مراجعة شاملة لمادة الرياضيات
التوجيهي الأدبي الفصل الاول
2020

م. زين ارتيمه

Zain.abady54@gmail.com

مراجعة شاملة للوحدات
امثلة مختلفة ،اسئلة سنوات
سابقة مع حلولها

* الوحدة الاولى : النهايات والاتصال .

ملاحظات هامة للحل :

١) إذا لم يطلب النهاية من اليمين أو اليسار يجب أن نوجدها من الجهتين .

٢) النهاية موجودة ⇐ نها ق(س) = نها ق(س)
س ← أ⁺   س ← أ⁻

غير موجودة ⇐ نها ق(س) ≠ نها ق(س)
س ← أ⁺   س ← أ⁻

٣) ق متصل عندما : صورة = نهاية

ق(أ) = نها ق(س) ⇐ النهاية موجودة .
س ← أ

٤) دائرة فارغة ⇐ اقتران غير معرف (صورة غير موجودة) .

٥) نهتم في الدوائر المفتوحة والمغلقة لإيجاد صورة الاقتران فقط .

٦) - النهاية في الرسم غير موجودة عند الانقطاع والاطراف .
- الاقتران غير متصل عند الانقطاع والاطراف والفجوات .

⇐ إيجاد النهاية من الجدول :-

> يمين   ٣   يسار <

٢,٩	٢,٩٨	٢,٩٩		٣,٠٠١	٣,٠١	٣,١	س
٥,٩	٥,٩٨	٥,٩٩	X	٤,٠٠١	٤,٠١	٤,١	ق(س)

(-)   (+)

٦   ٤

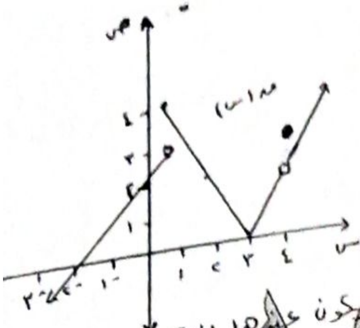
جد : ① نها ق(س) = ٤
س ← ٣⁺

② نها ق(س) = ٦
س ← ٣⁻

③ نها ق(س) غير موجودة لأن ....
س ← ٣

*** ④ نها (٣ق(س) + ٦س - ٤) نستخدم النظريات
س ← ٣⁺

* إيجاد النهاية من الرسمة :



(١٩.٢ تكميلي) : اعتماداً على الشكل الذي يمثل منحنى ق(س) جد :

١) نها ق(س) = ٤
س ← ٣

٢) مجموعة قيم س التي يكون عندها الاقتران ق غير متصل { ١ ، ٤ } ← فجوة .
انقطاع

اسئلة اضافية :

٣) قيمة أ ، حيث نها ق(س) غير موجودة .
س ← أ

أ = ١ عند الانقطاع .

٤) قيمة ب ، حيث نها ق(س) = صفر .
س ← ب

ب = ٣ ، -٢ تقاطع مع محور السينات (عندها تكون النهاية صفر) .

٥) قيمة جـ ، حيث نها ق(س) = ٢
س ← جـ

جـ = ٢ عند س = ٢ تكون نها ق(س) = نها ق(س) = ٢
س ← ٢⁺   س ← ٢⁻

و جـ = ٤ عند س = ٤ تكون النهاية موجودة وتساوي ٢ .

٦) نها (٢ق(س) - ٤ق(س) + س²) نستخدم النظريات
س ← ٣

***

⇐ نظريات النهايات :-

١) نهاية الثابت = الثابت نفسه . نها جـ = جـ
س ← أ

٢) نها س = أ تعويض مباشر .
س ← أ

* اذا كان الاقتران كثير حدود نعوض تعويض مباشر وتكون النهاية فيه موجودة .

٣) توزع النهاية على عملية الجمع والطرح والضرب .

٤) اذا كان الاقتران متشعب نبحث عن الصورة (القاعدة) الأنسب للتعويض .

٥) النهاية عند س = P تعني أننا لا نأخذ P كما هو إنما نأخذ حوله ارقام غير صحيحة (فيما حوله) .

(امثلة) : جد ما يلي :

١) $\underset{س \to ١}{\text{نها}} (٣س^٤ - ٥س^٣ + ٦س - ٧)$ نوزع النهاية على الجمع

او نقول ان الاقتران كثير حدود ونعوض مباشرة

الحل : $٣(١)^٤ - ٥(١)^٣ + ٦(١) - ٧$

$٣ - ٥ + ٦ - ٧ = \boxed{-٣}$

(ص٢٠١٩) $\underset{س \to ٢}{\text{نها}} ق(س) = ٤$ ، $\underset{س \to ٢}{\text{نها}} هـ(س) = -١$

فإن $\underset{س \to ٢}{\text{نها}} (٢ق(س) \times هـ(س)) =$ نوزع النهاية و نخرج الثابت

$٢ \underset{س \to ٢}{\text{نها}} ق(س) \times \underset{س \to ٢}{\text{نها}} هـ(س)$ خارج النهاية ← نعوض مباشر

$٢ \times ٤ \times -١ = \boxed{-٨}$

* $\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \dfrac{س^٢ + ١}{س - ١} =$

* $\underset{س \to -١}{\text{نها}} (ق(س) - س^٣ + ٧) = ٢$

$\underset{س \to -١}{\text{نها}} ((ق(س))^٢ + ٥س)$ *هذه الحالة يلزم ان نجد قيمة $\underset{س \to -١}{\text{نها}} ق(س)$

الحل : نوزع النهاية على المعطى :

$\underset{س \to -١}{\text{نها}} ق(س) - \underset{س \to -١}{\text{نها}} س^٣ + \underset{س \to -١}{\text{نها}} ٧ = ٢$

$\underset{س \to -١}{\text{نها}} ق(س) - \left((-١)^٣ + ٧\right) = ٢$

نعود بقيمة النهاية الى المطلوب . $\boxed{\underset{س \to -١}{\text{نها}} ق(س) = ٨}$

*حسب النظريات : تدخل النهاية تحت الاس .

$\left(\underset{س \to -١}{\text{نها}} ق(س)\right)^٢ + \underset{س \to -١}{\text{نها}} ٥س$

$(٨)^٢ + ٥ \times -١ = ٦٤ - ٥$

$= \boxed{٥٩}$

(٢٠١٩ تكميلي) $\underset{س \to ١}{\text{نها}} ٣ق(س) = -٦$ ، $\underset{س \to ١}{\text{نها}} هـ(س) = -١$ ، جد

١) $\underset{س \to ١}{\text{نها}} (٢ق(س) \times هـ(س))$

٢) $\underset{س \to ١}{\text{نها}} (ق(س) + هـ(س) + ٦)$

* الاقتران المتشعب : غالباً ما سيستخدم لإيجاد ثوابت حيث يذكر بالسؤال ان النهاية موجودة .

(ص٢٠١٨) $ق(س) = \begin{cases} س^٢ + ٥P & ، س < ٤ \\ Pس - ٤ & ، س \geq ٤ \end{cases}$ وكانت $\underset{س \to ٤}{\text{نها}} ق(س)$ موجودة جد P .

النهاية موجودة $\xLeftarrow{\text{تعني}}$ $\underset{س \to ٤^+}{\text{نها}} Pس - ٤ = \underset{س \to ٤^-}{\text{نها}} س^٢ + ٥P$

$\cancel{٤P} - ٤ = ١٦ + ٥P \Leftarrow -٤ = \cancel{١٦} + P$

$-٤P \quad -٤P \quad -١٦ \quad -١٦$

$\boxed{P = -٢٠}$

(ش٢٠١٢) $ق(س) = \begin{cases} Pس^٢ - ٥ & ، س > ٥ \\ ٢٠ & ، س = ٥ \\ ٨س + ٥ & ، س < ٥ \end{cases}$ جد P حيث موجودة $\underset{س \to ٥}{\text{نها}} ق(س)$

⇐ النهاية خارج قسمة اقترانين :-

خارج الحل بالتعويض المباشر.

