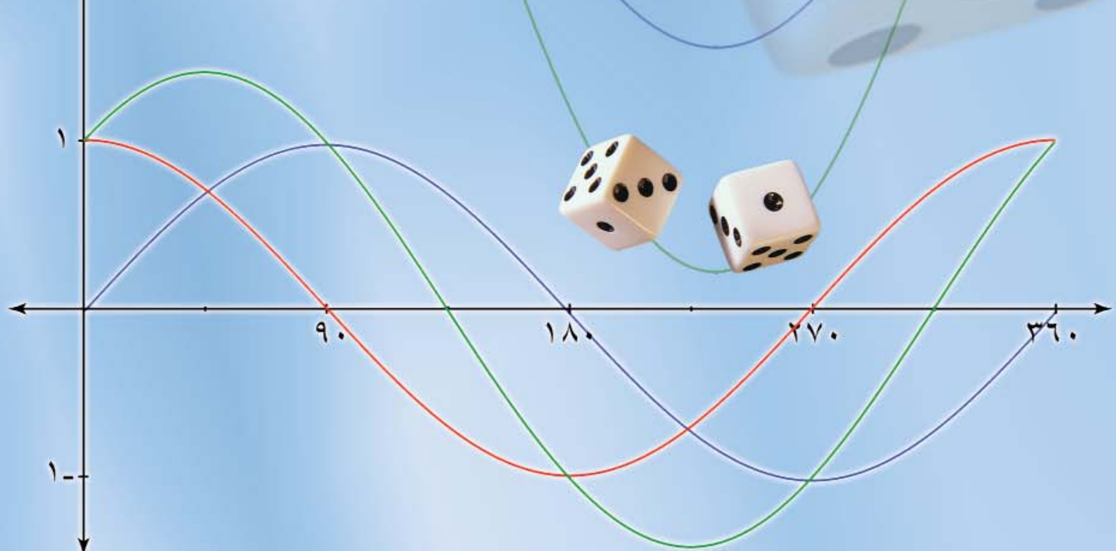
سلطنة عمان
وزارة التربية والتعليم

الرياضيات البحتة

للصف الحادي عشر

الفصل الدراسي الأول



الطبعة الأولى ١٤٣٥ هـ - ٢٠١٤م

سلطنة عُمان
وزارة التربية والتعليم

الرياضيات البحتة

للصف الحادي عشر

الفصل الدراسي الأول

الطبعة الأولى ١٤٣٥هـ - ٢٠١٤م

كتاب الرياضيات البحتة للصف الحادي عشر

ألّفت هذا الكتاب لجنة مشكّلة بموجب القرار الوزاري رقم ٣٢ / ٢٠٠٣م .

الإشراف الفني :

مركز إنتاج الكتاب المدرسي والوسائل التعليمية بالمديرية العامة لتطوير المناهج

حضرة صاحب الجلالة السلطان قابوس بن سعيد المعظم

قائمة المحتويات

الموضوع	الصفحة

الموضوع	الصفحة

الموضوع	الصفحة

بسم الله الرحمن الرحيم

المقدمة

الحمد لله رب العالمين والصلاة والسلام على خاتم الأنبياء والمرسلين وخير خلق الله أجمعين سيدنا محمد وعلى آله وصحبه والتابعين لهم بإحسان إلى يوم الدين ... وبعد،،

أخي الطالب / أختي الطالبة:

يسر وزارة التربية والتعليم أن تضع بين يديك هذا الكتاب وهو الجزء الأول من سلسلة تتكون من جزئين يغطيان موضوعات مادة الرياضيات البحتة المقررة لطلبة الصف الحادي عشر، فيدرس هذا الجزء في الفصل الدراسي الأول، ويدرس الجزء الثاني في الفصل الدراسي الثاني.

بُني منهاج الرياضيات البحتة للصف الحادي عشر على فلسفة وأسس واضحة منها:

* التشجيع على التحليل والاستقصاء.
* التركيز على جوانب التعلم الذاتي والتعلم التعاوني.
* تنمية التفكير العلمي والبحث وتشجيع الابتكار.
* التركيز على المهارات العلمية.
* ارتباط محتوى الكتاب بصورة وثيقة بحياة الطالب اليومية.

هذا وقد اشتمل الجزء الأول على ثلاث وحدات هي:

الوحدة الأولى : التباديل والتوافيق.

الوحدة الثانية : الاحتمالات.

الوحدة الثالثة : الدوال الدائرية.

واشتمل الجزء الثاني على ثلاث وحدات هي:

الوحدة الرابعة : المتتاليات والمتسلسلات.

الوحدة الخامسة : الهندسة الفضائية.

الوحدة السادسة : الدوال.

إن دائرة تطوير مناهج العلوم التطبيقية وهي تقدم هذا الكتاب لتأمل منك أن تتعاون مع زملائك ومعلميك وأفراد أسرتك في الاستفادة القصوى منه، وأن تحاول ترجمة المقترحات الواردة فيه إلى حقائق من خلال ربطه بأنشطتك اليومية، وأن تبتعد عن الحفظ الذي لا يستند على فهم.

اكتشف الرياضيات في بيتك ومدرستك وشوارع مدينتك أو قريتك وفي المحلات التجارية والبنوك، واعتبرها مادة حياتية ومهارة يومية تستعين بها في حل المشكلات الرياضية التي تواجهك من خلال تعاملك اليومي مفكرا وناقدا ومحللا ... هذا كله خلق الله فتفكر فيه.

والله من وراء القصد وهو يهدي السبيل.

المؤلفون

الوحدة الأولى

التباديل والتوافيق

(Permutations and Combinations)

لمحة تاريخية


العالم العربي نصير الدين الطوسي (١٢٠١ – ١٢٧٤م)

اهتم الإنسان منذ القدم بحساب عدد إمكانات حدوث ظاهرة معينة، كما اهتم بعدد الطرق الممكنة لتحصيل الضرائب، أو عدد إمكانات ظهور كوكبين متلاصقين، وكان لعالم الرياضيات العربي نصير الدين الطوسي (١٢٠١-١٢٧٤م) باع طويل في حساب عدد الإمكانات باستخدام التباديل والتوافيق، كما اهتم كاردن (١٥٠١-١٥٧٦م) بحساب عدد الإمكانات بطريقة تسمى «المبدأ الأساسي للعد».

وفي عام ١٩٢٨م نشر نيومان بحثه عن استخدام نظرية العد والاحتمال في الاستراتيجيات العسكرية، وامتد استخدام العد أيضا في مجالات أخرى مثل: التجارة، والصناعة، والاقتصاد، والتأمين، والعلوم الاجتماعية، والقياس التربوي، والسياسة، وفي مجال المرور، وترقيم لوحات السيارات.

أهداف الوحدة

١) تطبيق مبادئ العد الأساسية لتحديد عدد الإمكانات في حالة معطاة.

٢) إيجاد عدد التباديل لـ (ن) من الأشياء بأخذ (ر) في كل مرة $^{ن}ل_{ر}$.

٣) إيجاد عدد التباديل لـ (ن) من الأشياء ليست جميعها مختلفة.

٤) إيجاد عدد التباديل لـ (ن) من الأشياء مرتبة في دائرة.

٥) تحديد عدد التوافيق لـ (ن) من الأشياء بأخذ (ر) في كل مرة.

٦) إيجاد عدد التوافيق باستخدام أكثر من مجموعة.

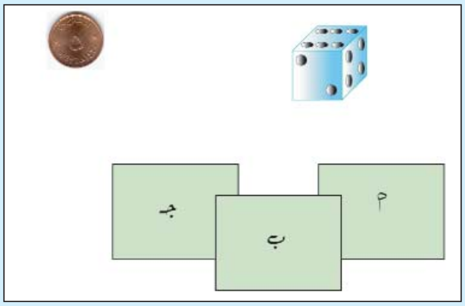
٧) إيجاد معاملات الحدود في مفكوك ذي الحدين باستخدام نظرية ذات الحدين.

٨) إيجاد مفكوك ذات الحدين من صيغة $(أ+ب)^{ن}$.

المبدأ الأساسي للعد Basic Counting Principle

نشاط ١: اختيار (رقم، ووجه، وحرف)

الأدوات: حجر نرد ، قطعة نقود معدنية، بطاقات عليها الحروف أ، ب ، جـ



الخطوات:

١) الق حجر النرد عدة مرات، واكتب مجموعة النواتج التي تتوقعها (سـ).

٢) كرر العمل مع قطعة النقود، واكتب مجموعة النواتج المتوقعة (صـ).

٣) كرر العمل مع عملية سحب بطاقة عشوائيا، واكتب مجموعة النواتج المتوقعة (ع)، ثم اجب عن الأسئلة الآتية:

أ) ما عدد عناصر تجربة إلقاء حجر النرد؟

ب) ما عدد عناصر تجربة القاء قطعة النقد المعدنية؟

جـ) ما عدد عناصر تجربة سحب بطاقة عشوائية؟

د) ما عدد عناصر سـ × صـ؟ وما علاقته بعدد عناصر المجموعتين سـ ، صـ؟

هـ) ما عدد عناصر سـ×صـ×ع؟ وما علاقته بعدد عناصر المجموعات سـ، صـ، ع ؟

و) اكتب نتيجة ما توصلت إليه.

تدريب ١

كم عددا مكونا من رقمين تستطيع تكوينه من مجموعة الأرقام {٢،٥،٧،٩} ؟

تعريف

مبدأ العد: إذا أمكن إجراء عملية ما على خطوتين وأجريت الخطوة الأولى بطرق عددها ن١، والخطوة الثانية بطرق عددها ن٢ ، فإن عدد طرق إجراء هذه العملية = ن١ × ن٢

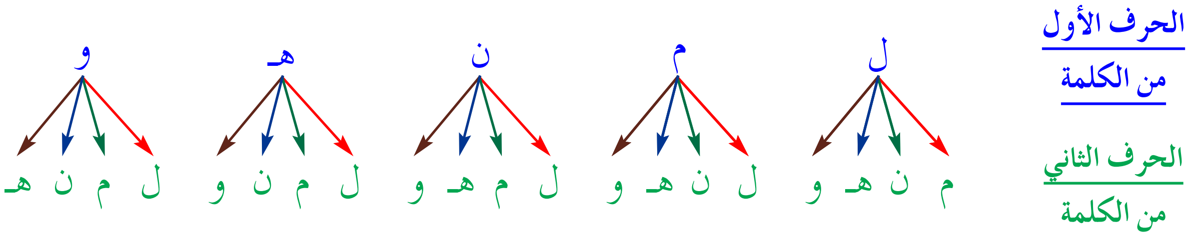
مثال ١

كم كلمة مكونة من حرفين مختلفين يمكن تكوينها من مجموعة الأحرف { ل،م،ن،هـ،و } ؟ (علما بأنه ليس ضروريا أن يكون للكلمة معنى)

الحل

الطريقة الأولى:

تكتب جميع الكلمات التي يمكن تكوينها، ولهذا تستخدم طريقة الشجرة كما بالشكل أدناه، فيتم ترتيب الأحرف ل،م،ن،هـ،و، في سطر واحد، بحيث يمثل الحرف الأول للكلمة، ومن كل حرف تتفرع ٤ أحرف. (لماذا؟).



نلاحظ أن الكلمات عددها ٢٠ كلمة، وهي: لم، لن، له، لو، مل، من، مه، مو، نل، نم، نه، نو، هل، هم، هن، هو، ول، وم، ون، وه.

الطريقة الثانية:

يتم رسم مربعين كما بالشكل أدناه:

للحرف الأول من الكلمة ← □ □ → للحرف الثاني من الكلمة

فإذا تم وضع حرف بالمربع الأول، فإن ٤ أحرف أخرى يمكن اختيار واحد منها لملء المربع الثاني، بمعنى آخر فإن ٥ أحرف مرشحة لملء مربع الحرف الأول، و ٤ لملء مربع الحرف الثاني.

لذلك فإن عدد الكلمات التي يمكن تكوينها = ٥×٤ = ٢٠ كلمة.

تدريب ٢

من المثال السابق:

أولا: أوجد عدد الكلمات التي يمكن تكوينها من حرفين، إذا سمح بتكرار الحرف.

ثانيا: إذا كانت مجموعة الأحرف هي جميع الأحرف الهجائية، فأي الطريقتين أفضل؟ ولماذا؟

مثال ٢

توجه أحمد إلى أحد المجمعات التجارية فوجد أربعة أبواب للدخول، وثلاثة أبواب للخروج تختلف عن أبواب الدخول. فبكم طريقة يمكن لأحمد دخول المبنى والخروج منه؟

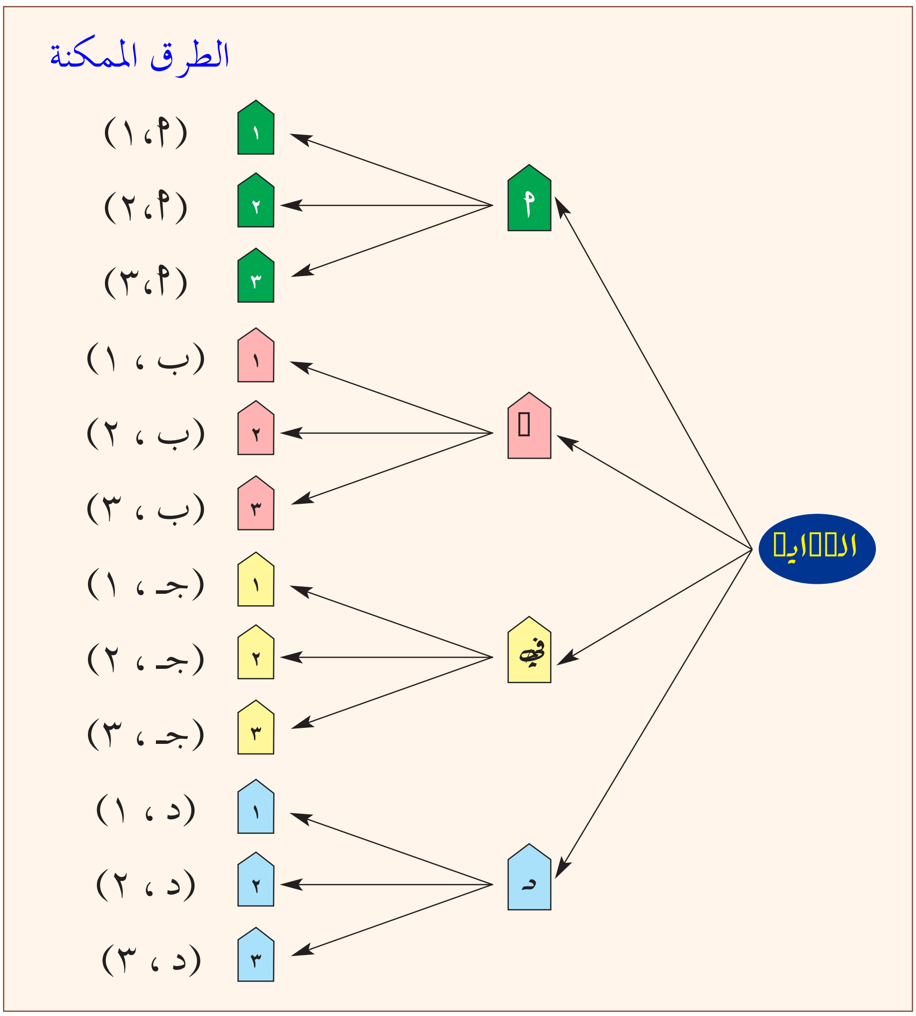
الحل

نرمز لأبواب الدخول ٫، ب ، جـ ، د وأبواب الخروج ١ ، ٢ ، ٣ لذلك عندما يريد أحمد الدخول للمبنى فإن لديه ٤ خيارات للدخول و٣ خيارات للخروج.

∴ عملية الدخول تتم بطرق عددها ٤ . وعملية الخروج تتم بطرق عددها ٣ .

∴ عدد الطرائق الممكنة أمام أحمد = ٤×٣=١٢ طريقة

ويوضح مخطط الشجرة هذه العملية:



تدريب ٣

في المثال السابق لو كان أحمد داخل المبنى وطلب منه الخروج والدخول مرة أخرى فهل تتغير عدد الطرق الممكنة؟ تحقق من ذلك بمخطط الشجرة.

مثال ٣

كم عدد الطرق التي يمكن بها زرع ٣ شجرات ليمون إذا كان هنالك ٦ حفر على خط مستقيم؟

الحل

عدد طرق زرع الشجرة الأولى = ٦

عدد طرق زرع الشجرة الثانية = ٥

عدد طرق زرع الشجرة الثالثة = ٤

∴ عدد طرق زرع الشجرات الثلاث = ٦×٥×٤=١٢٠ طريقة

تدريب ٤

أ) كم عدد الطرق التي يمكن بها ترتيب ٥ كتب مختلفة على رف مكتبة فيه ٧ أماكن؟

ب) كم عدداً طبيعياً مكوناً من ٤ أرقام، يمكن تكوينه من مجموعة الأرقام {٠،١،٢،٤،٧،٨} ليكون العدد أقل من ٤٠٠٠؟

مثال ٤

أرادت شركة لصنع لوحات أرقام السيارات عمل مجموعة من اللوحات بحيث تتكون من حرفين هجائيين عربيين وثلاثة أرقام كما هو موضح في الشكل. فما عدد اللوحات التي يمكن صنعها إذا:

أ) سمح بتكرار الحرف الهجائي ولم يسمح بتكرار الرقم؟

ب) لم يسمح بتكرار الحرف الهجائي ولا الرقم؟

الحل

اللوحات المراد صنعها تأخذ الشكل التالي:

حرف هجائي	حرف هجائي	آحاد	عشرات	مئات

عدد الحروف الهجائية العربية ٢٨ حرفا، وعدد الأرقام التي يمكن استخدامها هو ١٠ أرقام . لماذا؟

أ)

حرف هجائي	حرف هجائي	آحاد	عشرات	مئات
٢٨	٢٨	٨	٩	٩

عدد الطرق = ٢٨ × ٢٨ × ٨ × ٩ × ٩ = ٥٠٨٠٣٢ طريقة.

ب)

حرف هجائي	حرف هجائي	آحاد	عشرات	مئات
٢٨	٢٧	٨	٩	٩

عدد الطرق = ٢٨ × ٢٧ × ٨ × ٩ × ٩ = ٤٨٩٨٨٨ طريقة.

* فكر في طريقة أخرى للحل.

نتيجة

يمكن تعميم مبدأ العد: إذا أمكن إجراء عملية ما على خطوات عددها «ك»،الخطوة الأولى بطرق عددها $ن_{١}$، الخطوة الثانية بطرق عددها $ن_{٢}$، وهكذا حتى الخطوة الأخيرة ك التي تجرى بطرق عددها $ن_{ك}$ ، فيمكن إجراء هذه العملية بطرق عددها = $ن_{١} \times ن_{٢} \times \cdots \times ن_{ك}$

تعريف

إذا أمكن إجراء عمل ما بـ «ن» من البدائل المختلفة، وكان البديل الأول يتم بـ «$م_{١}$» من الطرق، والبديل الثاني بـ «$م_{٢}$» من الطرق وهكذا حتى الخطوة الأخيرة. فإن عدد الطرق التي يمكن أن يتم إنجاز العمل بها = $م_{١} + م_{٢} + \ldots + م_{ن}$

مثال ٥

طرحت إحدى الكليات لطلاب شعبة الحاسوب ١٠ مقررات رياضية و١٥ مقرر علوم الحاسب الآلي.

أ) بكم طريقة يمكن أخذ مقررين، واحد من الرياضيات والآخر من الحاسب الآلي؟

ب) بكم طريقة يمكن أخذ مقرر واحد؟

الحل

أ) عدد طرق أخذ مقررين معاً أحدهم من الرياضيات والآخر من الحاسب الآلي

= ١٠×١٥= ١٥٠ طريقة.

«أو»
تعني حاصل جمع

ب) عدد طرق اختيار مقرر واحد يعني اختيار مقرر الرياضيات أو مقرر الحاسب الآلي

= ١٠+١٥=٢٥

تدريب ٥

في تجربة إلقاء ٣ أحجار نرد ذوات ٦ أوجه مرة واحدة، احسب عدد الحالات الممكنة للحصول على ٣ أرقام مجموعها على الأقل ١٥.

مثال ٦

الصندوق	الأول	الثاني	الثالث	الرابع
العدد	٢٠	٢٥	٣٠	٤٠

أ) بكم طريقة يمكن اختيار برتقالة واحدة من أي صندوق؟

ب) بكم طريقة يمكن اختيار برتقالة واحدة من كل صندوق؟

الحل

أ) يمكن أخذ البرتقالة من الصندوق الأول أو من الصندوق الثاني أو من الصندوق الثالث أو من الصندوق الرابع

∴ عدد طرق اختيار برتقالة من أي صندوق = ٢٠+٢٥+٣٠+٤٠ = ١١٥ طريقة

ب) عدد طرق اختيار برتقالة واحدة من كل صندوق = ٢٠×٢٥×٣٠×٤٠ = ٦٠٠٠٠٠طريقة

تمارين ومسائل ١

١) يوجد في إحدى المحلات الرياضية المواصفات التالية لحذاء كرة القدم:

اللون : أبيض ، أزرق ، بني ، أسود .

المقاس : ٤٠ ، ٤١ ، ٤٢ ، ٤٣ ، ٤٤ ، ٤٥ «من كل لون».

كم عدد الأنواع المختلفة المعروضة في المحل؟

٢) بطاقة الصرف الآلي تحتوي على أربعة أرقام من ٠ إلى ٩ ، كم بطاقة مختلفة يمكن إنتاجها؟

٣) بكم طريقة يمكن أن يختار طالب مقررين دراسيين الأول في الهندسة ، والثاني في الجبر إذا كان مطروحا له ٦ مقررات في الهندسة و ٣ في الجبر؟

٤) إذا كانت س = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦} .فبكم طريقة يمكن تكوين عدد من خمسة أرقام مختلفة بحيث لا يتجاور رقمين زوجيين أو رقمين فرديين؟

٥) نسيت سمية الرقم الخاص بها لدخول الإنترنت وكانت لديها المعلومات التالية:

– يتكون العدد من الأرقام ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦

– العدد مكون من خمسة أرقام.

– العدد زوجي.

فما عدد الخيارات الممكنة أمام سمية لاستعادة رقمها؟ (إذا علم أن الأرقام لا تتكرر).

٦) يراد اختيار مجلس إدارة الصف (رئيس ونائبه وأمين الصندوق ومسؤول العلاقات العامة) من بين ٣٥ طالبا ، بحيث لا يشغل طالب منصبين في وقت واحد. فبكم طريقة يمكن ذلك؟

٧) لدينا {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤، ٥}، كم عددا مكونا من ثلاثة أرقام يمكن تكوينه إذا:

أ) سمح بالتكرار؟ ب) لم يسمح بالتكرار؟

٨) بكم طريقة يمكن تكوين عدد مكون من أربعة أرقام من ٠ إلى ٩ وتكون محصورة بين ١٠٠٠ و ٧٠٠٠ ولا يكون عددا فرديا؟

٩) في أحد الصفوف الدراسية للحلقة الأولى ١٦ تلميذا و١٤ تلميذة، وكانت هناك مناسبة وطنية يراد تنظيمها بالمدرسة، فما عدد الطرق الممكنة لاختيار:

أ) تلميذ وتلميذة؟ ب) تلميذ أوتلميذة؟

١٠) كم عدداً يمكن تكوينه من أربعة أرقام مختلفة، وتحتوي على الرقمين ٠،٨ ؟

١١) كم عدداً يمكن تكوينه من ثلاثة أرقام، ويكون فيها رقما مكتوبا مرتين؟

١٢) إذا تم رمي حجري نرد ذي ستة أوجه، أجب عما يأتي:

أ) كم عدد النتائج الممكنة؟

ب) ما عدد النتائج التي يكون فيها الرقمين الظاهرين:

١) متساويين ٢) مختلفين.

جـ) اكتب النتائج التي لا تشتمل على الرقم ١ .

د) اكتب النتائج التي تشتمل على الرقم ١ على الأقل مرة واحدة.

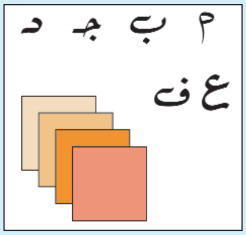
١٣) يراد إنتاج بطاقات تحتوي كل منها على ٦ رموز (أرقام وحروف إنجليزية). فكم بطاقة يمكن إنتاجها بحيث يكون فيها رقمين على الأكثر؟

التباديل (Permutations)

مضروب العدد (Factorial)

نشاط ١: (وضع الحروف في المربعات)

الأدوات: بطاقات على شكل مربع ، مجسمات لبعض الحروف الهجائية.



الخطوات:

١) ضع أمام زميلك بطاقة واحدة واعطه مجسم حرف م ، واطلب منه حساب عدد الطرق الممكنة لوضع الحرف على البطاقة.

٢) ضع أمام زميلك بطاقتين متجاورتين وأعطه الحرفين م ، ب واطلب منه حساب عدد الطرق الممكنة لوضع الحرفين على البطاقتين بحيث يكون كل حرف على بطاقة.

٣) كرر العملية وذلك بزيادة عدد البطاقات وكذلك عدد الحروف ، وقم بتسجيل ملاحظاتك في جدول كالتالي:

عدد البطاقات	عدد الحروف	عدد الطرق الممكنة باستخدام مبدأ العد

٤) إذا كان لدينا ن من البطاقات ، ويراد وضع ن من الحروف عليها ، بحيث يكون كل حرف على بطاقة . بكم طريقة يمكن ذلك حسب مبدأ العد؟

تدريب ١

استخدم الأسلوب السابق، وأوجد عدد طرق جلوس ٦ أشخاص على ٦ مقاعد في صف.

نتيجة

ناتج الضرب : ن × (ن − ١) × (ن − ٢) × ... × ٣×٢×١ يسمى مضروب ن(Factorial)

ويرمز له بالرمز ن ! ، حيث ن ∈ ط*

ن ! = ن × (ن − ١) × (ن − ٢) × ... ×٣×٢×١

مثال ١

احسب قيمة كل مما يلي:

أ) ٦!　　　ب) ١٠! − ٤!　　　جـ) $\frac{٥!}{٣!}$　　　د) $\frac{٨!}{٧!}$

الحل

أ) ٦! = ٦ × ٥ × ٤ × ٣ × ٢ × ١ = ٧٢٠

ب) ١٠! − ٤! = ١٠ × ٩ × ٨ × ٧ × ٦ × ٥ × ٤ × ٣ × ٢ × ١ − ٤ × ٣ × ٢ × ١

= ٣٦٢٨٨٠٠ − ٢٤ = ٣٦٢٨٧٧٦

جـ) $\frac{٥!}{٣!} = \frac{٥\times٤\times٣\times٢\times١}{٣\times٢\times١} = ٥\times٤ = ٢٠$

د) $\frac{٨!}{٧!} = \frac{٨\times٧\times٦\times٥\times٤\times٣\times٢\times١}{٧\times٦\times٥\times٤\times٣\times٢\times١} = ٨$

مثال ٢

أوجد قيمة «ل» في كل مما يأتي:

أ) ٧! = ل×٦!　　　ب) ١٠! = ٨!×ل

جـ) ٦! = ٦×٥!×ل

الحل

أ) ٧! = ل×٦! ← $٧\times\cancel{٦!} = ل\times\cancel{٦!}$

∴ ل = ٧

ب) ١٠! = ٨!×ل ← $١٠\times٩\times\cancel{٨!} = \cancel{٨!}\times ل$

∴ ل = ٩٠

ج) ٦! = ٦×٥!×ل ← $\cancel{٦\times٥!} = \cancel{٦\times٥!}\times ل$

∴ ل = ١

تدريب ٢

أوجد قيمة س في كل ما يلي:

أ) ٨! = س ×٧!　　　　ب) ٩! = س × ٧!

جـ) ٢٠! = س ×١٩!　　　　د) ن! = س×(ن–١)!　　ماذا تستنتج؟

هل توصلت إلى أن:

$\boxed{\text{ن! = ن × (ن–١)!}}$　　　　$\boxed{\frac{\text{ن !}}{\text{(ن–١) !}} = \text{ن}}$

تدريب ٣

أوجد قيمة ص بدلالة ن في كل مما يأتي :

أ) ن! = ن (ن–١) ص!　　　　ب) ن! = ن (ن – ١)(ن – ٢) ص!

مثال ٣

أوجد قيمة ن التي تحقق:

أ) ن! = ١٢٠　　　　ب) (٢ن)! = ٤٠٣٢٠　　　　جـ) ٤ن ! = ٤٨٠

الحل

أ) ١٢٠ = ٥ × ٤ × ٣ × ٢ × ١

∴ ١٢٠ = ٥!

ن! = ٥!

∴ ن = ٥

١٢٠	١
١٢٠	٢
٦٠	٣
٢٠	٤
٥	٥
١	

ب) (٢ن)! = ٨!　　　لماذا؟

٢ن = ٨

∴ن = ٤

تحقق من صحة الحل

جـ) ٤ن! = ٤٨٠

ن! = ١٢٠

∴ن = ٥

تدريب ٤

اكتب ما يلي في أبسط صورة:

أ) $\frac{(ن+٤)!}{(ن+٢)!}$ ب) $\frac{(ن+٢)!\ ن!}{(ن-١)!\ (ن+١)!}$

مثال ٤

احسب قيمة كل مما يأتي :

أ) ١٣! ب) $\frac{٣٠!}{٢٧!}$

الحل

أ) إن حساب قيمة ١٣! قد يحتاج وقتا ، وجهدا ، لذلك يمكن استخدام الآلة الحاسبة لإيجاد مضروب العدد ، مثلا لإيجاد ١٣! نضغط على المفاتيح الآتية بالترتيب من اليمين إلى اليسار:

1	3	Shift	n!

فيظهر على الشاشة العدد

6227020800

∴ ١٣! = ٦٢٢٧٠٢٠٨٠٠

ب) $\frac{٣٠!}{٢٧!} = \frac{٣٠\times٢٩\times٢٨\times٢٧!}{٢٧!} = ٣٠\times٢٩\times٢٨ = ٢٤٣٦٠$

وللتحقق من صحة الحل يمكن استخدام الآلة الحاسبة وذلك بالضغط على المفاتيح الآتية بالترتيب من اليمين إلى اليسار:

3	0	Shift	n!	÷	2	7	Shift	n!	=

فيظهر على الشاشة العدد 24360

∴ $\frac{٣٠!}{٢٧!} = ٢٤٣٦٠$

تدريب ٥

أوجد قيمة كل مما يأتي:

أ) ٢٠! − ١٠! ب) $\frac{٢٠!}{١٠!}$ جـ) $\frac{٨!+١٥!}{٨!}$ د) $\frac{(٤!)!}{٢٠!}$

تباديل ن من العناصر (الأشياء)

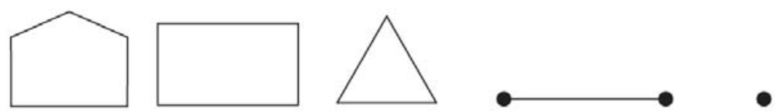
توجه سعيد وعلي ومعهم يحيى لحضور محاضرة حول أهمية الصحة للفرد فوجدوا ثلاثة مقاعد في صف واحد . فما الخيارات الممكنة لجلوسهم على المقاعد الثلاثة؟
لنرمز للأشخاص بالرموز س ، ع ، ي على الترتيب.
خيارات الجلوس هي:

س	ع	ي
ي	ع	س

س	ي	ع
ع	ي	س

ي	س	ع
ع	س	ي

عدد هذه الخيارات = ٦ وكل خيار عبارة عن تبديل في الأماكن.
وحسب مبدأ العد يكون أمام الشخص الأول ٣ خيارات (٣ كراسي)، والشخص الثاني كرسيين، والشخص الثالث كرسي واحد. ∴عدد الخيارات = ٣ × ٢ × ١ = ٣! = ٦
تأمل الأشكال التالية وأجب عن الأسئلة التي تليها:



(١) (٢) (٣) (٤) (٥)

١) ماذا يمثل كل شكل من هذه الأشكال؟
٢) بكم طريقة يمكن تسمية كل من:
الشكل رقم (١) باستخدام الرمز ﻢ ؟
الشكل رقم (٢) باستخدام الرمزين ﻢ ، ب؟
الشكل رقم (٣) باستخدام الرموز ﻢ، ب ، جـ ؟
الشكل رقم (٤) باستخدام الرموز ﻢ، ب ، جـ ، د ؟
الشكل رقم (٥) باستخدام الرموز ﻢ، ب ، جـ ، د ، هـ؟
تسمى كل تسمية مختلفة للشكل (تبديلا)
٣) إذا كان لدينا شكل يحتوي على ن من الرؤوس ويراد تسميته بـ ن من الرموز . كم عدد التباديل الممكنة لتسمية هذا الشكل؟

تدريب ٦

بكم طريقة يمكن وضع ٨ كرات مختلفة داخل ثمانية أكواب في صف واحد؟

تعريف

- يسمى كل ترتيب لعناصر مجموعة ما «تبديلا»
- عدد تباديل ن من العناصر مأخوذة ن في كل مرة = ن!

مثال ٥

كم عددا من ستة أرقام مختلفة يمكن تكوينه باستخدام الأرقام ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ؟

الحل

عدد أرقام العدد = ٦ أرقام ، والأرقام الممكن استخدامها = ٦ أرقام

عدد الأعداد الممكن تكوينها = عدد تباديل ٦ أرقام مأخوذ ٦ أرقام في كل مرة

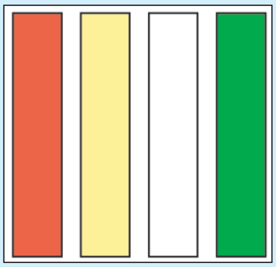
= ٦! = ٦ × ٥ × ٤ × ٣ × ٢ × ١ = ٧٢٠ عددا

تدريب ٧

كم عددا مكونا من أربعة أرقام مختلفة يمكن تكوينه باستخدام الأرقام ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩؟
مثل العملية بمخطط الشجرة.

تباديل ن من العناصر مأخوذة ر في كل مرة

نشاط ٢: (تشكيل أعلام من لونين مختلفين)



الأدوات : ٤ أشرطة ملونة

الخطوات: تعاون مع مجموعتك لتكوين مجموعة من الأعلام المختلفة باستخدام الأشرطة الملونة.

١) قم بتكوين علم مكون من لونين.

٢) اطلب إلى زميلك تكوين علم مختلف غير الذي قمت بتكوينه.
(تذكر أن إعادة ترتيب اللونين ينتج عنه علم مختلف).

٣) كم عدد الأعلام التي تم تكوينها؟

٤) استخدم مبدأ العد في التحقق من إجابتك.

٥) سجل ملاحظتك في جدول كالتالي:

عدد الألوان المستخدمة لتكوين العلم	عدد الطرق الممكنة (حسب مبدأ العد)
٢	
٣	
٤	

٦) إذا كان لدينا ٦ أشرطة ملونة بألوان مختلفة.فكم علما مكونا من أربعة ألوان مختلفة يمكن تكوينها؟

٧) من خلال النقاط السابقة ماذا تستنتج؟

تدريب ٨

أ) اذكر دولتين تستخدمان نفس الألوان لعلميهما ولكن يختلفان في ترتيب الألوان.

ب) استخدم النتيجة التي حصلت عليها في إيجاد عدد الأعداد الممكن تكوينها من رقمين من بين الأرقام {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤} بدون تكرار.

تعريف

عدد تباديل (ن) من العناصر مأخوذة (ر) في كل مرة بحيث ٠ ⩽ ر ⩽ ن ،يرمز له بالرمز $^{ن}ل_{ر}$ ويقرأ «نون لام راء» ويعطى بالعلاقة:

$^{ن}ل_{ر} = ن \times (ن - ١) \times (ن - ٢) \times \ldots \times (ن - ر + ١)$

مثال ٦

أوجد $^{١٠}ل_{٤}$:

لاحظ أن: ن=١٠،

$ر=٤ \leftarrow ن - ر + ١ = ١٠-٤+١=٧$

$\therefore\ ^{١٠}ل_{٤} = ١٠\times٩\times٨\times٧=٥٠٤٠$

ويمكن تبسيط هذه الصيغة باستخدام المضروب:

نضرب الطرف الأيسر بالمقدار $\frac{(ن-ر)!}{(ن-ر)!}$

$$^{ن}ل_{ر} = \frac{ن(ن-١)\times(ن-٢)\times\ldots\times(ن-ر+١)\times(ن-ر)!}{(ن-ر)!} = \frac{ن!}{(ن-ر)!}$$

نتيجة

$$^{ن}ل_{ر} = \frac{ن!}{(ن-ر)!}$$

مثال ٧

أوجد ما يأتي:

أ) $^{٦}ل_{٢}$ ب) $^{١٠}ل_{٥}$ جـ) $^{ن}ل_{٢}$

الحل

أ) $^{٦}ل_{٢} = \frac{٦!}{(٦-٢)!} = \frac{٦!}{٤!}$

$= \frac{٦\times٥\times\cancel{٤!}}{\cancel{٤!}} = ٣٠$

ب) $^{١٠}ل_{٥} = \frac{١٠!}{٥!} = \frac{١٠\times٩\times٨\times٧\times٦\times\cancel{٥!}}{\cancel{٥!}} = ٣٠٢٤٠$

جـ) $^{ن}ل_{٢} = \frac{ن!}{(ن-٢)!} = \frac{ن\times(ن-١)\times\cancel{(ن-٢)!}}{\cancel{(ن-٢)!}}$

$= ن^{٢} - ن$

تدريب ٩

أ) أوجد قيمة:

١) $^{ن}ل_{٠}$

٢) $^{ن}ل_{١}$

٣) $^{ن}ل_{ن}$

ب) تحقق باستخدام النتيجة التي حصلت عليها في (أ) الجزئية (٣) أن ٠! = ١

مثال ٨

يراد اختيار (رئيس ونائب رئيس) لمجلس إدارة جماعة الإدارة الطلابية من بين أربعة طلاب (أسعد، باسم ، جابر ، داؤود) بكم طريقة يمكن ذلك؟

الحل

نرمز للطلاب الأربعة أسعد، باسم، جابر، داؤود بالرموز أ ، ب ، جـ ، د على الترتيب، فإن النتائج الممكنة:

(أ، ب)	(أ، جـ)	(أ، د)	(ب ، أ)	(ب ، جـ)	(ب ، د)
(جـ ،أ)	(جـ ، ب)	(جـ ، د)	(د ،أ)	(د ، ب)	(د ، جـ)

(أ، ب) تعني أ: الرئيس، ب: نائب الرئيس، (ب ،أ) تعني ب: الرئيس، أ: نائب الرئيس

جميعها تباديل ٤ طلاب مأخوذ طالبين في كل مرة (رئيس ونائبه) عددها = ١٢ حسب مبدأ العد

عدد طرق اختيار الرئيس = ٤ طرق ، عدد طرق اختيار نائب الرئيس = ٣ طرق.

∴عدد طرق اختيار الرئيس ونائبه = ٤×٣ = ١٢

وحسب القاعدة السابقة لتباديل ن من العناصر مأخوذة (ر) في كل مرة $^{٤}ل_{٢} = \frac{٤!}{٢!} = ٤ \times ٣ = ١٢$

تدريب ١٠

إذا كانت لدينا مجموعة تضم ٨ طلاب ويراد اختيار لاعب كرة تنس، ولاعب كرة مضرب، ولاعب كرة ريشة. بكم طريقة يمكننا ذلك؟

مثال ٩

بكم طريقة يمكن لخمسة أشخاص الجلوس على تسعة مقاعد موضوعة على استقامة واحدة؟

الحل

سيتم إشغال ٥ مقاعد من بين ٩ مقاعد بطرق متعددة.

