة عن القارب.



ومنها: $\sin 30^\circ = \frac{3}{b}$ (لماذا؟)

$$\sin 30^\circ = \frac{3}{b}$$

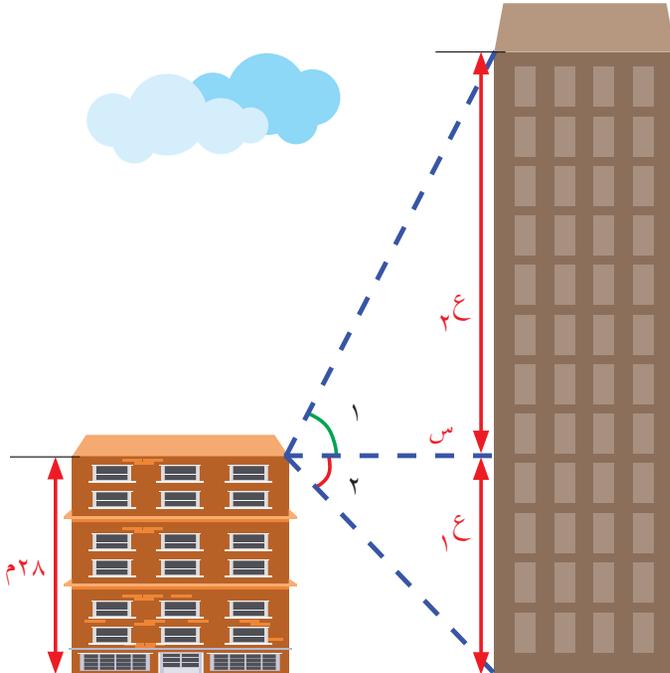
ومنها: $b = \frac{3}{\sin 30^\circ}$

$$b = \frac{3}{0.5} = 6 \text{ كم}$$



نشاط ٤:

تُبِتَّ كاميرا على سطحِ مبنى ارتفاعه ٢٨ م قبالة برجٍ عالٍ، رصَدَتِ الكاميرا قِمَّةَ البُرجِ بزواوية ارتفاعٍ مقدارها 51° ، ورصدت أسفلَ البُرجِ بزواوية انخفاضٍ مقدارها 32° ، أجدُ:
١- البُعدَ بينَ المبنى والبرج. ٢- ارتفاعَ البرج عن سطح الأرض.



أمثِّلُ المعطيات، كما في الشكلِ المجاور:

$$\sin 32^\circ = \frac{28}{s} \text{ (لماذا؟)}$$

$$\sin 32^\circ = \frac{28}{s} \text{ (لماذا؟)}$$

$$s = \frac{28}{\sin 32^\circ} = 51.62 \text{ م}$$

$$s = 51.62 \text{ م}$$

وهي البعد بين المبنى والبرج.

ارتفاع البناية = $ع_1 + ع_2$

$$١٣٥ = ١٣٥$$

ومنها: ظل $٥١^\circ = \frac{ع_2}{س}$ (لماذا؟)

ومنها: $ع_2 = س \times ١,٢٣$

ومنها: $ع_2 = \dots\dots\dots م$

أي أنّ ارتفاع البناية = $ع_1 + ع_2 = \dots\dots\dots م$





تمارين ومسابيل :

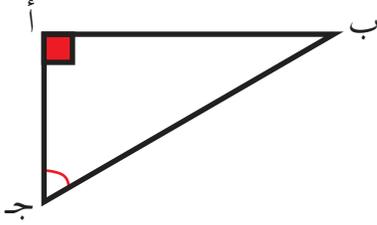
- (١) تطير طائرة أفقيًا على ارتفاع ٦ كم، فإذا رصدت الطائرة هدفًا على الأرض بزاوية انخفاض مقدارها 60° ، فما بُعد الطائرة عن الهدف في تلك اللحظة؟
- (٢) أثناء عملية إنقاذ المصابين في حادث تصادم قاربتين في عرض البحر، رصدت كاميرا طائرة مروحية رجلاً يستغيث، فإذا كانت زاوية انخفاض هذا الرجل 30° ، وكان بُعد الرجل عن الكاميرا ٢٠٠ م، فما ارتفاع الكاميرا عن سطح البحر في تلك اللحظة؟
- (٣) قاس أحمد زاوية ارتفاع شجرة، فكانت 70° ، ثم تحرك إلى الخلف مسافة ١٠ م، وقاس زاوية ارتفاعها، فكانت 26° ، فما ارتفاع هذه الشجرة؟



٤-٧ تمارين عامة

(١) أضع دائرة حول رمز الإجابة الصحيحة:

(١) أ ب ج مثلث قائم الزاوية في أ، أي الآتية تمثل جاج؟



(أ) $\frac{أب}{أج}$ (ب) $\frac{أب}{بج}$

(ج) $\frac{أب}{بج}$ (د) $\frac{أج}{بج}$

(٢) أي الآتية يمكن أن يمثل جيب تمام زاوية حادة؟

(أ) صفر (ب) ٠,٨٩ (ج) ١ (د) ٢

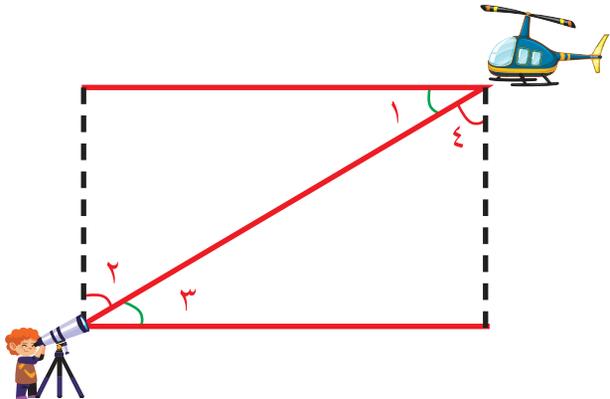
(٣) أي الآتية تساوي جا ٤٠°؟

(أ) جتا ٤٠° (ب) جا ٥٠° (ج) جتا ٥٠° (د) ظا ٥٠°

(٤) ما قيمة حا ٥٢°؟

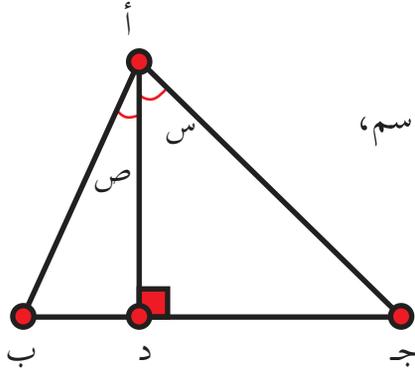
(أ) ٠,٢٥ (ب) ٠,٥ (ج) ٠,٧٥ (د) ١

(٥) في الشكل الآتي، ما الزاوية التي تمثل زاوية ارتفاع المروحية؟



(أ) ١ (ب) ٢

(ج) ٣ (د) ٤



(٢) المثلثُ أ ب ج، فيه أ د عموديٌّ على ب ج، حيثُ إنَّ:
 أ ج = ٢٠ سم، أ ب = ١٥ سم، أ د = ١٢ سم، ب ج = ٢٥ سم،
 ب د = ٩ سم، أ ج د:

- (أ) جاس
 (ب) ظاص
 (ج) جاب
 (د) جتاج



(٣) أجدُ قيمةَ كُلِّ من الآتية، دونَ استخدامِ الآلةِ الحاسبة:

(أ) ظاه ٤° + جا ٣٠°

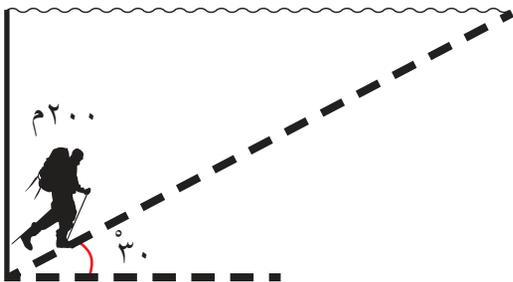
(ب) جتا ٣٣° - جا ٥٧°

(٤) أجدُ كُلاً من الآتية:

(أ) جتا ٦٣°

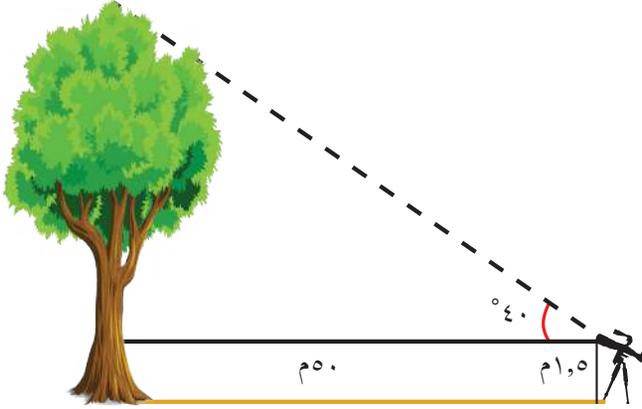
(ب) جا ٢٤°

(ج) ظا ٨٠°



(٥) يريدُ رياضيٌّ تَسَلُّقَ منحدرٍ، ارتفاعُ قِمَّتِهِ ٢٠٠ م
 عن نقطة انطلاقه، حيثُ يمشي في مسارٍ مائلٍ بزوايةٍ
 مقدارها ٣٠°، كما في الشكلِ المجاور، فما طولُ
 المسارِ الَّذي سيسلكهُ الرياضيُّ حتَّى يَصِلَ إلى قِمَّةِ
 المُنحدرِ؟

٦) رَصَدَتْ كَامِيرَا مُثَبَّتَةً عَلَى ارْتِفَاعِ ١,٥ مِ عَنْ سَطْحِ الْأَرْضِ قِمَّةَ شَجَرَةٍ، بِزَاوِيَةِ ارْتِفَاعٍ مِقْدَارُهَا ٤٠°، فَإِذَا كَانَتِ الْكَامِيرَا تَبْعُدُ ٥٠ مِ تَرْتِماً عَنْ سَاقِ الشَّجَرَةِ، كَمَا فِي الشَّكْلِ.



أَجِدْ كَلَاماً مِنْ:

(١) إِرْتِفَاعُ هَذِهِ الشَّجَرَةِ.

(٢) بُعْدُ الْكَامِيرَا عَنْ قِمَّةِ الشَّجَرَةِ؟ وَهَلْ يُمَكِّنُ إِيجَادُ هَذَا الْبُعْدِ بِطَرِيقَةٍ مُخْتَلِفَةٍ؟

٧) رَصَدَتْ طَائِرَةٌ مَوْقِعاً لِهَدَفٍ مَعِينٍ بِزَاوِيَةِ انْحِفَاضٍ مِقْدَارُهَا ٦٠°، فَإِذَا كَانَ احْتِمَالُ إِصَابَةِ الْهَدَفِ يُعْطَى بِالْقَاعِدَةِ $\frac{1}{2}$ جَاسٍ، حَيْثُ سَ تَمَثِّلُ زَاوِيَةَ الْانْحِفَاضِ. أَحْسِبْ احْتِمَالِيَّةَ إِصَابَةِ الْهَدَفِ.

أَقِيمْ ذَاتِي:



أَعْبِرْ بِلُغَتِي عَنْ تَوْظِيْفِ الْمَفَاهِيمِ الَّتِي تَعَلَّمْتَهَا فِي هَذِهِ الْوَحْدَةِ فِي حَيَاتِي الْعَمَلِيَّةِ.



مَشْرُوعُ الْوَحْدَةِ:

تُعَدُّ الْيَافِطَةُ التَّعْرِيفِيَّةُ لِلْمَدْرَسَةِ عُنْوَاناً مَهْماً، وَتَحْظِي بِأَهْمِيَّةٍ خَاصَّةٍ، فَإِذَا أَرَادَتِ الْمَدْرَسَةُ تَجْدِيدَ الْيَافِطَةِ، فَكَيْفَ تَسَاعَدُ الْمَدْرَسَةُ فِي تَحْدِيدِ مَوْقِعِ الْيَافِطَةِ، بِحَيْثُ تَكُونُ عَلَى ارْتِفَاعٍ مَنَاسِبٍ؟ أَتَعَاوَنُ مَعَ أَفْرَادِ مَجْمُوعَتِي فِي اقْتِرَاحِ بَعْضِ زَوَايَا الْارْتِفَاعِ؛ لِتَحْدِيدِ ارْتِفَاعِ هَذِهِ الْيَافِطَةِ، وَكَذَلِكَ اقْتِرَاحِ زَوَايَا ارْتِفَاعٍ مَنَاسِبَةٍ لِمَعْلَقَاتٍ مَهْمَةٍ فِي الصَّفِّ، مِثْلُ: سَاعَةِ حَائِطٍ، وَلَوْحَةِ تَعْلِيمِيَّةٍ،

الاحتمالات

الوحدة



تُعدُّ لعبةُ المنقلة من الألعاب التراثية الفلسطينية، أتأملُ الصورة، وأبحثُ عن كيفيةِ توظيفِ مفاهيمِ الاحتمالات في بحثِ اللاعبين عن الفوز باللعبة.

يتوقع من الطلبة بعد الإنتهاء من دراسة هذه الوحدة والتفاعل مع أنشطتها أن يكونوا قادرين على توظيف قوانين الاحتمالات في الحياة العمليّة من خلال الآتي:

- ١- إيجاد احتمال حادث في تجربة عشوائية.
- ٢- إيجاد احتمال الاتحاد لأي حادثين.
- ٣- إيجاد احتمال متممة حادث.
- ٤- إيجاد احتمال الفرق بين حادثين.
- ٥- توظيف الاحتمالات في حل مسائل حياتية.