* عند التعويض المباشر في النهاية نحصل على احد النواتج الآتية :

- $\dfrac{\text{عدد}}{\text{عدد}}$ ⇓ قيمة النهاية (العدد)
- $\dfrac{\text{صفر}}{\text{عدد}}$ ⇓ قيمة النهاية (صفر)
- $\dfrac{\text{عدد}}{\text{صفر}}$ ⇓ النهاية غير موجودة
- $\dfrac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ مشكلة تحتاج حلول : عامل مشترك ، تحليل ، توحيد مقامات ، مرافق

(امثلة) جد النهايات الآتية :-

١) $\underset{س \to ١}{\text{نها}} \dfrac{س^٢ - ١٦}{س - ٤} = \dfrac{(١)^٢ - ١٦}{١ - ٤} = \dfrac{-١٥}{-٣} = \boxed{٥}$

٢) $\underset{س \to ٤}{\text{نها}} \dfrac{س^٢ - ١٦}{س + ٣} = \dfrac{(٤)^٢ - ١٦}{٤ + ٣} = \dfrac{\text{صفر}}{٧} = \boxed{\text{صفر}}$

٣) $\underset{س \to ٤}{\text{نها}} \frac{س + ٣}{س^٢ - ١٦} = \frac{٤ + ٣}{(٤)^٢ - ١٦} = \frac{٧}{\text{صفر}}$ $\boxed{\text{غير موجودة}}$

٤) $\underset{س \to -١}{\text{نها}} \frac{(٣س + ١)^٣ - ٤}{س^٢ + ١}$ $\boxed{-٦}$

(٥ علامات)

(٢٠٢١ تكميلي) $\underset{س \to ٤}{\text{نها}} \left(\frac{س^٢}{س - ٢} + \sqrt{س} \right)$

---

* اذا كان $\underset{س \to أ}{\text{نها}}$ ق(س) بعد التعويض تساوي $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

نبحث عن حل للمشكلة والتي هي (س − أ) الزيل.

الحلول: $\boxed{١}$ عامل مشترك ← جميع الحدود تحتوي س

← درجة اولى لكن يوجد رقم مشترك $٣س - ٩ = ٣(س - ٣)$

$\boxed{٢}$ التحليل ← فرق مربعين $س^٢ - ٩ = (س - ٣)(س + ٣)$

← عبارة تربيعية $س^٢ + ٥س + ٦$ تحلل قوسين.

← فرق او مجموع مكعبين قوس صغير قوس كبير

$\boxed{٣}$ الضرب بالمرافق ← يستخدم عند وجود الجذور

$\sqrt{س} - أ \xrightarrow{\text{مرافقها}} \sqrt{س} + أ$

ناتجها $س - أ^٢$ ← يذهب الجذر، يُربع الرقم.

$\boxed{٤}$ توحيد مقامات ← يستخدم عند وجود الكسور.

$\frac{\frac{أ}{ب} - \frac{هـ}{س}}{س - د} = \frac{أس - هـب}{(س - د)(ب)(س)}$ ← المقام الموحد

بعد التوحيد نعود الى العامل المشترك.

ملاحظة ① $\underset{س \to أ}{\text{نها}} \frac{س - أ}{س - أ} = ١$ المتشابه يعطي $\boxed{١}$

② $\underset{س \to أ}{\text{نها}} \frac{س - أ}{أ - س} = -١$ ليصبح متشابه نخرج $\boxed{-١}$ عامل مشترك بالآخر تبقى $\boxed{-١}$ وحدها

امثلة: (٢٠١٩)

١) $\underset{س \to -٣}{\text{نها}} \frac{س^٣ + ٥س^٢ + ٦س}{٢س^٢ - ١٨} = \frac{٠}{٠}$ ← عامل مشترك ← كله يحتوي على س $\boxed{\text{١٠ علامات}}$

← عامل مشترك رقم. المشكلة $\boxed{س + ٣}$ $س \to -٣$

$\underset{س \to -٣}{\text{نها}} \frac{س(س^٢ + ٥س + ٦)}{٢(س^٢ - ٩)}$ ← تحليل ← فرق مربعين

$\underset{س \to -٣}{\text{نها}} \frac{س(س + ٣)(س + ٢)}{٢(س - ٣)(س + ٣)}$

$\frac{-٣ \times (-٣ + ٢)}{٢(-٣ - ٣)} = \frac{٣}{-١٢} = \boxed{\frac{-١}{٤}}$

٢) $\underset{س \to ١}{\text{نها}} \frac{\frac{١}{٥س} - \frac{٢}{س + ٩}}{س - ١} = \frac{٠}{٠}$ $\boxed{\text{٨ علامات}}$

الحل توحيد مقامات لأنها تحتوي على كسور

$\underset{س \to ١}{\text{نها}} \frac{س + ٩ - ١٠س}{(س - ١)(٥س)(س + ٩)} = \underset{س \to ١}{\text{نها}} \frac{٩ - ٩س}{(س - ١)(٥س)(س + ٩)}$ ← عامل مشترك

$\underset{س \to ١}{\text{نها}} \frac{٩(١ - س)}{(س - ١)(٥س)(س + ٩)} = \boxed{\frac{-٩}{٥٠}}$

(٢٠١٩ تكميلي) ← $\underset{س \to ٧}{\text{نها}} \frac{\frac{١}{١٤ - س} - \frac{١}{٧}}{٢س - ١٤}$ (٥ علامات)

(٢٠١٢ ص) $\underset{س \to ٥}{\text{نها}} \frac{س - ٥}{٣س^٢ - ١٥س}$

(٢٠١٤ ص) $\underset{س \to ٣}{\text{نها}} \frac{س - ٣}{\sqrt{س + ١} - ٢} = \frac{٠}{٠}$ الحل ضرب بالمرافق بسبب وجود الجذر

$\underset{س \to ٣}{\text{نها}} \frac{س - ٣}{\sqrt{س + ١} - ٢} \times \frac{\sqrt{س + ١} + ٢}{\sqrt{س + ١} + ٢}$

$\underset{س \to ٣}{\text{نها}} \frac{س - ٣}{س + ١ - ٤} \times \frac{\sqrt{٣ + ١} + ٢}{١} = \underset{س \to ٣}{\text{نها}} \frac{\cancel{س - ٣}}{\cancel{س - ٣}} \times ٤$

فك الجذر، تربيع (٢)

$= ١ \times ٤ = \boxed{٤}$

(٢٠١٦ ش) $\underset{س \to ٧}{\text{نها}} \frac{\sqrt{٣س + ٤} - ٥}{س^٢ - ٤٩}$

* الاتصال :

⇐ نجد صورة الاقتران ونهايته ويجب أن تكونا متساويتين لنقول ان الاقتران متصل.

⇐ للرسمات : يكون الاقتران غير متصل عند الفجوات لان الصورة تكون غير معرفة وعند الانقطاعات لان النهاية تكون غير موجودة.

⇐ كثير الحدود دائماً متصل.

⇐ الاقتران المتشعب يكون متصل عند جميع النقاط ولكن تكون فيه مشكلة عند نقاط التشعب قد تكون غير متصلة (بسبب النهاية) لذلك نبحث في اتصالها.

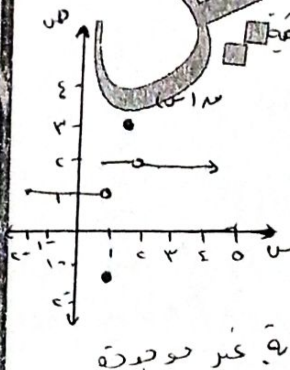
⇐ الاقتران الكسري يكون غير متصل عند اصفار المقام.

⇐ نستفيد من الاتصال في ايجاد ثوابت.

* البحث في الاتصال من خلال رسمة :

- اي القيم الآتية تكون عندها منحنى تقطع اقتران متصل :

أ) ٣   ب) ٢   ج) ١   د) -٢



- اين يكون الاقتران غير متصل مع التبرير.

عند س = -٢ ← طرف ← النهاية غير موجودة

س = ١ ← انقطاع + فجوة ← النهاية غير موجودة

س = ٢ ← فجوة ← الصورة غير معرفة.

