سلطنة عُمان
وزارة التربية والتعليم

رؤية عُمان 2040
OmanVision

نتقدم بثقة
Moving Forward
with Confidence

الرياضيات

كتاب الطالب

١٠

الفصل الدراسي الثاني

الطبعة التجريبية ١٤٤٣هـ - ٢٠٢١م

CAMBRIDGE
UNIVERSITY PRESS

سلطنة عُمان
وزارة التربية والتعليم

الرياضيات

كتاب الطالب

١٠

الفصل الدراسي الثاني

الطبعة التجريبية ١٤٤٣هـ - ٢٠٢١م

CAMBRIDGE
UNIVERSITY PRESS

CAMBRIDGE
UNIVERSITY PRESS

مطبعة جامعة كامبريدج، الرمز البريدي CB2 8BS، المملكة المتحدة.

تُشكِّل مطبعة جامعة كامبريدج جزءًا من الجامعة.
وللمطبعة دور في تعزيز رسالة الجامعة من خلال نشر المعرفة، سعيًا وراء
تحقيق التعليم والتعلم وتوفير أدوات البحث على أعلى مستويات التميز العالمية.

الطبعة التجريبية ٢٠٢١ م، طُبعت في سلطنة عُمان

هذه نسخة تمَّت مواءمتها من كتاب الطالب – الرياضيات للصف العاشر – من سلسلة
كامبريدج للرياضيات الأساسية والمُوسَّعة IGCSE للمؤلفَين كارين مورّيسون ونيك هامشاو.

تمَّت مواءمة هذا الكتاب بناءً على العقد المُوقَّع بين وزارة التربية والتعليم ومطبعة
جامعة كامبريدج رقم ٤٠ / ٢٠٢٠.
لا تتحمَّل مطبعة جامعة كامبريدج المسؤولية تجاه توفُّر أو دقة المواقع الإلكترونية
المستخدمة في هذا الكتاب، ولا تؤكِّد أن المحتوى الوارد على تلك المواقع دقيق
وملائم، أو أنه سيبقى كذلك.

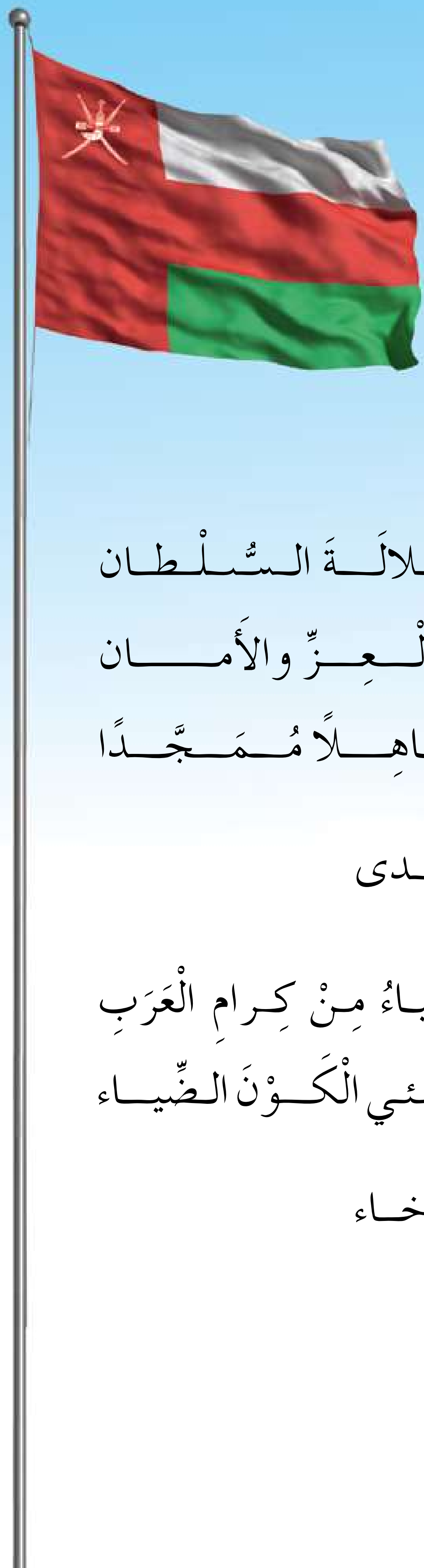
تمَّت مواءمة الكتاب

بموجب القرار الوزاري رقم ٩٠ / ٢٠٢١ واللجان المنبثقة عنه

المغفور لـه
السلطان قابوس بن سعيد
-طيّب اللّه ثراه-

حضرة صاحب الجلالـة
السلطان هيثم بن طارق المُعظَّم
-حفظه اللّه ورعاه-

سلطنـــــة عُمــــان



النَّشيدُ الْوَطَنِيُّ

يا رَبَّنا احْفَظْ لنا   جَلالَةَ السُّلْطان
وَالشَّعْبَ في الأَوْطان   بِالْعِزِّ والأَمان
وَلْيَدُمْ مُؤَيَّدًا   عاهِلًا مُمَجَّدًا

بِالنُّفوسِ يُفْتَدى

يا عُمانُ نَحْنُ مِنْ عَهْدِ النَّبي   أَوْفِياءُ مِنْ كِرامِ الْعَرَبِ
فارْتَقي هامَ السَّماء   وَامْلَئي الْكَوْنَ الضِّياء

وَاسْعَدي وَانْعَمي بِالرَّخاء

تقديم

الحمد للّه رب العالمين، والصلاة والسلام على خير المرسلين، سيّدنا مُحمَّد، وعلى آله وصحبه أجمعين. وبعد:

فقد حرصت وزارة التربية والتعليم على تطوير المنظومة التعليمية في جوانبها ومجالاتها المختلفة كافة؛ لتُلبّي مُتطلّبات المجتمع الحالية، وتطلُّعاته المستقبلية، ولتتواكب مع المُستجدّات العالمية في اقتصاد المعرفة، والعلوم الحياتية المختلفة؛ بما يؤدّي إلى تمكين المخرجات التعليمية من المشاركة في مجالات التنمية الشاملة للسلطنة.

وقد حظيت المناهج الدراسية، باعتبارها مكوِّنًا أساسيًّا من مكوّنات المنظومة التعليمية، بمراجعة مستمرة وتطوير شامل في نواحيها المختلفة؛ بدءًا من المقرّرات الدراسية، وطرائق التدريس، وأساليب التقويم وغيرها؛ وذلك لتتناسب مع الرؤية المستقبلية للتعليم في السلطنة، ولتتوافق مع فلسفته وأهدافه.

وقد أولت الوزارة مجال تدريس العلوم والرياضيات اهتمامًا كبيرًا يتلاءم مع مستجدات التطور العلمي والتكنولوجي والمعرفي. ومن هذا المنطلق اتَّجهت إلى الاستفادة من الخبرات الدولية؛ اتساقًا مع التطوُّر المُتسارع في هذا المجال، من خلال تبنّي مشروع السلاسل العالمية في تدريس هاتَين المادّتَين وفق المعايير الدولية؛ من أجل تنمية مهارات البحث والتقصّي والاستنتاج لدى الطلبة، وتعميق فهمهم للظواهر العلمية المختلفة، وتطوير قدراتهم التنافُسية في المسابقات العلمية والمعرفية، وتحقيق نتائج أفضل في الدراسات الدولية.

إن هذا الكتاب، بما يحويه من معارف ومهارات وقيَم واتجاهات، جاء مُحقِّقًا لأهداف التعليم في السلطنة، وموائمًا للبيئة العمانية، والخصوصية الثقافية للبلد، بما يتضمَّنه من أنشطة وصور ورسومات. وهو أحد مصادر المعرفة الداعمة لتعلُّم الطالب، بالإضافة إلى غيره من المصادر المختلفة.

مُتمنّية لأبنائنا الطلبة النجاح، ولزملائنا المعلّمين التوفيق فيما يبذلونه من جهود مُخلِصة، لتحقيق أهداف الرسالة التربوية السامية؛ خدمة لهذا الوطن العزيز، تحت ظل القيادة الحكيمة لمولانا حضرة صاحب الجلالة السلطان هيثم بن طارق المعظم، حفظه اللّه ورعاه.

واللّه ولي التوفيق

د. مديحة بنت أحمد الشيبانية

وزيرة التربية والتعليم

المحتويات

المقدمة

فائدة

يجب أن تكون معظم مفاهيم الأعداد مألوفة لديك. سوف تُساعدك هذه الوحدة على مراجعة المفاهيم والتحقُّق من تذكُّرها.

سابقًا

درست (ع م ك) في الصف ٩

لاحقًا

سوف تتعلّم في الوحدة ١٢ كيف تحسب الاحتمال في مواقف، دون إعادة الشيء المسحوب.

يرتكز هذا الكتاب المدرسي على كتاب معروف وناجح تمَّت كتابته للمرة الأولى بالاستناد إلى منهج كامبريدج IGCSE في الرياضيات (٠٥٨٠ / ٠٩٨٠). وهو يُغطّي المنهج الدراسي بأكمله ضمن مجموعة متكاملة تُعطى لجميع الطلبة والمعلمين.

تمّ تأليف الكتاب، بحيث تستطيع العمل فيه بالتدرُّج من البداية إلى النهاية. تعتمد جميع الوحدات على المعرفة والمهارات التي تعلّمتها في السنوات السابقة، وتُبنى بعض الوحدات اللاحقة على المعرفة التي تم تطويرها في الكتاب من قبل. وسوف تُساعدك فقرات 'فائدة' و'سابقًا' 'ولاحقًا' على ربط محتوى الوحدات بما تعلَّمته سابقًا، والإضاءة على المكان الذي ستستخدم فيه تلك المعرفة مرّة أخرى في الدروس اللاحقة.

المسار المقترح للعمل في الكتاب هو:

الفصل الدراسي الأول للصفّ العاشر: الوحدات من ١ إلى ٨

الفصل الدراسي الثاني للصفّ العاشر: الوحدات من ٩ إلى ١٤

ميزات رئيسية

تُفتتَح كل وحدة بقائمة مُفردات رياضية رئيسية وقائمة أهداف ستتعلَّمها في الوحدة، ومُقدِّمة تعرض نظرة عامَّة عن كيفية استخدام الرياضيات في الحياة الواقعية.

ويُشار إلى **المفردات الرياضية الرئيسية** في متن الدروس باللون الأزرق، حيث يتمّ استخدامها وشرحها.

تقسم الوحدات إلى أقسام (دروس)، يُغطّي كل منها موضوعًا مُعيَّنًا، ويتم تقديم وشرح المفاهيم في كل موضوع، وإعطاء أمثلة لتقديم طرائق مختلفة للعمل بطريقة عملية وسهلة المُتابَعة.

تُقدِّم **التمارين** الخاصّة بكل موضوع أسئلة مُتنوِّعة، وبمستويات مختلفة، تسمح للطالب بالتدرُّب على الأساليب التي تم تقديمها في الدرس، وتتراوح هذه التمارين بين الأنشطة البسيطة والتطبيقات وحل المسائل.

يرد مُلخّص لكل وحدة تُعرَض فيه المعارف والمهارات التي يجب أن تمتلكها عند الانتهاء من العمل في الوحدة، حيث يمكنك استخدام هذا المُلخَّص كقائمة عند المراجعة، للتحقّق من تغطية المطلوب معرفته في الوحدة.

ترد بعض التمارين الموجزة في نهاية كل وحدة.

مُميّزات في الهامش

تتضمّن الإرشادات المُفيدة في هوامش الكتاب ما يأتي:

مفاتيح: وهي تعليقات عامّة تُذكِّرك بمعلومات مُهمَّة أو أساسية مُفيدة للتعامُل مع تمرين ما، فهي توفِّر معلومات إضافية أو دعمًا إضافيًا في موضوعات قد تكون مُلتبِسة.

مساعدة: تُغطّي الأخطاء الشائعة بناءً على تجارب المعلّمين مع طلبتهم، وتمنحك أشياء يجب أن تتذكّرها أو أن تكون حذرًا منها.

مساعدات في حل المسائل: أثناء عملك في العام الدراسي، سوف تُطوِّر 'صندوق الأدوات' الخاص بك والمُتعلِّق بمهارات واستراتيجيات حل المسائل، وسوف يُذكِّرك هذا الصندوق بإطار حل المسائل ويحثّك على اقتراح طرائق لمعالجة أنواع مختلفة من المسائل.

روابط مع موضوعات أخرى: لا يتمّ تعلُّم مادة الرياضيات بمعزل عن المواد الأخرى، وسوف تستخدم وتُطبِّق ما تتعلَّمه في الرياضيات على العديد من المواد الدراسية الأخرى، وتُشير هذه النوافذ إلى كيفية الاستفادة من المفاهيم الرياضية في موضوعات أخرى.

مصادر إضافية

دليل المعلم: هذا الكتاب متوفر لمُعلّميك، وهو يتضمَّن، إضافة إلى الأشياء الأخرى، أسئلة مراجعة لكل وحدة، بالإضافة إلى إجابات جميع التمارين وتمارين نهاية الوحدة.

كتاب النشاط: يتبع هذا الكتاب وحدات ودروس كتاب الطالب، ويُقدِّم تمارين إضافية هادفة للتدرب على حل المزيد من الأنشطة، ويتضمّن أيضًا مُلخَّصًا للمفاهيم الأساسية، إضافة إلى 'المفاتيح' و'المساعدات' بهدف توضيح الموضوعات المرتبطة بها.

حجر النرد المنتظم يدل على تساوي فرصة ظهور كل وجه من أوجهه.

مُساعَدة

عليك الانتباه أكثر هنا. طبّق ترتيب العمليات الحسابية وتحقّق من ترتيب الحل بدقة.

رابط

تستخدم برمجيات الحاسوب الاحتمالات لتنشئ تطبيقات مثل تفعيل الاتصالات الصوتية على الهواتف المحمولة. عندما تذكر اسمًا إلى الهاتف، يختار التطبيق الاسم الأكثر ترجيحًا من قائمة المشتركين.

الوحدة التاسعة: المزيد من المعادلات

البابليون أوّل من كتب عن المعادلات التربيعية قبل نحو ٥٠٠٠ سنة.

المُفردات

- الإكمال إلى مربّع Completing the square
- الصيغة التربيعية Quadratic formula
- التمثيل البياني Sketch
- خط التقارُب Asymptote
- التقاطع Intersection

سوف تتعلّم في هذه الوحدة كيف:

- تحل معادلات تربيعية بالإكمال إلى مُربّع.
- تحل معادلات تربيعية باستخدام الصيغة التربيعية.
- تستنتج معادلتَين آنيّتَين إحداهما خطية والأخرى تربيعية وتحلّهما.
- تفسّر الحل في سياق المسألة.
- تتعرّف على التمثيلات البيانية للدوال وترسمها وتُفسّرها.

لاحظت في الصف التاسع (الوحدة ١٥) أن كثيرًا من المسائل يمكن تمثيلها بمنحنيات. وقد استخدمت من قبل جدول القيَم لترسم هذه المنحنيات، لكنك سترسمها الآن مُستخدمًا خصائصها.

وسبق لك أن عرفت طرقًا مختلفة لحلّ المعادلات التربيعية بالتحليل إلى عوامل، ولكن لن تستطيع استخدام تلك الطرق لحلّ المعادلات التربيعية الأكثر صعوبة. لذلك سوف تتعلّم في هذه الوحدة طرقًا جديدة، مثل الإكمال إلى مُربّع، واستخدام الصيغة التربيعية، للتعامُل مع تلك المعادلات التربيعية.

١-٩ الإكمال إلى مُربّع

سابقًا

في العبارات التربيعية، تكون القوى الأكبر في الحد الذي يتضمّن $\text{س}^٢$. وقد تعلّمت في الصف التاسع (الوحدة ١١) كيف تحلّ معادلات تربيعية بالتحليل إلى عوامل.

في هذه الوحدة، سوف نعيد كتابة المعادلة **التربيعية** في صيغة جديدة. في البداية، تستخدم هذه الطريقة في حلّ المعادلة التربيعية. بعد ذلك، سوف تستخدم في إيجاد إحداثيات القيَم العظمى أو القيَم الصغرى للمنحنيات التربيعية. وسوف نستخدم هذه الطريقة أيضًا لإنشاء الصيغة التربيعية التي ستستخدمها في الدرس ٩-٢

تذكر أنه عند إيجاد مفكوك العبارة الجبرية $(\text{س} + \text{أ})^٢$ ستحصل على الجدول الآتي:

	س	أ
س		
أ		

عند ملء الجدول، نحصل على:

	س	أ
س	$\text{س}^٢$	أس
أ	أس	$\text{أ}^٢$

وهذا يعني أن: $(\text{س} + \text{أ})(\text{س} + \text{أ}) = \text{س}^٢ + ٢\text{أس} + \text{أ}^٢$

تسمى العبارة الجبرية $\text{س}^٢ + ٢\text{أ س} + \text{أ}^٢$ **مربّعًا كاملًا** إذا أمكن كتابتها في صورة $(\text{س} + \text{أ})^٢$

ليكن لديك العبارة الجبرية $\text{س}^٢ + ٦\text{س} + ١$، قارنها مع

$(\text{س} + ٣)^٢ = (\text{س} + ٣)(\text{س} + ٣) = \text{س}^٢ + ٦\text{س} + ٩$

ستجد أن العدد (٣) هو نصف مُعامِل (س) في العبارة الجبرية $(\text{س}^٢ + ٦\text{س} + ١)$، وأن العبارة الجبرية $(\text{س}^٢ + ٦\text{س} + ٩)$ تتشابه مع العبارة الجبرية $(\text{س}^٢ + ٦\text{س} + ١)$ في الحدَّين $(\text{س}^٢ + ٦\text{س})$، إلا أن الحدّ الثابت فيها هو ٩ بدلًا من ١، لذا عليك أن تطرح منها ٨، لتجعل العبارتَين الجبريتين متساويتَين:

$\text{س}^٢ + ٦\text{س} + ١ = (\text{س}^٢ + ٦\text{س} + ٩) - ٨ = (\text{س} + ٣)^٢ - ٨$

وتسمى هذه الطريقة التي استخدمت لإعادة كتابة العبارة التربيعية بطريقة **الإكمال إلى مُربّع**.

غالبًا ما تُستخدم طريقة التحويل إلى مُربّع كامل عندما يكون مُعامِل $\text{س}^٢$ مساويًا للعدد ١ لأنها تقلّل من صعوبة الموقف، كما يمكن استخدامها في مواقف رياضية أخرى. استخدم هذه الطريقة عندما تكون العبارة الجبرية ثلاثية الحدود غير قابلة للتحليل إلى عوامل.

مثال ١

أعد كتابة العبارة الجبرية $\text{س}^٢ - ٤\text{س} + ١١$ في صورة $(\text{س} + \text{أ})^٢ + \text{ب}$

الحـلّ:

$\text{س}^٢ - ٤\text{س} + ١١$	
$= \text{س}^٢ - ٤\text{س} + (\frac{-٤}{٢})^٢ - (\frac{-٤}{٢})^٢ + ١١$	مُعامِل 'س' هو -٤ ونصف المُعامِل هو -٢
$= \text{س}^٢ - ٤\text{س} + ٤ - ٤ + ١١$	لذا نضيف $^+٤$ و(-٤) لأن الحد الثابت يساوي ٤
$= \text{س}^٢ - ٤\text{س} + ٤ + ٧$	
$= (\text{س} - ٢)^٢ + ٧$	

تعلّمتَ في الوحدة (١١) من الصف التاسع كيف تحل معادلات تربيعية مثل س^{٢} − ٧س + ١٢ = ٠ بالتحليل إلى العوامل. لكن بعض المعادلات التربيعية يصعب تحليلها إلى عوامل. وفي هذه الحالة، يمكنك أن تحل المعادلة التربيعية بالإكمال إلى مُربّع كما في المثال الآتي:

مثــال ٢

حلّ المعادلة س^{٢} + ٤س − ٦ = ٠ مُقرّبًا إجابتك إلى أقرب منزلتَين عشريتَين.

الحــلّ:

س^{٢} + ٤س − ٦ = ٠	يصعب تحليل هذه المعادلة إلى عوامل.
س^{٢} + ٤س + $(\frac{٤}{٢})^{٢}$ − ٦ = $(\frac{٤}{٢})^{٢}$	لذا استخدم طريقة الإكمال إلى مربع:
س^{٢} + ٤س + ٤ − ٦ = ٤	أضف $(\frac{٤}{٢})^{٢}$ إلى الطرفَين.
س^{٢} + ٤س + ٤ = ١٠	أضف ٦ إلى الطرفَين.
(س + ٢)^{٢} = ١٠	اكتب س^{٢} + ٤س + ٤ في صورة (س + أ)^{٢}
س + ٢ = ± $\sqrt{١٠}$	خذ الجذر التربيعي للطرفَين.
س = −٢ ± $\sqrt{١٠}$	اطرح ٢ من الطرفَين.
س = ١٫١٦٢٢... أو −٥٫١٦٢٢...	أوجد القيمتين؛ الموجبة والسالبة للجذر التربيعي.
س = ١٫١٦ أو −٥٫١٦	قرّب كل قيمة إلى أقرب منزلتَين عشريتَين.

نحتاج إلى القيمتَين؛ الموجبة والسالبة للجذر التربيعي، لنصل إلى حلَّي المعادلة التربيعية.

تمارين ٩-١

١) اكتب كل عبارة من العبارات الجبرية الآتية في صورة (س + أ)^{٢} + ب:

- أ) س^{٢} + ٦س + ١٤
- ب) س^{٢} + ٨ س + ١
- ج) س^{٢} + ١٢س + ٢٠
- د) س^{٢} + ٦س + ٥
- هـ) س^{٢} − ٤س + ١٢
- و) س^{٢} − ٢س − ١٧
- ز) س^{٢} + ٥س + ١
- ح) س^{٢} + ٧س − ٢
- ط) س^{٢} − ٣س − ٣
- ي) س^{٢} + ٧س − ٨
- ك) س^{٢} − ١٣س + ١
- ل) س^{٢} − ٢٠س + ٤٠٠

٢) حلّ كل معادلة من المعادلات التربيعية الآتية بالإكمال إلى مُربّع، واكتب الناتج مُقرّبًا إلى أقرب منزلتَين عشريتَين:

- أ) س^{٢} + ٦س − ٥ = ٠
- ب) س^{٢} + ٨ س + ٤ = ٠
- ج) س^{٢} − ٤س + ٢ = ٠
- د) س^{٢} + ٥س − ٧ = ٠
- هـ) س^{٢} − ٣س + ١ = ٠
- و) س^{٢} − ١٢س + ١ = ٠

٣) حلّ كل معادلة من المعادلات التربيعية الآتية بالإكمال إلى مُربّع:

- أ) س^{٢} − س − ١٠ = ٠
- ب) س^{٢} + ٣س − ٦ = ٠
- ج) س(٦ + س) = ١
- د) س^{٢} + $\frac{١}{٢}$ س = ٤
- هـ) س = ٢ − $\frac{٠٫٢}{س}$
- و) س − ٥ = $\frac{٢}{س}$
- ز) (س−١)(س+٢)−١ = ٠
- ح) (س−٤)(س+٢) = −٥
- ط) س^{٢} = س + ١

٢-٩ الصيغة التربيعية

سابقًا

تعلّمت في الوحدة ٣ من الصف التاسع، أن مُعامِل المُتغيّر هو العدد المضروب فيه. وهذا صحيح أيضًا في المعادلة التربيعية: أ هو مُعامِل $س^٢$، ب هو مُعامِل س، والحد الثابت هو جـ.

في الدرس السابق، رأيت أن مُعامِل $س^٢$ مساوٍ للعدد ١، وسوف تجد أنّ تطبيق طريقة الإكمال إلى مُربّع عندما يكون مُعامِل $س^٢$ غير العدد ١ عملية أكثر تعقيدًا، لكن إذا طبّقتها على الصورة العامة للمعادلة التربيعية ($أس^٢ + ب س + جـ = ٠$، حيث $أ \neq ٠$) فستحصل على الآتي:

إذا كان $أس^٢ + ب س + جـ = ٠$ فإن $س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^٢ - ٤أجـ}}{٢أ}$ حيث $ب^٢ - ٤أجـ \geq ٠$

تُعرف هذه الصورة بالصيغة التربيعية.

لاحظ أن الرمز (±) يدلّك على حساب قيمتَين: الأولى باستخدام (+) والأخرى باستخدام (−).

تُستخدم الصيغة التربيعية لحل المعادلات التربيعية التي لها حلول حقيقية وخاصة العبارة التربيعية التي يصعب تحليلها إلى عوامل.

تكمن أهمية الصيغة التربيعية في أنّها تُستخدَم في كل الحالات، حتى عندما يكون مُعامِل $س^٢$ غير العدد ١

مثـــال ٣

حلّ كل معادلة من المعادلات التربيعية الآتية مستخدمًا الصيغة التربيعية، واكتب الناتج مُقرّبًا إلى عدد مكوَّن من ٣ أعداد معنوية عند الضرورة.

أ $س^٢ + ٤س + ٣ = ٠$ ب $س^٢ - ٧س + ١١ = ٠$ ج $٣س^٢ - ٢س - ١ = ٠$

الحـــلّ:

أ $س^٢ + ٤س + ٣ = ٠$

$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^٢ - ٤أجـ}}{٢أ} = \frac{-٤ \pm \sqrt{٤^٢ - ٤ \times ١ \times ٣}}{٢ \times ١}$

$= \frac{-٤ \pm \sqrt{١٦ - ١٢}}{٢}$

$= \frac{-٤ \pm \sqrt{٤}}{٢}$

$= \frac{-٤ \pm ٢}{٢}$

إما $س = \frac{-٤ + ٢}{٢} = \frac{-٢}{٢} = -١$ أو

$س = \frac{-٤ - ٢}{٢} = \frac{-٦}{٢} = -٣$

قارن المعادلة التربيعية $س^٢ + ٤س + ٣ = ٠$ مع $أس^٢ + ب س + جـ = ٠$، وستجد أن $أ = ١$، $ب = ٤$، $جـ = ٣$

لاحظ أنّه بالإمكان تحليل المعادلة التربيعية إلى عوامل لتظهر في صورة $(س + ١)(س + ٣) = ٠$ وتعطي الإجابة نفسها.

إذا كان تحليل العبارة التربيعية ممكنًا، فبادر إلى القيام بذلك لأنها الطريقة الأسهل.

مُساعَدة

عليك الانتباه أكثر هنا. طبّق ترتيب العمليات الحسابية وتحقّق من ترتيب الحل بدقة.

ب $\text{س}^{٢} - ٧\text{س} + ١١ = ٠$

أ = ١، ب = −٧، جـ = ١١

$$\text{س} = \frac{-(-٧) \pm \sqrt{(-٧)^{٢} - ٤ \times ١ \times ١١}}{٢ \times ١}$$

$$= \frac{٧ \pm \sqrt{٤٩ - ٤٤}}{٢}$$

$$= \frac{٧ \pm \sqrt{٥}}{٢}$$

إما $\text{س} = \frac{٧ + \sqrt{٥}}{٢} = ٤{,}٦١٨٠... = ٤{,}٦٢$ أو

$\text{س} = \frac{٧ - \sqrt{٥}}{٢} = ٢{,}٣٨١٩... = ٢{,}٣٨$

غالبًا ما تحتاج إلى تقريب إجاباتك.

ج $٣\text{س}^{٢} - ٢\text{س} - ١ = ٠$

أ = ٣، ب = −٢، جـ = −١

$$\text{س} = \frac{-(-٢) \pm \sqrt{(-٢)^{٢} - ٤ \times ٣ \times (-١)}}{٢ \times ٣}$$

$$= \frac{٢ \pm \sqrt{٤ + ١٢}}{٦}$$

$$= \frac{٢ \pm \sqrt{١٦}}{٦}$$

$$= \frac{٢ \pm ٤}{٦}$$

إما $\text{س} = \frac{٢ + ٤}{٦} = \frac{٦}{٦} = ١$ أو

$\text{س} = \frac{٢ - ٤}{٦} = \frac{-٢}{٦} = \frac{-١}{٣} = -٠{,}٣٣٣$

لاحظ في هذا المثال أن أ لا تساوي العدد ١

لاحظ وجود قوسين حول العدد −٧. إذا نسيتهما فستصبح الحسابات على النحو $-٧^{٢} = -٤٩$ بدلًا من $+٤٩$. إذا كانت ب سالبة فاستخدم القوسين دائمًا لتتأكّد من أنك قد قمت بتربيع العدد بشكل صحيح.

تتيح معظم الآلات الحاسبة الحديثة إدخال هذه الكسور كما تظهر هنا تمامًا.

مثــال ٤

مثلّث طول قاعدته (س + ٢) سم وارتفاعه (س + ٥) سم ومساحته ٢٧ سم^{٢}. أوجد طول قاعدته.

الحــلّ:

مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ القاعدة × الارتفاع.	استخدم صيغة مساحة المثلّث،
المساحة = $\frac{١}{٢}$ (س + ٢)(س + ٥) = ٢٧	
∴ س^{٢} + ٧س + ١٠ = ٥٤	حل المعادلة
س^{٢} + ٧س − ٤٤ = ٠	بما أن الوحدات مترابطة (كلها سم أو سم^{٢}) لذلك نتجاهلها هنا.
(س + ١١)(س − ٤) = ٠	
س = ⁻١١ أو س = ٤	لا نستطيع استخدام س = ⁻١١ لأنّها تجعل أبعاد المثلّث سالبة، وهذا الأمر غير ممكن، وعليه يكون س = ٤ الناتج الوحيد الذي يمكن استخدامه.
∴ طول القاعدة يساوي ٤ + ٢ = ٦ سم	

تمارين ٩-٢

١) حلّ كلّ معادلة من المعادلات الآتية بالتحليل إلى عوامل، ثم باستخدام الصيغة التربيعية، لتبيّن الحصول على النواتج نفسها باستخدام الطريقتين:

أ س^{٢} + ٧س + ١٢ = ٠ ب س^{٢} + ٨س + ١٢ = ٠ ج س^{٢} + ١١س + ٢٨ = ٠

د س^{٢} + ٤س − ٥ = ٠ هـ س^{٢} + ٦س − ١٦ = ٠ و س^{٢} + ١٢س − ١٦٠ = ٠

ز س^{٢} − ٦س + ٨ = ٠ ح س^{٢} − ٣س − ٢٨ = ٠ ط س^{٢} − ٥س − ٢٤ = ٠

ي س^{٢} − ١٢س + ٣٢ = ٠ ك س^{٢} − ٢س − ٩٩ = ٠ ل س^{٢} − ٩س − ٣٦ = ٠

م س^{٢} − ١٠س = ⁻٢٤ ن س^{٢} − ١٢س = ⁻٣٥ س س^{٢} + ٩س = ٣٦

٢) حلّ كل معادلة من المعادلات الآتية باستخدام الصيغة التربيعية. قرّب إجابتك إلى عدد مكوّن من ٣ أرقام معنوية عند الضرورة:

أ س^{٢} + ٦س − ١ = ٠ ب س^{٢} + ٥س + ٥ = ٠ ج س^{٢} + ٧س + ١١ = ٠

د س^{٢} + ٤س + ٢ = ٠ هـ س^{٢} − ٣س − ١ = ٠ و س^{٢} − ٤س + ٢ = ٠

ز س^{٢} − ٨س + ٦ = ٠ ح س^{٢} − ٢س − ٢ = ٠ ط س^{٢} − ٦س − ٤ = ٠

ي س^{٢} − ٨س = ٢ ك س^{٢} − ٩س = ⁻٧ ل س^{٢} + ١١س = ⁻٧

٣) حلّ كلًّا من المعادلات الآتية باستخدام الصيغة التربيعية. قرّب إجابتك إلى عدد مكوّن من ٣ أرقام معنوية عند الضرورة (انتبه إلى مُعامِل $\text{س}^{٢}$):

أ $٢\text{س}^{٢} - ٤\text{س} + ١ = ٠$ ب $٣\text{س}^{٢} - ٣\text{س} - ١ = ٠$ ج $٤\text{س}^{٢} + ٢\text{س} - ٥ = ٠$

د $-٢\text{س}^{٢} + ٣\text{س} + ٤ = ٠$ هـ $-٢\text{س}^{٢} - ٢\text{س} + ١ = ٠$ و $٥\text{س}^{٢} + \text{س} - ٣ = ٠$

٤) حلّ كل معادلة من المعادلات الآتية مقرّبًا إجابتك إلى عدد مكوّن من ٣ أرقام معنوية عند الضرورة (عليك تجميع الحدود في أحد طرفي المعادلة، ووضع الصفر في الطرف الآخر):

أ $٢\text{س}^{٢} - \text{س} + ٦ = ٤\text{س} + ٥$ ب $٧\text{س}^{٢} - ٣\text{س} - ٦ = ٣\text{س} - ٧$

ج $\text{س}(٦\text{س} - ٣) - ٢ = ٠$ د $٠٫٥\text{س}^{٢} + ٠٫٨\text{س} - ٢ = ٠$

هـ $(\text{س} + ٧)(\text{س} + ٥) = ٩$ و $\frac{١}{\text{س}} + \text{س} = ٧$

٥) مستطيل مساحته ١٢ $\text{سم}^{٢}$، إذا كان عرضه $(\text{س} + ١)$ سم وطوله $(\text{س} + ٣)$ سم، فأوجد القيَم الممكنة للمتغيّر س.

٦) كتب عالِم بيولوجي نموذجًا يبيّن أن متوسّط ارتفاع نوع من الأشجار (ع) مترًا بعد مرور زمن مقداره (ن) شهرًا، يُعطى بالدالة $\text{ع} = \frac{١}{٥}\text{ن}^{\frac{٢}{٣}} + \frac{١}{٣}\text{ن}^{\frac{١}{٣}}$

استخدم نموذج العالِم لكي تجد الآتي:

أ متوسّط ارتفاع هذا النوع من الأشجار بعد ٦٤ شهرًا.

ب عدد الشهور التي يصبح عندها متوسّط ارتفاع الأشجار ١٠ أمتار، مُقرّبًا الناتج إلى أقرب عدد مكوّن من ٣ أرقام معنوية.

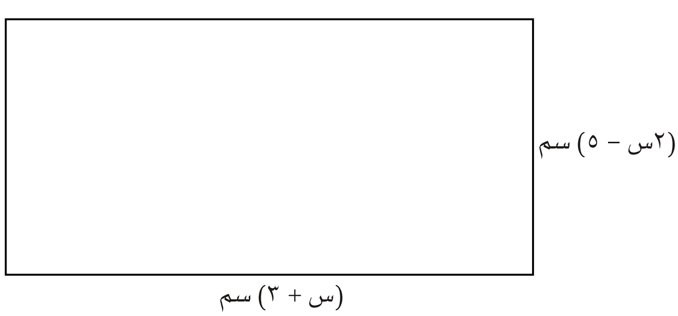
ضع $\text{س} = \text{ن}^{\frac{١}{٣}}$ ، ثم اكتب معادلة تربيعية مستخدمًا المتغيّر س، ثم حلّها.

٧) أوجد قيمة س في كلّ ممّا يأتي:

أ مثلّث طول قاعدته $(\text{س} - ٢)$ سم، وارتفاعه $(\text{س} + ٢)$ سم، ومساحته ١٦ $\text{سم}^{٢}$

ب مثلث طول قاعدته $(٢\text{س} + ١)$ م، وارتفاعه $(\text{س} + ٧)$ م، ومساحته ٣٥ $\text{م}^{٢}$

ج مساحة المستطيل المُبيّن أدناه = ٢١ $\text{سم}^{٢}$



٣-٩ حل المعادلات الآنية

سابقًا

تعلمت في الوحدة (٦) من الصف التاسع، كيف تحل معادلتَين آنيّتَين خطّيتَين.

تعلمت سابقًا كيف تحل معادلات خطّية آنيّة، ومثّلت بيانيًّا عبارات تربيعية لتحل معادلات تربيعية بمعرفة نقطة تقاطعها مع محور السينات.

والآن ستحل معادلتَين آنيّتَين؛ إحداهما تربيعية والأخرى خطّية.

عندما تحل معادلة تربيعية بالتحليل إلى عوامل، أو باستخدام الصيغة التربيعية، فإنك ستحتاج إلى إعادة ترتيب المعادلة لتصبح مساويةً للصفر. وعند حل معادلتَين آنيّتَين، إحداهما تربيعية والأخرى خطّية، فإنك تحذف عادة أحد المتغيّرَين من المعادلتَين وتحل المعادلة التربيعية الناتجة بالطريقة المعتادة. ستتعلّم كيفية القيام بذلك في المثال الآتي:

مثــال ٥

حلّ المعادلتَين الآنيّتَين ص = س^{٢} + ٣س − ١٠، ص = س + ٥

الحــلّ:

ص = س^{٢} + ٣س − ١٠ ص = س + ٥ فيكون: س^{٢} + ٣س − ١٠ = س + ٥	تبدأ كلّ من المعادلتَين بـ (ص =)، لذا يمكن حذف ص بسهولة. أعد ترتيب المعادلة لتصبح مساويةً للصفر.
س^{٢} + ٢س − ١٥ = ٠ (س+ ٥)(س − ٣) = ٠ س = −٥، س = ٣	حلّ المعادلة كالمعتاد.
عوّض بقيَم س في المعادلة الثانية: ص = −٥ + ٥ ص = ٣ + ٥ ص = ٠ ص = ٨ وتكون النواتج: س = −٥ ص = ٠ و س = ٣ ص = ٨ أي (−٥، ٠) أو (٣، ٨)	سوف نحلّ معادلتَين آنيّتَين، لذا نحتاج إلى إيجاد قيمة س وقيمة ص. عوّض قيَم س في المعادلة الخطّية لأنها أسهل. تحقّق من النواتج: عندما تكون س = −٥ في المعادلة التربيعية نجد أنّ قيمة ص= (−٥)^{٢} + ٣ × (−٥) − ١٠، فتكون ص = ٠، وهي نفسها في المعادلة الخطّية. عندما تكون س = ٣ نجد أنّ قيمة ص = ٣^{٢} + ٣ × ٣ − ١٠، فتكون ص = ٨، وهي أيضًا نفسها في المعادلة الخطّية.

مثال ٦

أوجد قيَم س، ص التي تحقّق كلّ معادلة من المعادلتَين الآتيتَيْن:

$ص = ٣س^{٢} + ٢س + ٣$ $\qquad$ $ص = ٤س + ٥$

الحــلّ:

$ص = ٣س^{٢} + ٢س + ٣$ $ص = ٤س + ٥$	
$٣س^{٢} + ٢س + ٣ = ٤س + ٥$	احذف ص.
$٣س^{٢} - ٢س - ٢ = ٠$	أعد ترتيب المعادلة لتصبح مساويةً للصفر.
باستخدام الصيغة التربيعية: $س = \frac{٢ \pm \sqrt{(-٢)^{٢} - ٤ \times ٣ \times (-٢)}}{٢ \times ٣}$ $س = \frac{٢ \pm \sqrt{٢٨}}{٦}$ $= \frac{٢ \pm \sqrt{(٤ \times ٧)}}{٦}$ $= \frac{٢ \pm \sqrt{٤} \times \sqrt{٧}}{٦}$	لاحظ أنه يصعب تحليل المعادلة التربيعية إلى عوامل، لذلك استخدم الصيغة التربيعية.
$\therefore س = \frac{١ + \sqrt{٧}}{٣}$ أو $س = \frac{١ - \sqrt{٧}}{٣}$	بسِّط بقسمة البسط والمقام على ٢
عوّض في $ص = ٤س + ٥$	
عندما $س = \frac{١ + \sqrt{٧}}{٣}$، $ص = \frac{١٩ + ٤\sqrt{٧}}{٣}$ عندما $س = \frac{١ - \sqrt{٧}}{٣}$، $ص = \frac{١٩ - ٤\sqrt{٧}}{٣}$	احسب قيمتَي ص.

مثــال ٧

إذا علمت أن مساحة المستطيل المُقابل ١٥ سم^{٢}، وأن طوله يزيد عن عرضه بمقدار ٢ سم:

أ) اكتب معادلتين تستطيع من خلالهما إيجاد قيمتي س، ص.

ب) حل المعادلتَين الناتجتَين وفسّر النواتج.

الحــلّ:

أ	س ص = ١٥ ص = س + ٢	مساحة المستطيل. يزيد طول المستطيل عن عرضه بمقدار ٢ سم.
ب	س(س + ٢) = ١٥ س^{٢} + ٢س − ١٥ = ٠ (س + ٥)(س − ٣) = ٠ ∴ س = −٥ أو س = ٣ ∵ س تدل على الطول، لذا لا يمكن أن تكون سالبة. س= ٣، ص = ٥	عوض (س + ٢) عن ص في المعادلة الأولى. حل المعادلة التربيعية بتحليلها إلى عوامل.

تمارين ٩-٣

١) حلّ كل زوج من أزواج المعادلات الآتية آنيًّا:

أ) ص = س^{٢} − ٢س + ٢
ص = س

ب) ص = س^{٢} + ٣س − ١٠
ص = ٢س + ٢

ج) ص = س^{٢}
ص = ٩س + ١٠

د) ص = ٢س + ٢٥
ص = س^{٢} + ٢س

هـ) ص = س^{٢} + ٤س + ١
ص = ٢س

و) ص + ٨ = ٥س
ص= س^{٢} − س + ١

ز) ص = ٥س
ص + ١٤ =س^{٢}

ح) س^{٢} = ص + ٣س + ٤
س + ص = ٢٠

٢) أيّ مجموعة من مجموعات المعادلات الآتية لها نفس الحلول لـِ س؟ اربط بينها:

أ ص = ٣س^{٢} + ٢س − ٥ ص = ٢س − ٤	**ب** ص = س^{٢} + س − ٤ ص = س	**ج** ص = ٢س − ٦ ص = ٣س^{٢} + ٨س + ٣
د ص = س^{٢} + ٤س − ٥ ص = ٤س − ١	**هـ** ص = ٢ − س ص = ٣س^{٢} − س + ١	**و** ص = س^{٢} ص = ٣س + ٥
ز ص = ٥ ص = س^{٢} − ٣س	**ح** ص= ٣س^{٢} + ٧س + ٢ ص = س − ٧	**ط** ص = س^{٢} − ٥ ص = ٣س

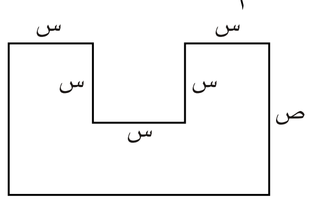
٣) حل كلّ زوج من أزواج المعادلات الآتية آنيًّا:

أ ص = ٢س^{٢} + ٣س + ١
ص = س + ٤

ب ص = ٥س^{٢} + ٤س
٢ص = ٤س + ٢

ج ص = س^{٢} + ٢س − ٢
ص = س − ١

٤) إذا علمت أن مساحة الشكل المجاور ٢١ سم^{٢}، ومحيطه ٣٨ سم:

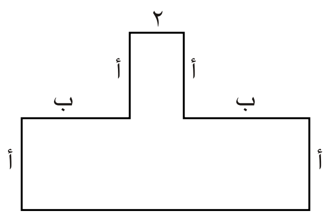


أ اكتب معادلة تمثّل المساحة.

ب اكتب معادلة تمثّل المحيط.

ج حل المعادلتَين آنيًّا، وفسّر إجاباتك.

٥) إذا علمت أن مساحة الشكل المقابل ٤٨ سم^{٢}:



أ اكتب معادلة تمثّل المساحة.

ب إذا كانت قيمة ب تساوي مثلَيّ قيمة أ، فاكتب معادلة تمثّل ذلك.

ج حلّ المعادلتَين في الجزئيتين (أ)، (ب) آنيًّا.

د ما قيمة ب المبيّنة على الشكل؟

٩-٤ رسم الدوال التربيعية

في الوحدة (١٤) من الصف التاسع، تعلّمت كيف ترسم منحنيات الدوال التربيعية، وذلك برسم جدول قيَم وإكماله، ثم رسم النقاط في المستوى الإحداثي والتوصيل بينهما. وفي هذا الدرس، ستحاول رسم الدوال جبريًّا. لن يكون الرسم مثاليًّا، لكنه يبيّن معلومات مهمّة عن التمثيل البياني. بصورة عامة، لا يبيّن الرسم أعدادًا على المحورَين، بل يعرض بعض النقاط المُحدّدة، كنقاط التقاطُع مع المحورَين والنقطة العظمى أو النقطة الصغرى.

عندما تكون المعادلة في الصورة القياسية ص = س^{٢} + ب س + جـ، اتّبع الخطوات الآتية لترسم التمثيل البياني:

الخطوة ١: حدّد شكل التمثيل البياني.

إذا كانت إشارة مُعامِل الحد س^{٢} موجبة، فسيكون شكل التمثيل للأعلى $\cup$؛ وعندما تكون إشارة مُعامِل الحد س^{٢} سالبة، فسيكون شكل التمثيل للأسفل $\cap$.

الخطوة ٢: أوجد نقطة تقاطع المنحنى مع المحور الصادي.

يتم ذلك بتعويض س = ٠ في المعادلة. وتكون إحداثيات نقطة تقاطع المنحنى مع المحور الصادي (٠، جـ).

الخطوة ٣: أوجد نقطة أو نقاط تقاطع المنحنى مع المحور السيني.

يتم ذلك بتعويض ص = ٠ في المعادلة وحل المعادلة التربيعية. يمكنك حل المعادلة التربيعية بالتحليل إلى عوامل أو بالإكمال إلى مُربّع، أو باستخدام الصيغة التربيعية. وتكون إحداثيات نقطة تقاطع المنحنى مع المحور السيني (س، ٠).

الخطوة ٤: أوجد نقطة رأس المنحنى، علمًا بأنّ جميع التمثيلات البيانية التربيعية لها محور تماثل. لذلك، ستقع نقطة رأس المنحنى في منتصف المسافة بين نقطتَي تقاطع المنحنى مع المحور السيني. يمكنك أن تجد الإحداثي الصادي لنقطة رأس المنحنى بتعويض قيمة س في المعادلة الأصلية. تكون قيمة ص هذه هي القيَمة الصغرى أو القيَمة العظمى في التمثيل البياني.

عندما تكون المعادلة في الصورة القياسية ص = أس^{٢} + ب س + جـ، يمكنك أن تجد محور التماثُل باستخدام س = $\frac{-ب}{٢أ}$

الخطوة ٥: عيّن نقطة تقاطع المنحنى مع المحور الصادي ونقطة (أو نقطتي) تقاطع المنحنى مع المحور السيني، واستخدم ما تعرفه عن شكل التمثيل وتماثُله لترسم المنحنى. لا تنسَ أن تسمّي النقاط المهمة على التمثيل البياني.

إذا وُجد مقطع سيني واحد فقط، فسوف يمسّ التمثيل البياني محور السينات.

مثـــال ٨

ارسم التمثيل البياني لِـ ص = س^{٢} + ٢س − ٣

الحـــلّ:

نقطة تقاطع المنحنى مع المحور الصادي هي (٠، ⁻٣).

عوّض عن س = ٠

س^{٢} + ٢س − ٣ = ٠

إشارة مُعامِل س^{٢} موجبة، فيكون للمنحنى شكل ∪.

(س + ٣) (س −١) = ٠

س = ⁻٣ أو س = ١

فيكون: (⁻٣، ٠) و (١، ٠) نقطتي تقاطع المنحنى مع المحور السيني.

تذكّر أنّ هناك نقطة واحدة فقط تمثّل نقطة تقاطع المنحنى مع المحور الصادي.

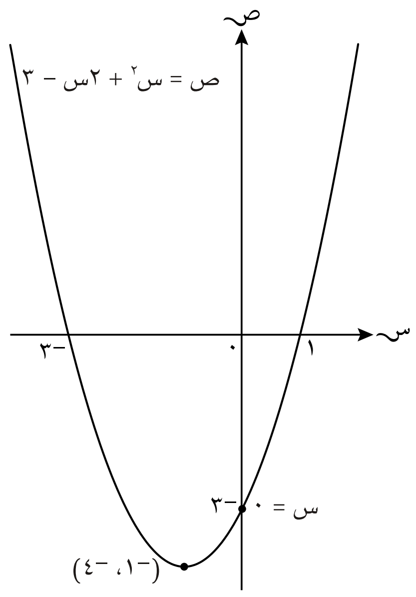
نقطة المنتصف هي منتصف المسافة بين العددين ١ و⁻٣ على المحور السيني، وقيمتها $\frac{⁻٣ + ١}{٢}$، فيكون الإحداثي السيني لنقطة رأس المنحنى هو:

س = ⁻١

عوّض عن هذه القيَمة في المعادلة لتحصل على قيمة ص.

ص = (⁻١)^{٢} + ٢(⁻١) − ٣ = ⁻٤

نقطة رأس المنحنى هي (⁻١، ⁻٤).



تكون نقطة رأس المنحنى هي نقطة القيَمة العظمى أو القيَمة الصغرى للتمثيل البياني. حيث تكون نقطة رأس المنحنى للتمثيل البياني لِـ ص = أس^{٢} + ب س + جـ، قيمة عظمى إذا كانت إشارة (أ) سالبة، وقيمة صغرى إذا كانت إشارة (أ) موجبة.

إيجاد نقطة رأس المنحنى بالإكمال إلى مُربّع

يمكنك أن تجد إحداثيات نقطة رأس المنحنى للدالّة التربيعية جبريًّا بالإكمال إلى مُربّع. يتطلّب ذلك تحويل المعادلة التربيعية من الصورة القياسية ص = أس^{٢} + ب س + جـ إلى صورة أ(س + د)^{٢} + ك. في هذه الصورة، تكون إحداثيات نقطة رأس المنحنى (−د، ك).

لتكن ص = س^{٢} + ٤س − ٥

يمكنك إعادة كتابتها بالإكمال إلى مُربّع لتصبح: ص = (س + ٢)^{٢} − ٩

مربع أيّ قيمة يكون موجبًا أو مُساويًا للصفر، ممّا يعني أنّ أي قيمة لـِ س تكون عندها قيمة (س + ٢)^{٢} أكبر من أو مُساوية للصفر.

وهذا يعني أن أصغر قيمة لـِ (س + ٢)^{٢} − ٩ هي ⁻٩، ويحدث ذلك عندما تكون س = ⁻٢

وبالتالي تكون إحداثيات نقطة رأس المنحنى للتمثيل البياني لـِ ص = (س + ٢)^{٢} − ٩ هي (⁻٢، ⁻٩).

إن محور التماثل يكون عموديًّا، ويمر بنقطة رأس المنحنى (⁻٢، ⁻٩). هذا يعني أن معادلة محور التماثل هنا هي س = ⁻٢

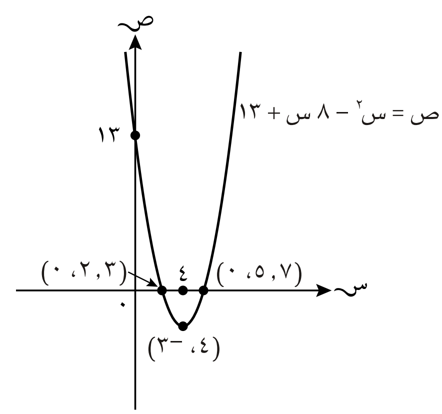
مثـــال ٩

أ حدِّد معادلة محور التماثُل وإحداثيات نقطة رأس المنحنى لِـ ص = س^{٢} − ٨س + ١٣ بالإكمال إلى مُربّع.

ب ارسم التمثيل البياني.