∴ عدد الطرق الممكنة = $^{٩}ل_{٥}$

$$= \frac{٩!}{٤!} = ٩ \times ٨ \times ٧ \times ٦ \times ٥$$

= ١٥١٢٠ طريقة

ولإيجاد القيمة السابقة باستخدام الآلة الحاسبة نضغط على المفاتيح الآتية بالترتيب من اليمين إلى اليسار

=	5	nPr	Shift	9

فيظهر على الشاشة العدد 15120

∴ $^{٩}ل_{٥}$ = ١٥١٢٠

تدريب ١١

أوجد قيمة كل مما يلي :

أ) $\frac{^{٩}ل_{٤}}{^{٩}ل_{٣}}$ ب) $^{٦}ل_{٥} \div ٤$ جـ) $^{٣}ل_{٣} \times {}^{٥}ل_{٤}$

مثال ١٠

في اجتماع لمجلس الآباء بإحدى المدارس حضر أربعة طلاب مع آبائهم ،بكم طريقة يمكن ترتيبهم في صف على استقامة واحدة يحوي ٨ مقاعد بحيث يجلس الآباء متجاورين والطلاب متجاورين؟

الحل

هناك حالتان للجلوس : يمكن أن يجلس الآباء على المقاعد الأربعة الأولى والطلاب يجلسون على المقاعد الأربعة الأخيرة أو يجلس الطلاب على المقاعد الأربعة الأولى والآباء يجلسون على المقاعد الأربعة الأخيرة.

الآباء					الطلاب					الطلاب					الآباء			
٨	٧	٦	٥	و	٤	٣	٢	١	أو	٨	٧	٦	٥	و	٤	٣	٢	١

عدد الطرق = ٤! × ٤! + ٤! × ٤!

= ٥٧٦ + ٥٧٦ = ١١٥٢ طريقة

تدريب ١٢

أوجد قيمة كل مما يأتي:

أ) ${}^{٧}\text{ل}_{٣}$ ب) ${}^{٩}\text{ل}_{٢}$ جـ) ${}^{٢٥}\text{ل}_{٣}$

مثال ١١

أوجد قيمة ن التي تحقق:

$$٨ \; {}^{\text{ن}}\text{ل}_{٣} = {}^{(\text{ن}+١)}\text{ل}_{٤}$$

الحل

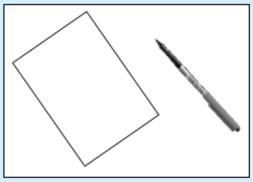
$$٨ \times \frac{\text{ن}\,!}{(\text{ن}-٣)!} = \frac{(\text{ن}+١)!}{(\text{ن}+١-٤)!}$$

$$٨ \times \frac{\cancel{\text{ن}\,!}}{\cancel{(\text{ن}-٣)}!} = \frac{(\text{ن}+١)\,\cancel{\text{ن}}!}{\cancel{(\text{ن}-٣)}!}$$

$$٨ = (\text{ن}+١)$$

$$\therefore \text{ن} = ٧$$

نشاط ٣: (تباديل ن من العناصر على دائرة)



الأدوات : ورقة وقلم

الخطوات :

١) قم برسم دائرة في الورقة التي لديك.

٢) اطلب من زميلك وضع الحرف أ على محيط الدائرة . كم عدد الخيارات المتاحة له ؟

٣) قم أنت الآن بوضع الحرف ب على محيط الدائرة . كم عدد الخيارات المتاحة لك؟

٤) كرر الطلب من زميلك بوضع الحرف جـ .واحسب عدد الخيارات المتاحة له.

٥) تناوب أنت وزميلك حتى تقوم بحساب عدد طرق وضع خمسة رموز مختلفة على محيط الدائرة.

٦) بكم طريقة يمكن وضع الحروف الخمسة معا على محيط الدئرة؟

٧) كرر العملية ولكن باستخدام عدد أكثر من الرموز.

٨) إذا كان لدينا ن من الرموز . بكم طريقة يمكن وضعها على محيط الدائرة ؟

تدريب ١٣

بكم طريقة يمكن تنظيم جلوس ٤ طلاب على طاولة مستديرة؟

نتيجة

عدد تباديل ن من العناصر على دائرة $= \frac{ن!}{ن} = (ن - ١)!$

مثال ١٢

بكم طريقة يمكن عرض ستة أنواع من الفاكهة على محيط طبق دائري؟

الحل

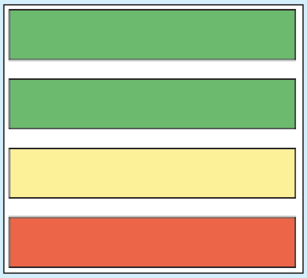
عدد التباديل $= (٦-١)! = ٥! = ١٢٠$

تدريب ١٤

دخل ٧ طلاب قاعة للاجتماعات، فوجدوا في القاعة طاولة مستديرة. بكم طريقة يمكنهم الجلوس على الطاولة؟

تباديل ن من العناصر بعضها متشابه

نشاط ٤: (تكوين أعلام من عدة أشرطة بعضها متشابه الألوان)



الأدوات : ٤ أشرطة ملونة بعضها متشابه

الخطوات:

١) ما عدد تباديل ٤ عناصرمأخوذة ٤ في كل مرة ؟

٢) اعمل على تكوين جميع التبديلات (الأعلام) الممكنة باستخدام الأشرطة جميعها.

٣) كم عدد هذه التبديلات التي حصلت عليها؟ وهل تختلف عن $ل^{٤}_{٤}$؟

٤) فسر إجابتك ، وأوجد العلاقة بين الإجابتين؟

٥) ناقش زملاءك النتيجة التي حصلت عليها.

تدريب ١٥

استخدم النتيجة التي حصلت عليها في إيجاد عدد تباديل حروف الكلمات التالية:

أ) صلالة   ب) بدبد

نتيجة

عدد تباديل (ن) من العناصر تحوي (م) من العناصر المتشابهة فيما بينها، و(ل) من العناصر الأخرى المتشابهة فيما بينها = $\frac{ن!}{م!\ ل!}$

مثال ١٣

أوجد عدد تباديل حروف كلمة (قسطنطينية).

الحل

حرف ن مكتوب مرتين
حرف ط مكتوب مرتين
حرف ي مكتوب مرتين

عدد تباديل الحروف = $\frac{٩!}{٢!\times ٢!\times ٢!}$ لماذا؟

$= \frac{٣٦٢٨٨٠}{٨} = ٤٥٣٦٠$

تدريب ١٦

أوجد عدد تباديل حروف كلمة (سلسبيل)؟

مثال ١٤

أوجد عدد تباديل أرقام العدد ٢٢٤٥٥٢

رقم ٢ مكرر ثلاث مرات
رقم ٥ مكرر مرتين

الحل

عدد تباديل الأرقام= $\frac{٦!}{٣!\times ٢!}$ = ٦٠

تدريب ١٧

أوجد عدد تباديل أرقام العدد:

أ) ٢٢٦

ب) ١٦١٦٦٥٤٥

تمارين ومسائل ٢

١) أوجد قيمة كل مما يأتي :

أ) $١٥! - ١٠!$ ب) $(٤!)\,(٣!)$ جـ) $\frac{٥! \times ٨!}{١٠!}$

د) ${}^{٩}\text{ل}_{٩}$ هـ) ${}^{١٢}\text{ل}_{١}$ و) $\frac{٨ \times {}^{٧}\text{ل}_{٦}}{{}^{٨}\text{ل}_{٥} \times ٤!}$

٢) اثبت أن:

$$\frac{(\text{ن} + ٤)!}{\text{ن}!} = (\text{ن} + ٤) \times {}^{(\text{ن}+٣)}\text{ل}_{٣}$$

٣) أوجد قيمة ن في كل مما يأتي:

أ) $\text{ن}! = ٣٦٢٨٨٠$ ب) $(٣\text{ن} - ٥)! = ١$

جـ) $\text{ن} \times {}^{٦}\text{ل}_{٢} = {}^{٨}\text{ل}_{٤}$ د) ${}^{\text{ن}}\text{ل}_{٤} = ٥\ {}^{(\text{ن}-١)}\text{ل}_{٣}$

هـ) ${}^{(٢\text{ن}+١)}\text{ل}_{\text{ن}-١} : {}^{(٢\text{ن}+١)}\text{ل}_{\text{ن}} = ١ : ٦$

٤) إذا كان ${}^{(\text{ن}-١)}\text{ل}_{٣} > {}^{(\text{ن}-١)}\text{ل}_{٢}$ فأوجد أقل قيمة للعدد ن تحقق هذه المتباينة؟

٥) إذا كان لدينا الأرقام ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ .كم عددا يمكن تكوينه من :

أ) خمسة أرقام بدون تكرار ؟   ب) ثلاثة أرقام بدون تكرار ؟

٦) في سباق للجري بمناسبة يوم المعاق العالمي اشترك فيه ٢٥ متسابقا ، حيث تعطى الجوائز للأربعة الأوائل ، فكم عدد الطرق الممكنة لأحد المشاركين بالفوز بأحد المراكز الأربعة؟

٧) بكم طريقة يمكن لأحمد ترتيب الكتب التي لديه وهي : ٥ كتب في الرياضيات ، ٣ كتب في التاريخ ، ٤ كتب في اللغة العربية في رف من رفوف مكتبته بحيث تكون كل مجموعة كتب من نفس النوع متجاورة ؟

٨) أوجد عدد تباديل أحرف الكلمات التالية بدون تكرار:

أ) هندسة   ب) اللغة   جـ) الليل   د) كتاب

٩) من تدريب ١٤ إذا كان للقاعة ثلاثة أبواب وجهاز تكييف واحد على الحائط بكم طريقة يمكن دخول الطلاب والجلوس على الطاولة المستديرة ، بحيث يدخلون جميعا من نفس الباب ويجلس أحدهم بالقرب من المكيف.

١٠) ضع في أبسط صورة:

$$\frac{\text{ن}!}{(\text{ن} - ٢)!} \ ،\ \text{ن} \in \text{ط} ،\ \text{ن} \geqslant ٢$$

التوافيق (Combinations)

نشاط ١: (اختيار أداتين من بين مجموعة من الأدوات)

الأدوات : قلم ، مسطرة ، منقلة ، حاسبة ، ممحاة

الخطوات:

١) قم بصف الأدوات المدرسية على الطاولة.

٢) اكتب جميع المجموعات الجزئية التي تتكون من أداتين من مجموعة الأدوات.

٣) اكتب جميع الخيارات (التوفيقات) الممكنة لاختيار أداتين.

٤) كم عدد هذه التوفيقات؟ هل يختلف عن عدد المجموعات الجزئية الثنائية؟

٥) هل يختلف اختيار قلم، وفرجار عن اختيار فرجار، وقلم ؟ أم هي نفس الاختيار (التوفيقة)؟

٦) كرر العمل مع اختيار ثلاث أدوات، وقارن ذلك مع التباديل.

٧) حاول وضع تعريف للتوافيق.

تدريب ١

هل تستطيع التوصل إلى معرفة الفرق بين التباديل والتوافيق؟

تعريف

عدد توافيق ن من العناصر مأخوذة ر في كل مرة حيث $٠ \leqslant ر \leqslant ن$ يرمز له بالرمز $\binom{ن}{ر}$، ويقرأ «ن فوق ر» .

تتبع ما يلي : إذا كان لديك الأرقام التالية ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ فتحقق مما يلي:

١) كم عدداً من رقمين مختلفين يمكن تكوينه؟

$^{٥}ل_{٢} = ٢٠$

كم مجموعة لرقمين يمكن تكوينها؟

$\binom{٥}{٢} = ١٠ \quad \therefore \binom{٥}{٢} = \frac{^{٥}ل_{٢}}{٢!}$

٢) كم عددا من ثلاثة أرقام مختلفة؟

$^{٥}ل_{٣} = ٦٠$

كم مجموعة لثلاثة أرقام مختلفة؟

$\binom{٥}{٣} = ١٠ \quad \therefore \binom{٥}{٣} = \frac{^{٥}ل_{٣}}{٣!}$

٣) كم عدداً من أربعة أرقام مختلفة؟

$^{٥}ل_{٤} = ١٢٠$

كم مجموعة لأربعة أرقام مختلفة؟

$\binom{٥}{٤} = ٥ \quad \therefore \binom{٥}{٤} = \frac{^{٥}ل_{٤}}{٤!}$

* هل لاحظت الفرق في كل حالة؟

✷ نتيجة

تغيير ترتيب العناصر يؤثر في التباديل بينما لا يؤثر في حالة التوافيق، العلاقة بين التباديل والتوافيق هي $\binom{\text{ن}}{\text{ر}} = \frac{{}^{\text{ن}}\text{ل}_{\text{ر}}}{\text{ر}\,!} = \frac{\text{ن}\,!}{(\text{ن} - \text{ر})\,! \times \text{ر}\,!}$

وفي حالة ر = ن، $\binom{\text{ن}}{\text{ن}} = \frac{{}^{\text{ن}}\text{ل}_{\text{ن}}}{\text{ن}!} = \frac{\text{ن}!}{\text{ن}!} = ١$

مثال ١

أوجد ناتج ما يلي:

أ) $\binom{٥}{٣}$ ب) $\binom{١٠}{٧}$

الحل

أ) $\because \binom{\text{ن}}{\text{ر}} = \frac{\text{ن}\,!}{(\text{ن} - \text{ر})!\ \text{ر}!}$

$\therefore \binom{٥}{٣} = \frac{٥\,!}{(٥ - ٣)!\ ٣!} = \frac{٥\,!}{٢! \times ٣!} = ١٠$

ب) $\binom{١٠}{٧} = \frac{١٠\,!}{٧! \times ٣!} = ١٢٠$

تدريب ٢

أوجد ناتج:

أ) $\binom{٨}{٠}$ ب) $\binom{١١}{٤}$ جـ) $\binom{٧}{٧} \times \binom{٦}{٥}$

مثال ٢

ضع في أبسط صورة $\binom{\text{ن}}{١}$

الحل

$\binom{\text{ن}}{١} = \frac{\text{ن}\,!}{(\text{ن} - ١)!\ ١!} = \text{ن}$

تدريب ٣

ضع في أبسط صورة:

أ) $\binom{\text{ن}}{٠}$ ب) $\binom{\text{ن}^{٢}}{١}$ جـ) $\binom{\text{ن}+١}{\text{ن}-١}$

مثال ٣

يراد اختيار فريق لكرة القدم بالمدرسة مكونا من ١١ لاعبا من بين ١٤ لاعباً فبكم طريقة يمكن ذلك؟

الحل

اختيار ١١ لاعباً لا يحتاج إلى ترتيب لذلك سوف نطبق قاعدة التوافيق

عدد الطرق الممكنة لاختيار ١١ من بين ١٤ = $\binom{١٤}{١١} = \frac{١٤!}{١١! \times ٣!}$

$= \frac{١٤\times١٣\times١٢\times١١!}{١١! \times ٣!} = ٣٦٤$ طريقة

ولإيجاد القيمة باستخدام الآلة الحاسبة نضغط على المفاتيح الآتية بالترتيب من اليمين إلى اليسار فيظهر على الشاشة

364	=	1	1	nCr	4	1

مثال ٤

عدد أعضاء مجلس إدارة إحدى الشركات أربعة أعضاء ، أوجد عدد الطرق الممكنة لاختيار:

ﺃ) رئيس ونائب رئيس.

ب) شخصين لتمثيل الشركة في مؤتمر.

الحل

إذا كانت المجموعة{ﺃ،ب،جـ،د} تمثل الأعضاء الأربعة.

ﺃ) عدد طرق اختيار رئيس ونائبه= $^{٤}ل_{٢}$ = ٤×٣=١٢

ولقد راعينا الترتيب حيث (ﺃ،ب) يعني أن ﺃ الرئيس و ب نائبه ، (ب ،ﺃ) يعني أن ب الرئيس وﺃ نائبه.

ب) لاختيار شخصين من بين أربعة لتمثيل الشركة فإن اختيار (ﺃ،ب) لا يختلف عن اختيار (ب،ﺃ) وتكون الطرق هي (ﺃ،ب) ، (ﺃ،جـ) ، (ﺃ،د) ، (ب،جـ) ، (ب ، د) ، (جـ ، د) وبتطبيق قاعدة التوافيق.

عدد الطرق =$\binom{٤}{٢} = \frac{٤!}{٢! \times ٢!} = ٦$ طرق

تدريب ٤

طلب من إحدى المدارس ترشيح طالبين للمشاركة في المساجلة الشعرية ضمن أنشطة مسابقة المحافظة على النظافة والصحة في البيئة المدرسية من بين ١٥ طالبا ، فبكم طريقة يمكن لمشرف جماعة الإلقاء والإنشاد اختيار الطالبين؟

مثال ٥

أراد المعلم الأول لمادة الرياضيات بإحدى المدارس تكوين جماعة الرياضيات بحيث تتألف من ٤ معلمين ، و ١٥ طالبا. فبكم طريقة يمكنه تكوين الجماعة من بين ١٠ معلمين و ٢٠ طالبا؟

الحل

لاحظ أن تكوين الجماعة يتم بخطوتين الأولى اختيار المعلمين، والثانية اختيار الطلاب كذلك أن الترتيب غير مهم في هاتين العمليتين. (لماذا؟)

عدد طرق اختيار ٤ معلمين من بين ١٠ معلمين $= \binom{١٠}{٤} = \frac{١٠!}{٤! \times ٦!} = ٢١٠$ طريقة

عدد طرق اختيار ١٥ طالبا من بين ٢٠ طالبا $= \binom{٢٠}{١٥} = \frac{٢٠!}{١٥! \times ٥!} = ١٥٥٠٤$ طريقة

عدد الطرق الممكنة $= ٢١٠ \times ١٥٥٠٤ = ٣٢٥٥٨٤٠$ طريقة

تدريب ٥

برهن أن: $\binom{ن}{ر} = \binom{ن}{ن-ر}$

مثال ٦

أثبت أن : $\binom{ن}{ر} + \binom{ن}{ر-١} = \binom{ن+١}{ر}$

الحل

الطرف الأيمن $= \frac{ن!}{ر!(ن-ر)!} + \frac{ن!}{(ر-١)! \times (ن-ر+١)!}$

$= \frac{ن!\,(ن-ر+١) + ن! \times ر}{ر!\,(ن-ر+١)!}$

$= \frac{ن!\,[ن-ر+١+ر]}{ر!(ن-ر+١)!}$

$= \frac{ن!\,(ن+١)}{ر!\,(ن+١-ر)!} = \binom{ن+١}{ر} =$ الطرف الأيسر

مثال ٧

بكم طريقة يمكن اختيار ٤ طلاب على الأقل من بين ٦ طلاب للمشاركة في ندوة حول أهمية العلم في الإسلام؟

الحل

يمكن أن تكون اللجنة مكونة من ٤ طلاب أو ٥ طلاب أو ٦ طلاب.

عدد الطرق الممكنة لاختيار ٤ طلاب من بين ستة $= \binom{٦}{٤} = \frac{٦!}{٤! \times ٢!} = ١٥$ طريقة

عدد الطرق الممكنة لاختيار ٥ طلاب من بين ستة $= \binom{٦}{٥} = \frac{٦!}{٥! \times ١!} = ٦$ طرق

عدد الطرق الممكنة لاختيار ٦ طلاب من بين ستة $= \binom{٦}{٦} =$ طريقة واحدة

عدد الطرق الممكنة $= \binom{٦}{٤} + \binom{٦}{٥} + \binom{٦}{٦} = ١٥ + ٦ + ١ = ٢٢$ طريقة

استخدام برنامج أكسل في حساب المضروب والتباديل والتوافيق:

يمكنك اتباع الخطوات التالية لإيجاد كل من المضروب والتباديل والتوافيق:

الخطوة الأولى: (افتح برنامج أكسل)

الخطوة الثانية: (اكتب البيانات كما هو موضح)

الخطوة الثالثة: (استخدم الدوال في البرنامج)

– ضع المؤشر على الخلية الأولى المراد إيجاد المضروب أو التباديل أو التوافيق فيها.

– اذهب إلى إدراج في شريط الأدوات ثم اختر دالة.

الخطوة الرابعة : (إدراج الدوال الرياضية)

– ابحث عن دوال المضروب والتباديل والتوافيق.

– ادرج كل دالة في الخلية التي تحدثنا عنها في الخطوة السابقة.

– قم بنسخ الخلية ولصقها على خلايا العمود الآخر .

المضروب			التباديل				التوافيق		
ن	ن!		ن	ر	ن ل ر		ن	ر	(ن ر)
٢			٣	٣			٥	٤	
٣			٤	٣			٦	٥	
٤			٦	٢			٩	٧	
٥			١٢	٢			١٠	٩	
٦			١٨	٣			١٢	٦	
٧			٢٠	١			١٥	١٢	
٨			٢٢	٢			١٨	١٦	
٩			٢٥	١			١٩	١٨	
١٠			٢٦	٤			٢٠	١٧	
١١			٢٨	٢			٢٢	٢٠	
١٢			٣٠	٢			٢٨	٢٤	
١٣			٣٢	١			٣٠	٢٨	

* يمكن كتابة الدوال وهي على الشكل التالي:

B4 رقم الخلية

=FACT(B4)

E4 خلية ر

F4 خلية ن

=PERMUT(E4.F4)

I4 خلية ن

J4 خلية ر

=COMBIN(I4.J4)

المضروب			التباديل				التوافيق		
ن	ن!		ن	ر	ن ل ر		ن	ر	(ن ر)
٢			٣	٣			٥	٤	
٣			٤	٣			٦	٥	
٤			٦	٢			٩	٧	
٥			١٢	٢			١٠	٩	
٦			١٨	٣			١٢	٦	
٧			٢٠	١			١٥	١٢	
٨			٢٢	٢			١٨	١٦	
٩			٢٥	١			١٩	١٨	
١٠			٢٦	٤			٢٠	١٧	
١١			٢٨	٢			٢٢	٢٠	
١٢			٣٠	٢			٢٨	٢٤	
١٣			٣٢	١			٣٠	٢٨	

تمارين ومسائل ٣

١) أوجد قيمة كل من :

أ) $\binom{٧}{٣}$ ب) $\binom{١٢}{٥}$ جـ) $\binom{٢٢}{٢٠}$ د) $\binom{٦٦}{٦٥}$

٢) أثبت أن :

أ) $\binom{\text{ن}}{\text{ر}} : \binom{\text{ن}-١}{\text{ر}} = \frac{\text{ن}}{\text{ن}-\text{ر}}$ ب) $\binom{\text{ن}}{\text{ر}} : \binom{\text{ن}}{\text{ر}-١} = \frac{\text{ن}-\text{ر}+١}{\text{ر}}$

٣) أوجد قيمة أ، ب في كل مما يأتي :

أ) $\binom{\text{أ}}{٣} = ٥٦$ ، $\binom{\text{ب}}{\text{أ}} = \binom{\text{ب}}{\text{أ}+٣}$

ب) $\binom{\text{أ}}{\text{ب}-١} : \binom{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{١}{٣}$ ، $\binom{\text{أ}}{٣} = \binom{\text{أ}}{١٢}$

٤) إذا كان $\binom{\text{ن}+٢}{٦} > \binom{\text{ن}+٢}{٥}$ فأوجد أقل قيمة للعدد ن تحقق هذه المتباينة.

٥) أوجد ناتج: أ) $^{٧}\text{ل}_{٣} \times \binom{١٥}{٤} + ٦$ ب) $(٤!)\,(٣!) - \frac{{}^{٦}\text{ل}}{\binom{٧}{٠}}$

٦) أوجد عدد طرق اختيار ٥ لاعبين كرة سلة من بين ١١ لاعب .

٧) بكم طريقة يمكن تقسيم ١٤ طالبا إلى مجموعتين متساويتين؟

٨) أراد أحد المعلمين عمل استبيان حول أهمية مسابقة المحافظة على النظافة والصحة في البيئة المدرسية بالنسبة للطالب من بين عشرة طلاب فبكم طريقة يمكن :

أ) اختيار خمسة طلاب على الأقل؟

ب) اختيار خمسة طلاب على الأكثر؟

٩) رسمت ١٠ نقاط على مستوى بحيث لا تكون أي ثلاث منها على استقامة واحدة:

أ) كم قطعة مستقيمة يمكن رسمها؟

ب) كم مثلثاً مختلفاً يمكن رسمه؟

١٠) في أحد الامتحانات لطلبة الرياضيات في الجامعة طلب من الطلاب الإجابة عن ثمانية أسئلة من بين عشرة أسئلة بشرط أن يجيب على ثلاثة أسئلة على الأقل من الخمسة الأولى ، فبكم طريقة يمكن للطالب اختيار الأسئلة؟

١١) لاحظ الجدول الآتي، ثم أجب عن الأسئلة التي تليه:

ن=	(أ)	(ب)	(ج)
٢	٢×٢×٢=$٢^{٣}$=٨	١×٢×٣=${}^{٣}\text{ل}_{٣}$ = ٦	٨−٦=٢
٣	٣×٣×٣=$٣^{٣}$=٢٧	٢×٣×٤=${}^{٤}\text{ل}_{٣}$ = ٢٤	٢٧−٢٤=٣
٤	٤×٤×٤=$٤^{٣}$=٦٤	٣×٤×٥=${}^{٥}\text{ل}_{٣}$ = ٦٠	....
٥	٥×٥×٥=	٤×	....
٦	٦×	٥×	....
٧	٧×	....	....
٨	٨×	....	....
	....		
ن	ن×ن×ن=	....	....

أ) اكمل الأعداد بالجدول للصفوف السبعة الأولى.

ب) اكمل الفراغات للصف الأخير.

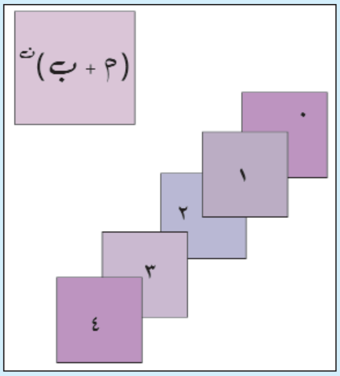
١٢) في دوري رياضي توجد سبع فرق، كل فرقة تلتقي مرة واحدة فقط مع كل فرقة من الفرق الأخرى. فكم لقاء سيتم تنظيمه؟

١٣) برهن العلاقة:

$$\binom{\text{ن}}{\text{ر}}\binom{\text{ن}-\text{ر}}{\text{م}-\text{ر}}=\binom{\text{ن}}{\text{م}}\binom{\text{م}}{\text{ر}}$$ حيث: $٠ < \text{ر} < \text{م} < \text{ن}$

نظرية ذات الحدين (Binomial Theorem)

نشاط ١: تحليل المقدار (أ+ب)^{ن}



الأدوات : بطاقات عليها أحد الأرقام{٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤}، وورقة وقلم ، بطاقة مكتوب عليها (أ + ب)^{ن}

الخطوات:

١) يقوم زميلك بسحب بطاقة عشوائيا ، أكتب الرقم الذي ظهر.
٢) عوض عن ن في المقدار (أ+ ب)^{ن}بالرقم الظاهر.
٣) قم بإيجاد المفكوك للمقدار الناتج باستخدام الضرب العادي.
٤) قم أنت بسحب بطاقة أخرى.
٥) كرر العمل ولكن في هذه المرة على زميلك أن يفك المقدار.
٦) تناوب أنت وزميلك على تكرار الخطوات ومن يقوم بفك المقدار بشكل صحيح يحصل على درجة.
٧) قم بإكمال الجدول التالي من البيانات التي حصلت عليها بعد ترتيب قيم ن تصاعديا.

ن (الأس)	المقدار	المفكوك	عدد الحدود
٠	(أ+ب)^{٠}	١	١

وأجب عن الأسئلة التالية:

أ) ما العلاقة بين عدد الحدود وقيمة الأس؟
ب) ماذا تلاحظ على أسس كل من المتغيرين أ، ب في كل مفكوك؟
جـ) ماذا تلاحظ على معاملات الحدود في كل مفكوك؟
د) هل يمكن استخدام التوافيق للتعبير عن المعاملات ؟
هـ) حاول استنتاج قاعدة إيجاد مفكوك (أ + ب)^{ن}

٨) أجب عن الأسئلة التالية للمفكوك (أ+ ب)^{٥}

أ) ما عدد حدود المفكوك ؟
ب) مجموع أسي أ ، ب في كل حد ؟
جـ) كيف يتغير أس المتغير أ وأس المتغير ب ؟

لاحظ أن المعاملات في المفكوك تتبع نمطا معينا يعرف بمثلث باسكال (Pascal Triangle)

المقدار	معاملات حدود المفكوك
(أ +ب)^{٠}	١
(أ +ب)^{١}	١ ١
(أ +ب)^{٢}	١ ٢ ١
(أ +ب)^{٣}	١ ٣ ٣ ١
(أ +ب)^{٤}	١ ٤ ٦ ٤ ١
(أ +ب)^{٥}	١ ٥ ١٠ ١٠ ٥ ١
(أ +ب)^{٦}	١ ٦ ١٥ ٢٠ ١٥ ٦ ١

يلاحظ على مثلث باسكال ما يلي:

١) يبدأ كل صف وينتهي بالرقم ١.

٢) أي عدد آخر في الصف غير الواحد هو عبارة عن مجموع العددين الموجودين في الصف الذي يعلوه.

مثلا:

$$١ + ٥ + ١٠ + ١٠ + ٥ + ١$$

$$١ \quad ٦ \quad ١٥ \quad ٢٠ \quad ١٥ \quad ٦ \quad ١$$

يمكن عمل مثلث باسكال باستخدام التوافيق كما بالشكل:

$$\binom{٠}{٠}$$

$$\binom{١}{٠} \quad \binom{١}{١}$$

$$\binom{٢}{٠} \quad \boxed{\binom{٢}{١} \quad \binom{٢}{٢}}$$

$$\binom{٣}{٠} \quad \binom{٣}{١} \quad \boxed{\binom{٣}{٢}} \quad \binom{٣}{٣}$$

$$\vdots$$

$$\binom{ن-١}{٠} \quad \binom{ن-١}{١} \quad \cdots \quad \boxed{\binom{ن-١}{ر-١} \quad \binom{ن-١}{ر}} \quad \cdots \quad \binom{ن-١}{ن-٢} \quad \binom{ن-١}{ن-١}$$

$$\binom{ن}{٠} \quad \binom{ن}{١} \quad \cdots \quad \boxed{\binom{ن}{ر}} \quad \cdots \quad \binom{ن}{ن-١} \quad \binom{ن}{ن}$$

مثال ١

اثبت أن:

أ) $\binom{٢}{١}+\binom{٢}{٢}=\binom{٣}{٢}$ ب) $\binom{ن-١}{ر-١}+\binom{ن-١}{ر}=\binom{ن}{ر}$

الحل

أ) الطرف الأيمن $=\binom{٢}{١}+\binom{٢}{٢}=\frac{٢!}{١!\times ١!}+\frac{٢!}{٢!\times ٠!}$

$$=\frac{٢\times ٢}{٢}+\frac{٢}{٢}$$

$$=\frac{٦}{٢}$$

$=\frac{٣!}{٢!}=\frac{٣!}{٢!\times ١!}=\binom{٣}{٢}=$ الطرف الأيسر

ب) الطرف الأيمن $= \binom{ن-١}{ر-١} + \binom{ن-١}{ر} = \dfrac{(ن-١)!}{(ر-١)!\,[(ن-١)-(ر-١)]!} + \dfrac{(ن-١)!}{ر!\,[(ن-١)-ر]!}$

$$= \frac{(ن-١)!}{(ر-١)!\,(ن-ر)!} + \frac{(ن-١)!}{ر!\,[(ن-ر)-١]!}$$

$$= \frac{ر\,(ن-١)!}{ر!\,(ن-ر)!} + \frac{(ن-ر)\,(ن-١)!}{ر!\,(ن-ر)!}$$

$$= \frac{[ر+(ن-ر)]\,(ن-١)!}{ر!\,(ن-ر)!} = \frac{ن\,(ن-١)!}{ر!\,(ن-ر)!}$$

$= \dfrac{ن!}{ر!\,(ن-ر)!} = \binom{ن}{ر} =$ الطرف الأيسر

تدريب ١

اثبت العلاقات الآتية:

أ) $\binom{ن-١}{٠} + \binom{ن-١}{١} = \binom{ن}{١}$

ب) $\binom{ن-١}{ن-٢} + \binom{ن-١}{ن-١} = \binom{ن}{ن-١}$

تدريب ٢

أوجد مفكوك $(أ+ب)^{٧}$ باستخدام مثلث باسكال.

مثال ٢

أوجد معاملات $(أ+ب)^{٣}$ باستخدام التوافيق.

الحل

$(أ+ب)^{٣} = (أ+ب)\,(أ+ب)\,(أ+ب)$

$(أ+ب)^{٣} = \blacksquare\, أ^{٣} + \blacksquare\, أ^{٢}ب + \blacksquare\, أب^{٢} + \blacksquare\, ب^{٣}$

لنفترض أننا نريد اختيار الرمز ب:

- في الحد الأول لم يتم اختيار ب.
- في الحد الثاني تم اختيار ب مرة واحدة من قوس واحد.
- في الحد الثالث تم اختيار ب من قوسين.
- في الحد الرابع تم اختيار ب من ثلاثة أقواس.

$\therefore (أ+ب)^{٣} = \binom{٣}{٠} أ^{٣} + \binom{٣}{١} أ^{٢}ب + \binom{٣}{٢} أب^{٢} + \binom{٣}{٣} ب^{٣}$

ملاحظة

إذا قمنا باختيار الرمز أ وأعدنا الخطوات السابقة سوف نحصل على نفس الحل، لماذا؟

نتيجة

يكتب مفكوك نظرية ذات الحدين كما يلي:

$$(\text{أ}+\text{ب})^{\text{ن}} = \binom{\text{ن}}{٠}\text{أ}^{\text{ن}} + \binom{\text{ن}}{١}\text{أ}^{(\text{ن}-١)}\text{ب}^{١} + \binom{\text{ن}}{٢}\text{أ}^{(\text{ن}-٢)}\text{ب}^{٢} + \binom{\text{ن}}{٣}\text{أ}^{(\text{ن}-٣)}\text{ب}^{٣} + \dots$$

$$+ \binom{\text{ن}}{\text{ن}-١}\text{أ}^{١}\text{ب}^{(\text{ن}-١)} + \binom{\text{ن}}{\text{ن}}\text{ب}^{\text{ن}}$$ ، حيث $\text{ن} \in \text{ص}^{+}$

ويمكن كتابة النتيجة السابقة باستخدام الرمز $\sum$:

$$(\text{أ}+\text{ب})^{\text{ن}} = \sum_{\text{ر}=٠}^{\text{ن}} \binom{\text{ن}}{\text{ر}}\text{أ}^{(\text{ن}-\text{ر})}\text{ب}^{\text{ر}}$$

تدريب ٣

أوجد مفكوك كل من :

أ) $(١ + \text{س})^{\text{ن}}$ ب) $(١ - \text{س})^{\text{ن}}$ جـ) $(١ + ١)^{\text{ن}}$ ماذا تلاحظ؟

مثال ٣

أوجد مفكوك كل من :

أ) $(\text{أ}+\text{ب})^{٦}$ ب) $(\text{س} - \text{ص})^{٥}$

الحل

أ) $(\text{أ}+\text{ب})^{٦} = \binom{٦}{٠}\text{أ}^{٦} + \binom{٦}{١}\text{أ}^{٥}\text{ب} + \binom{٦}{٢}\text{أ}^{٤}\text{ب}^{٢} + \binom{٦}{٣}\text{أ}^{٣}\text{ب}^{٣} + \binom{٦}{٤}\text{أ}^{٢}\text{ب}^{٤} + \binom{٦}{٥}\text{أ}\text{ب}^{٥} + \binom{٦}{٦}\text{ب}^{٦}$

$$= \text{أ}^{٦} + \frac{٦!}{١! \times ٥!}\text{أ}^{٥}\text{ب} + \frac{٦!}{٢! \times ٤!}\text{أ}^{٤}\text{ب}^{٢} + \frac{٦!}{٣! \times ٣!}\text{أ}^{٣}\text{ب}^{٣} + \frac{٦!}{٤! \times ٢!}\text{أ}^{٢}\text{ب}^{٤} + \frac{٦!}{٥! \times ١!}\text{أ}\text{ب}^{٥} + \text{ب}^{٦}$$

$$= \text{أ}^{٦} + ٦\text{أ}^{٥}\text{ب} + ١٥\text{أ}^{٤}\text{ب}^{٢} + ٢٠\text{أ}^{٣}\text{ب}^{٣} + ١٥\text{أ}^{٢}\text{ب}^{٤} + ٦\text{أ}\text{ب}^{٥} + \text{ب}^{٦}$$

ب) $(س - ص)^{٥} = \binom{٥}{٠} س^{٥} + \binom{٥}{١} س^{٤} (- ص) + \binom{٥}{٢} س^{٣} (- ص)^{٢} + \binom{٥}{٣} س^{٢} (- ص)^{٣}$

$+ \binom{٥}{٤} س (- ص)^{٤} + \binom{٥}{٥} (- ص)^{٥}$

$= س^{٥} + \frac{!٥}{!١ \times !٤} س^{٤} (- ص) + \frac{!٥}{!٢ \times !٣} س^{٣} (- ص)^{٢} + \frac{!٥}{!٣ \times !٢} س^{٢} (- ص)^{٣}$

$+ \frac{!٥}{!٤ \times !١} س (- ص)^{٤} + (- ص)^{٥}$

$= س^{٥} - ٥ س^{٤} ص + ١٠ س^{٣} ص^{٢} - ١٠ س^{٢} ص^{٣} + ٥ س ص^{٤} - ص^{٥}$

تدريب ٤

أوجد مفكوك كل من :

أ) $(٤ + \frac{ص}{٢})^{٤}$

ب) $(١ + س^{٢})^{٥}$

جـ) $(١ - \frac{١}{س})^{٦}$

مثال ٤

باستخدام نظرية ذات الحدين أوجد قيمة $(١,٠٣)^{٥}$ مقربا إلى ثلاث أرقام عشرية.

الحل

نضع $(١,٠٣)^{٥}$ على صورة $(أ + ب)^{ن}$

$(١,٠٣)^{٥} = (١ + ٠,٠٣)^{٥} = \binom{٥}{٠} (١)^{٥} + \binom{٥}{١} (٠,٠٣) + \binom{٥}{٢} (٠,٠٣)^{٢} + \binom{٥}{٣} (٠,٠٣)^{٣}$

$+ \binom{٥}{٤} (٠,٠٣)^{٤} + \binom{٥}{٥} (٠,٠٣)^{٥}$

$= ١ + ٥ \times ٠,٠٣ + ١٠ \times ٠,٠٠٠٩ + \cdots \approx ١,١٥٩$

(يكتفى بالحدود الثلاثة لأن الحدود الأخرى أقل من $١٠^{-٤}$ ولذلك أهملت)

الحد العام في مفكوك $(أ+ب)^{ن}$:

إذا كان:

$$(أ+ب)^{ن} = \binom{ن}{٠} أ^{ن} + \binom{ن}{١} أ^{ن-١} ب^{١} + \binom{ن}{٢} أ^{ن-٢} ب^{٢} + \binom{ن}{٣} أ^{ن-٣} ب^{٣} + \dots$$

$$+ \binom{ن}{ن-١} أ^{١} ب^{ن-١} + \binom{ن}{ن} ب^{ن}$$ ، حيث $ن \in ص^{+}$

اكمل الجدول المقابل باعتمادك مفكوك $(أ+ب)^{ن}$، أعلاه:

الحد	قيمة الحد في المفكوك	قيمة الأس «ن»	قيمة ر
$ح_{١}$	$\binom{ن}{٠} أ^{ن}$	ن	٠
$ح_{٢}$			
$ح_{٣}$			
$ح_{٤}$			
$ح_{ن}$			
$ح_{ن+١}$			

من الجدول، استنتج:

$$ح_{ن} = \binom{ن}{\dots} أ^{\dots} ب^{\dots}$$

$$ح_{ر+١} = \binom{ن}{\dots} أ^{\dots} ب^{\dots}$$

تدريب ٥

استخدم القاعدة التي حصلت عليها لإيجاد الحد الثالث في مفكوك $(٢س+ص)^{٨}$.