مثال : حدد قيم س التي يكون عندها الاقتران غير متصل :

١) $ق(س) = \dfrac{٣س^٣ + ٤س^٢}{س^٣ + ٥س^٢ + ٦س}$ $\boxed{س = ٠ ، -٢ ، -٣}$

٢) $هـ(س) = \dfrac{٣}{س^٢ - ١}$ $\boxed{س = -١ ، ١}$

(٢٠١٩) $ق(س) = \begin{cases} أس^٢ + ب ، & س < ٢ \\ ١٤ ، & س = ٢ \\ س - ٢ب ، & س > ٢ \end{cases}$ وكان ق(س) متصل عند س = ٢ ، جد أ ، ب

الحل : متصل يعني $ق(٢) = \lim_{س \to ٢} ق(س)$

وتعني النهاية $\lim_{س \to ٢^+} ق(س) = \lim_{س \to ٢^-} ق(س)$

ممكن ان نأخذ النهاية من اي طرف مع الصورة.

مثلاً $ق(٢) = \lim_{س \to ٢^+} س - ٢ب \Leftarrow ١٤ = \cancel{٢} - ٢ب$
$\quad -٢ \qquad -٢$

$\dfrac{١٢}{-٢} = \dfrac{-٢ب}{-٢} \Leftarrow \boxed{ب = -٦}$

نعوض قيمة ب

$ق(٢) = \lim_{س \to ٢^-} أس^٢ + ب \Leftarrow ١٤ = أ(٢)^٢ - ٦$

$١٤ + ٦ = ٤أ \cancel{-٦ + ٦} \Leftarrow \dfrac{٢٠}{٤} = \dfrac{٤أ}{٤}$

$\boxed{أ = ٥}$

سؤال ①: $هـ(س) = \begin{cases} س^٢ + ٣ ، & س \le ٠ \\ ٣ - س ، & ٠ < س < ٤ \\ س^٢ - ٥ ، & س \ge ٤ \end{cases}$

ابحث في اتصال هـ(س) عند : س = ٠ ، س = ٤
س = ١ ، س = -١
س = ٥

سؤال ②: $م(س) = \begin{cases} \dfrac{س^٢ - ٩س}{س - ٣} ، & س \ne ٣ \\ ١٨ ، & س = ٣ \end{cases}$

ابحث في اتصال م(س) عند س = ٣

⇐ نظريات الاتصال :

حاصل (جمع ، طرح ، ضرب ، قسمة) متصلين يكون متصل.

اذا كان احد الاقترانين غير متصل ، نجري العملية المطلوبة ثم نبحث في الاتصال.

مثال: (٢٠١٩ تكميلي) م(س) = س² + ١

$$هـ(س) = \begin{cases} س - ١ ، & س < ٠ \\ ٤ - س^2 ، & س \geq ٠ \end{cases}$$

وكان ل(س) = (م × هـ)(س)

ابحث في اتصال ل عند س = ٠

الحل: ١) م(س) كثير حدود دائماً متصل على ح

٢) نبحث في اتصال هـ(س) ← هـ(٠) = ٤ الصورة

$\lim_{س \to ٠^+} (٤ - س^2) = ٤$

$\lim_{س \to ٠^-} (س - ١) = -١$

هـ(س) غير متصل عند س = ٠

إذاً نجري عملية الضرب

$$ل(س) = \begin{cases} (س^2+١)(س-١) ، & س < ٠ \\ (س^2+١)(٤-س^2) ، & س \geq ٠ \end{cases}$$

نبحث في اتصال ل(س) ← ل(٠) = (٠ + ١)(٤ − ٠) = ٤

$\lim_{س \to ٠^+} (س^2+١)(٤-س^2) = ٤$

$\lim_{س \to ٠^-} (س^2+١)(س-١) = -١$

∴ $\lim_{س \to ٠^+} ل(س) \neq \lim_{س \to ٠^-} ل(س)$ غير موجودة

∴ ل(س) غير متصل.

(٢٠٠٩ ص) م(س) = س² ،
$$هـ(س) = \begin{cases} س + ٥ ، & س < ٢ \\ ٣س^2 - ٥ ، & س \geq ٢ \end{cases}$$

ل(س) = م(س) × هـ(س) ابحث في اتصال ل(س) عند س = ٢

(٢٠١٥ ص) هـ(س) = ٤ − س² ،
$$ل(س) = \begin{cases} ٤س - ٣ ، & س \leq ٣ \\ س^2 + ١ ، & س > ٣ \end{cases}$$

وكان م(س) = هـ(س) × ل(س) ابحث في اتصال م(س) عند س = ٣

(٢٠١٦ ص) هـ(س) = س² + ٦ ،
$$ل(س) = \begin{cases} ٣س^2 - س ، & س \leq ٢ \\ س + ٨ ، & س > ٢ \end{cases}$$

وكان م(س) = هـ(س) − ل(س) ، هل م متصل عند س = ٢

(٢٠١٩) م، هـ اقترانين متصلين عند س = ٧ ، وكان م(٧) = ١٢ ، هـ(٧) = ٣ ، فبين أن

$$\lim_{س \to ٧} \frac{م(س) - ٢}{هـ(س) + س} = ١$$ (٤ علامات)

الحل: م(٧) = $\lim_{س \to ٧}$ م(س) = ١٢ لأن م متصل عند س = ٧

هـ(٧) = $\lim_{س \to ٧}$ هـ(س) = ٣ لأن هـ متصل عند س = ٧

نوزع النهاية على البسط والمقام.

$$\frac{\lim_{س \to ٧} م(س) - \lim_{س \to ٧} ٢}{\lim_{س \to ٧} هـ(س) + \lim_{س \to ٧} س} \stackrel{?}{=} ١$$

الآن نعوض تعويض مباشر

$$\frac{١٢ - ٢}{٣ + ٧} \stackrel{?}{=} ١ \Leftarrow \frac{١٠}{١٠} \stackrel{?}{=} ١$$

١ = ١ ✓ #

(التفاضل :)

* معدل التغير :

** ملاحظة : فرّق ومتى ماذا يطلب السؤال

- مقدار التغير (Δ) ← واحدة

Δس = س$_2$ - س$_1$

* التغير في السينات

Δص ← مقدار التغير في الصادات

- معدل التغير (Δ) ← اثنتان

معدل التغير = $\frac{\Delta ص}{\Delta س}$

* معدل التغير نفسه متوسط التغير نفسه ميل القاطع نفسه السرعة المتوسطة.

مثال : اذا كان ق(س) = { ٣س - ١ ، ١ ≤ س ≤ ٢ ؛ س^2 ، ٢ ≤ س ≤ ٤

جد معدل التغير في الاقتران ق في الفترة [١، ٣]

الحل : - Δس = س$_2$ - س$_1$
= ٣ - ١ = $\boxed{٢}$

- Δص = Δق(س) = ق(س$_2$) - ق(س$_1$)
= ق(٣) - ق(١)   ق(٣) = (٣)^2 = ٩
= ٩ - ٢   ق(١) = ٣(١) - ١ = ٢
= ٧   نختار القاعدة الانسب

- المعدل = $\frac{\Delta ص}{\Delta س}$ = $\frac{٧}{٢}$

التفسير الهندسي لمعدل التغير : (طلب ميل القاطع).

مثال : اذا كان ق(س) = ٩س - ٣ جد ميل القاطع المار بالنقطتين (١، ق(١))، (٣، ق(٣)).

الحل : ميل القاطع لنقطتين = معدل التغير.

Δس = ٣ - ١ = $\boxed{٢}$ ق(٣) = ٩(٣) - ٣ = ٢٧ - ٣ = $\boxed{٢٤}$

Δص = ق(٣) - ق(١) = ٢٤ - ٦ = ١٨   ق(١) = ٩(١) - ٣ = $\boxed{٦}$

ميل القاطع = $\frac{\Delta ص}{\Delta س}$ = $\frac{١٨}{٢}$ = $\boxed{٩}$

---

* التفسير الفيزيائي لمعدل التغير (يطلب سرعة متوسطة)

ع = $\frac{ف(ن_2) - ف(ن_1)}{ن_2 - ن_1}$ ع : السرعة المتوسطة.
ف : المسافة ، ن : الزمن

مثال : (٢٠١٨ ص) : يسير جسم وفق العلاقة الآتية : ف(ن) = ١٦ن^2 + ٢ن ، حيث ف المسافة بالامتار و ن الزمن بالثواني. جد السرعة المتوسطة للجسم في الفترة [٢، ٣].