الحــلّ:

أ ص = س^{٢} − ٨س + ١٣ ص = (س − ٤)^{٢} − ١٦ + ١٣ ص = (س − ٤)^{٢} − ٣ نقطة رأس المنحنى: (٤، ⁻٣) معادلة محور التماثُل: س = ٤	أكمل المُربّع. نصف ٨ هو ٤، لكن (س − ٤)^{٢} = س^{٢} − ٨س + ١٦ لذا يجب أن تطرح ١٦ لتحافظ على توازُن المعادلة. نقطة رأس المنحنى (−د، ك).
ب لرسم التمثيل البياني، يجب أن تجد نقاط تقاطع المنحنى مع المحورين السيني والصادي نقطة تقاطع المنحنى مع المحور الصادي = (٠، ١٣) ولتجد نقطة تقاطع المنحنى مع المحور السيني، اجعل ص = ٠ وحُلّ المعادلة. ٠ = (س − ٤)^{٢} − ٣ ٣ = (س − ٤)^{٢} س − ٤ = ± $\sqrt{٣}$ س = ± $\sqrt{٣}$ + ٤ س ≈ ٥٫٧ أو ٢٫٣	يمكنك أن تقرأ ذلك من المعادلة الأصلية. تذكّر وجود جذرين للمعادلة (ليس شرطًا أن يكون أحدهما موجبًا والآخر سالبًا).



ارسم التمثيل البياني وسمِّه.

تمارين ٩-٤

١) ارسم التمثيل البياني لكل ممّا يأتي:

أ ص = س^{٢} − ٣س − ٤

ب ص = س^{٢} − ٢س − ٧

ج ص = س^{٢} + ٤س + ٤

د ص = س^{٢} + ٤س − ٥

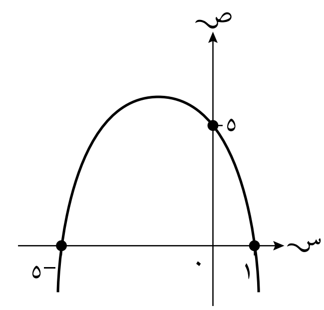
هـ ص = س^{٢} + ٦س + ٨

و ص = س^{٢} − ٣س − ٤

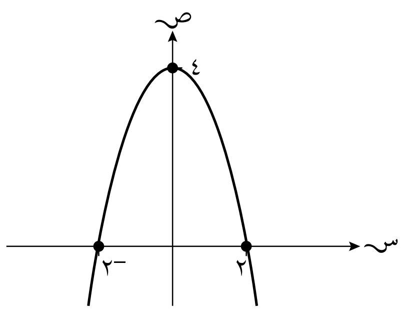
ز ص = س^{٢} + ٧س + ١٢

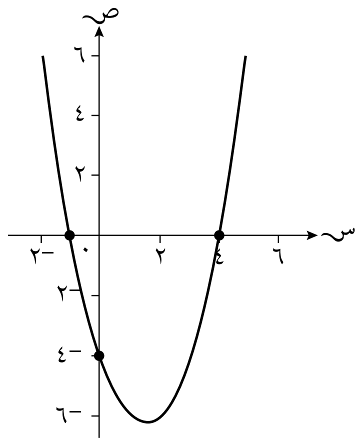
٢) رسمت إحدى الطالبات التمثيلات البيانية الآتية، ونسيت أن تكتب المعادلة على كل منها. استخدم المعلومات الواردة على كل تمثيل بياني لتحدّد معادلته:

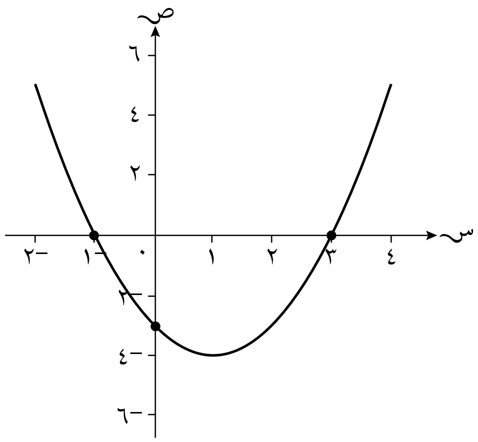
أ



ب



ج


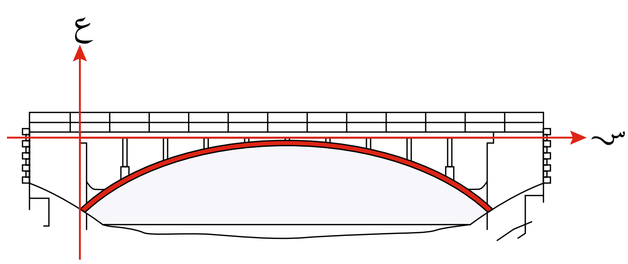
د


٣) ارسم التمثيل البياني لكلّ ممّا يأتي، ثم حدّد محور التماثُل وإحداثيات نقطة رأس المنحنى لكلّ تمثيل:

أ ص = س^{٢} + ٨س + ١٢
ب ص = ٢(س + ٣)^{٢} − ١
ج ص = س^{٢} + ٦س − ٧
د ص = ١ − س^{٢}
هـ ص = س^{٢} − ١
و ص = س^{٢} − ١٠س + ٢٥
ز ص = س^{٢} − ١٠س + ٢٤
ح ص = −س^{٢} + ١٠س − ٢٤

طبِّق مهاراتك

٤) تتمثّل معادلة منحنى القوس الداعم للجسر (المُلوّن باللون الأحمر في المخطّط أدناه) في ع = $\frac{-١}{٤٠}$ (س − ٢٠)^{٢} حيث (ع) متر هي المسافة الرأسية، و(س) متر هي المسافة الأفقية.



أ حدّد نقطة رأس المنحنى الذي يمثّل العلاقة بين ع ، س.

ب ما قيَم (س) الممكنة؟

ج حدّد مجال قيَم (ع).

د ارسم تمثيلًا بيانيًّا للمعادلة ضمن القيَم الممكنة.

هـ ما عرض القوس الداعم للجسر؟

و ما أعلى ارتفاع للقوس الداعم للجسر؟

٩-٥ التمثيلات البيانية لدوال أخرى

التمثيل البياني للدوال المقلوبة في صورة ص = $\frac{\text{أ}}{\text{س}}$ + ك (حيث س ≠ صفر)

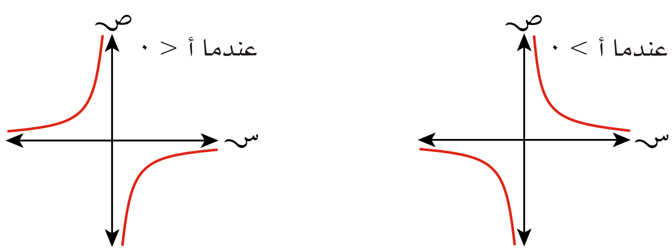
كما هو الحال مع الرسم البياني التربيعي، يمكنك استخدام خصائص الدالة المقلوبة لرسم التمثيل البياني لها.

عندما تكون المعادلة في الصورة القياسية ص = $\frac{\text{أ}}{\text{س}}$ + ك (س ≠ صفر، ص ≠ صفر) اتّبع الخطوات الآتية لترسم التمثيل البياني لها:

الخطوة ١: حدّد شكل التمثيل البياني (اعتبر ك = ٠).
تُحدِّد قيمة (أ) أين يكون المنحنى في التمثيل البياني.

إذا كانت أ > ٠، فإن قيَم ص تكون موجبة عندما تكون قيَم س موجبة، وتكون سالبة عندما تكون قيَم س سالبة.

إذا كانت أ < ٠، فإن قيَم ص تكون سالبة عندما تكون قيَم س موجبة، وتكون موجبة عندما تكون قيَم س سالبة.



الخطوة ٢: تحقّق ما إذا كان التمثيل البياني يقطع المحور السيني باستخدام ك. إذا كانت ك ≠ ٠، يكون للتمثيل البياني جزء واحد مقطوع من المحور السيني. ضع قيمة ص = ٠ لإيجاد قيمة س.

٠ = $\frac{\text{أ}}{\text{س}}$ + ك

أي $^-$ك = $\frac{\text{أ}}{\text{س}}$

$^-$ك س = أ

س = $-\frac{\text{أ}}{\text{ك}}$

التمثيل البياني لا يتقاطع مع المحور الصادي.

إذا كانت ك = ٠، فيكون المحور السيني هو خط التقارُب الآخر.

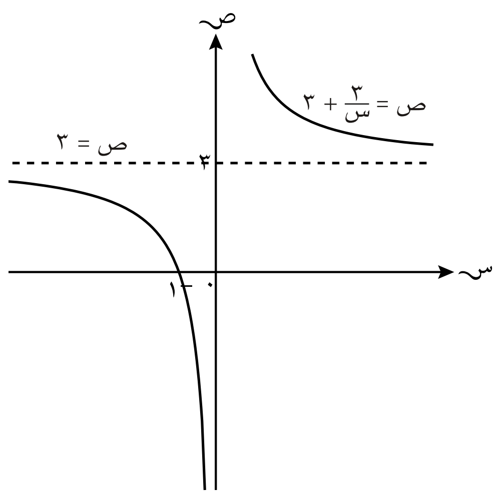
الخطوة ٣: حدّد خطَّي التقارُب. سيكون أحدهما المحور الصادي (المستقيم س = ٠)، والخط الآخر هو المستقيم ص = ك.

الخطوة ٤: استخدم خطَّي التقارُب والجزء المقطوع من المحور السيني لترسُم التمثيل البياني، ثم سمّه.

مثـــال ١٠

ارسم التمثيل البياني لِـ ص = $\frac{٣}{س}$ + ٣، وسمّه.

الحــلّ:



موقع المنحنيات:

أ = ٣، أي أن أ > ٠ وأن المنحنى الذي يقع إلى اليمين يتجه فوق خط التقارب.

خطّا التقارُب:

بالتعويض عن س = ٠

ص = ٣

الجزء المقطوع من المحور السيني:

٠ = $\frac{٣}{س}$ + ٣

−٣ = $\frac{٣}{س}$

س = −١

نقطة تقاطع المنحنى مع المحور السيني

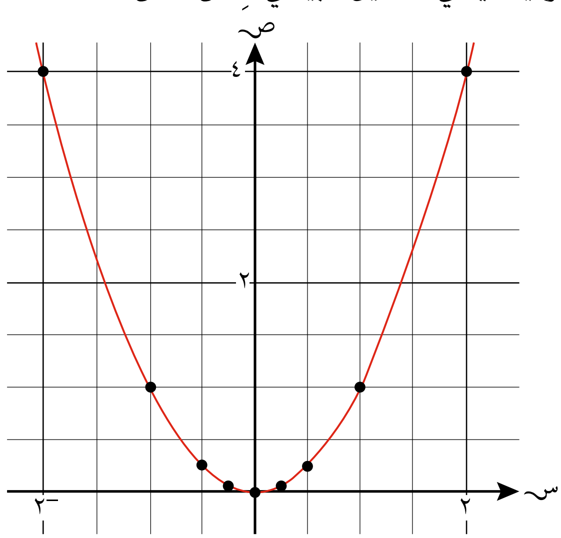
(−١، ٠)

فيما يأتي ستجد العلاقة بين منحنى ص = س^{٢} ومنحنى ص = $\frac{١}{س^{٢}}$

إليك جدول القيم لجزء من المعادلة ص = س^{٢}:

س	−٢	−١	−٠,٥	−٠,٢٥	٠	٠,٢٥	٠,٥	١	٢
ص	٤	١	٠,٢٥	٠,٠٦٢٥	٠	٠,٠٦٢٥	٠,٢٥	١	٤

وفيما يأتي التمثيل البياني لِـ ص = س^{٢}:



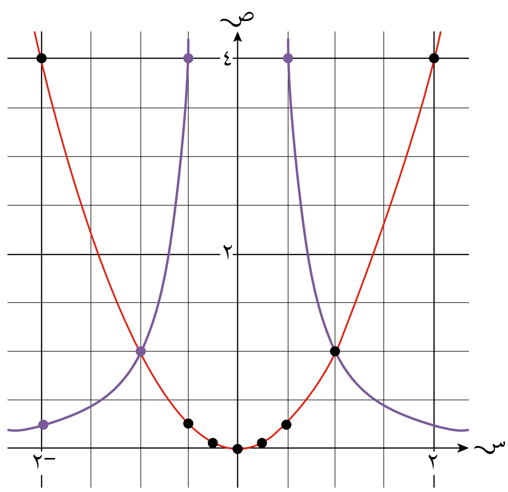
إذا أردنا رسم التمثيل البياني لـِ ص = $\frac{1}{س^2}$، فسينتج أن:

- قيم ص هي مقلوب جميع مُدخَلات قيم ص في الجدول السابق.
- جميع القيَم موجبة باستثناء الصفر. وبناء على ذلك، تكون جميع مقلوبات القيَم موجبة.
- هناك نقطة على التمثيل البياني غير موجودة عندما تكون س = ٠، لأن $\frac{1}{0}$ غير معرّفة.
- شكل كل جزء من التمثيل البياني يشبه جزئيًّا التمثيل البياني للدالة ص = $\frac{1}{س}$.

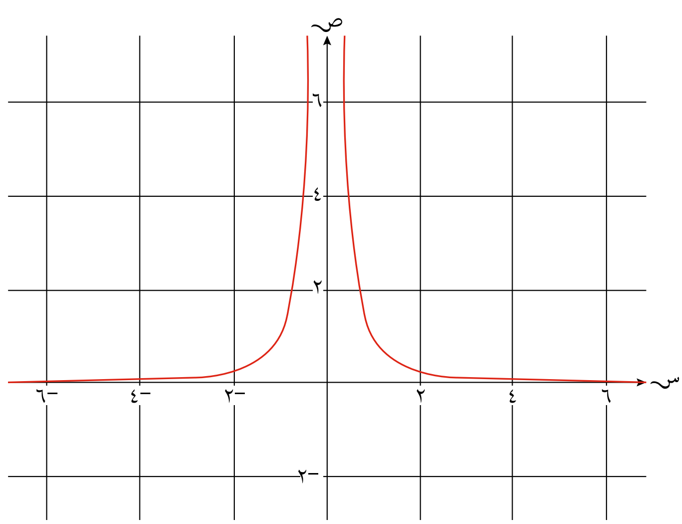
سنعرض الآن جدول القيَم الذي يتضمن قيَم ص = $\frac{1}{س^2}$:

س	٢−	١−	٠,٥−	٠,٢٥−	٠	٠,٢٥	٠,٥	١	٢
ص = $س^2$	٤	١	٠,٢٥	٠,٠٦٢٥	٠	٠,٠٦٢٥	٠,٢٥	١	٤
ص = $\frac{1}{س^2}$	٠,٢٥	١	٤	١٦	غير معرَّف	١٦	٤	١	٠,٢٥

سيظهر التمثيل البياني كالآتي:



إذا رسمنا التمثيل البياني لـِ ص = $\frac{1}{س^2}$، فسنحصل على الشكل أدناه:



كما هو متوقّع، يقع التمثيل بأكمله فوق المحور السيني. وهو يشبه جُزئيًّا التمثيل البياني لِـ $ص = \frac{١}{س}$.

يمكننا رسم التمثيل البياني بتشكيل جدول القيَم، أو باستخدام ما نعرفه عن شكله العام.

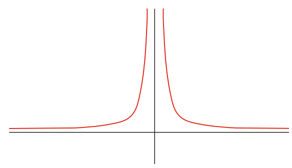
مثــال ١١

ارسم التمثيل البياني لكل ممّا يأتي:

أ $ص = \frac{٢}{س^{٢}}$ ب $ص = \frac{١}{س^{٢}} + ٢$

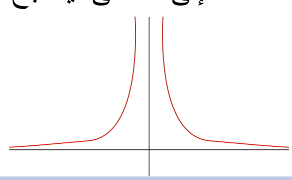
الحــلّ:

أ هذا هو التمثيل البياني لِـ $ص = \frac{١}{س^{٢}}$



وعليه، يكون التمثيل البياني لِـ $ص = \frac{٢}{س^{٢}}$

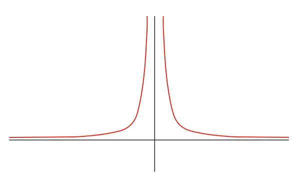
قد تمدّد إلى الأعلى ليصبح



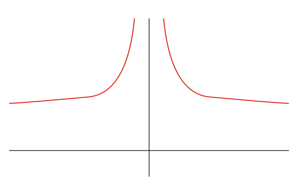
نعرف شكل التمثيل البياني، ونعرف أنّه غير معرّف عند س = ٠، لذا يتكوَّن من جُزأين منفصلَين، وكلاهما يقع فوق المحور السيني.

لرسم التمثيل البياني لِـ $ص = \frac{٢}{س^{٢}}$، اضرب كل الإحداثيات الصادية المقابلة للتمثيل البياني $ص = \frac{١}{س^{٢}}$ في العدد ٢، أي حاول أن تمدّ التمثيل البياني إلى الأعلى.

ب هذا هو التمثيل البياني لِـ $ص = \frac{١}{س^{٢}}$



وعليه، يكون التمثيل البياني لِـ $ص = \frac{١}{س^{٢}} + ٢$ نفس السابق مع سحبه إلى الأعلى بمقدار ٢



تقع النسخة الأصلية للتمثيل البياني أعلى المحور السيني.

وعندما يُسحب التمثيل البياني إلى الأعلى بمقدار ٢ فهذا يعني أنه يقع بأكمله فوق المستقيم ص = ٢

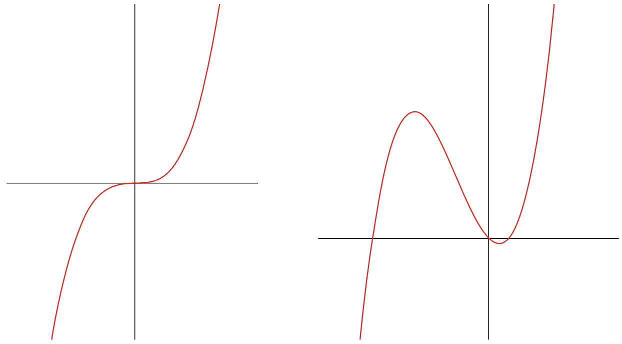
الدوال التكعيبية

تعلّمت أنّه بإمكانك رسم الدوال التربيعية إذا عرفت بعض ميزات التمثيل البياني. يمكنك أيضًا رسم الدوال التكعيبية عندما تعرف الميزات الآتية:

- الشكل الأساسي للتمثيل البياني، ويُحدَّد بالحد ذي القوى الأكبر للمعادلة.
- اتّجاه التمثيل البياني، ويُحدَّد بإشارة مُعامِل الحد ذي القوى الأكبر.
- الجزء المقطوع من المحور الصادي، ويُحدّد بالتعويض عن س = ٠ في المعادلة.

لن يُطلب منك معرفة نقطة رأس المنحنى أو قيمة الجزء المقطوع من المحور السيني للتمثيل البياني للدالة التكعيبية.

التمثيلات البيانية للدوال التكعيبية تشبه التمثيلات البيانية الآتية أو صورها بالانعكاس:

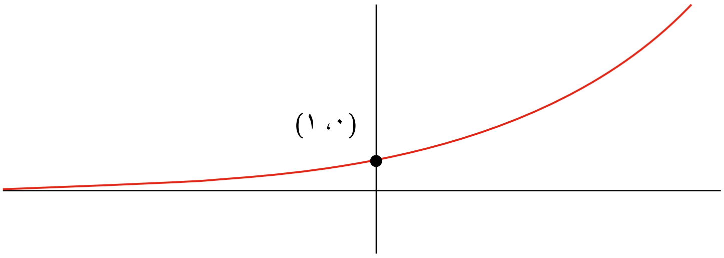


الدوال الأسّية

تقطع الدوال الأسّية التي في صورة ص = أ^{س}(حيث أ عدد صحيح موجب)، دائمًا المحور الصادي عند النقطة (٠، ١).

ويمثّل المحور السيني خط تقارُب لها، لذا من غير الممكن أن تكون سالبة.

تجد أدناه شكل الدوال الأسّية:



الدوال الخطيّة

في الوحدة (٧) من الصف التاسع رسمت الدوال الخطيّة، ويمكنك رسمها بعدة طرائق.

تتمثّل إحدى هذه الطرائق بمعرفة نقاط تقاطع المستقيم مع المحورَين، وتتمثّل الطريقة الأخرى باستخدام المَيل والجزء المقطوع من المحور الصادي.

مثــال ١٢

ارسم التمثيل البياني لِـ ص = ٢س − ٥:

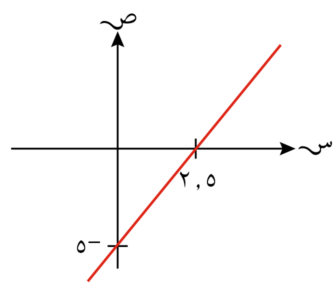
أ بإيجاد نقاط التقاطُع مع المحورَين.

ب باستخدام المَيل والجزء المقطوع من المحور الصادي.

الحــلّ:

أ عندما س = ٠ فإن ص = −٥

عندما ص= ٠ فإن س = ٢,٥

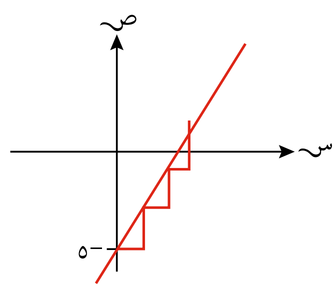


يقطع المحور الصادي عندما س = ٠

يقطع المحور السيني عندما ص = ٠

عيّن النقطتين، ثم صِل بينهما بمستقيم ومدّه من طرفيه.

ب س = ٢س − ٥



المَيل يساوي ٢ والجزء المقطوع من المحور الصادي يساوي −٥

تمارين ٩-٥

١) ارسم التمثيل البياني لكلّ ممّا يأتي على مستوى إحداثي مختلف، وسمّه:

أ $\text{ص} = \frac{٣}{\text{س}}$ ب $\text{س ص} = -٤$ ج $\text{ص} = \frac{١}{\text{س}} + ٣$

د $٢\text{ص} = \frac{٤}{\text{س}} + ٧$ هـ $\text{ص} = \frac{٤}{\text{س}} + ٢$ و $\text{ص} = -\frac{٩}{\text{س}} - ٣$

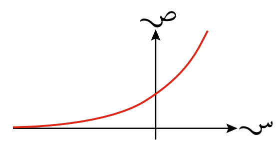
٢) ارسم التمثيل البياني لكل ممّا يأتي:

أ $\text{ص} = ٢\text{س}^{٣} + ١$ ب $\text{ص} = -\text{س}^{٢}$

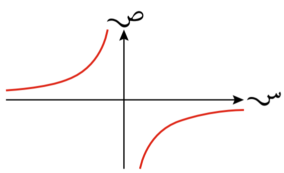
ج $\text{ص} = \frac{٢}{\text{س}}$ د $\text{ص} = ٣^{\text{س}}$

٣) اكتب المعادلة الممكنة لكل تمثيل بياني من التمثيلات البيانية الآتية:

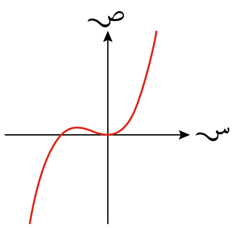
أ



ب

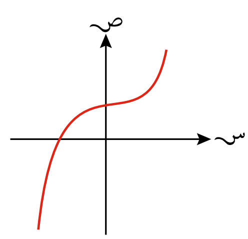


ج

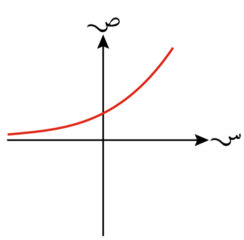


٤) فيما يأتي أربعة تمثيلات بيانية مختلفة:

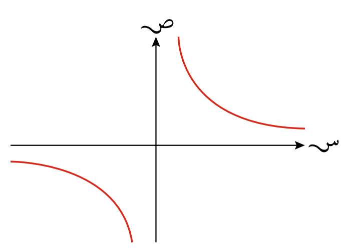
(١)



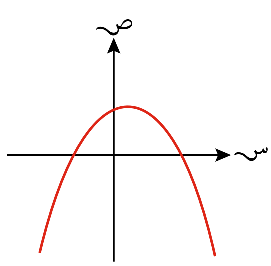
(٢)



(٣)



(٤)



اربط بين كل تمثيل بياني ومعادلته:

أ $\text{ص} = ١ + \text{س} - ٢\text{س}^{٢}$ ب $\text{ص} = ٣^{\text{س}}$

ج $\text{ص} = \text{س}^{٣} + \text{س}^{٢} + ١$ د $\text{ص} = \frac{١٦}{\text{س}}$

٥) ارسم التمثيل البياني لكل جزئية من الجزئيات فيما يأتي على نفس المستوى الإحداثي:

أ ص = $\frac{١}{س}$ ، ص = $\frac{١}{س^{٢}}$

ب ص = $\frac{١}{س^{٢}}$ ، ص = $\frac{٣}{س^{٢}}$

ج ص = $\frac{١}{س^{٢}}$ ، ص = $\frac{١}{س^{٢}}$ + ٣

٦) استخدم طريقة الحل المناسبة من المثال (١١) لرسم التمثيل البياني لكل ممّا يأتي:

أ ص = ٣س + ٦

ب ص = $\frac{١}{٢}$س − ٣

ج ص = ٤ − س

مُلخَّص

ما يجب أن تعرفه:

- تُكتب العبارة التربيعية س^{٢} + ب س + جـ في صورة المُربّع الكامل $\left(س + \frac{ب}{٢}\right)^{٢} - \left(\frac{ب}{٢}\right)^{٢}$ + جـ.
- يمكن حل المعادلات التربيعية التي يصعب تحليلها إلى عوامل باستخدام طريقة الإكمال إلى مُربّع، أو طريقة الصيغة التربيعية.
- يتمّ حل معادلتَين آنيًّا؛ إحداهما تربيعية والأخرى خطّية بحذف أحد المتغيّرَين وإعادة ترتيب المعادلة لتصبح مساويةً للصفر، ثم حلّها.
- يُرسم التمثيل البياني لدالة تربيعية باستخدام صيغة المُربّع الكامل.
- يُرسم التمثيل البياني للدالة ص = $\frac{أ}{س}$ كجزئي منحنى.
- للدالة التكعيبية تمثيل بياني مميّز يمكن رسمه.
- كل تمثيل بياني للدالة الأسّية أ^{س} (حيث أ عدد صحيح موجب) يمر في النقطة (٠، ١) ولا يمكن للدالة أن تكون سالبةً.

يجب أن تكون قادرًا على:

- كتابة المعادلة التربيعية بصيغة المُربّع الكامل.
- حلّ المعادلة التربيعية باستخدام الإكمال إلى مُربّع أو الصيغة التربيعية.
- حلّ معادلتَين آنيًّا؛ إحداهما تربيعية والأخرى خطّية.
- رسم التمثيل البياني للدالة التربيعية باستخدام خصائصها.
- رسم التمثيل البياني للدالة التكعيبية، والدالة المقلوبة والدالة الأسّية باستخدام خصائصها.

تمارين نهاية الوحدة

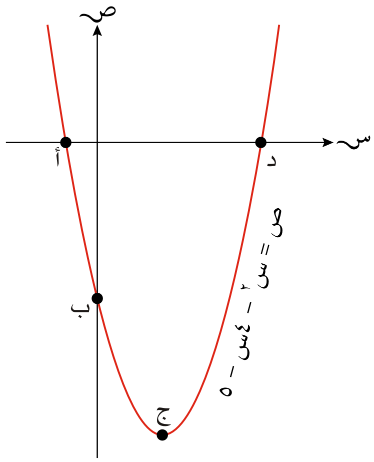
١) حلّ المعادلة التربيعية س^{٢} + ٦س − ٧ = ٠:

أ بالتحليل إلى عوامل مبيّنًا حلّك كاملًا.

ب بالإكمال الى مُربّع مبيّنًا حلّك كاملًا.

ج باستخدام الصيغة التربيعية مبيّنًا حلّك كاملًا.

٢) يمثّل الرسم أدناه التمثيل البياني لـِ ص = س^{٢} − ٤س − ٥



اكتب إحداثيات النقاط الأربع المُشار إليها بالأحرف أ، ب، ج، د.

٣) للمعادلة التربيعية س^{٢} − ٥س − ٣ = ٠ حلّان هما: أ، ب. أوجد قيمة:

أ أ − ب

ب أ + ب

٤) حلّ المعادلات الآتية آنيًّا:

ص = س^{٢} + ٣س + ١

ص = ٢س + ١٣

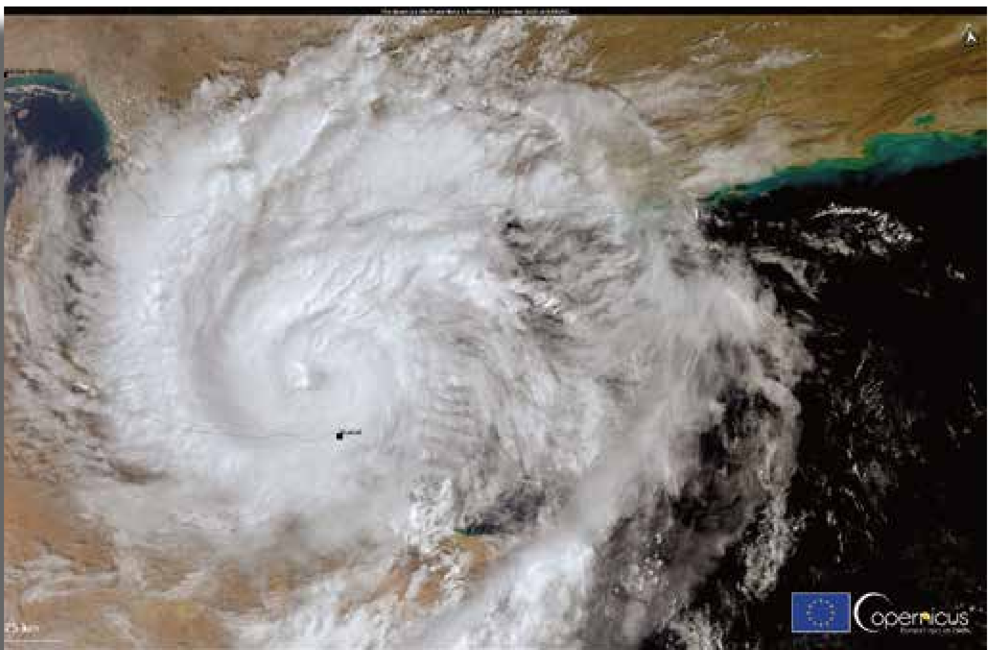
الوحدة العاشرة: الاحتمال البسيط

المُفردات

- الحدث Event
- الاحتمال Probability
- مقياس الاحتمال Probability scale
- تجربة Trial
- الاحتمال التجريبي Experimental probability
- الناتج Outcome
- الاحتمال النظري Theoretical probability
- النواتج المُفضّلة Favorable outcomes
- منحاز Bias
- مخطّط الفضاء الاحتمالي Possibility diagram
- المُستقلّة Independent
- المُتنافية Mutually exclusive

سوف تتعلّم في هذه الوحدة كيف:

- تعبِّر عن الاحتمالات رياضيًّا.
- تحسب احتمال التجارب البسيطة.
- تستخدم مخطّطات الفضاء الاحتمالي لتساعدك على حساب أحداث مركّبة.
- تحدِّد متى تكون الأحداث مستقلّة.
- تحدِّد متى تكون الأحداث مُتنافية.



تتابع المديريّة العامّة للأرصاد الجويّة التابعة لهيئة الطيران المدني في سلطنة عُمان الأرصاد الجويّة على مدار الساعة، وتوافي المواطنين بالطقس المتوقّع مثل درجات الحرارة، وسرعة الرياح، واحتمال سقوط الأمطار، أو حدوث عاصفة وغيرها.

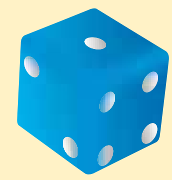
ما فرصة أن تمطر السماء غدًا؟ إذا أخذت إجازة في شهر فبراير، فكم يومًا مُشمسًا تتوقّع في هذا الشهر؟ عندما ترمي قطعة نقدية معدنية لتعرف أيًّا من الفريقَين سيبدأ المباراة، فما إمكانية أن تكون النتيجة صورة؟

كثيرًا ما نتعرّض في حياتنا اليومية لأسئلة عن فرصة حدوث الأشياء، مثل كيف سيكون الطقس غدًا؟ أو أيّ الفريقين سيبدأ المباراة الرياضية؟ وتُستخدم كلمات مثل 'أكيد' أو 'مرجّح' أو 'غير ممكن' لتصف فرصة وقوع الحدث. يعبّر أيضًا عن هذه الكلمات عدديًّا باستخدام الاحتمالات، حيث تساعد بدورها على إجراء توقّعات أكثر دقّة.

١٠-١ مقدمة في الاحتمال

أساسيات الاحتمال

غالبًا ما نستخدم أحجار النرد عندما نفكّر في الاحتمال.



الاحتمال هو مقياس إمكانية وقوع حدث ما. وتكون قيمة احتمال الحدث المستحيل (غير الممكن) مساويةً للصفر، وقيمة احتمال الحدث الأكيد مساويةً للواحد. ويُسمّى المدى من صفر إلى واحد **مقياس الاحتمال**. لا يمكن أن يكون الاحتمال عددًا سالبًا أو عددًا أكبر من الواحد.

وكلما كان الاحتمال أصغر، اقترب من الصفر وقلّت إمكانية وقوعه. وبالمثل، كلما ازدادت قيمة الاحتمال ازدادت إمكانية وقوع الحدث.

يُسمّى رمي حجر النرد **تجربة**. وإذا كرّرت تجربة من خلال إجرائها عدة مرات، فسوف تجد **الاحتمال التجريبي** لوقوع حدث ما، ويسمّى **التكرار النسبي**، فهو نسبة ظهور عدد مرّات وقع الحدث إلى عدد مرّات إجراء التجربة:

$$\text{ل (ح)} = \frac{\text{عدد مرّات وقوع الحدث}}{\text{عدد مرّات إجراء التجربة}}$$

أو أحيانًا

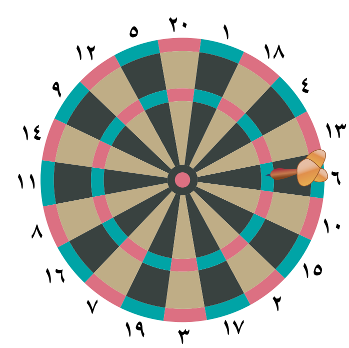
$$\text{ل (ح)} = \frac{\text{عدد النجاحات}}{\text{عدد مرّات إجراء التجربة}}$$

ل(ح) تعني احتمال وقوع الحدث ح.

مثـــال ١

افترض أنه طُلب إلى رجل معصوب العينَين رمي سهم على قرص الأسهم.

إذا أصاب العدد ستة ١٥ مرّة من أصل ١٢٥ رمية، فما احتمال أن يصيب العدد ٦ في الرمية الآتية؟



الحـــلّ:

$\text{ل(إصابة العدد ستّة)} = \frac{\text{عدد مرّات إصابة العدد ستة}}{\text{عدد مرّات إجراء التجربة}}$ $= \frac{١٥}{١٢٥}$ $= ٠,١٢$	هذا احتمال تجريبي.

التكرار النسبي وتوقُّع عدد مرّات وقوع الحدث

يمكنك استخدام التكرار النسبي لإجراء توقُّعات عمّا يمكن أن يحدث في المستقبل، أو كم مرّة يمكن لحدث ما أن يقع في عيّنة كبيرة. فإذا عرفت أن التكرار النسبي لظهور العدد أربعة على حجر نرد له ستة أوجه ١٨٪، فيمكنك أن تتوقَّع عدد مرّات ظهور العدد ٤ عند رمي حجر النرد ٨٠ مرّة أو ٢٠٠ مرّة.

١٨٪ من ٨٠ = ١٤,٤ و ١٨٪ من ٢٠٠ = ٣٦، هذا يعني أنّك إذا رميت حجر النرد نفسه ٨٠ مرّة فيمكنك أن تتوقَّع ظهور العدد ٤ على وجه الحجر نحو ١٤ مرّة، وإذا رميت الحجر ٢٠٠ مرّة فيمكنك أن تتوقَّع ظهور العدد٤ على وجه الحجر ٣٦ مرّة.

وحتّى لو أنك توقَّعت ظهور العدد ٤ ستًّا وثلاثين مرّة، فتذكّر أنّ هذا ليس مُؤكّدًا، وقد تكون نتيجتك مختلفة كثيرًا عن ذلك.

الاحتمال النظري

عندما ترمي قطعة نقدية معدنية، فقد يكون اهتمامك بحدث ’ظهور الصورة‘ في حدث (ظهور الصورة)، لكن هذا يمثّل إمكانية واحدة. فعندما ترمي قطعة نقدية معدنية، فسيكون هناك **ناتجان** ممكنان: ’ظهور الصورة‘ أو ’ظهور الكتابة‘.

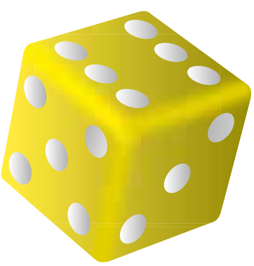
يمكنك أن تحسب **الاحتمال النظري** بسهولة إذا كانت إمكانية حدوث النواتج الممكنة متساوية، وذلك بأن تعُدّ نواتج ظهور حدث ما وتقسمها على عدد النواتج الممكنة. تُعرف **الأحداث المُفضّلة** بأنّها أيّ نواتج تدلّ على وقوع الحدث.

حجر النرد المنتظم يدل على تساوي فرصة ظهور كل وجه من أوجهه.

فإذا رميت حجر نرد منتظم له ستة أوجه، وتريد حساب احتمال ظهور عدد زوجي على وجهه، فسوف تكون النواتج المُفضّلة: اثنين، أربعة، ستّة، أي أنّ هناك ثلاثة نواتج مُفضّلة.

في هذه الحالة، احتمال الحدث أ (ظهور عدد زوجي) يساوي:

$$\text{ل (أ)} = \frac{\text{عدد النواتج المُفضّلة}}{\text{عدد النواتج الممكنة}} = \frac{٣}{٦} = \frac{١}{٢}$$



يمكن أيضًا تصميم حجر نرد بطريقة ما، كأن يتم صنعه بصورة غير مثالية. وهذا ينطبق بالضرورة على أي أداة يتم استخدامها في سؤال الاحتمال. في هذه الحالة، فإن فرصة وقوع الأحداث غير متساوية في كلّ من حجر النرد وقطعة النقد المعدنية، وقد تحتاج إلى استخدام الاحتمال التجريبي.

رابط

يدرس الطلاب في علوم الأحياء كيفية انتقال الجينات من الأهل إلى الأولاد. لا يوجد ناتج مؤكّد يبيّن سبب الاختلاف بيننا. يقوم الاحتمال بدور مهمّ في تحديد أرجحية وجود جينات معيّنة أو عدمها.

مثــال ٢

رُمي حجر نرد منتظم له ستة أوجه، وتمّ تسجيل العدد الظاهر على وجهه.

أوجد احتمال ظهور:

أ العدد ٣ ب عدد فردي ج عدد أوّلي

الحــلّ:

أ	ل(٣) = $\frac{١}{٦}$	عند رمي حجر النرد، يظهر العدد ٣ مرّة واحدة ويكون عدد النواتج الممكنة ستة (١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦).
ب	ل(ظهور عدد فردي) = $\frac{٣}{٦} = \frac{١}{٢}$	يوجد ثلاثة أعداد فردية على حجر النرد (١، ٣، ٥)، وتُعطي ثلاثة نواتج مُفضلَة.
ج	ل(ظهور عدد أوّلي) = $\frac{٣}{٦} = \frac{١}{٢}$	الأعداد الأولية على حجر النرد هي ٢، ٣، ٥ وتُعطي ثلاثة نواتج مُفضّلة.

مثــال ٣

تحتوي علبة كعك على ٥ كعكات بالسكّر و ١٥ كعكة بالفراولة. سُحبت كعكة واحدة من العلبة عشوائيًّا. ما احتمال أن تكون كعكة بالسكّر؟

الحــلّ:

ل(كعكة بالسكّر) = $\frac{٥}{٢٠} = \frac{١}{٤}$	عدد النواتج الممكنة ٢٠ عدد النواتج المُفضّلة ٥، لوجود ٥ كعكات بالسكّر.

مثــال ٤

لدى سيف ٢٠ زوجًا من الجوارب.
٨ منها حمراء، و ١٠ زرقاء، و ٢ خضراء اللون. تم سحب زوج واحد من الجوارب عشوائيًّا، ما احتمال أن يكون أخضر اللون؟

الحــلّ:

ل(زوج أخضر من الجوارب) = $\frac{٢}{٢٠} = \frac{١}{١٠}$	عدد النواتج الممكنة ٢٠ عدد النواتج المُفضّلة ٢

مثــال ٥

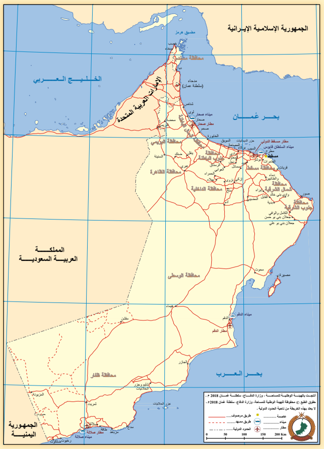
طُلب إلى تسعة رسّامين أن يلوّن كلٌّ منهم الحرف الذي يُحدَّد له من كلمة (الحلّانيات) بلون مختلف. أوجد احتمال أن يُحدَّد للرسّام الحرف:

أ (ن) ب (أ) ج (ي) أو (ل) د (ع)

الحــلّ:

أ	ل(ن) = $\frac{١}{٩}$	عدد النواتج المُفضّلة ١
ب	ل(أ) = $\frac{٣}{٩} = \frac{١}{٣}$	عدد النواتج المُفضّلة ٣
ج	ل(ي أو ل) = $\frac{١}{٩} + \frac{٢}{٩} = \frac{٣}{٩}$ $= \frac{١}{٣}$	عدد النواتج = عدد ظهور الحرف (ي) أو الحرف (ل)، أي ٣ لأن الحرف (ي) يرد في كلمة الحلّانيات مرّة واحدة والحرف (ل) مرّتَين.
د	ل(ع) = $\frac{٠}{٩} = ٠$	عدد النواتج المُفضّلة صفر (لا يرد الحرف (ع) في كلمة الحلانيات).

جُزُر الحلانيات: مجموعة جُزر تتبعِ محافظة ظفار، وكانت تسمّى قديمًا جُزر كوريا موريا.



احتمال الحدث المتمّم

قد يقع الحدث أو لا يقع، لكن قد يختلف احتمال وقوعه عن احتمال عدم وقوعه، كما أن مجموع احتماليهما معًا يجب أن يساوي الواحد دائمًا.

إذا كان (أ) حدثًا ما، فإن (أ′) هو الحدث المتمّم له، أي أن الحدث (أ) لم يقع، وأن ل(أ′) = ١ − ل(أ).

مثـال ٦

إذا كان احتمال اجتياز ياسمين لاختبار القيادة $\frac{٢}{٣}$، فما احتمال فشلها؟

الحـلّ:

ل(الفشل) = ل(عدم النجاح) = ١ − ل(النجاح)

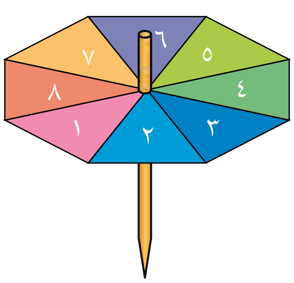
ل(الفشل) = ١ − $\frac{٢}{٣}$ = $\frac{١}{٣}$

تمارين ١٠-١

١) رُمي حجر نرد له ستة أوجه ١٠٠ مرّة، وظهر العدد خمسة ١٤ مرّة. أوجد الاحتمال التجريبي لظهور العدد خمسة، واكتب الناتج على صورة كسر في أبسط صورة.

٢) يبيّن المخطط المجاور قرصًا دوّارًا مقسّمًا إلى ثمانية أقسام متساوية تمامًا.

أدار سالم القرص ٢٦٠ مرّة وسجّل النواتج في الجدول الآتي:



العدد	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨
التكرار	٣٣	٣٨	٢٦	٣٥	٣٩	٢١	٣٣	٣٥

احسب الاحتمال التجريبي لظهور:

أ العدد ٣

ب العدد ٥

ج عدد فردي

د عامل من عوامل العدد ٨

٣) اعتمد أحمد سلسلة اختبارات لمعرفة متوسّط عمر نوع جديد من المصابيح يعمل بالطاقة الشمسية. يبيّن الجدول الآتي نواتج الاختبارات:

عمر المصباح ((ل) ساعة)	٠ ≤ ل < ١٠٠٠	١٠٠٠ ≤ ل < ٢٠٠٠	٢٠٠٠ ≤ ل < ٣٠٠٠	ل ≥ ٣٠٠٠
التكرار	٣٠	٧٥	١٦٠	٣٥

أ) احسب التكرار النسبي لمصباح عمره أقلّ من ٣٠٠٠ ساعة، وأكثر من أو يساوي ١٠٠٠ ساعة.

ب) إذا طلب صاحب متجر ٢٠٠٠ مصباح من هذه المصابيح، فما عدد المصابيح التي تتوقَّع أن تعمّر أكثر من ٣٠٠٠ ساعة؟

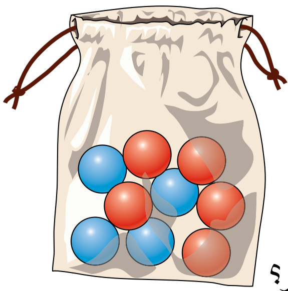
٤) بيّنت دراسة ما أن احتمال أن يستخدم الشخص يده اليمنى هو ٠,٧٧. كم تتوقَّع عدد الأشخاص الذين يستخدمون اليد اليسرى في مجتمع تعداده ٢٥٠٠٠ شخص؟

٥) جمع شخص مهتم بالأزهار ٣٨٥ نوعًا من الأزهار من أعماق دولة البيرو. كانت خمسة أنواع منها فقط زرقاء اللون. تم اختيار زهرة واحدة منها عشوائيًّا. أوجد احتمال:

أ) أن تكون زرقاء اللون

ب) ألّا تكون زرقاء اللون

٦) تحتوي حقيبة على تسع كرات متماثلة الحجم. أربع كرات منها زرقاء اللون والكرات الخمس الباقية حمراء اللون. إذا سُحبت كرة من الحقيبة، فما احتمال أن يكون لونها:



أ) أزرق؟

ب) أحمر؟

ج) لا أزرق ولا أحمر؟

د) أزرق أو أحمر؟

٧) حقيبة فيها ٣٦ كرة. إذا كان احتمال سحب كرة زرقاء بصورة عشوائيّة منها هو $\frac{١}{٤}$. فكم كرة زرقاء داخل الحقيبة؟

٨) رُمي حجر نرد منتظم له ٢٠ وجهًا. أوجد احتمال أن يكون العدد الظاهر على وجه الحجر:

أ) عددًا أكبر من ١٥

ب) عددًا فرديًّا

ج) من مضاعفات العدد ٦

د) عددًا أوّليًّا

تتطلب بعض الألعاب استخدام أحجار نرد أعداد أوجهها مختلفة.

١٠-٢ مخطّط الفضاء الاحتمالي

يتألّف الفضاء الاحتمالي من مجموعة النواتج الممكنة كلّها. ويمكن تبسيط العمل عند رسم **مخطّط الفضاء الاحتمالي** الذي يعرض النواتج كلّها بوضوح.

لاحظ كيف يساعد مخطط الفضاء الاحتمالي على حل المسائل كما في الأمثلة الآتية:

مثــال ٧

رُمي حجرا نرد معًا لكل منهما ٦ أوجه؛ أحدهما أحمر والآخر أزرق، ثم جُمع العددان الظاهران على وجهَي الحجرَين. أوجد احتمال أن يكون المجموع:

أ ٧ ب أقلّ من ٥

ج أكبر من أو يساوي ٨ د أقلّ من ٨

أحمر

+	١	٢	٣	٤	٥	٦
١	٢	٣	٤	٥	٦	٧
٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨
٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩
٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠
٥	٦	٧	٨	٩	١٠	١١
٦	٧	٨	٩	١٠	١١	١٢

أزرق

من المخطّط أعلاه يتّضح أن عدد النواتج الممكنة = ٣٦ ناتجًا.

الحــلّ:

أ ل(٧) = $\frac{٦}{٣٦}$ = $\frac{١}{٦}$

تكرر العدد ٧ في المخطط ٦ مرات، لذا يكون هناك ستة نواتج مُفضّلة.

ب ل(المجموع أقلّ من ٥) = $\frac{٦}{٣٦}$ = $\frac{١}{٦}$

النواتج الأقلّ من ٥ هي ٢، ٣، ٤ هناك ستة نواتج منها في المُخطّط.

ج ل(المجموع أكبر من أو يساوي ٨) = $\frac{١٥}{٣٦}$ = $\frac{٥}{١٢}$

النواتج الأكبر من أو تساوي ٨ (وتتضمّن العدد ٨) هي ٨، ٩، ١٠، ١١، ١٢ وعددها ١٥

د ل(المجموع أقلّ من ٨) = ١ − $\frac{٥}{١٢}$ = $\frac{٧}{١٢}$

ل(أقلّ من ٨)
= ل(ليست أكبر من أو تساوي ٨)
= ١ − ل(المجموع أكبر من أو يساوي ٨)

تمارين ١٠-٢

١) عند رمي قطعة نقدية معدنية منتظمة مرّتَين، تم تسجيل النواتج باستخدام الحرف (ص) للدلالة على الصورة، والحرف (ك) للدلالة على الكتابة. يمكن رسم مخطّط الفضاء الاحتمالي المجاور:

الرمية الأولى

	ك	ص
ص	ك ص	
ك		

الرمية الثانية

أ انسخ المخطّط ثمّ أكمله.

ب أوجد احتمال أن:

(١) يظهر على القطعتَين نفس الناتج.

(٢) تظهر صورة على كلّ من القطعتَين.

(٣) تظهر على الأقلّ صورة واحدة.

(٤) لا تظهر صورة على أيّ من القطعتَين.

٢) عند رمي حجرَي نرد منتظمَين لكل منهما ستة أوجه، تمّ تسجيل ناتج ضرب العددَين الظاهرَين.

أ ارسم مخطّط الفضاء الاحتمالي الذي يعرض جميع النواتج الممكنة.

ب أوجد احتمال أن يكون ناتج الضرب:

(١) يساوي الرقم ١

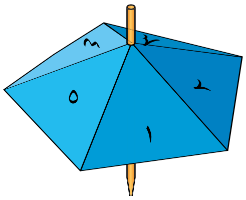
(٢) يساوي الرقم ٧

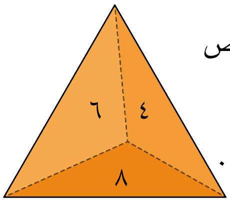
(٣) أقلّ من أو يساوي ٤

(٤) أكبر من ٤

(٥) عددًا أوليًّا.

(٦) مُربَّعًا كاملًا.





٣) يبيّن الشكلان المجاوران قرصًا دوّارًا له خمسة قطاعات متساوية مرقّمة ١، ٢، ٣، ٤، ٥، وحجر نرد منتظمًا على شكل مجسّم رباعي الأوجه مُرقّمًا ٢، ٤، ٦، ٨.