٨-١ احتمال الحادث



نشاط ١:



أصدر مجلس النقد الفلسطيني أثناء الانتداب البريطاني نقوداً من مصكوكات معدنية برونزية ونكلية وفضية كانت القطع الفضية دائرية الشكل غير مثقوبة، يظهر على الوجه الأول غصن الزيتون وكلمة فلسطين وعلى الوجه الثاني العدد (١٠٠) مل. فإذا القيت إحدى هذه القطع الفضية مرتين، فما احتمال الحادث ح الذي يمثل ظهور العدد ١٠٠ مرتين؟ أرمز للنتيجة الظاهرة على الوجه الأول بالرمز ص وعلى الوجه الثاني بالرمز ك. الفضاء العيني $(\Omega) = \{ ص ص ، ص ك ، ك ص ، ك ك \}$

$$ح = \{ ك ك \}$$

$$\text{ومنها ل(ح)} = \frac{\text{عدد عناصر ح}}{\text{عدد عناصر } \Omega} = \dots$$

عدد عناصر ح

أذكر: إذا كان ح حادثاً في فضاء عيني Ω ، فإن احتمال الحادث ح = $\frac{\text{عدد عناصر ح}}{\text{عدد عناصر } \Omega}$

$$\frac{ع(ح)}{ع(\Omega)} = \text{ل(ح)}$$



نشاط ٢:

لدى رمي حجر الترد المنتظم مرةً واحدةً، وملاحظة الرقم الظاهر على الوجه العلوي، أكتب Ω ، ثم أحسب احتمال الحوادث ح_١، ح_٢، ح_٣، ح_٤:

$$\Omega = \{ ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ \}$$

(١) ح_١: ظهور عدد زوجي

$$ح_١ = \{ ٢ ، ٤ ، ٦ \} \text{ ومنها ل(ح}_١) = \frac{ع(ح_١)}{ع(\Omega)} = \dots ، \text{ وهو عدد موجب}$$

(٢) ح_٢: ظهور عدد أقل من ٢

$$\begin{aligned}
 & \dots = \frac{ع(ح)}{ع(\Omega)} = \text{ومنها ل(ح)} = \{1\} = ح_1 \quad \text{، وهو عدد } \dots \\
 & (3) \quad ح_1: \text{ ظهور عددٍ أقل من } 1 \\
 & \dots = \frac{\cdot}{\cdot} = \text{ومنها: ل(ح)} = \emptyset = ح_2 \quad \text{(لماذا؟)} \\
 & (4) \quad ح_2: \text{ ظهور عددٍ أكبر من صفر} \\
 & ح_3 = \Omega \quad \text{(لماذا؟)} \quad \text{ومنها: ل(ح)} = 1 \quad \text{(لماذا؟)}
 \end{aligned}$$

أتذكّر: لأيّ حادث ح، فإنّ: صفر \geq ل(ح) \geq ١



نشاط ٣:



صندوقان يضمّ الأول ٣ بطاقاتٍ مرقّمةً بالأرقام ٢، ٤، ٥ ويضمّ الثاني بطاقتين مرقّمةً بالأرقام ٤، ٦، تريد لى سحب بطاقةٍ من الصندوق الأول، ثمّ سحب بطاقةٍ من الصندوق الثاني. أكمل إيجاداً احتمالات الحوادث الآتية:

$$\begin{aligned}
 & ح_1: \text{ ظهور عددَيْن مجموعهما } 8 \quad ، \quad ح_2: \text{ ظهور عددَيْن زوجيّين} \\
 & \Omega = \{(6, 5), (4, 5), (6, 4), (4, 4), (6, 2), (4, 2)\} \\
 & ح_1 = \{(6, 2), \dots\} \quad \text{ومنها: ل(ح)} = \frac{2}{6} \quad \text{(لماذا؟)} \\
 & ح_2 = \{(6, 2), (4, 2), (6, 4), (4, 4)\} \quad \text{ومنها: ل(ح)} = \dots
 \end{aligned}$$

نشاط ٤:



لدى تسجيل المواليد للأسر ذات الأطفال الثلاثة، حسب الجنس وتسلسل الولادة. فإذا تمّ اختيار أسرة عشوائياً، أجد احتمال الحوادث الآتية:

$$\begin{aligned}
 & ح_1: \text{ أن يكون لدى الأسرة ولدان فقط.} \\
 & ح_2: \text{ أن يكون لدى الأسرة ولدان على الأقل.} \\
 & \Omega = \{ووو، ووب، وبو، ووب، بوب، بوب، ببو، ببب\} \\
 & \text{ومنها: ع}(\Omega) = \dots
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & ح_1 = \{ووو، ووب، وبو، ببو\} \quad \text{ومنها: ل(ح)} = \frac{\cdot\cdot\cdot}{8} \\
 & ح_2 = \{ووو، ووب، وبو، ببو\} \quad \text{ومنها: ل(ح)} = \frac{\cdot\cdot\cdot}{8}
 \end{aligned}$$



نشاطه:

مجموعة علب عصير تضم ٣ علب عصير ليمون، و٥ علب عصير تفاح، و٢ علبة عصير عنب، غُمرت في حوض ماء فأزيلَ عنها اللاصقُ الخارجي الذي يغلفها، فإذا اختيرت علبةٌ عشوائياً، فما احتمال أن تكونَ العلبة المختارة:

(١) تحتوي عصير تفاح. (٢) تحتوي عصير عنب.

$$(١) \text{ ل (العلبة تحتوي عصير تفاح)} = \frac{\text{عدد علب التفاح}}{\text{عدد العلب الكلي}} = \frac{٥}{١٠}$$

$$(٢) \text{ ل (العلبة تحتوي عصير عنب)} = \frac{\text{عدد علب العنب}}{\text{عدد العلب الكلي}} = \frac{٢}{١٠}$$



نشاط ٦:

تمَّ إيجادُ زمرةِ الدم لمجموعةٍ من الأشخاص، فكانت كما في الجدول الآتي، فإذا تمَّ اختيارُ شخصٍ عشوائياً، فما احتمال الحوادث الآتية؟

AB	B	A	O	فصيلة الدم
١٠	١٥	٣٥	٤٠	عدد الأشخاص

- (١) ح_١: أن تكون فصيلة دم الشخص A.
(٢) ح_٢: أن تكون فصيلة دم الشخص AB.
(٣) ح_٣: أن تكون فصيلة دم الشخص O أو B.

$$\text{ل(ح)} = \frac{ع(ح)}{ع(\Omega)} \quad \text{ومنها: (١) ل(ح)} = \frac{٣٥}{١٠٠}$$

$$(٢) \text{ ل(ح)} = \frac{١٥}{١٠٠}$$

$$(٣) \text{ ل(ح)} = \frac{٤٠}{١٠٠}$$

$$\frac{١٠}{١٠٠} =$$



تمارين ومسائل:

- (١) يريد أحمد اختيار مِظَلَّةٍ عشوائياً من صندوقٍ يضمُّ ٣ مِظَلَّاتٍ ملوَّنة برسومٍ للأطفال، و ٧ منها ملوَّنة بالأزرق، و ٣ منها ملوَّنة بالأصفر، ما احتمال:
- (أ) أن تكون المِظَلَّةُ المختارة ملوَّنة برسوم الأطفال؟
- (ب) أن تكون المِظَلَّةُ المختارة ملوَّنة بالأزرق؟
- (ج) أن تكون المِظَلَّةُ المختارة غير ملوَّنة برسوم الأطفال؟