نتيجة

قانون الحد العام في مفكوك $(أ+ب)^{ن}$:

$$ح_{ر+١} = \binom{ن}{ر} أ^{ن-ر} ب^{ر} ، ٠ \leq ر \leq ن$$

مثال ٥

أوجد الحد السابع في مفكوك $(س + \frac{٢}{س})^{١٠}$.

الحل

باستخدام قانون الحد العام $ح_{ر+١} = \binom{ن}{ر} أ^{ن-ر} ب^{ر}$

$$ح_{٧} = ح_{٦+١} = \binom{١٠}{٦} س^{٤} (\frac{٢}{س})^{٦}$$

$$= \frac{١٠!}{٦! \times ٤!} \times س^{٤} \times \frac{٦٤}{س^{٦}} = \frac{١٣٤٤٠}{س^{٢}}$$

تدريب ٦

أوجد معامل الحد الرابع في مفكوك $(س^{٢} - \frac{١}{س^{٢}})^{٩}$

مثال ٦

إذا كان معامل الحد الخامس في مفكوك $(س + أ ص)^{٧}$ يساوي ٥٦٠ فما قيمة أ ؟

الحل

$$\because ح_{٥} = ح_{٤+١} = \binom{٧}{٤} س^{٣} (أ ص)^{٤}$$

$$\therefore \binom{٧}{٤} أ^{٤} = ٥٦٠$$

$$٣٥ أ^{٤} = ٥٦٠$$

$$أ^{٤} = ١٦$$

$$أ = \pm ٢$$

مثال ٧

أوجد الحد الخالي من س في مفكوك $(\frac{١}{س} + س^{٣})^{٤}$

الحل

الحد الخالي من س يعني الحد الذي يحوي $س^{٠}$

$$ح_{ر+١} = \binom{٤}{ر} (\frac{١}{س})^{٤-ر} (س^{٣})^{ر} = \binom{٤}{ر} س^{(-٤+٤ر)}$$

$$\therefore س^{(-٤+٤ر)} = س^{٠} \longrightarrow -٤ + ٤ر = ٠ \longrightarrow ر = ١$$

$$\therefore \text{الحد الخالي من س هو } ح_{١+١} = ح_{٢} = \binom{٤}{١} = ٤$$

تدريب ٧

أوجد الحد الذي يشتمل على $س^{٨}$ في مفكوك $(٢ + س^{٢})^{١٠}$.

الحد الأوسط في مفكوك $(أ+ب)^ن$:

تأمل مفكوك المقدارين الآتيين:

$(أ+ب)^٥ = أ^٥ + ٥أ^٤ب + ١٠أ^٣ب^٢ + ١٠أ^٢ب^٣ + ٥أب^٤ + ب^٥$

$(أ+ب)^٦ = أ^٦ + ٦أ^٥ب + ١٥أ^٤ب^٢ + ٢٠أ^٣ب^٣ + ١٥أ^٢ب^٤ + ٦أب^٥ + ب^٦$

تأمل مفكوك المقدارين السابقين وأجب عن الأسئلة التالية:

١) كم عدد الحدود في كل مفكوك؟

٢) عين الحد الأوسط في كل مفكوك . ثم اذكر رتبته.

٣) كم عدد الحدود في مفكوك $(أ+ب)^ن$ ؟

٤) هل يمكنك التوصل إلى كيفية تعيين الحد الأوسط في مفكوك $(أ+ب)^ن$ ؟

تدريب ٨

أوجد رتبة وقيمة الحد الأوسط في مفكوك $\left(\frac{٢}{س} - ٣س\right)^٦$

نتيجة

∵ عدد حدود مفكوك $(أ+ب)^ن$ = ن + ١ ∴ سوف يكون لدينا حالتان هما:

١) إذا كان ن عددا زوجيا ، فإن عدد حدود المفكوك فرديا ، ويتعين حد أوسط واحد ترتيبه $\frac{ن}{٢} + ١$.

∴ الحد الأوسط هو $ح_{\frac{ن}{٢}+١}$.

٢) إذا كان ن عددا فرديا،فإن عدد حدود المفكوك زوجيا ، ويتعين في هذه الحالة حدان أوسطان.

ترتيب الحد الأوسط الأول $\frac{ن+١}{٢}$ ، وترتيب الحد الأوسط الثاني $\frac{ن+٣}{٢}$.

الحدان الأوسطان هما $ح_{\frac{ن+١}{٢}}$ ، $ح_{\frac{ن+٣}{٢}}$

مثال ٨

أوجد رتبة وقيمة كل من :

أ) الحد الأوسط في مفكوك $\left(\frac{١}{س} - س\right)^{١٠}$ ب) الحدين الأوسطين في مفكوك $(١ + \sqrt{٢}س)^٧$

الحل

أ) ∵ ١٠ عدد زوجي لذلك يوجد حد أوسط واحد رتبته = $\frac{١٠}{٢} + ١ = ٦$

قيمة $ح_٦ = \binom{١٠}{٥} \left(\frac{١}{س}\right)^٥ (-س)^٥ = -٢٥٢ \frac{س^٥}{س^٥} = -٢٥٢$

ب) ∵ ٧ عدد فردي فإنه يوجد حدان أوسطان رتبة الأول= $\frac{٧+١}{٢} = ٤$ ،ورتبة الثاني= $\frac{٧+٣}{٢} = ٥$

∴ $ح_٤ = \binom{٧}{٣} (\sqrt{٢}س)^٣ = ٧٠\sqrt{٢}س^٣$

$ح_٥ = \binom{٧}{٤} (\sqrt{٢}س)^٤ = ١٤٠س^٤$

تدريب ٩

أوجد رتبة وقيمة الحد الأوسط في مفكوك $(٢-س)^{١٢}$

مثال ٩

أوجد مجموع معاملات مفكوك مايلي:

أ) $(س+ص)^{٤}$ ب) $(٢ل+م)^{٣}$

الحل

أ) $(س+ص)^{٤} = \binom{٤}{٠}س^{٤} + \binom{٤}{١}س^{٣}ص + \binom{٤}{٢}س^{٢}ص^{٢} + \binom{٤}{٣}س ص^{٣} + \binom{٤}{٤}ص^{٤}$

مجموع المعاملات $= \binom{٤}{٠} + \binom{٤}{١} + \binom{٤}{٢} + \binom{٤}{٣} + \binom{٤}{٤} = ١٦$

ب) $(٢ل+م)^{٣} = \binom{٣}{٠}٢^{٣}ل^{٣} + \binom{٣}{١}٢^{٢}ل^{٢}م + \binom{٣}{٢}٢ل م^{٢} + \binom{٣}{٣}م^{٣}$

مجموع المعاملات $= \binom{٣}{٠}٢^{٣} + \binom{٣}{١}٢^{٢} + \binom{٣}{٢}٢ + \binom{٣}{٣}$

$= ٨+١٢+٦+١ = ٢٧$

تدريب ١٠

أوجد مجموع معاملات مفكوك ما يلي:

أ) $(٢س+٣ص)^{٣}$ ب) $(٢+٢ع)^{٢}$ جـ) $(٣س-ص)^{٤}$

تدريب ١١

من المثال والتدريب السابقين، املأ الجدول المقابل؛ ثم أجب عن الأسئلة التي تليه:

المقدار	مجموع معاملات المفكوك	حاصل جمع معاملي متغيري المفكوك مرفوعا لأس المقدار
$(س+ص)^{٤}$	١٦	$(١+١)^{٤} = ٢^{٤}$
$(٢ل+م)^{٣}$	٢٧	
$(٢س+٣ص)^{٣}$		
$(٢+٢ع)^{٢}$		
$(٣س-ص)^{٤}$		

أ) ما العلاقة التي تلاحظها بين العمودين ٢، ٣؟

ب) مما استنتجته في (أ)، أوجد مجموع معاملات الحدود في مفكوك مايلي، دون اللجوء لعملية فك كل مقدار:

١) $(ه-٢ل)^{٤}$

٢) $(٤س+ص)^{٧}$

نتيجة

في مفكوك المقدار $(أ+ب)^{ن}$ ، إذا وضعنا أ=١،ب=١ نحصل على:

$$(١+١)^{ن} = \binom{ن}{٠} + \binom{ن}{١} + \cdots + \binom{ن}{ن} = ٢^{ن}$$

مثال ١٠

أوجد مجموع معاملات الحدود في مفكوك كل مما يلي:

أ) $(٣س + ٥ص)^{٧}$

ب) $(٤س - ٢ص)^{٥}$

الحل

أ) مجموع المعاملات $= (٣ + ٥)^{٧}$

$= ٨^{٧}$

$= ٢٠٩٧١٥٢$

ب) مجموع معاملات الحدود $= (٤-٢)^{٥}$

$= ٣٢$

تمارين ومسائل ٤

١) أوجد مفكوك كل مما يأتي:

أ) $(أ - ب)^{٥}$　　ب) $\left(٣س - \frac{١}{س}\right)^{٤}$　　جـ) $\left(\frac{٢}{س} + ٢س\right)^{٦}$

د) $(٣س - ٢ص)^{٤}$　　هـ) $(س^{٢} + ١)^{٥}$　　و) $\left(\frac{١}{س} + س\right)^{٦}$

٢) باستخدام نظرية ذات الحدين أوجد قيمة كل مما يأتي مقربا لأقرب ثلاثة أرقام عشرية:

أ) $(٠,٩٩)^{٩}$　　ب) $(٢,٠١)^{٥}$

٣) أوجد باستخدام قانون الحد العام كلا مما يأتي :

أ) الحد الثالث في مفكوك $(أ - ٢ب)^{٥}$　　ب) الحد السادس في مفكوك $(٢ - س\,ص)^{٧}$

جـ) الحد التاسع في مفكوك $(٢ص + ١)^{١١}$　　د) معامل الحد الرابع في مفكوك $\left(\frac{٣}{س^{٢}} + س^{٢}\right)^{٧}$

هـ) معامل $س^{٦}$ في مفكوك $(١ - س^{٢})^{٧}$　　و) معامل $أ^{٣}ب^{٤}$ في مفكوك $(أ + ٢ب)^{٧}$

٤) أوجد الحد الخالي من س في مفكوك كل مما يأتي:

أ) $\left(س - \frac{١}{س}\right)^{١٢}$　　ب) $\left(\frac{١}{٢}س^{٢} + \frac{١}{٢س^{٢}}\right)^{١٠}$

٥) أوجد رتبة وقيمة كل من الحدود التالية:

أ) الحد الأوسط في مفكوك $(س + ٢ص)^{١٠}$

ب) الحد الأوسط في مفكوك $\left(\frac{٢}{س} - س\right)^{١٢}$

جـ) الحدان الأوسطان في مفكوك $\left(٢أ + \frac{ب}{٣}\right)^{٧}$

٦) إذا كان الحد الأوسط في مفكوك $(١ + ٣س)^{٦}$ يساوي ٤٣٢٠ . فأوجد قيمة س.

٧) في مفكوك $\left(س + \frac{١}{س}\right)^{٢ن}$ ، اثبت أن الحد الخالي من س هو الحد الأوسط.

٨) إذا كانت النسبة بين معامل الحد الثالث في مفكوك $(١ - س)^{ن+٢}$ ومعامل الحد الثالث في مفكوك $(س + ١)^{ن}$ تساوي ٢١ : ١٠ فأوجد قيمة ن.

٩) إذا كان الحد الخالي من س في مفكوك $\left(س^{٢} + \frac{أ}{س^{٤}}\right)^{١٥}$ يساوي معامل الحد الخامس في نفس المفكوك. فأوجد قيمة أ.

١٠) في مفكوك المقدار $(٣+٥)^{٥٠}$ ، باستخدام نظرية الحدين. ما أكبر حد نحصل عليه؟

تمارين ومسائل عامة

١) في إحدى ولايات السلطنة تبدأ أرقام الهواتف فيها بالرقم ٢٤٤ وجميع الأرقام تتكون من ثمانية أرقام. فكم عدد الأرقام الممكنة في الولاية؟

٢) كم عددا من ثلاثة أرقام يمكن تكوينه من الأرقام ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤، ٥ ويقبل القسمة على ٥مع السماح بتكرار الرقم؟

٣) تقدم ٨ رجال و٥ نساء لشغل ٦ وظائف في إحدى الشركات بشرط أن تشغل ثلاث سيدات ثلاث وظائف منها ، بكم طريقة يمكن اختيار الموظفين الستة؟

٤) أوجد قيمة ن في كل مما يأتي :

أ) $(٢ن - ٣)! = ١$

ب) $\frac{(ن - ٣)!}{(ن - ٥)!} = ٤٢$

جـ) $\frac{١}{ن!} + \frac{٣}{(ن+١)!} = \frac{١٢٠}{(ن+٢)!}$

د) ${}^{ن}ل_{٤} \div {}^{ن+١}ل_{٣} = ١$

هـ) $٥\binom{ن}{ن-٢} = \binom{ن}{ن-٣}$

٥) إذا كان $\binom{ن}{٤} > \binom{ن}{٣}$ ، فأثبت أن $ن > ٧$.

٦) إذا كان $٩ \times ر! = ٥٤$ ، $\binom{ن}{ر} = ٣٥$، فأوجد ${}^{ن+ر}ل_{٤}$.

٧) في مفكوك $\left(س + \frac{٢}{٣س^{٢}}\right)^{٩}$ أوجد:

أ) معامل $س^{٣}$.

ب) الحد الخالي من س .

٨) أوجد الحد الخامس من البداية والحد الخامس من النهاية في مفكوك $(٢س + ص)^{١١}$.

٩) أوجد معامل $س^{٥}$ في مفكوك $\left(س^{٢} + \frac{١}{س}\right)^{١٠} + \left(س + \frac{٢}{س}\right)^{١٢}$.

١٠) إذا كان ضعف معامل الحد الحادي عشر في مفكوك $(١ + س)^{ن}$ يساوي ثلاثة أمثال معامل الحد العاشر في مفكوك $(١ + ص)^{ن-١}$. فأوجد قيمة ن.

١١) أضاعت سلوى الرقم السري (الكود Pin) لحقيبتها، لكنها تذكرت أن هذا العدد مكوّن من ٦ أرقام مختلفة وهي ١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦ بحيث:

– العدد المكوّن من الرقمين الأولين (من اليسار لليمين) يقبل القسمة على٢.

– العدد المكوّن من الأرقام الثلاثة الأولى (من اليسار لليمين) يقبل القسمة على ٣.

– العدد المكوّن من الأرقام الأربعة الأولى (من اليسار لليمين) يقبل القسمة على ٤.

– العدد المكوّن من الأرقام الخمسة الأولى (من اليسار لليمين) يقبل القسمة على ٥.

– العدد المكوّن من الأرقام الستة الأولى (من اليسار لليمين) يقبل القسمة على ٦.

ساعد سلوى في إيجاد هذا الرقم السري.

الوحدة الثانية

الاحتمالات

Probability

✳ أهداف الوحدة

١) إيجاد احتمالات الفرق بين الحوادث .

٢) إيجاد احتمالات حوادث مضاعفة.

٣) التعرف على الاحتمال الشرطي واستخدامه.

٤) استنتاج نظرية بيز واستخدامها.

٥) التعرف على استقلال الحوادث واستخدامه .

٦) إيجاد احتمالات نجاح (ر) من المحاولات من بين (ن) لتجربة ذات الحدين.

أ) جبر الحوادث

أجب عما يلي :

أ) عرّف الفراغ العيني لتجربة ما .

ب) عرّف الحدث (الحادث) في تجربة ما .

جـ) صنّف الأحداث لتجربة ما حسب إمكانية وقوعها .

من خلال إجابتك عن الأسئلة السابقة لعلك تذكرت أن الفراغ العيني لتجربة ما عبارة عن مجموعة النواتج الممكنة للتجربة وأن الحدث عبارة عن مجموعة جزئية من الفراغ العيني، وهذا يعني أن الحدث عبارة عن مجموعة .

ولذا فإن العمليات التي تجرى على المجموعات (اتحاد$\cup$، تقاطع $\cap$، فرق $-$ ، متممة،..) تجرى على أحداث التجربة ، وأن الأحداث تتباين من مستحيلة الوقوع ، ممكنة الوقوع، ومؤكدة الوقوع.

تدريب ١

في تجربة إلقاء حجر نرد منتظم ذي ستة أوجه إذا كان $ح_١ = \{٢،٣،٥\}$ ، $ح_٢ = \{١،٣،٦\}$

$ح_٣ = \{٤،٥\}$ فاكتب ما يأتي على شكل مجموعات:

أ) $ح_١ \cup ح_٢$ ، $ح_١ \cup ح_٣$ ، $ح_١ \cup ح_٢ \cup ح_٣$

ب) $ح_١'$ ، $ح_٢'$ ، $ح_١' \cap ح_٢'$ ، $(ح_١ \cup ح_٢)'$

جـ) $ح_١ - ح_٢$ ، $ح_٢ - ح_٣$ ، $\Omega - ح_١ \cup ح_٢$

ويمكن كذلك الاستفادة في الحوادث واحتمالاتها من قانوني ديمورغان، وهما :

١) $ح_١' \cap ح_٢' = (ح_١ \cup ح_٢)'$ تقاطع متممتي حدثين يساوي متممة اتحادهما.

٢) $ح_١' \cup ح_٢' = (ح_١ \cap ح_٢)'$ اتحاد متممتي حدثين يساوي متممة تقاطعهما .

ويمكن برهنة الجزء الثاني للتوضيح فقط :

$ح_١' \cup ح_٢' = (\Omega - ح_١) \cup (\Omega - ح_٢)$

$= \Omega - ح_١ \cap ح_٢ = (ح_١ \cap ح_٢)'$

ويمكن التحقق من صحة القانونين السابقين من خلال المزيد من الأمثلة العددية أو من خلال أشكال ڤن.

إذا كان $ح_١$، $ح_٢$ حدثين في فضاء الإمكانات لتجربة ما ، وكان ن (ح) يرمز إلى عدد عناصر الحدث ح.

فإن $ن(ح_١ \cup ح_٢) = ن(ح_١) + ن(ح_٢) - ن(ح_١ \cap ح_٢)$ وبقسمة جميع الحدود على ن(Ω) حيث Ω فضاء الإمكانات .

$\therefore \frac{ن(ح_١ \cup ح_٢)}{ن(\Omega)} = \frac{ن(ح_١)}{ن(\Omega)} + \frac{ن(ح_٢)}{ن(\Omega)} - \frac{ن(ح_١ \cap ح_٢)}{ن(\Omega)}$

أي $ل(ح_١ \cup ح_٢) = ل(ح_١) + ل(ح_٢) - ل(ح_١ \cap ح_٢)$

وإذا كان $ح_١$، $ح_٢$ متنافيين فإن: $ل(ح_١ \cap ح_٢) =$ صفر .

نظرية

إذا كان $ح_١$، $ح_٢$ حدثين في فضاء الإمكانات (Ω) فإن:

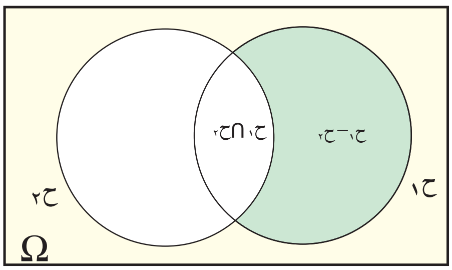
$$ل(ح_١ - ح_٢) = ل(ح_١) - ل(ح_١ \cap ح_٢)$$

البرهان :

من الشكل المقابل يمكن تجزئة الحدث $ح_١$ إلى حدثين متنافيين هما $(ح_١ - ح_٢)$ ، $(ح_١ \cap ح_٢)$:

$\therefore ل(ح_١) = ل(ح_١ - ح_٢) + ل(ح_١ \cap ح_٢)$

$\therefore ل(ح_١ - ح_٢) = ل(ح_١) - ل(ح_١ \cap ح_٢)$



تدريب ٢

استعن بشكل فن وتحقق من العلاقة التالية :

$ل(ح_١ \cup ح_٢) = ل(ح_١) + ل(ح_٢) - ل(ح_١ \cap ح_٢)$

مثال ١

إذا كان : $ل(ح_١) = ٠,٥$ ، $ل(ح_٢) = ٠,٣$ ، $ل(ح_١ \cap ح_٢) = ٠,١$ فأوجد :

أ) $ل(ح_١ - ح_٢)$ ب) $ل(ح_٢ \cap ح_١')$ جـ) $ل(ح_١ \cup ح_٢)'$.

الحل

أ) $ل(ح_١ - ح_٢) = ل(ح_١) - ل(ح_١ \cap ح_٢)$

$= ٠,٥ - ٠,١ = ٠,٤$

ب) $ل(ح_٢ \cap ح_١') = ل(ح_٢ - ح_١)$

$= ل(ح_٢) - ل(ح_٢ \cap ح_١)$

$= ٠,٢$ (لماذا؟)

جـ) $ل(ح_١ \cup ح_٢)' = ١ - ل(ح_١ \cup ح_٢)$

$= ١ - ٠,٧ = ٠,٣$

تدريب ٣

إذا كان $ح_١$، $ح_٢$ حدثين منفصلين في فضاء الإمكانات لتجربة عشوائية، وكان :

$ل(ح_١) = ٠,٤٩$ ، $ل(ح_٢) = ٠,٣٢$ فأوجد :

أ) $ل(ح_٢ \cap ح_١)$ ، $ل(ح_١ \cap ح'_٢)$، $ل(ح'_١ \cap ح'_٢)$.

ب) $ل(ح_٢ - ح_١)$.

مثال ٢

إذا كان $ل(ح_١) = ٠,٧$ ، $ل(ح_٢) = ٠,٤$ ، $ل(ح_١ \cap ح_٢) = ٠,٢$، أوجد احتمال:

أ) عدم وقوع $ح_١$ ووقوع $ح_٢$.

ب) عدم وقوع $ح_١$ أو عدم وقوع $ح_٢$.

جـ) وقوع أحدهما على الأقل .

د) وقوع أحدهما وليس كليهما .

الحل

أ) احتمال عدم وقوع $ح_١$ ووقوع $ح_٢$ = $ل(ح'_١ \cap ح_٢)$

$\therefore ل(ح'_١ \cap ح_٢) = ل(ح_٢ - ح_١)$

$= ل(ح_٢) - ل(ح_٢ \cap ح_١)$

$= ٠,٤ - ٠,٢$

$= ٠,٢$

ب) احتمال عدم وقوع $ح_١$ أو عدم وقوع $ح_٢$ = $ل(ح'_١ \cup ح'_٢)$

$\therefore ل(ح'_١ \cup ح'_٢) = ل(ح_١ \cap ح_٢)'$

$= ١ - ل(ح_١ \cap ح_٢)$.

$= ١ - ٠,٢$

$= ٠,٨$

جـ) احتمال وقوع أحدهما على الأقل = $ل(ح_١ \cup ح_٢)$

$\therefore ل(ح_١ \cup ح_٢) = ل(ح_١) + ل(ح_٢) - ل(ح_١ \cap ح_٢)$.

$= ٠,٧ + ٠,٤ - ٠,٢$

$= ٠,٩$

د) احتمال وقوع أحدهما وليس كليهما = $ل(ح_١ \cup ح_٢) - ل(ح_١ \cap ح_٢)$

$= ٠,٩ - ٠,٢$

$= ٠,٧$

مثال ٣

في إحدى المدارس بلغت نسبة الطلبة الذين أعينهم زرقاء ٣٠٪ و نسبة الطلبة الذين شعرهم أشقر ٤٠٪ ونسبة الطلبة الذين أعينهم زرقاء وشعرهم ليس أشقراً ١٠٪ ، اختير أحد الطلبة بطريقة عشوائية، أوجد ما يلي :

أ) احتمال أن تكون عيونه زرقاء وشعره أشقر .

ب) احتمال أن تكون عيونه ليست زرقاء وشعره ليس أشقراً .

الحل

افرض أن $\text{ح}_{١}$: اختيار طالب عيونه زرقاء $\longleftarrow$ $\text{ل}(\text{ح}_{١}) = ٠,٣$

$\text{ح}_{٢}$: اختيار طالب شعره أشقر $\longleftarrow$ $\text{ل}(\text{ح}_{٢}) = ٠,٤$

$\text{ل}(\text{ح}_{١} \cap \text{ح}_{٢}') = ٠,١$

أ) المطلوب إيجاد : $\text{ل}(\text{ح}_{١} \cap \text{ح}_{٢})$.

$\therefore \text{ل}(\text{ح}_{١} \cap \text{ح}_{٢}') = \text{ل}(\text{ح}_{١} - \text{ح}_{٢})$.

$= \text{ل}(\text{ح}_{١}) - \text{ل}(\text{ح}_{١} \cap \text{ح}_{٢})$.

$٠,١ = ٠,٣ - \text{ل}(\text{ح}_{١} \cap \text{ح}_{٢})$.

$\therefore \text{ل}(\text{ح}_{١} \cap \text{ح}_{٢}) = ٠,٣ - ٠,١$

$= ٠,٢$

ب) $\text{ل}(\text{ح}_{١}' \cap \text{ح}_{٢}') = \text{ل}(\text{ح}_{١} \cup \text{ح}_{٢})'$

$= ١ - \text{ل}(\text{ح}_{١} \cup \text{ح}_{٢})$

$= ١ - ٠,٥$

$= ٠,٥$

تدريب ٤

يصوب صيادان على هدف فإذا كان احتمال أن يصيب الأول الهدف هو ٠,٦ واحتمال أن يصيب الثاني الهدف هو ٠,٥٥ واحتمال أن يصيب الأول و الثاني الهدف معا هو ٠,٨ فأوجد:
احتمال أن يصيب الأول الهدف وحده.

١) إذا كان $ح_{١}$، $ح_{٢}$ حدثين من فضاء العينة Ω لتجربة ما وكان $ل(ح_{١}) = ٠,٣$، $ل(ح_{٢}) = ٠,٥$، $ل(ح_{١} \cap ح_{٢}) = ٠,١٢$ فأوجد:

أ) $ل(\overline{ح}_{١})$　　ب) $ل(ح_{١} \cup ح_{٢})$　　جـ) $ل(ح_{١} - ح_{٢})$.

٢) إذا كان $ح_{١}$، $ح_{٢}$ حدثين متنافيين من فضاء عينة لتجربة عشوائية وكان $ل(ح_{١} - ح_{٢}) = \frac{١}{٢}$، $ل(ح_{١} \cup ح_{٢}) = \frac{٣}{٥}$، أوجد:

أ) $ل(ح_{١})$　　ب) $ل(ح_{٢})$　　جـ) $ل(\overline{ح}_{١} \cup \overline{ح}_{٢})$

٣) يصوب لاعبان في وقت واحد نحو هدف ما ، فإذا كان احتمال أن يصيب اللاعب الأول الهدف هو $\frac{٢}{٥}$، واحتمال أن يصيب اللاعب الثاني الهدف هو $\frac{١}{٤}$، واحتمال أن يصيب اللاعبان معا الهدف هو $\frac{١}{٦}$ أوجد :

أ) احتمال إصابة الهدف.

ب) احتمال إصابة الهدف من اللاعب الثاني فقط .

٤) إذا كان $ح_{١} \supset ح_{٢}$ وكان $ل(ح_{١}) = ٠,٣$ و $ل(ح_{٢}) = ٠,٧$ أوجد:

أ) $ل(\overline{ح}_{١})$　　ب) $ل(ح_{١} \cup ح_{٢})$

جـ) $ل(ح_{١} \cap ح_{٢})$　　د) $ل(\overline{ح}_{١} \cap \overline{ح}_{٢})$

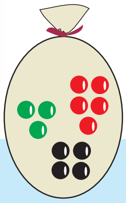
٥) إذا كانت $\Omega = \{١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥\}$، $ح_{١} = \{٢ ، ٣\}$ ، $ح_{٢} = \{٣ ، ٤ ، ٥\}$ ، $ح_{٣} = \{١ ، ٣ ، ٥\}$ ،أوجد ما يلي :

أ) $ل(ح_{١})$ ، $ل(ح_{٢})$ ، $ل(ح_{٣})$.

ب) $ل(ح_{١} \cap ح_{٣})$.

جـ) $ل(ح_{٣} - ح_{١})$.

٦) إذا كان $ل(ح) = ٣ل(\overline{ح})$، أوجد $ل(ح)$.



ب) استخدام مبدأ العد في الاحتمالات

نشاط ١: (تحديد عدد عناصر الحدث وعدد عناصر الفراغ العيني من خلال مبدأ العد)

الأدوات : كيس به ٥ كرات حمراء ، ٣ كرات خضراء ، ٤ كرات سوداء.

الخطوات:

رقم السحبة	عدد الكرات الحمراء	عدد الكرات الخضراء	عدد الكرات السوداء
١	٢	١	٠
٢	؟	؟	؟
٣	؟	؟	؟
٤	؟	؟	؟
.	.	.	.
.	.	.	.

١) تناوب مع زميلك في سحب ٣ كرات دفعة واحدة وسجل ألوان الكرات المسحوبه في جدول كما هو موضح بالشكل.

٢) كرروا العمل لـ٣٠مرة ، إذا تكررت نفس النتيجة قم بإعادة السحب.

٣) اكتب عدد عناصر الفراغ العيني (سحب ٣ كرات من بين ١٢ كرة).

٤) اكتب عدد عناصر الحدث ٣ كرات حمراء، كرتان حمراوان وكرة سوداء، كرة من كل لون ، كرتان خضراوان وكرة حمراء.

٥) اكتب احتمالات الحوادث في خطوة رقم ٤ .

٦) اكتب قاعدة لإيجاد احتمال سحب $ر_١$ كرة حمراء، $ر_٢$ كرة خضراء، $ر_٣$ كرة سوداء إذا كان الكيس يحوي $ن_١$، $ن_٢$، $ن_٣$ من الكرات الحمراء ، والخضراء ، والسوداء على التوالي.

تدريب ١

استخدم القاعدة التي توصلت إليها وأجب عما يلي :

تتكون أسرة من ١٠ أفراد ٦ ذكور وأربعة إناث تم إختيار خمسة أفراد بطريقة عشوائية لحضور افتتاح أحد المعارض ما احتمال أن يكون هنالك ثلاث إناث وذكران؟

نتيجة

إذا تكوّن فضاء الإمكانات (Ω) من $ن_١$ من النوع ﻫ، $ن_٢$ من النوع ب، ... فإن احتمال وقوع الحدث ح الذي يتكون من $ر_١$ من النوع ﻫ، $ر_٢$ من النوع ب، ... يعطى بالعلاقة :

$$ل(ح) = \frac{\binom{ن_١}{ر_١}\binom{ن_٢}{ر_٢}}{\binom{ن_١ + ن_٢ + ...}{ر_١ + ر_٢ + ...}}$$

مثال ١

شُكلت لجنة مكونة من ستة طلاب من ثلاثة صفوف (ﻫ، ب، جـ) أعداد طلابها على التوالي ، ٢٥، ٣٠، ٣٢ بطريقة عشوائية، احسب احتمال أن تكون اللجنة جميعها من الصف ب، ٣طلاب من ﻫ و٣ طلاب من جـ، طالب من ﻫ وطالبان من ب وثلاث طلاب من جـ .

الحل

$$\frac{\binom{٣٠}{٦}}{\binom{٨٧}{٦}} ، \quad \frac{\binom{٢٥}{٣}\binom{٣٢}{٣}}{\binom{٨٧}{٦}} ، \quad \frac{\binom{٢٥}{١}\binom{٣٠}{٢}\binom{٣٢}{٣}}{\binom{٨٧}{٦}}$$

مثال ٢

تأهل لمسابقة الرياضيات ٧ طلاب ، ٩ طالبات، وكان الذين ستوزع عليهم الجوائز ٦ طلبة فقط ، ٣ طلاب ، و ٣ طالبات .

أ) اكتب عدد عناصر حدث استلام الجوائز.

ب) ما احتمال أن يتم ذلك ؟

الحل

أ) عدد عناصر المجموعات التي تستلم الجوائز والتي تتكون من ٣طلاب و ٣ طالبات =$\binom{٧}{٣} . \binom{٩}{٣}$

ب) ∵ عدد عناصر الفضاء العيني = $\binom{١٦}{٦}$

∴ احتمال فوز ٣ طلاب و٣ طالبات = $\frac{\binom{٧}{٣} . \binom{٩}{٣}}{\binom{١٦}{٦}} \approx ٠,٣٧$

تدريب ٢

يراد اختيار ٤ موظفين من بين ٧ رجال و ٥ نساء ما احتمال أن يتم اختيار ٣ رجال وامرأة واحدة؟

مثال ٣

فصل دراسي بمدرسة به ٢٠ ولداً، ١٠ بنات اختير فريق مكون من ثلاثة، أجب عما يأتي :

أ) اكتب فضاء الإمكانات .

ب) احسب احتمال كل ناتج.

جـ) احسب احتمال أن يكون بالفريق ولد على الأقل .

الحل

أ) Ω = {(٣ أولاد) ، (ولدان وبنت) ، (ولد وبنتان) ، (٣بنات)}.

ب) $أ_١$ = { و ، و، و } =حدث أن يتكون الفريق من ٣ أولاد ⟵ ل($أ_١$)= $\frac{\binom{٢٠}{٣}}{\binom{٣٠}{٣}} \approx ٠,٢٨$

$أ_٢$ = {و، و،ب} ⟵ ل($أ_٢$) = $\frac{\binom{٢٠}{٢}\binom{١٠}{١}}{\binom{٣٠}{٣}} \approx ٠,٤٧$

$أ_٣$ = {و، ب، ب} ⟵ ل($أ_٣$) = $\frac{\binom{٢٠}{١}\binom{١٠}{٢}}{\binom{٣٠}{٣}} \approx ٠,٢٢$ ، $أ_٤$ ={ب،ب،ب} ⟵ ل($أ_٤$) ≈ ٠,٠٢٩٦

جـ) افرض أن أ : حدث أن يكون بالفريق ولد واحد على الأقل:

∴ ل(أ) = ١ − ل($أ_٤$) = ١ − ٠,٠٢٩٦ = ٠,٩٧٠٤

تدريب ٣

يحوي صندوق ١٠٠ قطعة غيار من بينها ٣٠قطعة معيبة . إذا كانت جميع قطع الغيار متشابهة تماماً، وأردنا سحب عشرين قطعة معاً من الصندوق عشوائيا. فأوجد :

أ) احتمال أن تكون القطع العشرين معيبة .

ب) احتمال أن تكون القطع العشرين غير معيبة.

جـ)احتمال أن تكون إحدى هذه القطع معيبة.

مثال ٤

مجموعة تتكون من ستة أشخاص : امرأتين وأربعة رجال ، اختيرت منهم لجنة من أربعة أشخاص بطريقة عشوائية ، أوجد احتمال أن تكون هذه اللجنة :

أ) جميعها من الرجال.

ب) من ثلاثة رجال وامرأة.

جـ) من رجلين وامرأتين .

الحل

عدد عناصر الفضاء العيني (عدد المجموعات الثلاثية التي يمكن تكوينها) = $\binom{٦}{٤}$

افرض أن :

أ) ح$_١$: جميعهم من الرجال $\longleftarrow$ $ل(ح_١) = \dfrac{\binom{٤}{٤}}{\binom{٦}{٤}} = ٠,٠٧$

ب) ح$_٢$: ثلاثة رجال وامرأة $\longleftarrow$ $ل(ح_٢) = \dfrac{\binom{٤}{٣}\binom{٢}{١}}{\binom{٦}{٤}} \approx ٠,٥$

جـ) ح$_٣$: رجلين وامرأتين $\longleftarrow$ $ل(ح_٣) = \dfrac{\binom{٤}{٢}\binom{٢}{٢}}{\binom{٦}{٤}} = ٠,٤$

تدريب ٤

يراد اختيار ٦ مصابيح كهربائية من بين١٢ مصباحا فيها ١٠ مصابيح صالحة،أوجد احتمال ما يلي:

أ) أن تكون جميعها صالحة.

ب) أن يكون واحد منها فقط غير صالح.

١) في مستشفى عشر ممرضات ثلاث منهن شعرهن أشقر ، أختيرت ممرضتان من المستشفى بطريقة عشوائية أوجد احتمال أن يكون :

أ) شعر الممرضتان من اللون الأشقر.

ب) شعر الممرضتان ليس أشقراً.

٢) إسطبل للخيول يحتوي على خمس خيول بيضاء وأربع حمراء وثمان سوداء وثلاث بنية .
تم اختيار أربع من هذه الخيول بطريقة عشوائية . أوجد احتمال :

أ) أن تكون لونها أبيض .

ب) أن تكون لونها أسود .

جـ) أن تكون كل واحدة بلون مختلف .

٣) يحتوي كيس على ١٢ قطعة نقود ٤ منها فضية والباقي ذهبية ، سحب منه قطعتين بطريقة عشوائية إذا كان الحدث $ح_١$ يعني القطعتان فضيتان والحدث $ح_٢$ يعني القطعتان ذهبيتان والحدث $ح_٣$ يعني قطعة واحدة على الأقل فضية .أوجد : ل($ح_١$) ، ل($ح_٢$) ، ل($ح_٣$) .

٤) كيس يحتوي على ١٩ كرة ١٠ منها سوداء و ٥ منها حمراء والباقي من اللون الأبيض، إذا تم سحب ٩ من الكرات بشكل عشوائي أوجد احتمال سحب ٤ كرات سوداء و ٣ كرات حمراء واثنتين بيضاويتين .

جـ) احتمال الاحداث المركبة Probability of Compound Events

عندما يتكون الحدث من اتحاد حدثين بسيطين أو أكثر من نفس فضاء الإمكانات فإنه يكون حدثاً مركباً ، والحدث البسيط هو كل حدث يتكون من واحد فقط من عناصر فضاء الإمكانات.

تدريب ١

في تجربة إلقاء حجري نرد منتظمين من ستة أوجه حدد أي من الأحداث التالية بسيطة وأيها مركبة مع ذكر السبب.

أ) $ح_١$ مجموع الرقمين الظاهرين = ٢ ب) $ح_٢$ مجموع الرقمين الظاهرين = ٧

جـ) $ح_٣$ مجموع الرقمين الظاهرين عدد أولي د) $ح_٤$ الفرق بين العددين الظاهرين = صفر.

هـ) $ح_١ \cup ح_٣$

١) احتمال الأحداث المتنافية Probability of mutually Exclusive Events.

لقد سبق لك دراسة هذا النوع من الأحداث وهي تلك الأحداث التي لا يوجد بينها عناصر مشتركة.

أي أن $ح_١$ ، $ح_٢$ متنافيان إذا وفقط إذا كان $ح_١ \cap ح_٢ = \phi$ وفي هذه الحالة يكون:

$ل(ح_١ \cap ح_٢) = ٠$

مثال ١

في تجربة إلقاء حجر نرد منتظم إذا كان $ح_١$ العدد الظاهر فردي ، $ح_٢$ العدد الظاهر زوجي ، $ح_٣$ العدد الظاهر أولي، فوضح أي من أزواج هذه الأحداث متنافية وأيها غير متنافية ؟ ثم احسب كلاً من:

$ل(ح_١ \cap ح_٢)$ ، $ل(ح_١ \cap ح_٣)$ ، $ل(ح_٢ \cap ح_٣)$.