أدير القرص ورُمي حجر النرد، وتم تسجيل العدد الأكبر بين العددَين الظاهرَين. عند ظهور العدد نفسه على كل من القرص والنرد يتمّ تسجيل العدد.

أ ارسم مخطّط الفضاء الاحتمالي الذي يبيّن النواتج الممكنة.

ب احسب احتمال أن يكون العدد الأكبر:

(١) زوجيًّا.

(٢) فرديًّا.

(٣) من مضاعفات العدد ٣

(٤) أوليًّا.

(٥) أكبر من ضعف العدد الأصغر.

سابقًا

درست (ع م ك) في الصف ٩

٤) حجر نرد منتظم مكعّب الشكل رُقّمت أوجهه الستة بالأرقام ٤، ٦، ١٠، ١٢، ١٥، ٢٤ رُمي حجر النرد مرّتَين، وتم تسجيل العامل المُشترَك الأكبر (ع م ك) لكلا الناتجَين.

أ ارسم مخطّط الفضاء الاحتمالي الذي يبيّن النواتج الممكنة.

ب احسب احتمال أن يكون (ع م ك):

(١) ٢

(٢) أكبرمن ٢

(٣) غير الرقم ٧

(٤) غير الرقم ٥

(٥) ٣ أو ٥

(٦) مساويًا لأحد العددَين الظاهرَين.

٥) مجموعتان من أحجار النرد:

تضم المجموعة (أ): حجر نرد له أربعة أوجُه مرقّمة من ١ إلى ٤، وحجر نرد له ثمانية أوجُه مرقّمة من ١ إلى ٨

تضم المجموعة (ب): حجرَي نرد لكل منهما ستّة أوجُه، وكل منهما مرقّم من ١ إلى ٦

رابط

تستخدم برمجيات الحاسوب الاحتمالات لتنشئ تطبيقات مثل تفعيل الاتصالات الصوتية على الهواتف المحمولة. عندما تذكر اسمًا إلى الهاتف، يختار التطبيق الاسم الأكثر ترجيحًا من قائمة المشتركين.

أ رُمي حجرا النرد في كل مجموعة وتم تسجيل ناتج جمع الرقمَين الظاهرَين في المخططين الآتيين:

المجموعة (أ)

+	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨
١								
٢								
٣								
٤								

المجموعة (ب)

+	١	٢	٣	٤	٥	٦
١						
٢						
٣						
٤						
٥						
٦						

انسخ المخططين وأكملهما.

ب أجريت التجربة على إحدى مجموعتَي أحجار النرد، وسُجّلت النواتج الآتية:

الناتج	التكرار
٢	١٥
٣	٢٥
٤	٤٤
٥	٥٤
٦	٦٨
٧	٨٧
٨	٦٦
٩	٥٤
١٠	٤٣
١١	٣٠
١٢	١٤

بمقارنة الاحتمالات والتكرارات النسبية، حدّد مجموعة النرد التي تم استخدامها في التجربة.

١٠-٣ تجميع الأحداث المستقلّة والأحداث المتنافية

إذا رميت قطعة نقدية معدنية مرّة واحدة، فإن احتمال ظهور الصورة يساوي ٠,٥، وإذا رميت القطعة النقدية المعدنية مرّة ثانية، فإن احتمال ظهور الصورة يبقى ٠,٥، ولا يتأثر بما حدث في الرمية الأولى. تسمّى مثل هذه الأحداث التي لا تؤثّر فيها نواتج الرمية الأولى على نواتج الرمية الثانية الأحداث **المستقلّة**.

قد تحتوي بعض المسائل على أكثر من مرحلة، وقد تهتم بالترتيبات الممكنة للنواتج. إذا كان الحدثان أ، ب مستقلّين، فإن:

ل(حدوث أ ثم ب) = ل(أ) × ل(ب)

أو

ل(أ و ب) = ل(أ) × ل(ب)

لاحظ أن هذه القاعدة صحيحة فقط عندما يكون الحدثان مستقلّين.

هناك مواقف يكون فيها وقوع الحدثَين أ، ب في نفس الوقت مستحيلًا. فعلى سبيل المثال: إذا رميت حجر نرد منتظمًا له ستة أوجه فظهر:

أ = عدد زوجي

ب = العدد ٥

عندها لا يمكن للحدثَين (أ)، (ب) أن يقعا معًا، لعدم وجود عدد زوجي مساوٍ للعدد ٥

في هذه الحالة نقول: إن الحدثَين (أ)، (ب) **متنافيان**؛ فإما أن يقع الحدث (أ) أو أن يقع الحدث (ب). ويكون ل(أ أو ب) = ل(أ) + ل(ب).

توضّح الأمثلة الآتية كيف تعمل هاتان القاعدتان البسيطتان:

يكون الحدثان مستقلين إذا لم يؤثر أحدهما على الآخر. ويكون الحدثان متنافيين إذا تعذّر حدوثهما في الوقت نفسه.

لاحظ أن هذه القاعدة تستخدم فقط عندما يكون الحدثان أ، ب متنافيَين.

مثال ٨

تقدّمت سعاد وسارة لاختبار في الطبخ بطريقة مستقلّة. إذا كان احتمال أن تنجح سعاد في الاختبار $\frac{٣}{٤}$، واحتمال أن تنجح سارة فيه $\frac{٥}{٦}$

فما احتمال أن:

أ تنجح الفتاتان معًا

ب لا تنجح أيٌّ منهما

ج تنجح إحداهما على الأقلّ

د تنجح سعاد أو سارة (ليستا معًا)

يقصد بعبارة "بطريقة مستقلّة" أن نتيجة سعاد لا تؤثر على نتيجة سارة (والعكس صحيح).

الحــلّ:

أ ل(تنجح الفتاتان معًا) = ل(تنجح سعاد وتنجح سارة) $= \frac{٣}{٤} \times \frac{٥}{٦} = \frac{١٥}{٢٤} = \frac{٥}{٨}$	استخدم قاعدة الأحداث المستقلّة. يُعدّ نجاح سارة أو عدم نجاحها في الاختبار حدثًا مستقلًّا عن نتيجة سعاد والعكس صحيح.

ب ل(لا تنجح أيّ من الفتاتين) = ل(سعاد لم تنجح وسارة لم تنجح) $= (1 - \frac{3}{4}) \times (1 - \frac{5}{6})$ $= \frac{1}{4} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{24}$	احتمال عدم النجاح يساوي ١ – ل(النجاح).
ج ل(تنجح إحداهما على الأقلّ) = ١– ل(لم تنجح أيّ منهما) $= 1 - \frac{1}{24} = \frac{23}{24}$	استخدم إجابة الجزئية (ب) لتساعدك في الحل.
د ل(تنجح سعاد أو سارة وليستا معًا) = ل(تنجح سعاد ولم تنجح سارة، أو تنجح سارة ولم تنجح سعاد) $= \frac{3}{4} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{4} \times \frac{5}{6}$ $= \frac{3}{24} + \frac{5}{24}$ $= \frac{8}{24} = \frac{1}{3}$	’أن تنجح سارة وألّا تنجح سعاد‘ و’ألّا تنجح سارة وتنجح سعاد‘ حدثان متنافيان؛ إذ لا يمكن أن ينجح شخص ويرسب في نفس الوقت. لذا نجمع الاحتمالَين.

مثـــال ٩

يلعب سمير وجواد لعبة رمي السهم. احتمال أن يصيب سمير المركز ٠,١، واحتمال أن يصيب جواد المركز ٠,٢، رمى كل منهما سهمًا واحدًا. أوجد احتمال أن يصيب:

أ الاثنان المركز
ب سمير المركز ولا يصيبه جواد.
ج أحدهما فقط المركز.

الحـــلّ:

أ ل(يصيب الاثنان المركز) = ٠,١ × ٠,٢ = ٠,٠٢	يصيب سمير المركز أو لا يصيبه لا يعتمد على كون جواد أصاب المركز أو لا، والعكس صحيح.

ب ل(يصيب سمير المركز ولا يصيبه جواد)
= ٠,١ × (١ – ٠,٢) = ٠,١ × ٠,٨ = ٠,٠٨

ج ل(يُصيب أحدهما فقط المركز)
= ل(يصيب سمير المركز ولا يصيبه جواد، أو لا يصيب سمير المركز ويصيبه جواد)
= ٠,١ × ٠,٨ + ٠,٩ × ٠,٢
= ٠,٠٨ + ٠,١٨
= ٠,٢٦

تمارين ١٠-٣

في الاحتمالات، الحرف 'و' يعني أنك تحتاج إلى أن تضرب الاحتمالات والحرف 'أو' يعني أنك تحتاج إلى أن تجمع الاحتمالات.

١) رُمي حجر نرد منتظم له ستّة أوجُه مرَّتين. احسب احتمال أن يظهر:

أ الرقم ستّة مرتين
ب رقمان زوجيان
ج نفس الرقمَين
د رقمان مختلفان

٢) تحتوي حقيبة على ١٢ كرة ملوّنة، خمس كرات منها حمراء والباقية زرقاء. سُحبت كرة واحدة عشوائيًّا من الحقيبة، ثم أعيدت إلى الحقيبة وسُحبت كرة ثانية. تم تسجيل لون كلّ من الكرتَين.

أ اكتب قائمة النواتج الممكنة للتجربة.

ب احسب احتمال أن تكون:
(١) الكرة الأولى زرقاء.
(٢) الكرة الثانية حمراء.
(٣) الكرة الأولى زرقاء والكرة الثانية حمراء.
(٤) الكرتان لهما نفس اللون.
(٥) الكرتان مختلفتَي اللون.
(٦) كلّ من الكرتَين ليست حمراء.
(٧) إحدى الكرتَين على الأقل حمراء.

٣) يلعب خلفان وطلال لعبة يستخدمان فيها حجر نرد له ١٢ وجهًا. يرمي خلفان حجر النرد، ثم يرميه طلال. أوجد احتمال أن يكون:

أ العدد الظاهر في كلتا الرميتَين ٧
ب العددان الظاهران فرديَّين.
ج العدد الظاهر عند خلفان فرديًا والعدد الظاهر عند طلال زوجيًا.
د العدد الظاهر عند خلفان ٩ أو أكثر، والعدد الظاهر عند طلال ١٠ أو أكثر.
هـ العددان الظاهران مختلفين.

لاحقًا

سوف تتعلّم في الوحدة (١٢) كيف تحسب الاحتمال في مواقف، دون إعادة الشيء المسحوب.

٤) يستعد كلّ من كريم وسعيد لاختبار قيادة السيّارة. تعلّم كل منهما القيادة منفردًا، لذا ستكون نتائج الاختبار مستقلّة. إذا كان احتمال نجاح كريم في الاختبار ٠,٦ وكان احتمال نجاح سعيد ٠,٤

فاحسب احتمال أن:

أ ينجح الاثنان في الاختبار.
ب لا ينجح أحد منهما.
ج ينجح كريم ولا ينجح سعيد.
د ينجح أحدهما على الأقلّ.
هـ ينجح واحد منهما فقط.

مُلخَّص

ما يجب أن تعرفه:

- يقيس الاحتمال مدى إمكانية حدوث شيء ما.
- الناتج هو نتيجة واحدة لتجربة ما.
- الحدث هو مجموعة من النواتج المُفضّلة.
- يمكن أن تحسب الاحتمال التجريبي بقسمة عدد مرّات وقوع الحدث على عدد مرات إجراء التجربة.
- إذا كانت فرصة النواتج متساوية، فيمكن عندها أن تحسب الاحتمال النظري بقسمة عدد النواتج المُفضّلة على عدد النواتج الممكنة.
- مجموع احتمال الحدث واحتمال الحدث المتمّم له يساوي واحدًا دائمًا. إذا كان (أ) حدثًا ما، فإن (أ') هو الحدث المتمم له، و ل(أ') = ١ − ل(أ).
- الأحداث المستقلّة لا يؤثّر وقوع أحدها على الآخر.
- لا يقع الحدثان المتنافيان معًا.

يجب أن تكون قادرًا على:

- إيجاد الاحتمال التجريبي إذا أُعطيت نواتج إجراء تجربة عدّة مرّات.
- إيجاد الاحتمال النظري لحدث ما.
- إيجاد احتمال عدم وقوع حدث ما إذا عرفت احتمال وقوع ذلك الحدث.
- رسم مخطّطات الفضاء الاحتمالي.
- تمييز الأحداث المستقلّة عن الأحداث المتنافية.
- إجراء حسابات تتضمّن احتمالات مركبة.

تمارين نهاية الوحدة

١) تم ترقيم غرف فندق ما من ١ إلى ١٩، بحيث توزّع الغرف على الزوّار عشوائيًّا.

أ ما احتمال أن يكون رقم غرفة أوّل زائر عددًا أوّليًّا؟ (تذكّر أن الواحد ليس عددًا أوّليًّا).

ب إذا كان رقم غرفة أوّل زائر عددًا أوّليًّا، فما احتمال أن يكون رقم غرفة الزائر الثاني عددًا أوّليًّا؟

٢) يحتوي صحن فواكه على ثلاث تفّاحات، وثلاث موزات، وإجّاصتَين، وبرتقالة واحدة. اختارت أمينة إحدى الفواكه عشوائيًّا من الصحن. ما احتمال أن تكون قد اختارت:

أ موزة؟

ب مانجو؟

٣) احتمال أن تُمطر السماء في سويسرا في الأوّل من سبتمبر $\frac{٥}{١٢}$. أوجد احتمال ألّا تمطر في الأول من سبتمبر في سويسرا.

٤) مع سميرة ثلاث بطاقات: بطاقتان سوداوان وبطاقة واحدة حمراء. رتّبت إحداها إلى جانب الأخرى عشوائيًّا على طاولة. قد يكون أحد النواتج الممكنة للترتيب: حمراء، سوداء، سوداء.

أ اكتب جميع النواتج الممكنة للترتيب.

ب أوجد احتمال وجود البطاقتين السوداوين متجاورتَين. اكتب الناتج في صورة كسر.

٥) حجر نرد له أربعة أوجه مرقّمة ١، ٢، ٣، ٤. رُمي الحجر على طاولة، وكان احتمال ظهور كلّ وجه من الأوجه الأربعة كما هو مبيّن في الجدول الآتي:

الوجه	١	٢	٣	٤
الاحتمال	$\frac{٢}{٩}$	$\frac{١}{٣}$	$\frac{٥}{١٨}$	$\frac{١}{٦}$

أ انسخ الجدول، واملأ الخانات الأربع الفارغة بإعادة كتابة الاحتمالات في صورة كسور لها المقام المشترك نفسه.

ب ما رقم الوجه الذي له أكبر احتمالية ظهور؟

ج أوجد مجموع احتمالات ظهور الأوجُه الأربعة.

د ما احتمال عدم ظهور الوجه المرقّم بالعدد ٣؟

٦) سحب كلّ من أحمد وسعيد ورقة نقدية من جيبه عشوائيًّا وجمعا قيمتَيهما معًا. كان مع أحمد ورقتا نقود من فئة ١ ريال، وورقة واحدة من فئة ٥٠٠ بيسة، وورقة واحدة من فئة ٥ ريالات، وثلاث أوراق من فئة ١٠٠ بيسة. في حين كان مع سعيد ثلاث أوراق من فئة ٥ ريالات، وورقة واحدة من فئة ١ ريال، وثلاث أوراق من فئة ٥٠٠ بيسة:

أ ارسم مخطّط فضاء احتماليٍّ يعرض جميع النواتج الممكنة لمجموع ورقتَي النقود.

ب ما احتمال أن يكون مجموع ورقتَي النقود ٦ ريالات؟

ج ما احتمال أن يكون مجموع قيمتَي ورقتَي النقود ٢ ريال؟

د ما احتمال أن يكون مجموع قيمتَي ورقتَي النقود ٥ ريالات أو أكثر؟

٧) تم اختيار حرف واحد عشوائيًّا من أحرف كلمة (الرياضيات):
اكتب احتمال أن يكون الحرف:

أ (ي) أو (ت).

ب (ق).

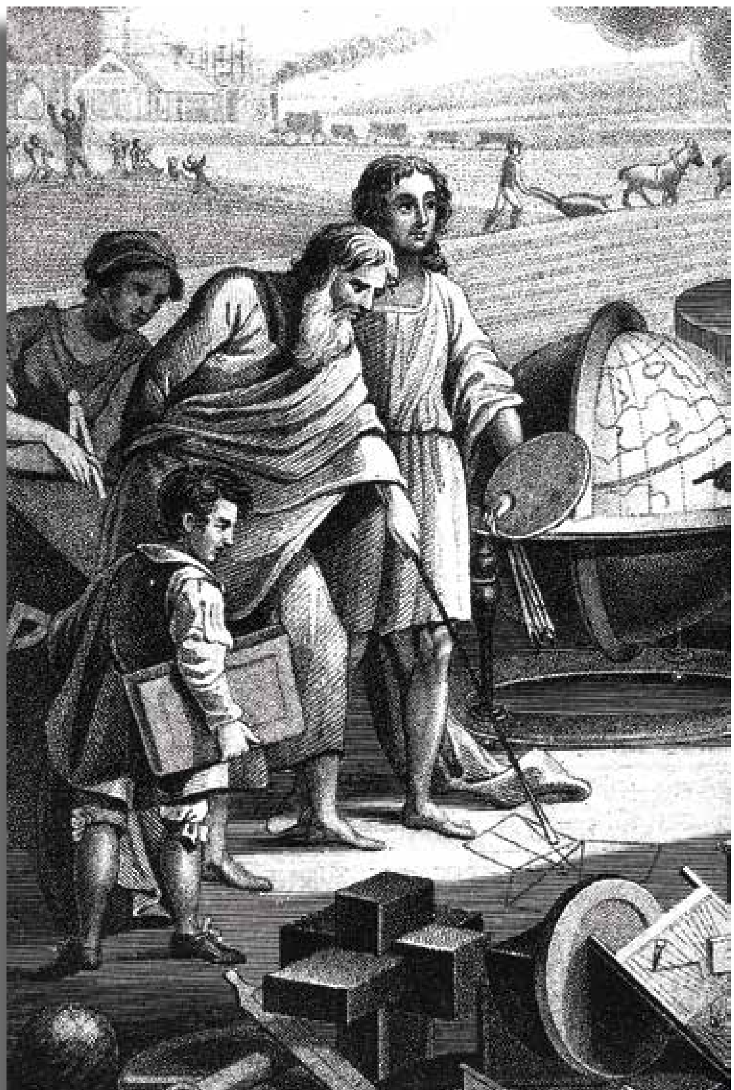
الوحدة الحادية عشرة: المثلّث القائم الزاوية

المُفردات

- الوتر Hypotenuse
- المقابل Opposite
- المجاور Adjacent
- نسبة الظل Tangent ratio
- الدالة العكسية Inverse function
- نسبة الجيب Sine ratio
- نسبة جيب التمام Cosine ratio
- زاوية الاتّجاه من الشمال Bearing

سوف تتعلّم في هذه الوحدة كيف:

- تستخدم نظرية فيثاغورث لتجد طول ضلع مجهول في مثلّث قائم الزاوية.
- تتعلم كيف تستخدم نظرية فيثاغورث لتحل المسائل.
- تحسب قياس زاوية الاتّجاه.
- تحسب النسب المثلّثية من جيب وجيب التمام وظل الزاوية في مثلّث قائم الزاوية
- تستخدم النسب المثلّثية من جيب وجيب التمام وظل الزاوية لتحسب أطوال الأضلاع وتقيس الزوايا في مثلّث قائم الزاوية.

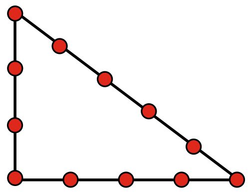


سُمّيت نظرية فيثاغورث نسبة إلى العالِم الرياضي اليوناني فيثاغورث الساموسي (Pythagoras of Samos)، مع أنّها استُخدمت في بلاد ما بين النهرين لمئات السنين قبل ولادة فيثاغورث، كما عُرفت في الهند والصين أيضًا.

تظهر المثلّثات قائمة الزوايا في حالات كثيرة من الحياة اليومية، مثل الطبيعة والعمارة والهندسة.

لقد تمّ استخدام كثير من خصائص المثلّث القائم الزاوية منذ القدم، وتبقى دراسة هذه الخصائص واحدة من أهم الموضوعات الرياضية.

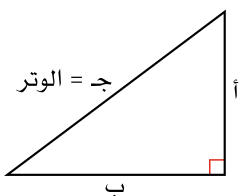
١١-١ نظرية فيثاغورث



قبل أن يعتمد فيثاغورث نظرية المثلّث القائم بقرون، عرف المصريون القدامى أنّ مجموعة العقد في حبل على أبعاد متساوية سوف تشكّل زاوية قائمة كما في الشكل المجاور.

قد تُعطى في بعض المواقف مثلّثًا قائم الزاوية، ويطلب منك أن تحسب طول الضلع المجهول فيه بمعلومية طولَي الضلعَين الآخَرين باستخدام نظرية فيثاغورث.

تعلّم القوانين



تصف نظرية فيثاغورث العلاقة بين أطوال أضلاع مثلّث قائم الزاوية. يُعرَف أطول ضلع (الضلع الذي يقابل ولا يُجاور الزاوية القائمة) **بالوتر**.

تنصّ نظرية فيثاغورث في المثلّث القائم على أن مربّع طول الوتر يساوي مجموع مربّعي طولَي ضلعَي الزاوية القائمة الآخرين.

يعني ذلك أن $\boxed{جـ^{٢} = أ^{٢} + ب^{٢}}$

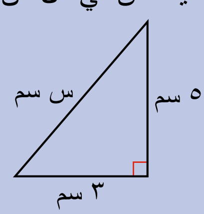
لاحظ كتابة الوتر في أحد طرفَي النظرية ومجموع مربّعي طولَي ضلعَي الزاوية القائمة في الطرف الآخر.

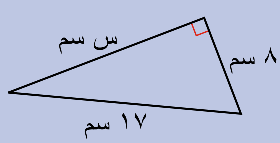
مُساعَدة

يُتوقّع منك تذكُّر نصّ نظرية فيثاغورث.

مثـــال ١

أوجد قيمة س في كل من المثلّثين الآتيين، مقرّبًا الناتج إلى أقرب منزلة عشرية.

أ


ب


الحـــلّ:

أ

$أ^{٢} + ب^{٢} = جـ^{٢}$

$٣^{٢} + ٥^{٢} = س^{٢}$

$٩ + ٢٥ = س^{٢}$

$\Leftarrow س^{٢} = ٣٤$

$س = \sqrt{٣٤} = ٥{,}٨٣٠٩...$

$\approx ٥{,}٨$ سم

لاحظ أن الإجابة النهائية يجب أن تُقرّب إلى أقرب منزلة عشرية.

ب

$أ^{٢} + ب^{٢} = جـ^{٢}$

$٨^{٢} + س^{٢} = ١٧^{٢}$

$٦٤ + س^{٢} = ٢٨٩$

$س^{٢} = ٢٨٩ - ٦٤$

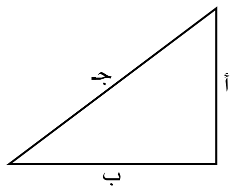
$س^{٢} = ٢٢٥$

$س = \sqrt{٢٢٥} = ١٥$ سم

لاحظ أن المطلوب هو إيجاد طول أحد ضلعَي الزاوية القائمة. لذا، عليك بعد كتابة نظرية فيثاغورث أن تعيد كتابتها لتجعل $س^{٢}$ في أحد الطرفَين، وباقي الأعداد في الطرف الآخر.

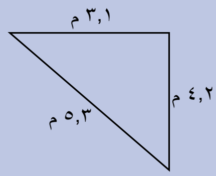
اختبار المثلّث قائم الزاوية

يمكنك أن تستخدم نظرية فيثاغورث لتقرّر ما إذا كان المثلّث قائم الزاوية أم لا. عوّض عن قيَم أ، ب، جـ لتتأكّد من أنها تحقّق النظرية. إذا كانت أ^{٢} + ب^{٢} لا تساوي جـ^{٢} فإن المثلّث لن يكون قائم الزاوية.



مثـــال ٢

استخدم نظرية فيثاغورث لتتحقّق ما إذا كان المثلّث المجاور قائم الزاوية أم لا.



الحـــلّ:

تأكّد من تحقّق نظرية فيثاغورث:	
جـ^{٢} = أ^{٢} + ب^{٢}	اكتب نظرية فيثاغورث.
أ^{٢} + ب^{٢} = (٣,١)^{٢} + (٤,٢)^{٢} = ٢٧,٢٥	عوّض عن قيم أ، ب في النظرية.
جـ^{٢} = ٥,٣^{٢} = ٢٨,٠٩ ≠ ٢٧,٢٥	
نظرية فيثاغورث غير محقّقة، ممّا يعني أن المثلّث المُعطى ليس قائم الزاوية.	

لاحظ أنه يمكن كتابة نظرية فيثاغورث في صورة جـ^{٢} = أ^{٢} + ب^{٢}. أو في صورة أ^{٢} + ب^{٢} = جـ^{٢}.

الرمز '≠' يعني 'لا يساوي'.

سابقًا

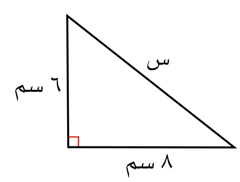
ستلاحظ ضرورة تقريب بعض الإجابات. ذلك أن كثيرًا من الجذور التربيعية تعطي أعدادًا غير نسبية، وقد تم ذكر ذلك في الصف (٩) ◄

تمارين ١١-١

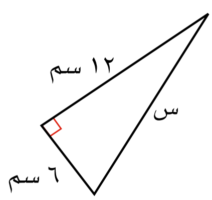
فيما يأتي، اكتب إجابتك مقرّبة إلى أقرب عدد مكوّن من ثلاثة أرقام معنوية.

١) أوجد طول الضلع المُشار إليه بالحرف (س) في كلّ مثلّث من المثلّثات الآتية:

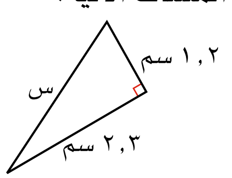
أ



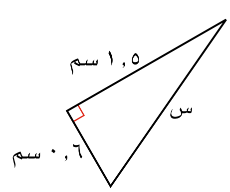
ب



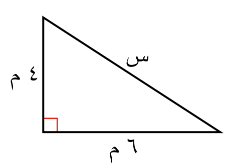
ج



د

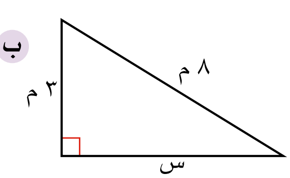


هـ

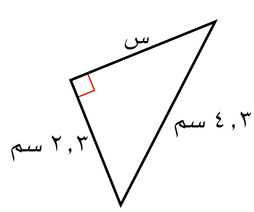


٢) أوجد طول الضلع المشار إليه بالحرف (س) في كلّ مثلّث من المثلّثات الآتية:

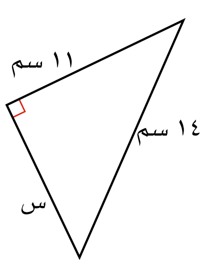
أ

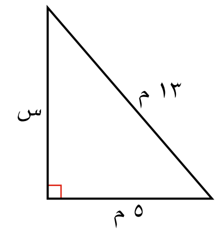


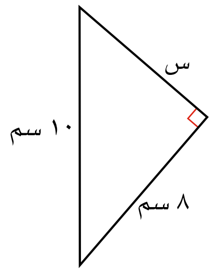
ب



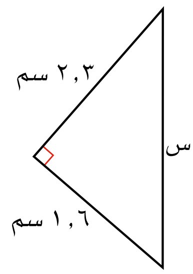
ج

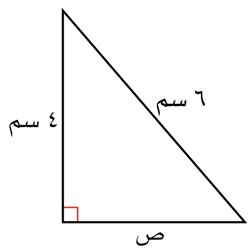


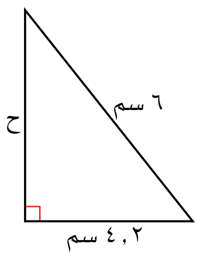
د


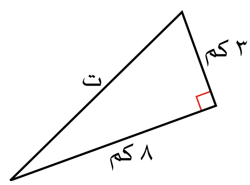
هـ


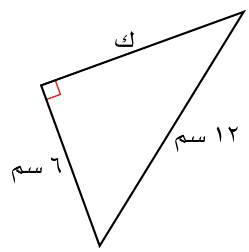
٣) أوجد طول الضلع المجهول في كلّ مثلّث من المثلّثات الآتية:

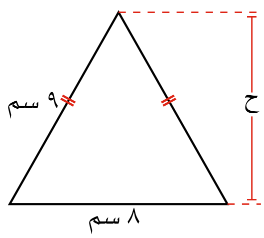
أ


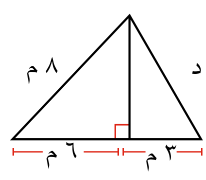
ب


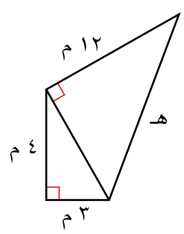
ج


د


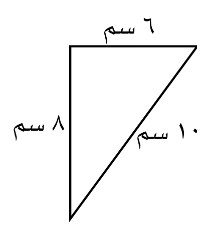
هـ


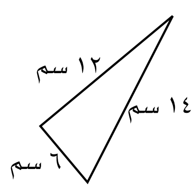
و


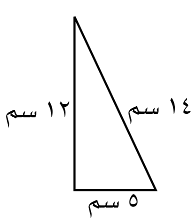
ز


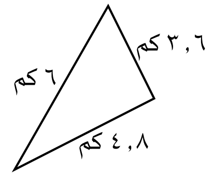
ح


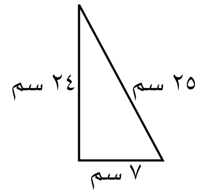
٤) حدِّد أيًّا من المثلّثات الآتية قائم الزاوية:

أ


ب


ج


د


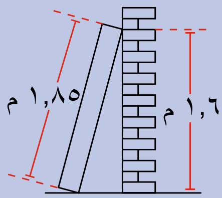
هـ


١١-٢ تطبيقات على نظرية فيثاغورث

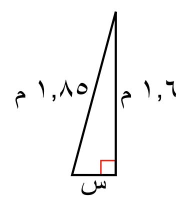
يتناول هذا الدرس آليّة استخدام نظرية فيثاغورث في حل مسائل من الحياة اليومية.
ابحث في كلّ حالة عن المثلّثات قائمة الزاوية وارسمها منفصلة لتجعل الحل واضحًا.

مثـال ٣

يبيّن الشكل المجاور خزانة كتب ترتكز على جدار. إذا كان ارتفاع الخزانة ١,٨٥ م، وكانت تلامس الجدار عند نقطة على ارتفاع ١,٦ م من الأرض، احسب المسافة بين قاعدة الخزانة والجدار، مقرّبًا الناتج إلى أقرب منزلتَين عشريتَين.



الحـلّ:

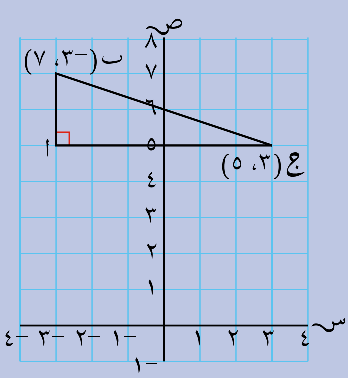


طبّق نظرية فيثاغورث: $أ^٢ + ب^٢ = جـ^٢$ $س^٢ + (١,٦)^٢ = (١,٨٥)^٢$ $س^٢ = (١,٨٥)^٢ - (١,٦)^٢$ $= ٣,٤٢٢٥ - ٢,٥٦$ $= ٠,٨٦٢٥$ $س = \sqrt{٠,٨٦٢٥} = ٠,٩٣$ م	فكّر في نوع المثلّث الذي تكوّنه الحالة، ثم ارسمه. اكتب الطول على كلّ ضلع، ثم طبّق نظرية فيثاغورث.

من المفيد أن ترسم المثلّث الذي ستستخدمه كجزء من الحل.

مثـال ٤

أوجد طول ب ج من الشكل المجاور.



الحـلّ:

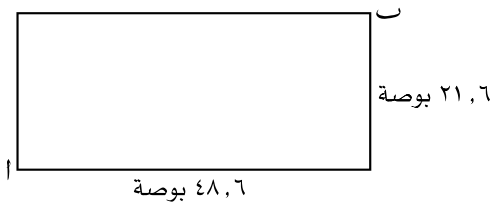
$ا ب = ٧ - ٥ = ٢$ وحدة	الفرق بين الإحداثيَين الصاديين.
$ا ج = ٣ - (-٣) = ٦$ وحدات	الفرق بين الإحداثيين السينيَين.
$(ب ج)^٢ = ٢^٢ + ٦^٢$ $= ٤ + ٣٦$ $= ٤٠$ $\therefore (ب ج) = \sqrt{٤٠}$ $= ٦,٣٢$ وحدة	طبّق نظرية فيثاغورث.

من المفيد رسم المخطّطات عندما تُعطى الإحداثيات.

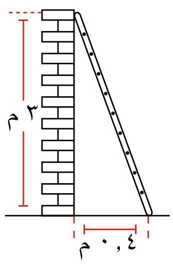
تمارين ١١-٢

لا يدلّك نص المسألة عمومًا على استخدام نظرية فيثاغورث. ابحث دائمًا عن مثلّث قائم الزاوية في سياق المسألة لتتمكّن من استخدام نظرية فيثاغورث لحلّها.

١) تُقاس شاشة التلفاز بطول قطرها.
يبيّن الشكل المجاور طول شاشة تلفاز وعرضها. أوجد طول القطر أ ب.



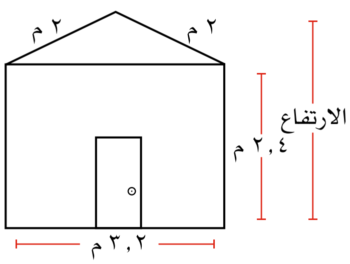
٢) يبيّن الشكل المجاور سلّمًا يرتكز على حائط.
أوجد طول السلم.



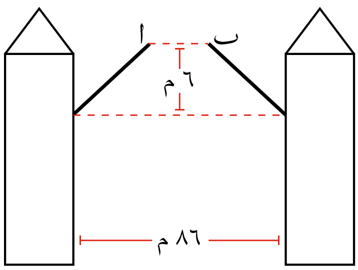
٣) تقف لبنى عند زاوية مزرعة مستطيلة الشكل. إذا كان بُعدا المزرعة ١٨٠م، ٢١٠ م، فكم مترًا ستسير لبنى في خطّ مستقيم لتصل إلى الزاوية المقابلة؟

المنظور الجانبي للمجسّم ثلاثي الأبعاد هو الشكل المرئي للمجسم من إحدى جهاته الجانبية.

٤) يبيّن الشكل المجاور المنظور الجانبي لمنزل في موقع تصوير فيلم سينمائي. احسب ارتفاع المنزل.



٥) يبيّن الشكل المجاور جسرًا يمكن رفعه ليسمح للسفن بالعبور. ما طول ا ب عندما يرتفع الجسر إلى الموقع المُبيّن في الشكل؟
(لاحظ أن الجسر يُقسَم إلى نصفَين عندما يرتفع ليبقى مفتوحًا).



٦) أوجد المسافة بين النقطتَين ا، ب من خلال إحداثيّاتهما:

- أ ا(٣، ٢) ، ب(٥، ٧)
- ب ا(٥، ٨) ، ب(٦، ١١)
- ج ا(⁻٣، ١) ، ب(٤، ٨)
- د ا(⁻٢، ⁻٣) ، ب(⁻٧، ٦)

٧) مربّع طول قطره ١٥ سم، احسب محيطه.

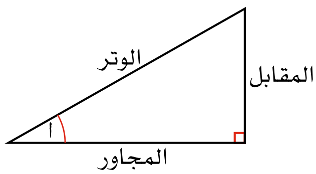
١١-٣ النسب المثلّثية

نعني بالنسب المثلّثية استخدام نسب أضلاع المثلّث قائم الزاوية.

وأنت تتابع الجزء المتبقّي من هذه الوحدة، تأكد من أن الزاوية في آلتك الحاسبة على وضع درجات. يظهر عادة الحرف 'D' أو 'Deg' على الشاشة. وإذا لم تكن كذلك، أو إذا ظهر الحرف 'G' أو الحرف 'R' على الشاشة، فعليك ضبط آلتك الحاسبة يدويًّا.

١١-٣-أ تسمية أضلاع المثلّث القائم الزاوية

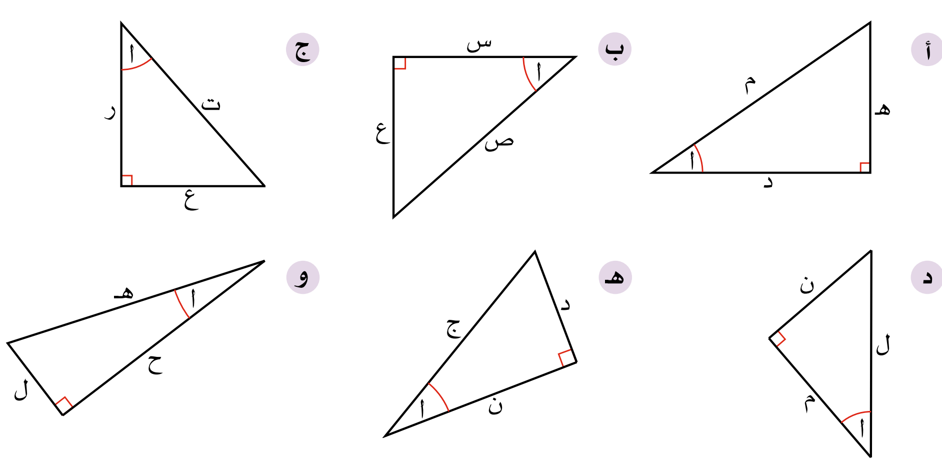
تعلّمت حتى الآن، عند دراسة نظرية فيثاغورث، أن الضلع الأطول في المثلّث قائم الزاوية يُسمّى **الوتر**. إذا أخذت إحدى الزاويتين غير الزاوية القائمة في المثلّث مرجعًا، ولتكن (ا°)، فيمكنك أن تُسمّي ضلعَي الزاوية القائمة:



لاحظ أن الضلع المجاور هو ضلع المثلّث الذي يلامس الزاوية (ا)، ولكنه ليس الوتر، وأنّ الضلع الثالث لا يتقاطع مع الزاوية أ مطلقًا، ويُسمّى الضلع **المقابل**. في الجزء المتبقّي من الوحدة، سوف يُستخدم مقابل الزاوية (ا) للدلالة على طول الضلع المقابل، ومجاور الزاوية (ا) للدلالة على طول الضلع **المجاور**. أمّا الوتر، فبما أنّه لا يعتمد على موقع الزاوية (ا)، يكتب 'الوتر' فقط.

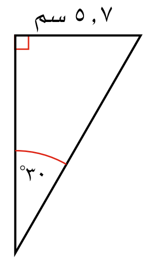
تمارين ١١-٣-أ

١) اكتب لكل مثلّث من المثلّثات الآتية حرف الوتر، وحرف الضلع المقابل للزاوية (ا)، وحرف الضلع المجاور للزاوية (ا):



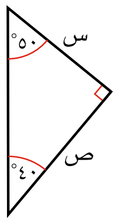
٢) انسخ العبارات أسفل كل مثلّث من المثلّثات الآتية وأكملها:

أ



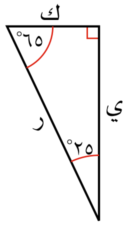
مقابل الزاوية (٣٠°)
= ....

ب



مقابل الزاوية (٤٠°)
= ....
مقابل الزاوية (٥٠°)
= ....

ج

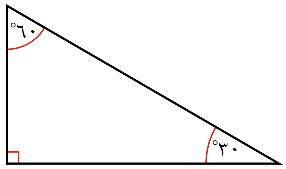


.... (٦٥°) = ك
.... (٢٥°) = ي
.... = ر

استقصاء

ستكتشف الآن العلاقة بين أطوال كلٍّ من الضلع المقابل، والضلع المجاور، والوتر، وزوايا المثلّث القائم الزاوية.

في هذا الاستقصاء، سوف تحتاج إلى رسم أربع نسخ بمقاييس رسم مختلفة للمثلث أدناه. بحيث يجب رسم الزاوية القائمة والزاوية ٣٠° بدقة، وتكون أطوال أضلاع المثلّثات الأربعة مختلفة. اتّبع التعليمات الآتية:



١- سمّ الضلع المقابل للزاوية (٣٠°)، والضلع المجاور للزاوية (٣٠°)، والوتر بوضوح.

٢- أوجد قياس طول الضلع المقابل للزاوية (٣٠°) واكتبه.

٣- أوجد قياس طول الضلع المجاور للزاوية (٣٠°) واكتبه.

٤- احسب $\frac{\text{طول الضلع المقابل للزاوية (٣٠°)}}{\text{طول الضلع المجاور للزاوية (٣٠°)}}$ في كلّ حالة.

٥- ماذا تلاحظ على إجاباتك؟

٦- اطلب إلى زميلك أن يرسم مثلّثًا (بنفس الزوايا) ثم قم بإجراء نفس الحسابات. ماذا تلاحظ؟

٧- كرّر الاستقصاء مُستخدمًا مثلّثًا زواياه مختلفة. سجّل ملاحظاتك.

سابقًا

عد إلى طريقة حساب المَيل في الصف التاسع، وقارن ذلك مع نسبة ظل الزاوية. ما الرابط الذي تلاحظه؟

١١-٣-ب ظل الزاوية

يتّضح أن $\frac{\text{طول الضلع المقابل للزاوية (أ)}}{\text{طول الضلع المجاور للزاوية (أ)}}$ مقدار ثابت لأي زاوية مُعطاة (أ)، ويعتمد على قياس الزاوية فقط، وليس على قياس أطوال أضلاع المثلث.

تُسمى النسبة $\frac{\text{طول الضلع المقابل للزاوية (أ)}}{\text{طول الضلع المجاور للزاوية (أ)}}$ **ظل** الزاوية وتُكتب:

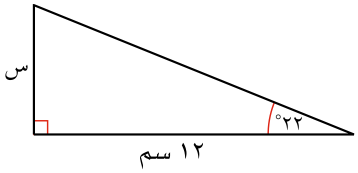
$$\text{ظا(أ)} = \frac{\text{طول الضلع المقابل للزاوية (أ)}}{\text{طول الضلع المجاور للزاوية (أ)}}$$

يمكن أن تحسب على آلتك الحاسبة نسبة الظل لأي زاوية في المثلث قائم الزاوية، وأن تستخدمها لحساب أطوال الأضلاع المجهولة فيه.

مثلًا، إذا أردت أن تجد ظل الزاوية ٢٢°، فأدخل:

لاحظ وجود عدّة منازل عشرية في الإجابة. عندما تستخدم هذه القيمة، يجب ألّا تقرّب الإجابة مباشرة.

انظر الآن إلى المثلّث قائم الزاوية الآتي:



يمكنك أن تجد طول الضلع المجهول، س، بأن تكتب ما تعرفه عن نسبة ظل الزاوية:

$$\text{ظا(٢٢°)} = \frac{\text{طول الضلع المقابل للزاوية (٢٢°)}}{\text{طول الضلع المجاور للزاوية (٢٢°)}} = \frac{\text{س}}{١٢}$$

$\Leftarrow$ س = ١٢ ظا(٢٢°)

$\therefore$ س = ٤,٨٤٨٣١٤

س = ٤,٨ سم (مقرّبة إلى أقرب منزلة عشرية)

مثــال ٥

احسب كل قيمة من القيمتَين الآتيتَين:

أ ظا(٤٠°) ب ظا(١٥,٤°)

الحــلّ:

أ
tan 4 0 =

tan 40
0.8390996312

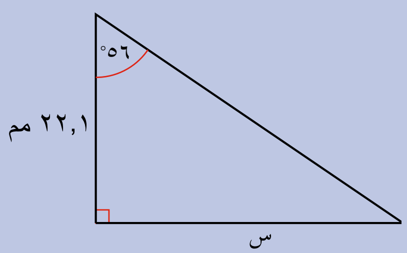
ب
tan 1 5 . 4 =

tan (15.4)
0.2754458909

إذا لم تحصل على هذه الإجابة، فعليك التحقّق من أن قياس الزاوية في آلتك الحاسبة على وضعية ‘درجة’. غالبًا ما يظهر حرف ‘D’ أو ‘DEG’ على الشاشة.

مثــال ٦

اوجد قيمة س في الشكل المجاور.
اكتب إجابتك مقرّبة إلى أقرب مم.



الحــلّ:

طول الضلع المقابل للزاوية (٥٦°) = س
طول الضلع المجاور للزاوية (٥٦°) = ٢٢,١ مم

ظا(٥٦°) = $\frac{\text{س}}{\text{٢٢,١}}$

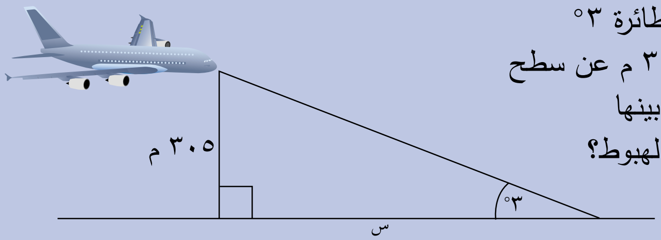
⇐ س = ٢٢,١ ظا(٥٦°)
= ٣٢,٧٦٤٥٩...
= ٣٣ مم (إلى أقرب مم)

سمّ أضلاع المثلّث بانتباه. من المهم عدم الخلط بين الضلعَين المجاور والمقابل. استخدم القانون

ظا(أ) = $\frac{\text{طول الضلع المقابل للزاوية (أ)}}{\text{طول الضلع المجاور للزاوية (أ)}}$

مثـــال ٧

إذا كان قياس زاوية هبوط الطائرة ٣°
عندما كانت على ارتفاع ٣٠٥ م عن سطح
الأرض، فما المسافة الأفقية بينها
وبين نقطة توقفها في مدرج الهبوط؟



الحـــلّ:

$$\text{ظا}(3°) = \frac{305}{\text{س}}$$

$$\Leftarrow \text{س} = \frac{305}{\text{ظا}(3°)}$$

$= 5819{,}74...$ م

$= 5820$ م (إلى أقرب متر)

تحتاج إلى استخدام مهارات جبرية من أجل إعادة ترتيب المعادلة لتتمكّن من حساب قيمة س.

تمارين ١١-٣-ب

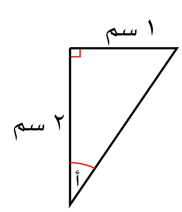
١) احسب قيمة ظل الزاوية في كل ممّا يأتي، واكتب إجابتك مقرّبة إلى أقرب عدد مكوّن من ٣ أرقام معنوية:

أ ظا(٣٥°) ب ظا(٤٦°) ج ظا(١٨°) د ظا(٤٥°)

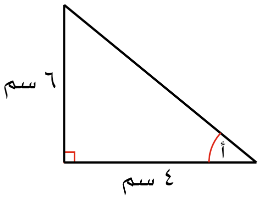
هـ ظا(١٥,٦°) و ظا(١٧,٩°) ز ظا(٠,٥°) ح ظا(٠°)

٢) احسب قيمة ظل الزاوية المطلوبة في كل مثلّث من المثلّثات الآتية، واكتب على صورة كسر في أبسط صورة:

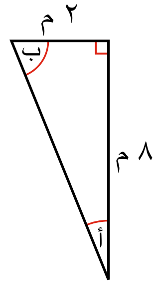
أ ظا(أ) =



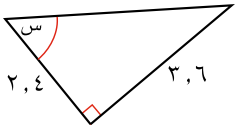
ب ظا(أ) =



ج ظا(أ) =
ظا(ب) =

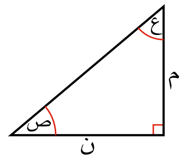


د ظا(س) =

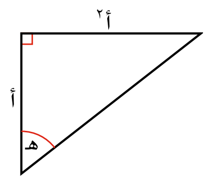


هـ ظا(ع) =

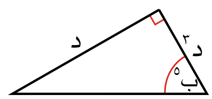
ظا(ص) =



و ظا(هـ) =

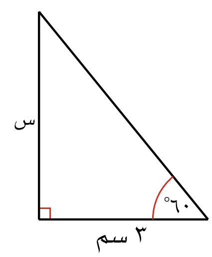


ز ظا(ب) =

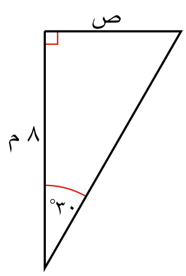


٣) أوجد طول الضلع المشار إليه بحرف في كلّ حالة من الحالات الآتية. اكتب إجابتك مقرّبة إلى أقرب عدد مكوّن من ٣ أرقام معنوية:

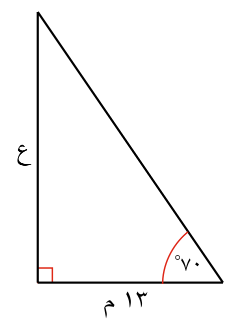
أ



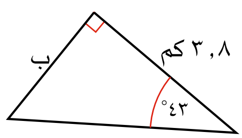
ب



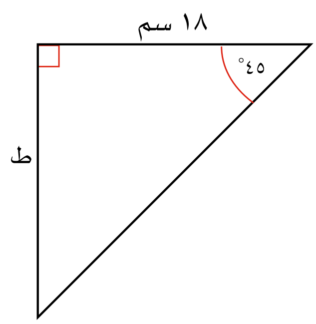
ج



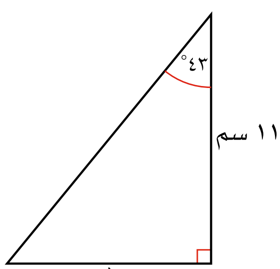
د



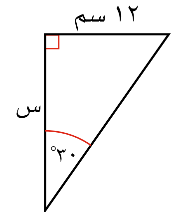
هـ

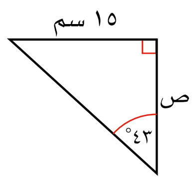


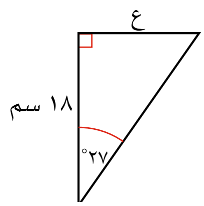
و

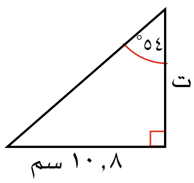


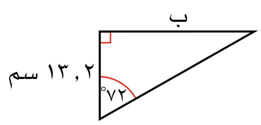
٤) احسب طول الضلع المشار إليه بحرف في كلّ حالة من الحالات الآتية. يُتوقّع منك أن تحسب طول الضلع المجاور. تأكّد من أنك تعوّض بانتباه في قاعدة ظل الزاوية:

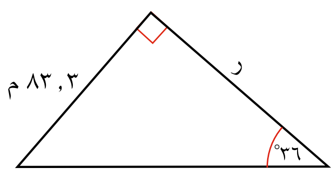
أ


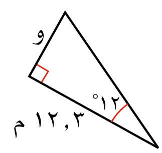
ب


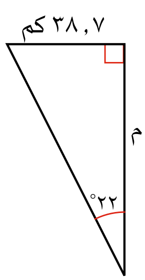
ج


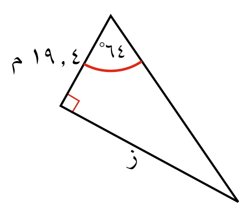
د


هـ


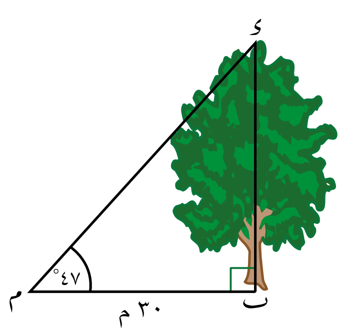
و


ز


ح


ط


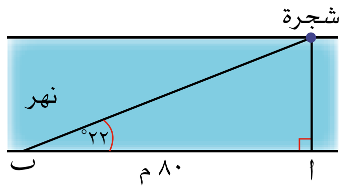
٥) يوضح الشكل المجاور شجرة ارتفاعها ب ى، تبعد قاعدتها (ب) مقدار ٣٠ م أفقيًّا عن النقطة (م)، وقياس الزاوية (ب م ى) يساوي ٤٧°.