الحل : ن$_2$ = ٣ ، ن$_1$ = ٢

ف(ن$_2$) = ف(٣) = ١٦(٣)^2 + ٢(٣)
= ١٤٤ - ٦ = $\boxed{١٣٨}$

ف(ن$_1$) = ف(٢) = ١٦(٢)^2 + ٢(٢)
= ٦٤ + ٤ = ٦٨

ع = $\frac{ف(ن_2) - ف(ن_1)}{ن_2 - ن_1}$ = $\frac{١٣٨ - ٦٨}{٣ - ٢}$
= ٧٠ م/ث

فكرة كتاب : في عام (٢٠٠٥)م بلغت أرباح شركة أجهزة كهربائية (٢٠٠٠٠) دينار، وفي عام (٢٠١٢) حققت ارباح قدرها (٣٤٠٠٠)، فما التغير في ربح الشركة؟ معدل التغير السنوي في الربح؟

الحل : ١) التغير في الربح = ٣٤٠٠٠ - ٢٠٠٠٠
= ١٤٠٠٠ دينار

٢) معدل التغير السنوي = $\frac{١٤٠٠٠}{٢٠١٢ - ٢٠٠٥}$ = $\frac{١٤٠٠٠}{٧}$ = $\boxed{٢٠٠٠ \text{ دينار}}$

التغير في الربح ، التغير في الزمن

فكرة : اذا كان معدل التغير في الاقتران ق في الفترة [-٣، ١] يساوي ٣ وكان هـ(س) = ق(س) - س ، جد متوسط التغير للاقتران هـ في الفترة [-٣، ١]

مثال : ق(س) = { س^2 ، ١ ≤ س ≤ ٣ ؛ أس ، ٣ < س ≤ ٥ ، وكان معدل تغير الاقتران ق عندما تتغير س من ٢ إلى ٤ يساوي (٦)، جد أ.

المشتقة الاولى ** باستخدام التعريف **

التعريف الاول : $\text{ق}'(\text{س}) = \underset{\text{هـ}\to 0}{\text{نها}} \dfrac{\text{ق}(\text{س}+\text{هـ}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{هـ}}$

$\text{هـ} = \Delta\text{س}$

التعريف الثاني : الأسهل $\text{ق}'(\text{س}) = \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نها}} \dfrac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{ع}-\text{س}}$

قاعدة الاقتران كما هي

نستبدل لقاعدة الاقتران كل س بـ ع

الحالات الناتجة من التعويض في القانون

١) مربعين $\text{ع}^2 - \text{س}^2 \Leftarrow (\text{ع}-\text{س})(\text{ع}+\text{س})$

٢) مكعبين $\text{ع}^3 - \text{س}^3 \Leftarrow (\text{ع}-\text{س})(\text{ع}^2+\text{ع}\text{س}+\text{س}^2)$

نا لجمع نفس الحد الاخير 3س^2

٣) عامل مشترك $\text{أ}\text{ع} - \text{أ}\text{س} \Leftarrow \text{أ}(\text{ع}-\text{س})$

٤) عبارة تربيعية $\text{ع}^2 + 2\text{ع} + 1 \Leftarrow (\text{ع}+1)(\text{ع}+1)$

٥) ضرب مرافق $\dfrac{\sqrt{\text{ع}+\text{أ}} - \sqrt{\text{س}+\text{أ}}}{\text{ع}-\text{س}} \times \dfrac{\sqrt{\text{ع}+\text{أ}} + \sqrt{\text{س}+\text{أ}}}{\sqrt{\text{س}+\text{أ}} + \sqrt{\text{ع}+\text{أ}}}$

$\dfrac{(\text{ع}+\text{أ}) - (\text{س}+\text{أ})}{\text{ع}-\text{س}} \times \dfrac{1}{2\sqrt{\text{س}+\text{أ}}}$

٢ من جذر نفسه

٦) توحيد مقامات $\dfrac{\frac{\text{أ}}{\text{ع}} - \frac{\text{أ}}{\text{س}}}{\text{ع}-\text{س}}$

$\dfrac{\text{أ}\text{س} - \text{أ}\text{ع}}{(\text{ع}\text{س})(\text{ع}-\text{س})}$

لدينا عامل .

ملاحظة : نتحقق من الحل من خلال ايجاد $\text{ق}'(\text{س})$ (المشتقة) من خلال قواعد الاشتقاق.

مثال : باستخدام التعريف العام للمشتقة جد المشتقة الاولى لكل مما يلي :

١) (ص١٣٠) $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^2 + 1$ جد $\text{ق}'(3)$

$\text{ق}'(\text{س}) = \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نها}} \dfrac{(\text{ع}^2+1) - (\text{س}^2+1)}{\text{ع}-\text{س}}$

$= \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نها}} \dfrac{\text{ع}^2 + \cancel{1} - \text{س}^2 - \cancel{1}}{\text{ع}-\text{س}}$

$= \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نها}} \dfrac{\text{ع}^2 - \text{س}^2}{\text{ع}-\text{س}}$ فرق مربعين

$\text{ق}'(\text{س}) = \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نها}} \dfrac{\cancel{(\text{ع}-\text{س})}(\text{ع}+\text{س})}{\cancel{\text{ع}-\text{س}}}$

$= \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نها}} \text{ع}+\text{س} = \text{س}+\text{س} = 2\text{س}$

$\text{ق}'(3) = 2(3) = \boxed{6}$ ← نعوض قيمة س بالأخر

(ص١٣٠ ، ٢) $\text{ق}(\text{س}) = \sqrt{\text{س}-3}$ ، $\text{ق}'(4)$ ← جذر مباشرة مرافق .

$\text{ق}'(\text{س}) = \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt{\text{ع}-3} - \sqrt{\text{س}-3}}{\text{ع}-\text{س}} \times \dfrac{\sqrt{\text{ع}-3} + \sqrt{\text{س}-3}}{\sqrt{\text{ع}-3} + \sqrt{\text{س}-3}}$

$= \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نها}} \dfrac{\text{ع}-3 - (\text{س}-3)}{\text{ع}-\text{س}} \times \dfrac{1}{2\sqrt{\text{س}-3}}$ ٢ من الجذر لا تتبع س

$= \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نها}} \dfrac{\text{ع} - \cancel{3} - \text{س} + \cancel{3}}{\text{ع}-\text{س}} \times \dfrac{1}{2\sqrt{\text{س}-3}}$

$= \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نها}} \dfrac{\cancel{\text{ع}-\text{س}}}{\cancel{\text{ع}-\text{س}}}^{1} \times \dfrac{1}{2\sqrt{\text{س}-3}} = \dfrac{1}{2\sqrt{\text{س}-3}}$

(ص١٣٠ ، ١٨) $\text{ق}(\text{س}) = \dfrac{3}{1-2\text{س}}$ ، ق(٢) فكرة توحيد مقامات .

(ص١٣٠ ، ١٩) $\text{ق}(\text{س}) = 6\text{س}^3 - 2$ فكرة فرق مكعبين

فكرة (ص١٣٠ ، ١٧) مشابه لفكرة الكتاب .

اذا كان ص = ق(س) وكان مقدار التغير في قيمة الاقتران ق(س) عندما تتغير س من (س) الى (س+هـ) هو $\Delta\text{ص} = 3\text{هـ}^2 - 6\text{س}\,\text{هـ}$ جد $\text{ق}'(\text{س})$.

الحل : $\text{ق}'(\text{س}) =$ نها معدل التغير Δص استخدم هـ اذا تكون النهاية هـ←٠ .

$\text{ق}'(\text{س}) = \underset{\text{هـ}\to 0}{\text{نها}} \dfrac{3\text{هـ}^2 - 6\text{س}\,\text{هـ}}{\text{هـ}}$ نخرج عامل مشترك هـ

$= \underset{\text{هـ}\to 0}{\text{نها}} \dfrac{\cancel{\text{هـ}}(3\text{هـ} - 6\text{س})}{\cancel{\text{هـ}}}$ نعوض قيمة هـ = ٠ .