الحل

$ح_١ = \{١ ، ٣ ، ٥\}$ ، $ح_٢ = \{٢ ، ٤ ، ٦\}$ ، $ح_٣ = \{٢ ، ٣ ، ٥\}$

$ح_١ \cap ح_٢ = \phi$ $\therefore$ $ح_١$ ، $ح_٢$ متنافيان $\longleftarrow$ $ل(ح_١ \cap ح_٢) = ل(\phi) = ٠$

$ح_١ \cap ح_٣ = \{٣ ، ٥\}$ $\therefore$ $ح_١$ ، $ح_٣$ غير متنافيين $\longleftarrow$ $ل(ح_١ \cap ح_٣) = ل(\{٣ ، ٥\}) = \frac{١}{٣}$

$ح_٢ \cap ح_٣ = \{٢\}$ $\therefore$ $ح_٢$ ، $ح_٣$ غير متنافيين $\longleftarrow$ $ل(ح_٢ \cap ح_٣) = ل(\{٢\}) = \frac{١}{٦}$

أجب عما يلي :

– أنهى أحمد دراسته الجامعية وحصل على رخصة قيادة تقدم مع تسعة أشخاص آخرين بطلب وظيفة وقرر صاحب العمل أن يجري قرعة بين المتقدمين، فما احتمال أن يفوز أحمد بالوظيفة ؟

– إذا كان من شروط الوظيفة أن يكون المتقدم جامعياً، وكان من بين المتقدمين أربعة لا يحملون المؤهل الجامعي، فما احتمال فوز أحمد بالوظيفة ؟

– إذا كان من بين الجامعيين اثنان لا يحملان رخصة قيادة واشترط للمتقدم للوظيفة أن يكون جامعيا ويحمل رخصة قيادة، فما احتمال فوز أحمد بالوظيفة؟

نلاحظ أنه في كل مرة يضاف شرط يؤدي إلى تأثر فضاء الإمكانات بذلك، ويصبح مطابقا لما تفرضه الشروط ففي الحالة الأولى كان الاحتمال $\frac{١}{١٠}$ لأن هنالك عشرة متقدمين في حين أن الاحتمال في الحالة الثانية أصبح $\frac{١}{٦}$ لأن عدد الجامعيين يساوي ٦ ،وفي الحالة الثالثة أصبح الاحتمال $\frac{١}{٤}$ لأنه لم يبق سوى ٤ أشخاص يحملون مؤهلاً جامعياً ورخصة قيادة السيارة.

مثال ٢

قامت معلمة الصف الرابع باستطلاع رأي طلبة الصف حول رغبتهم في مشاهدة أحد برامج الأطفال، وكانت النتيجة كالآتي:

الجنس	يرغبون في المشاهدة	لا يرغبون في المشاهدة	مترددون	المجموع
ذكور	١١	٣	٢	١٦
إناث	٩	٤	٦	١٩
مجموع	٢٠	٧	٨	٣٥

فإذا اختير أحد الطلبة عشوائياً، فأجب عما يلي :

أ) ما احتمال أن يكون ممن يرغبون المشاهدة ؟ ب) ما احتمال أن يكون ممن يرغبون المشاهدة علما بأنه من الذكور؟

ج) ما احتمال أن يكون مترددا مع أنه أنثى؟ د) ما احتمال أن يكون ذكرا شريطة أنه لا يرغب المشاهدة؟

الحل

أ) $\frac{\text{عدد الطلاب الراغبين}}{\text{جميع عدد الطلاب}} = \frac{٢٠}{٣٥} = \frac{٤}{٧}$

ب) $\frac{\text{عدد الراغبين الذكور}}{\text{عدد الذكور}} = \frac{١١}{١٦}$

جـ) $\frac{\text{عدد المترددين من الاناث}}{\text{عدد الإناث}} = \frac{٦}{١٩}$

د) $\frac{\text{عدد الذكور الذين لا يرغبون}}{\text{عدد غير الراغبين}} = \frac{٣}{٧}$

يلاحظ أن فضاء الإمكانات هو عدد عناصر الحدث الذي حصل فعلاً ويكتب في المقام بينما يكتب في البسط مجموعة تقاطع الحدثين.

تعريف

يسمى احتمال $ح_1$ إذا علم أن $ح_2$ قد حدث بالاحتمال الشرطي أو المشروط ويكتب ل$(ح_1/ح_2)$ ويقرأ ل $ح_1$ شرط $ح_2$.

$$ل(ح_1/ح_2) = \frac{ل(ح_1 \cap ح_2)}{ل(ح_2)}\text{ ، حيث } ل(ح_2) > 0 .$$

$$\text{وكذلك } ل(ح_2/ح_1) = \frac{ل(ح_2 \cap ح_1)}{ل(ح_1)}\text{ ، حيث } ل(ح_1) > 0 .$$

تدريب ٢

إذا كان $ح_1$، $ح_2$ حدثين في الفضاء العيني(Ω)وكان : ل$(ح_1) = \frac{١}{٢}$،ل$(ح_2) = \frac{١}{٤}$ ،

ل$(ح_1 \cap ح_2) = \frac{١}{٥}$ فأوجد كلا من :

ﺃ) ل$(ح_1/ح_2)$ ب) ل$(ح_2/ح_1)$

مثال ٣

في تجربة سحب بطاقة من بين بطاقات مرقمة {١ ، ٢ ،....،١٠}.

ﺃ) ما احتمال ظهور البطاقة التي تحمل الرقم ٧؟

ب) إذا علمت أن الرقم الظاهر على البطاقة المسحوبة أكبر من ٦ فما احتمال أن يكون الرقم ٧؟

الحل

افرض أن $ح_1$: ظهور بطاقة تحمل رقم ٧، $ح_2$: ظهور رقم أكبر من ٦ .

ﺃ) ∴ $ح_1$ = {٧} ⟵ ل$(ح_1) = \frac{١}{١٠}$.

ب) $ح_2$ = {٧ ، ٨ ، ٩، ١٠} ⟵ ل$(ح_2) = \frac{٤}{١٠}$

∴ ل $(ح_1 \cap ح_2) = \frac{١}{١٠}$

$$\therefore ل(ح_1/ح_2) = \frac{ل(ح_1 \cap ح_2)}{ل(ح_2)}$$

$$= \frac{\frac{١}{١٠}}{\frac{٤}{١٠}} = \frac{١}{١٠} \times \frac{١٠}{٤}$$

$$= \frac{١}{٤}$$

تدريب ٣

أ) من المثال السابق ، أوجد ل(ح$_٢$/ح$_١$) . كيف تصف هذا الحدث ؟

ب) إذا كان ح$_١$، ح$_٢$ حدثين في Ω بحيث ل (ح$_١$) =٠,٣ ، ل(ح$_٢$) = ٠,٤ ،ل(ح$_١$/ح$_٢$)= ٠,٥

أوجد : ل(ح$_١$∩ح$_٢$).

نتيجة

إذا كان ح$_١$ ، ح$_٢$ حدثين لتجربة ما فإن:

ل(ح$_١$ ∩ح$_٢$) = ل(ح$_١$) . ل(ح$_٢$/ح$_١$)

= ل(ح$_٢$) . ل(ح$_١$/ح$_٢$)

مثال ٤

إذا كان احتمال ذهاب محمد في الرحله المدرسية هو ٠,٨ واحتمال ذهاب أحمد في نفس الرحلة هو ٠,٥ واحتمال ذهاب محمد بشرط ذهاب أحمد ٠,٩ ، فإذا ذهب محمد فما احتمال عدم ذهاب أحمد؟

الحل

افرض أن : ح$_١$: حدث ذهاب محمد في الرحلة ، ح$_٢$: حدث ذهاب أحمد في الرحلة

ل(ح$_١$) = ٠,٨ ، ل(ح$_٢$) =٠,٥ ، ل (ح$_١$/ح$_٢$) =٠,٩

$$\therefore \text{ل}(\text{ح}_١/\text{ح}_٢) = \frac{\text{ل}(\text{ح}_١ \cap \text{ح}_٢)}{\text{ل}(\text{ح}_٢)}$$

$$٠,٩ = \frac{\text{ل}(\text{ح}_١ \cap \text{ح}_٢)}{٠,٥} \Longleftarrow \text{ل}(\text{ح}_١ \cap \text{ح}_٢) = ٠,٤٥$$

$$\therefore \text{ل}(\bar{\text{ح}}_٢/\text{ح}_١) = \frac{\text{ل}(\bar{\text{ح}}_٢ \cap \text{ح}_١)}{\text{ل}(\text{ح}_١)}$$

$$= \frac{\text{ل}(\text{ح}_١ - \text{ح}_٢)}{\text{ل}(\text{ح}_١)}$$

$$= \frac{\text{ل}(\text{ح}_١) - \text{ل}(\text{ح}_١ \cap \text{ح}_٢)}{\text{ل}(\text{ح}_١)}$$

$$= \frac{٠,٨ - ٠,٤٥}{٠,٨}$$

$$= \frac{٠,٣٥}{٠,٨} = \frac{٧}{١٦}$$

مثال ٥

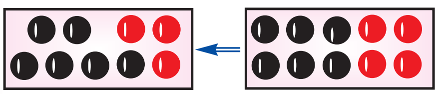
صندوق فيه ٤ كرات حمراء، ٦ كرات سوداء سحبت كرتان على التوالي دون إرجاع . احسب احتمال كل مما يلي :

أ) الكرة الثانيةحمراء إذا كانت الأولى حمراء .

ب) الكرتان حمراوان.

الحل

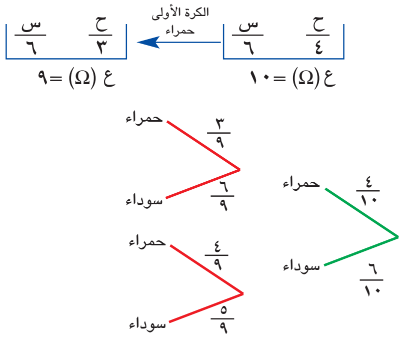
السحب دون إرجاع فإن نتيجة الكرة الثانية تتأثر بنتيجة الكرة الأولى.



لذلك استخدم الاحتمال المشروط:

افرض أن : $ح_١$: الكرة الأولى حمراء ⟵ ل($ح_١$) = $\frac{٤}{١٠}$

$ح_٢$: الكرة الثانية حمراء ⟵ ل($ح_٢$) = $\frac{٣}{٩}$



أ) ل($ح_٢$/$ح_١$) = $\frac{٣}{٩}$

ب) ل($ح_١ \cap ح_٢$) = ل($ح_١$) . ل($ح_٢$/$ح_١$)

= $\frac{٤}{١٠} \times \frac{٣}{٩}$ = $\frac{١٢}{٩٠}$ = $\frac{٢}{١٥}$

* ويمكن استخدام أسلوب الشجرة لتوضيح ذلك :

تدريب ٤

إذا كان $ح_١ \supset ح_٢$ فأوجد :

أ) ل($ح_٢$/$ح_١$)　　　　ب) ل($ح_١$/$ح_٢$).

مثال ٦

مؤتمر للرياضيات يحضره ٥٠ عضوا فإذا كان ١٠فقط يتحدثون العربية ، ٥ فقط يتحدثون الإنجليزية ، ٢٠ يتحدثون اللغتين .اختير أحد أعضاء المؤتمر عشوائيا،(البعض منهم يتحدثون لغات أخرى) أوجد ما يلي :

١) احتمال أنه يتحدث العربية علما بأنه لا يتحدث الإنجليزية .

٢) إذا كان لا يتحدث العربية فما احتمال أنه يتحدث الإنجليزية ؟

الحل

$ح_{١}$: يتحدث العربية ⟵ $ل(ح_{١}) = \frac{٣٠}{٥٠} = ٠,٦$

$ح_{٢}$: يتحدث الإنجليزية ⟵ $ل(ح_{٢}) = \frac{٢٥}{٥٠} = ٠,٥$

$ل(ح_{١} \cap ح_{٢}) = \frac{٢٠}{٥٠} = ٠,٤$

١) $ل(ح_{١}/\bar{ح}_{٢}) = \frac{ل(ح_{١} \cap \bar{ح}_{٢})}{ل(\bar{ح}_{٢})} = \frac{ل(ح_{١} - ح_{٢})}{١ - ل(ح_{٢})}$

$= \frac{ل(ح_{١}) - ل(ح_{١} \cap ح_{٢})}{١ - ل(ح_{٢})}$

$= \frac{٠,٦ - ٠,٤}{١ - ٠,٥} = \frac{٠,٢}{٠,٥} = ٠,٤$

٢) $ل(ح_{٢}/\bar{ح}_{١}) = \frac{ل(ح_{٢} \cap \bar{ح}_{١})}{١ - ل(ح_{١})} = \frac{ل(ح_{٢}) - ل(ح_{٢} \cap ح_{١})}{١ - ل(ح_{١})}$

$= \frac{٠,٥ - ٠,٤}{١ - ٠,٦} = \frac{٠,١}{٠,٤} = ٠,٢٥$

مثال ٧

ليكن $ح_{١}$ ، $ح_{٢}$، $ح_{٣}$ ثلاث حوادث في Ω اثبت ما يلي :

$$ل(ح_{١} \cup ح_{٢}/ح_{٣}) = ل(ح_{١}/ح_{٣}) + ل(ح_{٢}/ح_{٣}) - ل[(ح_{١} \cap ح_{٢})/ح_{٣}]$$

الحل

$ل(ح_{١} \cup ح_{٢}/ح_{٣}) = \frac{\cap}{ل(ح_{٣})}$

$= \frac{\cap \qquad \cap}{ل(ح_{٣})}$

$= \frac{ل(ح_{١} \cap ح_{٣}) + ل(ح_{٢} \cap ح_{٣}) - ل[(ح_{١} \cap ح_{٣}) \cap (ح_{٢} \cap ح_{٣})]}{ل(ح_{٣})}$

$= \frac{ل(ح_{١} \cap ح_{٣})}{ل(ح_{٣})} + \frac{ل(ح_{٢} \cap ح_{٣})}{ل(ح_{٣})} - \frac{ل(ح_{١} \cap ح_{٢} \cap ح_{٣})}{ل(ح_{٣})}$

$= ل(ح_{١}/ح_{٣}) + ل(ح_{٢}/ح_{٣}) - ل[(ح_{١} \cap ح_{٢})/ح_{٣}]$

تدريب ٥

اثبت أن : $ل(\bar{ح}_{١}/ح_{٢}) = ١ - ل(ح_{١}/ح_{٢})$.

١) إذا كان $ح_١$، $ح_٢$ حدثين في Ω لتجربة عشوائية، وكان :

$$ل(ح_١ \cap ح_٢) = ٠,١ \quad ، \quad ل(\overline{ح_١}) = ٠,٤ \quad ، \quad ل(ح_٢) = ٠,٢$$

احسب احتمال كل من :

أ) $ل(ح_١ \cup ح_٢)$ ب) $ل(ح_١ - ح_٢)$ جـ) $ل(\overline{ح_١} \cap \overline{ح_٢})$

٢) إذا كان $ح_١$ ، $ح_٢$ حدثين في Ω لتجربة عشوائية وكان :

$$ل(ح_١) = \frac{٣}{٨} \quad ، \quad ل(ح_٢) = \frac{٥}{٨} \quad ، \quad ل(ح_١ \cup ح_٢) = \frac{٣}{٤}$$

أوجد كلا من :

أ) $ل(ح_١ / ح_٢)$ ب) $ل(ح_٢ / ح_١)$ جـ) $ل(\overline{ح_١} / \overline{ح_٢})$ د) $ل(\overline{ح_٢} / \overline{ح_١})$

٣) في إحدى كليات العلوم وجد أن ٢٥٪ من الطلبة رسبوا في مادة الفيزياء ، ووجد أيضا أن ١٥٪ من الطلبة رسبوا في مادة الرياضيات، وأن ١٠٪ رسب في مادتي الفيزياء والرياضيات. إذا اختير أحد الطلبة بطريقة عشوائية، فأوجد ما يلي :

أ) احتمال أن يكون راسبا في الرياضيات إذا كان راسبا في الفيزياء.

ب) احتمال أن يكون راسبا في الفيزياء إذا كان راسبا في الرياضيات.

٣) تطبيقات على الاحتمال الشرطي :

نشاط١ : (الأحداث المتقاطعة The Intersect Events)

الأدوات : قائمة طلاب الصف ، بطاقات صغيرة (أو قصاصات ورق) ، كيس معتم .

الخطوات :

١) قسم طلاب صفك عشوائيا إلى ٣ مجموعات (مختلفة الأعداد) ولتكن مثلا ١٢ ، ٩ ، ١٥ وارمزها $م_١$ ، $م_٢$ ، $م_٣$ (لاحظ أنه لا توجد عناصر مشتركة بين أي مجموعتين).

٢) من قائمة أسماء الطلاب اكتب أرقام أسماء الطلاب في بطاقات صغيرة وضعها في كيس معتم.

٣) اطلب من أحدهم أن يسحب عشوائيا من الكيس لتشكيل لجنة الرياضيات من ٧ طلاب، اسأل طلاب الصف الأسئلة التالية:

أ) هل يمكن أن تكون مجموعة الطلاب الذين تم اختيارهم من مجموعة واحدة أم من مجموعتين أم من الثلاث مجموعات ؟

ب) إذا رمزنا لمجموعة الطلاب الذين تم اختيارهم بالرمز ح فأيهما أفضل أن تقول :

١) ح محتواه في واحدة من المجموعات فقط ($م_١$ ، $م_٢$ ، $م_٣$).

٢) ح محتواه في مجموعتين فقط ($م_١ \cup م_٢$ ، $م_١ \cup م_٣$ ، $م_٢ \cup م_٣$).

٣) ح محتواه في المجموعات الثلاث ($م_١ \cup م_٢ \cup م_٣$) .

٤) هل المجموعات $ح \cap م_١$ ، $ح \cap م_٢$ ، $ح \cap م_٣$ متنافية (متباعدة)؟

٥) هل يمكن كتابة ح على الصورة $ح = (ح \cap م_١) \cup (ح \cap م_٢) \cup (ح \cap م_٣)$ ؟

٦) اعتمد على إجابتك عن الجزئية (٥) لكتابة صورة ل(ح).

مثال ١

شكلت مدرسة فريق لكرة القدم عدد أعضائه ١٥ من الصفوف العاشر والحادي عشر والثاني عشر فإذا كان أعداد طلاب هذه الصفوف هو ٧٠ ، ٨٠ ، ٦٠ على التوالي، وكانت الأعداد التي تم اختيارها للفريق حسب الصفوف هي: ٥ ، ٦ ، ٤ على التوالي أيضا . فإذا اختير لاعب عشوائياً فما احتمال أن يكون من الصف الثاني عشر ؟

الحل

افرض أن ح : يمثل الطلاب الذين تم اختيارهم من الصفوف العاشر والحادي عشر والثاني عشر.

$ح_١$: يمثل اختيار طالب عشوائيا من الصف الثاني عشر.

المطلوب : إيجاد $ل(ح_١/ح)$.

$$ل(ح_١/ح) = \frac{ل(ح_١ \cap ح)}{ل(ح)} = \frac{ل(ح_١ \cap ح)}{ل(ح \cap ح_١) + ل(ح \cap ح_٢) + ل(ح \cap ح_٣)} = \frac{\frac{٤}{٢١٠}}{\frac{٤}{٢١٠} + \frac{٦}{٢١٠} + \frac{٥}{٢١٠}}$$

$$= \frac{\frac{٤}{٢١٠}}{\frac{١٥}{٢١٠}} = \frac{٤}{١٥}$$

الأحداث المتباعدة والشاملة :

في تجربة إلقاء حجر النرد المنتظم مرة واحدة.

- اكتب الفضاء العيني Ω ؟

وإذا كانت $ح_١$ = {١ ، ٥} ، $ح_٢$ = {٢ ، ٣ ، ٤} ، $ح_٣$ = {٦} ،أحداثا منه :

- أوجد $ح_١ \cap ح_٢$ ، هل الحدثين متباعدين أم لا ؟
- أوجد $ح_١ \cap ح_٣$ ، هل الحدثين متباعدين أم لا ؟
- لماذا يكون $ح_٢$ ، $ح_٣$ متباعدان ؟ اذكر السبب.
- هل هذه الأحداث شاملة (أي اتحادها يعطي الفضاء العيني) ؟

وضح ذلك مستخدماً رموز وعمليات الاحتمال.

تعريف

إذا كانت $ح_١$، $ح_٢$........ $ح_ن$ أحداثاً من الفضاء العيني Ω بحيث أن :

تقاطع أي حدثين منهما يعطي المجموعة الخالية (ϕ).

أي $ح_ر \cap ح_م = \phi \quad \forall$ ر $\neq$ م.

و $ح_١ \cup ح_٢ \cup$ .... $\cup ح_ن = \Omega$

فإن :

الأحداث $ح_١$، $ح_٢$، .... $ح_ن$ تسمى أحداثا متباعدة وشاملة.

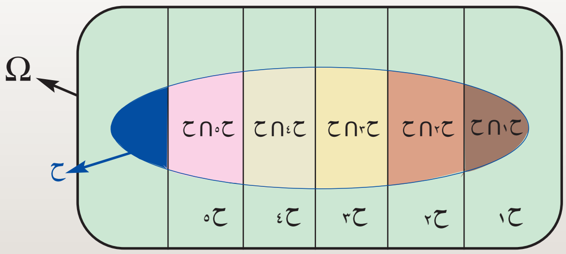
تدريب ١

هل $ح_١$ = {١ ، ٥} ، $ح_٢$= {٢ ، ٣ ، ٥} ، $ح_٣$= {٤ ،٦} أحداث متباعدة و شاملة للفضاء Ω = {١ ، ٢ ، ٣ ، ...... ٦} ؟ وضح ذلك .

تعتبر نظرية بيز من التطبيقات الهامة على الاحتمال المشروط ، وهذه النظرية تستخدم لحساب الاحتمالات في حالة وجود عدة حوادث متباعدة وشاملة ، وحدث معين يعتمد على هذه الحوادث.

نظرية

إذا كانت $ح_١، ح_٢، ح_٣، \dots ح_ن$ أحداث متباعدة وشاملة في تجربة عشوائية ، فضاؤها العيني Ω وكان ح حادثاً ما ، فإن :



أ) $ل(ح) = \sum_{ر=١}^{ن} ل(ح_ر) \, . \, ل(ح/ح_ر)$

ب) $ل(ح_ر/ح) = \dfrac{ل(ح_ر) \, . \, ل(ح/ح_ر)}{\sum_{ر=١}^{ن} ل(ح_ر) \, ل(ح/ح_ر)}$

البرهان :

أ) $\because ح = (ح_١ \cap ح) \cup (ح_٢ \cap ح) \cup \dots (ح_ن \cap ح).$

$\therefore \quad ل(ح) = ل(ح_١ \cap ح) + ل(ح_٢ \cap ح) + \dots + ل(ح_ن \cap ح)$

لأن $ح_١ \cap ح، ح_٢ \cap ح، ح_ن \cap ح$ حوادث منفصلة.

لكن $ل(ح \cap ح_ر) = ل(ح_ر) \, . \, ل(ح/ح_ر).$

$\therefore ل(ح) = ل(ح_١) \, . \, ل(ح/ح_١) + ل(ح_٢) \, . \, ل(ح/ح_٢) + \dots + ل(ح_ن) \, ل(ح/ح_ن)$

$= \sum_{ر=١}^{ن} ل(ح_ر) \, . \, ل(ح/ح_ر)$

ب) $ل(ح_ر/ح) = \dfrac{ل(ح_ر \cap ح)}{ل(ح)}$

$= \dfrac{ل(ح_ر) \, . \, ل(ح/ح_ر)}{\sum_{ر=١}^{ن} ل(ح_ر) \, . \, ل(ح/ح_ر)}$

مثال ٢

في شركة صناعية كبرى متخصصة في صناعة الرقائق الالكترونية ثلاث آلات : م ، ب ، جـ تنتج على التوالي : ٦٠٪ ، ٣٠٪ ، ١٠٪ ، من الإنتاج الكلي للشركة . فإذا كانت نسبة إنتاج الرقائق المعيبة لهذه الآلات هي على التوالي ٢٪ ، ٣٪ ،٤٪ واختيرت رقيقة الكترونية بطريقة عشوائية ووجدت أنها معيبة . فما احتمال أن تكون هذه الرقيقة من إنتاج الآلة م ؟

الحل

افرض أن : ح : القطعة معيبة .

$ح_١$: القطعة من انتاج الآلةم.

$ح_٢$: القطعة من إنتاج الآلة ب.

$ح_٣$: القطعة من انتاج الآلة جـ.

المطلوب: إيجاد ل$(ح_١/ح)$ لاحظ أن $ح_١$ ، $ح_٢$ ، $ح_٣$ حوادث متباعدة وشامله.

$\therefore$ ل(ح) = $\sum_{ر=١}^{ن}$ ل (ح$_ر$) . ل(ح/ح$_ر$) لاحظ أن الحدث ح يعتمد على الحوادث $ح_١$، $ح_٢$، $ح_٣$.

ل(ح) = ل$(ح_١)$. ل$(ح/ح_١)$ + ل$(ح_٢)$.ل$(ح/ح_٢)$ + ل$(ح_٣)$.ل$(ح/ح_٣)$

= (٠,٦)(٠,٠٢) + (٠,٣) (٠,٠٣)+ (٠,١) .(٠,٠٤)

= ٠,٠٢٥

وحيث أن : ل$(ح_١ \cap ح)$ = ل$(ح_١)$. ل$(ح/ح_١)$ = (٠,٦) . (٠,٠٢) = ٠,٠١٢

$\therefore$ ل$(ح_١/ح)$ = $\frac{ل(ح_١ \cap ح)}{ل(ح)}$

= $\frac{٠,٠١٢}{٠,٠٢٥}$

= ٠,٤٨

تدريب ٢

م) يستخدم موظف للوصول إلى عمله المواصلات العامة ٨٠٪ من الوقت ، ويستخدم سيارته الخاصة ٢٠٪ من الوقت إذا كان احتمال تأخره عن عمله إذا استخدم المواصلات العامة يساوي ١٠٪ ، وإذا استخدم سيارته الخاصة ٣٪ .إذا تأخر العامل عن عمله في يوم ما فما احتمال أن يكون قد استخدم سيارته الخاصة ؟

ب) في إحدى الجامعات وجد أن ٤٪ من الطلاب و ١٪ من الطالبات أطول من ١,٧٥ متر إذا علم أن نسبة الطلاب في الكلية ٤٠٪ والباقي من الطالبات . وإذا اخترنا أحد الطلبة بطريقة عشوائية ووجد أنه أطول من ١,٧٥ متر . فما احتمال أن يكون المختار طالبة ؟

مثال ٣

إذا كانت نسبة طلاب الرياضيات البحتة في مدرسة ما هي ٤٠٪ و نسبة طلبة الرياضيات التطبيقية ٦٠٪ وإذا كانت نسبة الطلبة الذين يمتلكون سيارات خاصة بين طلبة البحتة هي ١٠٪ وبين طلبة التطبيقي ١٥٪ فإذا اخترنا أحد الطلبة من المدرسة بطريقة عشوائية :

أ) فما احتمال أن يكون للطالب سيارة خاصة ؟

ب) إذا كان للطالب سيارة خاصة فما احتمال أن يكون من الرياضيات البحتة ؟

الحل

افرض أن : ح : للطالب سيارة خاصة .

$ح_1$: الطالب من فرع البحتة.

$ح_2$: الطالب من فرع التطبيقي.

أ) $ل(ح) = ل(ح_1) \cdot ل(ح/ح_1) + ل(ح_2) \cdot ل(ح/ح_2)$.

$= ٠,٤ \times ٠,١ + ٠,٦ \times ٠,١٥$

$= ٠,٠٤ + ٠,٠٩ = ٠,١٣$

ب) $ل(ح_1/ح) = \frac{ل(ح_1 \cap ح)}{ل(ح)} = \frac{ل(ح_1) \cdot ل(ح/ح_1)}{ل(ح)}$

$= \frac{٠,٤ \times ٠,١}{٠,١٣} \approx ٠,٣١$

مثال ٤

ثلاثة صناديق متشابهه يحتوي الأول على ١٠ كرات، ٧ منها بيضاء والباقي من اللون الأسود ، ويحتوي الثاني على ٥ كرات ، ٤ منها بيضاء والباقي اللون الأسود ، ويحتوي الثالث على ٥ كرات اثنتان منها بيضاء والباقي من اللون الأسود . اختير صندوق من الصناديق الثلاثة بشكل عشوائي ثم سحبت منه كرة بشكل عشوائي أوجد :

أ) احتمال سحب كرة بيضاء.

ب) إذا كانت الكرة المسحوبة بيضاء فما هو احتمال أن تكون من الصندوق الثالث؟

الحل

ب	س	ب	س	ب	س
٧	٣	٤	١	٢	٣

افرض أن :

ح$_{١}$: الصندوق الأول ، ح$_{٢}$: الصندوق الثاني ، ح$_{٣}$: الصندوق الثالث.

ح : حدث سحب كرة بيضاء.

أ) ل(ح) = ل(ح$_{١}$) . ل(ح/ح$_{١}$) + ل(ح$_{٢}$).ل(ح/ح$_{٢}$) + ل(ح$_{٣}$). ل(ح/ح$_{٣}$)

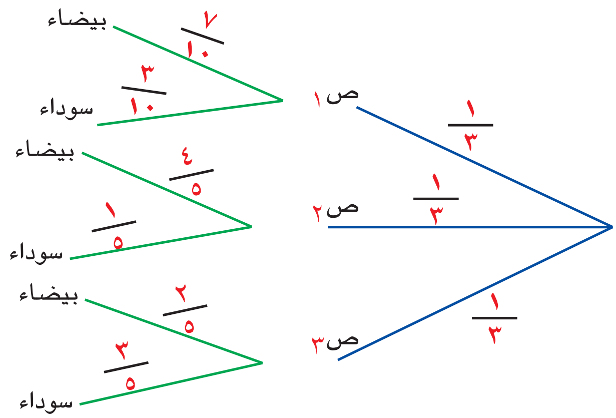
$$= \frac{١}{٣} \times \frac{٧}{١٠} + \frac{١}{٣} \times \frac{٤}{٥} + \frac{١}{٣} \times \frac{٢}{٥} = \frac{١}{٣} \left(\frac{٧ + ٨ + ٤}{١٠} \right)$$

$$= \frac{١٩}{٣٠}$$

ب) $\text{ل(ح}_{٣}\text{/ح)} = \dfrac{\text{ل(ح}_{٣}\text{) . ل(ح/ح}_{٣}\text{)}}{\text{ل(ح)}}$

$$= \frac{\frac{٢}{١٥}}{\frac{١٩}{٣٠}} = \frac{٢}{١٥} \times \frac{٣٠}{١٩} = \frac{٤}{١٩}$$

حل آخر : ويمكن حل المثال باستخدام الشجرة :



أ) احتمال أن تكون الكرة بيضاء:

$$= \frac{١}{٣} \times \frac{٧}{١٠} + \frac{١}{٣} \times \frac{٤}{٥} + \frac{١}{٣} \times \frac{٢}{٥} = \frac{١٩}{٣٠}$$

ب) ل(الكرة بيضاء من الصندوق الثالث)

$$= \frac{١}{٣} \times \frac{٢}{٥} = \frac{٢}{١٥}.$$

$$\therefore \text{ل(ح}_{٣}\text{/ح)} = \frac{\frac{٢}{١٥}}{\frac{١٩}{٣٠}}$$

$$= \frac{٢}{\cancel{١٥}} \times \frac{\cancel{٣٠}^{٢}}{١٩} = \frac{٤}{١٩}$$

١) تحوي ثلاثة صناديق كرات متشابهة كما في الجدول :

	الصندوق (١)	الصندوق (٢)	الصندوق (٣)
كرات حمراء	٣	٥	٦
كرات زرقاء	٤	٢	١

اختير أحد الصناديق عشوائيا ، وسحبت منه كرة واحدة ما حتمال أن تكون الكرة المسحوبه حمراء؟

٢) يشتري أحد المحلات ٧٠٪ من قطع الغيار التي يحتاجها من المصنع ٩و ٣٠٪ من المصنع ب.إذا كانت نسبة المعيب في المصنع ٩هي ٥٪ وفي المصنع ب هي ٨٪ وإذا أخذنا قطعة من المحل بطريقة عشوائية :

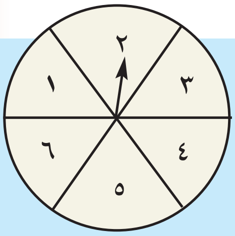
٩) فما احتمال أن تكون القطعة معيبة ؟

ب) إذا كانت القطعة معيبة ، فما احتمال أن تكون إنتاج المصنع ب؟

٣) يحتوي الصندوق ٩على ثمانية أوراق مرقمة من ١ إلى ٨ ويحتوي الصندوق ب على سبعة أوراق مرقمة من ١ إلى ٧ اختير أحد الصناديق بطريقة عشوائية وسحبت منه ورقة إذا كان رقم الورقة المسحوبة فرديا فما احتمال أن تكون سحبت من الصندوق ب؟

٤) استقلال الحوادث Independent Events

نشاط ١: (علاقة نتيجة التجربة الأولى بنتيجة التجربة الثانية)



الأدوات : قرص دائرى مقسم إلى ٦ قطاعات متساوية ، مؤشر .

الخطوات :

١) أدر القرص الدوار عدة مرات واكتب رقم المنطقة التي يستقر عليها المؤشر .

٢) اكتب فضاء الإمكانات لتجربة تدوير القرص .

٣) اكتب احتمال كل عنصر في فضاء الإمكانات .

٤) إذا أعيدت التجربة مرة أخرى هل يختلف إحتمال هذه العناصر؟

٥) هل يمكن القول أن نتيجة التجربة الأولى لا تؤثر على نتيجة التجربة الثانية؟

٦) ماذا يمكن أن تسمى هذه العلاقة ؟

*اعتبر $ح_١$ الحصول على عدد زوجي في التجربة الأولى.

*اعتبر $ح_٢$ الحصول على عدد من مضاعفات العدد ٣ في التجربة الثانية.

*اكتب ل($ح_١$) ، ل($ح_٢$) ، ل($ح_١ \cap ح_٢$)، ل($ح_١ \cup ح_٢$)

*اكتب ل($ح_١ \cap ح_٢$) بدلالة ل($ح_١$) ، ل($ح_٢$).

تدريب ١

يحتوي كيس على ٣ بطاقات حمراء، وبطاقتين زرقاء.

أ) إذا تم سحب بطاقة ، ما احتمال الحصول على بطاقة حمراء؟ وما احتمال الحصول على بطاقة زرقاء؟

ب) إذا سحبت بطاقة حمراء فما احتمال أن تكون البطاقة الثانية زرقاء في كل حالة مما يلي :

١) أعيدت البطاقة الأولى إلى الكيس .

٢) لم تعد البطاقة الأولى إلى الكيس .

جـ) في أي من النتيجتين السابقتين سحب البطاقة الأولى لم يؤثر على نتيجة سحب البطاقة الثانية ؟

تعريف

يقال أن الحدث $ح_١$ مستقل عن الحدث $ح_٢$ إذا كانت نتيجة أحدهما لا تؤثر في نتيجة الآخر . أي أن :

$$ل(ح_١/ح_٢) = ل(ح_١)، ل(ح_٢/ح_١) = ل(ح_٢)$$

اعتمد على التعريف السابق، وأثبت صحه ما يلي :

إذا كان $ح_١$ ، $ح_٢$ حدثين مستقلين فإن $ل(ح_١ \cap ح_٢) = ل(ح_١) . ل(ح_٢)$

البرهان :

$$\therefore ل(ح_١/ح_٢) = \frac{ل(ح_١ \cap ح_٢)}{ل(ح_٢)}$$

لكن $ل(ح_١/ح_٢) = ل(ح_١)$ (لماذا ؟)

$$\therefore ل(ح_١) = \frac{ل(ح_١ \cap ح_٢)}{ل(ح_٢)}$$

$$\therefore ل(ح_١ \cap ح_٢) = ل(ح_١) . ل(ح_٢)$$

تدريب ٢

إذا كان $ح_١$ ، $ح_٢$ حدثين مستقلين، وكان $ل(ح_١) = ٠,٤$ ، $ل(ح_٢) = ٠,٧$ فأوجد :

$ل(ح_١ \cap ح_٢)$.

مثال ١

في تجربة إلقاء ثلاث قطع نقود معا إذا كان الحدث $ح_١$= ظهور صورة واحدة على الأكثر، $ح_٢$= ظهور كتابتين فقط . فهل الحدثين $ح_١$، $ح_٢$ مستقلان ؟

الحل

$\therefore$ $ح_١$: الحصول على صورة واحدة على الأكثر $\longleftarrow$ $ل(ح_١) = \frac{٤}{٨}$

$ح_٢$: الحصول على كتابتين فقط $\longleftarrow$ $ل(ح_٢) = \frac{٣}{٨}$

حتى تصبح $ح_١$، $ح_٢$ مستقلان $\longleftarrow$ $ل(ح_١ \cap ح_٢) = ل(ح_١) . ل(ح_٢)$

$\therefore$ ل$(ح_{١} \cap ح_{٢}) = \frac{٣}{٨}$..........(١)　　(لماذا؟)

ل$(ح_{١})$. ل$(ح_{٢})$ $= \frac{٣}{٨} \times \frac{٤}{٨} = \frac{١٢}{٦٤}$.....(٢)

من (١) ، (٢) :

$\therefore$ الحدثان غير مستقلين .

تدريب ٣

في تجربة إلقاء حجر النرد المنتظم ذي ستة أوجه مرة واحدة ، هل $ح_{١}$ =\{٢ ، ٤ ، ٦\}،

$ح_{٢}$= \{٢ ، ٥\} مستقلان ؟

مثال ٢

إذا كان $ح_{١}$ ، $ح_{٢}$ مستقلين وكان ل$(ح_{١})$ = ٠,٧ ، ل$(ح_{٢})$ = ٠,٤ فأوجد :

أ) ل$(ح_{١}/ح_{٢})$

ب) ل$(ح_{٢}/ح_{١})$

جـ) ل$(ح_{٢} \cap ح_{٣})$

الحل

$\because$ $ح_{١}$ ، $ح_{٢}$ مستقلان :

أ) ل$(ح_{١}/ح_{٢})$ = ل$(ح_{١})$ =٠,٧

ب) ل$(ح_{٢}/ح_{١})$ = ل$(ح_{٢})$ =٠,٤

جـ) ل$(ح_{١} \cap ح_{٢})$ = ل$(ح_{١})$. ل$(ح_{٢})$

= ٠,٧ × ٠,٤

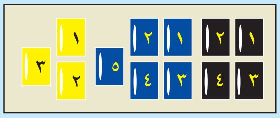
= ٠,٢٨

سؤال : هل الأحداث المستقلة تكون متنافية ؟

نشاط ٢: (الأحداث المستقلة)

الأدوات : ٤ بطاقات سوداء ، ٥ بطاقات زرقاء ، ٣ بطاقات صفراء.

الخطوات :



١) رقم البطاقات السوداء من ١ إلى ٤ ، والبطاقات الزرقاء من ١ إلى ٥ ، والبطاقات الصفراء من ١ إلى ٣.

٢) اعتبر الأحداث التالية :

$ح_{١}$ البطاقة المسحوبة سوداء {$س_{١}$ ، $س_{٢}$ ، $س_{٣}$ ، $س_{٤}$}.

$ح_{٢}$ البطاقة المسحوبة تحمل رقم ٣ {$س_{٣}$ ، $ز_{٣}$ ، $ص_{٣}$} .

$ح_{٣}$ البطاقة المسحوبة صفراء {$ص_{١}$ ، $ص_{٢}$ ، $ص_{٣}$}.

٣) اكتب احتمال : ل($ح_{١}$) ، ل ($ح_{٢}$) ، واكتب ل($ح_{١} \cap ح_{٢}$).

٤) اكتب ل($ح_{١}$) . ل($ح_{٢}$) .