أ استخدم الآلة الحاسبة لتجد قيمة ظا(٤٧°) مقربًا الناتج إلى أقرب أربع منازل عشرية.

ب احسب ارتفاع الشجرة.

٦) يريد مالك أن يقدّر عرض نهر ضفتاه متوازيتان.
بدأ من النقطة (أ) المقابلة للشجرة مباشرة على الضفة الأخرى. مشى ٨٠ مترًا على الضفة فوصل إلى النقطة (ب)، ثم نظر إلى الشجرة، فوجد أن المستقيم من النقطة (ب) إلى الشجرة يشكّل مع الضفة زاوية قياسها ٢٢°. احسب عرض النهر.



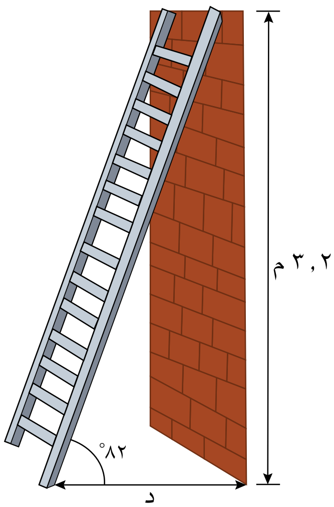
يجب أن تكون قادراً على تحديد ما إذا كان حل المسألة يتطلّب استخدام النسب المثلّثية أم استخدام نظرية فيثاغورث.

٧) إذا علمت أن المثلّث أ ع ب قائم الزاوية في ع، وكان قياس الزاوية (ب أ ع) = ٣٠°، وطول الضلع ب ع وحدة واحدة:

أ) احسب طول الضلع أ ع.

ب) استخدم نظرية فيثاغورث لتحسب طول الوتر أ ب.

٨) يبيّن الشكل المجاور سلّمًا يرتكز على حائط.
قياس الزاوية بين السلّم والأرض ٨٢°، ويصل السلّم إلى ارتفاع ٣,٢ م من الحائط.
أوجد المسافة د، التي تصل بين قاعدة السلم وقاعدة الحائط بالأمتار.
اكتب إجابتك مقرّبة إلى أقرب سم.



١١-٣-ج حساب قياس الزوايا

يمكن أن تعمل آلتك الحاسبة (بطريقة عكسية) لتجد قياس زاوية ما بمعلومية ظلها. يمكنك أن تستخدم مفتاح **الدالة العكسية** $\boxed{\tan^{-1}}$ لظل الزاوية على الآلة الحاسبة. عادة، يُستخدم لهذه الدالة نفس مفتاح ظل الزاوية، لكن المطلوب قبل النقر عليه معرفة ما إذا كانت هذه الحالة ستحتاج إلى استخدام $\boxed{\text{2ndF}}$ أو $\boxed{\text{shift}}$ للوصول إلى الدالة المكتوبة فوق المفتاح.

مثال ٨

أوجد قياس كل زاوية من الزوايا الحادّة الآتية مقربًا الناتج إلى أقرب منزلة عشرية واحدة إذا علمت أن ظل الزاوية يساوي:

أ ٠,١٢٣٤ ب ٥ ج ٢,٧٦٥

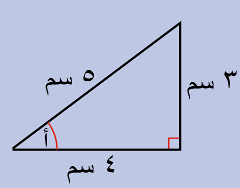
الحــلّ:

أ	$\tan^{-1}$ 0.1234 7.034735756	shift tan 0 . 1 2 3 4 =	قياس الزاوية هو ٧,٠°
ب	$\tan^{-1}$ 5 78.69006753	shift tan 5 =	قياس الزاوية هو ٧٨,٧°
ج	$\tan^{-1}$ 2.765 70.11678432	shift tan 2 . 7 6 5 =	قياس الزاوية هو ٧٠,١°

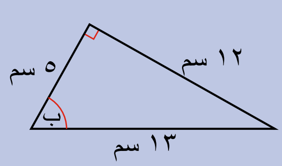
مثال ٩

احسب قياس كل زاوية من الزوايا المشار إليها بحرف، مقرّبًا الناتج إلى أقرب منزلة عشرية واحدة:

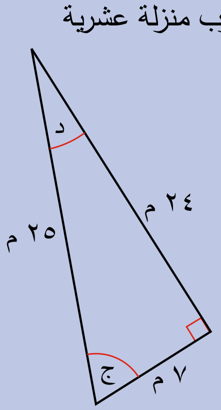
أ



ب



ج



الحــلّ:

أ ظا(أ) = $\frac{\text{طول الضلع المقابل للزاوية (أ)}}{\text{طول الضلع المجاور للزاوية (أ)}}$ = $\frac{٣}{٤}$ = ٠,٧٥ أ = ظا$^{-١}$(٠,٧٥) = ...٣٦,٨٦٩٨٩٧ أ = ٣٦,٩°	سمّ أضلاع المثلّث بدقّة. هنا لن نستخدم طول الوتر (٥ سم).
ب ظا(ب) = $\frac{\text{طول الضلع المقابل للزاوية (ب)}}{\text{طول الضلع المجاور للزاوية (ب)}}$ = $\frac{١٢}{٥}$ = ٢,٤ ب = ظا$^{-١}$(٢,٤) = ...٦٧,٣٨٠١٣٥ ب = ٦٧,٤°	
ج ظا(ج) = $\frac{\text{طول الضلع المقابل للزاوية (ج)}}{\text{طول الضلع المجاور للزاوية (ج)}}$ = $\frac{٢٤}{٧}$ ج = ظا$^{-١}$($\frac{٢٤}{٧}$) = ...٧٣,٧٣٩٧٩٥ ج = ٧٣,٧° د = ١٦,٣° ظا(د) = $\frac{\text{طول الضلع المقابل للزاوية (د)}}{\text{طول الضلع المجاور للزاوية (د)}}$ = $\frac{٧}{٢٤}$ د = ظا$^{-١}$($\frac{٧}{٢٤}$) = ...١٦,٢٦٠٢٠٤	لتجد قياس الزاوية د، يمكنك استخدام حقيقة أن مجموع قياس زوايا المثلّث يساوي ١٨٠° هذا يعطي أن قياس الزاوية د = ١٨٠ ° − (٩٠° + ٧٣,٧ °) = ١٦,٣° يمكنك أيضًا أن تستخدم ظل الزاوية مرّة أخرى مع إعادة تمييز طول الضلع المقابل وطول الضلع المجاور بالنسب إلى هذه الزاوية.

تمارين ١١-٣-ج

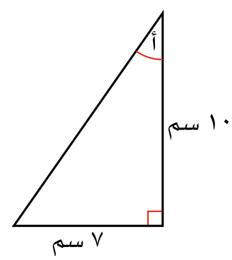
١) أوجد قياس كل زاوية من الزوايا الحادة الآتية، مقرّبًا الناتج إلى أقرب منزلة عشرية واحدة إذا علمت أن ظل الزاوية يساوي:

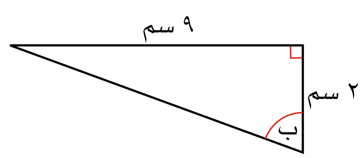
أ ٠,٨٥ ب ١,٢٣٤٥ ج ٣,٥٦ د ١٠

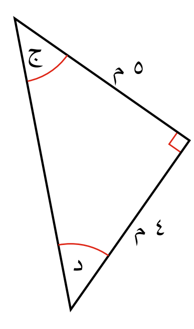
٢) أوجد قياس كل زاوية من الزوايا الحادة الآتية، مقرّبًا الناتج إلى أقرب درجة إذا علمت أن ظل الزاوية يساوي:

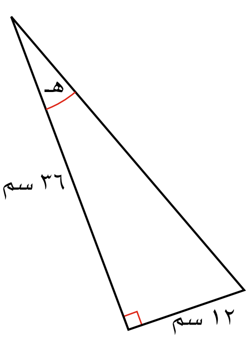
أ $\frac{٢}{٥}$ ب $\frac{٧}{٩}$ ج $\frac{٢٥}{٣٢}$ د $٢\frac{١}{٤}$

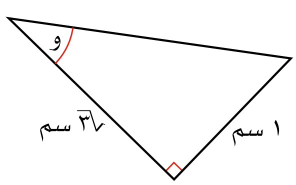
٣) أوجد قياس كل زاوية من الزوايا المشار إليها بحرف، مقرّبًا الناتج إلى أقرب منزلة عشرية واحدة:

أ


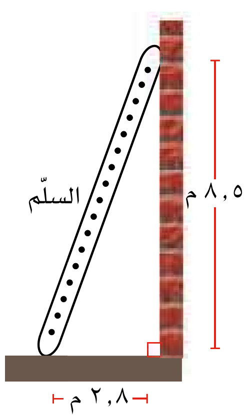
ب


ج


د


هـ


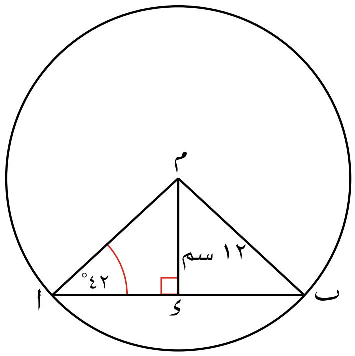
٤) يرتكز أحد طرفَي سلم على الأرض والطرف الآخر على جدار رأسي. إذا كانت قاعدة السلّم تبعد مسافة ٢,٨ م عن قاعدة الجدار، فإن قمة السلم تصل إلى ارتفاع ٨,٥ م على الجدار. احسب قياس الزاوية التي يشكّلها السلّم مع سطح الأرض.



٥) في الشكل المجاور دائرة مركزها م حيث $\overline{مء}$ = ١٢ سم، احسب طول:

أ ا ء.

ب ا م.



٦) ا ب ج مثلّث قائم الزاوية، طول وتره ا ج = ٧ سم وطول الضلع ب ج = ٣ سم.
احسب طول الضلع ا ب، وقياس (ا $\hat{ج}$ ب).

١١-٣-د فهم نسبة جيب الزاوية وجيب تمام الزاوية

لاحظت أن ظل الزاوية يستخدم الضلعَين؛ المقابل والمجاور فقط. ما الذي يحصل إذا احتجت إلى استخدام الوتر؟ في الواقع، هناك ثلاثة أزواج ممكنة من الأضلاع يمكنك أن تضمّها في نسبة ما، هي:

- الضلع المقابل والضلع المجاور (سبق أن استخدمتها مع ظل الزاوية).
- الضلع المقابل والوتر.
- الضلع المجاور والوتر.

ويعني ذلك أنك تحتاج إلى نسبتَين إضافيتَين هما:

- **نسبة جيب** الزاوية وتكتب جا(أ) = $\frac{\text{طول الضلع المقابل للزاوية (أ)}}{\text{الوتر}}$
- **نسبة جيب تمام** الزاوية وتكتب جتا(أ) = $\frac{\text{طول الضلع المجاور للزاوية (أ)}}{\text{الوتر}}$

يقرأ الاختصار (جا) لجيب الزاوية والاختصار (جتا) لجيب تمام الزاوية.

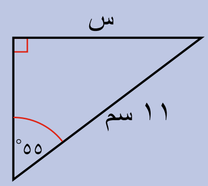
يمكنك أن تستخدم المفتاحين sin و cos على آلتك الحاسبة لتجد جيب وجيب تمام زاوية معطاة. كما يمكنك استخدام مفاتيح الدوال 'العكسية' shift sin أو $\sin^{-1}$ و shift cos أو $\cos^{-1}$ لتجد قياس الزوايا.

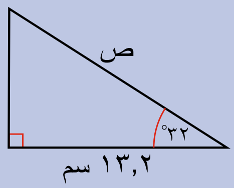
قبل المباشرة في بعض الأمثلة، يجب أن تلاحظ النسب المثلّثية الثلاث التي تحتاج إليها لتعرف النسبة التي ستختارها (جا، مقابل، وتر)، (جتا، مجاور، وتر)، (ظا، مقابل، مجاور) يمثّل كل من هذه المجموعات الثلاث إحدى النسب المثلّثية المناسبة. فمثلًا (جتا، مجاور، وتر) تستخدم جيب تمام الزاوية بمعلومية طول الضلع المجاور والوتر. وهكذا ...

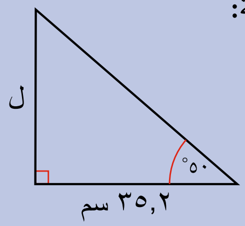
على سبيل المثال، إذا تضمّنت مسألة الضلع المقابل والوتر، فإن النسبة المثلّثية الفضلى للحل هي جيب الزاوية.

مثــال ١٠

أوجد طول الضلع المشار إليه بحرف في كلّ مثلّث من المثلّثات الآتية:

أ 

ب 

ج 

الحــلّ:

أ طول الضلع المقابل للزاوية (٥٥°) = س

الوتر = ١١ سم

فيكون،

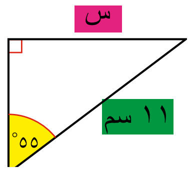
$$\text{جا}(55^\circ) = \frac{\text{طول الضلع المقابل للزاوية } (55^\circ)}{\text{الوتر}}$$

$$= \frac{\text{س}}{11}$$

⇐ س = ١١ جا(٥٥°)

⇐ س = ٩,٠ سم (إلى أقرب منزلة عشرية واحدة)

حدّد الضلع الذي ستعتمده بدقّة.



$$\text{جا(هـ)} = \frac{\text{طول الضلع المقابل}}{\text{الوتر}}$$

هذان الضلعان هما الضلع المقابل والوتر، لذا استخدم جا(٥٥°).

ب طول الضلع المجاور للزاوية (٣٢°) = ١٣,٢ سم

الوتر = ص

فيكون،

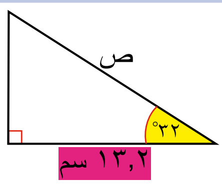
$$\text{جتا}(32^\circ) = \frac{\text{طول الضلع المجاور للزاوية } (32^\circ)}{\text{الوتر}}$$

$$= \frac{13{,}2}{\text{ص}}$$

⇐ ص × جتا(٣٢°) = ١٣,٢

$$\Leftarrow \text{ص} = \frac{13{,}2}{\text{جتا}(32^\circ)}$$

⇐ ص = ١٥,٦ سم (إلى أقرب منزلة عشرية واحدة)



$$\text{جتا(هـ)} = \frac{\text{طول الضلع المجاور}}{\text{الوتر}}$$

هذان الضلعان هما الضلع المجاور والوتر، لذا استخدم جتا(٣٢°).

ج طول الضلع المقابل للزاوية (٥٠°) = ل سم

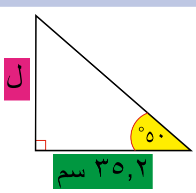
طول الضلع المجاور للزاوية (٥٠°) = ٣٥,٢ سم

فيكون،

$$\text{ظا}(50^\circ) = \frac{\text{طول الضلع المقابل}}{\text{طول الضلع المجاور}} = \frac{\text{ل}}{35{,}2}$$

⇐ ل = ٣٥,٢ ظا(٥٠°)

⇐ ل = ٤١,٩ (إلى أقرب منزلة عشرية واحدة)

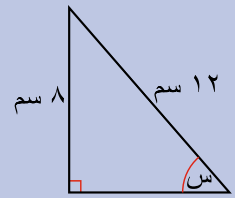


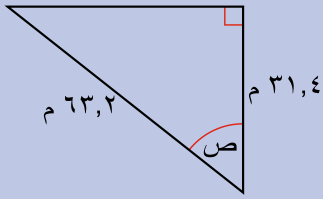
$$\text{ظا(هـ)} = \frac{\text{طول الضلع المقابل}}{\text{طول الضلع المجاور}}$$

هذان الضلعان هما الضلع المقابل والضلع المجاور، لذا استخدم ظا(٥٠°).

مثـــال ١١

أوجد قياس الزاوية المشار إليها بحرف في كلّ مثلّث من المثلّثين الآتيَين:

أ 

ب 

الحــلّ:

أ طول الضلع المقابل للزاوية (س) = ٨ سم

الوتر = ١٢ سم

فيكون،

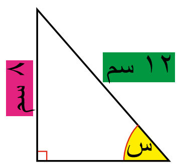
$$\text{جا(س)} = \frac{\text{طول الضلع المقابل للزاوية (س)}}{\text{الوتر}}$$

$$= \frac{٨}{١٢}$$

$\Leftarrow$ س = جا$^{-١}$($\frac{٨}{١٢}$)

$\Leftarrow$ س = ٤١,٨° (إلى أقرب منزلة عشرية واحدة)

مرّة أخرى، حدّد بدقّة الضلع والنسبة المثلّثية التي يجب استخدامها:



ب طول الضلع المجاور للزاوية (ص) = ٣١,٤ م

الوتر = ٦٣,٢ م

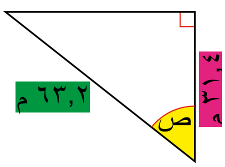
فيكون،

$$\text{جتا(ص)} = \frac{\text{طول الضلع المجاور للزاوية (ص)}}{\text{الوتر}}$$

$$= \frac{٣١,٤}{٦٣,٢}$$

$\Leftarrow$ ص = جتا$^{-١}$($\frac{٣١,٤}{٦٣,٢}$)

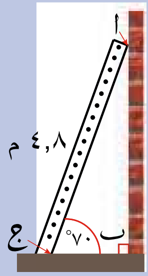
$\Leftarrow$ ص = ٦٠,٢°



$$\text{جتا(هـ)} = \frac{\text{طول الضلع المجاور للزاوية (هـ)}}{\text{وتر}}$$

مثــال ١٢

يرتكز سلم طوله ٤٫٨ سم على جدار رأسي وقاعدته على أرض أفقية. يشكّل السلّم مع الأرض زاوية قياسها ٧٠°



أ كم تبعد قمة السلم عن قاعدة الجدار؟

ب كم تبعد قاعدة السلّم عن الجدار؟

الحــلّ:

أ تجد في الشكل المجاور، أنّ ا ج وتر في المثلّث القائم ا ب ج.

ا ب هي بُعد قمّة السلّم عن قاعدة الجدار.

طول الضلع المقابل للزاوية (٧٠°) = ا ب

الوتر = ٤٫٨ م

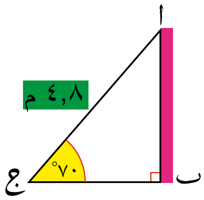
فيكون،

جا(٧٠°) = $\frac{\text{طول الضلع المقابل للزاوية (٧٠°)}}{\text{الوتر}}$ = $\frac{\text{ا ب}}{٤٫٨}$

⇐ ا ب = ٤٫٨ جا(٧٠°)

⇐ ا ب = ٤٫٥ م (إلى أقرب منزلة عشرية واحدة).

لذا، تبعد قمة السلم عن قاعدة الجدار مسافة ٤٫٥ م.



ب المسافة بين قاعدة السلم والجدار تساوي ب ج.

طول الضلع المجاور للزاوية (٧٠°) = ب ج

الوتر = ٤٫٨ م

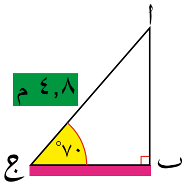
فيكون،

جتا(٧٠°) = $\frac{\text{طول الضلع المجاور للزاوية (٧٠°)}}{\text{الوتر}}$ = $\frac{\text{ب ج}}{٤٫٨}$

⇐ ب ج = ٤٫٨ جتا(٧٠°)

⇐ ب ج = ١٫٦٤ م (إلى أقرب منزلتَين عشريتَين).

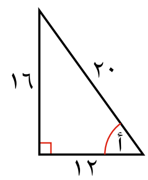
تبعد قاعدة السلم عن الجدار مسافة ١٫٦٤ م.

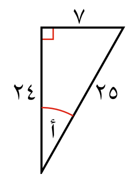


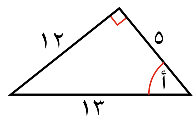
تمارين ١١-٣-د

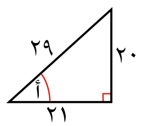
١) لكلّ مثلّث من المثلّثات الآتية، أوجد قيمة:

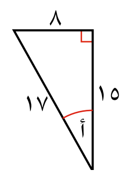
(١) جا(أ)　　(٢) جتا(أ)　　(٣) ظا(أ)

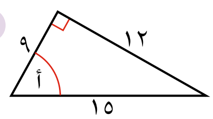
أ


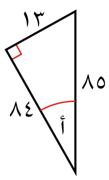
ب


ج


د


هـ


و


ز


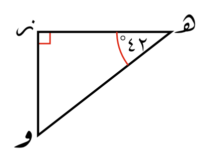
٢) استخدم الآلة الحاسبة لتجد كل قيمة من القيَم الآتية. اكتب الناتج مقرّبًا إلى أقرب ٤ منازل عشرية.

> تذكّر أن تتحقّق من أن الآلة الحاسبة مضبوطة على وضع الدرجات. يجب وجود حرف D على الشاشة.

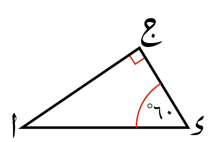
أ جا(٥°)　　ب جتا(٥°)　　ج جا(٣٠°)　　د جتا(٣٠°)

هـ جا(٦٠°)　　و جتا(٦٠°)　　ز جا(٨٥°)　　ح جتا(٨٥°)

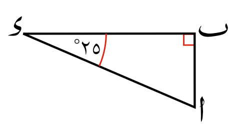
٣) استخدم في كلّ مثلّث من المثلّثات الآتية الحروف التي تدلّ على الأطوال، لتكتب النسبة المثلّثية المطلوبة:

أ


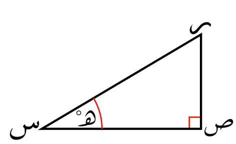
جتا(٤٢°)

ب


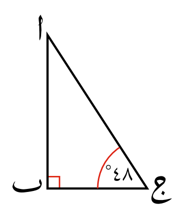
جا(٦٠°)

ج


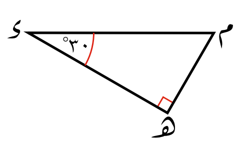
جتا(٢٥°)

د


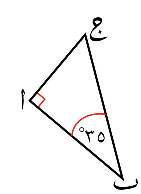
جتا(هـ°)

هـ


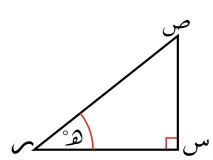
جتا(٤٨°)

و


جا(٣٠°)

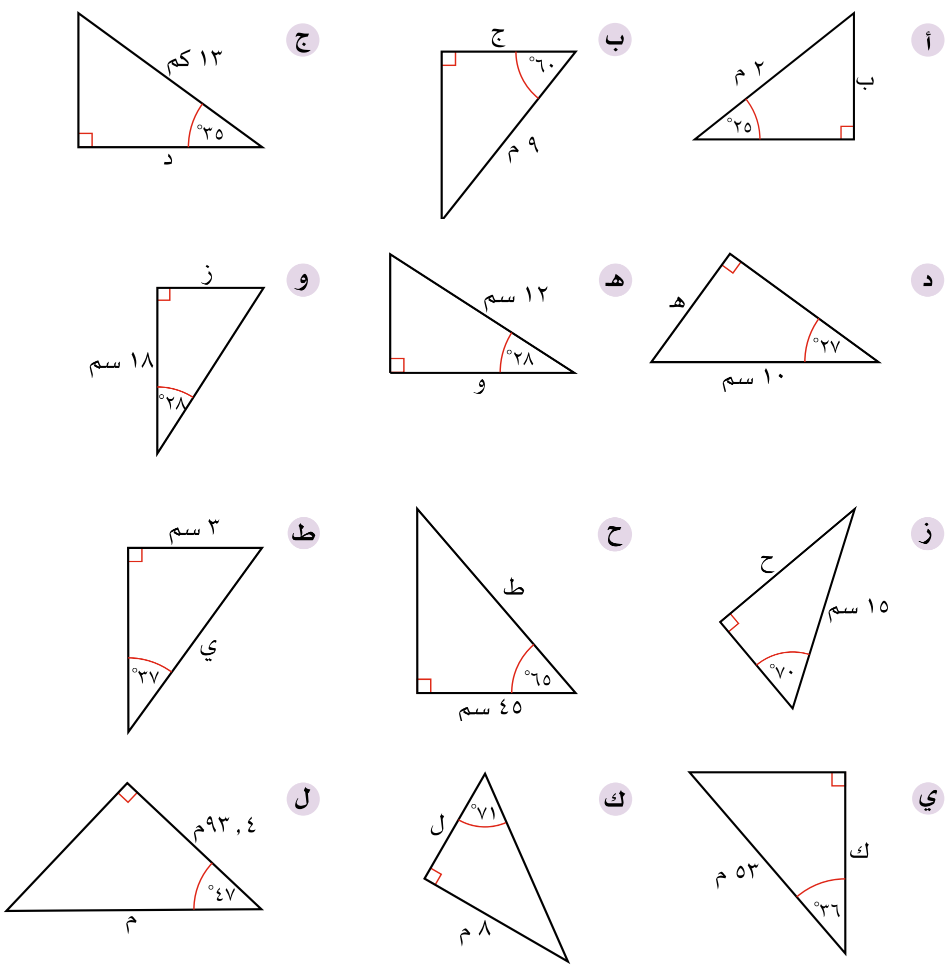
ز


جتا(٣٥°)

ح


جتا(هـ°)

٤) لكلّ مثلّث من المثلّثات الآتية، أوجد طول الضلع المجهول المشار إليه بحرف مقرِّبًا الناتج إلى أقرب عدد مكوّن من ٣ أرقام معنوية. (بعض التمارين يتطلّب حلها استخدام ظل الزاوية):



٥) استخدم الآلة الحاسبة لتجد المطلوب مقرِّبًا الناتج إلى أقرب منزلة عشرية:

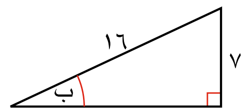
أ قياس زاوية حادّة جيبها ٠,٩٩

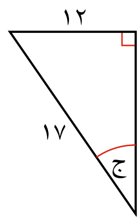
ب قياس زاوية حادّة جيب تمامها ٠,٥٤٣٢

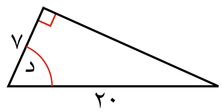
ج قياس زاوية حادّة جيبها $\frac{٣}{٨}$

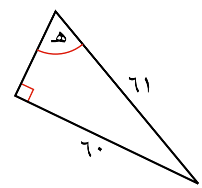
د قياس زاوية حادّة جيب تمامها $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

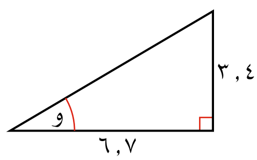
٦) أوجد قياس الزاوية المشار إليها بحرف في كلّ مثلّث من المثلّثات الآتية مقرِّبًا الناتج إلى أقرب منزلة عشرية:

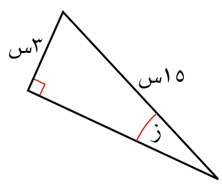
أ


ب


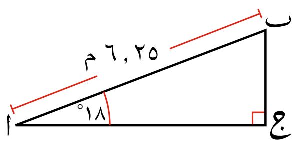
ج


د


هـ


و


٧) يبيّن الشكل المجاور منحدرًا اب يشكّل زاوية قياسها ١٨° مع سطح الأرض. يبلغ طول المنحدر ٦,٢٥ م. احسب ارتفاع قمّة المنحدر عن مستوى سطح الأرض، (أي طول ب ج).

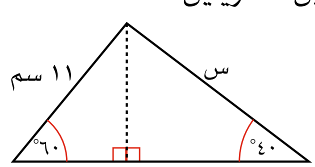


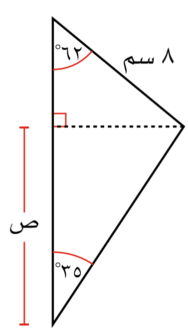
٨) ترتكز قطعة خشبية طولها ١٨ م على جدار. وهي تشكّل مع الأرض زاوية قياسها ٧٠°

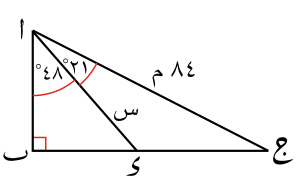
أ احسب ارتفاع قمّة القطعة عند نقطة تماسها مع الحائط عن الأرض.

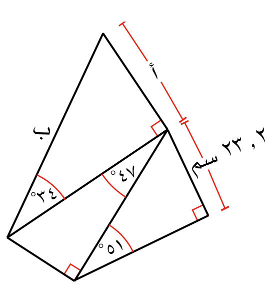
ب احسب بُعد قاعدة القطعة عن الجدار.

٩) احسب طول الضلع المجهول في كلّ شكل من الأشكال الآتية، مقرّبًا الناتج إلى أقرب منزلتَين عشريتَين:

أ


ب


ج


د


١٠) احسب لكلّ زاوية من الزوايا الآتية:

(١) ظا(س) (٢) $\frac{\text{جا(س)}}{\text{جتا(س)}}$

أ س = ٣٠° ب س = ٤٨° ج س = ١٢٠° د س = ١٩٤°

ماذا تلاحظ؟

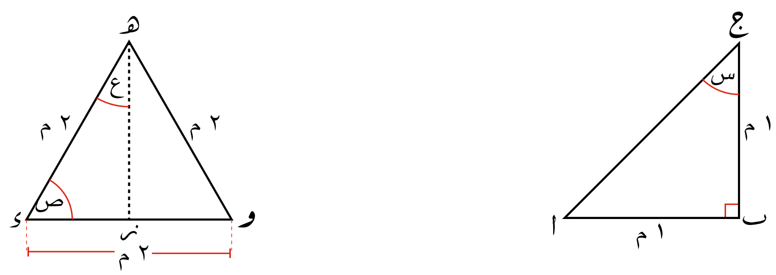
١١) احسب:

أ (جا(٣٠°))^{٢} + (جتا (٣٠°))^{٢}

ب (جا (٤٨°))^{٢} + (جتا (٤٨°))^{٢}

ج اختر زاوية أخرى وكرّر نفس الحسابات. ماذا تلاحظ؟

١٢) يبيّن الشكل أدناه مُثلّثًا قائم الزاوية متطابق الضلعَين، ومُثلّثًا آخر متطابق الأضلاع.



أ أوجد قياس ($\hat{\text{س}}$).

ب استخدم نظرية فيثاغورث لتحسب طول ا ع.

ج انسخ المثلّث ا ب ع، وضمّنه إجابتَي الجزئيتَين (أ)، (ب).

د استخدم الشكل الذي رسمته لتحسب القيمة الدقيقة لِ جا(٤٥°)، جتا(٤٥°)، ظا(٤٥°).

هـ أوجد قياس ($\hat{\text{ص}}$)

و أوجد قياس ($\hat{\text{ع}}$).

ز استخدم نظرية فيثاغورث لتحسب طول هـ ن.

ح انسخ الشكل وضمّنه إجابات الجزئيات (هـ)، (و)، (ز).

ط استخدم الشكل لتحسب القيمة الدقيقة لِ جا(٣٠°)، جتا(٣٠°)، ظا(٣٠°)، جا(٦٠°)، جتا(٦٠°)، جتا(٦٠°)

ي انسخ الجدول الآتي وأكمله، مستخدمًا إجاباتك في الجزئيات أعلاه:

الزاوية	جا(س)	جتا(س)	ظا(س)
٣٠°			
٦٠°			
٤٥°			

١١-٤ حل مسائل باستخدام حساب المثلّثات

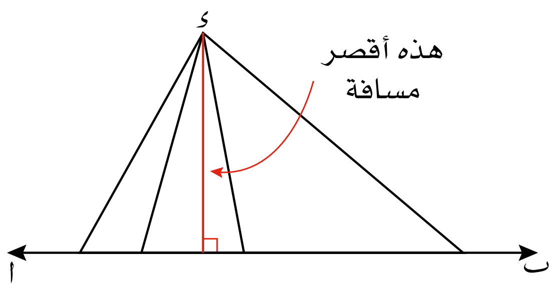
قد تحتاج إلى استخدام أكثر من نسبة مثلّثية واحدة عند حل مسائل تتضمّن مثلّثات قائمة الزاوية. ولكي تعرف النسب التي ستستخدمها، عليك اتباع الإرشادات الآتية:

- إذا كان السؤال لا يتضمّن مخطّطًا، فارسم الشكل بدقّة ووضوح.
- ارسم المثلّثات التي ستستخدمها، وسمّ الزوايا والأضلاع.
- حدّد المثلّثات قائمة الزاوية التي يمكن أن تفيدك في الحل.
- حدّد الأضلاع أو الزوايا التي تعرفها.
- حدّد الأضلاع التي ستستخدمها من بين الضلع المقابل والضلع المجاور والوتر، ثم حدّد النسبة المثلّثية المناسبة للاستخدام.
- اكتب النسبة، وأوجد طول الضلع أو قياس الزاوية المطلوبة.
- إذا احتجت إلى استخدام طول ضلع أو قياس زاوية حسبتها في حل جزئية سابقة في التمرين، فحاول أن تستخدم القيمة الدقيقة (غير التقريبية) المحفوظة في ذاكرة الآلة الحاسبة. سيساعدك ذلك على تجنُّب أخطاء التقريب لاحقًا.

حساب المسافات

إذا طُلب منك حساب المسافة بين نقطة ومستقيم، فأنت في حاجة إلى إيجاد أقصر مسافة بين النقطة والمستقيم.

أقصر مسافة هي طول الخط العمودي من النقطة إلى المستقيم.



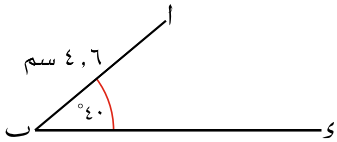
إنّ أيّ مستقيم آخر من النقطة إلى القطعة المستقيمة سوف يشكّل مثلّثًا قائم الزاوية، وتمثّل القطعة المستقيمة وترًا في المثلّث، ومعلوم أن أي وتر أطول من القطعة المستقيمة العمودية. لذلك، ستكون جميع المسافات من النقطة د إلى القطعة المستقيمة أكبر من ٥ وحدات.

تتوفّر طرائق عدّة لحساب المسافة بين نقطة والقطعة المستقيمة. تعتمد الطريقة التي تختارها على المعلومات المعطاة. فإذا طُلب منك مثلًا إيجاد المسافة بين النقطة أ والقطعة المستقيمة ب د بمعلومية

يمكنك أيضًا إيجاد المسافة بين النقطة والمستقيم بمعلومية معادلة المستقيم (ص = م س + جـ) وإحداثيات النقطة (س، ص)، وذلك باستخدام ما تعرفه عن الهندسة الإحداثية والمعادلات الآنيّة لتحسب المسافة.

- حدّد معادلة المستقيم العمودي على المستقيم المُعطى الذي يمر في النقطة (س، ص). (تذكّر: إذا كان مَيل أحد المستقيمات هو $\frac{أ}{ب}$ فإن مَيل المستقيم العمودي عليه هو $-\frac{ب}{أ}$)
- حلّ المعادلتَين آنيًّا لتجد نقطة التقاطع.
- احسب المسافة بين نقطة التقاطع والنقطة المُعطاة.

المعطيات الواردة على الشكل أدناه، فيمكنك أن ترسم العمود، وتستخدم النسب المثلّثية لتجد أطوال الأضلاع الأخرى في المثلّث.

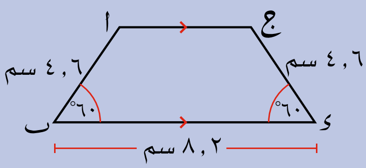


يبيّن المثال الآتي كيف تستخدم النسب المثلّثية لتجد المسافة بين النقطة ا والمستقيم ب ى، وكيف تستخدم ذلك في حل المسألة المُعطاة، ويبيّن لك كيف يُبنى حل المسائل المتعلّقة بالنسب المثلّثية.

مثـال ١٣

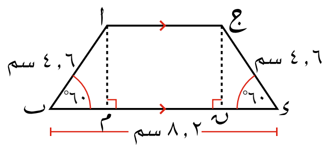
يبيّن الشكل المجاور شبه مُنحرف ا ب ى ع متطابق الضلعَين.

احسب مساحته.



الحـلّ:

أضيف العمودان إلى الشكل ليشكّلا مثلّثَين قائمَي الزاوية، ممّا يساعد على استخدام النسب المثلّثية.



في المثلّث ا م ب

$$\text{جتا}(٦٠°) = \frac{\text{طول الضلع المجاور للزاوية } (٦٠°)}{\text{الوتر}}$$

$$= \frac{\text{ب م}}{٤,٦}$$

$$\text{جا}(٦٠°) = \frac{\text{طول الضلع المقابل للزاوية } (٦٠°)}{\text{الوتر}}$$

$$= \frac{\text{ا م}}{٤,٦}$$

حيث أن $\overline{\text{ب م}}$ = ٤,٦ جتا(٦٠°)

و $\overline{\text{ا م}}$ = ٤,٦ جا(٦٠°)

$\overline{\text{ا م}}$ = ٣,٩٨٣٧١٦... سم، $\overline{\text{ب م}}$ = ٢,٣ سم.

∴ $\overline{\text{ا ع}}$ = ٣,٦ سم،

$\overline{\text{ا م}}$ = $\overline{\text{ع ن}}$ = ... ٣,٩٨٣٧١٦ سم.

مساحة شبه المُنحرف = (نصف مجموع القاعدتَين المتوازيتين) × الارتفاع.

$\overline{\text{ا ع}}$ = $\overline{\text{م ن}}$ ويمكنك أن تجد طول $\overline{\text{م ن}}$ إذا حسبت طول $\overline{\text{ب م}}$، $\overline{\text{ن ى}}$.

باستخدام التماثل،

$\overline{\text{ن ى}}$ = $\overline{\text{ب م}}$ = ٢,٣ سم.

$\overline{\text{م ن}}$ = ٨,٢ − (٢,٣ + ٢,٣) = ٣,٦ سم.

رابط

تُستخدم النسب المثلّثية في حساب أطوال الأضلاع وقياسات الزوايا عندما لا يمكن قياسها في الواقع، مثل الملاحة والدراسات المسحية والهندسة والإنشاءات وتحديد مواقع الأقمار الصناعية وأجهزة الاستقبال.

مُساعَدة

اكتب إجابتك مقرّبة إلى عدد مكوّن من ٣ أرقام معنوية إذا لم تحدّد درجة الدقّة.

مساحة شبه المُنحرف ا ب ج ء = $\left(\frac{\overline{\text{اج}} + \overline{\text{بء}}}{٢}\right) \times \overline{\text{ام}}$

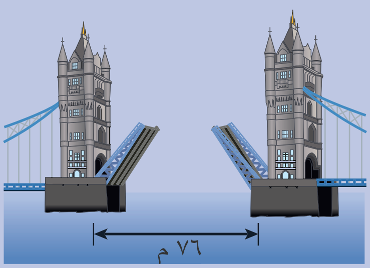
= $\left(\frac{٣,٦ + ٨,٢}{٢}\right) \times ٣,٩٨٣٧١٦...$

= ٢٣,٥٠٣٩٢٤٤... سم^{٢}

مساحة ا ب ء ج = ٢٣,٥ سم^{٢} مقرّبة إلى أقرب عدد مكوّن من ٣ أرقام معنوية.

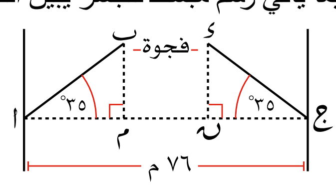
مثــال ١٤

المسافة بين برجَي جسر ٧٦ م.
إذا تم رفع ذراعَي الجسر بزاوية قياسها ٣٥°،
فكم يبلغ اتّساع الفجوة بين نهايتَي الذراعَين؟



الحــلّ:

فيما يأتي رسم مبسّط للجسر يبيّن النصفين حيث ارتفعا بزاوية قياسها ٣٥°



المثلّثان ا م ب، ج ن ء قائما الزاوية ومتطابقان:

ا م = ج ن عند إنزال ذراعي الجسر يتقاطعان عند المنتصف.

∴ ا ب = ج ء = $\frac{٧٦}{٢}$ = ٣٨ م

في المثلّث ا م ب،

جتا(٣٥°) = $\frac{\text{طول الضلع المجاور للزاوية (٣٥°)}}{\text{الوتر}}$ = $\frac{\text{ام}}{٣٨}$

ا م = ٣٨ × جتا(٣٥°) = ... ٣١,١٢٧٧ م

∴ م ن = ٧٦ − (... ٣١,١٢٧٧ + ... ٣١,١٢٧٧)

= ... ١٣,٧٤٤ م

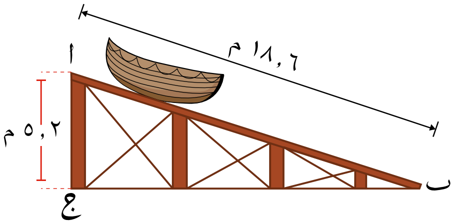
فيكون اتّساع الفجوة ب ء = ١٣,٧ م مقربًا إلى أقرب عدد مكوّن من ٣ أرقام معنوية.

اتساع الفجوة = ب ء = م ن، م ن = ا ج − (ا م + ج ن)

يساعدك رسم مخطّط توضيحي وتسميته على إجراء الحسابات التي تحتاج إليها لتحل المسألة.

تمارين ١١-٤

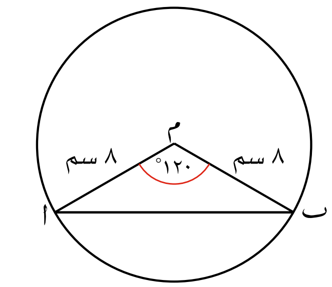
طبّق مهاراتك



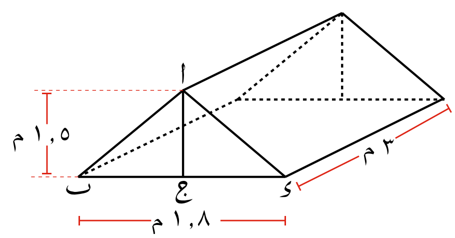
١) يمثّل الشكل المجاور المُنحدر أ ب لقارب نجاة. أ ع قطعة مستقيمة رأسية، ع ب قطعة مستقيمة أفقية.

أ احسب قياس (أ بَ ع) مقرّبًا الناتج إلى أقرب منزلة عشرية.

ب احسب طول ب ع مقرّبًا الناتج إلى أقرب عدد مكوّن من ٣ أرقام معنوية.



٢) أ ب وتر في دائرة مركزها م ونصف قطرها ٨ سم. قياس (أ مَ ب) = ١٢٠°. احسب طول الوتر أ ب.



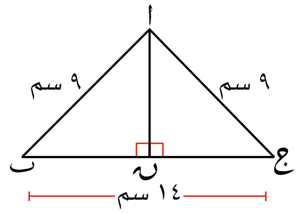
٣) يمثّل الشكل المجاور خيمة على شكل منشور قاعدته مثلّثة. تمثّل مقدّمة الخيمة أ ب ى مثلّثًا متطابق الضلعَين حيث أ ب = أ ى.
فإذا علمت أن عرض الخيمة ب ى يساوي ١,٨ م، وأن أ ع عمودي على ب ى وارتفاعه ١,٥ م. وأنّ طول الخيمة ٣ م، فاحسب:

أ قياس الزاوية (أ بَ ى).

ب طول أ ب.

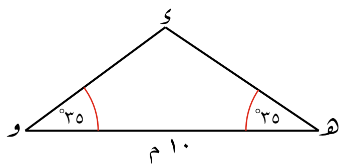
ج سعة الخيمة الداخلية (أي حجمها).

تذكّر أن حجم المنشور يساوي ناتج ضرب مساحة القاعدة في الارتفاع.



٤) احسب قياسات زوايا مثلّث متطابق الضلعَين أطوال أضلاعه ٩ سم، ٩ سم، ١٤ سم.

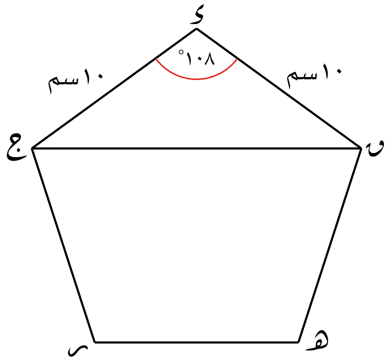
٥) المثلّث المتطابق الضلعَين ء هـ و،
قياس ($\hat{هـ}$) = قياس ($\hat{و}$) = ٣٥° وطول
الضلع هـ و = ١٠ م.



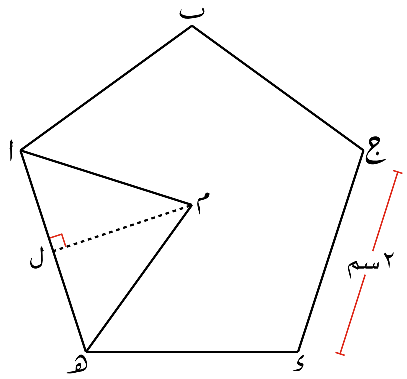
أ احسب طول العمود النازل من الرأس ء إلى القاعدة هـ و.

ب احسب طول الضلع ء هـ.

٦) الشكل المجاور خماسي منتظم طول ضلعه ١٠ سم. أوجد طول القطر ن ع مقرّبًا الناتج إلى أقرب عدد صحيح.



٧) الشكل المجاور خماسي منتظم طول ضلعه ٢ سم، ومركزه م



أ أوجد قياس (ا $\hat{م}$ هـ).

ب أوجد قياس (ا $\hat{م}$ ل).

ج استخدم النسب المثلّثية للمثلّث ا م ل لتجد طول م ل.

د أوجد مساحة المثلّث ا م ل.

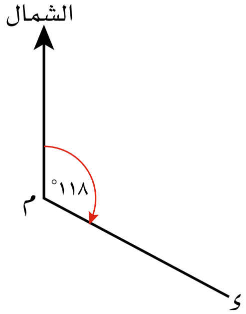
هـ احسب مساحة الخماسي

٨) استخدم طريقة مُشابهة للطريقة التي استُخدمت في التمرين ٧ لتجد مساحة ثُماني منتظم طول ضلعه ٤ سم.

٩) أوجد مساحة خُماسي منتظم طول ضلعه (٢أ) متر.

١١-٥ زاوية الاتّجاه من الشمال

عندما تنتقل من موقع إلى آخر، تحتاج إلى معرفة الاتّجاه. وتتمثّل إحدى طرائق وصف الاتّجاه في تحديد **زاوية الاتّجاه من الشمال**. وهذا وصف مستخدم عالميًّا.

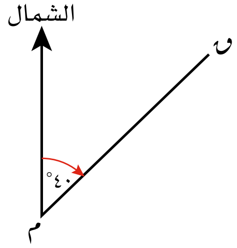


تم قياس الزاوية ١١٨° المبيّنة في الشكل المجاور بدوران مع اتجاه عقارب الساعة بدءًا من اتّجاه الشمال.

تسمّى مثل هذه الزاوية بزاوية الاتّجاه من الشمال.

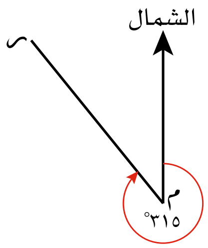
تقاس كل زوايا الاتّجاه من الشمال بدوران مع اتّجاه عقارب الساعة بدءًا من الشمال.

وبناء على ذلك، يكون قياس زاوية اتجاه ء من النقطة م هو ١١٨°



إذا كان قياس الزاوية أقلّ من ١٠٠°، فإنك تستخدم ثلاثة أرقام لأنّك لا تزال تستخدم زاوية الاتّجاه من الشمال.

تجد في الشكل المجاور زاوية اتّجاه ن من النقطة م هي ٠٤٠°



بما أنك تقيس الزاوية بدءًا من اتّجاه الشمال، فيحتمل أن تكون زاوية الاتّجاه منعكسة.

تجد في المخطّط المجاور زاوية اتّجاه س من النقطة م هي ٣١٥°

قد تحتاج أحيانًا إلى استخدام خصائص الزوايا التي تعلّمتها في فصول سابقة لتحل مسائل عن زاوية الاتّجاه من الشمال.

تأكّد دائمًا من أنك ترسم مخطّطًا واضحًا، وحدّد اتّجاه الشمال بكل وضوح.

سابقًا

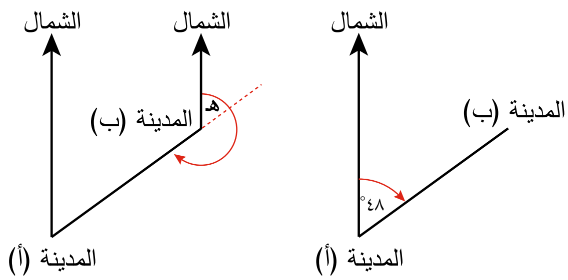
تذكر كيف تتعامل مع الزاويتين المتبادلتين والزاويتين المتناظرتين من الصف (٩)

هذا مثال عن 'عكس' زاوية الاتّجاه. إذا عرفت زاوية اتجاه س من النقطة ص، فإنك لكي تجد زاوية الاتّجاه من الشمال بالعودة إلى النقطة ص من النقطة س، يجب أن تضيف ١٨٠° لقياس زاوية الاتّجاه المطلوبة (أو طرح ١٨٠° إذا أعطت الإضافة زاوية قياسها أكبر من ٣٦٠°).

مثال ١٥

يبيّن قياس زاوية اتّجاه المدينة (ب) بالنسبة إلى المدينة (أ) ٠٤٨°. ما قياس زاوية اتّجاه المدينة (أ) بالنسبة إلى المدينة (ب)؟

الحلّ:



يُظهر المخطّط الثاني مستقيمَي اتّجاه الشمال المتوازيين.