Blue	Green	White	Orange	White
White	Blue	Red	Red	Orange
Red	Orange	Green	Blue	Blue
Green	White	Blue	White	Red
Red	Orange	Orange	Blue	White

- (٢) تريد سناء رمي سهمٍ باتجاه لوحةٍ ملوَّنة، كما في الشكل المجاور، فما احتمال أن يُصِيبَ هذا السَّهمُ المنطقة الملوَّنة باللون الأحمر؟

- (٣) لدى رمي قطعةٍ نقدٍ ثلاث مرّاتٍ وملاحظة النتائج الظاهرة على الوجه العلوي في الرميات الثلاث، أجد احتمال الحوادث الآتية:
- (أ) ح_١: ظهور صورة وكتابتين.
- (ب) ح_٢: ظهور صورتين على الأقل.
- (ج) ح_٣: أن تكون النتائج على الأوجه الثلاثة متشابهة.

- (٤) لدى إلقاء قطعةٍ نقدٍ، ثم رمي حجرٍ نرد، أجد احتمال الحوادث الآتية:
- (أ) ح_١: ظهور صورة، وعدد زوجي.
- (ب) ح_٢: ظهور كتابة، وعدد أقل من ٣.

- (٥) إذا كان ح_١، ح_٢ حادثين في فضاءٍ عينيّ، وكان ل (ح_١) = ٠,٦، وكان ع (ح_١) = ٣، ع (ح_٢) = ٤، فما قيمة ل (ح_٢)؟

- (٦) إذا كان ل (ح_١) = ل (ح_٢)، بيّن بمثال أن ح_١ ≠ ح_٢.



٢-٨ قوانين الاحتمالات



نشاط ١:

يُراد اختيار حرفٍ عشوائياً من مجموعة بطاقاتٍ كُتبت عليها الحروف:
س، ل، ق، د، ت، ف، ط، ي، ن، و، ب، ر، ا. اكتب الحوادث الآتية، ثم أكمل:
ح_١: اختيار أحد حروف كلمة بيسان. ، ح_٢: اختيار أحد حروف كلمة طبرياً.

ح_١ = { ب ، ي ، س ، ا ، ن } ، ومنها: ل(ح_١) = $\frac{٥}{١٣}$ (لماذا؟)

ح_٢ = { ط ، ب ، ر ، ي ، ا } ، ومنها: ل(ح_٢) = $\frac{٥}{١٣}$ (لماذا؟)

ح_١ ∩ ح_٢ = { ب ، ي ، ا } ، ومنها: ل(ح_١ ∩ ح_٢) = $\frac{٣}{١٣}$ (لماذا؟)

ح_١ ∪ ح_٢ = { ب ، ي ، س ، ا ، ن ، ط ، ر } ، ومنها: ل(ح_١ ∪ ح_٢) = ، فكيف
يمكن إيجاد ل(ح_١ ∪ ح_٢) بطريقةٍ أخرى؟

أندكّر: إذا كان ح_١ ، ح_٢ حادثين في فضاءٍ عينيّ، فإن ل(ح_١ ∩ ح_٢) هو احتمال
حدوث الحادثين ح_١ ، ح_٢ معاً، أمّا ل(ح_١ ∪ ح_٢)، فهو احتمال حدوث أحد الحادثين
ح_١ أو ح_٢ على الأقلّ وأنّ: ل(ح_١ ∪ ح_٢) = ل(ح_١) + ل(ح_٢) - ل(ح_١ ∩ ح_٢)



نشاط ٢:

أكمل إيجاد ل(ح_١ ∪ ح_٢) في كلّ ممّا يأتي:

(١) إذا كان ل(ح_١) = ٠,٤ ، ل(ح_٢) = ٠,٧ ، ل(ح_١ ∩ ح_٢) = ٠,٢

$$ل(ح_1 \cup ح_2) = ل(ح_1) + ل(ح_2) - ل(ح_1 \cap ح_2)$$

$$= ٠,٤ + \dots - \dots$$

$$= ٠,٩ - ١,١ = \dots$$

$$(1) \text{ إذا كان } L(H_1) = 0,7, \text{ } L(H_2) = 0,3, \text{ } L(H_1 \cap H_2) = 0,3$$

$$L(H_2) = 0,7 \text{ ومنها: } L(H_2) = 0,7$$

$$\text{ومنها: } L(H_1) = 0,35 \text{ (لماذا؟)}$$

$$L(H_1 \cup H_2) = L(H_1) + L(H_2) - L(H_1 \cap H_2)$$

$$0,7 = 0,35 + 0,3 - \dots$$

...



نشاط ٣:

إذا كان احتمال نجاح رجاء في امتحان الرياضيات 0,7، واحتمال نجاحها في امتحان اللغة العربية 0,8، واحتمال نجاحها في الإمتحانين معاً 0,6، فما احتمال نجاح رجاء في أحد هذين الإمتحانين؟

أفرض أن: $L(H_1)$ = احتمال نجاح رجاء في الرياضيات، ومنها: $L(H_1) = 0,7$

وأن: $L(H_2)$ = احتمال نجاح رجاء في اللغة العربية، ومنها: $L(H_2) = 0,8$

أستنتج أن: $L(H_1 \cap H_2) = 0,6$ (لماذا؟)، وأن المطلوب هو: $L(H_1 \cup H_2)$ (لماذا؟)

$$L(H_1 \cup H_2) = L(H_1) + L(H_2) - L(H_1 \cap H_2)$$

$$0,6 = 0,8 + 0,7 - \dots$$

$$0,6 = 1,5 - \dots$$

$$\dots = \dots$$



نشاط ٤:

لدى اختيار عدد عشوائياً من المجموعة س = {11، 12، 13، 14، 15، 16، 17، 18، 19} إذا كان H_1 : يمثل اختيار عدد زوجي، H_2 : يمثل اختيار عدد يقبل القسمة على 5، أجد:

$$L(H_1 \cap H_2)$$

$$H_1 = \{12, \dots, \dots, 18\}$$

$$H_2 = \{15\} \text{ (لماذا؟)}$$

$$L(H_1 \cap H_2) = \emptyset \text{ (لماذا؟)، ومنها: } L(H_1 \cap H_2) = \dots$$



أتعلم: إذا كان C_1, C_2 حدثين منفصلين ($C_1 \cap C_2 = \emptyset$)، فإن:
 $L(C_1 \cap C_2) = \text{صفر}$ ،
وعندها يكون $L(C_1 \cup C_2) = L(C_1) + L(C_2)$.



أناقش: الحادثان المنفصلان، هما حادثان لا يمكن أن يحدثا في الوقت ذاته.