٥) ما علاقة ل($ح_{١}$) .ل($ح_{٢}$) بـ ل($ح_{١} \cap ح_{٢}$) ؟ هل $ح_{١}$ ، $ح_{٢}$ مستقلان؟

٦) هل $ح_{١}$ ، $ح_{٢}$ متنافيان ؟ ماذا تلاحظ؟

تدريب ٤

في النشاط السابق بيّن أن $ح_{١}$ ، $ح_{٣}$ متنافيان وغير مستقلين .

نتيجة

الأحداث المستقلة لا تكون متنافية ما لم يكن احتمال أحدهما يساوي صفر.

البرهان :

ليكن $ح_{١}$، $ح_{٢}$ حدثين مستقلين في فضاء الإمكانات بحيث $٠ < ل(ح_{١}) < ١$ ، $٠ < ل(ح_{٢}) < ١$

بما أن الحدثين $ح_{١}$ ، $ح_{٢}$ مستقلان

$\therefore$ ل($ح_{١} \cap ح_{٢}$) = ل($ح_{١}$) . ل($ح_{٢}$)

= مقدار موجب × مقدار موجب.

≠ صفر

$\therefore$ الحدثان غير متنافيين.

مثال ٣

تقدم طالبان لامتحان في مادة الرياضيات فإذا كان احتمال نجاح الأول في الامتحان = ٠,٦ واحتمال نجاح الثاني في الامتحان = ٠,٧ أوجد ما يلي :

١) احتمال نجاح الطالبين معاً.

٢) احتمال نجاح أحدهما على الأقل.

٣) احتمال عدم نجاح الطالب الثاني .

الحل

$ح_١$: نجاح الطالب الأول في الامتحان ⟵ ل $(ح_١)$ =٠,٦

$ح_٢$: نجاح الطالب الثاني في الامتحان ⟵ ل$(ح_٢)$ =٠,٧

∵ $ح_١$، $ح_٢$ حدثين مستقلين...(لماذا؟)

١) ل$(ح_١ \cap ح_٢)$ = ل$(ح_١)$. ل$(ح_٢)$

= ٠,٦ × ٠,٧ = ٠,٤٢

٢) ل$(ح_١ \cup ح_٢)$ = ل $(ح_١)$ +ل$(ح_٢)$ − ل$(ح_١ \cap ح_٢)$

=٠,٦ +٠,٧ −٠,٤٢ =٠,٨٨

٣) ل$(\acute{ح}_٢)$ =١−ل$(ح_٢)$

= ١−٠,٧ =٠,٣

مثال ٤

وجد في أحد المراكز الصحية أن ٥٠٪ من المراجعين يشكون من ارتفاع ضغط الدم ، وأن ٣٠٪ من المراجعين مصابون بمرض الكبد ، وأن ٢٠٪ يشكون من المرضين معاً.
هل ارتفاع ضغط الدم ومرض الكبد مستقلان؟

الحل

افرض أن :

$ح_١$: المريض يشكو من إرتفاع ضغط الدم ⟵ ل$(ح_١)$ = ٠,٥

$ح_٢$: المريض يشكو من مرض الكبد ⟵ ل$(ح_٢)$ = ٠,٣

∵ شرط الاستقلال ⟵ $ل(ح_١ \cap ح_٢) = ل(ح_١) . ل(ح_٢)$

∴ $ل(ح_١ \cap ح_٢) = ٠,٢$ (١)

$ل(ح_١) . ل(ح_٢) = ٠,٥ \times ٠,٣$

$= ٠,١٥$ (٢)

من (١) ، (٢) :

∴ $ل(ح_١ \cap ح_٢) \neq ل(ح_١) . ل(ح_٢)$.

∴ المرضان غير مستقلين عن بعضهما البعض .

تدريب ٥

من المثال السابق : احسب : احتمال المراجع (المريض) لا يشكو من أي من المرضين ؟

مثال ٥

اثبت أن : إذا كان $ح_١$ ، $ح_٢$ حدثين مستقلين فإن $\bar{ح}_١$ ، $\bar{ح}_٢$ حدثين مستقلين أيضاً .

الحل

$ل(\bar{ح}_١ \cap \bar{ح}_٢) = ل\overline{(ح_١ \cup ح_٢)}$

$= ١ - ل(ح_١ \cup ح_٢)$

$= ١ - [ل(ح_١) + ل(ح_٢) - ل(ح_١ \cap ح_٢)]$

$= ١ - ل(ح_١) - ل(ح_٢) + ل(ح_١) . ل(ح_٢)$

$= [١ - ل(ح_١)] - ل(ح_٢) [١ - ل(ح_١)]$

$= [١ - ل(ح_١)] [١ - ل(ح_٢)]$

$= ل(\bar{ح}_١) . ل(\bar{ح}_٢)$

∴ الحدثان $\bar{ح}_١$ ، $\bar{ح}_٢$ مستقلان.

١) إذا كان ح$_{١}$ ، ح$_{٢}$ حدثين مستقلين وكان ل(ح$_{١}$) = ٠,٣ ، ل(ح$_{٢}$) =٠,٤ ، أوجد مايلي :

أ) ل(ح$_{١}$ ∪ ح$_{٢}$)

ب) ل(ح$_{١}$/ح$_{٢}$)

جـ) ل(ح$_{١}$ − ح$_{٢}$)

٢) في تجربة إطلاق النار على هدف ما، إذا كان احتمال أن يصيب الشخص الأول الهدف يساوي ٠,٢٥ واحتمال أن يصيب الشخص الثاني الهدف يساوي ٠,٤، ما احتمال إصابة الهدف إذا صوب الاثنان نحو الهدف مرة واحدة ؟

٣) وجد أحد الأطباء أن ٠,٣ من مرضاه يعانون من ارتفاع ضغط الدم وأن ٠,٢ من مرضاه يعانون من الروماتزم ، وأن ٠,١ من مرضاه يعانون من المرضين معاً :

أ) ما احتمال أن يكون أحد المراجعين لهذا الطبيب يعاني من أحد المرضين على الأقل ؟

ب) هل ارتفاع ضغط الدم ، والروماتزم مستقلان عن بعضهما البعض ؟

٤) إذا كان ح$_{١}$، ح$_{٢}$ حدثين مستقلين . فاثبت أن ح$_{١}$، $\bar{ح}_{٢}$ حدثين مستقلين أيضاً.

نشاط١ : (احتمال حدث لتجربة عشوائية متكررة)

الرمية	صفر صورة	صورة واحدة	صورتان	ثلاث صور	أربع صور
١		✓			
٢				✓	
٣					
٤					

الأدوات : أربع قطع نقد معدنية متشابهة.

الخطوات :

١) تناوب مع زميلك في إلقاء قطع النقد الأربع معاً .

٢) سجل عدد الصور الظاهره في جدول كالموضح جانبا في كل رمية .

٣) اكتب مجموعة فضاء الإمكانات لتجربة إلقاء قطع النقد .

٤) أجب عما يلي :

أ) هل يتغير احتمال كل عنصر في فضاء الإمكانات في كل محاولة؟

ب) هل تعتبر كل محاولة مستقلة عن المحاولات الأخرى ؟

جـ) ما احتمال ظهور صورة لكل قطعة نقد ؟ وما احتمال عدم ظهور صورة لكل قطعة نقد ؟

د) هل هذا الاحتمال ثابت لكل محاولة؟

٥) اكتب احتمال ظهور : ٤ صور ، ٣ صور ، صورتان ، صورة واحدة ، عدم وجود أية صورة.

٦) اكتب مفكوك $(\frac{١}{٢} + \frac{١}{٢})^{٤}$ وقارن كل حد في المفكوك مع الإجابات على السؤال الخامس.

٧) اكتب النتيجة التي توصلت إليها.

تدريب ١

في تجربة رمي ٣ أحجار نرد معا ما احتمال كل من :

أ) أن يكون مجموع الأعداد الظاهرة ٨ ؟

ب) أن يكون مجموع الأعداد الظاهرة ١٣؟

مثال ١

إذا أُلقي حجر نرد منتظم ذي ستة أوجه ثلاث مرات فاحسب احتمال ظهور العدد ٤ ، ٣مرات، مرتين ، مرة واحدة ، عدم ظهوره. قابل هذه الاحتمالات بمفكوك ذي الحدين $(\frac{١}{٦}+\frac{٥}{٦})^{٣}$.

الحل

عدد عناصر فضاء الإمكانات = ٦×٦×٦=٢١٦

عدد عناصر الحدث:عدم ظهور العدد ٤ = ١٢٥ أي (٥×٥×٥) ومنه الاحتمال = $\frac{١٢٥}{٢١٦}$

عدد عناصر الحدث: ظهور العدد ٤ مرة واحدة = ٧٥ أي(٣×٥×٥) ومنه الاحتمال = $\frac{٧٥}{٢١٦}$

عدد عناصر الحدث: ظهور العدد ٤ مرتين = ١٥أي(٣×٥×١) ومنه الاحتمال = $\frac{١٥}{٢١٦}$

عدد عناصر الحدث: ظهور العدد ٤ ثلاث مرات = ١أي (١×١×١) ومنه الاحتمال = $\frac{١}{٢١٦}$

مفكوك ذي الحدين $(\frac{١}{٦}+\frac{٥}{٦})^{٣} = \binom{٣}{٠}(\frac{١}{٦})^{٠}(\frac{٥}{٦})^{٣} + \binom{٣}{١}(\frac{١}{٦})^{١}(\frac{٥}{٦})^{٢} + \binom{٣}{٢}(\frac{١}{٦})^{٢}(\frac{٥}{٦})^{١} + \binom{٣}{٣}(\frac{١}{٦})^{٣}(\frac{٥}{٦})^{٠}$.

$$= \frac{١٢٥}{٢١٦} + \frac{٧٥}{٢١٦} + \frac{٢٥}{٢١٦} + \frac{١}{٢١٦} .$$

وبملاحظة هذه الحدود مع احتمالات الأحداث المطلوبة نجدها متطابقة .

ولتوضيح كيف حسبت الأعداد : (١ ، ١٥ ، ٧٥ ، ١٢٥) فهي كتالي :

مثلاً : ظهور العدد ٤ مرتين :

١	١	٥	
٤	٤	غير٤	الحالات ←
١	٥	١	
٤	غير٤	٤	الحالات ←
٥	١	١	
غير٤	٤	٤	الحالات ←

ومنه الاحتمال = $\frac{١٥}{٢١٦}$

= عدد مرات × أحد الحالات

= ٣×٥×١×١ ← أي (٣×٥×١)

= ١٥

وهكذا بالنسبة للباقي ...

نتيجة

عندما يتكرر إجراء تجربة ما تحت نفس الظروف ويكون لحدث ما من الفراغ العيني نفس فرصة الحدوث أ، ونفس فرصة الفشل (ب) في كل محاولة بحيث أ +ب=١ يمكن إيجاد احتمال حصول ذلك الحدث ر مرة من ن محاولة بالصيغة التالية :

$$\text{ل}(\text{ر}) = \binom{\text{ن}}{\text{ر}} \text{ب}^{\text{ر}} (\text{أ})^{\text{ن}-\text{ر}} = \binom{\text{ن}}{\text{ر}} \text{ب}^{\text{ر}} (١-\text{ب})^{\text{ن}-\text{ر}}$$

مثال ٢

في تجربة إلقاء ٥ أحجار نرد بشكل عشوائي احسب احتمال :

أ) ظهور العدد ٣ على وجهين .

ب) ظهور العدد ٣ على ثلاثة أوجه.

جـ) احتمال ظهور العدد ٣ على أربعة أوجه على الأقل.

الحل

* احتمال ظهور العدد (٣) $= \frac{١}{٦}$ ، واحتمال عدم ظهوره $= \frac{٥}{٦}$

أ) احتمال ظهور العدد (٣) على الوجهين $= \binom{٥}{٢} \left(\frac{١}{٦}\right)^{٢} \left(\frac{٥}{٦}\right)^{٣}$

$= \frac{١٢٥٠}{٧٧٧٦}$ [ويمكن ترميزه ل(٢)]

ب) احتمال ظهور العدد (٣) على ثلاثة أوجه $= \binom{٥}{٣} \left(\frac{١}{٦}\right)^{٣} \left(\frac{٥}{٦}\right)^{٢}$

$= \frac{٢٥٠}{٧٧٧٦}$ [ويمكن ترميزه ل(٣)]

جـ) احتمال ظهور العدد (٣) على أربعة أوجه على الأقل = ل(٤) +ل(٥)

$= \binom{٥}{٤} \left(\frac{١}{٦}\right)^{٤} \left(\frac{٥}{٦}\right)^{١} + \binom{٥}{٥} \left(\frac{١}{٦}\right)^{٥} \left(\frac{٥}{٦}\right)^{٠}$

$= \frac{٢٦}{٧٧٧٦}$

تدريب ٢

إذا كان احتمال نمو كل شتلة يزرعها مزارع هو ٠,٨ ، فإذا زرع ١٠٠ شتلة. فما احتمال نمو ٩٠ شتلة منها ؟

مثال ٣

أسرة بها ستة أطفال أوجد احتمال :
ا) أن تكون لدى العائله ٣ أولاد فقط .
ب) أن يكون عدد الأولاد ٢ على الأكثر.

الحل

$\because$ ن $=$ ٦ ، ب $= \frac{١}{٢}$ ، ١ $-$ ب $= \frac{١}{٢}$

ا) ل(ر$=$٣) $= \binom{٦}{٣} \left(\frac{١}{٢}\right)^{٣} \left(\frac{١}{٢}\right)^{٣}$

$= ٥ \times ٤ \times \frac{١}{٨} \times \frac{١}{٨}$

$= \frac{٥}{١٦}$

ب) ل(ر$\leqslant$٢) $=$ ل(٠) $+$ ل(١) $+$ ل(٢)

$= \binom{٦}{٠} \left(\frac{١}{٢}\right)^{٠} \left(\frac{١}{٢}\right)^{٦} + \binom{٦}{١} \left(\frac{١}{٢}\right)^{١} \left(\frac{١}{٢}\right)^{٥} + \binom{٦}{٢} \left(\frac{١}{٢}\right)^{٢} \left(\frac{١}{٢}\right)^{٤}$

$= \frac{١}{٦٤} + \frac{٦}{٦٤} + \frac{١٥}{٦٤}$

تدريب ٣

احتمال فوز فريق في مباراة ٠,٦ ،فإذا لعب الفريق ٥ مباريات. ما احتمال فوزه في ٤ مباريات على الأقل؟

١) إذا كان ر : متغيراً ذا حدين ن=٣ ، ب= ٠,٨ أوجد :

أ) ل(ر=١)

ب) ل(ر=٣)

جـ) ل(ر<٢)

٢) مجموعة من ١٢ رجل ، ٦ نساء، تم اختيار اثنين منهم بطريقة عشوائية، فما احتمال أن يكون الاثنان اللذان تم اختيارهما :

أ) رجلان

ب) امرأتان

جـ) رجل وامرأة.

٣) يرمي سعيد قطعة نقد معدنية ٥ مرات، ما احتمال أن تظهر الصورة ٣ مرات ؟

٤) إذا كانت نسبة الإنبات في بذور الطماطم تساوي ٨٠٪ فإذا زرع محمد خمس بذور في حديقة منزله فما احتمال إنبات :

أ) خمس بذور ؟

ب) ثلاث بذور على الأكثر ؟

جـ) أربع بذور على الأقل؟

٥) إذا كان احتمال عدم إصابة الهدف في كل طلقة يطلقها صياد ٠,٣ فإذا أطلق الصياد ٥ طلقات ما احتمال إصابة الهدف في ٣ مرات منها ؟

تمارين ومسائل عامة

١) إذا كان احتمال نجاح أحمد في كل امتحان يتقدم له ٠,٦ فإذا تقدم لخمسة امتحانات أوجد الاحتمال لكل من الأحداث التالية :

أ) نجاح أحمد في امتحانين فقط .　　　　ب) نجاح أحمد في امتحانين على الأقل .

٢) اثبت أن ل$(\bar{ح}_{١}/ح_{٢})$ = ١ − ل$(ح_{١}/ح_{٢})$، حيث $ح_{١}$، $ح_{٢}$ حدثان من الفراغ العيني لتجربة ما.

٣) جهازان للتكييف يعملان في غرفة واحدة، وكان احتمال تعطل الجهاز الأول يساوي ٠,٢ ، احتمال تعطل الجهاز الثاني يساوي ٠,٢٥ ،واحتمال تعطل الجهازين معاً يساوي ٠,١٥ . احسب احتمال تعطل الجهاز الأول فقط .

٤) إذا كان $ح_{١}$ ، $ح_{٢}$ حدثين متنافيين في Ω وكان ل$(ح_{١})$ = ٠,٢ ، ل$(ح_{١} \cup ح_{٢})$ =٠,٧ فأوجد:

أ) ل$(ح_{٢})$　　　　ب) ل$(\bar{ح}_{١} \cup \bar{ح}_{٢})$.

٥) يحل طالبان مسألة ما فإذا كان احتمال أن يحلها الطالب الأول $(\frac{٢}{٣})$، واحتمال أن يحل الطالب الثاني نفس المسألة $\frac{٣}{٤}$ واحتمال أن يحلها كلاهما $\frac{١}{٢٠}$ احسب احتمال كل من الاحداث الآتية:

أ) أن لا يحل المسألة أي من الطالبين.

ب) أن يحل المسألة الطالب الأول ولا يحلها الطالب الثاني.

٦) إذا كان $ح_{١}$ ، $ح_{٢}$ حدثين مستقلين بحيث ل$(ح_{١})$ =٠,٣ ، ل$(ح_{٢})$ = ٠,٥ ، فاحسب :

أ) ل$(ح_{١} \cap ح_{٢})$　　　ب) ل$(ح_{١} \cup ح_{٢})$　　　جـ) ل$(ح_{١}/ح_{٢})$

د) ل$(ح_{١} - ح_{٢})$　　　هـ) ل$(\bar{ح}_{٢})$　　　و) ل$(\bar{ح}_{٢} \cap ح_{١})$

٧) لاعب «تايكوندو» يلعب $\frac{٢}{٣}$ مبارياته في داخل السلطنة والباقي خارج السلطنة ، فإذا كان احتمال فوزه في أي مباراة داخل السلطنة يساوي ٠,٨ واحتمال فوزه في أي مباراة خارج السلطنة يساوي ٠,٥ اختيرت إحدى المباريات بشكل عشوائي ، فما احتمال فوزه في المباراة المختارة؟

٨) يراد اختيار لجنة طلابية من ثلاثة أشخاص من بين ١٢ طالبا و ٤ طالبات ما احتمال :

أ) أن تكون اللجنة جميعها من الطلاب؟

ب) أن يكون في اللجنة طالب واحد فقط ؟

٩) يحتوي صندوق على ٧ كرات حمراء و ٣ سوداء . سحبت ثلاث كرات دون إرجاع، أوجد احتمال الحصول على كرة حمراء واحدة على الأقل .

١٠) إذا كان $ح_١$، $ح_٢$ حدثين في Ω بحيث ل($ح_١$) = ٠,٣ ، ل($ح_٢$) = ٠,٨ وكان $ح_١ \supset ح_٢$ أوجد ل($ح_١ \cap ح_٢$) ، ل($ح_١ \cap ح_٢$).

١١) فصل يتكون من ١٦ طالبا وطالبة منهم ١٠ طلاب والباقي من الطالبات. إذا اخترنا بطريقة عشوائية ٣ طلاب من هذا الصف أوجد احتمال :

أ) أن يكون الثلاثة من الطلاب .

ب) اختيار طالبين بالضبط.

١٢) في تجربة إلقاء حجر نرد ذي ستة أوجه ٣ مرات متتاليه، أوجد احتمال :

أ) أن تكون الأعداد الثلاثة متساوية .

ب) أن تكون الأعداد الثلاثة مختلفة .

جـ) أن يظهر العدد ٥ في الرميات الثلاث .

١٣) في لعبة رمي حجري نرد مرة واحدة أوجد احتمال أن يربح اللاعب إذا كان مجموع العددين الظاهرين عدداً أولياً أكبر من ٦.

الوحدة الثالثة

الدوال الدائرية

Trigonometric Functions

✷ أهداف الوحدة

١) إيجاد الدوال المثلثية لأعداد حقيقية من خلال وضع خط أعداد حول الدائرة.

٢) إيجاد قيم النسب المثلثية الأساسية ومقلوب كل منها للزاوية θ حيث $\cdot > \theta > ٣٦٠^\circ$.

٣) تحديد الزاوية المرجعية للزوايا .

٤) التعرف على كل من القطاع الدائري والقطعة الدائرية وحساب مساحة كل منهما.

٥) التعرف على نظامي قياس الزوايا الستيني والدائري .

٦) إيجاد قياسات الزوايا بالتقدير الدائري والتحويل من نصف قطرية إلى درجات والعكس.

٧) إيجاد السرعة الزاويّة واستخدامها في حل مسائل تتضمن دوران.

٨) إيجاد طول القوس واستخدامه في حل مسائل مرتبطة به .

٩) تمثيل الدوال ص=جاس،ص=جتاس،ص=ظاس ومقلوباتها ودراسة سلوك كل منها.

١٠) تعريف المصطلحات التالية وتوضيحها : الدالة الدورية، السعة، المجال، المدى، القيمة الصغرى، القيمة الكبرى، الازاحة، حركة الموجة، دوال المنحنى الجيبي.

١١) توضيح المدى والفترة والسعة والقيمتين الصغرى والعظمى في كل مما يلي :

* ص − م = ? جاب (س − ن)
* ص − م = ? جتاب (س − ن)
* ص − م = ? ظاب (س − ن)

ثم رسمها بيانيا.

١٢) حل مثلثات حادة الزوايا باستخدام قانون الجيب، وقانون جيب التمام.

١٣) حل المثلث بشكل عام بما فيها الحالة المبهمة (ضلعان وزاوية غير محصورة).

١٤) حل مسائل وتطبيقات باستخدام قانون الجيب وقانون جيب التمام.

١٥) إيجاد مساحة مثلث باستخدام القوانين:

$$\text{م} = \frac{١}{٢}\,\text{أَ بَ جاجـ} = \frac{١}{٢}\,\text{أَ جَ جاب} = \frac{١}{٢}\,\text{بَ جَ جا أ}$$

$$\text{م} = \sqrt{\text{ح(ح}-\text{أَ)(ح}-\text{بَ)(ح}-\text{جَ)}}$$

حيث ح: نصف محيط المثلث ،أَ ،بَ ،جَ :أطوال الأضلاع، م: المساحة.

١٦) برهنة متطابقات مثلثية في الجمع والطرح وتطبيقات عليها .

١٧) برهنة متطابقات ضعفي الزاوية ، ونصف الزاوية واستخدامها .

١٨) حل معادلات مثلثية.

قياس الزوايا

أ) النظام الستيني :

عندما يدور الضلع النهائي للزاوية دورة كاملة فإنه يكون قد دار ٣٦٠° والدورة الكاملة تتكون من أربع زوايا قوائم قياس كل منها ٩٠° .

في هذا النظام تقسم الدرجة إلى ٦٠ قسماً يسمى كل منها بالدقيقة ١° = ٦٠َ ، وكل دقيقة تقسم إلى ٦٠ قسماً يسمى كل منها بالثانية أي ١َ = ٦٠ً وهكذا يمكن تلخيص ما تم التوصل إليه بالآتي:

الدورة = ٤ قوائم
القائمة = ٩٠° (تسعون درجة)
الدرجة (١°) = ٦٠َ (ستون دقيقة)
الدقيقة (١َ) = ٦٠ً (ستون ثانية)

مثال ١

عبر عن قياسات الزوايا باستخدام الدرجات ، والدقائق ، والثواني

أ) ١٠,٥°   ب) $١٣\frac{١}{٨}$°

الحل

أ) ١٠,٥° = ١٠° + ٠,٥ × ٦٠َ = ٣٠َ ١٠°

ب) $١٣\frac{١}{٨}$° = ١٣° + $\frac{١}{٨}$ × ٦٠َ = ١٣° + ٧,٥َ

= ٣٠ً ٧َ ١٣°

مثال ٢

عبر عن قياسات الزوايا الآتية باستخدام الكسور العشرية .

أ) ٩َ ٥°   ب) ٢٤ً ١٦َ ٢٥°

الحل

أ) ٩َ ٥° = ٥° + $\frac{٩}{٦٠}$ = ٥,١٥°

ب) ٢٤ً ١٦َ ٢٥° = ٢٥° + $\frac{١٦}{٦٠}$ + $\frac{٢٤}{٣٦٠٠}$

= ٢٥,٢٧°

تدريب ١

أ) حول $15{,}6^\circ$ إلى الدرجات والدقائق والثواني.

ب) حول $34^\circ\ 12'$ إلى كسر عشري.

قياس محيط الدائرة والأقواس

أجب عما يلي:

١) ما قياس الزاوية المركزية التي تقابل محيط الدائرة ؟

٢) ما قياس الزاوية المركزية التي تقابل نصف المحيط ؟ ربع المحيط ؟

٣) إذا علمت أن أي جزء من محيط الدائرة يسمى قوسا فهل هناك علاقة بين طول القوس وقياس الزاوية المركزية التي تقابله ؟

٤) اكتب قانون محيط الدائرة وبين دلالة π في هذا القانون ؟ وما قيمتها التقريبية ؟

تدريب ٢

بالاعتماد على اجابتك للأسئلة السابقة، أوجد :

أ) محيط دائرة نصف قطرها ٢١سم ، ثم النسبة بين المحيط ونصف القطر.

ب) محيط دائرة نصف قطرها ٤٩سم ، ثم النسبة بين المحيط ونصف القطر.

جـ) طول قوس من دائرة نصف قطرها ٧سم ويقابل زاوية مركزية قياسها 30°

نتيجة

أ) لأي دائرة تكون النسبة بين المحيط وطول القطر مقداراً ثابتاً يرمز لها بالرمز π أو ط وقيمتها التقريبية $\frac{22}{7}$ أو $3{,}14$

ب) نسبة طول أي قوس في دائرة إلى محيط تلك الدائرة كنسبة قياس زاوية القوس المركزية إلى 360°

جـ) يقاس محيط الدائرة أو القوس بإحدى طريقتين:

١) وحدات الطول ويحسب كما في ب .

٢) بالدرجات وهو عبارة عن قياس الزاوية المركزية التي تقابل ذلك القوس .

مثال ٣

أ) أوجد طول قوس من دائرة نصف قطرها ١٠سم ويقابل زاوية مركزية قياسها ٧٥ درجة .

ب) أوجد قياس قوس بالدرجات والدقائق والثواني إذا كان طوله ٣٤سم ، ونصف قطر الدائرة ١٤سم.

الحل

أ) $\dfrac{\text{طول القوس}}{\text{محيط الدائرة}} = \dfrac{\text{قياس زاوية القوس المركزية بالدرجات}}{٣٦٠^\circ}$

$= \dfrac{٧٥}{٣٦٠} = \dfrac{٥}{٢٤}$

: طول القوس $= ٢ \times ١٠ \times \dfrac{٢٢}{٧} \times \dfrac{٥}{٢٤} \simeq ١٣,١$سم

ب) $\dfrac{\text{طول القوس}}{\text{محيط الدائرة}} = \dfrac{\text{زاوية القوس المركزية بالدرجات}}{٣٦٠^\circ}$

∴ قياس زاوية القوس المركزية $= \dfrac{٣٤ \times ٣٦٠ \times ٧}{٢ \times ١٤ \times ٢٢} =$ ٢٧ً ٥َ ١٣٩°

وحيث أن قياس القوس يساوي قياس الزاوية المركزية التي تقابله:

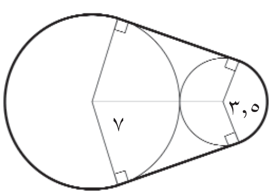
∴ قياس القوس = ٢٧ً ٥َ ١٣٩°

تدريب ٣

أ) ما طول قوس في دائرة نصف قطرها ٢٠سم ويقابل زاوية مركزية قياسها ١٥َ ٢٢٥° ؟

ب) إذا لف خيط حول اسطوانه نصف قطر قاعدتها ١٤سم بحيث احتاج إلى ثلاث دورات وثلاثة أرباع الدورة ، ما طول الخيط ؟

ج) بكرتان متماستان من الخارج نصف قطر الصغرى ٣,٥سم ونصف قطر الكبرى ٧سم يلف حزام حولهما كما في الشكل فأجب عما يلي :



١) اثبت أن مجموع قياسي الزاويتين التي تقابل الأقواس المشكّلة من الحزام عند مركز البكرتين يساوي ٣٦٠°

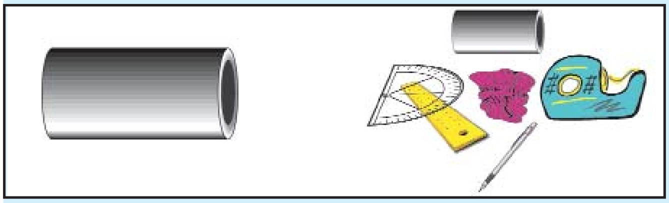
٢) إذا كان قياس الزاوية في البكرة الصغرى المقابلة للحزام يساوي ١٤٠° فما طول كل من القوسين المشكلين من الحزام ؟ وما قياسهما بالدرجات؟

ب) التقدير الدائري Radian Measures

نتيجة لصعوبة الاتصالات في الماضي فقد استخدمت كل دولة أو تجمع سكاني أنظمة خاصة به لقياس كل من :
المسافة ، والمساحة ، والكتلة ، والسعة ، والزمن ،... ونتيجة لصعوبة استخدام بعض هذه الأنظمة وتطور سبل الاتصالات فقد اندثر بعض هذه الأنظمة واكتسب بعضها شهرة عالمية.

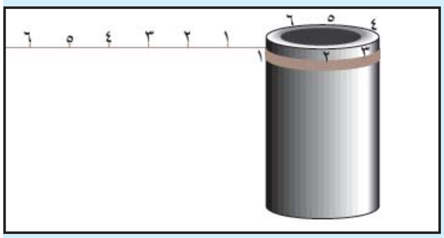
نشاط ١: القياس الدائري (التقدير الدائري).

الأدوات : شكل اسطواني ، خيط ، لاصق مسطرة ، منقلة ، قلم

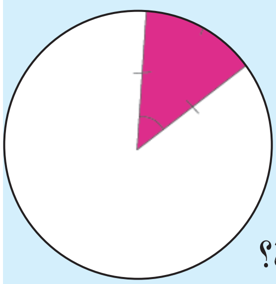


الخطوات :

١) قم بقياس محيط الاسطوانة واحسب طول نصف قطرها.
٢) خذ قطعة من خيط تعادل ٧ مرات من طول نصف قطر الاسطوانة.
٣) ضع علامات على الخيط بحيث تبعد كل علامة عن التي تليها مسافة تساوي **نق** مبتدئا من طرف الخيط.
٤) ثبت طرف الخيط على محيط الاسطوانة عند إحدى النقاط كما في الشكل .
٥) لف الخيط على الاسطوانة بالاتجاه الموجب (عكس عقارب الساعة).



٦) أجب عن الأسئلة التالية:
أ) كم نصف قطر في دورة حول محيط الاسطوانة ؟
قارن إجابتك بإجابات زملائك خاصة الذين استخدموا اسطوانات مختلفة.
ب) هل اختلاف محيط الاسطوانة يؤثر على الجواب ؟ فسر .



جـ) إذا اعتبرت الزاوية في مركز الاسطوانة التي تقابل قوسا من المحيط طوله يساوي نصف القطر وحدة لقياس الزاوية ، فما قياس الدورة الكاملة بهذه الوحدة؟
د) اقترح اسماً لوحدة قياس هذه الزاوية .

تدريب ٤

ارسم دائرة ثم ارسم زاوية مركزية قياسها ١٢٠° ثم أوجد قياس هذه الزاوية بالوحدة الجديدة.

تعريف

– تسمى الزاوية المركزية التي تقابل قوسا من محيط الدائرة طوله يساوي طول نصف قطر الدائره بالزاوية النصف قطرية Radian ويرمز لها بالرمز (د)

$$\text{قياس الزاوية بالزوايا النصف قطرية} = \frac{\text{طول القوس المقابل للزاوية}}{\text{نصف قطر الدائرة}} = \frac{\text{ل}}{\text{نق}}$$

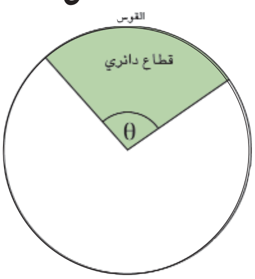
– يسمى نظام قياس الزاوية باستخدام الزاوية النصف قطرية بالتقدير الدائري

مثال ٤

أوجد قياس الزاوية ١٥٠° بالتقدير الدائري.

الحل

قياس الزاوية بالتقدير الدائري عبارة عن طول القوس مقسوما على طول نصف القطر $= \frac{\text{ل}}{\text{نق}}$



لكن $\frac{\text{ل}}{\text{محيط الدائرة}} = \frac{١٥٠}{٣٦٠} = \frac{٥}{١٢}$

$\therefore$ ل $= \frac{٥}{١٢} \times$ محيط الدائرة $= \frac{٥}{١٢} \times ٢\text{نق}\,\pi = \frac{٥}{٦}\text{نق}\,\pi$

$\therefore$ قياس الزاوية بالتقدير الدائري $= \frac{\text{ل}}{\text{طول نصف القطر}} = \frac{٥\text{نق}\,\pi}{٦\text{ نق}} = \frac{٥}{٦}\pi$

$= \frac{٥}{٦} \times \frac{٢٢}{٧} = ٢,٦٢^{\text{د}}$

مثال ٥

أوجد طول قوس في دائرة نصف قطرها ٨ ويقابل زاوية مركزية قياسها ١,٤ زاوية نصف قطرية

الحل

$١,٤ = \frac{\text{ل}}{\text{نق}} \longrightarrow \text{ل} = ١,٤ \text{ نق}$

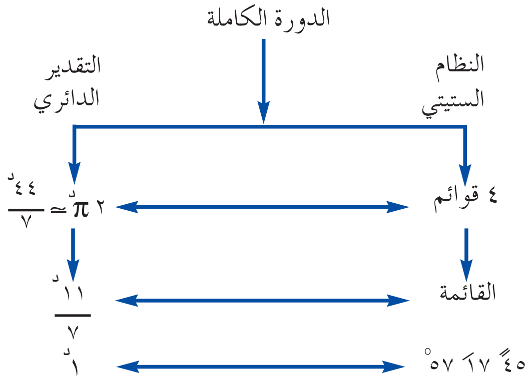
$\therefore$ ل $= ١,٤ \times ٨ = ١١,٢$ سم

تدريب ٥

اثبت أن: طول القوس = نصف قطر الدائرة × قياس زاويتة بالتقدير الدائري

ل = **نق** $\theta^{د}$ حيث ل طول القوس و**نق** طول نصف القطر، $\theta^{د}$ قياس الزاوية المركزية المقابلة للقوس بالتقدير الدائري.

مقارنة بين النظام الستيني للدرجات والتقدير الدائري



كم زاوية نصف قطرية في الدورة الكاملة؟ وكم زاوية نصف قطرية في الزاوية القائمة؟
استنتج طريقة لتحويل الدرجات إلى زوايا نصف قطرية والعملية العكسية.

تدريب ٦

اعتمد على النتيجة التي توصلت إليها في الإجابة عما يلي:

أ) ما قياس زاوية بالدرجات إذا كانت تساوي ١,٥ زاوية نصف قطرية ؟

ب) ما قياس زاوية بالقياس الدائري إذا كان قياسها بالنظام الستيني = ٢١٠° ؟

نتيجة

للتحويل من النظام الستيني إلى التقدير الدائري والعكس تستخدم العلاقة : ١٨٠° تعادل $\pi^{د}$ من الزوايا النصف قطرية .

أي م° ← $\frac{م \times \pi}{١٨٠}$ زاوية نصف قطرية ، م^د ← $\frac{م^{د} \times ١٨٠^\circ}{\pi}$ درجة

مثال ٦

أ) حول ٣,٥^د إلى الدرجات

ب) حول ٣١٥° إلى الزوايا النصف قطرية

الحل

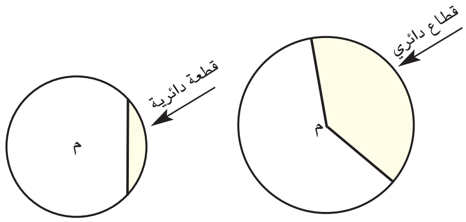
أ) باستخدام التناسب
١٨٠° ← π
؟ ← ٣,٥^د

مقدار الزاوية بالنظام الستيني = $\frac{٣,٥ \times ١٨٠}{٣,١٤}$ = ١٣ً ٣٨َ ٢٠٠°

ب) مقدار الزاوية ٣١٥° بالتقدير الدائري = $\frac{٣١٥ \times \pi}{١٨٠}$ = ١,٧٥π = ٥,٥ زاوية نصف قطرية

القطاع الدائري والقطعة الدائرية

اعتمد على الأشكال الموضحة جانباً وعرِّف كلا من: القطاع الدائري ، والقطعة الدائرية ثم أجب عن الأسئلة التالية:



أ) ما حدود القطاع الدائري ؟

ب) ما حدود القطعة الدائرية ؟

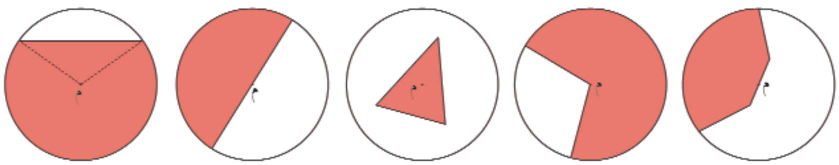
جـ) هل يمكن أن ترسم قطعة دائرية دون أن ترسم قطاعاً دائرياً ؟

د) هل القطاع أو القطعة عبارة عن منطقة أم مجموعة نقاط تحدد الشكل ؟

هـ) هل يمكن رسم شكل يكون قطعة دائرية وقطاعاً دائرياً في نفس الوقت ؟

تدريب ٧

أي من الأشكال المظللة الآتية تمثل قطعة دائرية وأيها تمثل قطاعاً دائرياً وأيها غير ذلك ؟



تعريف

القطاع الدائري: عبارة عن منطقة تحدد بزاوية مركزية والقوس الذي يقطعه ضلعا الزاوية من الدائرة وتسمى الزاوية المركزية بزاوية القطاع.

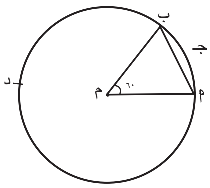
القطعة الدائرية: عبارة عن منطقة تحدد بالوتر والقوس الذي يقطعه ذلك الوتر من الدائرة.

مثال ٧

رسمت زاوية مركزية قياسها ٦٠° في دائرة نصف قطرها ٨ سم فقطع ضلعا الزاوية في النقطتين أ، ب ثم وصل $\overline{\text{أ ب}}$ ووضعت النقطة جـ على القوس الأصغر والنقطة د على القوس الأكبر أجب عما يلي:

أ) اذكر قطعتين دائريتين في الشكل. ب) اذكر قطاعين دائريين في الشكل.