بما أن قياس (هـ) = ٤٨°

زاوية اتّجاه المدينة (أ) بالنسبة إلى المدينة (ب)

= ٤٨° + ١٨٠° = ٢٢٨°

باستخدام خصائص الزوايا المتناظرة. لاحظ أن الفرق بين قياسَي زاويتَي الاتّجاه من الشمال (٠٤٨°، ٢٢٨°) هو ١٨٠°

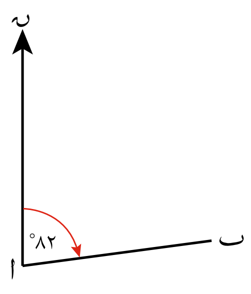
تمارين ١١-٥

١) أوجد قياس زاوية الاتجاه من الشمال، المؤلفة من ثلاثة أرقام في كل من الحالات الآتية:

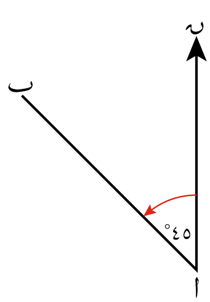
أ الغرب   ب جنوب شرق   ج شمال شرق

٢) اكتب قياس زاوية الاتجاه من الشمال، المؤلفة من ثلاثة أرقام للنقطة ا من النقطة ب في كلّ حالة من الحالتين الآتيتَين:

أ



ب



٣) استخدم منقلة وخريطة سلطنة عُمان لتحسب زاوية الاتجاه من الشمال، المؤلفة من ثلاثة أرقام:

أ نزوى من عبري

ب مسقط من هيماء

ج مسقط من صحار

د صلالة من هيماء

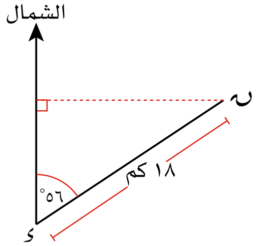
هـ البريمي من صور

٤) تبعد المدينة (أ) ١٤٠ كم إلى الغرب، و٤٥ كم شمال المدينة (ب). ارسم مخطّطًا توضيحيًّا، واستخدم النسب المثلّثية ونظرية فيثاغورث لتحسب:

أ قياس زاوية اتّجاه المدينة (ب) من المدينة (أ).

ب قياس زاوية اتّجاه المدينة (أ) من المدينة (ب).

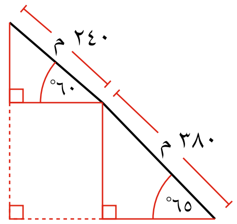
ج المسافة المباشرة من المدينة (ب) إلى المدينة (أ).



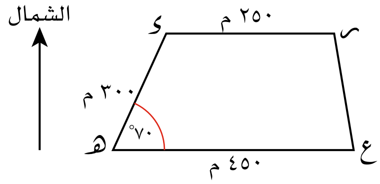
٥) تبعد القرية (ں) عن القرية (ی) مقدار ١٨ كم بزاوية اتجاه من الشمال قياسها ٠٥٦°.

أ احسب بُعد النقطة ں إلى الشمال من النقطة ی.

ب احسب بُعد النقطة ں إلى الشرق من النقطة ی.



٦) مشى متسلّق جبال مسافة ٣٨٠ م على طول مُنحدر يميل عن الأفق بزاوية قياسها ٦٥°، ثم مشى ٢٤٠ م أخرى على مُنحدر يميل عن الأفق بزاوية قياسها ٦٠°. احسب مجموع المسافة الرأسية للمسار الذي قطعه المتسلّق.



٧) يمثّل المخطّط المجاور الحقل هـ ع س ی على مستوى سطح الأرض. ويمثّل الضلعان هـ ع، س ی اتّجاه الشرق.

أ اكتب زاوية اتّجاه ی من النقطة هـ.

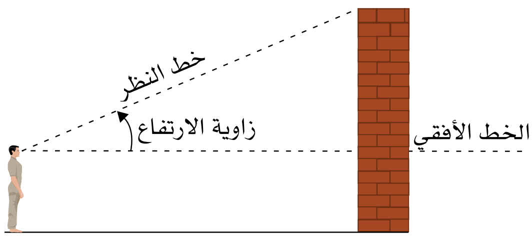
ب احسب المسافة العمودية بين ی س، هـ ع .

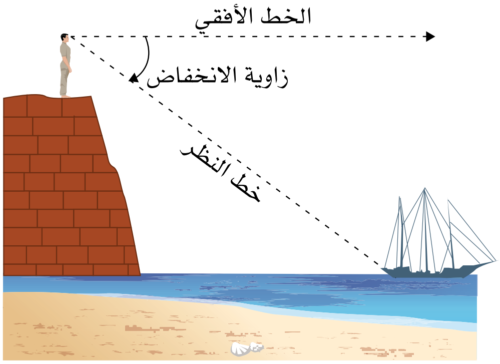
ج احسب بالمتر المربّع مساحة الحقل هـ ع س ی .

١١-٦ زاوية الارتفاع وزاوية الانخفاض

تُقاس زوايا الارتفاع والانخفاض دائمًا مع الأفق.

غالبًا ما تتضمّن مسائل النسب المثلّثية أجسامًا مرتفعة أو أشياء منخفضة، مثل قمّة البناء والطائرة والسفينة. في هذه الحالات، تقع زاوية الارتفاع أو زاوية الانخفاض بين الخط الأفقي وخط النظر إلى الجسم.



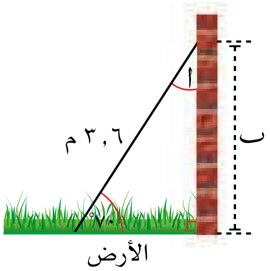


- يتم رسم الخط الأفقي بدءًا من مستوى نظر الشخص.
- تسمى الزاوية الواقعة تحت الخط الأفقي بزاوية الانخفاض.
- تسمى الزاوية الواقعة فوق الخط الأفقي بزاوية الارتفاع.

تمارين ١١-٦

١) يبلغ طول طريق منحدر ٢٨ م، ويبلغ قياس زاوية ارتفاعه ١٥°. ما ارتفاع قمّة الطريق المنحدر عن سطح الارض؟

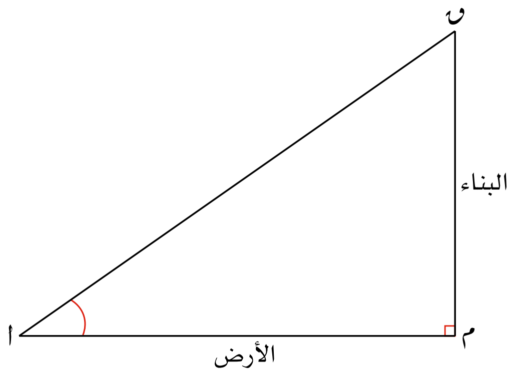
٢) يبيّن الشكل المجاور سلّمًا طوله ٣,٦ م. يرتكز أحد طرفَيه على أرض أفقية، ويرتكز طرفه الآخر على جدار رأسي بزاوية ارتفاع قياسها ٧٠°



أ ما قياس الزاوية التي يشكّلها السلّم مع الجدار (أ)؟

ب احسب بُعد نقطة ارتكاز قمة السلّم على الجدار (ب) عن قاعدة السلم؟

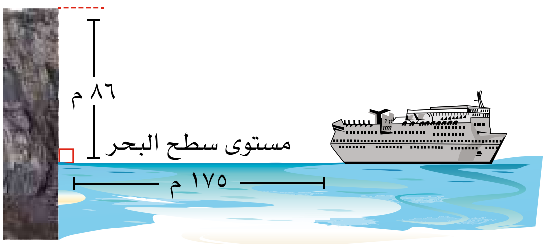
٣) يمثّل الشكل المجاور جدارًا رأسيًّا لبناء ں م مبني على أرض أفقية. يبلغ ارتفاع البناء ٢٥ م، وتبلغ المسافة بين **أ** ، **م** ٤٠ م.



أ) أوجد قياس زاوية ارتفاع قمة البناء (ں) من النقطة **أ**.

ب) أوجد قياس زاوية انخفاض النقطة أ من قمة البناء (ں).

٤) ترتفع قمّة صخرة ٨٦ م عن سطح البحر. وتبعد سفينة ١٧٥ م عن قاعدة الصخرة. احسب قياس زاوية ارتفاع قمّة الصخرة من السفينة.



مُلخّص

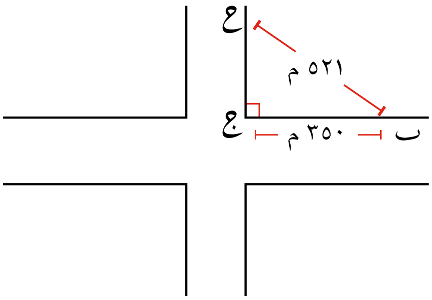
ما يجب أن تعرفه:

- الوتر هو الضلع الأطول في المثلّث قائم الزاوية.
- مربّع طول الوتر يساوي مجموع مربّعي طولَي الضلعَين الآخرين في المثلّث قائم الزاوية.
- تعتمد النسبة بين طولَي أي ضلعَين في المثلّث قائم الزاوية على قياس زوايا المثلّث:
  - جا(أ) = $\frac{\text{طول الضلع المقابل للزاوية (أ)}}{\text{الوتر}}$
  - جتا(أ) = $\frac{\text{طول الضلع المجاور للزاوية (أ)}}{\text{الوتر}}$
  - ظا(أ) = $\frac{\text{طول الضلع المقابل للزاوية (أ)}}{\text{طول الضلع المجاور للزاوية (أ)}}$
- يمكنك استخدام النسب المثلّثية لتحسب قياس الزاوية المجهولة بمعلومية طولَي ضلعَين.
- يمكنك استخدام النسب المثلّثية لتحسب طول الضلع المجهول بمعلومية قياس زاوية وطول ضلع.
- تقاس زاوية الاتّجاه بدءًا من الشمال بدوران في اتّجاه عقارب الساعة.
- تقاس زاوية الارتفاع إلى الأعلى بين الخط الأفقي وخط النظر.
- تقاس زاوية الانخفاض إلى الأسفل بين الخط الأفقي وخط النظر.

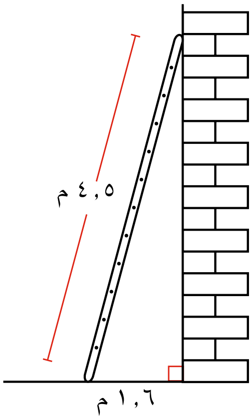
يجب أن تكون قادرًا على:

- استخدام نظرية فيثاغورث لتجد طول الضلع المجهول في المثلّث قائم الزاوية.
- استخدام نظرية فيثاغورث لتحل مسائل من الحياة اليومية.
- تحديد الأضلاع المقابلة والمجاورة والوتر في المثلّث قائم الزاوية.
- حساب الجيب وجيب التمام وظل الزاوية بمعلومية أطوال الأضلاع في المثلّث قائم الزاوية.
- استخدام النسب المثلّثية الجيب وجيب التمام وظل الزاوية لتجد قياس الزاوية المجهولة والضلع المجهول.
- حل مسائل مركّبة باستخلاص مثلّث قائم الزاوية وضم النسب المثلّثية الجيب وجيب التمام وظل الزاوية.
- استخدام النسب المثلّثية لتحسب زاوية الاتّجاه.
- حساب قياس زاوية الارتفاع.
- حساب قياس زاوية الانخفاض.

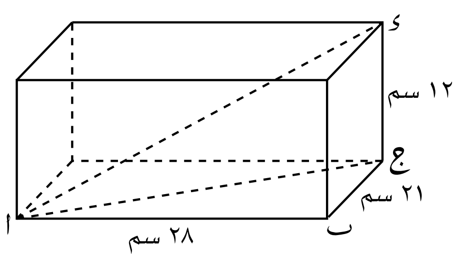
تمارين نهاية الوحدة



١) سار محمد بطريق مختصرة من منزله (ع) إلى موقف الحافلة (ب) على المسار ع ب.
ما المسافة الإضافية التي على محمد أن يقطعها ليصل إلى موقف الحافلة (ب) لو سار من منزله (ع) إلى الركن (ج) أوّلًا، ثم سار من الركن (ج) إلى موقف الحافلة (ب)؟
اكتب إجابتك بالأمتار.



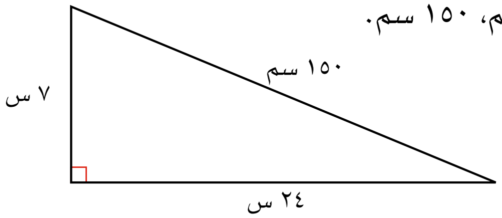
٢) يرتكز سلم على أرض أفقية، وترتكز قمّته على حائط رأسي.
يبلغ طول السلّم ٤,٥ م، وتبعد قاعدته مسافة ١,٦ م عن الحائط.
احسب ارتفاع قمة السلم عن سطح الأرض.
اكتب إجابتك مقرّبة إلى أقرب عدد مكوّن من ٣ أرقام معنوية.



٣) صندوق طول قاعدته ٢٨ سم، وعرضها ٢١ سم، وارتفاعه ١٢ سم.
احسب طول أطول عصا رفيعة يمكن وضعها في:

أ قاعدة الصندوق (أي المسافة أ ج).

ب الصندوق (أي المسافة أ د).

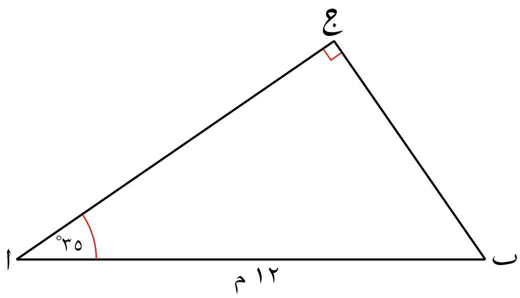


٤) تبلغ أطوال أضلاع المثلّث قائم الزاوية (٧س) سم، (٢٤س) سم، ١٥٠ سم.

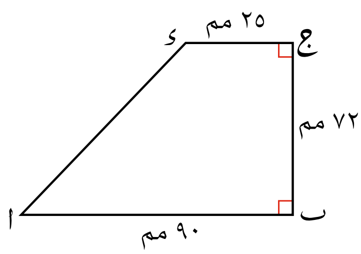
أ بيّن أن $س^٢ = ٣٦$

ب احسب محيط المثلّث.

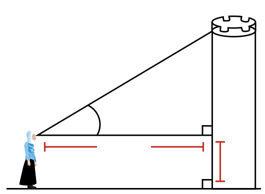
٥) في الشكل المجاور، طول ا ب = ١٢ م
وقياس (ع أ̂ ب) = ٣٥°
وقياس (ا ع̂ ب) = ٩٠°.
احسب طول كل من الضلعَين الآخرَين: ا ع، ب ع.



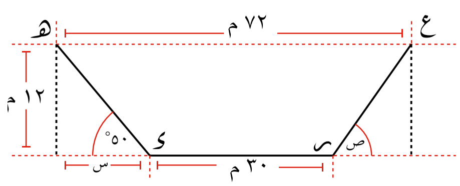
٦) يبيّن الشكل المجاور شبه منحرف ا ب ع ى، حيث إنّ
قياس (ا ب̂ ع) = قياس (ب ع̂ ى) = ٩٠°. فإذا علمت أن
طول ا ب = ٩٠ مم، وطول ب ع = ٧٢ مم، وطول ع ى = ٢٥ مم،
فاحسب قياس (ى أ̂ ب).



٧) تقف مريم على بُعد ١٢ م من برج. تبلغ المسافة بين عيني
مريم والأرض ١,٥ م. تستطيع مريم رؤية قمة المدخنة عندما
ترفع عينيها إلى الأعلى بزاوية قياسها ٣٥° عن الخط الأفقي.
احسب ارتفاع المدخنة.



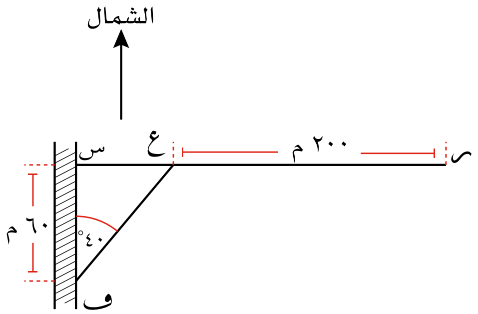
٨) في الشكل المجاور ﻫ ع ں ى ،
ﻫ ع، ں ى مستقيمان متوازيان. ويشكّل الضلع ﻫ ى
زاوية قياسها ٥٠° مع الخط الأفقي.



أ) احسب المسافة الأفقية بين النقطة ﻫ والنقطة ى (المشار إليها بِـ س في الشكل).

ب) احسب قياس الزاوية التي يشكّلها ں ع مع الخط الأفقي (المشار إليها بِـ ص في الشكل).

٩ يقف حارس عند النقطة ڡ على طريق يمتد من الشمال إلى الجنوب. وُضع إعلان عند النقطة س التي تبعد مسافة ٦٠ م إلى الشمال من موقع الحارس. شاهد الحارس غزالًا عند النقطة ع بزاوية اتّجاه قياسها ٠٤٠° من موقعه شرق الإعلان.



أ (١) بيّن بالحسابات أن المسافة التي تمثّل بُعد الغزال عن الطريق ع س تساوي ٥٠,٣ م، مقرّبة إلى أقرب عدد مكوّن من ٣ أرقام معنوية.

(٢) احسب المسافة ڡ ع بين الغزال والحارس.

ب ظهر غزال آخر عند النقطة ر، التي تبعد مسافة ٢٠٠ م إلى الشرق من الغزال الأوّل (عند النقطة ع).

(١) احسب طول المسافة س ر.

(٢) احسب المسافة ڡ ر التي تمثّل بُعد الغزال الثاني عن الحارس.

(٣) احسب قياس زاوية اتّجاه الغزال الثاني من الحارس، مقرّبة إلى أقرب درجة.

الوحدة الثانية عشرة: الاحتمالات ومخطّط الشجرة ومخطّط فن

المُفردات

- النواتج الممكنة
Possible outcomes
- فضاء العَينة
Sample space
- الاحتمال الشرطي
Conditional probability
- الأحداث غير المستقلّة
Dependent events
- الأحداث المُركّبة
Combined events

سوف تتعلّم في هذه الوحدة كيف:

- تستخدم مخطّط الشجرة ومخطّط فن لتبيّن جميع النواتج الممكنة لأحداث مُركّبة.
- تحسب احتمالات أحداث مُركّبة باستخدام مخطّط الشجرة.
- تُجري حسابات تتضمّن الاحتمال الشرطي.

عند رمي قطعة نقد معدنية منتظمة، فإن احتمال ظهور الصورة هو ٠,٥، لكن ما احتمال ظهور الصورة عند رمي قطعتَي نقود معدنية، أو ٣ قطع، أو ١٥ قطعة في الوقت نفسه؟

استخدمت في الوحدة العاشرة مخطّطات الفضاء الاحتمالي لتمثّل الفضاء العَيني، وجميع النواتج الممكنة للحدث، وسوف تمثّل في المخطّطات الآتية النواتج بنقاط على شبكة. عندما تُجمّع الأحداث، يمكنك أن تفكّر في حدوثها خلال مراحل مختلفة. فمثلًا، عندما ترمي قطعتَي نقود معدنية، فإنك تبحث عن النواتج الممكنة عند رمي القطعة الأولى، ثم تبحث عن نواتج رمي القطعة الأخرى. ونجد في تجارب مشابهة أن استخدام مخطّط الشجرة يكون أحيانًا مُناسبًا لتدوين النواتج الممكنة لكل مرحلة بطريقة واضحة ومنظّمة. سوف تتعلّم، في هذه الوحدة، كيف تستخدم مخطّط الشجرة لتمثّل النواتج الممكنة لأحداث مُركّبة. وسوف تتعلّم أيضًا كيف تستخدم مخطّط الشجرة لتحسب احتمال ظهور نواتج مختلفة.

١٢-١ استخدام مخطط الشجرة لتمثيل النواتج الممكنة للحدث

سابقًا

في الحدثين **المستقلّين**،

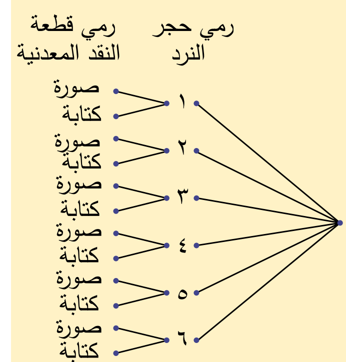
ل(أ و ب) = ل(أ) × ل(ب)

في **الحدثين المتنافيَين**،

ل(أ أو ب) = ل(أ) + ل(ب).

عد إلى الوحدة (١٠) عند الضرورة لتتذكّر ذلك.

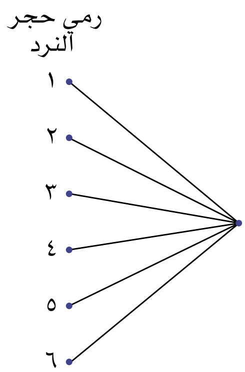
النواتج الممكنة **للأحداث المُركّبة** ممثّلة برمي حجر نرد منتظم ذي ستة أوجه وقطعة نقد معدنية في الوقت نفسه هي:



مخطّط الشجرة هو مخطّط يتضمن فروعًا تمثّل جميع **النواتج الممكنة (فضاء العَينة)** لحدث ما أو أكثر.

لترسم مخطّط الشجرة:

- عين نقطة لتمثِّل الحدث الأول.
- ارسم فروعًا من النقطة لتبيّن جميع النواتج الممكنة للحدث الأول فقط.
- اكتب النواتج عند نهاية كل فرع.
- ارسم نقطة ثانية عند نهاية كل فرع لتمثّل الحدث التالي.
- ارسم فروعًا عند كل نقطة لتبيّن جميع النواتج الممكنة للحدث الجديد.
- اكتب النواتج عند نهاية الفروع.

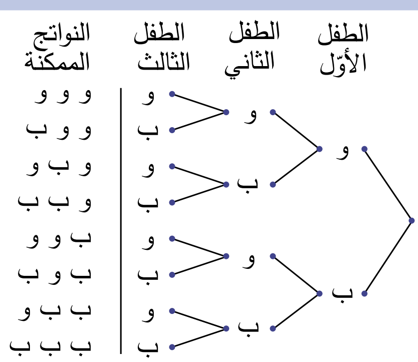


مثــال ١

ارسم مخطّط الشجرة لتبيّن النواتج الممكنة لولادة أول ثلاثة أطفال في عائلة ما. استخدم (و) لتدل على ولد، (ب) لتدل على بنت.

ملاحظة: يفترض في هذا المثال أنّ احتمال أن يكون الطفل ولدًا هو نفس احتمال أن يكون بنتًا.

الحــلّ:



ارسم نقطة للطفل الأول.

ارسم فرعَين وسمِّ أحدهما (و) والآخر (ب).

كرّر ذلك عند نهاية كل فرع للطفلَين الثاني والثالث.

تمارين ١٢-١

١) وضعت سميرة في حقيبتها ثلاث بطاقات ملوّنة: حمراء، و زرقاء، و خضراء.

أ ارسم مخطّط الشجرة لتعرض جميع النواتج الممكنة لتجربة سحب بطاقة واحدة من الحقيبة عشوائيًّا، ثم إعادتها إلى الحقيبة، ومن ثم سحب بطاقة أخرى من الحقيبة عشوائيًّا.

ب ما عدد النواتج الممكنة في التجربة؟

ج ما عدد النواتج الممكنة التي يكون فيها للبطاقتين اللون نفسه؟

د ما عدد النواتج التي تتضمّن بطاقة واحدة زرقاء اللون على الأقلّ؟

هـ ما عدد النواتج التي لا تتضمّن بطاقة زرقاء؟

٢) وُضعت أربع بطاقات كُتبت عليها الأحرف: أ، ب، ج، د في وعاء، سُحبت بطاقة واحدة، وتمّ تسجيل الحرف، ثم أُعيدت البطاقة إلى الوعاء. وسُحبت بطاقة أخرى وتم تسجيل الحرف أيضًا للحصول على نواتج من حرفَين.

أ ارسم مخطّط الشجرة الذي يعرض الفضاء العَيني لهذه التجربة.

ب كم ناتجًا يوجد في الفضاء العَيني؟

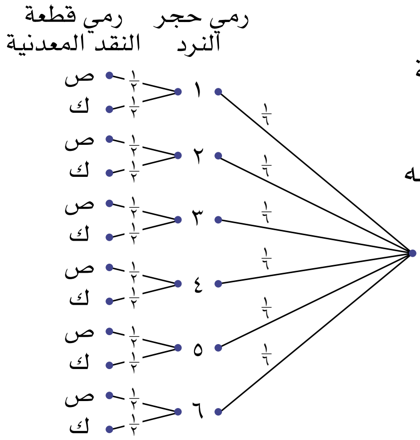
ج ما احتمال الحصول على الحدث (ب، د)؟

١٢-٢ حساب الاحتمال في مخطّط الشجرة

رابط

يدرس أحد فروع الفيزياء الجُزيئات الصغيرة ويُسمى ميكانيكا الكم، حيث يظهر احتمال وجود جُزيئات في أماكن محدّدة وفي أوقات محدّدة.

يبيّن الرسم المقابل مخطّط الشجرة الذي يعرض النواتج الممكنة لتجربة رمي حجر نرد منتظم له ستة أوجه وقطعة نقد معدنية معًا، حيث ترمز (ص) إلى صورة، وترمز (ك) إلى كتابة. هذا المخطّط هو نفسه الذي ورد في الدرس السابق. وتمّت كتابة احتمال كل ناتج لكل فرع عليه.

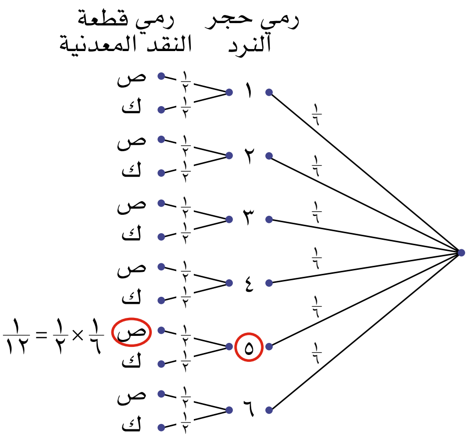


احتمال الأحداث المُركّبة في مخطّط الشجرة

لتجد احتمال أحد الأحداث المُفضّلة:

- اضرب احتمالات فرعَين متتاليَين. مثلًا، احتمال ظهور الرقم ٥ و (ص) هو $\frac{١}{٦} \times \frac{١}{٢} = \frac{١}{١٢}$

وهذا مبيّن في المخطّط الآتي:



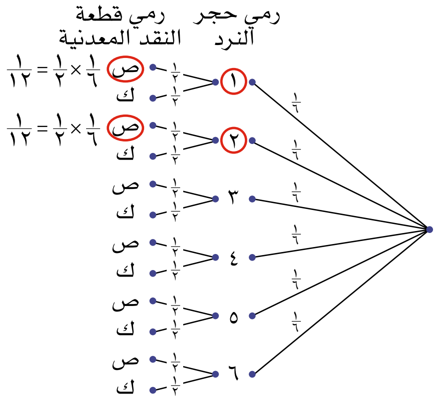
لتجد احتمال وجود أكثر من **حدث مفضّل**، أو عندما تكون الأحداث منفصلة:

- اضرب احتمالات الفروع المُتتالية.
- اجمع احتمالات الأحداث المنفصلة، مثل ظهور الرقم ١ أو ٢ على حجر النرد، وظهور الصورة على القطعة النقدية هو $(\frac{١}{٦} \times \frac{١}{٢}) + (\frac{١}{٦} \times \frac{١}{٢}) = \frac{١}{١٢} + \frac{١}{١٢} = \frac{٢}{١٢} = \frac{١}{٦}$

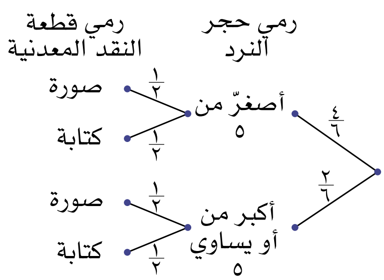
سابقًا

تعلّمت في الوحدة (١٠) أن الحدثَين المنفصلَين لا يقعان معًا.

وهذا مُبيّن على المخطّط الآتي:



لا نحتاج إلى ذكر كل ناتج على حدة؛ فإذا رغبت مثلًا في إيجاد احتمال الحصول على عدد أصغر من ٥ وصورة في التجربة السابقة، يمكنك أن ترسم مخطّط الشجرة كالآتي:



ل (عدد أصغر من ٥ وصورة) = $\frac{٤}{٦} \times \frac{١}{٢} = \frac{١}{٣}$

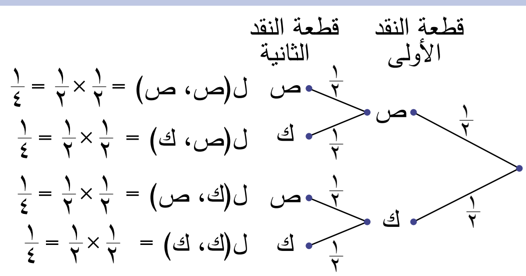
تظهر على حجر النرد أربعة أعداد أصغر من ٥، ولما كانت فرص ظهور الأعداد كلّها متساوية، فإن احتمال ظهور عدد أصغر من ٥ هو $\frac{٤}{٦}$

مثـــال ٢

رُميت قطعتا نقد معدنية معًا. ارسم مخطّط الشجرة لتجد احتمال الحصول على:

أ الكتابة مرّتَين. ب صورة واحدة وكتابة واحدة.

الحــلّ:



أ ل(ك ، ك) = ل(ك في قطعة النقد الأولى) × ل(ك في قطعة النقد الثانية) = $\frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢} = \frac{١}{٤}$	اقرأ ذلك من مخطّط الشجرة.
ب ل(ص ك أو ك ص) = ل(ص ، ك) + ل (ك ، ص) = $\frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢} + \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢} = \frac{١}{٢}$	’صورة واحدة وكتابة واحدة، تعني أن نعتمد صورة تتبعها كتابة أو كتابة تتبعها صورة.

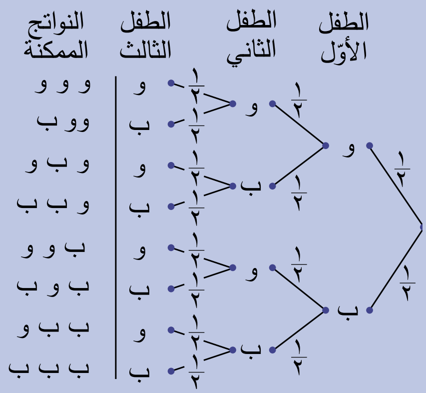
مثــال ٣

يبيّن مخطّط الشجرة الأحداث الممكنة للأولاد والبنات في عائلة لديها ثلاثة أطفال.
أوجد احتمال أن يكون لدى العائلة:

أ بنت واحدة على الأقلّ.

ب بنتان.

ج الطفل الأكبر والطفل الأصغر من نفس الجنس.



الحــلّ:

أ ل(بنت واحدة على الأقلّ) $= ٧\left(\frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢}\right)$ $= ٧ \times \frac{١}{٨}$ $= \frac{٧}{٨}$	توجد بنت واحدة على الأقلّ في كل النواتج ما عدا الناتج (و و و). عدد النواتج ٧، واحتمال كلّ ناتج $\frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢}$، لذا يمكنك أن تضربه في ٧
ب ل(بنتان) $= \frac{٣}{٨}$	توجد ثلاثة نواتج من أصل ثمانية نواتج تتضمّن بنتين.
ج ل(الطفل الأكبر والطفل الأصغر من نفس الجنس) $= \frac{٤}{٨} = \frac{١}{٢}$	ب ب ب، ب و ب، و ب و، و و و جميعها تتضمّن الجنس نفسه للطفل الأكبر والطفل الأصغر. احتمال كل حدث يساوي $\frac{١}{٨}$، لذا يمكنك جمع احتمالات الأحداث الممكنة للحصول على $\frac{٤}{٨}$

تمارين ١٢-٢

١) رُميت قطعة نقد معدنية منتظمة مرّتَين.

أ ارسم مخطّط الشجرة لتعرض كل النواتج الممكنة.

ب أوجد احتمال أن يكون الوجهان الظاهران متشابهين.

٢) تحتوي حقيبة على ثماني كرات بلون أزرق، وكرتَين بلون أحمر. تم سحب كرتَين عشوائيًّا. أُعيدت الكرة الأولى قبل سحب الكرة الثانية.

أ ارسم مخطّط الشجرة لتعرض كل النواتج الممكنة.

ب ما احتمال الحصول على:

(١) كرتَين بلون أحمر.

(٢) كرة واحدة حمراء، وكرة واحدة زرقاء.

(٣) كرتَين بلون أزرق.

٣) تحتوي حقيبة على ١٢ خرزة: ٥ خرزات منها حمراء اللون، و٧ خرزات منها بيضاء اللون. سُحبت خرزتان عشوائيًّا من الحقيبة. أُعيدت الخرزة الأولى قبل أن تُسحب الخرزة الأخرى.

أ مثّل كل النواتج الممكنة على مخطّط الشجرة.

ب أوجد احتمال أن تكون:

(١) الخرزتان حمراء اللون.

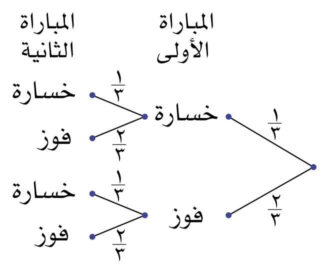
(٢) الخرزتان بيضاء اللون.

رابط

للاحتمال تأثير كبير في مجال الصحّة والأدوية. يجب أن يكون احتمال دقّة اختبارات الأمراض المختلفة مُرتفعًا جدًّا، ولكنّه نادرًا ما يصل إلى ١٠٠٪، علمًا أنّ لنتائج الاختبارات غير الدقيقة تأثيرات سلبية وخطيرة.

٤) اعتبر مدرب فريق كرة السلّة في المدرسة أن أداء الفريق جيد جدًا، وقدّر أن احتمال فوزه في المباراة القادمة $\frac{٢}{٣}$، واحتمال خسارته $\frac{١}{٣}$

يعرض مخطّط الشجرة الآتي ما يمكن أن يحدث خلال المباراتين القادمتين:



أ ما عدد النواتج الممكنة؟

ب ما احتمال أن يفوز الفريق في إحدى المباراتين؟

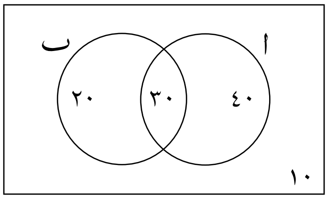
ج ما احتمال أن يفوز الفريق بالمباراتين؟

د اعتمادًا على الاحتمالات السابقة، ما النواتج الأكثر ترجيحًا؟

١٢-٣ حساب الاحتمال من مخطّط ڤن

استخدمت مخطّط ڤن لتبيّن العلاقة بين المجموعات في الوحدة التاسعة في الصف التاسع. والآن، ستستخدم مخطّط ڤن لتحل مسائل على الاحتمال.

يبيّن مخطّط ڤن الآتي نتائج دراسة مسحية لمشاهدة البرامج التلفزيونية سُئل فيها الأشخاص عما إذا كانوا يشاهدون البرنامج (أ)، أو البرنامج (ب). ادرس المخطّط، واقرأ المعلومات لتعرف كيف تحدّد الاحتمالات من مخطّط ڤن:



ش هي المجموعة الشاملة. وتسمّى في الاحتمال الفضاء العَيني، أو مجموعة النواتج الممكنة. في هذا المثال، الفضاء العَيني هو ٤٠ + ٣٠ + ٢٠ + ١٠ = ١٠٠ شخص. ٤٠ شخصًا منهم يشاهدون البرنامج (أ) ولا يشاهدون البرنامج (ب)، ٢٠ شخصًا منهم يشاهدون البرنامج (ب) ولا يشاهدون البرنامج (أ)، ٣٠ شخصًا منهم يشاهدون البرنامجين، ١٠ أشخاص منهم لا يشاهدون أيًّا من البرنامجَين.

ع(أ) تعني عدد عناصر المجموعة (أ).
ل(أ) تعني احتمال أن يكون العنصر في المجموعة (أ).
يمكنك أن تكتب عدد عناصر المجموعة (أ) في صورة:

ع(أ) = ٤٠ + ٣٠ = ٧٠

(تذكّر أن العناصر التي تقع في التقاطع تتضمّنها المجموعة (أ)).
كما يمكنك أن تكتب احتمال أن يكون الشخص من متابعي البرنامج (أ) في صورة:

ل(أ) = $\frac{٧٠}{١٠٠}$ = $\frac{٧}{١٠}$ أو ٠,٧

أ ∩ ب هو تقاطع المجموعتَين (أ)، (ب)، أو العناصر المُشتركة بين المجموعتَين (أ)، (ب)، ويمكن كتابة احتمال حدوث هذين الحدثين في صورة ل(أ و ب) وهي نفس الصورة ل(أ ∩ ب)؛ أي احتمال أن يكون عنصر ما في المجموعة (أ) وفي المجموعة (ب). الحرف «و» يعني احتمال وقوع العنصر في تقاطع المجموعتَين.

ع(أ ∩ ب) = ٣٠ ، لذا ل(أ ∩ ب) = $\frac{٣٠}{١٠٠}$ = $\frac{٣}{١٠}$ = ٠,٣

أ ∪ ب هو اتّحاد المجموعتَين (أ)، (ب)، أو كل العناصر الموجودة في كلتا المجموعتين، من دون تكرار. يمكن كتابة احتمال حدوث الحدث أ أو الحدث ب في صورة ل(أ أو ب)، وهي نفس الصورة ل(أ ∪ ب)؛ أي احتمال أن يقع العنصر في المجموعة (أ) أو في المجموعة (ب). الحرف (أو) يعني احتمال وقوع العنصر في اتّحاد المجموعتَين.

ع(أ ∪ ب) = ٤٠ + ٣٠ + ٢٠ = ٩٠ ، لذا، ل(أ ∪ ب) = $\frac{٩٠}{١٠٠}$ = $\frac{٩}{١٠}$ = ٠,٩

عندما يتضمّن التمرين كلمات مثل: (لا يوجد) أو (ليس) أو (لا هذا ولا ذاك)، فهي إشارة إلى أنك تبحث عن المجموعة المُتمّمة. فمثلًا، 'ما احتمال ألّا يشاهد الشخص أيًّا من البرنامجَين؟' في مخطّط ڤن كل العناصر التي تقع خارج المجموعة أ ∪ ب، هي ١ − ل(أ ∪ ب).

١ − ل(أ ∪ ب) هي ل(أ ∪ ب)'، وتُقرأ متمّمة (أ ∪ ب).

مثـــال ٤

في دراسة مسحية، سُئل ٢٥ شخصًا، عمّا إذا كانوا يفضّلون الفواكه أو الخضروات. أجاب ١٥ شخصًا منهم بأنهم يفضّلون الخضروات، و١٨ شخصًا أجابوا بأنهم يفضّلون الفواكه.
افترض أن كلّ شخص سُئل في الدراسة: هل يفضّل الفواكه أو الخضروات أو الصنفين معًا؟
ارسم مخطّط ڤن واستخدمه لتجد احتمال أن شخصًا تمّ اختياره عشوائيًّا من هذه المجموعة يفضّل الفواكه والخضروات معًا.

الحــلّ:

ابدأ بتعريف المجموعات، واكتب المعلومات بلغة المجموعات.
استخدم الحروف لتجعل العملية أسرع وتُسهّل العودة إلى المجموعات.

ش = {عدد أشخاص الدراسة المسحية}، ع(ش) = ٢٥

ف = {الأشخاص الذين يفضّلون الفواكه}، ع(ف) = ١٨

غ = {الأشخاص الذين يفضّلون الخضروات}،

ع(غ) = ١٥

ع(ف) + ع(غ) = ١٨ + ١٥ = ٣٣

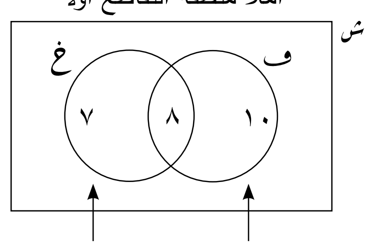
لكن عدد الأشخاص الكلّي ٢٥ فقط.

٣٣ − ٢٥ = ٨، لذا أجاب ٨ أشخاص أنّهم يفضّلون كلًّا من الفواكه والخضروات.

ع(ف ∩ غ) = ٨

بعد تعريف المجموعات، يمكنك أن ترسم مخطّط ڤن.
أنت لا تعرف أسماء الأشخاص المستهدفين في الدراسة، لذا عليك التعامل مع أعداد الأشخاص في كلّ مجموعة.

املأ منطقة التقاطع أوّلًا



ع(ف) = ١٠ + ٨ = ١٨   ع(غ) = ٨ + ٧ = ١٥

عندما تنتهي من رسم المخطّط، ابدأ بحساب الاحتمال.

ل(الأشخاص الذين يفضّلون الصنفين معًا)

$$= \frac{\text{عدد الأشخاص الذين يفضّلون الصنفين معًا}}{\text{عدد الأشخاص المُستهدفين في الدراسة}}$$

$$= \frac{٨}{٢٥} = ٠{,}٣٢$$

باستخدام المجموعات:

$$\text{ل(ف} \cap \text{غ)} = \frac{\text{ع(ف} \cap \text{غ)}}{\text{ع(ش)}} = \frac{٨}{٢٥} = ٠{,}٣٢$$

سابقًا

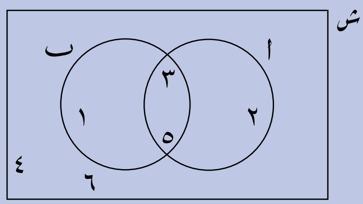
تعلمت في الصف (٩) أن الأعداد في مخطّط ڤن يمكن أن تمثّل العناصر في المجموعة، أو عدد العناصر فيها.

مثــال ٥

يعرض مخطّط ڤن الآتي النواتج الممكنة عند رمي حجر نرد منتظم ذي ستة أوجه.

المجموعة ا = {الأعداد الأوّلية}، المجموعة ب = {الأعداد الفردية}.

استخدم المخطّط لتجد احتمال أن يكون العدد أوليًّا أو فرديًّا.



الحــلّ:

الأحداث ليست منفصلة، لذا فإنك تحتاج إلى تحديد منطقة تقاطُع المجموعتَين وطرحها حتى لا يتكرّر أي حدث، فيكون:

احتمال أن يكون العدد أوليًا أو فرديًا هو

$\text{ل}(\text{ا} \cup \text{ب}) = \text{ل}(\text{ا}) + \text{ل}(\text{ب}) - \text{ل}(\text{ا} \cap \text{ب})$

$\text{ل}(\text{ا}) = \frac{٣}{٦}$ عناصر المجموعة (ا) في صورة كسر من العدد الكلّي للعناصر.

$\text{ل}(\text{ب}) = \frac{٣}{٦}$ عناصر المجموعة (ب) في صورة كسر من العدد الكلّي للعناصر.

$\text{ل}(\text{ا} \cap \text{ب}) = \frac{٢}{٦}$ عناصر تقاطُع (ا)، (ب)، التي تقع في المجموعتَين.

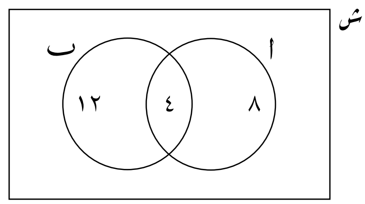
$\text{ل}(\text{ا} \cup \text{ب}) = \frac{٣}{٦} + \frac{٣}{٦} - \frac{٢}{٦} = \frac{٤}{٦} = \frac{٢}{٣}$

هذا هو ل(ا ∪ ب) الذي يمكن حسابه على النحو الآتي:

$\frac{١}{٦} + \frac{٢}{٦} + \frac{١}{٦} = \frac{٤}{٦} = \frac{٢}{٣}$

تمارين ١٢-٣

١) استخدم مخطّط ڤن لتحسب الاحتمالات الآتية، علمًا بأن الأعداد المذكورة داخل المخطط تمثّل عدد العناصر:



أ ل(أ)

ب ل(ب)

ج ل(أ و ب)

د ل(ليس أ)

هـ ل(أ أو ب)

٢) يبيع تاجر ٢٠ قميصًا؛ ٦ قمصان منها بأكمام طويلة، و٤ قمصان منها سوداء اللون. واحد فقط من القمصان ذات الأكمام الطويلة أسود اللون. ارسم مخطّط ڤن واستخدمه لتجد الاحتمالات الآتية:

أ ل(القميص ليس أسود اللون).

ب ل(القميص ليس أسود اللون وله كُمّ طويل).

ج ل(القميص ليس أسود اللون وليس له كُمّ طويل).

٣) يتوجّه عشرون رياضيًّا إلى النادي؛ يضع ١٣ منهم سماعات هاتف، ويكتب ١٥ منهم رسائل على هواتفهم. وهناك أربعة لا يضعون سمّاعات ولا يكتبون رسائل.

أ ارسم مخطّط ڤن لتعرض المعلومات.

ب ما احتمال أن يضع الرياضي سمّاعة، ويكتب رسالة عندما توجّه الرياضيون إلى النادي؟

٤) يبلغ عدد طلاب أحد الصفوف ٢٨ طالبًا؛ ١٢ منهم يفضّلون مادة الفيزياء، و١٥ منهم يفضّلون الكيمياء، و٨ منهم لا يفضّلون الفيزياء ولا الكيمياء.

أ ارسم مخطّط ڤن لتعرض المعلومات.

ب ما احتمال اختيار طالب عشوائيًّا من الصف:

(١) يفضّل مادة الفيزياء ولا يفضّل مادة الكيمياء؟

(٢) يفضّل مادة الفيزياء أو مادة الكيمياء؟

(٣) يفضّل مادّتَي الفيزياء والكيمياء؟

٥) تبيّن دراسة مسحية أجريت على ١٣٠ طالبًا أن هواية ٥٦ منهم الكرة الطائرة، و٦٤ منهم كرة السلة، و٢٧ منهم اللعبتان.

أ ارسم مخطّط ڤن لتعرض المعلومات.

ب استخدم مخطط ڤن لتحسب احتمال اختيار طالب عشوائيًّا:

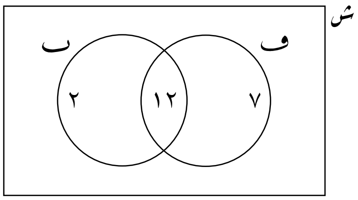
(١) هوايته كرة السلّة.

(٢) هوايته كرة القدم أو كرة السلّة.

(٣) هوايته اللعبتان.

(٤) ليست هوايته أيًّا من اللعبتَين.

٦) أجريت دراسة مسحية، سُئل فيها ٢٤ طفلًا عن العصير الذي يفضّله كل منهم (فراولة أو برتقال). ويعرض مخطّط ڤن الآتي نتائج الدراسة، علمًا بأن الأعداد المذكورة داخل المخطط تمثّل عدد العناصر:



ش = {جميع الأطفال}

ف = {الأطفال الذين يفضّلون عصير الفراولة}

ب = { الأطفال الذين يفضّلون عصير البرتقال}

أ ما عدد الأطفال الذين يفضلون عصير البرتقال وعصير الفراولة معًا؟

ب ما عدد الأطفال الذين لا يفضّلون أيًّا من العصيرَين؟

ج اكتب قيمة ع(ف ∪ ب).

د اكتب قيمة ع(ف ∩ ب).

هـ تم اختيار طفل عشوائيًّا، ما احتمال أن يكون ممّن يفضّلون عصير البرتقال؟

و تم اختيار طفل من الذين يفضّلون عصير الفراولة عشوائيًّا، ما احتمال أن يكون ممّن يفضّلون عصير البرتقال؟

١٢-٤ الاحتمال الشرطي

عند استخدام مخطّط الشجرة، تحقّق دائمًا ما إذا كان احتمال حدث ما يتغيّر بسبب نواتج الحدث السابق. غالبًا ما تتضمّن أسئلة الاحتمال الشرطي تعليمات مثل 'دون إعادة' أو 'الواحد تلو الآخر'.

يُستخدم **الاحتمال الشرطي** لإيجاد احتمال أن يقع حدث ما بشرط وقوع حدث آخر من قبل.

تُؤثر المعلومات عن الحدث الأول على احتمالية وقوع الحدث الثاني.

تعتمد الطريقة التي يُحسب فيها الاحتمال الشرطي على كون ما إذا كان الحدثان مستقلَين أو لا.

رُمي حجرا نرد مُنتظمان لكل منهما ستّة أوجه. إذا ظهر العدد ٦ على وجه حجر النرد الأول، فما احتمال أن يظهر العدد ٦ على وجه الحجر الآخر؟

هذان الحدثان مستقلان؛ لا يتأثر العدد الذي يظهر على حجر النرد الثاني بناتج العدد الذي يظهر على الحجر الأول.

إذا كان الحدثان أ، ب مستقلَّين، فستجد أن ل(ب بشرط أن الحدث أ قد وقع) = ل(ب) صحيحة دائمًا. في هذه الحالة، يكون احتمال أن يظهر العدد ٦ على حجر النرد الثاني $\frac{١}{٦}$.

في الأحداث **غير المستقلّة**، يؤثّر ناتج الحدث الأوَّل على احتمال الحدث الثاني.

افترض أن لديك تفاحة واحدة، وبرتقالة واحدة، وموزة واحدة، وتريد أن تأكل اثنتَين منها. عندما تأكل الفاكهة الأولى، فإن خيارات الفاكهة الثانية تعتمد على أيّ الفواكه أكلت، حيث لم يبقَ لديك سوى فاكهتَين لتختار من بينهما. إذا أكلت التفّاحة أوّلًا، فإنك ستختار الفاكهة الثانية من بين البرتقالة والموزة.

احتمال اختيار التفاحة $\frac{١}{٣}$ لوجود ثلاث فواكه تختار من بينها. احتمال اختيار البرتقالة أو الموزة إذا كنت قد أكلت التفّاحة هو $\frac{١}{٢}$، لوجود فاكهتَين تختار من بينهما.

لتجد احتمال الحدث ب بشرط أن الحدث أ قد وقع، استخدم القانون:

$$\text{ل(ب بشرط أن أ قد وقع)} = \frac{\text{ل(أ و ب)}}{\text{ل(أ)}}$$

عندما تتعامل مع مخطّط ڤن، يمكنك كتابة ذلك بلغة المجموعات على صورة

$$\text{ل(ب / أ)} = \frac{\text{ل(أ} \cap \text{ب)}}{\text{ل(أ)}}$$

يمكنك استخدام مخطّط الشجرة أو مخطّط ڤن لحل مسائل تتضمّن الاحتمال الشرطي.

مثــال ٦

حضانة فيها ٢١ طفلًا، ١٢ منهم من الأولاد و ٩ منهم من البنات. اختارت الحاضنة طفلَين مختلفين عشوائيًّا.

أ ارسم مخطّط الشجرة لتمثّل الموقف.

ب أوجد احتمال أن يكون:

(١) كلا الطفلَين ولدًا (و و).

(٢) كلا الطفلَين بنتًا (ب ب).

(٣) أحدهما بنتًا والآخر ولدًا.

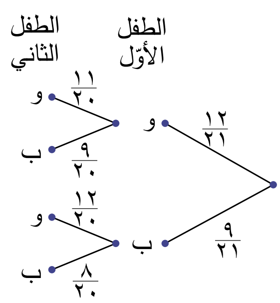
ج اختارت الحاضنة طفلًا ثالثًا عشوائيًّا. ما احتمال أن يكون:

(١) الأطفال الثلاثة أولادًا (و و و)؟

(٢) أحد الأطفال على الأقلّ بنتًا؟

الحــلّ:

أ



لاحظ أن المجموعة الثانية من الفروع هي احتمالات غير مستقلة لأنها تعتمد على نواتج المجموعة الأولى. لا تستطيع الحاضنة اختيار الطفل نفسه مرّتَين، لذا يوجد ٢٠ طفلًا فقط للجزء الثاني من الفروع ليتمّ الاختيار من بينها. لاحظ الأمر الآتي: إذا كان الطفل الأول ولدًا، فلا يتبقى سوى ١١ ولدًا عند اختيار الطفل الثاني، لكن لا يزال هناك ٩ بنات. إذا كان الطفل الأول بنتًا، فلا يتبقى سوى ٨ بنات عند اختيار الطفل الثاني، ولكن يتبقّى ١٢ ولدًا. في كلّ حالة، بسط كلّ فرع تغيّر لكن يظلّ مجموع البسطَين يساوي قيمة المقام (تغيّر أيضًا).