نشاط ٥:

إذا كان C_1, C_2 حدثين في فضاء عيني، وكان $L(C_1) = 0.4$ ، $L(C_2) = 0.5$ ،
 $L(C_1 \cup C_2) = 0.8$ ، فهل C_1, C_2 منفصلان؟
 $L(C_1 \cup C_2) = L(C_1) + L(C_2) - L(C_1 \cap C_2)$
 $0.8 = 0.4 + 0.5 - L(C_1 \cap C_2)$
 $0.8 = 0.9 - L(C_1 \cap C_2)$
 $L(C_1 \cap C_2) = 0.1$ (لماذا؟)
ومنها: $L(C_1 \cap C_2) = 0.1$
وعليه فإن: C_1, C_2 غير منفصلين.



نشاط ٦:

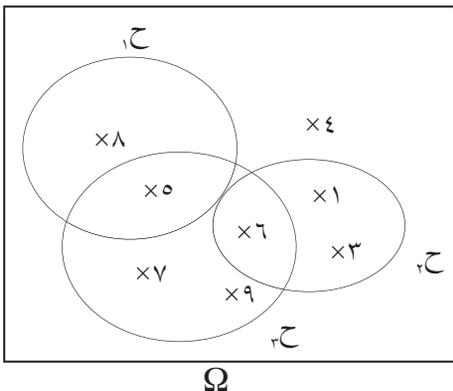
أتأمل التمثيل المجاور بأشكال فن للفضاء العيني (Ω)،
لتجربة عشوائية والحوادث C_1, C_2, C_3 ، ثم أكمل:

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

$$C_1 = \{5, 8\} \text{ ومنها: } L(C_1) = \frac{2}{9}$$

$$C_2 = \{1, 3, 6\} \text{ ومنها: } L(C_2) = \dots$$

$$C_3 = \{5, 6, 7, 9\} \text{ ومنها: } L(C_3) = \dots$$



$$\dots = {}_1C \cap {}_2C$$

ومنہا: ${}_1C + {}_2C = ({}_1C \cup {}_2C)$ (لماذا؟)

$$\dots = \frac{3}{8} + \frac{2}{8} =$$

$$\dots = ({}_1C \cap {}_2C) \text{ ومنہا } \{6\} = {}_1C \cap {}_2C$$

$$({}_1C \cap {}_2C) - ({}_1C) + ({}_2C) = ({}_1C \cup {}_2C)$$

$$\frac{1}{8} - \frac{4}{8} + \frac{3}{8} =$$

$$\dots = \text{(لماذا؟)}$$

$$\dots = ({}_1C \cap {}_3C) \text{ ومنہا: } \{5\} = {}_1C \cap {}_3C$$

$$({}_1C \cap {}_3C) - ({}_1C) + ({}_3C) = ({}_1C \cup {}_3C)$$

$$\frac{1}{8} - \frac{4}{8} + \frac{2}{8} =$$

$$\dots = \text{(لماذا؟)}$$

أناقش: يمكن إيجاد اتحاد حدثين بطريقتين.





تمارين ومسائل

(١) يضمُّ صفٌّ ٣٠ طالباً، فإذا كان ١٤ منهم يتابعون مباريات كرة القدم، ١٠ منهم يتابعون مباريات كرة السلة، ٨ يتابعون مباريات اللعبتين. فإذا تمَّ اختيارُ أحدِ طلاب الصفِّ عشوائياً، فما احتمال أن يكون هذا الطالب من متابعي:

أ) مباريات كرة السلة وكرة القدم. ب) مباريات كرة السلة أو كرة القدم.

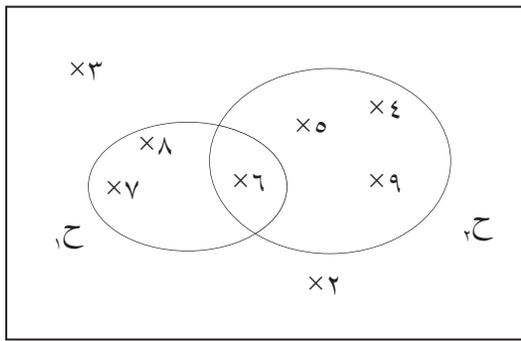
(٢) إذا كان احتمال نجاح يميني في الرياضيات ٠,٧٥، واحتمال نجاحها في الفيزياء ٠,٨، واحتمال نجاحها في الرياضيات، أو الفيزياء = ٠,٨٨، فما احتمال نجاحها في المبحثين معاً؟

(٣) إذا كان $L(A) = 0,2$ و $L(B) = 0,3$ وكان $L(A \cup B) = 0,7$ ، $L(A \cap B) = 0,3$ ، أجد: $L(A)$ ، $L(B)$.

(٤) سُحِبَتْ بطاقة عشوائياً من صندوق يضمُّ ٨ بطاقاتٍ مرقّمة بالأرقام: ١ إلى ٨، فإذا كان

ح_١: يمثلُ ظهورَ عددٍ أولي.
ح_٢: يمثلُ ظهورَ مربعٍ عددٍ طبيعيّ.
ح_٣: يمثلُ ظهورَ عددٍ أكبر من ٣.

أجدُ كلاً من: $L(A \cup B)$ ، $L(A \cap B)$ ، $L(A \cup C)$.



Ω

(٥) معتمداً على التمثيل المجاور، أجد الآتي:

أ) $L(A \cap B)$

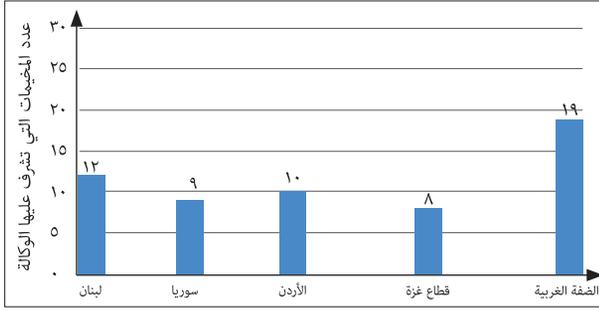
ب) $L(A \cup B)$



٣-٨ احتمال المتمة لحادث والفرق بين حادثين



نشاط ١:



الدولة

يبين التمثيل المجاور توزيع أعداد المخيمات التي تُشرف عليها وكالة الغوث في مناطق اللجوء: الضفة الغربية، قطاع غزة، سوريا، الأردن، ولبنان. فإذا اختار طالب مخيماً عشوائياً، ليتحدث عنه في ذكرى النكبة، فما احتمال أن:

(١) يكون المخيم أحد المخيمات في سوريا؟

(٢) لا يكون المخيم من المخيمات في سوريا؟
أرمز لحادث اختيار مخيم في سوريا بالرمز \bar{A} ومنها A : حادث اختيار مخيم في غير سوريا.