جـ) متى تكون القطعة أكبر من القطاع ؟ ومتى تساويه؟ ومتى تكون أصغر منه؟



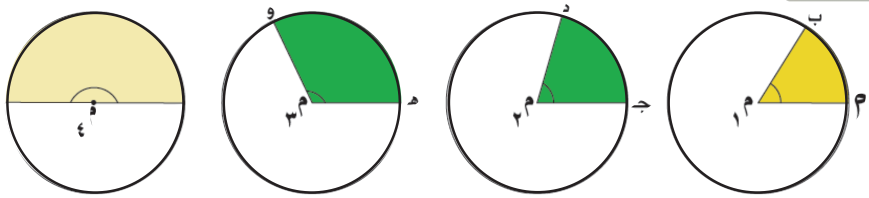
الحل

أ) القطعة أ جـ ب ، القطعة أ د ب

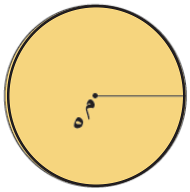
ب) القطاع م $\overset{\frown}{\text{أ جـ ب}}$ ، القطاع م $\overset{\frown}{\text{أ د ب}}$

جـ) تكون القطعة أكبر من القطاع عندما تكون زاوية القطاع أكبر من ١٨٠°،
تكون القطعة تساوي القطاع إذا كانت زاوية القطاع = ١٨٠° (π)
تكون القطعة أصغر من القطاع إذا كانت زاوية القطاع أصغر من ١٨٠° ($\pi^{د}$)

مساحة القطاع الدائري



تتبع مساحة القطاعات في الدوائرالموضحة جانبا (علماً بأن الدوائر متطابقة)



– هل زيادة المساحة في القطاعات الدائرية ناتج من زيادة طول نصف القطر؟
– هل زيادة مساحة القطاع الدائري ناتج من زيادة قياس زاوية القطاع؟
– اذا استمرت زاوية القطاع الدائري بالزيادة إلى أن ينطبق الضلع النهائيعلى ضلع الابتداء فماذا تتوقع أن تكون مساحة القطاع ؟ وما قياس زاوية القطاع عندئذ؟
– اكتب قاعدة لإيجاد مساحة القطاع بدلالة نصف القطر (**نق**) وقياس زاوية القطاع.

استخدم القاعدة التي توصلت إليها واحسب مساحة قطاع دائري زوايته $٢^{د}$ ونصف قطر دائرته ١٥ سم.

لعلك لاحظت أن مساحة القطاع عندما أصبحت زاويته تساوي ٢π هي مساحة الدائرة وتساوي **نق**$^{٢}\pi$ = $\frac{١}{٢}$ **نق**^{٢} (٢π) حيث ٢π هي الزاوية التي تقابل محيط الدائرة بالتقدير الدائري وينطبق هذا على مساحة القطاع الدائري = $\frac{١}{٢}$ **نق**^{٢} $\theta^{د}$ حيث θ هي زاوية القطاع .

نتيجة

مساحة القطاع الدائري = $\frac{١}{٢}$ **نق**^{٢} $\theta^{د}$ = $\frac{هـ}{٣٦٠^{\circ}}$ × مساحة الدائرة

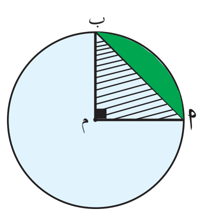
مثال ٨

أوجد مساحة القطاع الدائري م م ب إذا كان قياس زاويته ٩٠° ونصف قطر الدائرة = ١٢سم ثم احسب مساحة القطعة الدائرية المقابلة للزاوية نفسها .

الحل

مساحة القطاع الدائري = $\frac{١}{٢}$ نق^{٢} $\theta^{د}$

الزاوية ٩٠ = $\frac{\pi}{٢}^{د}$



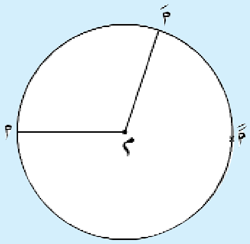
$\therefore$ مساحة القطاع = $\frac{١}{٢} \times ١٢^{٢} \times \frac{\pi}{٢}^{د} = ٣٦\pi = ١١٣,١$ سم^{٢}

مساحة القطعة الدائرية = مساحة القطاع – مساحة المثلث م م ب

= $١١٣,١ - \frac{١}{٢} \times ١٢ \times ١٢ = ٤١,١$ سم^{٢}

السرعة الزاوِّية Angular Velocity

نشاط ٢: (الإزاحة الزواية).



الأدوات : قرص دائري، منقلة، مسطرة، ورقة بيضاء، دبوس

الخطوات :

١) ثبت القرص بحيث يدور حول محور (دبوس) بشكل أفقي .

٢) ضعِ النقطة أ على محيط القرص وضع نفس النقطة على الورقة أسفل القرص محاذية للنقطة أ.

٣) دوِر القرص لتنتقل النقطة أ على محيط القرص إلى الموقع أَ.

٤) قس الزاوية أ م أَ

٥) احسب طول القوس أَ أ

٦) قارن إجابتك بإجابة زملائك و ناقش أسباب الإختلاف .

٧) أجب عما يلي :

أ) هل سارت النقطة أ في خط مستقيم .

ب) ما هي العوامل التي تعتمد عليها المسافة التي قطعتها النقطة أ

جـ) إذا كان القرص يدور بنفس السرعة وتحركت النقطة أَ إلى أً بزمن يساوي نصف الزمن الذي احتاجته من أ إلى أَ فما المسافة التي قطعتها النقطة منأَ إلى أً.

د) اكتب قانون سرعة دوران قرص دوار نصف قطره (**نق**) ويدور ربع دورة في ن ثانية .

تدريب ٨

أوجد سرعة دوران لعبة الدولاب إذا تحرك الشخص في إحدى عربات اللعبة من الموقع أ إلى الموقع ب خلال ١٥ ثانية وكانت الزاوية التي تقابل القوس $\overset{\frown}{\text{أب}}$ = ١,٥ ^{د} ونصف قطر الدولاب ٢٠ متراً.

تعريف

١) تسمى الزاوية المركزية التي تدورها نقطة مثل أ على محيط قرص دوار مركزه م **بالإزاحة الزاويِّة**.

٢) تعرَّف السرعة الزاويِّة لنقطة على قرص دوار بأنهاالنسبة بين الإزاحة الزاويِّة لتلك النقطة إلى الوقت المستغرق أي ع = $\frac{\theta^{د}}{ن}$.

مثال ٩

أ) إذا دار نصف قطر إسطوانة تسجيل $\frac{٤}{٥}$ الدورة حول محورها فأوجد الإزاحة الزاوية للنقطة أ على محيط الاسطوانة بالتقدير الدائري.

ب) إذا كانت الاسطوانة تدور ٤٥ دورة في الدقيقة فأوجد السرعة الزاوية.

الحل

أ) عندما تدور النقطة دورة كاملة فإن الإزاحة الزاوية = ٢π زاوية نصف قطرية

$\therefore$ $\frac{٤}{٥}$ الدورة = $\frac{٤}{٥} \times ٢\pi = \frac{٨}{٥}\pi$

$= \frac{٨}{٥} \times \frac{٢٢}{٧} = \frac{١٧٦}{٣٥}$

$\approx$ ٥,٠٣ زاوية نصف قطرية

ب) السرعة $= \frac{\theta}{ن}$

$= \frac{٤٥ \times ٢\pi}{٦٠}$

$= \frac{٩٠}{٦٠} \times \frac{٢٢}{٧}$

$= \frac{١,٥ \times ٢٢}{٧} = \frac{٣٣}{٧}$

$\approx$ ٤,٧ زاوية نصف قطرية في الثانية

تدريب ٩

أوجد السرعة الزاويِّة لشخص يجلس في لعبة الدولاب إذا كان الدولاب يدور $\frac{١}{٢}$ ٥ دورة. في ٦ دقائق، ثم احسب المسافة الطولية التي يقطعها خلال هذا الزمن إذا كان نصف القطر ١٨ مترا.

١) حول ٢٣٦° إلى الزوايا النصف قطرية.

٢) حول $\left(\frac{\pi}{٤}\right)^{ء}$ إلى الدرجات.

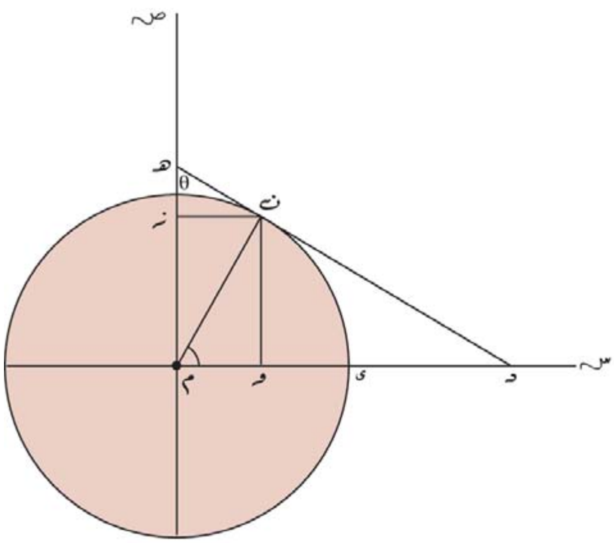
٣) إذا كان قطر دراجة علي = ٥٤ سم وقطر دراجة سالم ٤٨سم وتحرك كل من علي وسالم إلى الأمام بحيث دارت العجلات بزاوية ٤π لكل منهما ، فما المسافة التي قطعها كل منهما ؟ وفسر سبب الاختلاف إن وجد.

٤) ما قياس الزاوية التي يدورها عقرب الدقائق خلال ٤٥ دقيقة بالتقدير الدائري؟

٥) لعبة الدولاب نصف قطرها ٣٠ مترا ، ما المسافة التي يقطعها راكب في إحدى العربات إذا دارت بزاوية $\frac{٥\pi}{٢}$ زاوية نصف قطرية؟

٦) ما طول قوس دائرة نصف قطرها ١٤ سم ويقابل في المركز زاوية قياسها $\left(\frac{٣}{٤}\right)^{ء}$ ؟

٧) م دائرة الوحدة ،ن نقطة مثلثية ، رسم مماس للدائرة من النقطة ن لاقى محور س في د ، ومحور ص في هـ أثبت ما يلي:



جا θ = م ز ، قتا θ = م هـ

جتا θ = م و ، قا θ = م د

ظا θ = د ن ، ظتا θ = ن هـ

٨) تدور عجلة دراجة ٥ دورات في الدقيقة ، إذا كان قطر عجلة الدراجة ٣٠ سم فما سرعة الدراجة بالسنتيمتر/ثانية؟ وما السرعة الزاويِّة لنقطة على محيط العجلة؟

٩) تدور الكرة الأرضية حول محورها دورة كل ٢٤ ساعة فإذا كان محيط الكرة الأرضية عند خط الاستواء يساوي ٣٩٦٠٠كم. فأوجد سرعة شخص يقف عند خط الاستواء بالكم/ساعة.

١٠)حدد الربع الذي تقع فيه كل من الزوايا الآتية:

أ) ٤٤٠°

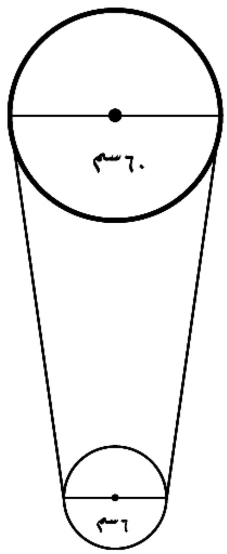
ب) ٢٣٥°

جـ) ٢,٥ زاوية نصف قطرية

١١) ترتبط بكرتان بحزام كما في الشكل فإذا كان قطرالبكرة الصغرى ٦ سم ، وقطر البكرة الكبرى ٦٠سم ، وكانت البكره الكبرى تدور بسرعة ٦٠ دورة في الدقيقة، فأوجد ما يلي:

أ) سرعة دوران الحزام بالمتر / دقيقة.

ب) السرعة الزاوية للبكرة الصغرى في الدقيقة.



زاوية الأساس Reference Angle

نشاط ١: زاوية الأساس (المرجعية)

المواد : ورق رسم بياني ، قلم ، مسطرة ، منقلة ، فرجار

الخطوات :

١) ارسم دائرة الوحدة وحدد عليها المحورين الإحداثيين

٢)حدد زاوية θ في الربع الأول واكتب إحداثيات النقطة المثلثية للزاوية د (جتا θ ، جا θ)

٣) حدد النقاط المثلثية للزوايا جـ ($^\circ$١٨٠ − θ) ،هـ($^\circ$١٨٠ + θ) ، و($^\circ$٣٦٠ − θ) ، ز($^\circ$٣٦٠ + θ)

٤) استعن بإحداثيات د (جتا θ ، جا θ) في كتابة إحداثيات النقط المثلثية في (٣) وأجب عن الأسئلة التالية:

– ما أوجه الشبه والإختلاف للإحداثي السيني لكل من د ، جـ ، هـ ، و ؟

– ما أوجه الشبه وأوجه الاختلاف للإحداثي الصادي لكل من النقط د ، جـ ، هـ ، و ؟

٥) اعتمد على إجابتك عن الأسئلة السابقة واكتب قاعدة تحدد العلاقة بين:

جاθ وكل من جا ($^\circ$١٨٠ − θ) ، جا ($^\circ$١٨٠ + θ) ، جا ($^\circ$٣٦٠ − θ) وكذلك بين:

جتاθ وكل من جتا ($^\circ$١٨٠ − θ)، جتا ($^\circ$١٨٠ + θ) ، جتا ($^\circ$٣٦٠ − θ)

تدريب ١

أ) إذا كان جا $^\circ$٤٥ = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ فاعتمد على النتيجة التي توصلت إليها، وأوجد كلا من:

جا $^\circ$١٣٥ ، جا $^\circ$٢٢٥ ، جتا $^\circ$٣١٥

ب) إذا كان جا $^\circ$٣٧ = ٠,٦ فاكتب الزوايا التي ترتبط بها، ثم أوجد جيب تمام كل منها.

نتيجة

لكل زاوية توجد زاوية حادة س ترتبط بها تسمى الزاوية المرجعية أو زاوية الأساس بحيث تحقق العلاقات التالية:

أ) جاس = $|$جا (π − س)$|$ = $|$جا (π + س)$|$ = $|$جا(٢π − س)$|$

ب) جتاس = $|$جتا (π − س)$|$ = $|$جتا (π + س)$|$ = $|$جتا (٢π − س)$|$

جـ) تتحدد إشارة النسبة المثلثية حسب الربع الذي يقع فيه ضلع الزاوية النهائي

مثال ١

أوجد قيمة كل مما يلي:

م) جا ٣٠° × جا ١٥٠° − ٢ جتا ٢٢٥° ظا ٢١٠° + ٣ جا ١٢٠°

ب) ٣ ظا ١٥٠° × ظا ٣١٥° + ٤ جتا ٢٤٠° ظا ١٣٥°

الحل

م) جا ٣٠° جا(١٨٠° − ٣٠°) − ٢ جتا(١٨٠° + ٤٥°) ظا(١٨٠°+٣٠°) + ٣ جا (١٨٠° − ٦٠°)

= جا ٣٠° جا ٣٠° − ٢ (− جتا ٤٥°) ظا ٣٠° + ٣ جا ٦٠°

$= \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢} + ٢ \times \frac{١}{\sqrt{٢}} \times \frac{١}{\sqrt{٣}} + ٣ \times \frac{\sqrt{٣}}{٢}$

$= \frac{١}{٤} + \frac{٢}{\sqrt{٦}} + \frac{٣\sqrt{٣}}{٢} = \frac{١}{٤} + \frac{\sqrt{٦}}{٣} + \frac{٣\sqrt{٣}}{٢}$

$= \frac{٤٣,٩٧}{١٢} \simeq ٣,٧$

ب) ٣ ظا (١٨٠° − ٣٠°) × ظا (٣٦٠°−٤٥°) + ٤ جتا (١٨٠° + ٦٠°). ظا (١٨٠° − ٤٥°)

= − ٣ ظا ٣٠° × (− ظا ٤٥°) + ٤ (− جتا ٦٠°) (− ظا ٤٥°)

= ٣ ظا ٣٠° ظا ٤٥° + ٤ جتا ٦٠° ظا ٤٥°

$= ٣ \frac{١}{\sqrt{٣}} \times ١ + ٤ \times \frac{١}{٢} \times ١$

$= \frac{٣}{\sqrt{٣}} + ٢ = \sqrt{٣} + ٢$

تدريب ٢

م) إذا علمت أن جا هـ = ٠,٧٥ فما قيمة جتا هـ، قتا هـ، ظتا هـ؟

ب) إذا علمت أن قا θ $= \frac{٢}{\sqrt{٣}}$ فما قيمة ظاθ ؟

جـ) إذا كان قتا θ = ٢ فما قيمة جا θظا θ − قا θظتا θ؟

مثال ٢

إذا كان جاθ $= \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ فما قيمة جاθ جتاθ + ٢ظاθ قاθ ؟

الحل

جا²θ + جتا²θ = ١ ∴ $(\frac{\sqrt{٣}}{٢})^٢$ + جتا²θ = ١ ⟵ جتا²θ = $\frac{١}{٤}$ ومنه جتاθ = ± $\frac{١}{٢}$

قاθ = ± ٢ ، ظاθ = ± $\sqrt{٣}$

جاθ جتاθ + ٢ ظاθ قاθ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}(-\frac{١}{٢}) + ٢(-\sqrt{٣})(-٢) = \frac{-\sqrt{٣}}{٤} + ٤\sqrt{٣} = \frac{١٥\sqrt{٣}}{٤}$

أو $\frac{\sqrt{٣}}{٤} \times \frac{١}{٢} + ٢ \times \sqrt{٣} \times ٢ = \frac{\sqrt{٣}}{٤} + ٤\sqrt{٣} = \frac{١٧\sqrt{٣}}{٤}$

أ) تحديد النسب المثلثية (جا ، جتا ، ظا) خلال دورة كاملة

نشاط ٢: (دائرة الوحدة).

الأدوات: ورقة ، قلم ، فرجار

الخطوات :

١) ارسم المحورين الاحداثيين س، ص ومن نقطة الأصل ارسم دائرة واعتبر نصف قطرها وحدة واحدة.

٢) حدد النقاط التالية:

أ) نقاط التقاء الدائرة مع المحاور (أ،ب،جـ،د).

ب) نقطتان على محيط الدائرة في كل ربع مثل هـ ، و ، ز ، ح ، ط ، ى ، ك ، ل.

جـ) اكتب إحداثيات كل نقطة من النقاط التي حددتها باستخدام المسطرة مع مراعاة الوحدة التي استخدمتها.

٣) **أجب عما يلي:**

– ماذا تسمى كل نقطة من النقاط التي حددتها؟

– ما علاقة الإحداثي السيني للنقطة هـ بجيب تمام الزاوية أ$\hat{م}$هـ؟ وما علاقة الاحداثي الصادي لنفس النقطة بجيب الزاوية أ$\hat{م}$هـ ؟

– أجب عن السؤال السابق بالنسبة للنقطة (و).

– عمم إجابتك في السؤالين السابقين لجميع النقاط على المحيط (النقاط المثلثية) في الشكل، ثم نظم جدولا كالموضح تالياً وأكمله ليشمل جميع النقاط الاثني عشر السابقة باستخدام قياس الزوايا ، وقياس الإحداثيات

النقطة المثلثية	قياس الزاوية	الاحداثي السيني	الاحداثي الصادي	جا الزاوية	جتا الزاوية	ظا الزاوية
هـ	٣٠°	٠,٨٧	٠,٥	٠,٥	٠,٨٧	٠,٥٨
ز						

– ما أكبر قيمة لـ جاس ، وجتاس ؟ وما أقل قيمة لكل منهما؟

– في أي الأرباع يكون جاس موجبا؟ وفي أيها يكون سالبا؟ وكذلك بالنسبة لجيب التمام.

– بين إن كانت العلاقات التالية ص = جاس ، ص = جتاس تشكل دوالاً أم لا ، وإن كان كذلك فحدد المجال والمدى لكل منها؟

تدريب ٣

أ) اعتمد على الجدول الذي أكملته واذكر التغير الذي يطرأ على قيمة جا س في كل مما يلي:

– تزداد قيم س من صفر° إلى ٩٠° ⟵ يزداد جا س من صفر إلى ١

– تزداد قيم س من ٩٠° إلى ١٨٠° ⟵

– تزداد قيم س من ١٨٠° إلى ٢٧٠° ⟵

– تزداد قيم س من ٢٧٠° إلى ٣٦٠° ⟵

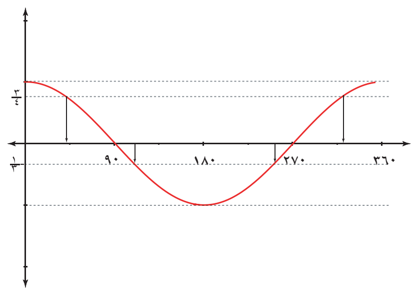
ب) اعتمد على إجابتك في أ والجدول السابق الذي أكملته ومثل الدالة ص = جاس في الفترة [٠ ، ٢ π] بيانيا

نتيجة

١) كل نقطة على دائرة الوحدة تمثل نقطة مثلثية لزاوية في الوضع القياسي : ٠° ≤ س ≤ ٣٦٠°

٢) مدى كل من الدالة ص = جاس ، ص = جتا س هو الفترة [– ١ ، ١]

مثال ٣



اذكر خصائص الدالة ص = جتاس واعتمد عليها وعلى الجدول السابق في تمثيل الدالة بيانيا وبين من الرسم وجود زاويتين مختلفتين لهما نفس جيب التمام.

الحل

– عندما تزداد س من صفر° إلى ٩٠° تنقص جتا س من ١ إلى صفر

– عندما تزداد س من ٩٠° إلى ١٨٠° تنقص جتا س من صفر إلى –١

– عندما تزداد س من ١٨٠° إلى ٢٧٠° تزداد جتا س من – ١ إلى صفر

– عندما تزداد س من ٢٧٠° إلى ٣٦٠° تزداد جتا س من صفر إلى ١

وبالاستفادة من نقاط الجدول الذي أكملته في النشاط السابق:

س	٠°	٣٠°	٦٠°	٩٠°	١٢٠°	١٥٠°	١٨٠°	٢١٠°	٢٤٠°	٢٧٠°	٣٠٠°	٣٣٠°	٣٦٠°
جتاس	١	٠٫٨٧	٠٫٥	صفر	– ٠٫٥	– ٠٫٨٧	– ١	– ٠٫٨٧	– ٠٫٥	٠	٠٫٥	٠٫٨٧	١

يتم تمثيل نقاط الجدول على المستوى الإحداثي ويتم التوصيل بينها بخط ممهد كما هو موضح في الشكل أعلاه . ومن الشكل نلاحظ أن :

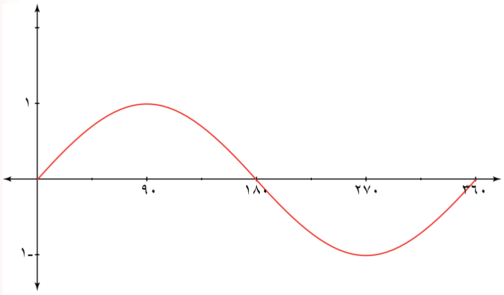
جتا ٤١° = $\frac{٣}{٤}$ وكذلك جتا ٣١٩° = $\frac{٣}{٤}$ ، كما نلاحظ من الجدول أن

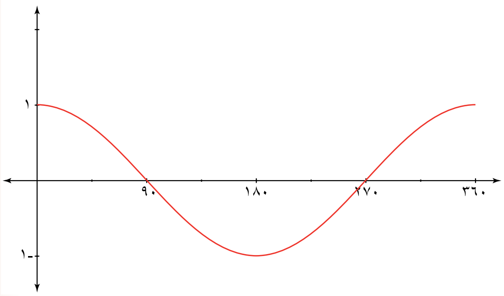
جتا ٣٠° = جتا ٣٣٠° = ٠٫٨٧ أي أن الدالة ص = جتاس ليست واحد لواحد.

تدريب ٤

تحقق فيما إذا كانت الدالة ص = جاس ، واحد لواحد أم لا.

تدريب ٥





يمثل الشكل الأول منحنى الدالة ص = جاس في الفترة [٠، ٢π]
بينما يمثل الشكل الثاني منحنى الدالة ص= جتاس في الفترة نفسها

أ) ادرس الشكلين وقارن بين قيمتيهما عند :
س= ٠°، ٩٠°، ١٨٠°، ٢٧٠°، ٣٦٠°

ب) حدد فترات تزايد وتناقص دالة الجيب.

جـ) شف أحد الشكلين على ورقة شفافة وطبقه على الآخر واستنتج التحويل الهندسي الذي تجريه على محور ص لينطبق الشكلان على بعضهما.

د) هل هذه المنحنيات تفسر العلاقة جتا س= جا (٩٠–س)؟ وضح ذلك .

مثال ٤

اعتمد على منحنى كل من الدالتين ص = جا س ، ص= جتا س، س ∈[٠°، ٣٦٠°]وأجب عما يلي:

أ) ما مدى الدالة ص =٣جتاس، ص= –٢جاس؟

ب) ما مدى الدالة ص= جاس+جتاس ، ص= جاس–جتاس؟

جـ) ارسم منحنى الدالة ص= جاس+جتاس.

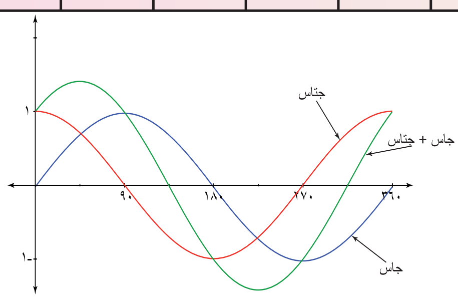
الحل

أ) [–٣،٣] ، [–٢، ٢]

ب) ستكون أكبر قيمة عند س=٤٥° ، وأدنى قيمة عند س= ٢٢٥° لذا يكون المدى [–$\sqrt{٢}$، $\sqrt{٢}$]

جـ)

س	٠°	٣٠°	٦٠°	٩٠°	١٢٠°	١٥٠°	١٨٠°	٢١٠°	٢٤٠°	٢٧٠°	٣٠٠°	٣٣٠°
جا س	٠	٠,٥	٠,٨٧	١	٠,٨٧	٠,٥	٠	–٠,٥	–٠,٨٧	–١	–٠,٨٧	–٠,٥
جتا س	١	٠,٨٧	٠,٥	٠	–٠,٥	–٠,٨٧	–١	–٠,٨٧	–٠,٥	٠	٠,٥	٠,٨٧
جاس+ جتاس	١	١,٣٧	١,٣٧	١	٠,٣٧	–٠,٣٧	–١	–١,٣٧	–١,٣٧	–١	–٠,٣٧	٠,٣٧



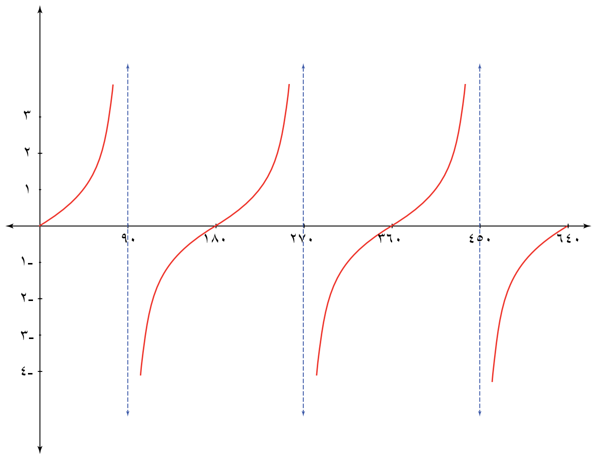
مثال ٥

اكتب قيم ظل الزوايا ٠°، ٣٠°، ٤٥°، ٦٠° ومضاعفاتها خلال دورة واحدة ومثل ذلك بيانيا ومن الرسم اكتب أكبر قيمة ، وأدنى قيمة ، ونقاط الالتقاء مع محور السينات.

الحل

س	٠°	٣٠°	٤٥°	٦٠°	٩٠°	١٢٠°	١٣٥°	١٥٠°	١٨٠°	٢١٠°	٢٢٥°	٢٤٠°	٢٧٠°	٣٠٠°	٣١٥°	٣٣٠°	٣٦٠°
	٠	$\frac{\pi}{٦}$	$\frac{\pi}{٤}$	$\frac{\pi}{٣}$	$\frac{\pi}{٢}$	$\frac{٢\pi}{٣}$	$\frac{٣\pi}{٤}$	$\frac{٥\pi}{٦}$	π	$\frac{٧\pi}{٦}$	$\frac{٥\pi}{٤}$	$\frac{٤\pi}{٣}$	$\frac{٣\pi}{٢}$	$\frac{٥\pi}{٣}$	$\frac{٧\pi}{٤}$	$\frac{١١\pi}{٦}$	٢π
ظا س	٠	٠,٥٨	١	١,٧٣	∞	−١,٧٣	−١	−٠,٥٨	٠	٠,٥٨	١	١,٧٣	$-\infty$	−١,٧٣	−١	−٠,٥٨	٠

* دالة الظل متزايدة أي تزداد قيمتها بإزدياد قياس الزاوية وذلك ضمن فترات تحددها نقاط الإنفصال للمنحنى.
* للدالة ص= ظا س نقطتي انفصال خلال ٣٦٠° أو (٢π) وذلك عندما يكون قياس الزاوية ٩٠°، ٢٧٠°.
* تزداد قيمة ظا س بزيادة قياس (س) وعندما تقترب س صعودا إلى ٩٠° أو ٢٧٠° تقترب قيمة ظاس من ∞ . وعندما تقترب س نزولاً إلى ٩٠° أو ٢٧٠° تقترب قيمة ظاس إلى $-\infty$.
* أكبر قيمة للدالة وأدنى قيمة لها غير محددتين فالمدى يأخذ أية قيمة حقيقية بين $-\infty$، ∞ .



* يلتقي منحنى ظا س مع محور السينات عندما يكون قياس الزاوية س يساوي ٠°، ١٨٠°، ٣٦٠°.
* يعيد منحنى ظا س نفسه كل ١٨٠° لاحظ الجزء (٠−٩٠) والجزء (١٨٠−٢٧٠) ولاحظ كذلك الجزأين (٩٠− ١٨٠) ، (٢٧٠−٣٦٠).

تدريب ٦

كوّن جدولا للدالة ص = ظتا س حيث س∋ [٠ ، ٢π] ومثّل ذلك على ورقة رسم بياني ثم اعط وصفا كاملا لمنحنى الدالة كما وردفي المثال السابق.

تدريب ٧

س	٠°	٣٠°	٦٠°	٩٠°	١٢٠°	١٥٠°	١٨٠°	؟
قتاس	؟	٢	؟	؟	؟	؟	؟	؟
قاس	؟	١,٥٥	؟	؟	؟	؟	؟	؟
ظتاس	∞	$\sqrt{٣}$	؟	٠	؟	؟	؟	؟

أ) يمكنك أن تنظم جدولا تحدد فيه قيم س وقيم كل من قتا س ، قا س، ظتا س، انظر الجدول.

ب) مثّل كل دالة على شكل مستقل ثم أجب عن الأسئلة الآتية

١) ما مجال كل من الدوال قتا س ، قاس، ظتا س ؟

٢) ما مدى كل من الدوال قتا س ، قا س، ظتا س ؟

٣) ما قيمة قا س عند س = ٢٧٠° ؟ وما قيمة قتا س عند س = ٩٠° ؟
وكذلك ظتا س عند س = ٩٠°

نشاط ١: (رسم دالة إذا أعطى منحنى دالة مقلوبها).

الأدوات : رسم لمنحنى دالة مثل ظا س على ورق رسم بياني .

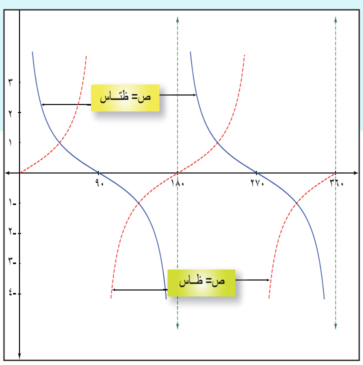
الخطوات :

١) ادرس المنحنى المعطى من خلال اجابتك عن الأسئلة التالية:
أ) هل المنحنى متصل أم به نقاط إنفصال وأين تقع نقاط الإنفصال إن وجدت .
ب) هل يقطع المنحنى محور السينات بمعنى هل تأخذ الدالة القيمة صفر.
جـ) حدد الفترات التي يكون فيها المنحنى صاعداً وتلك التي يكون فيها هابطا.
د) هل الدالة محدودة أوهل قيمة الدالة لا تزيد عن قيمة محددة أو لا تنقص عن قيمة محددة.

٢) قارن إجاباتك وإجابات زملائك وتناقشوا فيما بينكم لتصلوا إلى إجابات موحدة .

٣) من خلال الإجابات السابقة حدد سلوك منحنى مقلوب الدالة ثم مثلها بيانياً .

٤) أجب عن الأسئلة الآتية :
أ) إذا كان ظا س= صفر عند س= ١٨٠° فما قيمة ظتا س عند نفس النقطة؟
ب) إذا كانت ظا س =∞ عند س = ٩٠° فأين يلتقي منحنى ظتاس ومحور السينات؟
جـ) عندما تكون ظا س= $\frac{١}{٢}$ ، ١، ٥ فما القيم المقابلة لـ ظتا س؟



تدريب ٨

استخدم الأفكار التي توصلت إليها من النشاط ومثّل كلاً من قا س ، قتا س

تدريب ٩

اعتمد على النتائج التي توصلت إليها في الأنشطة السابقة، وأجب عما يلي:

أ) ما أكبر قيمة لدالة ظا س ؟ وما أقل قيمة لها؟

ب) ما قيم س التي تكون قيمة ظتا س عندها تساوي ١ ، −١، ٠ ؟

نتيجة

١) بيان الدالة ص = قتا س على الفترة ٠° ≤ س ≤ ٣٦٠° عبارة عن جزأين ،
المجال [٠° ، ٣٦٠°] − {١٨٠°}   مداها ح −]−١ ، ١[

٢) بيان الدالة ص = قا س على الفترة ٠°≤ س ≤ ٣٦٠° عبارة عن
ثلاثة أجزاء ، المجال = [٠° ، ٣٦٠°] − {٩٠° ، ٢٧٠°} ومداها ح −]−١ ، ١[

٣) بيان الدالة ص = ظتا س على الفترة ٠° ≤ س ≤ ٣٦٠° عبارة عن
جزأين ، المجال = [٠° ، ٣٦٠°] − {١٨٠°}   ومداها = ح

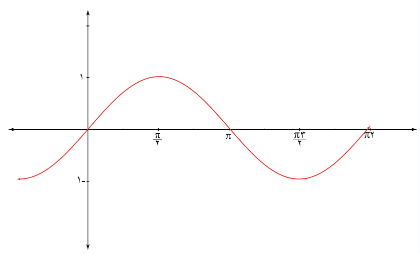
مثال ٦

استفد من الأشكال التالية وارسم كلا من :

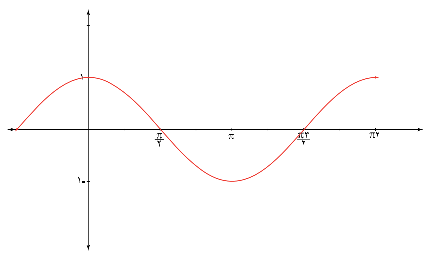
١) ص = ٣ جا س

٢) ص = ٢ +جتا س

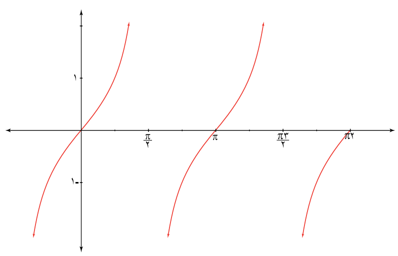
٣) ص = جا٢س



ص=جا س

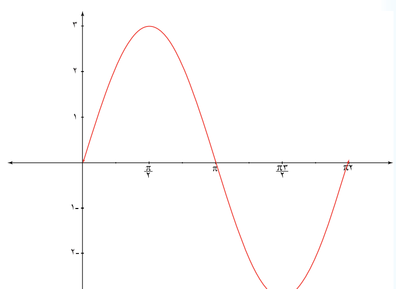


ص = جتا س

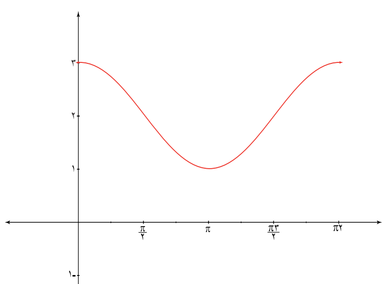


ص = ظا س

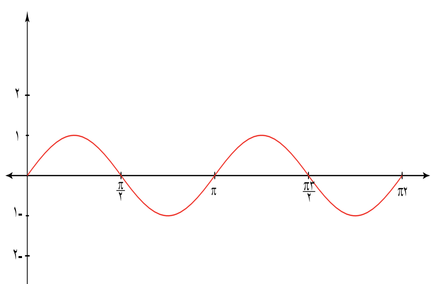
الحل



ص=٣جا س



ص = ٢ +جتا س



ص = جا٢س

١) أوجد قياسات جميع الزوايا θ حيث ٠° $\leqslant$ θ $\leqslant$ ٣٦٠° والتي تحقق كلا من الآتي:

ﻫ) جا θ = − ٠,٧٠   ب) جتا θ = − ٠,٤٥١٨

جـ) قا θ = ١,١١١١   د) جتا θ = ٠,٥

هـ) قتا θ = −١,٣٧٣٧   و) ظتا θ = − ١,٣١٨٢

٢) لماذا لا توجد قيم للدالتين قا س ، قتا س تنحصر بين −١ ، ١؟

٣) إذا كان ص = ٤ − جتا س، فما قيمة ص لكل من قيم س التالية (٦٠° ، ١٢٠° ، −١٨٠°)؟

٤) استخدم منحنى الدالة ص = جا س لإيجاد قيمة تقريبية للزاوية س إذا كان:

ص = ٠,٨ ، − ٠,٦ ، ٠,٧١ ، − ٠,٥

٥) أوجد إحداثيات نقطة تقسيم نصف محيط دائرة الوحدة (٠° − ١٨٠°) إلى قسمين النسبة بين طوليهما ١:٣ هل يوجد أكثر من نقطة تحقق الإجابة ؟

٦) استخدم دائرة الوحدة أو منحنى الجيب ، وجيب التمام للمقارنة بين كل من:

ﻫ) جا ٤٥° ، جا (− ٤٥°)   ب) جا ٢١٠° ، جا ٣٣٠°

جـ) جتا ٦٠° ، جتا (− ٦٠°)   د) جتا ١٥٠° ، جتا ٢١٠°

هـ) ظا ٤٥° ، ظا ٢٢٥°   و) ظا ١٣٥°، ظا ٣١٥°

٧) أوجد قيمة كل مما يلي :

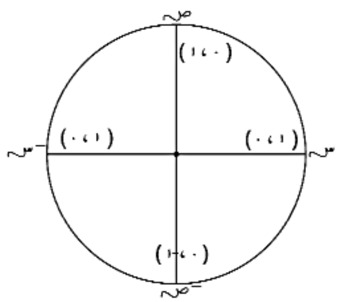
ﻫ) ٢ جا ٣٠° جا ٣٠٠° − جتا ١٢٠° ظا ٣١٥°   ب) قتا ٦٠° ظا ١٥٠° − قتا ٢٢٥° ظتا ٣٣٠°

٨) أوجد قيمة θ في كل من المعادلات التالية:

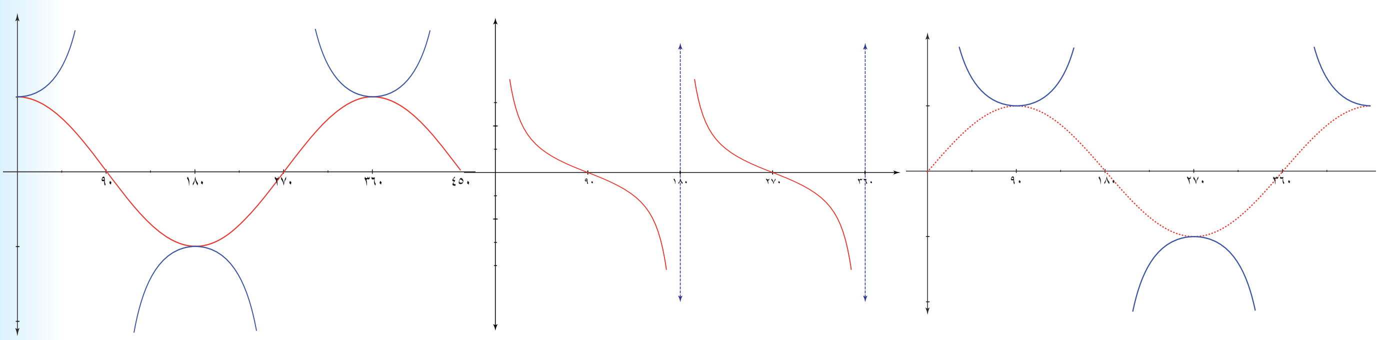
ﻫ) ٣ جا θ = ٤

ب) ٢ جتا θ + ٣ = − ١

جـ) ٣ جتا^{٢} θ − ٣ = −٣ جا^{٢} θ

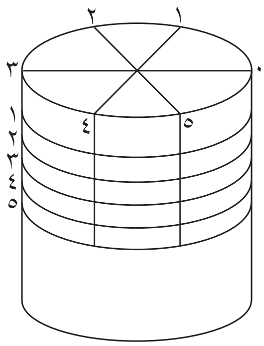


٩) اذكر اسم الدالة لكل شكل من الأشكال غير المنقطة الآتية:



عدد الدورات وقياس الزاوية المركزية

إذا لف خيط على إسطوانة دائرية وقسّم محيطها إلى عدة أقسام متساوية ولتكن ٦ أقسام فإذا وضعت إشارات على لفات الخيط محاذية للإشارات على الإسطوانة كما في الشكل نلاحظ أن جزء الخيط في اللفة الأولى بين الإشارتين ٠، ١ تقابل °٦٠ وكذلك أجزاء الخيط ذاتها في اللفات ٥،٤،٣،٢ ولكن الفرق بين النقطة ١ على اللفة الأولى والنقطة ١ على اللفة الثانية هي دورة كاملة والدورة تعادل °٣٦٠ أو ٢π ^د^ وللتمييز بين النقطة على اللفات المختلفة.