$\boxed{\text{ق}'(\text{س}) = -6\text{س}}$

⇐ قواعد الاشتقاق: (حفظ)

1) ق(س) = جـ ⇐ ق'(س) = صفر (مشتقة الثابت صفر)

2) ق(س) = أ س + ب ⇐ ق'(س) = أ (مشتقة الخطي هو معامل س)

3) ق(س) = $س^{ن}$ ⇐ ق'(س) = ن $س^{ن-1}$

ق(س) = أ $س^{ن}$ ⇐ ق'(س) = أ × ن $س^{ن-1}$

4) مشتقة الجذر التربيعي ← $\frac{\text{مشتقة ما داخل الجذر}}{2 \times \text{الجذر نفسه}}$

5) $(\text{اقتران})^{ن}$ ⇐ ن $(\text{الاقتران كما هو})^{ن-1}$ × مشتقة الاقتران

6) $\sqrt[م]{(\text{اقتران})^{ن}}$ $\xleftarrow{\text{نحوله}}$ $(\text{اقتران})^{\frac{ن}{م}}$

جذر مش تربيعي

⇐ الاشتقاق $\frac{ن}{م}(\text{اقتران})^{\frac{ن}{م}-1}$ × مشتقة الاقتران

7) مشتقة الضرب. اقتران (1) × اقتران (2)

المشتقة: (الاول كما هو) × مشتقة الثاني + (الثاني كما هو) × مشتقة الاول

8) مشتقة قسمة: (3 حالات):

أ) $\frac{\text{اقتران}}{\text{رقم}}$ ← $\frac{\text{مشتقة الاقتران}}{\text{رقم كما هو}}$

ب) $\frac{\text{رقم}}{\text{اقتران}}$ ← $\frac{-\text{الرقم} \times \text{مشتقة الاقتران}}{(\text{الاقتران})^2}$

جـ) $\frac{\text{اقتران}}{\text{اقتران}}$ ← $\frac{\text{المقام} \times \text{مشتقة البسط} - \text{البسط} \times \text{مشتقة المقام}}{(\text{المقام})^2}$

9) مشتقة الاقترانات المثلثية:

أ) جا (اقتران) ← جتا (اقتران) × مشتقة الاقتران.

ب) جتا (اقتران) ⇐ - جا (اقتران) × مشتقة الاقتران

جـ) ظا (اقتران) ⇐ $قا^{2}$ (اقتران) × مشتقة الاقتران.

ملاحظة: ظا = $\frac{جا}{جتا}$ ، جتا س = $\frac{1}{قاس}$

جا ← جتا
جتا ← - جا
ظا ← $قا^{2}$

حالة فرعية: $جا^{ن}$ (اقتران) ← ن $جا^{ن-1}$(اقتران) × مشتقة الاقتران

(*) في حالة جمع أو طرح اكثر من مقدار نشتق كل حد لحال.

مثال: جد $\frac{دص}{دس}$ لكل مما يأتي:

1) ص = $س^{4}$ + 2$س^{2}$ − 3س + 1

$\frac{دص}{دس}$ = 4$س^{3}$ + 4س − 3

2) ص = $س^{4}$ + $س^{-4}$ + $\frac{س}{5}$ + $\frac{5}{س}$ + $\sqrt[5]{س^{3}}$ (نحوله $س^{\frac{3}{5}}$)

$\frac{دص}{دس}$ = 4$س^{3}$ − 4$س^{-5}$ + $\frac{1}{5}$ + $\frac{-5}{س^{2}}$ + $\frac{3}{5}$ $س^{\frac{-2}{5}}$

= 4$س^{3}$ + $\frac{4}{س^{5}}$ + $\frac{1}{5}$ − $\frac{5}{س^{2}}$ + $\frac{3}{5\sqrt[5]{س^{2}}}$

3) ص = $(3س − 7)^{9}$ + 4$(س^{2} + 3س)^{4}$

ص' = 9$(3س − 7)^{8}$ × 3 + 16$(س^{2} + 3س)^{3}$ × (2س + 3)

4) ص = جا ($س^{2}$ + 2س) − $\frac{جتا س}{5}$ + $ظا^{3}$ 6س

ص' = (2س + 2) جتا ($س^{2}$ + 2س) + $\frac{جا س}{5}$ + 3$ظا^{2}$ 6س × $قا^{2}$ 6س × 6

18 $ظا^{2}$ 6س $قا^{2}$ 6س

5) ص = $\frac{4}{قا 2س}$ + $\sqrt[4]{س^{5}}$

6) ص = 3س (4 − $س^{2}$) + $\frac{4}{س}$ + 3$\sqrt{س^{4}}$ + $(4 - س^{2})^{-2}$

ص' =

7) اذا كان ق(س) = 4 $ظا^{3}$ 3س ، فجد نها $\frac{ق(1 + هـ) - ق(1)}{هـ}$

الحل:

(وزارة 2019) جد $\frac{دص}{دس}$

ص = $(س^{2} + 1)^{6}$ $(س − 2)^{-6}$ + $\frac{7}{س + 1}$ ، س ≠ 1

(وزارة 2018) ص = 10 $\sqrt[5]{س^{2}}$ − $\frac{3}{س}$ ، س ≠ 0

قاعدة السلسلة: تستخدم هذه القاعدة عند وجود معادلتين ص بدلالة ع ، ع بدلالة س ومطلوب إيجاد المشتقة

الخطوات ⇐ $\frac{دص}{دس}$

1) $\frac{دص}{دس}$ = $\frac{دص}{دع}$ × $\frac{دع}{دس}$

2) نضع مكان كل ع قيمتها والتي هي معادلة.

اذا اعطى قيمة لـ س نعوضها.

مثال: جد $\frac{دص}{دس}$ لكل مما يأتي:

1) $ص = ع^2 + 3ع$ ، $ع = س^2 - 4$

الحل: $\frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دع} \times \frac{دع}{دس}$

$= (2ع + 3) \times 2س$ نستبدل ع بمعطياتها

$= (2(س^2 - 4) + 3) \times 2س$

$= (2س^2 - 8 + 3) \times 2س$

$= (2س^2 - 5) \times 2س = 4س^3 - 10س$

2) $ص = \frac{3}{ع}$ ، $ع = جا 2س$

3) $ص = ل^4 + 5ل^2$ ، $ل = 2س^3 + 4س^2$ عند $س = 1$

وزارة 2019 / تكميلي

4) $ص = ع - 2ع^2$ ، $ع = 1 - س$

2018 صيفي

5) $ص = م^3 - م - 1$ ، $م = 2س^2 + 7$

* ايجاد قيمة ثوابت من خلال المشتقة:

1) اذا كان $ق(س) = 4س^5 + 2أس^2 - 14$ وكان $ق'(1) = 16$ ، فجد قيمة الثابت أ.

الحل: نشتق: $ق'(س) = 20س^4 + 4أس$ نعوض قيمة س $\frac{1}{}$ والمشتقة 16

$16 = 20(1)^4 + 4أ(1)$

$16 = 20 + 4أ$
$-20 \quad -20$

$\frac{-4}{4} = \frac{4أ}{4} \Leftarrow$

$\boxed{أ = -1}$

2) اذا كان $ق(س) = (س - 2)^5$ وكان $ق'(س) = صفر$ فجد قيم س.

الحل: $ق'(س) = 5(س - 2)^4$ نعوض بدل $ق'(س)$ صفر

$\frac{0}{5} = \frac{5}{5}(س - 2)^4 \Leftarrow \sqrt[4]{0} = \sqrt[4]{(س - 2)^4}$

$س - 2 = 0$
$+2 \quad +2$
$\Leftarrow \boxed{س = 2}$

3) اذا كان $ق(س) = (5 - س)^5$ وكان $ق'(س) = 80$ فجد قيم س.

4) اذا كان $ق(س) = 4هـ(س) + 5س^3 + 4$ وكان $هـ'(2) = 3$ فجد $ق'(2)$.

5) اذا كان $ق(س) = س^3 + 15س^2 + 75س$ وكان $ق'(أ) = صفر$ فجد قيمة أ.