Ω : أعداد المخيمات في الدول الأربعة، ومنها: $\Omega = 12 + 9 + 10 + 8 + 19 = \dots$

احتمال أن يكون المخيم أحد المخيمات في سوريا $P(A) = \dots$

$$\frac{\text{عدد المخيمات في سوريا}}{\text{عدد جميع المخيمات}} = \frac{12}{58}$$

احتمال أن يكون المخيم من غير مخيمات سوريا $P(\bar{A}) = \dots$

$$\frac{\text{عدد المخيمات في غير سوريا}}{\text{عدد جميع المخيمات}} = \frac{12 + 10 + 8 + 19}{58} = \dots$$

ألاحظ أن: $P(\bar{A}) + P(A) = 1 = \frac{49}{58} + \frac{9}{58} = \dots$



أتعلم: إذا كان ح حادثاً في فضاءٍ عينيّ، فإنّ ل(ح) هو احتمال متّمة الحادث ح، والذي يعني أيضاً احتمال عدم حدوث الحادث ح، وأنّ: $ل(ح) + ل(\bar{ح}) = 1$
أي أنّ: $ل(\bar{ح}) = 1 - ل(ح)$



نشاط ٢:

لدى إلقاء قطعة نقدٍ منتظمة ثلاث مرات، ما احتمال ظهور الصورة مرة واحدة على الأقل؟
أفرضُ ح : حادث ظهور الصورة مرة واحدة على الأقل.

ومنها $\bar{ح}$: عدم ظهور أيّ صورة

ومنها $\bar{ح} = \{ك ك ك\}$

ع(Ω) = ٨ (لماذا؟)

ومنها: $ل(\bar{ح}) = \frac{1}{8}$

$ل(ح) = 1 - ل(\bar{ح})$

$= 1 - \frac{1}{8} = \dots$

أناقش: هل يمكن حساب الاحتمال بطريقة أخرى؟



نشاط ٣:

إذا كان ل(ح_١) = ٠,٤ ، ل(ح_٢) = ٠,٦ ، ل(ح_١ ∩ ح_٢) = ٠,٣ ، أجد:

أ) احتمال حدوث ح_١

ب) احتمال عدم حدوث ح_٢

ج) احتمال عدم حدوث الحادتين ح_١ ، ح_٢ معاً .

أ) احتمال حدوث ح_١ = ١ - ل(ح_١) = ٠,٦ = ...

ب) احتمال عدم حدوث ح_٢ = ل(ح_٢)

= ١ - ل(ح_٢) = ... = ...

ج) احتمال عدم حدوث الحادتين ح_١ ، ح_٢ معاً = ل(ح_١ ∩ ح_٢) (لماذا؟)

= ١ - ل(ح_١ ∩ ح_٢)

= ٠,٧ = ١ - ...



نشاط ٤:

إذا كانت $\Omega = \{1, 2, 4, 5, 6, 8, 9\}$ ، وكان $C_1 = \{1, 2, 4, 5, 8\}$ ،

$C_2 = \{2, 5, 6, 9\}$ ، أجد $C_1 - C_2$ ، ثم أكمل:

$C_1 - C_2$ يعني حدوث C_1 وعدم حدوث C_2 ؛ أي العناصر الموجودة في C_1 وغير موجودة في

C_2 ومنها: $C_1 - C_2 = \{1, 4, 8\}$ (لماذا؟)

$$L(C_1 - C_2) = \frac{3}{7}$$

$C_1 \cap C_2 = \{2, 5\}$ ومنها: $L(C_1 \cap C_2) = \dots$

$$L(C_1) - L(C_1 \cap C_2) = \frac{2}{7} - \frac{2}{7} = \dots$$

$$\frac{3}{7} = \dots$$

ألاحظ أنّ: $L(C_1 - C_2) = L(C_1) - L(C_1 \cap C_2)$

أتعلم: إذا كان C_1 ، C_2 ، حادثين في فضاء عيني، فإنّ احتمال حدوث C_1 وعدم

حدوث C_2 التي تُكتب على الصورة $L(C_1 - C_2)$ ، يمكن أن تُحسب من القاعدة:

$$L(C_1 - C_2) = L(C_1) - L(C_1 \cap C_2)$$

وبالمثل فإنّ: $L(C_2 - C_1) = L(C_2) - L(C_1 \cap C_2)$.





نشاطه:

يحتوي صندوق على سبع كراتٍ مرقّمةٍ بالأرقام ٢، ٤، ٥، ٦، ٧، ٨، ٩، يريد حمزة سحب كرةٍ من الصندوق عشوائياً، فإذا كان الحادث H_1 يمثل ظهور رقمٍ يقبل القسمة على ٢، وكان الحادث H_2 يمثل ظهور رقمٍ أكبر من ٤، أجد: ل $(H_1 - H_2)$ ، ل $(H_2 - H_1)$.

$$H_1 = \{2, 4, \dots, 8\}, \text{ ومنها: ل } (H_1) = \frac{4}{7}$$

$$H_2 = \{5, 6, 7, 8, 9\}, \text{ ومنها: ل } (H_2) = \frac{5}{7}$$

$$H_1 \cap H_2 = \{6, 8\}, \text{ ومنها: ل } (H_1 \cap H_2) = \frac{2}{7}$$

$$ل(H_1 - H_2) = ل(H_1) - ل(H_1 \cap H_2)$$

$$= \frac{4}{7} - \frac{2}{7} =$$

$$\dots =$$

$$ل(H_2 - H_1) = ل(H_2) - ل(H_1 \cap H_2)$$

$$= \frac{5}{7} - \frac{2}{7} =$$

$$= \frac{3}{7}$$

أفكر: هل يمكن إيجاد ل $(H_2 - H_1)$ بطريقةٍ أخرى؟

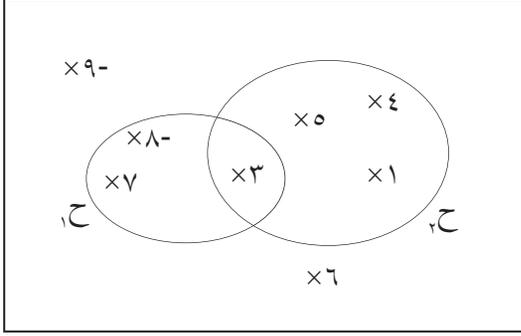


أناقش: قد تختلف قيمة ل $(H_1 - H_2)$ ، ل $(H_2 - H_1)$.





تمارين ومسائل:



Ω

(١) معتمداً على الشكل المجاور، أجد كلاً ممّا يأتي :

(أ) $P(\bar{C}_1)$

(ب) $P(\bar{C}_2)$

(ج) $P(C_1 - C_2)$

(د) $P(C_1 - C_2)$

(٢) إذا كان احتمال نجاح رؤى في امتحان الرياضيات ٠,٩، واحتمال نجاحها في امتحان اللغة العربية ٠,٨٥، واحتمال نجاحها في المبحثين معاً ٠,٨، أجد كلاً ممّا يأتي :

(أ) احتمال عدم نجاح رؤى في الرياضيات.

(ب) احتمال نجاحها في الرياضيات، وعدم نجاحها في اللغة العربية.

(ج) احتمال عدم نجاحها في المبحثين معاً.