ب

(١) ل(و و) $= \frac{١٢}{٢١} \times \frac{١١}{٢٠} = \frac{١١}{٣٥}$

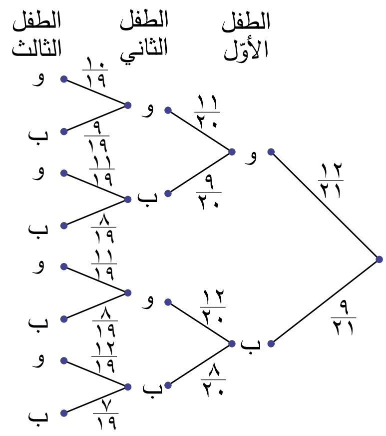
(٢) ل(ب ب) $= \frac{٩}{٢١} \times \frac{٨}{٢٠} = \frac{٦}{٣٥}$

(٣) ل(و ب) + ل(ب و)

$= \frac{١٢}{٢١} \times \frac{٩}{٢٠} + \frac{٩}{٢١} \times \frac{١٢}{٢٠} = \frac{١٨}{٣٥}$

يمكن أن يتم اختيار ولد وبنت في أي ترتيب.

ج



قد تجد من المفيد إضافة مجموعة ثالثة من الفروع، ولكن إذا كنت تستطيع إدراك نمط الاحتمالات على الفروع، فإنك تستطيع أن توضّح الحسابات.

(١) ل(و و و)

$= \frac{١٢}{٢١} \times \frac{١١}{٢٠} \times \frac{١٠}{١٩} = \frac{٢٢}{١٣٣}$

(٢) ل(أحد الأطفال على الأقلّ بنت)

= ١ − ل(كلهم أولاد)

$= ١ - \frac{٢٢}{١٣٣} = \frac{١١١}{١٣٣}$

قد يكون إيجاد الاحتمالات غير المطلوبة، ثم طرح النتيجة من ١ أسرع.

مثــال ٧

في مجموعة من ٥٠ طالبًا، لوحظ أن ٣٦ منهم يستخدمون (الحاسوب اللوحي)، و ٢٠ يستخدمون (الحاسوب المحمول)، و ١٢ لا يستخدمون أيًّا منهما. كما لوحظ أن بعض الطلاب يستخدمون الجهازين.

تم اختيار طالب واحد عشوائيًّا. ما احتمال أن:

أ يستخدم الطالب الحاسوب اللوحي، ويستخدم الحاسوب المحمول؟

ب يستخدم الطالب أحد الجهازَين على الأقلّ؟

ج يستخدم الطالب الحاسوب اللوحي بشرط أنه يستخدم الحاسوب المحمول؟

د لا يستخدم الطالب الحاسوب المحمول بشرط أنه يستخدم الحاسوب اللوحي؟

الحــلّ:

أ ع = {الطلاب الذين يستخدمون الحاسوب اللوحي}

ع(ع) = ٣٦

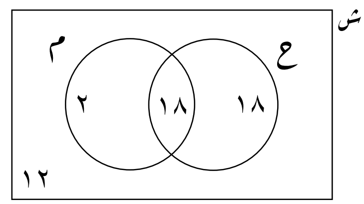
م = {الطلاب الذين يستخدمون الحاسوب المحمول}

ع(م) = ٢٠

٥٠ − ١٢ = ٣٨

٣٦ + ٢٠ = ٥٦

٥٦ − ٣٨ = ١٨



ل(يستخدم الجهازَين) = ل(ع ∩ م) = $\frac{١٨}{٥٠}$ = $\frac{٩}{٢٥}$

ابدأ بتحديد المجموعات ورسم مخطّط ڤن.

∴ يوجد ٣٨ طالبًا في اتّحاد المجموعتَين ع، م.

فيكون ١٨ طالبًا في المجموعتَين (ع ∩ م).

ب ل(يستخدم أحد الجهازَين على الأقل)

= ١ − ل(لا يستخدم أيّ منهما)

= ١ − $\frac{١٢}{٥٠}$ = $\frac{٣٨}{٥٠}$ = $\frac{١٩}{٢٥}$

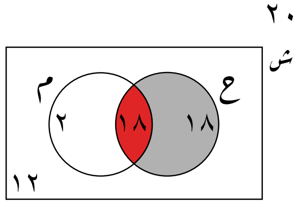
أو يمكننا أن نجد

$\frac{١٨ + ١٨ + ٢}{٥٠}$

ج ل(ع بشرط أن م قد وقع) = $\frac{\text{ل(ع و م)}}{\text{ل(م)}}$ =

$\frac{\text{ل(ع ∩ م)}}{\text{ل(م)}}$ = $\frac{١٨}{٢٠}$ = $\frac{٩}{١٠}$

انظر إلى مخطّط ڤن. سوف نهمل الجزء الملّون باللون الرمادي، لأننا نعرف أن الطالب يستخدم الحاسوب المحمول (بشرط أنه يستخدم الحاسوب المحمول). احتمال أن يستخدم أحد هؤلاء الطلاب الحاسوب اللوحي هو $\frac{١٨}{٢٠}$



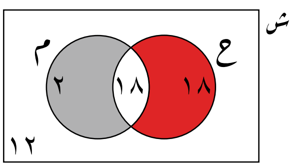
مُساعَدة

تعتمد ل(ع بشرط م قد وقع) على الطلاب الذين يستخدمون الحاسوب المحمول الآن، لذا يُحسب الاحتمال باستخدام العدد الكلّي للطلاب الذين يستخدمون الحاسوب المحمول، وليس العدد الكلي للطلاب. ع(ع و م) هو عدد الطلاب في منطقة تقاطع المجموعتين.

د ل(ليس م، بشرط أن ع قد وقع) = $\frac{\text{ل(م}' \cap \text{ع)}}{\text{ل(ع)}}$ =

$\frac{١٨}{٣٦} = \frac{١}{٢}$

والآن نريد $\frac{١٨}{٣٦}$



تمارين ١٢-٤

١) وضع أحمد في حقيبته ١٦ قطعة شوكولاتة؛ ١٠ قطع منها غير محشوّة، و ٦ قطع محشوّة. سحب أحمد قطعة من الحقيبة، ثم سحب قطعة أخرى.

أ ارسم مخطّط الشجرة لتمثّل الموقف.

ب استخدم مخطّط الشجرة لتجد احتمال أن تكون:

(١) كلتا القطعتين غير محشوّتين.

(٢) كلتا القطعتين محشوّتين.

(٣) القطعة الأولى محشوّة والأخرى غير محشوّة.

٢) كان في درج محمد أربع بطاقات كُتبت عليها الأحرف: أ، ب، ج، د. سحب منها بطاقة واحدة عشوائيًّا ووضعها على الطاولة، ثم سحب بطاقة ثانية ووضعها على الطاولة إلى جوار البطاقة السابقة، ثم سحب بطاقة ثالثة.

أ ارسم مخطّط الشجرة لتعرض النواتج الممكنة.

ب ما احتمال أن تكوّن الأحرف المكتوبة على البطاقات المختارة الكلمات الآتية:

(١) جاد (٢) باد (٣) داد

ج ما احتمال ألّا يسحب محمد بطاقة الحرف ب؟

د ما احتمال أن يحصل محمد على بطاقات حروف مرتّبة أبجديًّا؟

٣) مجموعة مكوّنة من ٢٥ شخصًا، تبيّن أنّ ١٥ شخصًا منهم يتذوّقون القهوة (ق)، و١٧ شخصًا يتذوّقون الشاي (ش)، وشخصين لا يتذوّقان أيًّا منهما. استخدم مخطّط الفضاء العيني المناسب لتحسب احتمال أن يكون الشخص الذي تم اختياره عشوائيًّا ممن يتذوّقون:

أ القهوة.

ب القهوة بشرط أنه يتذوّق الشاي.

٤) شارك ١٠٠ متدرّب في دورة تدريبية على الحاسوب. تدرّب ٨٠ منهم على الترميز، في حين تدرّب ٤٢ منهم على تقنية الرسوم المتحرّكة. تدرّب كل واحد من المائة متدرب على نشاط من هذَين النشاطَين على الأقلّ.

أ ارسم مخطّط فِن لتعرض عدد المتدرّبين الذين تدرّبوا على النشاطَين معًا.

ب تم اختيار متدرّب واحد عشوائيًّا. أوجد احتمال أن يكون قد تدرّب على:

(١) الترميز، ولم يتدرّب على تقنية الرسوم المتحرّكة.

(٢) تقنية الرسوم المتحرّكة بشرط أنه تدرّب على الترميز.

طبِّق مهاراتك

٥) تنتظر سعاد توأمين. وهي تعلم أنهما بنتان، ستختار اسمًا لكل بنت من بين الأسماء: أمل، سميرة، نورة، ومريم.

أ ارسم مخطّط الشجرة لتعرض جميع النواتج الممكنة لاسميّ البنتَين.

ب إذا اختارت سعاد اسمين عشوائيًّا، فما احتمال أن تحمل البنت الأولى اسم نورة والبنت الثانية اسم مريم؟

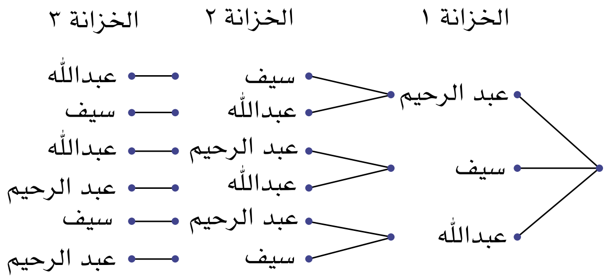
ج ما احتمال أن تحمل البنت الأولى اسم مريم، والبنت الثانية اسم أمل؟

٦) تتألف لجنة الإشراف على النشاطات الرياضية في المدرسة من ستة أعضاء، هم: سامي، وأحمد، ومحمد، وعلي، وبدر، وسعيد. تريد اللجنة اختيار رئيس ومسؤول مالي. لا يستطيع شخص واحد أن يشغل الموقعَين معًا.

أ ارسم مخطّط الشجرة لتعرض كم طريقة تتوفّر لاختيار الرئيس والمسؤول المالي.

ب إذا اختير الرئيس والمسؤول المالي عشوائيًّا، فما احتمال أن يكون سامي هو الرئيس، وأحمد هو المسؤول المالي؟

٧) عندما كان العامل ينظّف خزائن الطلبة، نزع عن غير قصد ثلاث بطاقات لأسماء ثلاثة منهم، هم: عبد الرحيم، وسيف، وعبدالله. يعرض مخطّط الشجرة الآتي الطرائق الممكنة لإعادة إلصاق بطاقات الأسماء:



أ انسخ المخطّط، واكتب الاحتمال بجوار كل فرع.

ب هل هذه الأحداث شرطية أم مستقلّة؟ لماذا؟

ج إذا أعاد عامل التنظيف إلصاق الأسماء على الخزائن عشوائيًّا، فما احتمال أن تكون الأسماء قد أُلصقت على الخزائن الصحيحة؟

٨) مجموعة مكونة من ١٢٠ طالبًا، ٢٥ طالبًا منهم في الصف العاشر، و١٥ منهم يتابعون دروس تقوية في الرياضيات. إذا علمت أن أربعة طلاب من طلاب الصف العاشر يتابعون دروس تقوية في الرياضيات، فما احتمال اختيار طالب عشوائيًّا ممن يتابعون دروس تقوية في الرياضيات علمًا بأنه في الصف العاشر؟

٩) أفاد تقرير الرصد الجوي أن احتمال حالة البحر مناسبة لرياضة التزلج الشراعي على الماء يوم الجمعة هو ٠,٢١؛ وإذا استطعت التزلج على الماء يوم الجمعة، فسوف يكون احتمال أن تستطيع التزلج يوم السبت ٠,٨٣؛ لكن إذا لم تتمكن من التزلج على الماء يوم الجمعة، فسوف يكون احتمال أن تتزلج على الماء يوم السبت ٠,٣ فقط.

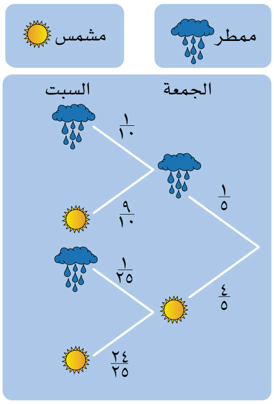
أ ارسم مخطّط الشجرة لتمثِّل هذا الموقف.

ب استخدم المخطّط لتحسب احتمال أن تتزلج على الماء يوم:

(١) الجمعة ويوم السبت.

(٢) السبت.

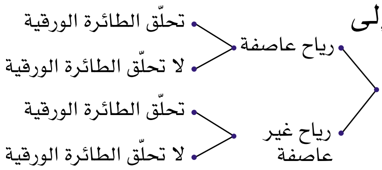
١٠) انظر إلى مخطّط الشجرة المجاور الذي عُرِض في النشرة الجوية.



أ اختر عنوانًا لمخطّط الشجرة.

ب ماذا يخبرك المخطّط عن الطقس لليومَين القادمَين في هذا المكان؟ (استخدم الاحتمالات في إجابتك).

١١) يلعب محمود يوميًّا بطائرته الورقية. احتمال وجود رياح عاصفة في أيّ يوم يساوي $\frac{٣}{٤}$.
إذا توافرت رياح عاصفة، فإن احتمال أن تحلق الطائرة يساوي $\frac{٥}{٨}$. إذا لم تتوافر رياح عاصفة، فإن احتمال أن تحلق الطائرة يساوي $\frac{١}{١٦}$.



أ انسخ مخطّط الشجرة وأكمله بكتابة الاحتمال إلى جانب كل فرع.

ب ما احتمال أن تكون الرياح عاصفة، وأن تحلّق الطائرة الورقية؟

ج أوجد احتمال ألّا تحلق الطائرة الورقية مهما كانت شدّة الرياح.

د إذا حلّقت الطائرة، فإن احتمال أن تعلَق على شجرة يساوي $\frac{١}{٢}$. احسب احتمال أن تعلَق الطائرة الورقية على شجرة مهما كانت شدّة الرياح.

مُلخَّص

ما يجب أن تعرفه:

- الفضاء العَيني لحدث ما هو جميع النواتج الممكنة للحدث.
- عندما يكون للحدث مرحلتان أو أكثر، يُسمى حدثًا مركّبًا.
- مخطّط الشجرة ومخطّط ڤن مفيدان في تنظيم النواتج للمراحل المختلفة للحدث. وهما مفيدان خاصة عندما يكون هناك أكثر من مرحلتَين؛ لأن مخطّط الفضاء العَيني يعرض نواتج حدثَين فقط.
- تُكتب النواتج بجانب فروع مخطّط الشجرة. ويُكتب احتمال كل ناتج إلى جانب الفروع على صورة كسر، أو عدد عشري.
- نجد احتمال الأحداث المستقلّة بأن نضرب احتمال كل فرع في الشجرة.
- ل(أ ثم ب) = ل(أ) × ل(ب).
- عندما يكون الحدثان متنافيَين، فإننا نجمع احتمالات ناتج الضرب.
- يُسمّى احتمال وقوع الحدث بشرط أن الحدث الآخر قد وقع الاحتمال الشرطي.

يجب أن تكون قادرًا على:

- رسم مخطّط الشجرة لتنظم نواتج أحداث مُركّبة.
- إيجاد احتمال كل فرع في مخطّط الشجرة.
- حساب احتمالات الأحداث باستخدام مخطّط الشجرة.
- رسم مخطّط ڤن لتمثِّل مجموعات المعلومات وتستخدمها في حساب الاحتمالات.
- استخدام مخطّط الشجرة ومخطّط ڤن لتجد الاحتمال الشرطي.

تمارين نهاية الوحدة

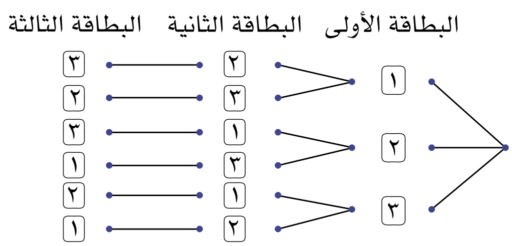
١) أ ارسم مخطّط الشجرة لتعرض جميع النواتج الممكنة عند رمي حجري نرد منتظمين لكل منهما ٦ أوجه.

ب أوجد احتمال (مكتوبًا في صورة كسر اعتيادي في أبسط صورة) أن يكون:

(١) مجموع العددَين الظاهرَين على وجهَي حجرَي النرد يساوي ثمانية.

(٢) العددان الظاهران على وجهي حجرَي النرد متساويين.

٢) يعرض مخطّط الشجرة أدناه النواتج الممكنة عند وضع ثلاث بطاقات مرقّمة: ١، ٢، ٣ في كيس، سُحبت بطاقة واحدة عشوائيًّا ثلاث مرّات. كل مرّة يتم فيها سحب البطاقة، توضع على طاولة إلى يمين البطاقة التي سُحبت سابقًا:



أ انسخ المخطّط واملأه باحتمال كلّ فرع.

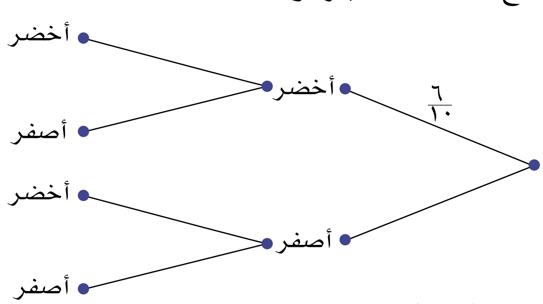
ب كم عددًا من ثلاثة أرقام يمكن تكوينه من هذه التجربة؟

ج ما احتمال أن يكون العدد المكوّن من ثلاثة أرقام:

(١) يساوي ١٢٣؟ (٢) أكبر من ٢٠٠؟ (٣) زوجيًّا؟ (٤) قابلًا للقسمة على ثلاثة؟

٣) يحتوي كيس حلوى على ٦ قطع لونها أخضر و٤ قطع لونها أصفر. سحب أحمد قطعة حلوى واحدة من الكيس ثم سحب قطعة حلوى ثانية:

أ انسخ مخطّط الشجرة وأكمله:



ب احسب احتمال:

(١) أن يكون لون قطعتي الحلوى أصفر.

(٢) الحصول على قطعتي حلوى مختلفتَي اللون.

(٣) أن تكون واحدة من قطع الحلوى على الأقل لونها أخضر.

٤) احتمال ظهور صورة عند رمي قطعة نقد معدنية $\frac{٢}{٥}$، تم رمي القطعة مرّتَين.

أ ارسم مخطّط الشجرة لتعرض النواتج الممكنة والاحتمالات.

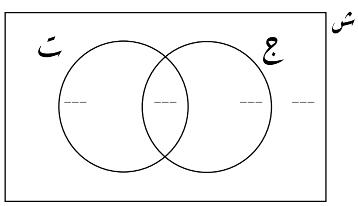
ب ما احتمال أن يكون ناتج الرميتين مختلفًا؟

٥) في الصفّ الحادي عشر في مدرسة ما، صف مكوّن من ٤٠ طالبًا، يفضِّل ٢٠ منهم مادة الجغرافيا، و ٢٥ منهم مادة التاريخ، في حين أنّ ٨ منهم لا يفضّلون أيًّا من المادتين.

ش = {طلاب الصف الحادي عشر في مدرسة ما}

ج = {الطلاب الذين يفضّلون مادة الجغرافيا}

ت = {الطلاب الذين يفضّلون مادة التاريخ}



أ أكمل مخطّط ڤن لتبيّن عدد الطلاب في كلّ مجموعة.

ب أوجد ع(ج).

ج أوجد ع(ج ∪ ت).

د ما احتمال أن يكون طالب تم اختياره عشوائيًّا يفضّل مادة التاريخ ولا يفضّل مادة الجغرافيا؟

هـ اختير طالب واحد عشوائيًّا. إذا كان هذا الطالب يفضّل مادة التاريخ، فما احتمال أنه يفضّل مادّة الجغرافيا أيضًا؟

الوحدة الثالثة عشرة: النسب المثلّثية لزوايا قياسها أكبر من ٩٠°

يُنتج القلب موجات كهربائية من خلال عضلة القلب، ويسجّل تخطيط القلب الكهربائي النشاط الكهربائي للقلب، حيث يمكن من خلاله معرفة كيفيّة تغيّر الموجة الكهربائية.

تُستخدم النّسب المثلثية (الجيب أو جيب التمام) في تمثيل تخطيط القلب الكهربائي بيانيًّا، ما يساعد الأطباء على قراءة هذا التخطيط لمعرفة الأسباب التي يُعزى إليها بعض الأعراض الصحية، والقيام بالإجراءات المطلوبة.

المُفردات

- قانون الجيب Sine rule
- قانون جيب التمام Cosine rule
- الإسقاط Projection

سوف تتعلّم في هذه الوحدة كيف:

- تحلّ معادلة مثلّثية، وتجد جميع الحلول بين ٠° و٣٦٠°
- تحسب مساحة مثلّث ليس قائم الزاوية باستخدام جيب الزاوية.
- تطبّق قانونَي الجيب وجيب التمام لتحسب طول الضلع المجهول، وقياس الزاوية المجهولة في مثلّثات ليست قائمة الزاوية.
- تستخدم الجيب وجيب التمام والظل ونظرية فيثاغورث في المُجسّمات ثلاثية الأبعاد.

١٣-١ الجيب وجيب التمام والظل لزوايا قياسها أكبر من ٩٠°

سابقًا

تُعتبر جا(هـ)، وجتا(هـ)، وظا(هـ) في الحقيقة دوالًا. إذا استخدمت الآلة الحاسبة مثلاً لتجد جا(٣٠°)، فسوف تحصل على الإجابة $\frac{1}{2}$.

وسبق لك أن درست الدوال في الوحدة (٨)

تعلّمت في الوحدة (١١) أنك تستطيع إيجاد الجيب، أو جيب التمام، أو الظل لزاوية في مثلّث قائم الزاوية باستخدام الآلة الحاسبة.

في هذا الدرس، يمكنك إيجاد الجيب، وجيب التمام، والظل لزوايا قياسها أكبر من (٩٠°).

استقصاء

استخدم الآلة الحاسبة لتجد قيمة كل نسبة مثلّثية من النسب الآتية:

جا(٣٠°) ، جا(١٥٠°)

جا(١٠°) ، جا(١٧٠°)

جا(٦٠°) ، جا(١٢٠°)

جا(٥°) ، جا(١٧٥°)

ماذا تلاحظ؟ ما العلاقة بين الزاويتَين في كلّ زوج؟

والآن، كرّر الأمر نفسه مع كل زوج من الأزواج الآتية:

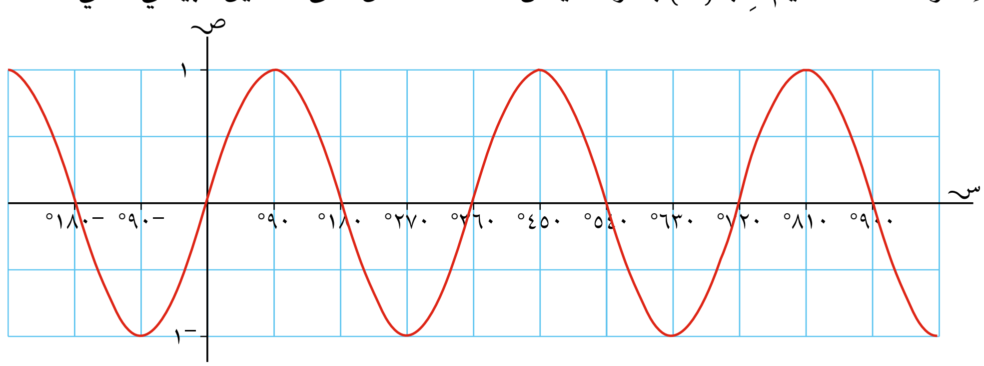
جتا(٣٠°) ، جتا(٣٣٠°)	ظا(٣٠°) ، ظا(٢١٠°)
جتا(٦٠°) ، جتا(٣٠٠°)	ظا(٦٠°) ، ظا(٢٤٠°)
جتا(٥٠°) ، جتا(٣١٠°)	ظا (١٥°) ، ظا(١٩٥°)
جتا(١٥°) ، جتا(٣٤٥°)	ظا(١٠٠°) ، ظا(٢٨٠°)

تجد أن النمط مختلف لكلّ من الجيب، وجيب التمام، والظل.

ستكتشف الآن التمثيلات البيانية للدوال: ص = جا(هـ)، ص = جتا(هـ)، ص = ظا(هـ) وتعرف سبب وجود هذا الاختلاف في النمط.

التمثيل البياني للدالة ص = جا(هـ)

إذا رسمت عدّة قيَم لِـ جا(هـ) بشرط قياس هـ، فستحصل على التمثيل البياني الآتي:



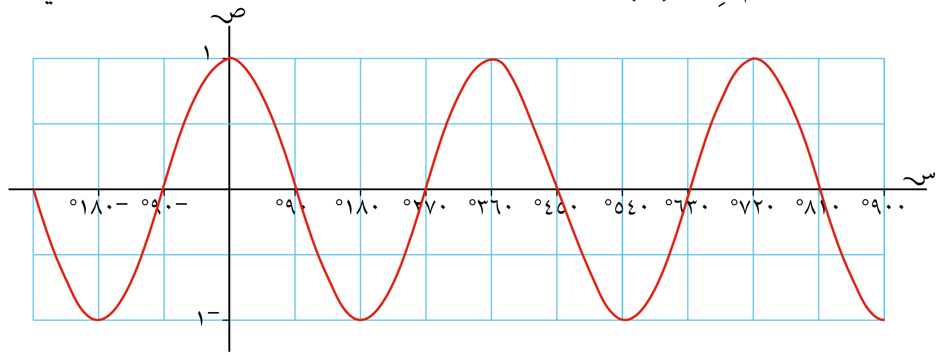
يكرّر التمثيل البياني نفسه كلّ ٣٦٠° في الاتّجاهَين: الموجب، والسالب.

لاحظ أن جزء المنحنى الواقع بين ٠ ° و ١٨٠ ° متماثل بالانعكاس، وأن معادلة محور الانعكاس هي هـ = ٩٠ °. هذا يعني أن جا(هـ) = جا(١٨٠ ° − هـ)، كما وجدت ذلك في الاستقصاء أعلاه.

ومن المهم أيضًا أن تلاحظ أن قيمة جا(هـ) لا تزيد على (١) ولا تقل عن (−١).

التمثيل البياني للدالة ص = جتا(هـ)

إذا رسمت عدّة قيَم لـِ جتا(هـ) بشرط قياس هـ. فسوف تحصل على التمثيل البياني الآتي:



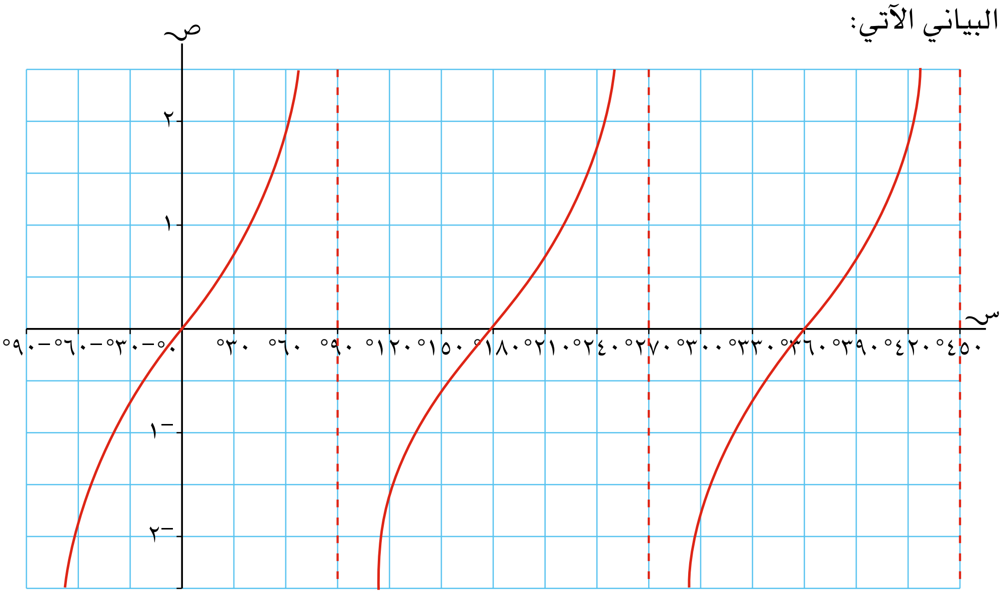
لاحظ أن جزء المنحنى الواقع بين ٠° و٣٦٠° متماثل بالانعكاس، وأن معادلة محور الانعكاس هي هـ = ١٨٠° ويتكرر المنحنى كل ٣٦٠°. هذا يعني أن جتا(هـ) = جتا(٣٦٠° − هـ)، كما وجدت ذلك في الاستقصاء أعلاه.

وبتجريب قياسات بعض الزوايا، ستجد أن جتا(هـ) = − جتا(١٨٠° − هـ).

ومن المهم أيضًا أن تلاحظ أن قيمة جتا(هـ) لا تزيد على (١) ولا تقل عن (١⁻).

التمثيل البياني للدالة ص = ظا(هـ)

أخيرًا، إذا رسمت مواقع عدّة قيَم لـِ ظا(هـ) بشرط قياس هـ، فسوف تحصل على التمثيل البياني الآتي:



يتقارب المنحنى مع الخطوط الرأسية المنقّطة، ولكنه لا يمسها ولا يقطعها أبدًا.

لاحظ أن المنحنى ليس له تماثُل بالانعكاس، ولكنه يتكرر كل ١٨٠°. هذا يعني أن ظا(هـ) = ظا(١٨٠° + هـ).

لاحظ أن ظا(هـ) لا ينحصر بين (١) و (١⁻)، كما هو حال جا(هـ)، وجتا(هـ).

تعني أشكال التمثيلات البيانية الثلاثة: جا(هـ)، جتا(هـ)، وظا(هـ) أن للمعادلات التي تتضمّن جا(هـ)، جتا(هـ) أو ظا(هـ) عدة حلول. تبيّن الأمثلة الآتية كيف تجد هذه الحلول. وسوف تُحلّ المسألة في كلّ حالة باستخدام التمثيل البياني للمساعدة.

مثال ١

ما قياس الزاوية الحادة التي جيبها يساوي جيب الزاوية (١٢٠°)؟

الحلّ:

جا(١٨٠° − هـ) = جا(هـ) جا(١٨٠° − ١٢٠°) = جا(١٢٠°) جا(٦٠°) = جا(١٢٠°) قياس الزاوية هو ٦٠°	عوّض هـ = ١٢٠°

مثال ٢

عبّر عن كلّ نسبة من النسب المُثلّثية الآتية بدلالة زاوية تقع بين ٠° و ١٨٠°:

أ جتا(١٠٠°)   ب −جتا(٣٥°)

الحلّ:

أ	جتا(١٨٠° − هـ) =−جتا(هـ) جتا(١٨٠° − ١٠٠°) = −جتا(١٠٠°) جتا(٨٠°) = −جتا(١٠٠°)، ∴ جتا(١٠٠°) = −جتا(٨٠°)	عوّض هـ = ١٠٠°
ب	−جتا(هـ) = جتا(١٨٠° − هـ) −جتا(٣٥°) = جتا(١٤٥°)	عوّض هـ = ٣٥°

مثـــال ٣

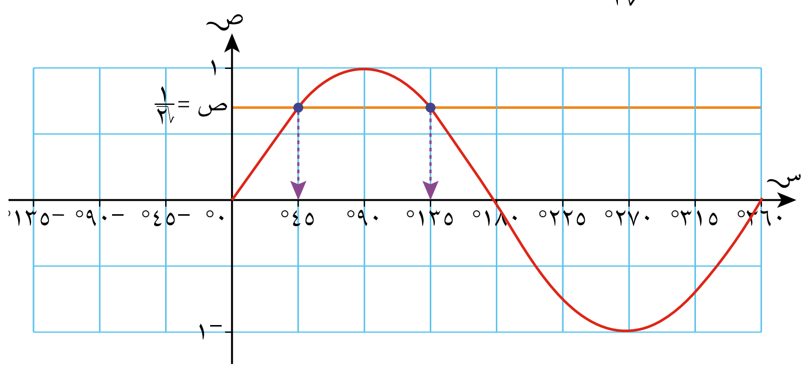
حلّ كل معادلة من المعادلات الآتية، وأوجد جميع الحلول ضمن المجال من ٠° إلى ٣٦٠°:

أ جا(هـ) = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ب ظا(هـ) = ٣ ج جتا(ع) = $-\frac{١}{٢}$

الحــلّ:

أ استخدم الآلة الحاسبة لتجد أحد الحلول: جا$^{-١}$($\frac{١}{\sqrt{٢}}$) = ٤٥°

والآن، حدّد الزاوية هـ = ٤٥° على رسم التمثيل البياني للدالة ص = جا(هـ)، وارسم المستقيم ص = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ كالآتي:



باستخدام تماثُل التمثيل البياني، سوف تلاحظ وجود حلّ آخر، هو هـ = ١٣٥°

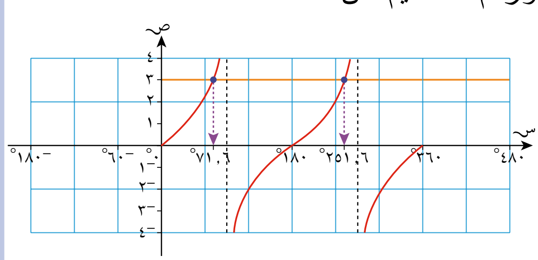
استخدم الآلة الحاسبة لتتحقّق من أن جا(١٣٥°) = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$

لاحظ أن ١٣٥° = ١٨٠° − ٤٥°، يمكنك أن تستخدم هذا القانون، لأن رسم التمثيل البياني يسهّل عليك فهم سبب وجود حل آخر.

ب استخدم الآلة الحاسبة لتجد أحد الحلول:

ظا$^{-١}$(٣) = ٧١,٦°

والآن، ارسم التمثيل البياني للدالة ص = ظا(هـ) وارسم المستقيم ص= ٣



سوف تجد أن الحل الثاني هو:

١٨٠° + ٧١,٦° = ٢٥١,٦°

يمكنك إيجاد مزيد من الحلول بإضافة ١٨٠° في كل مرَّة، ولكن ذلك سوف يعطي حلولًا أكبر من ٣٦٠°، وتقع خارج المجال المطلوب.

يمكن استخدام متغيّرات أخرى تدل على الزاوية كما هو حال المتغيّر هـ، حيث استُخدم في المثال في الجزئية ج المتغير ع ليدل على الزاوية. وسوف تتعامل مع المتغيّر الجديد كما تعاملت مع المتغيّر هـ.

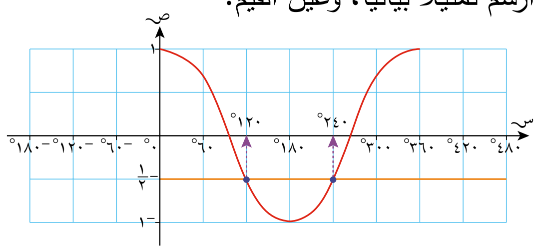
يكون التمثيل البياني مجرد رسم تقريبي وليس بالضرورة أن يكون دقيقًا. يكفي فقط أن ترى كيف يساعد التماثُل على توضيح وجود حلّ آخر.

مُساعَدة

لاحظ أنك تحتاج إلى رسم الجزء من التمثيل البياني من ٠° إلى ٣٦٠° لأنك تبحث عن حلول بين هاتَين القيمتَين للمتغيّر هـ.

هناك المزيد من الحلول، ولكن في المجال من ٠° إلى ٣٦٠°، يقطع المستقيم ص = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ التمثيل البياني للدالة ص = جا(هـ) مرتَين فقط.

ج استخدم الآلة الحاسبة لتجد أحد الحلول:
جتا$^{-١}$(−$\frac{١}{٢}$) = ١٢٠°.
ارسم تمثيلًا بيانيًّا، وعيّن القيَم.



يمكنك أن تلاحظ أن الحلّ الثاني هو: ٣٦٠° − ١٢٠° = ٢٤٠°

تمارين ١٣-١

١) عبّر عن كل نسبة من النِّسَب المُثلّثية الآتية بدلالة نفس النسبة المُثلّثية لزاوية أخرى تقع بين ٠° و ١٨٠°:

أ جتا (١٢٠°) ب جا (٣٥°) ج جتا (١٣٦°) د جا (١٧٠°)

هـ جتا (٨٨°) و −جتا (١٤٠°) ز جا (١٢١°) ح جا (٩٩°)

ط −جتا (٤٥°) ي −جتا (١٥٠°)

٢) حلّ كلّ معادلة من المعادلات الآتية، وأوجد جميع الحلول التي تقع بين ٠° و ٣٦٠°:

أ جا(هـ) = ($\frac{١}{٢}$) ب جا(هـ) = ١ ج جتا(هـ) = ($\frac{\sqrt{٢}}{٢}$)

د ظا(هـ) = ٥ هـ جتا(هـ) = (−$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$) و جا(هـ) = −٠,٢

ز جتا(هـ) = −$\frac{١}{٣}$ ح ظا(هـ) = $\sqrt{٣}$ ط ظا(هـ) = −٤

٣) أوجد، في كلّ حالة من الحالات الآتية، أصغر قيمة موجبة لـ س حيث:

أ جا(س) = جا(١٣٥°) ب جتا(س) = جتا(١٢٠°) ج ظا(س) = ظا(٢٣٥°)

د جتا(س) = جتا(−٤٥°) هـ جا(س) = جا(٢٧٠°) و ظا(س) = ظا(٨٤٠°)

ز جا(س − ٣٠°) = جا(٢٤٠°) ح جتا(٢س) = جتا(٥٤٠°)

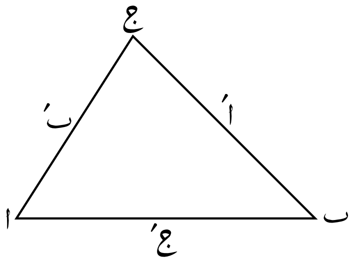
ط ظا($\frac{س}{٦}$) = ظا(−٤٧٦°)

٤) حلّ المعادلة، وأوجد جميع الحلول الواقعة بين ٠° و ٣٦٠°:
(جا(س))^{٢} = $\frac{١}{٤}$

٥) حلّ المعادلة، وأوجد جميع الحلول الواقعة بين ٠° و ٣٦٠°:
٨(جتا(س))^{٢} − ١٠ جتا(س) + ٣ = ٠

اكتب جتا(س) = ص، ثم حاول أن تحلّل إلى العوامل.

١٣-٢ قانون الجيب



تعلمت سابقًا أهمية نسبتيّ الجيب وجيب التمام في حالة المثلث قائم الزاوية، وحتى تتوسّع في أهمية هذه النسب عليك فهم القوانين الآتية، والنظر في الطريقة المعيارية لتسمية زوايا المُثلّث وأضلاعه. انظر المُثلّث المجاور.

لاحظ أن الأضلاع قد سُمّيت بنفس أسماء الزوايا المقابلة لها. مع وجود شرطة مائلة أعلى الحرف؛ فالضلع المقابل للزاوية ا هو (ا') والضلع المقابل للزاوية ب هو (ب')، وهكذا ...

قانون الجيب

يمكن القول في المُثلّث أعلاه: إنّ

$$\frac{\text{جا(ا)}}{\text{ا}'} = \frac{\text{جا(ب)}}{\text{ب}'} \quad \text{و} \quad \frac{\text{جا(ا)}}{\text{ا}'} = \frac{\text{جا(ع)}}{\text{ع}'} \quad \text{و} \quad \frac{\text{جا(ب)}}{\text{ب}'} = \frac{\text{جا(ع)}}{\text{ع}'}$$

ويمكن التعبير عن هذه العلاقات في صورة:

$$\frac{\text{جا(ا)}}{\text{ا}'} = \frac{\text{جا(ب)}}{\text{ب}'} = \frac{\text{جا(ع)}}{\text{ع}'}$$

هذا هو **قانون الجيب**. تستخدم عادة هذه الصورة من القانون، التي تكون فيها نسبة الجيب بَسطًا للكسر من أجل حساب قياس الزوايا.

يمكن أيضًا قلب الصورة عندما ترغب في حساب أطوال الأضلاع.

$$\frac{\text{ا}'}{\text{جا(ا)}} = \frac{\text{ب}'}{\text{جا(ب)}} = \frac{\text{ع}'}{\text{جا(ع)}}$$

يجب أن تتذكر أن هذه الصورة تمثّل ثلاث علاقات.

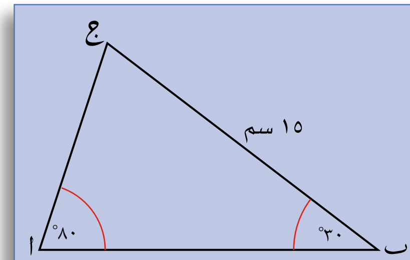
لاحظ أنه تم استخدام الحرف والحرف مع شرطة في كل نسبة، مما يعني أن كلّ كسر تستخدمه يتطلّب قياس الزاوية، وطول الضلع المُقابل لها.

تذكّر أن قانون الجيب يُستخدم عندما تتعامل مع أزواج متقابلة من الأضلاع والزوايا.

مثــال ٤

في المُثلَّث ا ب ع، ق(اْ) = ٨٠°، ق(بْ) = ٣٠°، وطول الضلع ب ع = ١٥ سم.

احسب قياس الزاوية ع، وطولَي الضلعَين ا ب، ا ع



الحــلّ:

ق(عْ) + ٨٠° + ٣٠° = ١٨٠°

ق(عْ) = ١٨٠° − ٣٠° − ٨٠° = ٧٠°

والآن، فكّر في الضلع ا ب. تجد أن ا ب يقابل الزاوية ع والضلع ب ع يقابل الزاوية ا.

لتحسب قياس الزاوية ع، استخدم حقيقة أن مجموع قياسات الزوايا في المُثلَّث يساوي ١٨٠°

∴ اكتب قانون الجيب الذي يستخدم كل ضلع، والزاوية المقابلة له:

$$\frac{\text{ا}'}{\text{جا(ا)}} = \frac{\text{ج}'}{\text{جا(ج)}} \Leftarrow \frac{\text{ب ج}}{\text{جا(ا)}} = \frac{\text{ا ب}}{\text{جا(ج)}}$$

$$\therefore \frac{١٥}{\text{جا}(٨٠^\circ)} = \frac{\text{ا ب}}{\text{جا}(٧٠^\circ)} \Leftarrow \text{ا ب} = \frac{١٥}{\text{جا}(٨٠^\circ)} \times \text{جا}(٧٠^\circ)$$

= ١٤,٣ سم (مقرّبة إلى أقرب عدد مكوّن من ٣ أرقام معنوية) وبالمثل:

تجد أن الضلع ا ج يقابل ب. لذا، استخدم الزوج ب ج والزاوية ا مرة أخرى:

$$\frac{\text{ا}'}{\text{جا(ا)}} = \frac{\text{ب}'}{\text{جا(ب)}} \Leftarrow \frac{\text{ب ج}}{\text{جا(ا)}} = \frac{\text{ا ج}}{\text{جا(ب)}}$$

وبناء على ذلك، فإن $\frac{١٥}{\text{جا}(٨٠^\circ)} = \frac{\text{ا ج}}{\text{جا}(٣٠^\circ)}$

$$\Leftarrow \text{ا ج} = \frac{١٥}{\text{جا}(٨٠^\circ)} \times \text{جا}(٣٠^\circ)$$

= ٧,٦٢ سم (مقرّبة إلى أقرب عدد مكوّن من ٣ أرقام معنوية).

الحالة الغامضة في قانون الجيب

تقود خصائص دالة الجيب إلى أكثر من إجابة واحدة ممكنة. يبيّن المثال الآتي كيف يمكن أن يحدث ذلك.

مثــال ٥

في المُثلَّث ى هـ و، $\overline{\text{ى و}}$ = ١٠ سم، $\overline{\text{هـ و}}$ = ٧ سم، ق(هـ $\hat{\text{ى}}$ و)= ٣٤°. احسب قياس كل زاوية من الزاويتين الآتيتين مقرّبًا الناتج إلى أقرب درجة:

أ ى هـ و

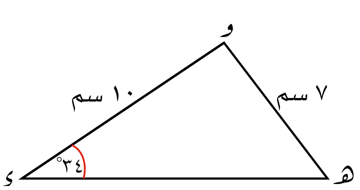
ب ى و هـ

الحــلّ:

أ تقابل الزاوية (ى $\hat{\text{هـ}}$ و) الضلع الذي يبلغ طوله ١٠ سم. يشكّل ذلك أحد أزواج قانون الجيب. وتقابل الزاوية (هـ $\hat{\text{ى}}$ و) الضلع الذي يبلغ طوله ٧ سم. يشكل ذلك زوجًا ثانيًا من قانون الجيب. أنت تحاول أن تجد زاوية. لذا، اختر صورة قانون الجيب حيث إنّ قيمة نسبة الجيب في البسط:

$$\frac{\text{جا}(٣٤^\circ)}{٧} = \frac{\text{جا(هـ)}}{١٠}$$

$$\Leftarrow \text{جا(هـ)} = ١٠ \times \frac{\text{جا}(٣٤^\circ)}{٧}$$



فيكون، ق(ﻯ هـ̂ و) = جا$^{-١}$(١٠ × $\frac{\text{جا(٣٤°)}}{٧}$)

= ٥٣,٠°

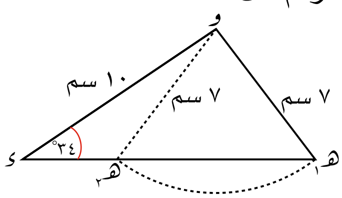
لكن هناك أيضًا زاوية ثانية ﻯ هـ و، حيث:

جا(هـ) = ١٠ × $\frac{\text{جا(٣٤°)}}{٧}$

تخبرنا دورة الدالة أن ق(ﻯ هـ̂ و) هو

١٨٠° − ٥٣,٠° = ١٢٧,٠°

يمكنك أن تلاحظ ذلك إذا استخدمت التمثيل البياني لدالة الجيب. تتكرَّر قيَم كلّ من جا(س)، جتا(س) كل ٣٦٠° وتُسمى هذه الخاصية 'الدورة' أي أن كلًّا من جا(س)، جتا(س) دالة دورية. ويكون كلّ منهما قيمة ممكنة لقياس الزاوية ﻯ هـ و ، وتكون لديك طريقتان لترسم مثل هذا المُثلَّث.



ب تقود إجابتا الجزئية (أ) إلى حلَّين ممكنَين للجزئية (ب).

إذا كان ق(ﻯ هـ̂ و) = ١٢٧,٠°، فإن

ق(ﻯ وْ هـ) = ١٨٠° − ١٢٧° − ٣٤° = ١٩°

وإذا كان ق(ﻯ هـ̂ و) = ٥٣,٠°، فإن ق(ﻯ وْ هـ)

= ١٨٠° − ٥٣° − ٣٤° = ٩٣°

تُبيّن هـ٢ في الشكل أعلاه أن ذلك يؤدي إلى إجابتَين لطول الضلع ﻯ هـ. عليك التحقق من حساب جميع الإجابات الممكنة. خذ ذلك في الحسبان عندما تحل التمارين الآتية.

تمارين ١٣-٢

١) أوجد قيمة س في كلّ معادلة من المعادلات الآتية:

أ $\frac{\text{س}}{\text{جا(٥٠°)}} = \frac{٩}{\text{جا(٣٨°)}}$

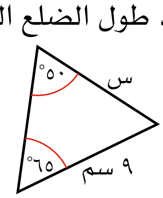
ب $\frac{\text{س}}{\text{جا(٢٥°)}} = \frac{٢٠}{\text{جا(١٠٠°)}}$

ج $\frac{٢٠,٦}{\text{جا(٥٠°)}} = \frac{\text{س}}{\text{جا(٧٠°)}}$

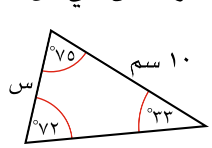
د $\frac{\text{جا(س°)}}{١١,٤} = \frac{\text{جا(٦٣°)}}{١٦,٢}$

٢) أوجد طول الضلع المشار إليه بالحرف س في كلّ مثلّث من المُثلّثات الآتية:

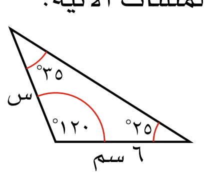
أ



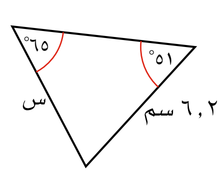
ب



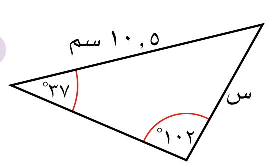
ج



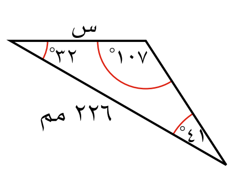
د



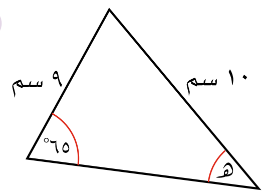
هـ

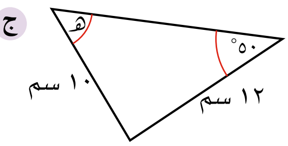


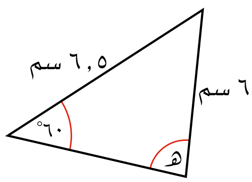
و

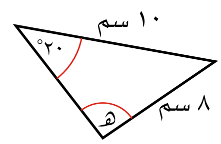


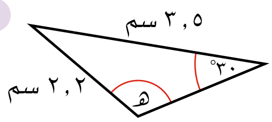
٣) أوجد قياس الزاوية المشار إليها بالحرف هـ في كل مثلّث من المُثلّثات الآتية، واكتب إجابتك مقرَّبةً إلى أقرب منزلة عشريّة واحدة:

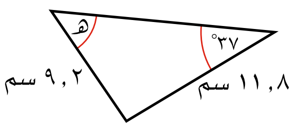
أ


ب


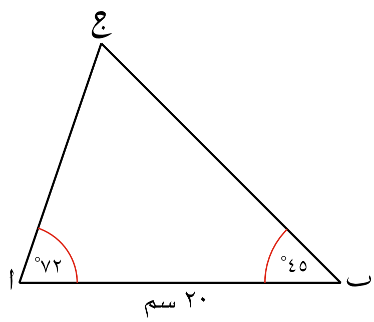
ج


د


هـ


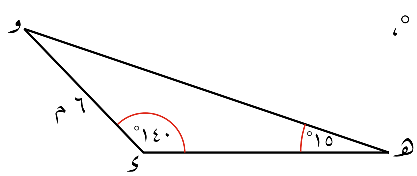
و


٤) في المُثلّث ا ب ج، ق(أ̂) = ٧٢°، ق(ب̂) = ٤٥°، وطول الضلع ا ب = ٢٠ سم. احسب ق(ج̂)، وطولَي الضلعَين ا ج، ب ج.