النقطة المثلثية	رقم اللفة	قياس الزاوية بالدرجات	قياس الزاوية بالتقدير الدائري	الصيغة العامة
١	الأولى	°٦٠	$\frac{\pi}{٣}$	$\frac{\pi}{٣}+٢\times٠\times\pi$
١	الثانية	°٦٠+°٣٦٠=°٤٢٠	$\frac{\pi}{٣}+٢\pi$	$\frac{\pi}{٣}+٢\times١\times\pi$
١	الثالثة	°٦٠+°٧٢٠=°٧٨٠	$\frac{\pi}{٣}+٤\pi$	$\frac{\pi}{٣}+٢\times٢\times\pi$

وبشكل عام يمكن كتابة قياس الزاوية بالصورة $\theta \mp ٢ن\pi$ حيث ن ترمز إلى عدد الدورات الكاملة التي تقطعها النقطة على محيط الدائرة، وإشارة السالب وضعت على أساس أن الخيط قد لف مع اتجاه عقارب الساعة.

مثال ١

أ) ما قيمة الزاوية °٢٥+ ٢ن π بالدرجات إذا كانت ن = ١ ، ٣ ، ٦؟

ب) اكتب الزوايا °٦٧٥ ، °٢٠٢٥ باستخدام عدد الدورات .

الحل

أ) ن = ١   °٢٥ + ٢×١×°١٨٠= °٣٨٥

ن = ٣   الزاوية تساوي °٢٥+٢×٣×°١٨٠=°١١٠٥

ن = ٦   الزاوية تساوي °٢٥+٢×٦×°١٨٠=°٢١٨٥

ب) الزاوية °٦٧٥ : نقسم °٦٧٥ على °٣٦٠ لمعرفة عدد الدورات = ١ والباقي °٣١٥

∴ الزاوية °٦٧٥ تكتب ٣١٥ + ٢×١π أو ٣١٥ + ٢π

الزاوية °٢٠٢٥÷°٣٦٠ = ٥ والباقي °٢٢٥

∴ الزاوية °٢٠٢٥ تكتب °٢٢٥ + ٢×٥π أو °٢٢٥+١٠ π

✳ نتيجة

النقطة المثلثية للزاوية θ تنطبق على النقط المثلثية لجميع الزوايا θ + ٢ن π حيث ن ∈ ص ولها نفس النسب المثلثية.

تدريب ١

أ) أكتب خمسة زوايا موجبه وخمسة زوايا سالبة لها نفس النقطة المثلثية للزاوية ١٣٥° .

ب) أكتب كلا من الزوايا الآتية على الصورة θ + ٢ ن π

٥١٢٠° ، –٣٢٥٠° ، ١٨٠٠° ، – ٩٢٠°

حيث أن جميع الزوايا مهما كبر قياسهابالموجب أو السالب تمثل بنقطة مثلثية على دائرة الوحدة بمعنى أن أية نقطة مثلثية تمثل عددا غير محدود من الزوايا التي تختلف عن بعضها بمضاعفات (٢πْ) لذلك يمكن توقع أن منحنيات الدوال المثلثية تكرر نفسها مع زيادة قيمة الزاوية .

إن مثل هذه الدوال التي يعيد منحناها نفسه في فترات محددة تسمى «بالدوال الدورية».

تدريب ٢

١) حدد لكل وصف مما يلي بيان الدالة المناسب:

أ) ثابت

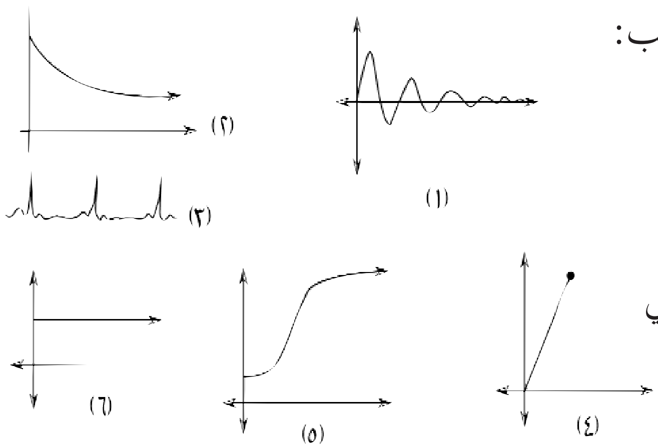
ب) متزايد

جـ) متناقص

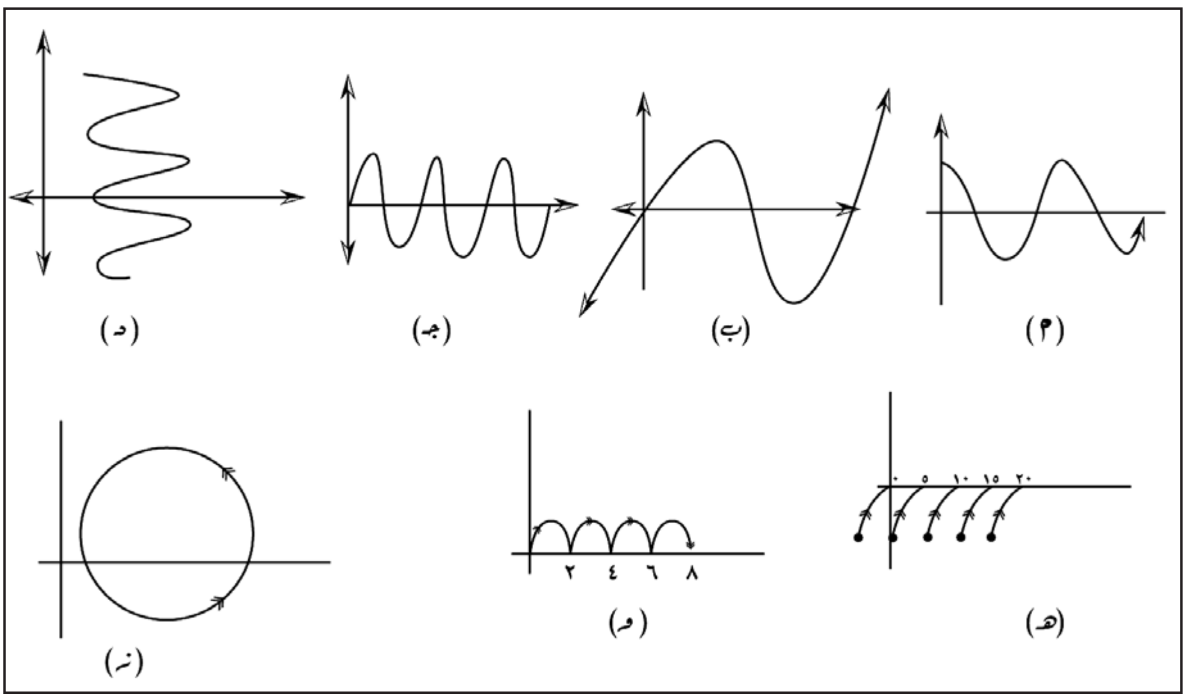
د) دوري (يعيد نفسه)

هـ) متذبذب زيادة ونقصان إلى أن ينتهي إلى قيمة ثابتة

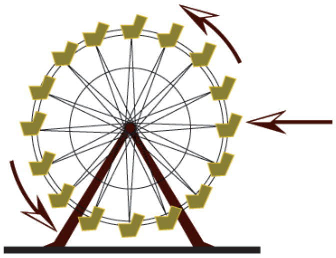
و) يتزايد باستمرار أو يتناقص باستمرار ليؤول لقيمة محددة



٢) حدد الأشكال التي تمثل دالة بيانها عبارة عن جزء متكرر.



مثال ٢

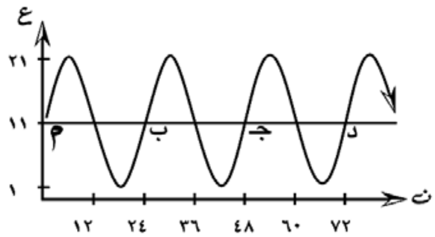


لعبة دولاب نصف قطرها ١٠م وترتفع عن الأرض
مسافة ١م وتدور بسرعة زاوية ١٥° في الثانية
فإذا كان ارتفاع العربة التي يشير إليها السهم يعطى بدلالة الزمن
ع = ١٠ جا (١٥° × ن) + ١١ حيث ن بالثواني
أوجد ارتفاع العربة عند ن = ٠ ، ٢ ، ٤ ، ٠٠٠ ، ٣٠ ثم مثل بيانيا حركة الدولاب.
حيث ٠ ⩽ ن ⩽ ٧٢٠ ثانية

الحل

ن = ٠ ع = ١٠ جا ٠ + ١١ = ١١م ، ن = ٢ ع = ١٠ جا ٣٠ + ١١ = ١٦م
من خلال إيجاد عدد كاف من الارتفاعات عند أزمنة معينة يمكن تمثيل شكل الحركة كالآتي:

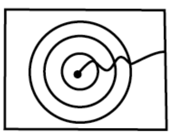
ن	٠	٦	١٢	١٨	٢٤	٣٠	٣٦	٤٢	٤٨
ع	١١	٢١	١١	١	١١	٢١	١١	١	١١



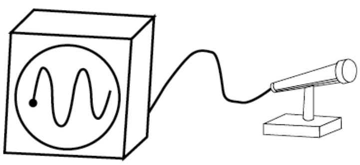
تلاحظ من الشكل أن هذه الدالة دورية تعيد نفسها كل ٢٤ ثانية حيث النقاط م ، ب ،جـ هي بداية الدورة كما تشكل أيضا نهاية للدورة (يمكن تسمية كل دورة موجة)

أمثلة على حركات دورية تشكل أمواجا:

١) اهتزاز الشوكة الرنانة

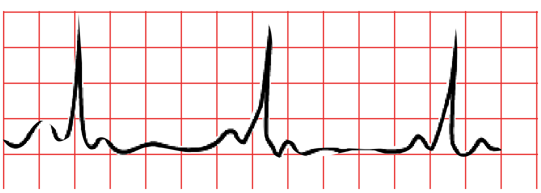


٢) حركة المياه الساكنة إذا ألقي فيها جسم



٣) ترددات الصوت

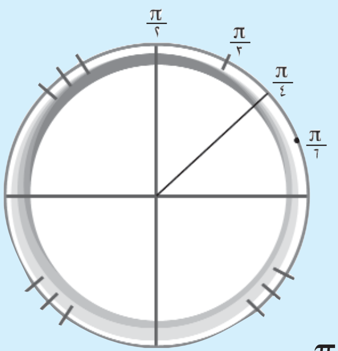
٤) حركة الأفعى (الحية)



٥) مخططات القلب Egc

الفترة (الدورة) ، التردد ، السعة Period, Amplitude and Frequency

نشاط ١:



الأدوات : جسم اسطواني ، خيط ، مسطرة ، منقلة

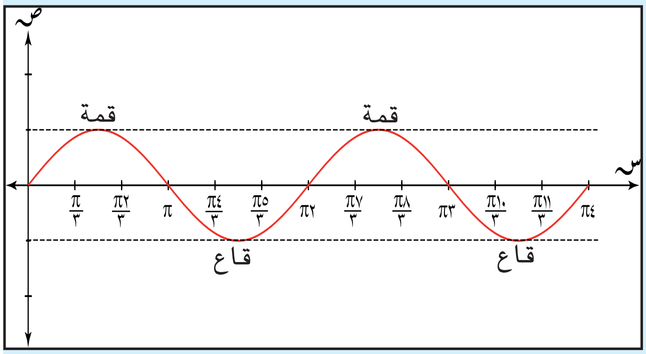
الخطوات :

١) مثل المحورين الإحداثيين بخطين بشكل عمودي

٢) قسم محيط الدائرة لتمثل الزوايا الآتية في المركز:

$\frac{\pi}{٦}$ ، $\frac{\pi}{٣}$ ، $\frac{\pi}{٢}$ ، $\frac{٤\pi}{٦}$ ، $\frac{٥\pi}{٦}$ ، π ، $\frac{٧\pi}{٦}$ ، $\frac{\pi}{٦}$ ، $\frac{٩\pi}{٦}$ ، $\frac{١٠\pi}{٦}$ ، $\frac{١١\pi}{٦}$ ، ٢π

٣) خذ خيطا أبيضا ولفه على محيط الإسطوانة بمقدار ٣ لفات مثلا وضع علامات على الخيط عند نقاط الزوايا على المحيط



٤) افرد الخيط على خط الأعداد كمحور للسينات

٥) مثل الدالة ص = جاس في الفترة [٠ ، ٦π]

٦) أجب عما يلي:

– ماذا نسمي مثل هذه الدالة؟ وما شكل الحركة؟

– بعد كم درجة يعيد المنحنى نفسه ؟ (الدورة) أو الفترة Period

– ما القيمة الصغرى للدالة؟ وما القيمة العظمى لها؟

– ما الفرق بين أكبر قيمة للدالة وأصغر قيمة لها؟

– ما مجال الدالة ؟ وما مداها؟

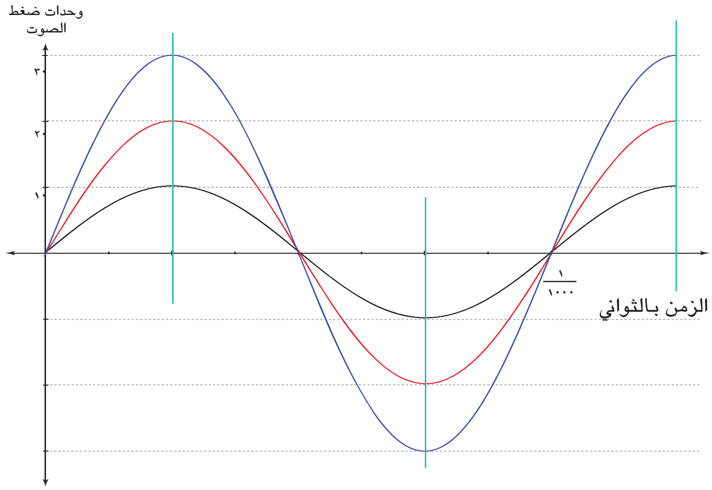
– إذا أزيح محور الصادات إلى النقطة س = $\frac{\pi}{٢}$ فما شكل المنحنى؟

– إذا مثلت الدالة ص = جا$\frac{١}{٢}$ س فهل تتأثر الفترة ، وكذلك القيمة الكبرى والصغرى؟

تدريب ٣

من خلال إجابتك عن الأسئلة ادرس منحنى ص=جتا س على الفترة ٠≤ س ≤ ٤π وأجب عن أسئلة النشاط السابق .

سعة الموجة وترددها



يمثل الشكل المجاور موجات أصوات لها نفس الدورة وهي $\frac{١}{١٠٠٠}$ من الثانية ولكنها تختلف في ضغط الصوت (ارتفاع الصوت) ويقاس ارتفاع الصوت عادة بوحدة هي عبارة عن أدنى ضغط صوتي مسموع لمعظم الناس ويساوي تقريبا $٣,٥٣ \times ١٠^{-٩}$ ضغط جوي .

يلاحظ من الشكل أنه كلما ارتفع الصوت زادت المسافة بين أدنى ضغط للصوت، وأعلى ضغط له (مدى الدالة).

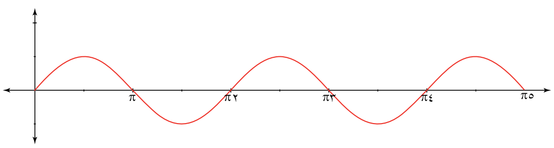
إن نصف الفرق بين أعلى قيمة للضغط (للدالة) وأدنى قيمة لها يسمى بسعة الموجه لذا فإن

سعة الموجه باللون الأسود = $\frac{١٠ - (-١٠)}{٢}$ = $\frac{٢٠}{٢}$ = ١٠ وحدات، وطول الموجة $\frac{١}{١٠٠٠}$

سعة الموجة باللون الأحمر = $\frac{٢٠ - (-٢٠)}{٢}$ = $\frac{٤٠}{٢}$ = ٢٠ وحدة، وطول الموجة $\frac{١}{١٠٠٠}$

سعة الموجة باللون الأزرق = $\frac{٣٠ - (-٣٠)}{٢}$ = $\frac{٦٠}{٢}$ = ٣٠ وحدة، وطول الموجة $\frac{١}{١٠٠٠}$

إذا تمت مقارنة هذه الموجات بموجة الجيب نجد أن الاختلاف هنا هو



أ) السعة = ١ بينما في الشكل الأول السعة = ١٠، ٢٠، ٣٠

ب) طول الموجة هنا ٢π بينما طول الموجة في الشكل الأول= $\frac{١}{١٠٠٠}$ من الثانية أي ١٠٠٠ دورة في الثانية لهذا يمكننا كتابة دالة الصوت في الشكل الأول بالصورة

ص= ١٠ جا ٢٠٠٠πس أي ص= أ جا ب س حيث يكون هنا أ تمثل السعة ، $\frac{٢\pi}{ب}$ طول الموجة ، و $\frac{ب}{٢\pi}$ التردد.

تدريب ٤

مثل الدالة ص = ٢جتا ٣س في الفترة [٠ ، ٣π] وحدد السعة، وطول الموجة .

تعريف

– تسمى الدالة التي يعيد منحناها نفسه من فترة لأخرى بالدالة الدورية.
– الفترة التي يعيد المنحنى نفسه فيها هي الفرق بين قياس الزاوية عند نقطة البداية، و قياس الزاوية عند نهايتها ويأخذ المنحنى في هذه الفترة شكل الموجه Wave ويسمى دورة.
– يسمى نصف الفرق بين القيمة العظمى للموجة والقيمة الصغرى لها بالسعة Amplitude .
– معكوس طول الموجه يسمى التردد.

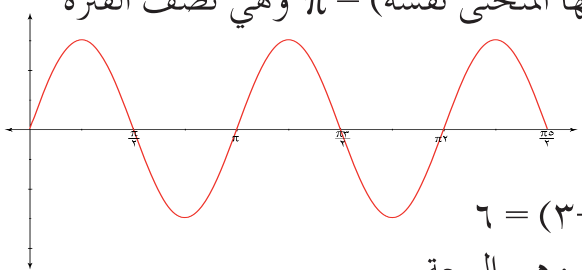
مثال ٣

مثِّل الدالة ص = ٣ جا٢(س) على الفترة ٠ ⩽ س ⩽ ٤π وأجب عن الأسئلة في النشاط السابق ثم استنتج شكل المنحى للدالة ص = ٣ جا (٢س) +٢ .

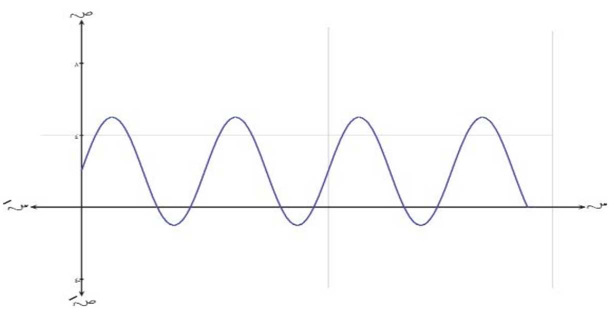
الحل

س	٠	$\frac{\pi}{٣}$	$\frac{٢\pi}{٣}$	$\frac{٣\pi}{٣}$	$\frac{٤\pi}{٣}$	$\frac{٥\pi}{٣}$	$\frac{٦\pi}{٣}$	$\frac{٧\pi}{٣}$	$\frac{٨\pi}{٣}$	$\frac{٩\pi}{٣}$	$\frac{١٠\pi}{٣}$	$\frac{١١\pi}{٣}$	$\frac{١٢\pi}{٣}$	$\frac{٣\pi}{٤}$	$\frac{٥\pi}{٤}$	$\frac{٧\pi}{٤}$	$\frac{٩\pi}{٤}$
ص	٠	٢,٦١	٢,٦١–	٠	٢,٦١	٢,٦١–	٠	٢,٦١	٢,٦١–	٠	٢,٦١	٢,٦١–	٠	٣ –	٣	٣ –	٣

* من الشكل يلاحظ أن فترة الموجة (التي يعيد فيها المنحنى نفسه) = π وهي نصف الفترة للدالة ص = جاس



* الفرق بين القيمة العظمى والصغرى = ٣ – (–٣) = ٦
ونصف الفرق = $\frac{٦}{٢}$ = ٣ يساوي معامل الجيب وهي السعة .
* مجال الدالة ح ، والمجال المقابل [– ٣ ، ٣]
* شكل المنحنى ص = ٣ جا (٢س) + ٢ هو نفس شكل الدالة ٣ جا٢س مع إزاحة إلى الأعلى (ص) بمقدار وحدتين . ولن يتأثر أياً من المجال أو الفرق بين القيمة العظمى والقيمة الصغرى.



* يتأثر المدى ليصبح [–١ ، ٥] .

تدريب ٥

ارسم شكلا تقريبياً لكل من الدوال التالية وأجب عن الأسئلة التي تليها:
أ) ص = ٢ جا٣ س – ١   ب) ص = ٤ جتا (س + $\frac{\pi}{٦}$)
احسب : الدورة ، القيمة العظمى ، القيمة الصغرى ، المدى ، والسعة.

تعريف

لكل ص = ٩ جا ب س و ص = ٩ جتا ب س حيث ٩ ، ب $\neq$ صفر يكون:

٩) السعة = $|٩|$ Amplitude

ب) الدورة = $\frac{\pi ٢}{|ب|}$ Period

جـ) القيمة العظمى = $|٩|$ Maximum Value

د) القيمة الصغرى = $-|٩|$ Minimum Value

هـ) المدى = $[-٩ ، ٩]$

و) التردد = $\frac{١}{\text{الدورة}}$ Frequency

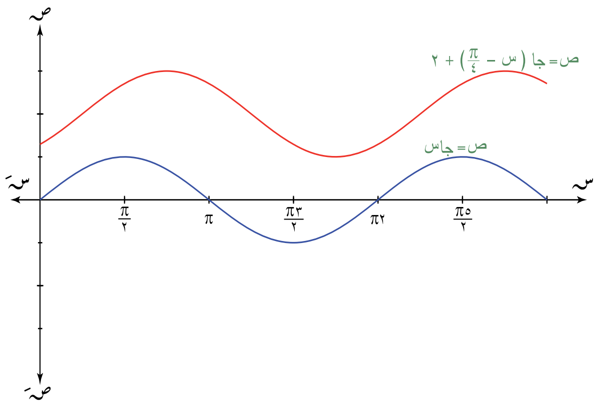
مثال ٤

مثل كلاً من الدوال التالية:

٩) ص = جا (س $-\frac{\pi}{٤}$) + ٢ وقارنه مع بيان ص = جاس

ب) ص = ٣ جتا $\frac{١}{٢}$ (س $-\pi$) $-$ ٢ وقارنه مع بيان ص = ٣ جتا $\frac{١}{٢}$ س

الحل



٩) من الرسم تستطيع أن تستنتج

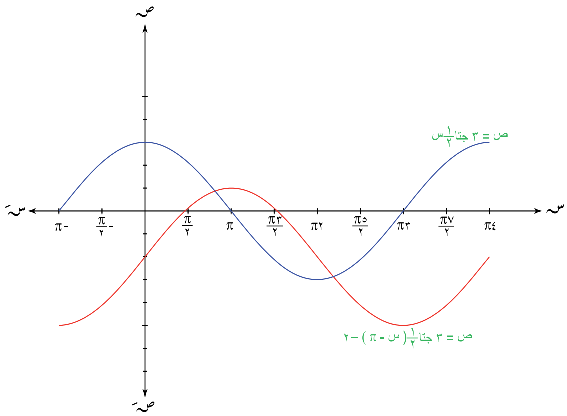
– الدورة = ٢π لكلا الشكلين ، التردد $\frac{١}{\pi ٢}$

– الإزاحة الرأسية للشكل بمقدار ٢ للأعلى

– الإزاحة الأفقية = $\frac{\pi}{٤}$ إلى اليمين

– السعة = ١ لكلا الشكلين

– المدى = $[١ ، ٣]$



ب) الدورة = $\frac{\pi ٢}{\frac{١}{٢}}$ = ٤π ، التردد = $\frac{١}{\pi ٤}$

– الإزاحة الرأسية = $|-٢|$ = ٢ وحدة إلى أسفل

– الإزاحة الأفقية = $|-\pi|$ = π وحدة إلى اليمين

– السعة = $|٣|$ = ٣

– المدى = $[-٥ ، ١]$

تدريب ٦

مثِّل كلا من الدوال التالية وأوجد لكل منها الدورة ، الإزاحة الأفقية ، الإزاحة الرأسية ، التردد ، والمدى والسعة:

٩) ص = $\frac{١}{٢}$ جتا (٢س + ٢ π) + ٤

ب) ص = $\frac{١}{٢}$ ١ جا ٥ (س $-\frac{\pi ٢}{٢}$) $-$ ١

نتيجة

للدالة ص = م جاب (س + جـ) + هـ ، ص = م جتاب (س + جـ) + هـ

تكون: الإزاحة الأفقية Phase Shift = جـ وحدة إلى اليسار إذا كان جـ > ٠ ، وإلى اليمين إذا كان جـ < ٠

الإزاحة الرأسية Vertical Shift = هـ إلى الأعلى إذا كان هـ > ٠ ، وإلى الأسفل إذا كان هـ < ٠

مثال ٥

إذا كان ص = ٢ جا ٤ (س + $\frac{\pi}{٣}$) + ١ فحدد كلا من المدى ، الدورة ، الإزاحة الأفقية ، والإزاحة الرأسية.

الحل

المدى = [−١ ، ٣] الدورة = $\frac{٢\pi}{٤}$ = $\frac{\pi}{٢}$ ، الإزاحة الأفقية = $\frac{\pi}{٣}$ لجهة اليسار

الإزاحة الرأسية = وحدة واحدة للأعلى

مثال ٦

ارسم منحنى ص = ظا ٣ س حيث س ∈ ح ، وحدد الدورة ، والقيمة العظمى ،والقيمة الصغرى

الحل

س	٠	$\frac{\pi}{٦}$	$\frac{\pi}{٤}$	$\frac{\pi}{٣}$	$\frac{\pi}{٢}$	$\frac{٢\pi}{٣}$	$\frac{٣\pi}{٤}$	π	$\frac{٧\pi}{٦}$	$\frac{٥\pi}{٤}$	$\frac{٥\pi}{٣}$	$\frac{٣\pi}{٢}$	٢π	$\frac{٧\pi}{٣}$	$\frac{٨\pi}{٣}$	$\frac{٩\pi}{٣}$	$\frac{١٠\pi}{٣}$	$\frac{١١\pi}{٣}$
ظا ٣س	٠	٠٫٠٥٨	١	١٫٧٣	∞	١٫٧٣	١	٠	-٥٨	-١	١٫٧٣	-٥٥	٠	١٫٧٣	١٫٧٣			
ظا س	٠	∞	-١	٠	∞	٠	-١	٠	-١	-١	٠	∞	٠	٠	٠			

يلاحظ من الشكل أن منحنى

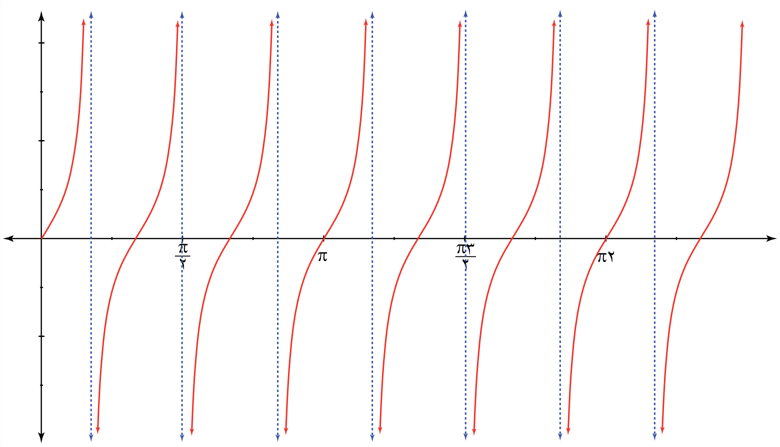
ص = ظاس يعيد نفسه بعد π

الدورة = π

بينما ص = ظا٣س تكون دورته $\frac{\pi}{٣}$

القيم العظمى للدالة ص = ظا م س = ∞

القيم الصغرى للدالة ص = ظا م س = $-\infty$



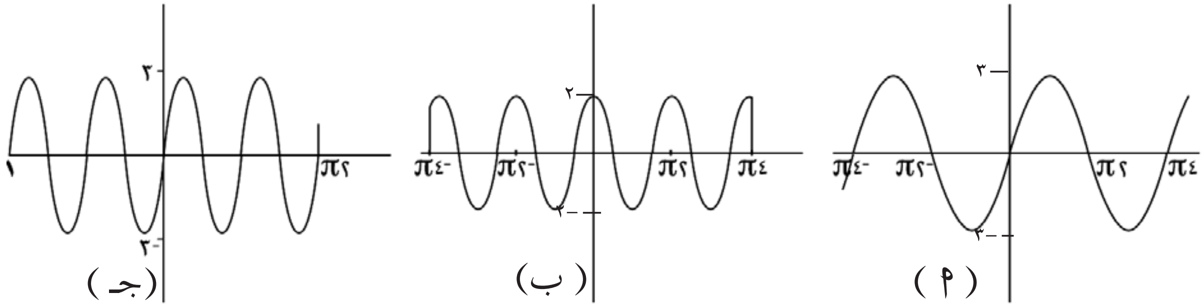
تدريب ٧

مثِّل منحنى الدالة ص = ٣ ظا ٢ (س + ١٥) −١ وقارنه بمنحنى الدالة ص = ظا س ثم أوجد الدورة، والقيم العظمى والصغرى ، والإزاحة الرأسية والإزاحة الأفقية.

١) حدد السعة والدورة والتردد لكل من الدوال التالية:

أ) ص = ٢ جتا ٦ س ب) ص = ٣ جا $\frac{٣}{٢}$ س

٢) اذكر السعة والدورة والتردد لكل من الدوال الممثلة ثم اكتب الدالة التي تمثلها



٣) حدد السعة والدورة والإزاحة الأفقية ، والإزاحة الرأسية للدوال:

أ) ص = ٣ جا (٢س + π) ب) ص = −٢ جتا (٣ س − $\frac{٣π}{٤}$) +٢

٤) إذا كان فرق الجهد لدارة كهربائية معينة تعطى بالعلاقة ف = ٦ جتا ٩٠ π ن حيث ن الزمن بالثواني فأوجد السعة ، والدورة والتردد للتيار

٥) تردد شوكة رنانة ١٩٦ ذبذبة في الثانية فإذا كانت السعة ٠,٠٤ مم فأوجد معادلة موجه الصوت الصادرة (المعادلات الصوتية تأخذ شكل منحنى الجيب أو جيب التمام)

٦) إذا مثل صوت موسيقي بالمعادلة ص = ٠,٠٠٤ جا (٣٠٠π س + ١٥٠π) فأوجد السعة ، والدورة والإزاحة الأفقية.

٧) وترين لآلة موسيقية يصدران أمواجا وفق الدوال التالية

$ص_١$ = جا ٢ π س ، $ص_٢$ = جا٣ π س

مثل الدالتين بيانيا على نفس المستوى ثم مثل على المستوى ذاته ص = جا ٢ π س + جا٣π س

٨) إذا كانت أمواج المد في البحر تمثل بالمعادلة ص = ٢ جا (س − $\frac{π}{٤}$) + ٥ جاس

فارسم بيان الدالة وأوجد الدورة والسعة.

٩) يستخدم الأطباء أحيانا الشوكة الرنانة لفحص المصابين بمشكلات سمعية – الموجات الصوتية التي تنتجها الشوكة الرنانة يمكن تمثيلها بمنحنى الجيب . اعتمد على ذلك بالإجابة على الآتي:

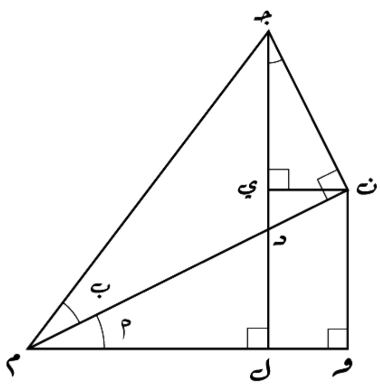
أ) إذا كان سعة دالة الجيب تساوي ٠,٢٥ فاكتب معادلة الموجة الصوتية للشوكة الرنانة إذا كان التردد للموجة يساوي ٦٤، ٢٥٦، ٥١٢ .

ب) كيف يمكن مقارنة فترات الأمواج الصوتية ؟

المتطابقات

م) متطابقة ضعف الزاوية Double Angle Identities

م) جا٢م   ب) جتا٢م   جـ) ظا٢م



لاحظ الشكل المقابل : الزاوية ى حـ ن = الزاوية م لماذا ؟

جا (م + ب) = $\frac{\text{حـ ل}}{\text{حـ م}}$

= $\frac{\text{حـ ى}}{\text{حـ م}}$ + $\frac{\text{ى ل}}{\text{حـ م}}$

= $\frac{\text{حـ ى}}{\text{حـ م}}$ + $\frac{\text{ن و}}{\text{حـ م}}$ حيث ى ل = ن و لماذا؟

وبضرب النسبة الأولى بـ $\frac{\text{حـ ن}}{\text{حـ ن}}$ والنسبة الثانية بـ $\frac{\text{م ن}}{\text{م ن}}$ ينتج

$\frac{\text{حـ ى}}{\text{حـ م}}$ × $\frac{\text{حـ ن}}{\text{حـ ن}}$ + $\frac{\text{ن و}}{\text{حـ م}}$ × $\frac{\text{م ن}}{\text{م ن}}$ فسر لماذا ؟

= $\frac{\text{حـ ى}}{\text{حـ ن}}$ × $\frac{\text{حـ ن}}{\text{حـ م}}$ + $\frac{\text{ن و}}{\text{م ن}}$ × $\frac{\text{م ن}}{\text{حـ م}}$

= جتام × جاب + جام × جتا ب

∴ جا (م + ب) = جام جتا ب + جا ب جتام ... (١)

ضع ب = م ⟵ جا٢م = جا مجتا م + جا مجتا م

∴ جا٢م = ٢ جام جتام ... (٢)

ضع − ب بدلاً من ب ينتج

جا [م + (− ب)] = جام جتا (− ب) + جتام جا (− ب)

جا (م − ب) = جام جتا ب − جاب جتام ... (٣)

تدريب ١

استخدم الشكل نفسه في إثبات أن:

جتا (م + ب) = جتا م جتاب − جا م جاب واستنتج مفكوك كل من :

جتا (٢م) ، جتا (م − ب)

مثال ١

أوجد جا٧٥°

الحل

جا٧٥° = جا (٣٠° + ٤٥°) = جا٣٠° جتا٤٥° + جا٤٥° جتا٣٠°

= $\frac{١}{٢} \times \frac{١}{\sqrt{٢}} + \frac{١}{\sqrt{٢}} \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} = \frac{١ + \sqrt{٣}}{٢\sqrt{٢}} =$ ٠,٩٧

مثال ٢

أوجد ظا (م + ب) واستنتج من ذلك ظا٢م ، ظا (م − ب)

الحل

$$ظا\ (م+ب) = \frac{جا\ (م+ب)}{جتا\ (م+ب)} = \frac{جام\ جتا\ ب + جتام\ جا\ ب}{جتام\ جتا\ ب - جام\ جا\ ب}$$

وبقسمة كل من البسط والمقام على جتام جتا ب $\neq$. يكون:

$$ظا\ (م+ب) = \frac{\frac{جام\ جتا\ ب}{جتام\ جتا\ ب} + \frac{جتام\ جا\ ب}{جتام\ جتا\ ب}}{\frac{جتام\ جتا\ ب}{جتام\ جتا\ ب} - \frac{جام\ جا\ ب}{جتام\ جتا\ ب}}$$

$$= \frac{ظام + ظا\ ب}{١ - ظام\ ظا\ ب} \longleftarrow ظا٢م = \frac{٢ظا\ م}{١ - ظا^{٢}م}$$ لماذا ؟

عند وضع − ب بدلا من ب ينتج:

$$ظا\ (م-ب) = \frac{ظام + ظا\ (-ب)}{١ - ظام\ ظا\ (-ب)} = \frac{ظا\ م - ظا\ ب}{١ + ظام\ ظا\ ب}$$

تدريب ٢

فسر وجود إشارة السالب في المقام في مفكوك ظا (م+ ب) ووجود إشارة السالب في البسط في مفكوك ظا (م− ب).