(٣) استطلع المعلم آراء ٣٦ طالباً من طلاب الصف الثامن حول طبيعة الألعاب الرياضية التي يفضلون ممارستها، فوجد أنّ: ٢٠ طالباً يفضلون الألعاب الجماعية، و ١٠ طلاب يفضلون ممارسة الألعاب الفردية، و ٦ طلاب يفضلون ممارسة النوعين من الألعاب. إذا تمّ اختيار طالب عشوائياً، فما احتمال أن يكون هذا الطالب:

(أ) لا يفضل ممارسة الألعاب الجماعية؟

(ب) يفضل ممارسة الألعاب الفردية، ولا يفضل ممارسة الألعاب الجماعية؟

(ج) يفضل ممارسة الألعاب الجماعية، ولا يفضل ممارسة الألعاب الفردية؟

(٤) إذا كان $P(C_1) = ٠,٥$ ، $P(\bar{C}_2) = ٠,٦$ ، $P(C_1 \cap C_2) = ٠,٣$ ، أجد:

(أ) احتمال عدم حدوث C_1 .

(ب) احتمال حدوث C_2 .

(ج) احتمال عدم حدوث الحادتين C_1 ، C_2 معاً.



٤-٨ تمارين عامّة

١) أضع دائرة حول رمز الإجابة الصحيحة فيما يأتي:

١) لدى إلقاء قطعة نقد منتظمة مرتين، ما احتمال ظهور الصورة في رمية واحدة فقط من هاتين الرمتين؟

- أ) ٠,٢٥ ب) ٠,٥ ج) ٠,٧٥ د) ١

٢) إذا كانت $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ وكان $H = \{3, 4, 5\}$ ، فما قيمة $P(\overline{H})$ ؟

- أ) ٠,٣ ب) ٠,٧ ج) ٣ د) ٧

٣) إذا كان $P(H) = 0,4$ ، فأَيّ العبارات الآتية دائماً صحيحة؟

- أ) $P(H) = P(\overline{H})$ ب) $P(H) = P(\overline{H})$ منفصلين
ج) $P(H) - P(\overline{H}) \neq 0$ د) $P(\overline{H}) = P(H)$

٤) عائلة مكونة من أربعة أطفال، ما احتمال أن يكون لديها ٤ أطفال ذكور؟

- أ) $\frac{1}{2}$ ب) $\frac{1}{4}$ ج) $\frac{1}{8}$ د) $\frac{1}{16}$

٥) إذا كان $P(H) = 0,3$ ، $P(\overline{H}) = 0,4$ ، وكان H_1 ، H_2 منفصلين، فأَيّ العبارات الآتية

خاطئة؟

- أ) $P(H_1 - H_2) = 0,3$ ب) $P(H_1 - H_2) = 0,4$
ج) $P(H_1 \cup H_2) = 0,7$ د) $P(H_1 \cap H_2) = \text{صفر}$

٢) في تجربة رمي حجر نرد منتظم مرة واحدة، إذا كان ح_١: حادث ظهور عدد أقل من ٤، ح_٢: حادث ظهور عدد زوجي، فما احتمال ظهور عدد أقل من ٤، أو ظهور عدد زوجي؟

٣) إذا كان ح_١، ح_٢ حادثين منفصلين، وكان ل(ح_١) = ٠,٧، ل(ح_٢) = ٠,٢، أجد:

أ) ل(ح_١ ∪ ح_٢)
ب) ل(ح_١ ∩ ح_٢)

٤) إذا كان ل(ح_١) = ٤، ل(ح_٢) = ٥، وكان ل(ح_١ ∪ ح_٢) = ٧,٥، أجد ل(ح_١)، ل(ح_٢)، علماً بأن ح_١، ح_٢ حادثان منفصلان.

٥) إذا كان ح_١، ح_٢ حادثين في فضاء عيني، وكان ل(ح_١) = ٠,٦٥، ل(ح_٢) = ٠,٥٥، ل(ح_١ ∩ ح_٢) = ٠,٢، أجد:

أ) ل(ح_١)
ب) ل(ح_١ - ح_٢)
ج) ل(ح_١ ∪ ح_٢)

أقيم ذاتي:



أعبر بلغتي عن المفاهيم الأكثر اثاراً التي تعلمتها في هذه الوحدة.

مشروع الوحدة:

تضمن الموائيق الدولية الحق في تكوين الأسرة، تشير الإحصائيات في فلسطين في إحدى السنوات إلى وجود ٥٢ ذكر مقابل كل ٥٠ أنثى، أي أن نسبة الإناث إلى مجمل السكان ٠,٤٩٩، أتقصى هذه النسبة من خلال القيام بالآتي:

* أختار وزملائي عدداً مناسباً من الأسر وأسجل عدد الذكور وعدد الإناث فيها.

* أجد وزملائي مجموع الذكور ومجموع الإناث فيها.

* أجد نسبة الإناث في تلك الأسر وأقارنها بالإحصائيات المشار إليها وأقارن تلك النسبة باحتمال أن يكون جنس الشخص أنثى لدى إختيار أي شخص عشوائياً.

المشروع

المشروع: شكل من أشكال منهج النشاط؛ يقوم الطلبة (أفراداً أو مجموعات) بسلسلة من ألوان النشاط التي يتمكنون خلالها من تحقيق أهداف ذات أهمية للقائمين بالمشروع. ويمكن تعريفه على أنه: سلسلة من النشاط الذي يقوم به الفرد أو الجماعة لتحقيق أغراض واضحة ومحددة في محيط اجتماعي برغبة ودافعية.

مميزات المشروع:

١. قد يمتد زمن تنفيذ المشروع لمدة طويلة ولا يتم دفعة واحدة.
٢. ينقذه فرد أو جماعة.
٣. يرمي إلى تحقيق أهداف ذات معنى للقائمين بالتنفيذ.
٤. لا يقتصر على البيئة المدرسية وإنما يمتد إلى بيئة الطلبة لمنحهم فرصة التفاعل مع البيئة وفهمها.
٥. يستجيب المشروع لميول الطلبة وحاجاتهم ويثير دافعيتهم ورغبتهم بالعمل.

خطوات المشروع:

- أولاً: اختيار المشروع: يشترط في اختيار المشروع ما يأتي:
 ١. أن يتماشى مع ميول الطلبة ويشبع حاجاتهم.
 ٢. أن يوفر فرصة للطلبة للمرور بخبرات متنوعة.
 ٣. أن يرتبط بواقع حياة الطلبة ويكسر الفجوة بين المدرسة والمجتمع.
 ٤. أن تكون المشروعات متنوعة ومتراصة وتكمل بعضها البعض ومتوازنة، لا تغلب مجالاً على الآخر.
 ٥. أن يتلاءم المشروع مع إمكانيات المدرسة وقدرات الطلبة والفئة العمرية.
 ٦. أن يُخطَّط له مسبقاً.

• ثانياً: وضع خطة المشروع:

يتم وضع الخطة تحت إشراف المعلم حيث يمكن له أن يتدخل لتصويب أي خطأ يقع فيه الطلبة.