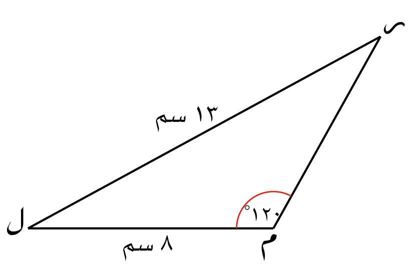
٥) في المُثلَّث ى هـ و، ق(ى̂) = ١٤٠°، ق(هـ̂) = ١٥°، وطول الضلع ى و = ٦ م.

أوجد ق(و̂)، وطولَي الضلعَين ى هـ، هـ و.

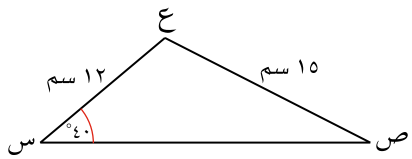


٦) في المُثلّث ل م ر، ق(م̂) = ١٢٠°، وطول الضلع ل م = ٨ سم، وطول الضلع ل ر = ١٣ سم.

احسب ق(ر̂)، و ق(ل̂)، وطول الضلع م ر.



٧) في المُثلّث س ص ع، ق(سَ) = ٤٠°،
وطول الضلع س ع = ١٢ سم، وطول
الضلع ص ع = ١٥ سم.

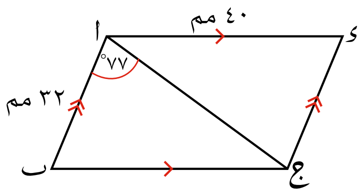


أ لماذا يجب أن يكون قياس الزاوية ص أقل من ٤٠°

ب احسب إلى أقرب منزلة عشريّة ق(صَ)، ق(عَ).

ج احسب طول الضلع س ص.

٨) ا ب ج ى متوازي أضلاع. طول ا ب = ٣٢ مم،
طول ا ى = ٤٠ مم، ق(ب اَ ج) = ٧٧°

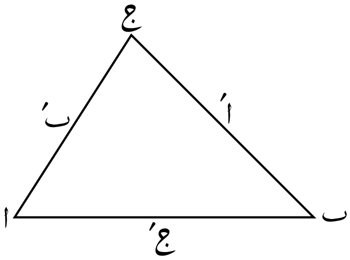


أ احسب ق(ب جَ ا) مُقرَّبًا إلى أقرب درجة.

ب احسب ق(ا بَ ج) مُقرَّبًا إلى أقرب درجة.

ج أوجد طول القطر ا ج مُقرَّبًا إلى أقرب منزلتَين عشريتَين.

١٣-٣ قانون جيب التمام



الآن، اعتبر المُثلَّث أ ب ع المشار إلى أضلاعه بنفس الطريقة التي استخدمت في قانون الجيب.

يُعبَّر عن **قانون جيب التمام** بالصيغة:

$$(\text{أ}')^{٢} = (\text{ب}')^{٢} + (\text{ع}')^{٢} - ٢(\text{ب}')(\text{ع}')(\text{جتا}(\text{أ}))$$

لاحظ أن الأضلاع الثلاثة وزاوية واحدة قد استُخدمت في القانون، وأن الضلع الذي يُشكِّل مربّعه موضوع الصيغة يقابل الزاوية (المشار إليها بنفس الحرف). تُستخدم صورة قانون جيب التمام لإيجاد الأضلاع المجهولة.

بإعادة ترتيب الزوايا (مع التأكد من أن الضلع المقابل لأي زاوية مُعطى بصورة الحرف مع وجود شَرْطة مائلة عليه) يمكن أن يُعبَّر عن قانون جيب التمام بطريقتَين ممكنتَين، هما:

$(\text{ب}')^{٢} = (\text{أ}')^{٢} + (\text{ع}')^{٢} - ٢(\text{أ}')(\text{ع}')(\text{جتا}(\text{ب}))$، أو $(\text{ع}')^{٢} = (\text{أ}')^{٢} + (\text{ب}')^{٢} - ٢(\text{أ}')(\text{ب}')(\text{جتا}(\text{ع}))$

لاحظ أيضًا أنك تستطيع أخذ أيّ صورة من صور صيغة جيب التمام لتجعل نسبة جيب التمام موضوع القانون:

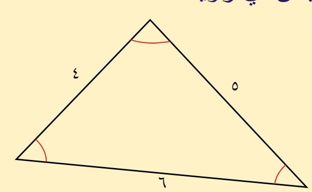
$$(\text{أ}')^{٢} = (\text{ب}')^{٢} + (\text{ع}')^{٢} - ٢(\text{ب}')(\text{ع}')(\text{جتا}(\text{أ}))$$

$$\Leftarrow (\text{أ}')^{٢} + ٢(\text{ب}')(\text{ع}')(\text{جتا}(\text{أ})) = (\text{ب}')^{٢} + (\text{ع}')^{٢}$$

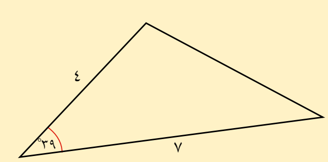
$$\Leftarrow ٢(\text{ب}')(\text{ع}')(\text{جتا}(\text{أ})) = (\text{ب}')^{٢} + (\text{ع}')^{٢} - (\text{أ}')^{٢}$$

$$\Leftarrow \text{جتا}(\text{أ}) = \frac{(\text{ب}')^{٢} + (\text{ع}')^{٢} - (\text{أ}')^{٢}}{٢(\text{ب}')(\text{ع}')}$$

إذا عرفت أطوال الأضلاع الثلاثة في مثلّث ما، فإنّك تستطيع استخدام قانون جيب التمام لتجد قياس أيّ زاوية.



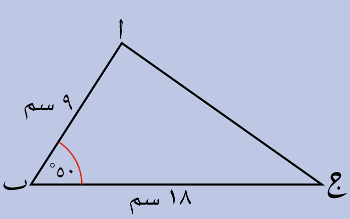
إذا عرفت طولَي ضلعَين، وكان الضلع المجهول مقابلًا لزاوية قياسها معلوم، فيمكنك عندئذ أن استخدام قانون جيب التمام لتحسب طول الضلع المجهول.



مثـــال ٦

في المُثلَّث ا ب ع، $\text{ق}(\hat{\text{ب}}) = ٥٠°$، طول الضلع ا ب = ٩ سم وطول الضلع ب ع = ١٨ سم.

احسب طول الضلع ا ع.



الحـــلّ:

$(\text{ب}')^{٢} = ٩^{٢} + ١٨^{٢} - (٢ \times ٩ \times ١٨ \text{ جتا}(٥٠°))$

$= ٨١ + ٣٢٤ - (٢٠٨{,}٢٦٣١...)$

$= ١٩٦{,}٧٣٦٨ ...$

$\therefore \text{ب}' = \sqrt{١٩٦{,}٧٣٦٨ ...}$

$= ١٤{,}٠٢٦٢...$

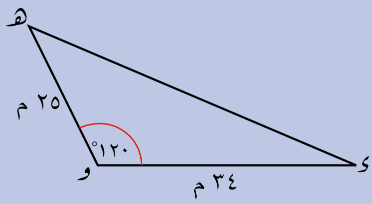
طول ا ع = ١٤,٠ سم (مقرَّبًا إلى أقرب عدد مكون من ٣ أرقام معنوية)

لاحظ أن ا ع = ب′، وتعرف أن $\text{ق}(\hat{\text{ب}}) = ٥٠°$.

استخدم قانون جيب التمام في صورة $(\text{ب}')^{٢} = (\text{أ}')^{٢} + (\text{ع}')^{٢} - ٢(\text{أ}')(\text{ع}')(\text{جتا}(\text{ب}))$.

مثال ٧

في المُثلَّث ى هـ و، ق(وَ̂) = ١٢٠°، طول الضلع هـ و = ٢٥ م، و طول الضلع وى = ٣٤ م.
احسب طول الضلع ى هـ.



الحلّ:

(و′)^{٢} = ٢٥^{٢} + ٣٤^{٢} − (٢ × ٢٥ × ٣٤ × جتا(١٢٠°))
= ٦٢٥ + ١١٥٦ − (−٨٥٠)
= ٦٢٥ + ١١٥٦ + ٨٥٠
= ٢٦٣١
∴ و′ = √٢٦٣١
= ٥١,٢٩٣٢...
طول الضلع ى هـ = ٥١,٣ م (مقرَّبًا إلى أقرب عدد مكوَّن من ٣ أرقام معنوية)

لاحظ أن جتا(١٢٠°) سالب.
ى هـ = و′، لذا استخدم قانون جيب التمام في صورة
(و′)^{٢} = (ى′)^{٢} + (هـ′)^{٢} − ٢(ى′)(هـ′)(جتا(و)).

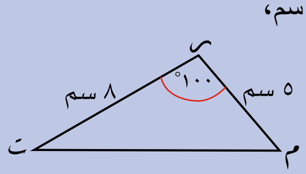
ضمّ قانونَي الجيب وجيب التمام

تبيّن الأمثلة الآتية كيفية ضمّ قانونَي الجيب وجيب التمام معًا لحلّ المسائل:

مثال ٨

في المُثلَّث ت م ر، ق(رَ̂) = ١٠٠°، طول الضلع ت ر = ٨ سم، وطول الضلع ر م = ٥ سم.

أ احسب طول الضلع ت م.
ب احسب ق(تَ̂)، ق(مَ̂) مُقرَّبَين إلى أقرب درجة.



الحلّ:

أ (ر′)^{٢} = ٥^{٢} + ٨^{٢} − (٢ × ٥ × ٨ × جتا(١٠٠°))
= ٢٥ + ٦٤ − (−١٣,٨٩١٨...)
= ... ١٠٢,٨٩١٨
∴ ر = √١٠٢,٨٩١٨...
= ...١٠,١٤٣٥
طول الضلع ت م = ١٠,١ سم (مقرَّبًا إلى أقرب منزلة عشريّة).

ت م = ر′، لذا استخدم قانون جيب التمام في صورة
(ر′)^{٢} = (ت′)^{٢} + (م′)^{٢} − ٢(ت′)(م′)(جتا(ر)).
لاحظ أن جتا(١٠٠°) عدد سالب.

ب الآن وقد عرفت قيمة ر′ وكذلك ن(رَ̂)، يمكنك أن تستخدم قانون الجيب:

$$\frac{\text{جا(ت)}}{\text{ت}'} = \frac{\text{جا(م)}}{\text{م}'} = \frac{\text{جا(ر)}}{\text{ر}'}$$

$$\frac{\text{جا(ت)}}{٥} = \frac{\text{جا(م)}}{٨} = \frac{\text{جا(١٠٠°)}}{١٠{,}١٤٣٥...}$$

$$\text{جا(ت)} = \frac{٥ \times \text{جا(١٠٠°)}}{١٠{,}١٤٣٥...} = ٠{,}٤٨٥٤...$$

استخدم الكسرَين: الأول، والثالث.

بما أن الزاوية ر منفرجة، فإن الزاوية ت حادة. لماذا؟

ن(تَ̂) = ... ٢٩,٠٤٠٩°

ن(تَ̂) = ٢٩° (إلى أقرب درجة)

ن(مَ̂) = ١٨٠° − (١٠٠° + ٢٩°) = ٥١° (مُقرّبًا إلى أقرب درجة).

لتجد ن(تَ̂)، استخدم مجموع قياسات زوايا المُثلَّث الذي يساوي ١٨٠°

مثــال ٩

أ استخدم الصيغة $(\text{ج}')^{٢} = (\text{أ}')^{٢} + (\text{ب}')^{٢} - ٢(\text{أ}')(\text{ب}')(\text{جتا(ج)})$. لتكتب جتا(ج) بدلالة أ′، ب′، ج′.

ب استخدم إجابتك في الجزئية (أ) لتجد قياس أصغر زاوية في مثلّث أطوال أضلاعه ٧ م، ٨ م، ١٣ م.

الحــلّ:

أ

$$(\text{ج}')^{٢} = (\text{أ}')^{٢} + (\text{ب}')^{٢} - ٢(\text{أ}')(\text{ب}')(\text{جتا(ج)})$$

$$٢(\text{أ}')(\text{ب}')\ (\text{جتا(ج)}) = (\text{أ}')^{٢} + (\text{ب}')^{٢} - (\text{ج}')^{٢}$$

$$\text{جتا(ج)} = \frac{(\text{أ}')^{٢} + (\text{ب}')^{٢} - (\text{ج}')^{٢}}{٢(\text{أ}')\ (\text{ب}')}$$

صحيح أن هذه الصيغة مفيدة لإيجاد قياس الزاوية، لكن حفظها ليس مهمًّا؛ لأنك تستطيع استنتاجها عندما تحتاج إليها.

ب استخدم نتيجة الجزئية (أ):

$$\text{جتا(ج)} = \frac{٨^{٢} + ١٣^{٢} - ٧^{٢}}{٢ \times ٨ \times ١٣}$$

$$= \frac{٦٤ + ١٦٩ - ٤٩}{٢٠٨}$$

$$= \frac{١٨٤}{٢٠٨}$$

$$\text{ن(جَ̂)} = \text{جتا}^{-١}\frac{١٨٤}{٢٠٨}$$

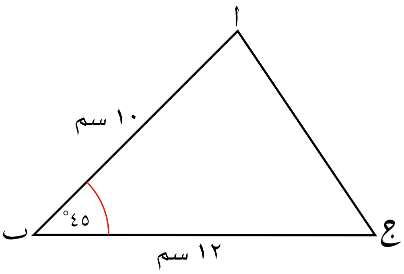
$$= ٢٧{,}٧٩٥٧...°$$

أصغر قياس زاوية في المُثلَّث = ٢٧,٨° (مُقرّبًا إلى أقرب منزلة عشريّة).

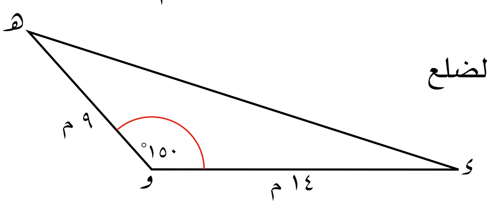
تعرف أن أصغر زاوية في المثلّث تقابل أقصر ضلع فيه. في المُثلَّث المعطى، أصغر زاوية تقابل الضلع الذي يبلغ طوله ٧ سم. لتكن هذه الزاوية ج، فيكون ج′ = ٧، أ′ = ٨، ب′ = ١٣

تمارين ١٣-٣

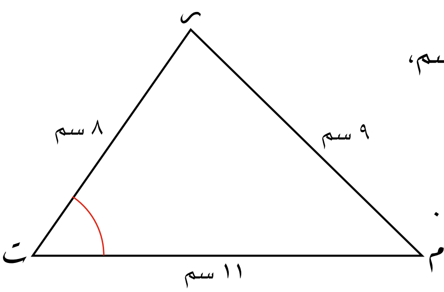
١) في المُثلَّث ا ب ج، ق(ب̂) = ٤٥°، طول الضلع ا ب = ١٠سم، طول الضلع ب ج = ١٢ سم.
احسب طول الضلع ا ج.



٢) في المُثلَّث ى هـ و ، ق(و̂) = ١٥٠°، طول الضلع هـ و = ٩ م، وطول الضلع و ى = ١٤ م.
احسب طول الضلع ى هـ.



٣) في المُثلَّث ت م ر، طول الضلع ت م = ١١ سم، وطول الضلع م ر = ٩ سم، وطول الضلع ر ت = ٨ سم.
احسب ق(ت̂) مُقرِّبًا إلى أقرب منزلة عشريّة.

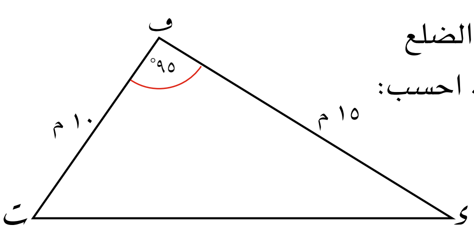


٤) في المُثلَّث ف ت ى، ق(ف̂) = ٩٥°، وطول الضلع ف ت = ١٠ م، وطول الضلع ف ى = ١٥ م. احسب:

أ طول الضلع ت ى.

ب ق(ى̂).

ج ق(ت̂).

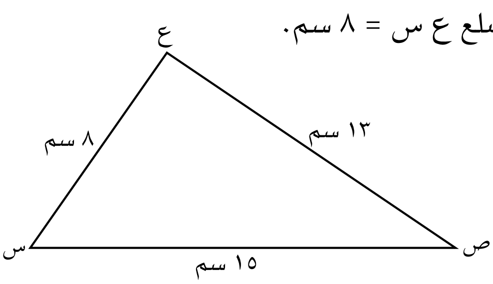


٥) في المُثلَّث س ص ع، طول الضلع س ص = ١٥ سم، وطول الضلع ص ع = ١٣ سم، وطول الضلع ع س = ٨ سم.
احسب:

أ ق(س̂).

ب ق(ص̂).

ج ق(ع̂).



سابقًا

عد إلى الوحدة (١١) لتتذكّر زاوية الاتّجاه من الشمال.

٦) أبحر قارب في خط مستقيم من الجزيرة (أ) بزاوية اتِّجاه من الشمال قياسها ٦٠°، وعندما قطع القارب مسافة ٨ كم، وصل إلى الجزيرة (ب)، ثم عاد وأبحر بزاوية اتِّجاه من الشمال قياسها ١٥٠°. ظلّ القارب يبحر بنفس زاوية الاتِّجاه من الشمال حتّى وصل إلى الجزيرة (ج) التي تبعد ١٢ كم عن الجزيرة (ب). عندما وصل إلى الجزيرة (ج)، عاد الربان مباشرة إلى الجزيرة (أ).

احسب:

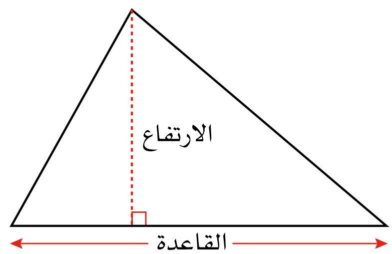
أ طول رحلة العودة.

ب قياس زاوية الاتِّجاه من الشمال التي على الربان أن يوجِّه القارب بها ليعود إلى الجزيرة (أ).

٧) يقف جمال في ركن حقل كبير. مشى بزاوية اتِّجاه من الشمال قياسها ٣٠° مسافة د مترًا، ثم غيّر اتِّجاهه ومشى ضعف المسافة بزاوية اتِّجاه من الشمال قياسها ١٢٠° في نهاية الرحلة، حسب جمال كلتا المسافتَين اللتَين يجب أن يقطعهما، وقياس زاوية اتِّجاه العودة إلى نقطة البداية. إذا علمت أن المسافة الكلّية التي قطعها جمال في المشي ١٢٠ مترًا، فما الإجابات الصحيحة التي سيحصل عليها جمال، علمًا بأن ما يقوله صحيح؟

١٣-٤ مساحة المثلّث

عرفت أن مساحة المُثلَّث تُعطى بالصيغة الآتية:

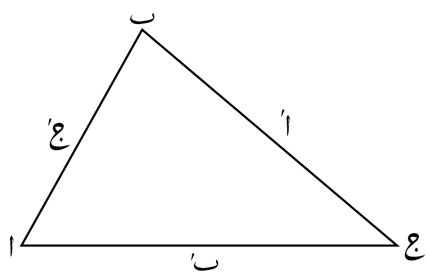


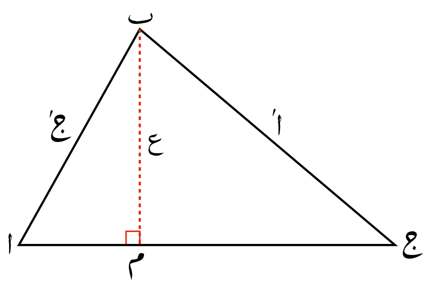
المساحة = $\frac{١}{٢}$ × القاعدة × الارتفاع

يمكن استخدام هذه الطريقة إذا علمت كلًّا من القاعدة والارتفاع، لكن إذا كنت تجهل هذه القيَم فعليك أن تستخدم طريقة أخرى.

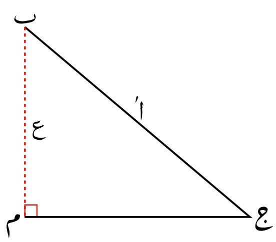
يمكنك أن تحسب مساحة أي مُثلَّث باستخدام ع المُثلّثات.

انظر المُثلّث ا ب ج المبيّن في الشكل الآتي:





تم رسم النسخة الثانية من المُثلَّث ورسم ارتفاعه الذي لا تعرف طوله. لكن إذا رسمت المُثلّث القائم ب ج م منفصلًا، فيمكنك استخدام أساسيات حساب المُثلَّثات لتجد قيمة ع.



لاحظ أن طول الضلع المقابل للزاوية ج = ع ، وأن الوتر = اَ.

باستخدام نسبة الجيب: جا(ج) = $\frac{ع}{اَ}$ ⇐ ع = اَ جا(ج).

هذا يعني أنك تعلم الارتفاع الآن، ويمكنك أن تستخدم طول القاعدة ب لتحسب المساحة:

المساحة = $\frac{١}{٢}$ × القاعدة × الارتفاع

= $\frac{١}{٢}$ × ب × ا × جا(ج)

المساحة = $\frac{١}{٢}$ ا × ب × جا(ج)

في الحقيقة، تستطيع أن تستخدم أي ضلع في المُثلَّث كقاعدة له، وترسم ارتفاع المُثلّث المرافق للقاعدة؛ وأنك تستطيع بالتالي أن تحسب المساحة بالصيغتَين:

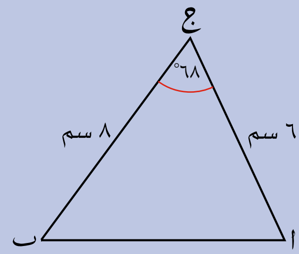
المساحة = $\frac{١}{٢}$ ا ج جا(ب) أو المساحة = $\frac{١}{٢}$ ب ج جا(ا)

في كل حالة، يتقاطع الضلعان المستخدمان عند الزاوية المحصورة بينهما.

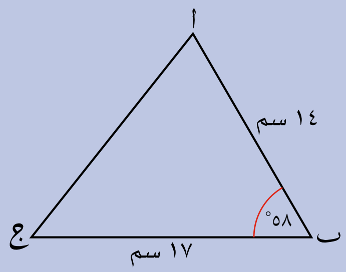
مثـــال ١٠

احسب مساحة كل مُثلَّث من المُثلَّثين الآتيَين:

أ



ب



الحـــلّ:

أ المساحة = $\frac{١}{٢}$ أ′ × ب′ × جا(ع)

= $\frac{١}{٢}$ × ٨ × ٦ × جا(٦٨°)

= ٢٢,٣ سم^{٢} (مُقرَّبة إلى أقرب منزلة عشريّة).

نحتاج دائمًا إلى معرفة طول ضلعَين، وقياس الزاوية المحصورة بينهما.

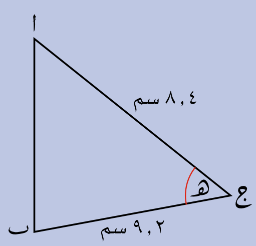
ب المساحة = $\frac{١}{٢}$ أ′ × ع′ × جا(ب)

= $\frac{١}{٢}$ × ١٧ × ١٤ × جا(٥٨°)

= ١٠٠,٩ سم^{٢} (مُقرَّبة إلى أقرب منزلة عشريّة).

مثـــال ١١

يبيّن الشكل المقابل مُثلَّثًا مساحته ٢٠ سم^{٢}. احسب ق($\hat{هـ}$).



الحـــلّ:

المساحة = $\frac{١}{٢}$ × ٨,٤ × ٩,٢ جا(هـ) = ٢٠

جا(هـ) = $\frac{٢ \times ٢٠}{٨,٤ \times ٩,٢}$

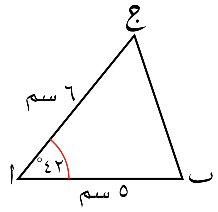
فيكون، ق($\hat{هـ}$) = جا$^{-١}$ ($\frac{٢ \times ٢٠}{٨,٤ \times ٩,٢}$)

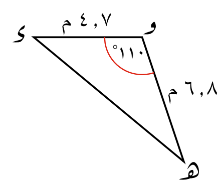
= ٣١,٢° (مُقرَّبًا إلى أقرب منزلة عشريّة).

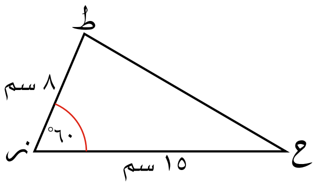
اجعل جا(هـ) موضوع الصيغة. اضرب طرفَي المعادلة في ٢، واقسم على (٨,٤ × ٩,٢).

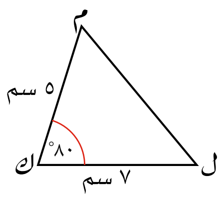
تمارين ١٣-٤

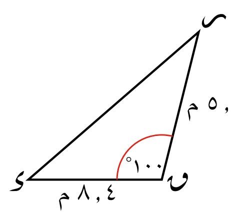
١) أوجد مساحة كلّ مثلّث من المثلّثات الآتية:

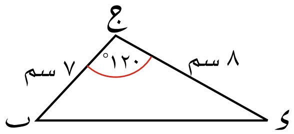
أ


ب


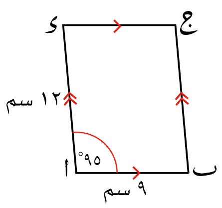
ج


د


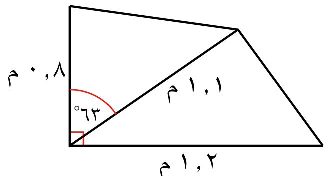
هـ


و


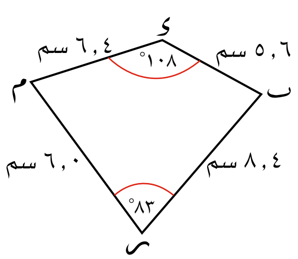
٢) أوجد مساحة متوازي الأضلاع المجاور.



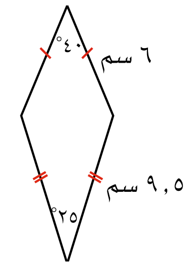
٣) يبيّن الشكل المجاور أبعاد حديقة عشبية صغيرة.
أوجد مساحة الحديقة، مقربًا الناتج إلى أقرب منزلتَين عشريتَين.

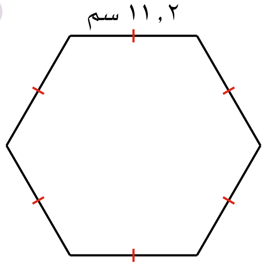


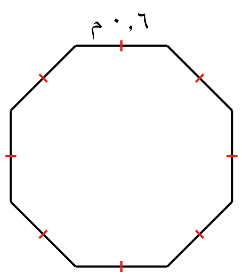
٤) أوجد مساحة الشكل م ر ب ى المجاور.



٥) أوجد مساحة كل مضلّع من المضلعات الآتية مقربًا الناتج إلى أقرب منزلة عشريّة.

أ


ب


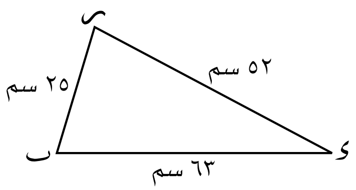
ج


٦) يُنصِّف قطرا متوازي أضلاع أحدهما الآخر، ويشكلان زاوية قياسها ٤٢°. إذا كان طولا القطرَين ٢٦ سم، و٢٠ سم. فأوجد ما يأتي:

أ مساحة متوازي الأضلاع.

ب أطوال الأضلاع.

٧) يبيّن الشكل المجاور المُثلّث ب ى ر الذي تبلغ مساحته ٦٣٠ سم^2.



أ استخدم صيغة المساحة = $\frac{1}{2}$ ب′ × ر × جا(ى) لتجد ق($\hat{ى}$) مُقرِّبًا إلى أقرب منزلة عشريّة.

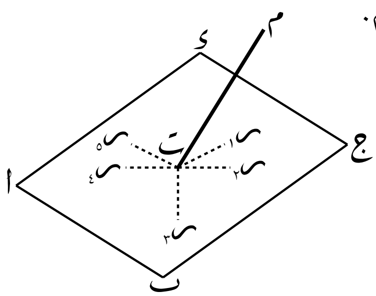
ب أوجد ق($\hat{ب}$) مُقرِّبًا إلى أقرب منزلة عشريّة.

٨) احسب مساحة مثلث أطوال أضلاعه ٥ سم و ١٠ سم و ١٢ سم.

١٣-٥ النسب المثلّثية في المُجسّمات

يبحث الدرس الأخير من وحدة حساب المُثلّثات في كيفية استخدام النسب المُثلّثية في المُجسّمات. ولكي تحل مسائل من هذا النوع، يجب أن ترسم كلّ مثلّث تريد استخدامه، وتسمّيه. يساعدك هذا على تنظيم أفكارك، والحفاظ على ترتيب حلولك.

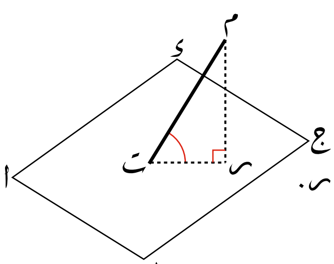
عندما تتعامل مع المُجسَّمات، قد تحتاج إلى حساب الزاوية بين الضلع أو القطر وأحد الوجوه. تُسمّى تلك الزاوية بالزاوية بين مستوٍ ومستقيم.



يتقاطع المستقيم ت م مع المستوى ا ب ج ى في النقطة ت. ارسم من النقطة ت المستقيمات ت $ر_١$، ت $ر_٢$، ت $ر_٣$، .... في المستوى، واعتمد الزوايا م ت $ر_١$، م ت $ر_٢$، م ت $ر_٣$، ...

- إذا كان ت م عموديًّا على المستوى، فإن جميع هذه الزوايا قائمة.
- إذا كان ت م ليس عموديًّا على المستوى، فإن قياس هذه الزوايا سيختلف.

تكون أصغر الزوايا بين المُستقيم ت م والمستوى ا ب ج ى هي الزاوية بين المستقيم والمستوى.



ولتحدِّد هذه الزاوية، نفِّذ الخطوات الآتية:

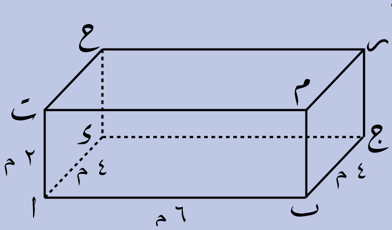
- ارسم عمودًا من م على المستوى. سمّ قاعدته ر.
- الزاوية بين المُستقيم م ت والمستوى هي الزاوية م ت ر.

يُسمّى ت ر **مسقط** ت م على المستوى ا ب ج ى.

تبيّن الأمثلة الآتية كيفية التعامُل مع مسائل مختلفة المُجسّمات:

مثــال ١٢

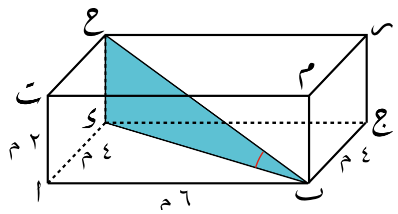
يمثِّل الشكل المجاور غرفة على شكل متوازي مستطيلات.
طول ا ب = ٦ م، طول ا ى = ٤ م، طول ا ت = ٢ م.
احسب قياس الزاوية بين القطر ب ع وأرض الغرفة ا ب ج ى.



الحــلّ:

أوّلًا، حدِّد الزاوية المطلوبة. ب هي النقطة التي يتقاطع فيها القطر ب ع مع المستوى ا ب ج ى.

قد يكون مفيدًا استخدام الألوان أو التظليل في الأشكال التي تتضمَّن مُجسّمات.



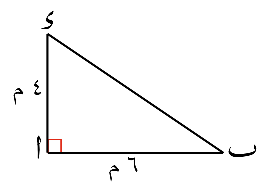
يمثِّل المستقيم ع ى عمودًا من ع على المستوى ا ب ج ى، فيكون ى ب مسقط ع ب على المستوى.

الزاوية المطلوب قياسها هي ع ب ى.

أعد رسم كل مثلّث ستستخدمه، لتتمكَّن من استخدامه بسهولة.

تعلم أن المُثلَّث ع ب ى قائم الزاوية في ى، وأن طول ع ى = ٢ م (يساوي طول ا ت).

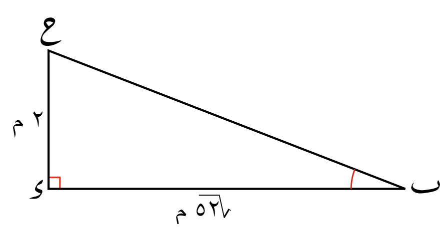
لتجد ن(ع ب̂ ى)، يجب أن تعرف طول ى ب أو طول ع ب. يمكنك أن تجد طول ب ى باستخدام نظرية فيثاغورث في المُثلَّث ا ب ى.



$(ب ى)^٢ = ٦^٢ + ٤^٢ = ٥٢$

$ب ى = \sqrt{٥٢}$

∴ باستخدام المُثلَّث القائم ع ب ى:



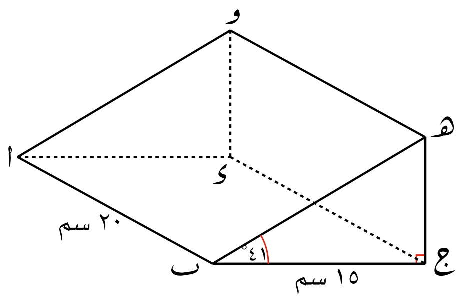
$ظا(ب) = \frac{\text{طول الضلع المقابل للزاوية (ب)}}{\text{طول الضلع المجاور للزاوية (ب)}} = \frac{ع ى}{ب ى}$

$= \frac{٢}{\sqrt{٥٢}}$

$ن(ع \hat{ب} ى) = ظا^{-١}(\frac{٢}{\sqrt{٥٢}}) = ... ١٥,٥٠١٣$

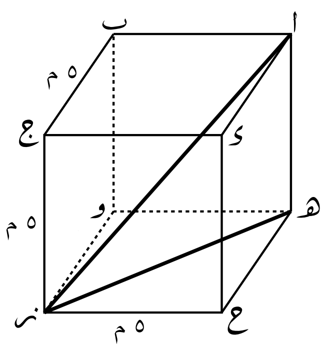
قياس الزاوية بين القطر ب ع، وأرض الغرفة ا ب ج ى = ١٥,٥° (مقرَّبًا إلى أقرب منزلة عشريّة).

تمارين ١٣-٥



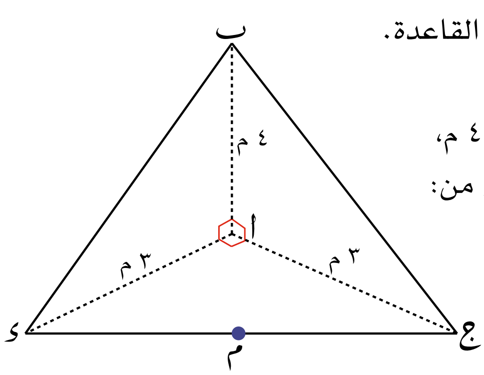
١) يمثّل الشكل المجاور منشورًا مثلَّث القاعدة.
القاعدة المستطيلة ا ب ج ى أفقية.
طول الضلع ا ب = ٢٠ سم،
وطول الضلع ب ج = ١٥ سم،
والمقطع العرضي للمنشور هو المُثلّث
ب ج هـ قائم الزاوية في ج. ق(هـ بَ ج) = ٤١°، احسب:

أ. طول الضلع ا ج.
ب. طول الضلع هـ ج.
ج. قياس الزاوية المحصورة بين المستقيم ا هـ والمستوى الأفقي.



٢) في الشكل المجاور، مكعّب طول ضلعه ٥ م.

أ. استخدم نظرية فيثاغورث لتحسب المسافة هـ ن.
ب. استخدم نظرية فيثاغورث لتحسب المسافة ا ن.
ج. احسب قياس الزاوية المحصورة بين الضلع ا ن والمستوى هـ و ن ع، مقرّبًا الناتج إلى أقرب منزلة عشريّة.



٣) يبيّن الشكل المجاور ا ب ج ى هرمًا مثلّث القاعدة.
الضلع ب ا عمودي على القاعدة،
م نقطة منتصف الضلع ج ى. طول ا ب = ٤ م،
طول ا ج = ٣ م، طول ا ى = ٣ م. أوجد كلًّا من:

أ. ق(ا جَ ب).
ب. طول ب ج.
ج. طول ج ى.
د. طول ب م.
هـ. ق(ب جَ ى).

٤) متوازي مستطيلات طوله ١٤ سم، وعرضه ٥ سم، وارتفاعه ٣ سم. احسب:

أ. طول قطر قاعدته.
ب. طول أطول قطر فيه.
ج. قياس الزاوية بين القاعدة وأطول قطر.

٥) عبوة عصير ا ب ج ى على شكل هرم مثلّث القاعدة. المُثلّث ا ب ج هو القاعدة، والزاوية ب قائمة. تقع النقطة ى رأسيًّا أعلى النقطة ا. بدلالة المعطيات المناسبة أوجد:

أ طول ا ج.

ب طول ى ا.

ج طول ى ج.

د ق($\widehat{\text{ى ا ب}}$).

هـ ق($\widehat{\text{ب ى ج}}$).

و ق($\widehat{\text{ا ى ج}}$).

مُلخَّص

ما يجب أن تعرفه:

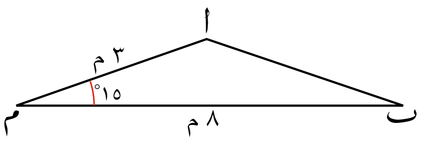
- يمكن استخدام دوال الجيب، وجيب التمام، والظل في حل معادلات مثلّثية.
- يمكن استخدام قوانين الجيب، وجيب التمام، لحساب أطوال الأضلاع المجهولة، والزوايا المجهولة في مثلّثات ليست قائمة الزاوية.
- يُستخدم قانون الجيب في حساب قياس زاوية بشرط قياس زاوية أخرى وطول ضلعَين آخرَين، أو حساب طول ضلع بشرط طول ضلع آخر وقياس زاويتَين أُخريَين. يجب أن تُنظَّم الأضلاع والزوايا في أزواج متقابلة.
- يُستخدم قانون جيب التمام في حساب قياس زاوية بشرط أطوال ثلاثة أضلاع، أو في حساب طول ضلع بشرط قياس زاوية وطولَي ضلعَين آخرين.
- يمكن حساب مساحة مثلّث ليس قائم الزاوية باستخدام جيب الزاوية.

يجب أن تكون قادرًا على:

- استخدام دوال الجيب، وجيب التمام، والظل في حل معادلات مثلّثية، وإيجاد جميع الحلول الواقعة بين ٠° و ٣٦٠°.
- استخدام قوانين الجيب، وجيب التمام، لتجد قياس زوايا مجهولة، وأطوال أضلاع مجهولة في مثلّثات ليست قائمة.
- استخدام حساب المُثلّثات في الـمُجسّمات.
- إيجاد مساحة مثلث ليس قائم الزاوية.

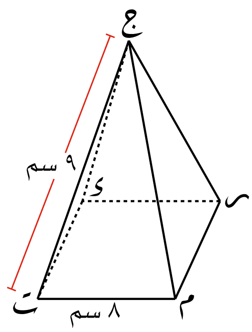
تمارين نهاية الوحدة

نماذج أسئلة اختبار



١) في المُثلّث المجاور م ا ب: ق(اَمْ ب) = ١٥°، طول م ا = ٣ م ، وطول م ب = ٨ م. احسب مُقرِّبًا إلى أقرب منزلتَين عشريتَين:

أ طول الضلع ا ب. ب مساحة المُثلّث م ا ب.

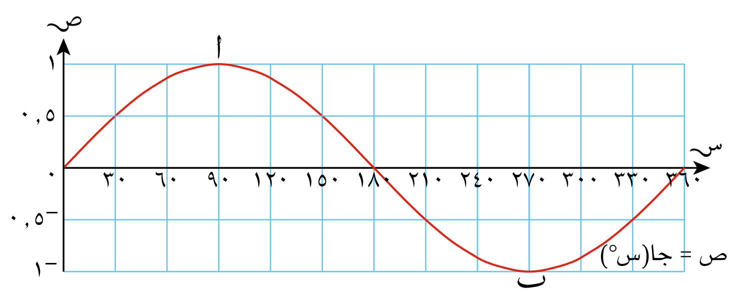


٢) يبيّن الشكل المجاور الهرم ج ت م ر ى. قاعدة الهرم ت م ر ى مربَّعة الشكل طول ضلعها ٨ سم. طول كلّ ضلع من الأضلاع المائلة ٩ سم. احسب:

أ ارتفاع الهرم.

ب قياس الزاوية التي يشكِّلها الضلع المائل ج ت مع القاعدة.

٣) يبيّن الشكل أدناه التمثيل البياني للدالة ص = جا(س)، حيث ٠° ⩽ س ⩽ ٣٦٠°



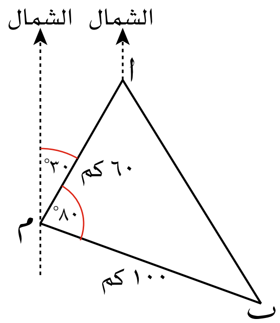
أ اكتب إحداثيات النقطة ا، وهي نقطة على التمثيل البياني حيث س = ٩٠°

ب أوجد قيمة جا(٢٧٠°).

ج انسخ الشكل، وارسم المستقيم ص = − $\frac{١}{٢}$، حيث ٠° ⩽ س ⩽ ٣٦٠°

د كم حلًّا يوجد للمعادلة جا(س) = − $\frac{١}{٢}$، حيث ٠° ⩽ س ⩽ ٣٦٠°؟

٤ غادرت الميناء (م) سفينتان في نفس الوقت. أبحرت إحداهما مسافة ٦٠ كم بزاوية اتِّجاه من الشمال قياسها ٠٣٠ ° إلى الموقع (أ)، في حين أبحرت الأخرى مسافة ١٠٠ كم بزاوية اتِّجاه من الشمال قياسها ١١٠ ° إلى الموقع (ب).



أ احسب:

(١) المسافة أ ب.

(٢) ق(م $\hat{أ}$ ب).

(٣) قياس زاوية اتِّجاه الموقع (ب) بالنسبة إلى الموقع (أ).

ب استغرقت كلتا السفينتَين نفس الزمن، ن ساعة، لتصلا إلى موقعَيهما. كانت سرعة السفينة الأسرع ٢٠ كم/ساعة. اكتب:

(١) قيمة الزمن ن.

(٢) سرعة السفينة الأبطأ.

٥ أيّ من هذين المثلثين مساحته أكبر؟

المثلث (أ): أطوال أضلاعه ٦ سم ، ٦ سم ، ٦ سم.

المثلث (ب): أطوال اضلاعه ٥ سم ، ٦ سم ، ٧ سم.

الوحدة الرابعة عشرة: هندسة المُتّجهات

المُفردات

- المُتّجه Vector
- الطول Magnitude
- المقدار العددي Scalar
- المتجه الرأسي Column vector
- متّجه الموضع Position vector

سوف تتعلّم في هذه الوحدة كيف:

- تجمع المُتّجهات وتطرحها وتضربها في عدد.
- تحسب طول المُتّجه.
- تُمثّل المُتّجه بطرق تقليدية.
- تستخدم جمع المُتّجهات وطرحها لتعبّر عنهما بدلالة مُتّجهات تقع في المستوى نفسه.
- تستخدم متّجه الموضع.

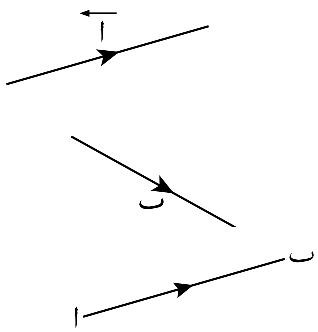
تبيّن الصورة أعلاه قطعة من قماش الباتيك، وهو لباس تقليدي في جمهورية غانا. كرّر مُصمّم القماش الأشكال من خلال تحريكها. تعدّ تلك الأشكال رياضيًا أحد استخدامات المُتّجهات.

تتكوّن المُتّجهات من قطع مستقيمة لها طول واتّجاه. وأنت، حتى الآن، استخدمت المُتّجهات في إزاحة المُجسّمات. لذا، سوف تتعرّف في هذه الوحدة على طرائق مختلفة لكتابة المُتّجهات، وتتعامل معها جبريًا، وتستخدمها في حل مسائل هندسية، وعلى الرغم من إمكان استخدام المُتّجهات في الأشكال ثلاثية الأبعاد، إلا أننا في هذه الوحدة سوف نستخدم المُتّجهات في الأشكال ثنائية الأبعاد فقط، فعندما يكون هناك متّجهان في نفس المستوى، فإنهما يُسميان بالمُتّجهين المستويَين.

١٤-١ المُتّجهات

توصف المتّجهات بمعرفة **مقدارها (طولها) واتجاهها**. كأن تقول: إنّ سرعة الرياح القادمة من الجنوب الشرقي تبلغ ٣٥ كم/ ساعة أو التسارع إلى الأعلى يبلغ ٢ م/(ثانية)^{٢}. فالقوة، والإزاحة، والتسارع كلها **كمّيات متّجهة**. في حين توصف بعض الكمّيات الأخرى، مثل الزمن، ودرجة الحرارة، والكتلة، والمساحة، مقدارًا فقط من دون اتّجاه. تُسمى هذه المقادير في الرياضيات **الكميات العددية**.

صيغة المُتّجه



يوصف المُتّجه بقطعة مستقيمة متّجهة، كما هو مبيّن في الشكل المجاور. لاحظ أن الصيغة قد تكون حرفًا مع سهم أعلى الرمز، أو حرفًا غامقًا.

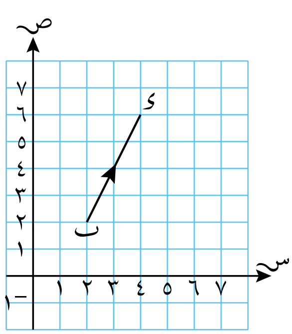
ويمكن أن يمثّل المُتّجه بقطعة مستقيمة اب. ويُعبّر عنه في هذه الحالة بـ **اب** أو $\overleftarrow{\text{اب}}$

إنّ ترتيب الحروف مهمّ، لأنه يُعبّر عن اتّجاه القطعة المستقيمة، لذا فإن $\overleftarrow{\text{اب}}$ يختلف عن $\overleftarrow{\text{ب ا}}$.

رابط

هناك عدة تطبيقات للمُتّجهات في الفيزياء. كأن تُستخدم المُتّجهات لنمذجة الطريقة التي يؤثّر بها الاحتكاك على الحركة في أسفل مُنحدر، أو لإيجاد المسافة التي يقطعها جسم مقذوف قبل أن يسقط. تكتسب هذه التطبيقات أهميّة كبيرة في الحياة اليومية حيث تستخدم، مثلًا، للتأكد من عدم تصادم طائرتَين في الفضاء، وللتأكد أيضًا من هبوطهما بسلام عند هبوب ريح عاتية.

كتابة المُتّجه في صورة زوج مرتّب



يُكتب المُتّجه أيضًا في صورة **متّجه رأسي** باستخدام زوج مرتّب من الأعداد يعبّر عن مقدار الكمية المتجهة واتجاهها.

انظر إلى القطعة المستقيمة ب ى في الشكل المجاور:

- تمثّل القطعة المستقيمة انسحاب النقطة ب إلى النقطة ى.
- حدث انسحاب للنقطة ب بمقدار وحدتين في الاتّجاه الموجب لمحور السينات، وأربع وحدات في الاتّجاه الموجب لمحور الصادات. يمكن أن نعبّر عن هذا الانسحاب بالزوج المرتّب الرأسي $\begin{pmatrix}٢\\٤\end{pmatrix}$.

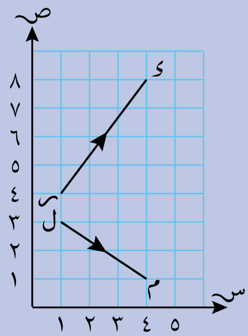
يُبيّن العدد الأول الحركة الأفقية (الموازية لمحور السينات)، في حين يُبيّن العدد الثاني الحركة الرأسية (الموازية لمحور الصادات).

∴ يمكنك أن تكتب: $\overleftarrow{\text{ب ى}} = \begin{pmatrix}٢\\٤\end{pmatrix}$.

تشير إشارة السالب إلى أن الحركة تتّجه إلى اليسار أو إلى الأسفل.

مثـــال ١

عبّر عن $\overleftarrow{\text{ر ى}}$ ، $\overleftarrow{\text{ل م}}$ في صورة متّجه رأسي.



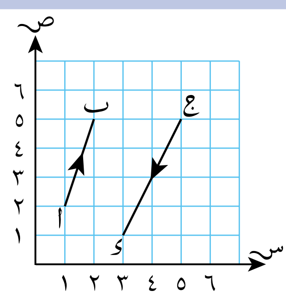
الحــلّ:

$\overleftarrow{\text{ر ى}} = \begin{pmatrix} ٣ \\ ٤ \end{pmatrix}$	سحب ر إلى ى ثلاث وحدات إلى اليمين، وأربع وحدات إلى الأعلى.
$\overleftarrow{\text{ل م}} = \begin{pmatrix} ٣ \\ ٢- \end{pmatrix}$	سحب ل إلى م ثلاث وحدات إلى اليمين، ووحدتَين إلى الأسفل.

مثـــال ٢

ارسم المُتّجهين الرأسيّين $\overleftarrow{\text{أ ب}} = \begin{pmatrix} ١ \\ ٣ \end{pmatrix}$ ، $\overleftarrow{\text{ج ى}} = \begin{pmatrix} ٢- \\ ٤- \end{pmatrix}$.

الحــلّ:

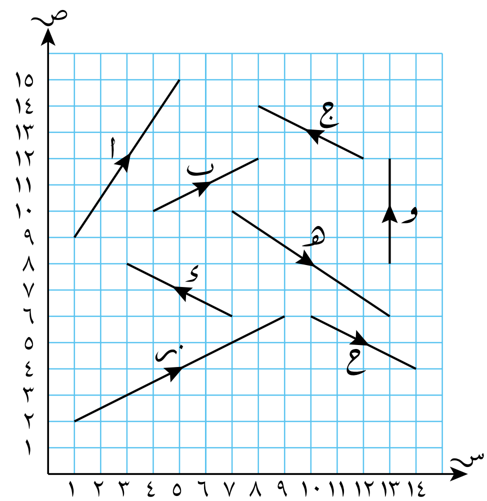


ابدأ من النقطة ا، وتحرّك وحدة واحدة إلى اليمين، ثم ثلاث وحدات إلى الأعلى، لتصل إلى النقطة ب. صل بين النقطتَين، وأشر إلى الاتجاه بسهم.

ابدأ من النقطة ج، وتحرك وحدتَين إلى اليسار، وأربع وحدات إلى الأسفل، لتصل إلى النقطة ى. صل بين النقطتَين، وأشر إلى الاتّجاه بسهم.

تمارين ١٤-١

١) اكتب متّجهًا رأسيًّا لكلّ متّجه من المُتّجهات المبيّنة في الشكل أدناه.