* تطبيقات التفاضل

⟸ التفسير الهندسي للمشتقة:

يطلب ← ميل مماس ← نشتق الاقتران ونعوض س
أو معادلة مماس

الحل: م = قَ(س) ⟸ نشتق ⟸ ثم نعوض (عدد)

معادلة المماس:

$ص - ص_1 = م (س - س_1)$

يلزمنا ميل مماس ونقطة $(س_1 ، ص_1)$

$\boxed{س_1}$: تعطى دائماً.

$\boxed{ص_1}$: إما تعطى بالسؤال أو نحن نجدها من خلال تعويض قيمة س في قاعدة الاقتران.

م ← نشتق قَ(س) ، نعوض قَ(أ) اذا كانت س = أ

* اذا اعطى النقطة (أ ، ب) تكون كالتالي: $س_1$ ، $ص_1$

مثال (1): (2011 ش)

$ق(س) = (2س + 1)^3$ ، جد الميل عند س = 3 ؟

ميل ← نشتق ← $قَ(س) = 3(2س + 1)^2 \times 2$

نعوض ← $قَ(3) = 6 (2(3) + 1)^2$

$= 6 \times 25$

$\boxed{م = 150}$

مثال (2): $ق(س) = \frac{4}{س^2 + 1}$ ، جد ميل المماس عند س = 1 .

الحل: ميل = $قَ(س) = \frac{-4 \times 2س}{(س^2 + 1)^2}$

عوض ⟸ $قَ(1) = \frac{-8 \times 1}{((1)^2 + 1)^2} = \frac{-8}{4} = \boxed{-2}$ الميل

مثال (3): $ق(س) = 3 + \sqrt{2س - 1}$ جد معادلة المماس عند س = 1 .

الحل: نحتاج نقطة $(س_1 ، ص_1)$ ⟸ $ص_1$ مجهولة نعوض س في ق(س) ⟸ $ق(1) = 3 + \sqrt{2(1) - 1}$

$ق(1) = 3 + \sqrt{1}$ ⟸ ق(1) = 4 ∴ $\boxed{ص_1 = 4}$

النقطة: (1 ، 4)

- نحتاج ميل المماس ← نشتق: $قَ(س) = \frac{2}{2\sqrt{2س - 1}}$

نعوض ⟸ $قَ(1) = \frac{1}{\sqrt{2(1) - 1}} = \frac{1}{\sqrt{1}} = \frac{1}{1} = \boxed{1}$

ميل المماس: $\boxed{م = 1}$

$ص - ص_1 = م (س - س_1)$

$ص - 4 = 1 (س - 1)$ ⟸ $ص - 4 = س - 1$
$\quad +4 \qquad +4$

$\boxed{ص = س + 3}$ معادلة المماس.

مثال (4): جد معادلة المماس لكل مما يلي:

1) $ق(س) = \frac{4س - 2}{س}$ عند النقطة (2 ، 3)

2) $هـ(س) = س(1 - 3س)^4$ عند س = 1 (2017 ش)

3) $ق(س) = \sqrt{3 - س^2 + 6}$ عند (1 ، 2) (2015 ش)

4) $ق(س) = 4س^{-1} + 7س$ عند (2 ، 16)

* ملاحظة: إذا ورد في السؤال ان الاقتران يكون مماسه موازياً لمحور السينات نعتبر ان الميل يساوي صفر.
موازي ⟸ م = 0 / قَ(س) = 0

(2019 ص)
مثال: اذا كان $ق(س) = س^2 - 12س$ ، ما قيمة س التي يكون عندها لمنحنى الاقتران مماس موازياً لمحور السينات

الحل: يوازي محور السينات ⟸ ∴ م = 0 ⟸ قَ(س) = 0

نشتق ⟸ قَ(س) = 2س − 12 ⟸ عوض 0 = 2س − 12
$\quad +12 \qquad +12$

$\frac{12}{2} = \frac{2س}{2}$ ⟸ $\boxed{س = 6}$

* ملاحظة: يمكن استخدام ميل المماس في إيجاد مجهول أو قيم لـ س ، اذا اعطى ميل المماس = رقم نشتق ونساوي المشتقة بالرقم ⟸ قَ(س) = رقم

فكرة كتاب

مثال (٦): ق(س) = م س² + ٤ س + ٢٠ ، وكان ميل المنحنى عند س = ٣ يساوي ٢٢ ، فجد قيمة م.

الحل: أولاً نشتق: ق'(س) = ٢م س + ٤

نعوض قيمة س و م = ق'(٣) ⟸ ٢٢ = ٢م(٣) + ٤

$\frac{18}{6} = \frac{6م}{6}$ ⟸ $\boxed{م = ٣}$

فكرة

مثال (٧): اذا كان ق اقتران متصل عند س = ٠ وكان ق(٠) = ١ و ق'(٠) = ٠ فإن معادلة المماس تكون؟ نستفيد من المعطيات: ص = ق(٠)

∴ $\boxed{ص_1 = ١}$ $\boxed{س_1 = ٠}$ (٠ ، ١) نقطة

ميل = ق'(٠) = ٠ $\boxed{م = ٠}$

ص − ص١ = م(س − س١)

ص − ١ = ٠(س − ٠) ⟸ $\boxed{ص = ١}$ معادلة المماس

⟸ التفسير الفيزيائي للمشتقة.

المسافة $\xrightarrow{اشتق}$ السرعة $\xrightarrow{اشتق}$ التسارع

ف(ن) ⟵ ع(ن) ⟵ ت(ن)

حالات السؤال والمعطيات:

١) يعطي زمن $\boxed{ن \ معطى}$ يذكر بعد مرور ـــ ثواني

نشتق حسب المطلوب ثم نعوض.

٢) لا يعطي الزمن ← نحن نجده من خلال الاستفادة من المعطيات المذكورة:

أ) عندما تنعدم السرعة ⟸ ع(ن) = ٠ ← نجد ن.

ب) عندما ينعدم التسارع ⟸ ت(ن) = ٠ ← نجد ن.

جـ) عندما تكون السرعة (م) ⟸ ع(ن) = م ← نجد ن

د) عندما يكون التسارع (ب) ⟸ ت(ن) = ب ← نجد ن

هـ) السرعة المتوسطة تساوي السرعة اللحظية.

$\bar{ع}$ = ع(ن) ← نجد ن

* ثم نعوض ن في المطلوب.

ملاحظة: لا يوجد زمن سالب ن = −٣ ✗ احذر احذر

مثال (١) (ص١٨، ٢٠١٠): اذا كانت ف(ن) = ن³ − ٣ن² + ٧ حيث ف المسافة بالامتار، ن الزمن بالثواني، جد السرعة بعد مرور ٤ ثواني من بدء الحركة.

الحل: ف'(ن) = ع(ن) الزمن معطى ن = ٤ ث

ع(ن) = ٣ن² − ٦ن

ع(٤) = ٣(٤)² − ٦(٤)

= ٤٨ − ٢٤ = $\boxed{٢٤ \ م/ث}$

مثال (٢) (ص٩، ٢٠٠٠): يتحرك جسم وفق العلاقة ف(ن) = ن³ − ن² + ٥ حيث ن الزمن بالثواني، ف المسافة بالامتار، فإن تسارع هذا الجسم بعد مرور (٣) ثواني من بدء الحركة؟

الزمن معطى

مثال (٣) (ص١٣، ٢٠١٠ ش): ف(ن) = ٣ن² − ٦ن + ٩ ، احسب تسارع الجسم عندما تكون سرعته (٣٠ م/ث).

الحل: الزمن مجهول ← استفيد ع(ن) = ٣٠ م/ث

المطلوب تسارع ← اشتق مرتين ع(ن) = ٦ن − ٦

عوض المعطى ٣٠ = ٦ن − ٦

$\frac{36}{6} = \frac{6ن}{6}$ $\boxed{ن = ٦}$

ت(ن) = ٦

$\boxed{ت(٦) = ٦ \ م/ث^2}$ اقتران ثابت.