يقتضي وضع الخطة الآتية:

١. تحديد الأهداف بشكل واضح.
٢. تحديد مستلزمات تنفيذ المشروع، وطرق الحصول عليها.
٣. تحديد خطوات سير المشروع.
٤. تحديد الأنشطة اللازمة لتنفيذ المشروع، (شريطة أن يشترك جميع أفراد المجموعة في المشروع من خلال المناقشة والحوار وإبداء الرأي، بإشراف وتوجيه المعلم).
٥. تحديد دور كل فرد في المجموعة، ودور المجموعة بشكل كلي.

• ثالثاً: تنفيذ المشروع:

مرحلة تنفيذ المشروع فرصة لاكتساب الخبرات بالممارسة العملية، وتعدّ مرحلة ممتعة ومثيرة لما توفره من الحرية، والتخلص من قيود الصف، وشعور الطالب بذاته وقدرته على الإنجاز حيث يكون إيجابياً متفاعلاً خلاقاً مبدعاً، ليس المهم الوصول إلى النتائج بقدر ما يكتسبه الطلبة من خبرات ومعلومات ومهارات وعادات ذات فائدة تنعكس على حياتهم العامة.

دور المعلم:

١. متابعة الطلبة وتوجيههم دون تدخل.
٢. إتاحة الفرصة للطلبة للتعلم بالأخطاء.
٣. الابتعاد عن التوتر مما يقع فيه الطلبة من أخطاء.
٤. التدخل الذكي كلما لزم الأمر.

دور الطلبة:

١. القيام بالعمل بأنفسهم.
٢. تسجيل النتائج التي يتم التوصل إليها.
٣. تدوين الملاحظات التي تحتاج إلى مناقشة عامة.
٤. تدوين المشكلات الطارئة (غير المتوقعة سابقاً).

• رابعاً: تقويم المشروع: يتضمن تقويم المشروع الآتي:

١. الأهداف التي وضع المشروع من أجلها، ما تم تحقيقه، المستوى الذي تحقق لكل هدف، العوائق في تحقيق الأهداف إن وجدت وكيفية مواجهة تلك العوائق.
٢. الخطة من حيث وقتها، التعديلات التي جرت على الخطة أثناء التنفيذ، التقيّد بالوقت المحدد للتنفيذ، ومرونة الخطة.
٣. الأنشطة التي قام بها الطلبة من حيث، تنوعها، إقبال الطلبة عليها، توافر الإمكانيات اللازمة، التقيّد بالوقت المحدد.
٤. تجاوب الطلبة مع المشروع من حيث، الإقبال على تنفيذه بداعيّة، التعاون في عملية التنفيذ، الشعور بالارتياح، إسهام المشروع في تنمية اتجاهات جديدة لدى الطلبة.

يقوم المعلم بكتابة تقرير تقويمي شامل عن المشروع من حيث:

- أهداف المشروع وما تحقق منها.
- الخطة وما طرأ عليها من تعديل.
- الأنشطة التي قام بها الطلبة.
- المشكلات التي واجهت الطلبة عند التنفيذ.
- المدة التي استغرقها تنفيذ المشروع.
- الاقتراحات اللازمة لتحسين المشروع.

- فريدريك بل (1986): طرق تدريس الرياضيات: الجزء الثاني؛ (ترجمة محمد المفتي و ممدوح سليمان). قبرص: الدار العربية للنشر والتوزي
- للحام ، أنور (1990): الجبر ، ط4 ، مطبعة دار الكتاب ، دمشق
- ابو الوفاء البوزجاني (1971): علم الحساب العربي ، تحقيق د. احمد سعيدان ، عمان .
- انور عكاشة واخرون (1990): تاريخ الرياضيات ، مؤسسة دار الكتب للطباعة والنشر ، عمان
- كارتر، فيليب؛ راسيل، كين (2010): الدليل الكامل في اختبارات الذكاء، مكتبة جرير، السعودية
- هاشم الطيار، ويحي سعيد (1977): موجز تاريخ الرياضيات، مؤسسة دار الكتب للطباعة والنشر، جامعة الموصل.
- السبتي، جورج (1988): الجبر الخطي ، دار الحكمة ، جامعة البصرة
- الجنابي، احمد نصيف (1980):، الرياضيات عند العرب ، منشورات دار الجاحظ للنشر، الجمهورية العراقية
- عبد اللطيف، علي اسحق(1993): عالم الهندسة الرياضية ابن الهيثم ، منشورات الجامعة الاردنية، عمان ، الاردن .
- الخوارزمي ، محمد بن موسى (1939): كتاب الجبر والمقابلة ، تقديم علي مصطفى مسرفة ومحمد مرسي احمد ، القاهرة
- ريتش، بارنيت(2004) : الجبر الأساسي ، ، الدار الدولية للاستثمارات الثقافية -القاهرة- مصر
- Kline , M,(1972): Mathematics Thought From Ancient to Modern Times , Oxford , N. Y
- Lamborg. James(2005): Math reference, Wiley ,N. Y
- Bell,E,T(1937): ,Men of Mathematics ,Simon and Schuter,N. Y
- Friel,Suzan. Rashlin,Sid. Doyle,Dot. & others(2001): Navigating through Algebra in Grades 6-8. NCTM. RESTON, VIRGINIA .

لجنة المناهج الوزارية:

د. بصري صيدم	د. بصري صالح	م. فواز مجاهد
أ. ثروت زيد	أ. عزام ابو بكر	أ. علي مناصرة
د. شهناز الفار	د. سمية النخالة	م. جهاد دريدي

اللجنة الوطنية لوثيقة الرياضيات:

أ. ثروت زيد	د. محمد صالح (منسقاً)	د. معين جبر	د. علي عبد المحسن
د. تحسين المغربي	د. عادل فوارعة	أ. وهيب جبر	د. عبد الكريم ناجي
د. عطا أبوهاني	د. سعيد عساف	د. محمد مطر	د. علا الخليلي
د. شهناز الفار	د. علي نصار	د. أيمن الأشقر	أ. أرواح كرم
أ. حنان أبو سكران	أ. كوثر عطية	د. وجيه ضاهر	أ. فتحي أبو عودة
د. سمية النخالة	أ. احمد سياعرة	أ. قيس شبانة	أ. مبارك مبارك
أ. نسرين دويكات	أ. نادية جبر	أ. نشأت قاسم	أ. عبد الكريم صالح
أ. أحلام صلاح			

المشاركون في ورشات عمل الجزء الثاني من كتاب الرياضيات للصف الثامن:

أ. أسامة أبو عريش	أ. فداء الحرييات	أ. عالية البحش
أ. فاطمة حرازنة	أ. أسماء بكر	أ. رحمة دراغمة
أ. آمال البرميل	أ. فتيحة حسن	أ. منال حواورة
أ. نادية جبر	أ. حلمي حمدان	أ. فلسطين الخطيب
د. يحيى ماضي	أ. محمد الفرا	أ. رحمة عودة
أ. عبد الله مهنا	أ. زياد أبو الوفا	أ. رحمة البلعاوي
أ. رفيق الصيفي	أ. رائد عبد العال	