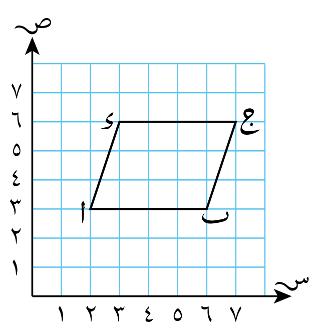
٢) مثّل كل متّجه من المُتّجهات الآتية على ورقة رسم بياني:

أ $\overleftarrow{\text{اب}} = \begin{pmatrix}٥\\٢\end{pmatrix}$ ب $\overleftarrow{\text{جد}} = \begin{pmatrix}٢\\٢\end{pmatrix}$ ج $\overleftarrow{\text{هو}} = \begin{pmatrix}-١\\٣\end{pmatrix}$ د $\overleftarrow{\text{زح}} = \begin{pmatrix}٠\\٣\end{pmatrix}$

هـ $\overleftarrow{\text{طي}} = \begin{pmatrix}-٢\\٠\end{pmatrix}$ و $\overleftarrow{\text{من}} = \begin{pmatrix}-٢\\-٤\end{pmatrix}$ ز $\overleftarrow{\text{كل}} = \begin{pmatrix}٠\\-٥\end{pmatrix}$ ح $\overleftarrow{\text{سع}} = \begin{pmatrix}-٣\\-٣\end{pmatrix}$

ط $\overleftarrow{\text{فص}} = \begin{pmatrix}٤\\٠\end{pmatrix}$ ي $\overleftarrow{\text{ور}} = \begin{pmatrix}-٣\\-٢\end{pmatrix}$ ك $\overleftarrow{\text{شت}} = \begin{pmatrix}-٥\\٠\end{pmatrix}$ ل $\overleftarrow{\text{صغ}} = \begin{pmatrix}-٤\\٢\end{pmatrix}$

٣) في الرسم البياني المجاور، ا ب ج د متوازي أضلاع.
اكتب المُتّجهات الرأسية لكلّ من:



أ $\overleftarrow{\text{اب}}$، $\overleftarrow{\text{دج}}$

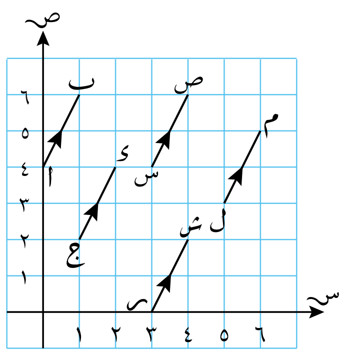
ب $\overleftarrow{\text{بج}}$، $\overleftarrow{\text{اد}}$

ج ماذا تقول عن زَوْجَي المُتّجهات في الجزئيتين أ، ب؟

١٤-٢ المُتّجهات المتوازية

المُتّجهات المتساوية

يكون للمُتّجهات المتساوية الطول نفسه والاتّجاه نفسه. ولما كانت المُتّجهات مستقلّة في الموقع، فقد تبدأ من أيّ نقطة.



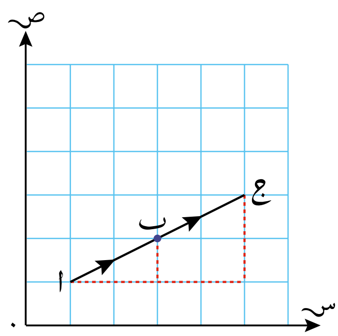
يمكن لنفس المُتّجه أن يشغل عدّة مواقع.

ففي الرسم المجاور:

$\overleftarrow{\text{اب}}$، $\overleftarrow{\text{جى}}$، $\overleftarrow{\text{س ص}}$، $\overleftarrow{\text{لم}}$، $\overleftarrow{\text{رش}}$، متّجهات متساوية.

$\overleftarrow{\text{اب}} = \overleftarrow{\text{جى}} = \overleftarrow{\text{س ص}} = \overleftarrow{\text{لم}} = \overleftarrow{\text{رش}} = \begin{pmatrix}١\\٢\end{pmatrix}$.

ضرب المُتّجه في مقدار عددي



انظر إلى الشكل المجاور. طول المُتّجه $\overleftarrow{\text{اج}}$ يساوي ضعف طول المُتّجه $\overleftarrow{\text{اب}}$ ولهما الاتّجاه نفسه.

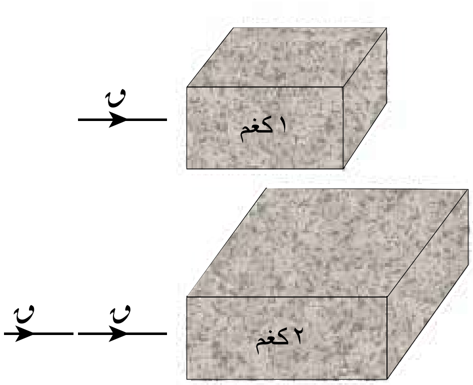
لذا يمكن القول:

$\overleftarrow{\text{اج}} = ٢\overleftarrow{\text{اب}} = ٢\begin{pmatrix}٢\\١\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}٤\\٢\end{pmatrix}$

المتجه $\overleftarrow{\text{اب}}$ يوازي المتجه $\overleftarrow{\text{اج}}$.

تذكّر أن الكمية العددية هي كمية لها مقدار، و ليس لها اتّجاه.

مثال آخر:



سوف تستخدم القوة الممثَّلة بالمُتّجه $\overrightarrow{\text{ق}}$ لتحريك خرسانة كتلتها ١ كغم.

إذا رغبت في تحريك قطعة خرسانة كتلتها ٢ كغم، فإنك تحتاج إلى ضعف هذه القوة. أي أنّك تحتاج إلى $\overrightarrow{\text{ق}} + \overrightarrow{\text{ق}}$ أو $٢\overrightarrow{\text{ق}}$

يكون اتّجاه القوة $٢\overrightarrow{\text{ق}}$ هو نفس اتّجاه القوة $\overrightarrow{\text{ق}}$، ولكنّ مقدارها يبلغ ضعف مقدار $\overrightarrow{\text{ق}}$

إذا ضربت المُتّجه $\begin{pmatrix}\text{س}\\\text{ص}\end{pmatrix}$ في العدد ت فإنّه يعطيك: ت $\begin{pmatrix}\text{س}\\\text{ص}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{ت س}\\\text{ت ص}\end{pmatrix}$.

لكن لا يمكن ضرب المُتّجهات بعضها في بعض، بل يمكنك أن تضرب المُتّجه في عامل ثابت أو مقدار عددي.

ناتج ضرب المُتّجه $\overleftarrow{\text{أ}}$ في العدد ٢ هو المُتّجه $٢\overleftarrow{\text{أ}}$. صحيح أن مقدار المُتّجه $٢\overleftarrow{\text{أ}}$ يساوي ضعف مقدار المُتّجه $\overleftarrow{\text{أ}}$، لكن لهما الاتّجاه نفسه، أي أنهما متوازيان أو يقعان على مستقيم واحد.

$\therefore$ $\overleftarrow{\text{أ}} = \begin{pmatrix}٣\\٢\end{pmatrix}$، فإن $٢\overleftarrow{\text{أ}} = ٢\begin{pmatrix}٣\\٢\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}٦\\٤\end{pmatrix}$.

ضرب المُتّجه $\overleftarrow{\text{أ}}$ في العدد $^{-}١$ هو المُتّجه $^{-}\overleftarrow{\text{أ}}$. عكس اتجاه المُتّجه $\overleftarrow{\text{أ}}$، ولكن لهما المقدار نفسه.

للمتّجهين ا، ث ا (ث عدد موجب) نفس الاتجاه، ولكن مقدار المتّجه الثاني يساوي ث ضرب مقدار المتّجه الأول. وللمتّجهين ا، ث ا (ث عدد سالب) اتّجاهان متعاكسان، ولكن مقدار المتّجه الثاني يساوي ث ضرب مقدار المتّجه الأول.

مثال ٣

إذا كان $\overleftarrow{\text{هـ}} = \begin{pmatrix} ٨ \\ -٤ \end{pmatrix}$، فأوجد $\frac{١}{٤}\overleftarrow{\text{هـ}}$

الحلّ:

$\frac{١}{٤}\overleftarrow{\text{هـ}} = \frac{١}{٤}\begin{pmatrix} ٨ \\ -٤ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{١}{٤} \times ٨ \\ \frac{١}{٤} \times -٤ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢ \\ -١ \end{pmatrix}$	اضرب كلا العددَين في $\frac{١}{٤}$

مثال ٤

إذا كان $\overleftarrow{\text{ف}} = \begin{pmatrix} -٣ \\ ٢ \end{pmatrix}$، أوجد $-٥\overleftarrow{\text{ف}}$

الحلّ:

$-٥\overleftarrow{\text{ف}} = -٥\begin{pmatrix} -٣ \\ ٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -٥ \times -٣ \\ -٥ \times ٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١٥ \\ -١٠ \end{pmatrix}$	مقدار هذا المُتّجه يساوي ٥ أضعاف مقدار المُتّجه الأصلي، لكنه في الاتّجاه المعاكس له.

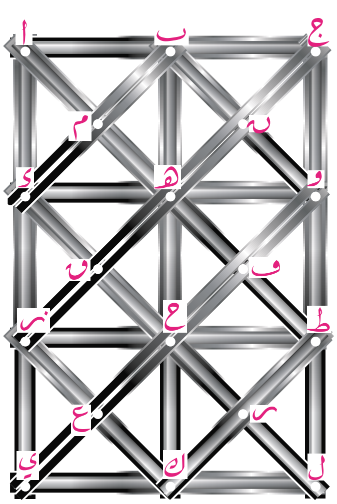
تمارين ١٤-٢

١) إذا كان $\overleftarrow{\text{ا}} = \begin{pmatrix} ٣ \\ -٧ \end{pmatrix}$، فاحسب:

أ $٣\overleftarrow{\text{ا}}$ ب $\frac{١}{٢}\overleftarrow{\text{ا}}$ ج $-٢\overleftarrow{\text{ا}}$

د $-\overleftarrow{\text{ا}}$ هـ $-\frac{٣}{٤}\overleftarrow{\text{ا}}$ و $١,٥\overleftarrow{\text{ا}}$

طبّق مهاراتك



٢) يبيّن الشكل المجاور مستطيلًا من الأعمدة المعدنية. يمكن تمثيل كل قسم في المستطيل بمتّجه. ويمكن مقارنة الأقسام بدلالة المُتّجهات؛ فمثلًا، $\overleftarrow{\text{اي}} = ٣\overleftarrow{\text{اد}}$.

انسخ وأكمل كل عبارة من العبارات الآتية:

أ $\overleftarrow{\text{دو}} = \_\_\_\_ \overleftarrow{\text{يك}}$ ب $\overleftarrow{\text{يع}} = \_\_\_\_ \overleftarrow{\text{يو}}$

ج $\overleftarrow{\text{حف}} = \_\_\_\_ \overleftarrow{\text{حو}}$ د $٢\overleftarrow{\text{زق}} = \_\_\_\_ \overleftarrow{\text{زج}}$

هـ $٣\overleftarrow{\text{يز}} = \_\_\_\_ \overleftarrow{\text{جل}}$ و $٦\overleftarrow{\text{بهـ}} = \_\_\_\_ \overleftarrow{\text{اي}}$

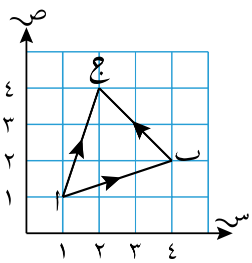
٣) إذا كان $\overleftarrow{\text{ا}} = \begin{pmatrix} -١ \\ -٤ \end{pmatrix}$، $\overleftarrow{\text{ب}} = \begin{pmatrix} ٣ \\ ٧ \end{pmatrix}$، فاحسب:

أ $-٢\overleftarrow{\text{ا}}$ ب $٣\overleftarrow{\text{ب}}$ ج $\frac{٣}{٢}\overleftarrow{\text{ب}}$ د $-\frac{٣}{٤}\overleftarrow{\text{ا}}$ هـ $-١,٥\overleftarrow{\text{ا}}$

و $-١٢\overleftarrow{\text{ب}}$ ز $-\frac{٣}{٢}\overleftarrow{\text{ا}}$ ح $-\frac{٥}{٩}\overleftarrow{\text{ب}}$

١٤-٣ حساب المُتّجهات

جمع المُتّجهات



في الشكل المجاور، سُحبت النقطة ا إلى النقطة ب،
ثم سُحبت مرّة أخرى لتنتهي عند النقطة ع. إذا سُحبت
النقطة مباشرة من ا إلى ع، فسوف تنتهي عند نفس النقطة،
أي: $\overleftarrow{\text{اب}} + \overleftarrow{\text{بع}} = \overleftarrow{\text{اع}}$

يمكنك أن تمثّل كل انسحاب بمتّجه رأسي:

$\overleftarrow{\text{اب}} = \begin{pmatrix}٣\\١\end{pmatrix}$، $\overleftarrow{\text{بع}} = \begin{pmatrix}-٢\\٢\end{pmatrix}$، $\overleftarrow{\text{اع}} = \begin{pmatrix}١\\٣\end{pmatrix}$

وتعرف أن $\overleftarrow{\text{اب}} + \overleftarrow{\text{بع}} = \overleftarrow{\text{اع}}$، فيكون:

$\begin{pmatrix}٣\\١\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-٢\\٢\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}١\\٣\end{pmatrix}$ اجمع قيَم س المتناظرة (في الأعلى)، واجمع قيَم ص المتناظرة (في الأسفل).

∴ لكي تجمع المُتّجهات، فإنك تجمع قيَم س المتناظرة معًا، وقيَم ص المتناظرة معًا.

$$\begin{pmatrix}س_١\\ص_١\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}س_٢\\ص_٢\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}س_١ + س_٢\\ص_١ + ص_٢\end{pmatrix}$$

تُسمّى هذه الطريقة طريقة 'القمّة–القاع' أو قانون المثلّث.

طرح المُتّجهات

طرح متّجه من متّجه آخر هو جمع سالب ذلك المُتّجه؛ $\overleftarrow{\text{ا}} - \overleftarrow{\text{ب}} = \overleftarrow{\text{ا}} + (-\overleftarrow{\text{ب}})$.

فكّر في $\overleftarrow{\text{اع}} - \overleftarrow{\text{اب}}$:

إضافة سالب $\overleftarrow{\text{اب}}$ هو نفسه إضافة $\overleftarrow{\text{با}}$.

∴ $\overleftarrow{\text{اع}} - \overleftarrow{\text{اب}} = \overleftarrow{\text{اع}} + \overleftarrow{\text{با}}$

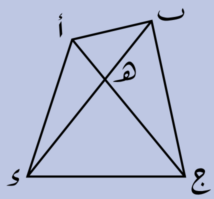
إذا أعدت ترتيب المُتّجهات، فيمكنك استخدام قانون المثلّث (القمّة–القاع) وتجمعها:

$\overleftarrow{\text{اع}} - \overleftarrow{\text{اب}} = \overleftarrow{\text{با}} + \overleftarrow{\text{اع}} = \overleftarrow{\text{بع}}$

يسمّى الخط الذي يجمع بين نقطتين مختلفتين القطعة المستقيمة.

مثـــال ٥

في الشكل المجاور، تمثّل القطع المستقيمة المختلفة متّجهات.
مستخدمًا الشكل، أوجد القطع المستقيمة المتجهة المساوية لكلّ من الحالات الآتية:



أ) $\overleftarrow{\text{أهـ}} + \overleftarrow{\text{هـ ج}}$ ب) $\overleftarrow{\text{ى ب}} + \overleftarrow{\text{ب هـ}}$

ج) $\overleftarrow{\text{أى}} + \overleftarrow{\text{ى ب}} + \overleftarrow{\text{ب ج}}$ د) $\overleftarrow{\text{ج ب}} + \overleftarrow{\text{ب هـ}} + \overleftarrow{\text{هـ أ}} + \overleftarrow{\text{أى}}$

الحـــلّ:

أ) $\overleftarrow{\text{أهـ}} + \overleftarrow{\text{هـ ج}} = \overleftarrow{\text{أ ج}}$

ب) $\overleftarrow{\text{ى ب}} + \overleftarrow{\text{ب هـ}} = \overleftarrow{\text{ى هـ}}$

ج) $\overleftarrow{\text{أى}} + \overleftarrow{\text{ى ب}} + \overleftarrow{\text{ب ج}} = \overleftarrow{\text{أ ج}}$

د) $\overleftarrow{\text{ج ب}} + \overleftarrow{\text{ب هـ}} + \overleftarrow{\text{هـ أ}} + \overleftarrow{\text{أى}} = \overleftarrow{\text{ج هـ}} + \overleftarrow{\text{هـ أ}} + \overleftarrow{\text{أى}}$

$= \overleftarrow{\text{ج أ}} + \overleftarrow{\text{أى}} = \overleftarrow{\text{ج ى}}$

إذا انتقلت من ى إلى ب، ثم من ب إلى هـ، يكون هو الانتقال نفسه من ى إلى هـ.

$\overleftarrow{\text{أى}} + \overleftarrow{\text{ى ب}} = \overleftarrow{\text{أ ب}}$، و

$\overleftarrow{\text{أ ب}} + \overleftarrow{\text{ب ج}} = \overleftarrow{\text{أ ج}}$

$\therefore \overleftarrow{\text{أى}} + \overleftarrow{\text{ى ب}} + \overleftarrow{\text{ب ج}} = \overleftarrow{\text{أ ج}}$

مثـــال ٦

إذا كان $\overleftarrow{\text{أ}} = \begin{pmatrix}٣\\٤\end{pmatrix}$، $\overleftarrow{\text{ب}} = \begin{pmatrix}٢\\-١\end{pmatrix}$، فأوجد متّجهًا رأسيًّا يساوي:

أ) $\overleftarrow{\text{أ}} + \overleftarrow{\text{ب}}$ ب) $\overleftarrow{\text{أ}} - \overleftarrow{\text{ب}}$ ج) $٣\overleftarrow{\text{أ}}$

د) $\overleftarrow{\text{أ}} + ٤\overleftarrow{\text{ب}}$ هـ) $٢\overleftarrow{\text{أ}} - ٣\overleftarrow{\text{ب}}$

الحـــلّ:

أ) $\overleftarrow{\text{أ}} + \overleftarrow{\text{ب}} = \begin{pmatrix}٣\\٤\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}٢\\-١\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}٣+٢\\٤-١\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}٥\\٣\end{pmatrix}$

ب) $\overleftarrow{\text{أ}} - \overleftarrow{\text{ب}} = \begin{pmatrix}٣\\٤\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}٢\\-١\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}٣-٢\\٤+١\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}١\\٥\end{pmatrix}$

ج) $٣\overleftarrow{\text{أ}} = ٣\begin{pmatrix}٣\\٤\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}٣\times٣\\٣\times٤\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}٩\\١٢\end{pmatrix}$

د) $\overleftarrow{\text{أ}} + ٤\overleftarrow{\text{ب}} = \begin{pmatrix}٣\\٤\end{pmatrix} + ٤\begin{pmatrix}٢\\-١\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}٣+٨\\٤+(-٤)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}١١\\٠\end{pmatrix}$

هـ) $٢\overleftarrow{\text{أ}} - ٣\overleftarrow{\text{ب}} = ٢\begin{pmatrix}٣\\٤\end{pmatrix} - ٣\begin{pmatrix}٢\\-١\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}٦\\٨\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}٦\\-٣\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}٠\\١١\end{pmatrix}$

$\overleftarrow{\text{أ}} - \overleftarrow{\text{ب}} =$

$\overleftarrow{\text{أ}} + (-\overleftarrow{\text{ب}})$؛

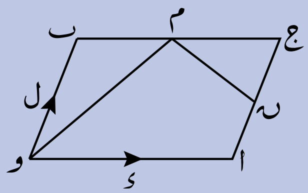
$-\overleftarrow{\text{ب}}$ يساوي $\begin{pmatrix}-٢\\١\end{pmatrix}$

إذا لم يتضمّن سؤال المُتّجهات شكلًا توضيحيًّا، فعليك أن ترسم الشكل.

مثال ٧

في الشكل المجاور: و ا ع ب متوازي أضلاع، فيه $\overleftarrow{\text{وا}} = \text{ى}$، $\overleftarrow{\text{وب}} = \text{ل}$.

م تنصّف ب ع، ن تنصّف ا ع.



أ) أوجد بدلالة ى، ل:

(١) $\overleftarrow{\text{وم}}$ (٢) $\overleftarrow{\text{من}}$

ب) بيّن أن $\overleftarrow{\text{وم}} + \overleftarrow{\text{من}} = \overleftarrow{\text{وا}} + \overleftarrow{\text{ان}}$

الحـــلّ:

أ) (١) $\overleftarrow{\text{وم}} = \overleftarrow{\text{وب}} + \overleftarrow{\text{بم}}$

$\overleftarrow{\text{وب}} = \text{ل}$

م مُنصّف ب ع، فيكون $\overleftarrow{\text{بم}} = \frac{١}{٢}\overleftarrow{\text{بع}}$

$\therefore \overleftarrow{\text{وم}} = \text{ل} + \frac{١}{٢}\text{ى}$

(٢) $\overleftarrow{\text{من}} = \overleftarrow{\text{مع}} + \overleftarrow{\text{عن}} = \frac{١}{٢}\overleftarrow{\text{بع}} + \frac{١}{٢}\overleftarrow{\text{عا}}$

$= \frac{١}{٢}\text{ى} + -\frac{١}{٢}\text{ل}\ (\overleftarrow{\text{عا}} = -\overleftarrow{\text{اع}} = -\overleftarrow{\text{وب}})$

$= \frac{١}{٢}\text{ى} - \frac{١}{٢}\text{ل} = \frac{١}{٢}(\text{ى} - \text{ل})$

أوجد متّجهات أخرى مساوية للمتّجه $\overleftarrow{\text{وم}}$. تأكّد أن هذه الإجابة منطقية.

ب) $\overleftarrow{\text{وم}} + \overleftarrow{\text{من}} = (\text{ل} + \frac{١}{٢}\text{ى}) + (\frac{١}{٢}\text{ى} - \frac{١}{٢}\text{ل})$

$= \text{ى} + \frac{١}{٢}\text{ل}$

$\overleftarrow{\text{وا}} + \overleftarrow{\text{ان}} = \text{ى} + \frac{١}{٢}\text{ل}$

$\therefore \overleftarrow{\text{وم}} + \overleftarrow{\text{من}} = \overleftarrow{\text{وا}} + \overleftarrow{\text{ان}}$

يمكننا أيضًا ملاحظة صحّة ذلك من الشكل.

تمارين ١٤-٣

١) إذا كان $\overleftarrow{\text{ت}} = \begin{pmatrix} ٤ \\ -٢ \end{pmatrix}$، $\overleftarrow{\text{ر}} = \begin{pmatrix} -١ \\ -٣ \end{pmatrix}$

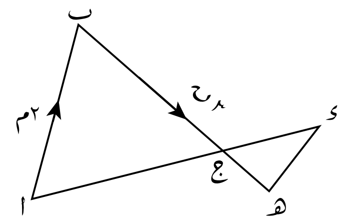
اكتب كل متّجه من المُتّجهَين الآتيَين في الصورة الرأسية:

أ) $٣\overleftarrow{\text{ت}}$ ب) $\overleftarrow{\text{ت}} + \overleftarrow{\text{ر}}$

٢) إذا كان $\overleftarrow{\text{أ}} = \begin{pmatrix} ٤ \\ -٢ \end{pmatrix}$، $\overleftarrow{\text{ب}} = \begin{pmatrix} -٤ \\ ٣ \end{pmatrix}$، فاكتب $٢\overleftarrow{\text{أ}} - \overleftarrow{\text{ب}}$ في صورة متّجه رأسي.

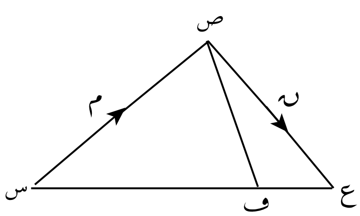
٣) إذا كان $\overleftarrow{\text{أ}} = \begin{pmatrix}\text{٨}\\ \text{١٠}\end{pmatrix}$، $\overleftarrow{\text{ب}} = \begin{pmatrix}\text{٤}\\ \text{٢-}\end{pmatrix}$، $\overleftarrow{\text{ج}} = \begin{pmatrix}\text{٠}\\ \text{١-}\end{pmatrix}$، فاحسب:

- أ) $\overleftarrow{\text{أ}} + \overleftarrow{\text{ب}}$
- ب) $\text{٢}\overleftarrow{\text{أ}} - \text{٢}\overleftarrow{\text{ب}}$
- ج) $\overleftarrow{\text{ب}} - \overleftarrow{\text{أ}}$
- د) $\frac{\text{١}}{\text{٢}}\overleftarrow{\text{ب}} - \overleftarrow{\text{ج}}$
- هـ) $\overleftarrow{\text{أ}} - \text{٢}(\overleftarrow{\text{ب}} - \overleftarrow{\text{ج}})$
- و) $\text{٢}\overleftarrow{\text{أ}} - \overleftarrow{\text{ج}}$
- ز) $\frac{\text{١}}{\text{٢}}(\text{٢}\overleftarrow{\text{أ}} + \overleftarrow{\text{ب}})$
- ح) $\overleftarrow{\text{ج}} + \frac{\text{١}}{\text{٢}}(\overleftarrow{\text{ب}} - \overleftarrow{\text{أ}})$



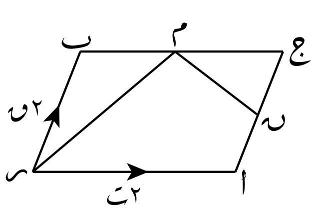
٤) في الشكل المجاور: ب هـ، أ ى قطعتان مستقيمتان تتقاطعان عند النقطة ج. $\overleftarrow{\text{أ ب}} = \text{٢م}$، $\overleftarrow{\text{ب ج}} = \text{٣ن}$.
تقسم النقطة ج القطعة المستقيمة أ ى بنسبة ٢:١
وتقسم القطعة المستقيمة ب هـ بنسبة ٣:١. اكتب، بدلالة م، ن، كل متّجه من المُتّجهات الآتية:

- أ) $\overleftarrow{\text{أ ج}}$
- ب) $\overleftarrow{\text{ج ى}}$
- ج) $\overleftarrow{\text{ج هـ}}$
- د) $\overleftarrow{\text{هـ ى}}$



٥) في المثلث المجاور: س ص ع، $\overleftarrow{\text{س ص}} = \text{م}$، $\overleftarrow{\text{ص ع}} = \text{ن}$، $\overleftarrow{\text{ف ع}} = \frac{\text{١}}{\text{٤}}(\overleftarrow{\text{س ع}})$. أوجد بدلالة م، ن:

- أ) $\overleftarrow{\text{س ع}}$
- ب) $\overleftarrow{\text{س ف}}$
- ج) $\overleftarrow{\text{ص ف}}$



٦) في الشكل المجاور: ر أ ج ب متوازي أضلاع،
حيث $\overleftarrow{\text{ر أ}} = \text{٢ت}$، $\overleftarrow{\text{ر ب}} = \text{٢ن}$. م منصّف ب ج،
ن منصّف أ ج. أوجد بدلالة ت، ن:

- أ) $\overleftarrow{\text{أ ب}}$
- ب) $\overleftarrow{\text{ر ن}}$
- ج) $\overleftarrow{\text{م ن}}$

١٤-٤ حسابات أكثر تعقيدًا في المُتّجهات

طول المتّجه

أحيانًا، يُسمى مقدار المُتّجه الطول.

مقدار المُتّجه هو طوله. يُستخدم الرمز $|\overleftarrow{\text{اب}}|$ أو $|\overleftarrow{\text{ا}}|$ ليدل على طول المُتّجه $(\overleftarrow{\text{اب}})$.

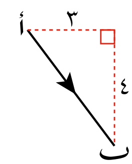
يمكنك استخدام نظرية فيثاغورث لتحسب طول المُتّجه.

بشكل عام، إذا كان $\overleftarrow{\text{اب}} = \begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{pmatrix}$، فإن $|\overleftarrow{\text{اب}}| = \sqrt{\text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢}}$

مثـال ٨

أوجد طول المُتّجه $\overleftarrow{\text{اب}} = \begin{pmatrix} ٣ \\ -٤ \end{pmatrix}$.

الحـلّ:



ارسم $\overleftarrow{\text{اب}}$ على أنه وتر في مثلّث قائم الزاوية.

$(\text{اب})^{٢} = ٣^{٢} + ٤^{٢}$

نظرية فيثاغورث.

$(\text{اب})^{٢} = ٩ + ١٦$

$(\text{اب})^{٢} = ٢٥$

$(\text{اب}) = ٥$

يجب استخدام الناتج الموجب فقط لأنه يدل على الطول.

$\therefore |\overleftarrow{\text{اب}}| = ٥$ وحدات.

مثـال ٩

إذا كان $\overleftarrow{\text{أ}} = \begin{pmatrix} -٥ \\ ١٢ \end{pmatrix}$، فأوجد $|\overleftarrow{\text{أ}}|$.

الحـلّ:

$|\overleftarrow{\text{أ}}| = \sqrt{(-٥)^{٢} + (١٢)^{٢}}$

استخدم نظرية فيثاغورث.

$= \sqrt{١٦٩}$

$= ١٣$

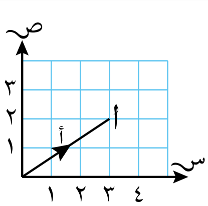
متّجه الموضع

يُسمّى المُتّجه الذي يبدأ من نقطة الأصل (و) مُتّجه الموضع.

في الشكل المجاور، المُتّجه الرئيسي للنقطة ا هو $\overleftarrow{\text{وا}}$ أو $\overleftarrow{\text{أ}}$.

إذا كان $\text{أ} = \begin{pmatrix} ٣ \\ ٢ \end{pmatrix}$، فإن إحداثيَّي النقطة ا هما (٣، ٢).

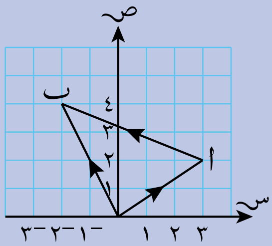
ولما كان إحداثيّا النقطة أ هما مكوّنَي المُتّجه الرأسي $\begin{pmatrix} ٣ \\ ٢ \end{pmatrix}$، فيمكنك استخدام المُتّجهات الموضعية لإيجاد طول أي متّجه.



مثـــال ١٠

متَّجه الموضع للنقطة ا هو $\begin{pmatrix}٣\\٢\end{pmatrix}$، ومتجه الموضع للنقطة ب هو $\begin{pmatrix}٢^-\\٤\end{pmatrix}$.

أوجد المُتّجه ٢$\overleftarrow{\text{اب}}$.



الحـــلّ:

$\overleftarrow{\text{وا}} = \begin{pmatrix}٣\\٢\end{pmatrix}$ ، $\overleftarrow{\text{وب}} = \begin{pmatrix}٢^-\\٤\end{pmatrix}$ $\overleftarrow{\text{اب}} = \overleftarrow{\text{او}} + \overleftarrow{\text{وب}} = -\overleftarrow{\text{وا}} + \overleftarrow{\text{وب}} = \overleftarrow{\text{وب}} - \overleftarrow{\text{وا}}$ $= \begin{pmatrix}٢^-\\٤\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}٣\\٢\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}٥^-\\٢\end{pmatrix}$ $٢\overleftarrow{\text{اب}} = ٢\begin{pmatrix}٥^-\\٢\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}١٠^-\\٤\end{pmatrix}$	ابدأ بإيجاد $\overleftarrow{\text{اب}}$، ثم ضاعفه.

يمكنك أيضاً أن توجد المتَّجه الرأسي للمتّجه $\overleftarrow{\text{اب}}$ بأن تحسب الحركات الموازية للمحور السيني متبوعة بتلك الموازية للمحور الصادي. الحركات الموازية للمحور السيني= −٥ وحدة. الحركات الموازية للمحور الصادي = ٢ وحدة.

$\overleftarrow{\text{اب}} = \begin{pmatrix}٥^-\\٢\end{pmatrix}$

$\therefore\ ٢\overleftarrow{\text{اب}} = ٢\begin{pmatrix}٥^-\\٢\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}١٠^-\\٤\end{pmatrix}$

مثـــال ١١

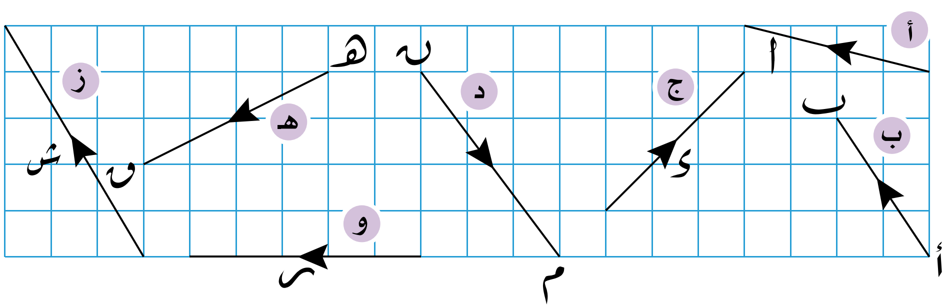
أوجد $|\overleftarrow{\text{اب}}|$، حيث ا (١⁻، ٢⁻)، ب (٥، ٦).

الحـــلّ:

$\overleftarrow{\text{وا}} = \begin{pmatrix}١^-\\٢^-\end{pmatrix}$ ، $\overleftarrow{\text{وب}} = \begin{pmatrix}٥\\٦\end{pmatrix}$ $\overleftarrow{\text{اب}} = \overleftarrow{\text{او}} + \overleftarrow{\text{وب}} = -\overleftarrow{\text{وا}} + \overleftarrow{\text{وب}}$ $= \begin{pmatrix}-(١^-) + ٥\\-(٢^-) + ٦\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}٦\\٨\end{pmatrix}$ $|\overleftarrow{\text{اب}}| = \sqrt{٦^٢ + ٨^٢} = \sqrt{١٠٠} = ١٠$	قد يبيّن الرسم التخطيطي أن الإجابة منطقية.

تمارين ١٤-٤

١) احسب طول كلّ متّجه. قرّب الناتج إلى أقرب منزلتَين عشريّتين عند الضرورة:



٢) أوجد طول كل متّجه من المُتّجهات الآتية. قرّب الناتج إلى أقرب منزلتَين عشريتَين:

أ $\overleftarrow{\text{ا}} = \begin{pmatrix} ٥ \\ ٩ \end{pmatrix}$ ب $\overleftarrow{\text{م ن}} = \begin{pmatrix} ٧ \\ ١١ \end{pmatrix}$ ج $\overleftarrow{\text{س}} = \begin{pmatrix} -٣ \\ ٤ \end{pmatrix}$ د $\overleftarrow{\text{ت ق}} = \begin{pmatrix} -٦ \\ -٨ \end{pmatrix}$

٣) إحداثيات و (٠، ٠)، ت(٣، ٤)، ق(−٥، ١٢)، ر(−٨، −١٥)

أوجد كلًّا ممّا يأتي:

أ $|\overleftarrow{\text{و ت}}|$ ب $|\overleftarrow{\text{و ق}}|$ ج $|\overleftarrow{\text{و ر}}|$

٤) للنقاط ا، ب، ع المُتّجهات الموضعية $\overleftarrow{\text{و ا}} = \begin{pmatrix} ٤ \\ ٢ \end{pmatrix}$، $\overleftarrow{\text{و ب}} = \begin{pmatrix} -١ \\ ٣ \end{pmatrix}$، $\overleftarrow{\text{و ع}} = \begin{pmatrix} ٦ \\ -٢ \end{pmatrix}$

أ أوجد إحداثيات النقاط ا، ب، ع.

ب اكتب كل متّجه من المُتّجهات $\overleftarrow{\text{ا ب}}$، $\overleftarrow{\text{ب ع}}$، $\overleftarrow{\text{ا ع}}$ في صورة متّجه رأسي.

٥) و ا ف ب متوازي أضلاع. م، ن، ت منصّفات الأضلاع ب ف، ا ف، م ن على الترتيب.

(و) هي نقطة الأصل والمُتّجهان الموضعيان لـِ ا، ب هما ا، ب. أوجد بدلالة ا، ب:

أ $\overleftarrow{\text{م ف}}$ ب $\overleftarrow{\text{ف ن}}$ ج $\overleftarrow{\text{م ن}}$

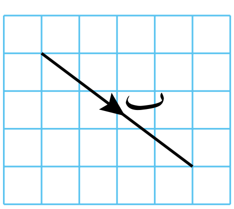
د المُتّجه الموضعي للنقطة ت، اكتب إجابتك في أبسط صورة.

٦) أوجد طول المتّجه الذي يصل بين النقطتَيْن :

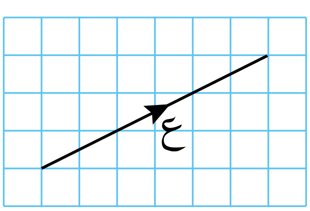
أ (−٣، −٣)، (٣، ٥).

ب (−٢، ٦)، (٣، −١).

طبّق مهاراتك

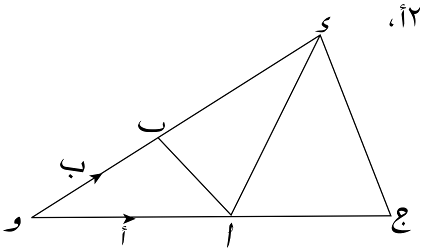


٧) في الشكل المجاور، يبيّن المُتّجه ب السرعة (كم/ساعة) لسيارة تسير على الطريق السريع. يمثّل طول ضلع كل مربّع على الشبكة ٢٠ كم/ ساعة. أوجد سرعة السيارة.



٨) في الشكل المجاور، يمثّل المُتّجه ع سرعة (كم/ساعة) عدّاء. يمثّل طول ضلع كل مربّع على الشبكة ١ كم/ساعة. أوجد سرعة العدّاء.

٩) في الشكل المجاور $\overleftarrow{\text{و ا}}$ = أ، $\overleftarrow{\text{و ب}}$ = ب، $\overleftarrow{\text{ا ج}}$ = ٢أ،
$\overleftarrow{\text{ا د}}$ = ٣ب − أ.

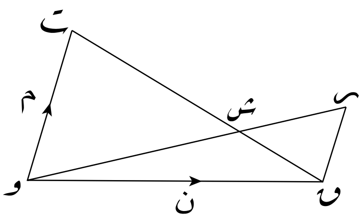


أ) اكتب $\overleftarrow{\text{ا ب}}$ بدلالة أ، ب.

ب) إذا علمت أنّ $\overleftarrow{\text{و د}}$ = ن × ب حيث ن عدد كلّي. أوجد قيمة ن.

ج) أثبت أن المثلّثَين و ا ب، و د ج متشابهان.

١٠) في الشكل المجاور، $\overleftarrow{\text{و ت}}$ = م، $\overleftarrow{\text{و ن}}$ = ن،
$\overleftarrow{\text{ن ر}}$ = $\frac{١}{٢}$ $\overleftarrow{\text{و ت}}$، $\overleftarrow{\text{ش ن}}$ = $\frac{١}{٣}$ $\overleftarrow{\text{ت ن}}$
ر ن يوازي و ت.
أوجد بدلالة م، ن:



أ) $\overleftarrow{\text{ت ن}}$ ب) $\overleftarrow{\text{ت ش}}$ ج) $\overleftarrow{\text{و ش}}$ د) $\overleftarrow{\text{و ر}}$

مُلخَّص

ما يجب أن تعرفه:

- يُعرّف المُتّجه بالمقدار والاتجاه. يمكنك أن تجمع المُتّجهات وتطرحها، لكنّك لا تستطيع أن تضربها أو تقسمها. يمكنك أن تضرب المُتّجه في عدد، أو في مقدار عددي.
- طول المُتّجه $\begin{pmatrix} س \\ ص \end{pmatrix} = \sqrt{س^{٢} + ص^{٢}}$. يكتب طول المُتّجه في صورة $|\overrightarrow{أب}|$ أو $|\overrightarrow{د}|$.
- متّجه الموضع هو متّجه يبدأ من نقطة الأصل.

يجب أن تكون قادرًا على:

- جمع المُتّجهات، وطرحها، وضربها في مقدار عددي.
- حساب طول المُتّجه.
- استخدام المُتّجهات الموضعية لإيجاد أطوال المُتّجهات.

تمارين نهاية الوحدة

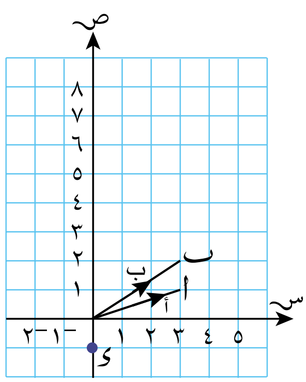
١) إذا كان $\overleftarrow{م} = \begin{pmatrix}٣\\ -٤\end{pmatrix}$، $\overleftarrow{ن} = \begin{pmatrix}-٢\\ ١\end{pmatrix}$

أ أوجد:

(١) $\overleftarrow{م} + \overleftarrow{ن}$

(٢) $٣\overleftarrow{ن}$

ب ارسم المُتّجه م على شبكة، أو ورقة مربّعات.



٢) في الشكل المجاور: $\overleftarrow{وا} =$ أ، $\overleftarrow{وب} =$ ب.

أ إذا علمت أن $\overleftarrow{وج} =$ أ + ٢ب. فانسخ الشكل، وسمّ النقطة على الشكل.

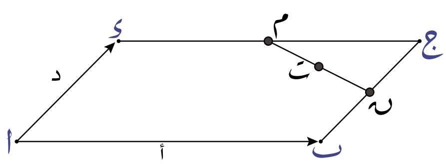
ب إذا كانت ى = (٠، $^{-}$١). فعبِّر عن $\overleftarrow{وى}$ بدلالة أ، ب.

ج احسب $|\overleftarrow{أ}|$ وقرّب الناتج إلى أقرب منزلتَين عشريتَين.

٣) أوجد طول المتَّجه $\overleftarrow{اب} = \begin{pmatrix}-٢\\ ٦\end{pmatrix}$

٤) أيّ متجه من المُتّجهات الآتية طوله يساوي $\sqrt{٨٥}$؟

$\overleftarrow{أ} = \begin{pmatrix}٢\\ ٩\end{pmatrix}$، $\overleftarrow{ب} = \begin{pmatrix}٥\\ -٨\end{pmatrix}$، $\overleftarrow{ج} = \begin{pmatrix}-٦\\ ٧\end{pmatrix}$، $\overleftarrow{د} = \begin{pmatrix}-٧\\ -٦\end{pmatrix}$، $\overleftarrow{هـ} = \begin{pmatrix}٨\\ -٣\end{pmatrix}$، $\overleftarrow{و} = \begin{pmatrix}-٢\\ ٩\end{pmatrix}$، $\overleftarrow{ز} = \begin{pmatrix}٦\\ ٦\end{pmatrix}$



٥) يبيّن الشكل المجاور متوازي أضلاع، حيث $\overleftarrow{اب} =$ أ، $\overleftarrow{اى} =$ د

النقطة م تنصّف الضلع ى ج.

النقطة ن تنصّف الضلع ب ج.

النقطة ت تنصّف م ن.

أ اكتب بدلالة أ، د:

(١) $\overleftarrow{ان}$

(٢) $\overleftarrow{ام}$

(٣) $\overleftarrow{نت}$

ب اشرح كيف تعرف أن النقطة ت تقع على المستقيم ا ج.

مصطلحات علمية

أ

الاحتمال Probability: مقياس إمكانية وقوع حدث ما. (ص ٤٢)

الاحتمال التجريبي Experimental probability: فرصة وقوع حدث ما، ويُحسب بتكرار التجربة مرات عدة. (ص ٤٢)

الاحتمال الشرطي Conditional probability: احتمال وقوع حدث ما بشرط وقوع حدث قبله. (ص ١٠٩)

الاحتمال النظري Theoretical probability: فرصة وقوع حدث ما، ويُحتسب عند معرفة أن احتمالات النواتج الممكنة متساوية. (ص ٤٣)

الأحداث المركبة Combined events: حدث يتبعه حدث آخر. (ص ٩٨)

الأحداث غير المستقلة Dependent events: أحداث تعتمد على نواتج أحداث سابقة لها. (ص ١٠٩)

الإسقاط Projection: صورة أي مستقيم على المستوى، مثل الزاوية بين الزاوية وصورتها هي أصغر زاوية ممكنة. (ص ١٣٩)

الإكمال إلى مربع Completing the square: كتابة معادلة تربيعية في صورة مربع لعبارة خطية (ناقص أو زائد عدد ثابت). (ص ١٦)

ت

التجربة Trial: تجربة منفردة تُستخدم لإيجاد قيمة ناتج ما. (ص ٤٢)

التقاطع Intersection: في المجموعات، هو العناصر المشتركة بين المجموعات. وفي الجبر، هو نقطة التقاء بين مستقيمين أو منحنيَين. (ص ٢٢)

التمثيل البياني Sketch: مخطط يتضمن العلاقات المهمة بين أجزاء رسم بياني، ولا يمكن رسمها بالقياس الدقيق أو المقياس الدقيق. (ص ٢٦)

ح

الحدث Event: الناتج الذي يُختبر في تجربة احتمالية. (ص ٤٢)

خ

خط التقارُب Asymptote: مستقيم يقترب إليه التمثيل البياني ولا يتقاطع معه أبدًا. (ص ١٣)

د

الدالة العكسية Inverse function: دالة تستخدم لإيجاد زاوية إحدى النسب المثلثية. (ص ٧١)

ز

زاوية الاتجاه من الشمال Bearing: زاوية تشير إلى الاتجاه بين نقطتين. تُقاس بدوران مع اتجاه عقارب الساعة بدءًا من الشمال، وتربط بين نقطة البداية والوجهة المقصودة. (ص ٨٧)

ص

الصيغة التربيعية Quadratic formula: تُستخدم لحل المعادلات التربيعية. وتُستخدم عادة عندما يصعب استخدام التحليل إلى عوامل. (ص ١٦)

ط

الطول Magnitude: طول المتجه من دون النظر إلى اتجاهه. (ص ١٤٦)

ف

فضاء العينة Sample space: قائمة أو مخطط يعرض النواتج الممكنة لحدثين أو أكثر. (ص ٩٨)

ق

قانون الجيب Sine rule: في أي مثلث، نسبة جيب أي زاوية إلى طول الضلع المقابل لها هي نفسها دائمًا. (ص ١٢٥)

قانون جيب التمام Cosine rule: قانون يربط بين أطوال الأضلاع الثلاثة في مثلث ما، وقياس واحدة من زواياه. (ص ١٣٠)

م

المتجه Vector: كمية لها اتجاه ومقدار. (ص ١٤٨)

المتجه الرأسي Column vector: زوج مرتّب من الأعداد يعبِّر عن طول المتجه واتجاهه. (ص ١٤٨)

متجه الموضع Position vector: متجه يبدأ من نقطة الأصل. (ص ١٥٧)

المتنافية Mutually exclusive: حدثان لا يمكن وقوعهما معًا. (ص ٥١)

المجاور Adjacent: في النسب المثلثية، عندما نرغب في قياس إحدى الزوايا الحادة، فإن الضلع المجاور لها هو الضلع الذي يصل بينها وبين الزاوية القائمة. (ص ٦٣)

مخطَّط الفضاء الاحتمالي Possibility diagram: مجموعة النواتج الممكنة كلها. (ص ٤٧)

المستقلة Independent: حدث ناتجه لا يتأثر بالأحداث التي وقعت سابقًا. (ص ٥١)

المقابل Opposite: في النسب المثلثية، عندما نرغب في قياس إحدى الزوايا الحادة، فإن الضلع المقابل لها هو الضلع الذي لا يتقاطع معها. (ص ٦٣)

المقدار العددي Scalar: كمية لها طول، وليس لها اتجاه. (ص ١٤٨)

مقياس الاحتمال Probability scale: المدى من صفر إلى واحد، ويستخدم لإيجاد أرجحيّة وقوع حدث ما. (ص ٤٢)

منحاز Bias: شيء يؤثر على فرصة وقوع حدث ما بسبب وقوع حدث آخر. (ص ٤٣)

ن

الناتج Outcome: النتائج الممكنة لتجربة احتمالية ما. (ص ٤٣)

النسب المثلثية Trigonometry: العلاقات بين أطوال الأضلاع وقياسات الزوايا في المثلثات. تُستخدم في المثلثات قائمة الزاوية والمثلثات غير قائمة الزاوية. (ص ٦٣)

نسبة الجيب Sine ratio: نسبة الجيب لزاوية ما (غير الزاوية القائمة) في المثلث قائم الزاوية، هي ناتج قسمة طول الضلع المقابل للزاوية على الوتر. (ص ٧٤)

نسبة الظل Tangent ratio: نسبة الظل لزاوية ما (غير الزاوية القائمة) في المثلث قائم الزاوية، هي ناتج قسمة طول الضلع المقابل للزاوية على طول الضلع المجاور للزاوية. (ص ٦٥)

نسبة جيب التمام Cosine ratio: نسبة الجيب لزاوية ما (غير الزاوية القائمة) في المثلث قائم الزاوية، هي ناتج قسمة طول الضلع المجاور للزاوية على الوتر. (ص ٧٤)

النواتج المفضّلة Favorable outcomes: أي ناتج يعني أن حدثًا قد وقع. (ص٤٣)

النواتج الممكنة Possible outcomes: كل النتائج الممكنة لوقوع حدث ما. (ص ٩٨)

و

الوتر Hypotenuse: الضلع الأطول في المثلث قائم الزاوية. إنه الضلع المقابل للزاوية القائمة. (ص ٦٣)

شكر وتقدير

يتوجه المؤلفون والناشرون بالشكر الجزيل إلى جميع من منحهم حقوق استخدام مصادرهم أو مراجعهم. وبالرغم من رغبتهم في الإعراب عن تقديرهم لكل جهد تم بذله، وذكر كل مصدر تم استخدامه لإنجاز هذا العمل، إلا أنه يستحيل ذكرها وحصرها جميعًا. وفي حال إغفالهم لأي مصدر أو مرجع فإنه يسرهم ذكره في النسخ القادمة من هذا الكتاب.

Pictures Now.Alamy Stock Photo; European Union, Copernicus Sentinel-3 imagery; Photos.com/Getty Images Plus/Getty Images; Fat Jackey/Shutterstock; Alexandr III/ Shutterstock; ErikdeGraaf/iStock/Getty Images Plus/Getty Images

تم بحمد الله

رقم الإيداع: 2022/4635

مزون للطباعة والنشر والتغليف (ش.م.م) - ٢٤٨١٥٦٩٣

الرياضيات

كتاب الطالب ١٠

يزخر كتاب الطالب بالعديد من الموضوعات مع شرح واضح وسهل لكل المفاهيم المتضمنة في هذه الموضوعات، تليها تمارين تطبيقية لاختبار مدى فهم الطالب وللسماح له بتعزيز وممارسة المهارات الرياضية المطلوبة.

يتضمن كتاب الطالب:

- أقسام تذكر للمعرفة السابقة والتحقق من التعلم السابق
- تمارين في نهاية كل موضوع لتعزيز الفهم.
- أسئلة في نهاية كل وحدة من شأنها تأهيل الطلاب لخوض الاختبارات.
- قاموس للمصطلحات يرد في آخر الكتاب.
- تمارين ومسائل عامة تتناول جميع الموضوعات التي تم تغطيتها في كل وحدة.
- إرشادات لمساعدة الطلاب على حل التمارين، بما في ذلك الأمثلة المحلولة والملاحظات المفيدة.

يشمل منهج الرياضيات للصف العاشر من هذه السلسلة:

- كتاب النشاط
- دليل المُعلِّم

ISBN 978-99969-3-925-9

www.moe.gov.om