مثال (٤) (ص١٧، ٢٠١٠ ش): ف(ن) = ن³ − ٤ن² + ٨ن ، جد المسافة التي يقطعها الجسم عندما يكون $\boxed{تسارعه \ ٤ \ م/ث^2}$

(ص١٤، ٢٠١٠ ش) ف(ن) = ٢ن³ − ن² + ١٠ ، جد سرعة الجسم عندما يكون $\boxed{تسارعه \ ٤ \ م/ث^2}$

مثال (٥): ف(ن) = ٢ن³ − ٦ن² + ١٤ن − ٢ جد السرعة عندما $\boxed{ينعدم \ التسارع}$

مثال (٦): ف(ن) = ٣ن³ - ١٨ن² + ١٠ جد التسارع عندما تنعدم السرعة.

* تطبيقات الاشتقاق
التزايد والتناقص والقيم القصوى.

⟸ لإيجاد قيم س الحرجة: (نجعل المشتقة = صفر)

١) نشتق ق لنجد ق'(س)
٢) نساوي المشتقة بالصفر ق'(س) = ٠
٣) نحل المعادلة الناتجة لنجد قيم س الحرجة.
٤) النقاط الحرجة نعوض س في ق الاصلية.

مثال: جد قيم س الحرجة والنقاط الحرجة:

١) ق(س) = س² - ٦س + ٥

الحل: ق'(س) = ٢س - ٦ = ٠ ⟸ ٢س/٢ = ٦/٢

$\boxed{س = ٣}$ قيمة حرجة ⟸ عوض في ق ⟸ ق(٣) = (٣)² - ٦(٣) + ٥

ق(٣) = ٩ - ١٨ + ٥ = -٤

النقطة الحرجة (٣، -٤)

٢) ق(س) = س³ + ٦س² - ١٥س + ٤

ق'(س) = ٣س²/٣ + ١٢س/٣ - ١٥/٣ = ٠/٣

س² + ٤س - ٥ = ٠ ⟸ (س + ٥)(س - ١) = ٠

س = -٥ او س = ١ القيم الحرجة.

مثال: اذا كان للاقتران هـ(س) = س³ - أس² + ٤ نقطة حرجة عند س = ٢، ما قيمة أ؟

الحل: نقطة حرجة ⟸ $\boxed{هـ'(٢) = ٠}$

هـ'(س) = ٣س² - ٢أس = ٠ ⟸ ٣(٢)² - ٢أ(٢) = ٠

١٢ - ٤أ = ٠ ⟸ ١٢/٤ = ٤أ/٤ ⟸ $\boxed{أ = ٣}$

** ايجاد فترات التزايد والتناقص والقيم القصوى من خلال المشتقة الاولى:-

١) نشتق ق'(س).
٢) ق'(س) = ٠ نساوي المشتقة بالصفر.
٣) نجد قيم س الحرجة من خلال ق'(س).
٤) نبين إشارة المشتقة على خط الاعداد.

اذا كان ق'(س) = أس + ب
نفس معامل س | عكس

اذا كان ق'(س) = أس² + بس + جـ
نفس | عكس | نفس
معامل س²

مثال:
+ + + | - - - | + + +
أ (قمة) ، ب (قاع)

- التزايد يكون: (-∞، أ] ، [ب، ∞)
- فترات التناقص [أ، ب]
- القيمة العظمى عند س = أ قمة وقيمتها ق(أ) نعوض في ق
- القيمة الصغرى عند س = ب وقيمتها ق(ب). قاع

مثال: جد فترات التزايد والتناقص والقيم القصوى إن وجدت لكل مما يلي:

١) ق(س) = س³ - ٣س² + ٤ معامل س² موجب

الحل: ق'(س) = ٣س² - ٦س = ٠

٣س(س - ٢) = ٠

$\boxed{س = ٠}$ ، $\boxed{س = ٢}$

+ + + | - - - | + +
نفس ٠ عكس ٢ نفس

فترات التزايد
(-∞، ٠] ، [٢، ∞)

فترات التناقص [٠، ٢]

عند س = ٠ قمة عظمى وقيمتها ق(٠) = ٤

عند س = ٢ قمة صغرى وقيمتها ق(٢) = ٠

٢) ق(س) = ٢س(١٢ - س²) (ص ١٥)
٣) ق(س) = ∛(س³ - ٢٧س) (ص ١٦ ش)
٤) ق(س) = س³ - ٢٧س + ١ (ص ١٩ تكميلي).
٥) ق(س) = ١/٣ س³ - ١/٢ س² - ٢س + ٧ (ص ١٧ ص)
٦) ق(س) = ٤ - س³ - ٦س² - ١٢س (ص ١٩)
٧) ق(س) = س³ + ٣س - ٤ (بين ان ق متزايد على ح)

* ايجاد قيم س الحرجة وفترات التزايد والتناقص والقيم القصوى من خلال (رسمة).

* رسمة مَ(س)

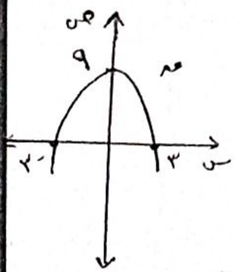
ننسخ الشكل على خط الاعداد

نقول اذا كان الاقتران صاعد يوجد تزايد

نازل تناقص.

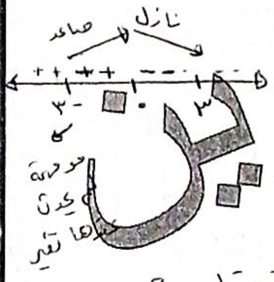
قمة ← قيمة عظمى   قاع ← قيمة صغرى

القيم الحرجة التي يتغير عندها الاقتران من تزايد الى تناقص أو العكس.



مثال (١): (٢٠١٠ ص)

اعتماداً على الشكل والذي يمثل منحنى الاقتران مَ(س) جد القيم القصوى وفترات التزايد والتناقص.



الحل: الطريقة الاولى.

فترات التزايد (-∞، ٠]

فترات التناقص [٠، ∞)

عند س = ٠ يوجد قيمة عظمى وقيمتها ٩.

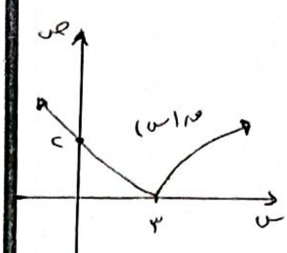
لا يوجد قيم صغرى.

مثال (٢): اعتماداً على الاشكال التالية والتي تمثل منحنى الاقتران مَ(س) المعرف على ح.

جد ① القيم القصوى وقيم س الحرجة وبين نوعها؟

② فترات التزايد والتناقص؟

[١]



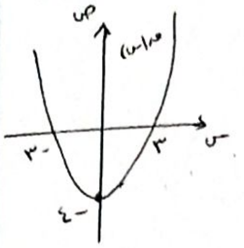
١) عند س = ٣ قيمة صغرى محلية وقيمتها مَ(٣) = ٠ نقطة تحول

٢) التزايد [٣، ∞)

التناقص (-∞، ٣]

س = ٣ قيمة الحرجة نوعها صغرى.

[٢] قيم س الحرجة: س = ٠ صغرى.

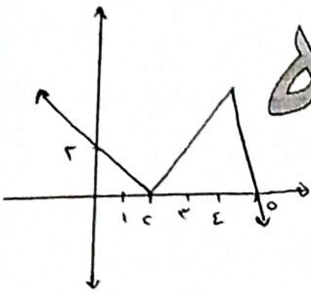


عند س = ٠ يوجد قيمة صغرى محلية وقيمتها -٤

التناقص (-∞، ٠]

التزايد [٠، ∞).

[٣] قيم س الحرجة



القيم القصوى

التزايد

التناقص

الفترة التي تكون فيها مَ(س) < ٠ ؟

* رسمة مَ(س) مشتقة.

١ القيم الحرجة هي التي تقطع محور السينات.

٢ نوزع الاشارات على الرسمة، تحت محور السينات سالب، فوق محور السينات موجب.

٣ نحول الرسم إلى خط اعداد ونضع عليه القيم الحرجة (س) ونجد بذلك القيم القصوى وفترات التزايد والتناقص.

اعتماداً على الرسم التالي والذي تمثل مَ(س) جد

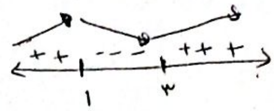
١) قيم الحرجة لـ س؟

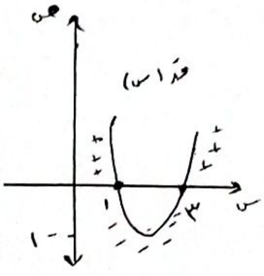
٢) القيم القصوى إن وجدت وبين نوعها؟

٣) فترات التزايد والتناقص؟

(٢٠١١ ش)

[٣] نحول الرسمة إلى خط أعداد





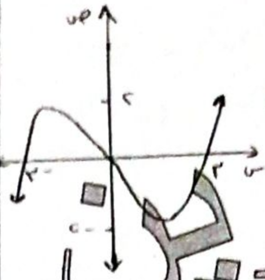
قيم س الحرجة: ١، ٣

القيم القصوى: عند س = ١ قيمة عظمى قيمتها مَ(١)

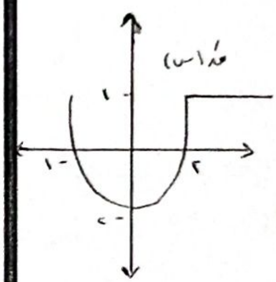
عند س = ٣ قيمة صغرى محلية قيمتها مَ(٣)

التزايد (-∞، ١]، [٣، ∞)   التناقص [١، ٣]

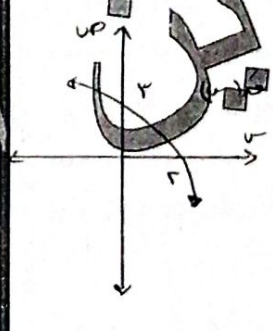
(ب) / سنة (٢٠١٩ ش)



(ج) (٢٠١٧ ش)
ميل المماس المرسوم لمنحنى الاقتران ه(س) عند س = ٠



(د)



* ٤ = تطبيقات اقتصادية على التفاضل

ك : تكلفة   د : ايراد   ر : ربح

القوانين حفظ حفظ حفظ :

(١) الايراد الكلي = عدد الوحدات × سعر البيع
(س ، ثابتة ، رقم او معادلة)

(٢) الربح الكلي = الايراد الكلي − التكلفة الكلية
ر(س) = د(س) − ك(س)

(٣) الايراد = الربح + التكلفة .

** اذا ذكر كلمة حدي معناها اشتق .

⇐ يأتي السؤال بطريقتين :

[١] جد (ربح ، ايراد ، تكلفة) حدي ← المطلوب اشتقاق .
اذا ما كانت المعادلة المطلوبة جاهزة ، نحن بنجهزها من خلال القوانين ثم نشتق .

(٢) يطلب قيمة (س) التي تجعل الربح اكبر ما يمكن :
أ) نكتب القانون . ← ب) نشتقه لنحصل على ر'(س)
ج) نساوي ر'(س) بالصفر لنجد قيمة س
د) نجعلها (عظمى) من خلال خط الاعداد

+++ | −−−
قيمة س

مثال (١) : (٢٠٠٨ ش) اذا كان اقتران التكلفة الكلية لإنتاج س قطعة من منتج هو ك(س) = ٣٠٠ − ٥س + س² جد التكلفة الحدية لإنتاج (١٠) قطع .

الحل : ذكر كلمة حدي تعني اشتق ⇐ ك'(س) = −٥ + ٢س
عدد القطع هو س ⇐ ك'(١٠) = −٥ + ٢(١٠) = ١٥

(٢٠٠٨ ص) الايراد الكلي د(س) = ٦٠ك − ٢ك² فإن الايراد الحدي عندما س = ١٠ يساوي .

مثال (٢) (٢٠١٠ ش)
اذا كان الايراد الكلي الناتج عن بيع (س) قطع من منتج هو د(س) = ٥س² + ٦س ، والتكلفة الكلية ك(س) = ٣س² + س + ٥٠ ، جد الربح الحدي.

الحل: الربح = الايراد - التكلفة (انتبه قوس)

ر(س) = ٥س² + ٦س - (٣س² + س + ٥٠)

ر(س) = ٥س² + ٦س - ٣س² - س - ٥٠

ر(س) = ٢س² + ٥س - ٥٠

الآن نشتق لانه ذكر كلمة حدي

ر'(س) = ٤س + ٥

مثال (٣): ينتج مصنع (س) من أجهزة الحاسوب في الشهر ويبيع الجهاز الواحد بمبلغ (٢٦٠ - س) دينار جد الايراد الحدي.

الايراد الكلي = عدد الوحدات × سعر السلعة.

د(س) = س × (٢٦٠ - س)

د(س) = ٢٦٠س - س²

د'(س) = ٢٦٠ - ٢س

مثال (٤) (٢٠١١ ص) اذا كان اقتران الايراد الكلي لمبيعات سلعة ما هو: د(س) = ٥٠س - ٢س² دينار، اقتران التكلفة الكلية ك(س) = ٣٠س دينارا، حيث س عدد الوحدات المنتجة من سلعة ما، جد قيمة س التي تجعل الربح اكبر ما يمكن.

الحل: مطلوب ربح نستخدم القانون الربح الكلي = الايراد - التكلفة

ر(س) = ٥٠س - ٢س² - ٣٠س

ر(س) = ٢٠س - ٢س²

نشتق ثم نساوي بالصفر

ر'(س) = ٢٠ - ٤س = ٠ ⇐ ٢٠/٤ = ٤س/٤

س = ٥

++ | . .
نفس ٥ عكس معامل س
معامل س

عظمى ← اكبر ما يمكن

اكبر ما يمكن عند س = ٥

مثال (٥) (٢٠٠٨ ش) ينتج مصنع للحواسيب س جهاز اسبوعياً فإذا كانت التكلفة الكلية للانتاج الاسبوعي تعطى بالعلاقة: ك(س) = ٣٠٠٠ + ٥٠س + س²، وكان المصنع يبيع الجهاز الواحد بمبلغ (٢٥٠) دينار، فجد ما يأتي:

١) اقتران الايراد الكلي.
٢) اقتران الربح الكلي.
٣) عدد الاجهزة التي يجب ان يبيعها المصنع اسبوعياً لتحقيق اكبر ربح.

الحل ١) الايراد ⇐ د(س) = ٢٥٠س

٢) ر(س) = د(س) - ك(س)

ر(س) = ٢٥٠س - (٣٠٠٠ + ٥٠س + س²)

ر(س) = ٢٥٠س - ٣٠٠٠ - ٥٠س - س²

ر(س) = ٢٠٠س - ٣٠٠٠ - س²

٣) ربح اكبر ما يمكن نشتق ⇐ ر'(س) = ٢٠٠ - ٢س

نساوي بالصفر: ٢٠٠ - ٢س = ٠ ⇐ ٢٠٠/٢ = ٢س/٢ ، س = ١٠٠

نختبر
+++ | - - -
نفس ١٠٠ عكس

اكبر ما يمكن عند س = ١٠٠

مثال (٦): فكرة كتاب:
لاحظت احدى الشركات التي تصنع ألعاب الاطفال ان التكلفة الكلية لانتاج س لعبة هي ك(س) = ٣٠٠ - ٢و٠س + ١٠٠و٠س² وان الربح الناتج من بيع (س) لعبة هو ر(س) = ٤و٠س دينار

١) اقتران التكلفة الحدية
٢) عدد اللعب اللازم انتاجها لتكون التكلفة اقل ما يمكن.

الحل: ١) ك'(س) = -٢و٠ + ٠٠٢و٠س

٢) التكلفة اقل ما يمكن ⇐ ك'(س) = ٠ — اسهل أحول

-٢و٠ + ٠٠٢و٠س = ٠ ⇐ ٢/١٠ × ١٠٠٠/٢ = س ، س = ١٠٠

س = ١٠٠

صغرى
- - - | + +
نفس ١٠٠ عكس

- اقل ما يمكن التكلفة عند انتاج ١٠٠ لعبة.

- فكرة دائرة (٢٠١٢ ص) مهمة.

١) الربح الحدي: ر'(س) = د'(س) - ك'(س)

٢) الربح اكبر ما يمكن ر'(س) = ٠ ⇐ اذاً د'(س) = ك'(س)