نتيجة

١) جا (م + ب) = جام جتاب + جتام جا ب $\longleftrightarrow$ جا٢م = ٢ جام جتام

٢) جتا (م + ب) = جتام جتا ب − جام جا ب $\longleftrightarrow$ جتا٢م = جتا^{٢}م − جا^{٢}م

٣) $ظا\ (م+ب) = \frac{ظام + ظا\ ب}{١ - ظام\ ظا\ ب} \longleftrightarrow ظا٢م = \frac{٢ظام}{١ - ظا^{٢}م}$ ، ظام ظا ب $\neq$ ١

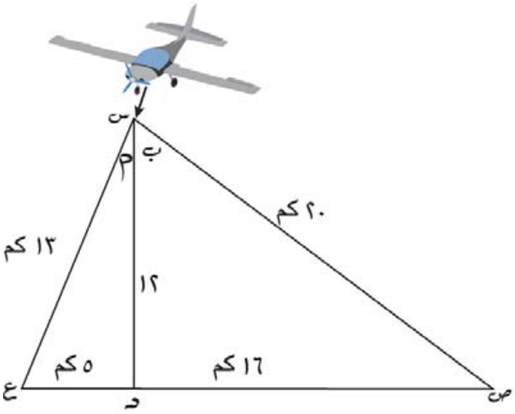
٤) جا (م − ب) = جام جتاب − جتام جاب

٥) جتا (م − ب) = جتام جتاب + جام جاب

٦) $ظا\ (م-ب) = \frac{ظام - ظاب}{١ + ظام\ ظاب}$ ، ظام ظاب $\neq$ −١

مثال ٣

تطير طائرة نفاثة على ارتفاع ١٢ كم وتستطيع أن ترصد الأجسام على الأرض من أحد الجوانب لمسافة ١٣ كم ومن الجانب الآخر لمسافة ٢٠ كم ما قيمة جتا الزاوية بين الإتجاهين؟



الحل

من القياسات المعطاة نستطيع أن نجد:

ص د = ١٦ ، د ع = ٥

جا أ = $\frac{٥}{١٣}$ ، جتا أ = $\frac{١٢}{١٣}$

جا ب = $\frac{١٦}{٢٠}$ ، جتا ب = $\frac{١٢}{٢٠}$

جتا (أ + ب) = جتا أ جتا ب − جا أ جا ب

= $\frac{١٢}{١٣}$ × $\frac{١٢}{٢٠}$ − $\frac{٥}{١٣}$ × $\frac{١٦}{٢٠}$

= $\frac{٣٦}{٦٥}$ − $\frac{٢٠}{٦٥}$

= $\frac{١٦}{٦٥}$

تدريب ٣

اثبت صحة المتطابقة جتا ٢θ = $\frac{\text{١ − ظا}^{٢}\,\theta}{\text{قا}^{٢}\,\theta}$

مثال ٤

اثبت أن جا θ = جتا ($\frac{\pi}{٢}$ − θ) (جيب أي زاوية يساوي جيب تمام المتممة)

الحل

الطرف الأيسر = جتا ($\frac{\pi}{٢}$ − θ)

= جتا $\frac{\pi}{٢}$ جتا θ + جا $\frac{\pi}{٢}$ جا θ

= صفر + جا θ

= جا θ   الطرف الأيمن

تدريب ٤

برهن صحة المتطابقات الآتية :

أ) ظا (أ+٤٥°) − ظا (أ − ٤٥°) = ٢ ظا ٢أ

ب) جتا ٣أ = ٤ جتا^{٣} أ − ٣ جتا أ

جـ) ظتا أ − ظا أ = $\frac{\text{٢ جتا ٢أ}}{\text{جا ٢أ}}$

د) جا^{٢} ب = $\frac{١}{٢}$ (١ − جتا ٢ ب)

هـ) ظتا أ = $\frac{\text{١ + جتا ٢أ}}{\text{٢ جا أ جتا أ}}$

و) جا ٤أ = ٤ جا أ جتا أ جتا ٢أ

ب) متطابقات أنصاف الزوايا Half Angle Identities

م) جا $\frac{\text{م}}{٢}$ ب) جتا $\frac{\text{م}}{٢}$ جـ) ظا $\frac{\text{م}}{٢}$

استخدم قانون ضعف الزاوية

جتا٢ب = جتا^{٢}ب − جا^{٢}ب

= ٢ جتا^{٢}ب − ١   ضع ٢ب = م

∴ جتا م = ٢ جتا^{٢} $\frac{\text{م}}{٢}$ − ١ ⟵ جتا^{٢} $\frac{\text{م}}{٢}$ = $\frac{\text{جتا م} + ١}{٢}$

∴ جتا $\frac{\text{م}}{٢}$ = $\mp\sqrt{\frac{\text{جتا م} + ١}{٢}}$

تدريب ٥

أثبت أن جا $\frac{\text{م}}{٢}$ = $\mp\sqrt{\frac{١ - \text{جتا م}}{٢}}$ واستنتج قيمة ظا $\frac{\text{م}}{٢}$

مثال ٥

م) أوجد قيمة ظا $\frac{\text{م}}{٢}$ إذا كان ظا م = $-\frac{٤}{٣}$ ب) اثبت أن قتا م = $\frac{١ + \text{ظا}^{٢}\frac{\text{م}}{٢}}{٢\,\text{ظا}\frac{\text{م}}{٢}}$

جـ) اثبت أن $\frac{\text{جا م}}{١ + \text{جتا م}} = \frac{١ - \text{جتا م}}{\text{جا م}}$

الحل

م) ظا م = $\frac{٢\,\text{ظا}\frac{\text{م}}{٢}}{١ - \text{ظا}^{٢}\frac{\text{م}}{٢}} = -\frac{٤}{٣}$

∴ ٦ ظا $\frac{\text{م}}{٢}$ = ٤ ظا^{٢} $\frac{\text{م}}{٢}$ − ٤ ⟵ ٢ظا^{٢} $\frac{\text{م}}{٢}$ − ٣ظا $\frac{\text{م}}{٢}$ − ٢ = صفر

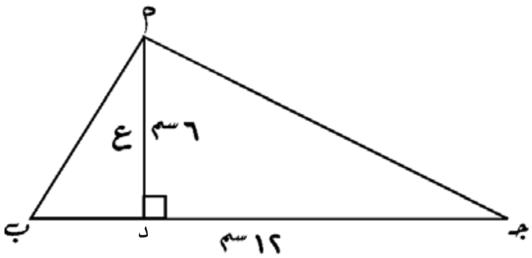
∴ (٢ظا $\frac{\text{م}}{٢}$ + ١)(ظا $\frac{\text{م}}{٢}$ − ٢) = صفر ومنها ظا $\frac{\text{م}}{٢}$ = $-\frac{١}{٢}$ ، ٢

ب) $\frac{١ + \text{ظا}^{٢}\frac{\text{م}}{٢}}{٢\,\text{ظا}\frac{\text{م}}{٢}} = \frac{\text{قا}^{٢}\frac{\text{م}}{٢}}{٢\,\text{ظا}\frac{\text{م}}{٢}} = \frac{\text{جتا}\frac{\text{م}}{٢}}{٢\,\text{جا}\frac{\text{م}}{٢}\,\text{جتا}^{٢}\frac{\text{م}}{٢}} = \frac{١}{\text{جا م}}$ = قتا م

جـ) الطرف الأيمن = $\frac{\text{جا م}}{١ + \text{جتا م}} \times \frac{١ - \text{جتا م}}{١ - \text{جتا م}} = \frac{\text{جا م}(١ - \text{جتا م})}{\text{جا}^{٢}\text{م}} = \frac{١ - \text{جتا م}}{\text{جا م}}$ = الطرف الأيسر

جـ) مساحة المثلث Area of Triangle

تدريب ٦



أوجد مساحة △ م ب جـ إذا كان ب جـ = ١٢ سم
والإرتفاع م د = ٦ سم.

لعلك تذكر أن مساحة المثلث
= $\frac{١}{٢}$ القاعدة × الارتفاع = $\frac{١}{٢}$ حـ ب × ع
لكن $\frac{ع}{م ب}$ = جاب ومنه ع = م ب جاب
وكذلك $\frac{ع}{م جـ}$ = جاحـ ومنه ع = م حـ جاحـ
مساحة △ م ب حـ = $\frac{١}{٢}$ حـ ب × م ب جاب = $\frac{١}{٢}$ حـ ب × م حـ جاحـ
يمكن إثبات أن مساحة المثلث أيضا تساوي $\frac{١}{٢}$ م حـ × م ب جام
سنرمز للضلع ب حـ المقابل للزاوية م بـ مَ، وبالمثل م حـ بـ بَ، م ب، بـ حَ

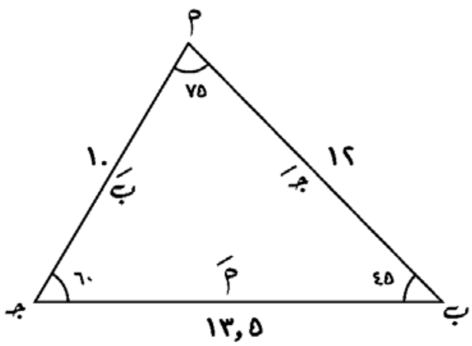
نتيجة

مساحة المثلث تساوي نصف حاصل ضرب أي ضلعين في جا الزاوية بينهما أي:
م △ م ب جـ = $\frac{١}{٢}$ مَ × حَ جا ب = $\frac{١}{٢}$ بَ × حَ جا م = $\frac{١}{٢}$ مَ × بَ جا حـ

مثال ٦

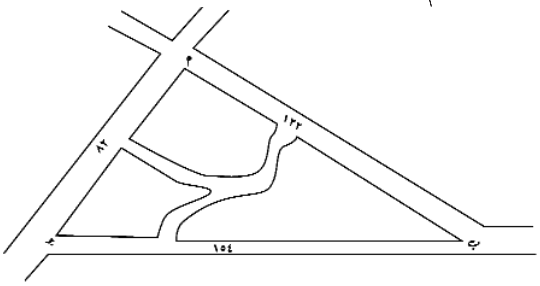
أوجد مساحة المثلث م ب حـ إذا كان حَ = ١٢ ، بَ = ١٠ ، مَ = ١٣,٥
وكانت ق ($\hat{م}$) = ٧٥° ، ق ($\hat{ب}$) = ٤٥° ، ق ($\hat{حـ}$) = ٦٠° وتحقق من صحة إجابتك

الحل



مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ مَ × حَ جا ٤٥°
= $\frac{١}{٢}$ × حَ × مَ × $\frac{١}{\sqrt{٢}}$
= ٦ × ١٣,٥ × ٠,٧١
= ٥٧,٣ سم^{٢}
للتحقق نحسب المساحة بالقانون الأصلي
$\frac{١}{٢}$ ب حـ × ع = $\frac{١}{٢}$ × ١٣,٥ × ٨,٥ فسر لماذا؟
= ٥٧,٣ سم^{٢}

أراد أحد المهندسين في بلدية إحدى المدن أن يحسب مساحة حي سكني محاط بثلاثة شوارع مستقيمة فقام بالخطوات التالية:



١) قاس أطوال الشوارع المحيطة بالحي فوجدها ١٥٤م ، ١٢٢م ، ٨٢ مترا كما هي موضحه على الشكل.

٢) وجد نصف المحيط فكان

$$ح = \frac{١٥٤ + ١٢٢ + ٨٢}{٢} = ١٧٩م$$

٣) وجد الفرق بين نصف المحيط وأطوال كل من الشوارع المحيطة :

ح − أَ = ١٧٩ − ١٥٤

= ٢٥

ح − بَ = ١٧٩ − ١٢٢

= ٥٧

ح − جَـ = ١٧٩ − ٨٢

= ٩٧

٤) استخدم العلاقة م = $\sqrt{ح(ح - أَ)(ح - بَ)(ح - جَـ)}$

المساحة م = $\sqrt{١٧٩ \times ٢٥ \times ٥٧ \times ٩٧}$ = ٤٩٧٤م^{٢}

قام أحد زملاء المهندس بقياس الزاوية ب فوجدها ٣٢° تقريبا

حسب مساحة الحي من خلال تطبيق القانون، م = $\frac{١}{٢}$ أ ب × ب حـ جا ب

المساحة م = $\frac{١}{٢}$ × ١٢٢ × ١٥٤ × جا ٣٢°

= ٩٣٩٤ × ٠,٥٢٩٩

= ٤٩٧٨ متر مربع

وهي قيمة قريبة جدا مما حصل عليه المهندس وقد يعود الفرق إلى خطأ القياس

تدريب ٧

ارسم أي مثلث وقم بقياس أضلاعه واستخدم طريقة المهندس في إيجاد مساحته ثم تحقق من صحة ذلك بطريقة أخرى

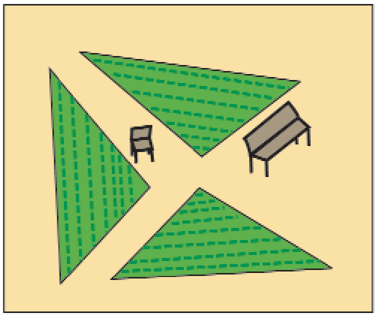
نتيجة

مساحة المثلث إذا علمت أطوال أضلاعه م = $\sqrt{ح(ح - أَ)(ح - بَ)(ح - حَـ)}$

حيث ح ترمز إلى نصف المحيط ، أَ، بَ، حَـ ترمز إلى أطوال أضلاع المثلث

مثال ٧

يراد زراعة نبات الباذنجان في أحواض مثلثة الشكل أبعادها ٣,٥م ، ٢,٥م، ٢م فإذا خصص لكل نبتة ٤٠٠ سم^٢ فكم نبته يمكن زراعتها في كل حوض؟



الحل

مساحة المنطقة المثلثة = $\sqrt{٤\,(٤-٣,٥)\,(٤-٢,٥)\,(٤-٢)}$

= $\sqrt{٤ \times ٠,٥ \times ١,٥ \times ٢}$

= $\sqrt{٦}$

= ٢,٤٥ م^٢

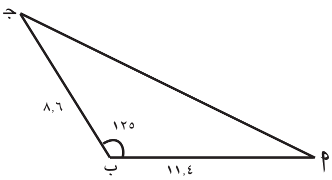
= ٢,٤٥ × ١٠٠٠٠ = ٢٤٥٠٠ سم^٢

∴ عدد النبتات التي يمكن زراعتها = $\frac{٢٤٥٠٠}{٤٠٠}$ = ٦١ نبتة فسر الإجابة

مثال ٨

أوجد مساحة المثلث أب جـ إذا كان أب = ١١,٤ سم، ب جـ = ٨,٦ سم والزاوية بينهما ١٢٥°

الحل



م = $\frac{١}{٢}$ أب . ب جـ جا ١٢٥°

= $\frac{١}{٢}$ × ١١,٤ × ٨,٦ × ٠,٨٢

= ٤٠,٢ سم^٢

مثال ٩

أوجد مساحة قطعة أرض مثلثة الشكل أطوال أضلاعها ١٨، ٢٠ ، ٢٢ متر لأقرب متر مربع .

الحل

محيط القطعة = ١٨+٢٠+٢٢=٦٠ متر

نصف المحيط = $\frac{٦٠}{٢}$ = ٣٠ متر

المساحة = $\sqrt{ح(ح-أَ)\,(ح-بَ)\,(ح-جَ)}$

= $\sqrt{٣٠ \times ١٢ \times ١٠ \times ٨}$

≃ ١٧٠ م^٢

تدريب ٨

أوجد مساحة حديقة مثلثة الشكل أطوال أضلاعها ١٨، ١٩، ١١م.

د) قانون الجيوب Sine Law

من قانون المساحة السابق أمكن التوصل إلى العلاقة التالية:

$$\text{مَ} \,.\, \text{حـَ جا ب} = \text{بَ} \,.\, \text{حـَ جا م} = \text{مَ} \,.\, \text{بَ جا جـ}$$

وبالقسمة على مَ بَ جـَ نحصل على :

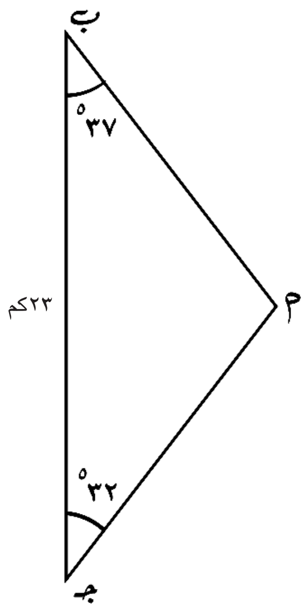
$$\frac{\text{جا ب}}{\text{بَ}} = \frac{\text{جا م}}{\text{مَ}} = \frac{\text{جا حـ}}{\text{حـَ}} \quad \text{أو} \quad \frac{\text{مَ}}{\text{جا م}} = \frac{\text{بَ}}{\text{جا ب}} = \frac{\text{حـَ}}{\text{جا حـ}}$$

نتيجة

لأي مثلث م ب جـ يكون:

$\frac{\text{مَ}}{\text{جا م}} = \frac{\text{بَ}}{\text{جا ب}} = \frac{\text{حـَ}}{\text{جا حـ}}$ حيث مَ الضلع المقابل للزاوية م ، بَ الضلع المقابل للزاوية ب ، حـَ الضلع المقابل للزاوية حـ

مثال ١٠م



رصدت سفينة م من نقطتين ب ، حـ البعد بينهما ٢٣ كم فكانت الزاوية م ب جـ = ٣٧° وقياس الزاوية م حـ ب = ٣٢° ، أوجد بعد السفينة عن النقطة ب .

الحل

$$\frac{\text{مَ}}{\text{جا م}} = \frac{\text{بَ}}{\text{جا ب}} = \frac{\text{حـَ}}{\text{جا حـ}}$$

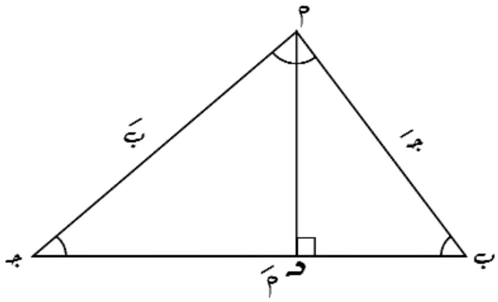
$$\frac{٢٣}{\text{جا } ١١١^\circ} = \frac{\text{بَ}}{\text{جا } ٣٧^\circ} = \frac{\text{حـَ}}{\text{جا } ٣٢^\circ}$$

$\text{حـَ} = \frac{٢٣ \text{ جا } ٣٢^\circ}{\text{جا } ١١١^\circ} \approx ١٣$ كم ،وهو بعد السفينة عن النقطة ب

تدريب ٩

من المثال السابق أوجد بعد السفينة عن النقطة جـ.

هـ) قانون جيب التمام Cosine Law



مثال ١١

في المثلث أ ب حـ أوجد طول حَـ
بدلالة كل من بَ ، أَ وجتا الزاوية ب حـ أ

الحل

باستخدام نظرية فيثاغورس

حَـ^{٢} = $\overline{\text{ب د}}^{\,٢}$ + $\overline{\text{أ د}}^{\,٢}$

= (ب حـ − د حـ)^{٢} + $\overline{\text{أ د}}^{\,٢}$

= $\overline{\text{ب حـ}}^{\,٢}$ − ٢ ب حـ . د حـ + $\cancel{\text{د حـ}^{٢}}$ + بَ^{٢} − $\cancel{\text{د حـ}^{٢}}$

= أَ^{٢} − ٢ أَ . د حـ + بَ^{٢} لكن د حـ = بَ جتا حـ

حَـ^{٢} = أَ^{٢} + بَ^{٢} − ٢ أَ بَ جتا حـ

تدريب ١٠

استخدم نفس الأسلوب وبرهن أن أَ^{٢} = بَ^{٢} + حَـ^{٢} − ٢ بَ حَـ جتا أ وقياسا على ذلك اكتب ما يساويه بَ^{٢}.

نتيجة

لأي مثلث أ ب جـ فإن:

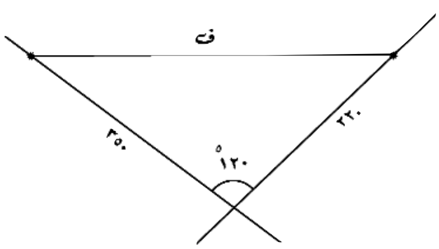
أَ^{٢} = بَ^{٢} + جَ^{٢} − ٢ بَ جَ جتا أ ⟵ جتا أ = $\dfrac{\text{بَ}^{٢} + \text{جَ}^{٢} - \text{أَ}^{٢}}{٢\ \text{بَ جَ}}$

بَ^{٢} = أَ^{٢} + جَ^{٢} − ٢ أَ جَ جتا ب ⟵ جتا ب = $\dfrac{\text{أَ}^{٢} + \text{جَ}^{٢} - \text{بَ}^{٢}}{٢\ \text{أَ جَ}}$

جَ^{٢} = أَ^{٢} + بَ^{٢} − ٢ أَ بَ جتا جـ ⟵ جتا جـ = $\dfrac{\text{أَ}^{٢} + \text{بَ}^{٢} - \text{جَ}^{٢}}{٢\ \text{أَ بَ}}$

مثال ١٢

يتقاطع شارعان بزاوية ١٢٠° (لاحظ الشكل) فإذا وقع منزلك على أحد الشارعين ويبعد عن نقطة التقاطع ٢٢٠ مترا ويقع منزل صديقك على الشارع الآخر ويبعد عن نقطة التقاطع ٣٥٠ مترا فما البعد المباشر بين منزلك ومنزل صديقك؟



الحل

ف^{٢} = (٢٢٠)^{٢} + (٣٥٠)^{٢} − ٢ × ٢٢٠ × ٣٥٠ جتا ١٢٠°

= ٤٨٤٠٠ + ١٢٢٥٠٠ + ٧٧٠٠٠ = ٢٤٧٩٠٠

ف = ٤٩٧,٩ متر

١) أوجد قيمة جا $\frac{\pi}{12}$

٢) إذا كان جا٩ $= \frac{\sqrt{3}}{2}$ ، ظاب $= \frac{-15}{8}$، $\frac{\pi}{2} <$ ٩ $< \pi$ ، $\frac{3\pi}{2} <$ ب $< 2\pi$

فأوجد قيمة جا (٩ + ب) ، جا (٩ − ب)

٣) اثبت صحة المتطابقات الآتية:

٩) جتا (2θ) = ١ − ٨ جا^2 $\frac{\theta}{2}$ جتا^2 $\frac{\theta}{2}$

ب) ٢ جتا (٩ + ب) جا (٩ − ب) = جا (٢٩) − جا(٢ب)

جـ) (جا θ + جتا θ)^2 = جا2θ + ١

د) جا4θ = ٤ جاθ جتاθ جتا2θ

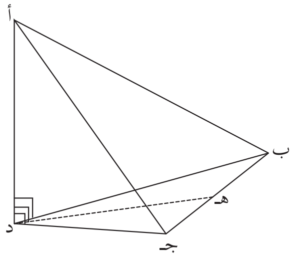
هـ) ظا٩ = $\frac{\text{جا٢٩}}{\text{١ + جتا٢٩}}$

٤) ٩ ب جـ مثلث متطابق الضلعين طول كل منهما ل وقياس الزاوية بين الضلعين المتطابقين = ٩، أثبت أن مساحة المثلث تعطى بالعلاقة ل جا $\frac{٩}{2}$ × ل جتا $\frac{٩}{2}$ وتحقق من النتيجة عندما تكون ٩ = ٩٠°

٥) قطعة أرض على شكل مثلث طول أحد الأضلاع ١٥٠ متراً وطول ضلع آخر ١٩٠ مترا والزاوية بينهما ٧٥° احسب:

٩) طول الضلع الثالث .

ب) مساحة قطعة الأرض.



٦) ٩ب جـ د هرم ثلاثي فيه ٩ د عمود على كل من $\overline{\text{ب د}}$ ، $\overline{\text{د هـ}}$ ، $\overline{\text{حـ د}}$

وكذلك $\overline{\text{٩هـ}} \perp \overline{\text{ب حـ}}$ ، $\overline{\text{د هـ}} \perp \overline{\text{ب حـ}}$ ، حيث هـ نقطة على $\overline{\text{ب جـ}}$

فإذا كانت مساحة الوجه ٩ب حـ = م$_1$، ومساحة الوجه ٩ب د = م$_2$

ومساحة الوجه ٩ حـ د = م$_3$، ومساحة القاعدة ب حـ د = م$_4$ فاثبت أن

م$_1^2$ = م$_2^2$ + م$_3^2$ + م$_4^2$ − ٢م$_2$ م$_3$ جتاθ

٧) يتشكل مثلث برمودا أو مثلث الموت كما يسمونه من ثلاثة رؤوس في المحيط الأطلسي إحداها مدينة ميامي في ولاية فلوريدا في الولايات المتحدة الأمريكية فإذا كانت أبعاد هذا المثلث هي ١٦٦٤كم ، ١٦٦١كم ، ١٦٠١كم فاحسب مساحة المثلث.

٨) اثبت أنه لكل مثلث ٩ب حـ فإن ٩َ = بَ جتاحـ + حـَ جتاب.

٩) هل يمكن رسم مثلث يكون فيه أحد الأضلاع أكبر من نصف المحيط ؟ اعط تفسيرا لإجابتك.

حل المثلث Solving The Triangle

لقد سبق أن درست موضوع حل المثلث القائم في الصفوف السابقة ولإلقاء مزيد من الضوء على هذا الموضوع أجب عن الأسئلة التالية:

١) كم زاوية للمثلث؟

٢) ما مجموع قياسات زوايا المثلث؟

٣) ما عدد أضلاع المثلث؟

٤) أي من أطوال القطع التالية يمكن أن تشكل مثلثا ؟ وضح إجابتك

ﻫ) (٣ ، ٤ ، ٥) ، ب) (٢ ، ٤ ، ٧) ، جـ) (٣ ، ٣ ، ٥) ، د) (٤ ، ٥ ، ٩)

٥) ما المقصود بحل المثلث؟

٦) ما المعلومات التي تكفي لحل المثلث؟

٧) ما المعلومات التي تكفي لرسم المثلث؟وهل هي نفسها التي تكفي لحل المثلث؟

تدريب ١

استفد من إجابتك عن الأسئلة السابقة ، وحل المثلث القائم ﻫ ب حـ الذي فيه :

ﻫَ = ٦ ، $\hat{\text{ب}}$ قائمة ، ق ($\hat{\text{حـ}}$) = ٤٥°

نتيجة

لحل أي مثلث لابد من معرفة ثلاثة عناصر من عناصره الستة يكون أحدها ضلع.
وهنالك عدة حالات يمكن معها حل المثلث أو رسمه هي:

ﻫ) إذا علم ثلاثة أضلاع

ب) إذا علم ضلعان وزاوية محصورة

جـ) إذا علم ضلع وزاويتان

د) إذا علم ضلعان وزاوية غير محصورة (الحالة المبهمة).

هـ) إذا علم ضلع ووتر والقائمة

مثال ١

حل المثلث ﻫ ب حـ إذا كان ﻫَ = ٥ ، بَ = ٧ ، حـَ = ٩

الحل

باستخدام قانون جيب التمام ، جتا حـ = $\frac{\text{ﻫ}^{٢} + \text{ب}^{٢} - \text{جـ}^{٢}}{٢\text{ﻫ ب}}$ = $\frac{٢٥ + ٤٩ - ٨١}{٧٠}$ = $\frac{-٧}{٧٠}$ = − ٠,١

∴ ق ($\hat{\text{حـ}}$) = ٩٦°

وباستخدام قانون الجيوب $\frac{٥}{\text{جا ﻫ}}$ = $\frac{٧}{\text{جا ب}}$ = $\frac{٩}{٠,٩٩}$ ⟸ جا ﻫ = $\frac{٥ \times ٠,٩٩}{٩}$ = ٠,٥٥

∴ ق ($\hat{\text{ﻫ}}$) = ٣٣°

∴ ق ($\hat{\text{ب}}$) = ١٨٠° − ٩٦° − ٣٣° = ٥١°

تدريب ٢

أكمل البيانات في الجدول المجاور التي تمثل عناصر المثلث ثم أجب عما يلي:

ق($\hat{\text{أ}}$)	ق($\hat{\text{ب}}$)	ق($\hat{\text{جـ}}$)	أَ	بَ	جـَ	الحالة
؟	٣٠°	٤٥°	؟	١٠	؟	زاويتان وضلع
١٢٠°	؟	؟	؟	٨	١٠	ضلعان وزاوية محصورة
؟	٤٥°	؟	٦	٥	؟	ضلعان وزاوية غير محصورة
؟	؟	؟	٤	٧	٩	ثلاثة اضلاع
؟	٩٠°	؟	؟	١٣	٥	ضلع ووتر وقائمة
؟	٤٥°	؟	٦	٣	؟	ضلعان وزاوية غير محصورة
٥٠°	٧٠°	٦٠°	؟	؟	؟	ثلاثة زوايا

١) كم مثلثا يمكن أن ترسم في كل حالة؟

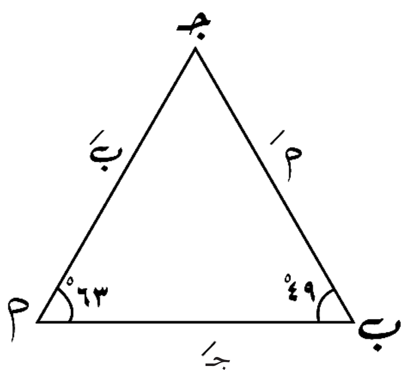
٢) هل هنالك حالة لا يمكن رسم المثلث فيها ؟ أو يمكن رسم أكثر من مثلث؟

٣) دوِّن الحالات التي يكون لها حل وحيد ، والحالات التي يكون لها أكثر من حل ، والحالات التي لا يكون لها حل.

مثال ٢

حل المثلث أ ب جـ إذا كان ق ($\hat{\text{أ}}$) = ٦٣° ، ق ($\hat{\text{ب}}$) = ٤٩° ، جـَ = ٧٨ (زاويتان وضلع)

الحل



ق ($\hat{\text{جـ}}$) = ١٨٠° − ٤٩° − ٦٣° = ٦٨°

باستخدام قانون الجيوب

$$\frac{\text{أَ}}{\text{جا } ٦٣}=\frac{٧٨}{\text{جا}٦٨°}=\frac{\text{بَ}}{\text{جا } ٤٩}$$

$$\text{أَ}=\frac{٧٨\,\text{جا}٦٣°}{\text{جا}٦٨°}\simeq ٧٥$$

$$\text{بَ}=\frac{٧٨\,\text{جا}٤٩°}{\text{جا}٦٨°}\simeq ٦٣$$

مثال ٣

حل المثلث أ ب جـ إذا كان أَ = ١٥ سم ، بَ = ١٢ سم ، ق ($\hat{\text{جـ}}$) = ٧٥° (ضلعان وزاوية محصورة)

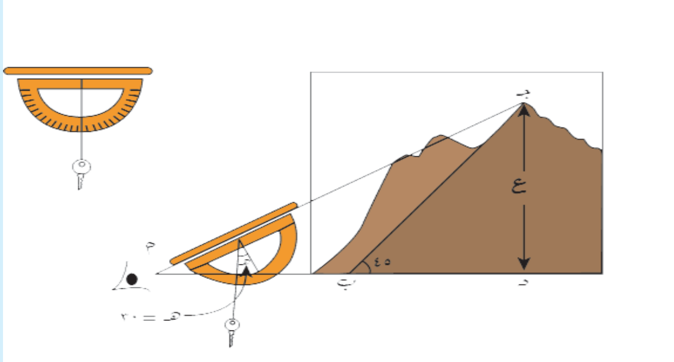
الحل

$$\text{جـَ}^٢=\text{أَ}^٢+\text{بَ}^٢-٢\,\text{أَ}\,\text{بَ}\ \text{جتا جـ}$$

$$= ٢٢٥ + ١٤٤ - ٣٦٠ \times ٠{,}٢٦ = ٢٧٥{,}٤ \Longleftarrow \text{جـَ} = ١٦{,}٦$$

$$\frac{١٦{,}٦}{\text{جا}٧٥}=\frac{١٢}{\text{جاب}} \Longleftarrow \text{جاب}=\frac{١٢\times ٠{,}٩٦٦}{١٦{,}٦}=٠{,}٧$$ ومنها ق ($\hat{\text{ب}}$) = ٤٤°، ق($\hat{\text{أ}}$) = ٦١°

نشاط ١: (قياس ارتفاع بناية أو عمود أو جبل)



الأدوات : منقلة ، قصبة، لاصق ، ثقل ، خيط ، شريط متري طويل

الخطوات :

١) ضع القصبة على قاعدة المنقلة والصقها كما في الشكل.

٢) اربط الثقل في مركز المنقلة واتركه يتدلى رأسياً إلى أسفل.

٣) قف في مكان ما وانظر إلى قمة (البناية أو العمود ، أو الجبل) من خلال القصبة وحدد في هذه اللحظة الزاوية بين الخيط الرأسي والخط الواصل من مركز المنقلة إلى الدرجة (90°) (هـ) وبهذه تحدد زاوية الإرتفاع عند النقطة م

٤) انتقل إلى نقطة أخرى أقرب إلى الجبل مثل ب كما في الشكل وأعد الخطوة ٣ وأوجد زاوية الإرتفاع من النقطة ب

٥) احسب الإرتفاع المطلوب من خلال حل المثلثين م ب حـ ، م د حـ كما هو منفذ في الشكل أعلاه

– ق (حـ $\hat{م}$ ب) = 30° بالقياس

– ق (حـ $\hat{ب}$ م) = 135° مكملة للزاوية حـ ب د التي قيست ووجدت 45°

∴ ق (م $\hat{حـ}$ ب) = $180^\circ - 135^\circ - 30^\circ = 15^\circ$

بتطبيق قانون الجيوب $\frac{100}{\text{جا } 15^\circ} = \frac{\text{حـ ب}}{\text{جا } 30^\circ}$ ومنها حـ ب = $\frac{100 \times \frac{1}{2}}{\text{جا } 15^\circ} = \frac{50}{0{,}26} = 192$ م

من المثلث حـ د ب القائم في د

$\frac{ع}{192} = \text{جا } 45^\circ$

∴ ع = 192 جا 45°

$= 192 \times \frac{1}{\sqrt{2}}$

$= 135{,}8$ م

تدريب ٣

م) قيست زاوية ارتفاع جبل من نقطة على الأرض فوجدت 37° ثم قيست زاوية الإرتفاع من نقطة أخرى أقرب إلى الجبل من النقطة الأولى ،بـ ٢٠ مترا فوجدت 60° فإذا كانت النقطتان وارتفاع الجبل في مستوى رأسي واحد، فاحسب ارتفاع الجبل.

ب) اقترح طريقة لقياس عرض ممر مائي كبير دون عبورة ، ضع قيما افتراضية واحسب المسافة المطلوبة.

الحالة المبهمة Ambiguous Case

إذا علم من المثلث ضلعان وزاوية غير محصورة ولم يكن المثلث قائم الزاوية فإنه أحيانا يمكن رسم مثلث وحيد يحقق الشروط وأحيانا يمكن رسم مثلثين يحققان الشروط وأحيانا أخرى لا يمكن رسم أي مثلث بالشروط المعطاه ،نتيجة لهذه الإمكانات سميت هذه الحالة بالحالة المبهمة، وغالبا ما تعتمد هذه الحلول على متباينة المثلث «مجموع طولي أي ضلعين أكبر من الضلع الثالث» ولمعرفة المزيد عن هذه الحالة نفذ النشاط الآتي :

نشاط ٢: رسم مثلث إذا علم ضلعان وزاوية غير محصورة :

نصف القطر نق	عدد المثلثات
٢	؟
٤	؟
٦	؟
٨	؟
١٠	؟

الأدوات : ورقة ، فرجار ، قلم، منقلة

الخطوات :

١) ارسم قطعة مستقيمة $\overline{\text{ب جـ}}$ بطول لا يقل عن ١٥ سم مثلا

٢) من جـ ارسم قطعة مستقيمة $\overline{\text{أ جـ}}$ بطول ٨سم وتصنع زاوية حادة مع $\overline{\text{ب جـ}}$.

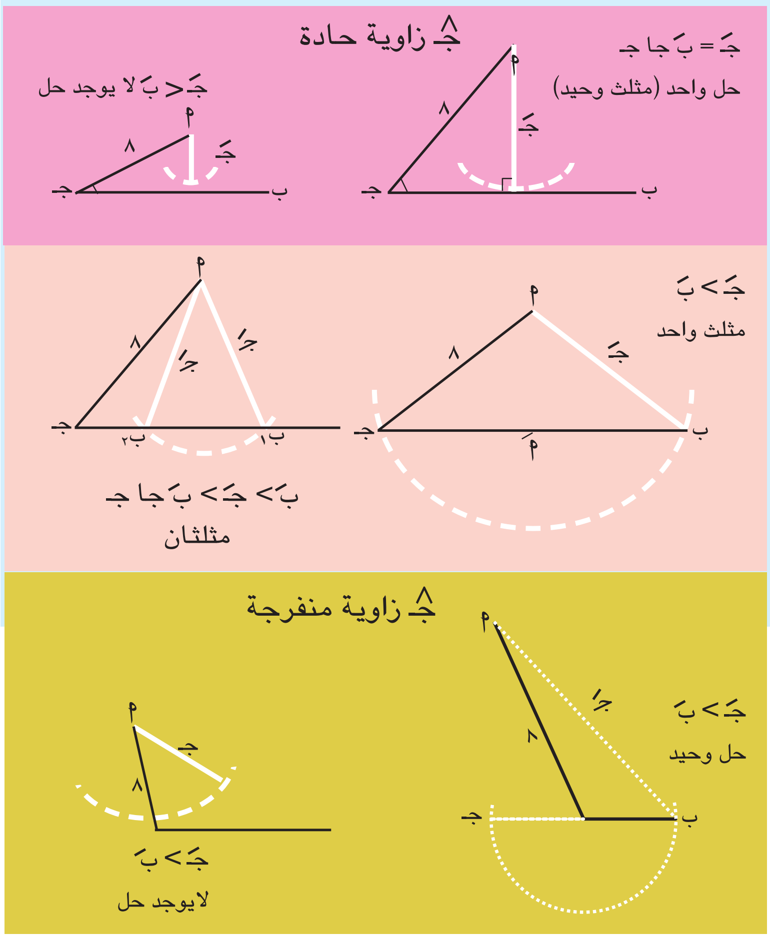
٣) اركز الفرجار في أ وافتح فتحة تساوي طول الضلع أ ب (نق) كما هو موضح في الجدول وارسم قوسا ولاحظ نقاط تقاطعه مع القطعة $\overline{\text{ب جـ}}$ في كل مرة .

٤) صل النقطة أ بنقطة /نقاط تقاطع القوس مع $\overline{\text{ب جـ}}$.

٥) اكمل الجدول لمعرفة عدد المثلثات التي تكونت وتحقق الشروط.

٦) ادرس الرسومات المقابلة وفسر سبب عدم وجود حل أو وجود حل وحيد أو وجود أكثر من حل.

٧) أعد النشاط في حالة الزاوية جـ منفرجة وبين الحالات المختلفة لحل المثلث .



تدريب ٤

كم حلاً للمثلث أ ب جـ إذا كان

أَ = ١٢، جـَ = ٢٠

ق($\hat{\text{جـ}}$) = ٤٥°

١) أوجد القياسات المجهولة للمثلث م ب حـ حيث مَ = ٤ سم، بَ = ٧,٢ سم وقياس ∡ م = ٣٠°

٢) أراد أحد المهندسين أن يجد المسافة بين موقعين يصعب الوصول إليها فاستخدم آلة قياس المسافات ووجد أن بعده عن النقطة الأولى = ١٤٠م وبعده عن النقطة الثانية ٢٠٠ م والزاوية التي تقابل النقطتين ٥٦° استخدم بيانات المهندس واحسب البعد بين النقطتين.

٣) م ب حـ مثلث إذا كان مجموع طولي الضلعين مَ،بَ = ١٤٢ سم ،ق ∡ م = ٤٨°، ق ∡ ب = ٣٢°
أوجد أطوال الأضلاع مَ، بَ ثم أوجد طول الضلع حـَ وقياس الزاوية حـ.

٤) قطعة أرض مثلثة الشكل طول أحد جوانبها ٤٥٢ م وطول جانب آخر ٥٧٢م وقياس الزاوية بينهما ٦٧° أوجد طول الجانب الثالث.

٥) يتقاطع طريقان بزاوية منفرجة . أختير نقطتان م، ب واحدة على كل طريق فإذا كان بعد النقطة م من نقطة التقاطع ٠,١٥ كم وبعد الثانية من نقطة التقاطع ٠,٢٤ كم ، وكان خط النظر بين النقطتين يصنع زاوية ٤٢° مع إحدى الطريقين عند النقطة م . ما قياس الزاوية المنفرجة؟

٦) ما عدد الحلول لكل من الحالات التالية:

م) مَ = ١٢ ، حـَ = ٢٠ ، ق (حـ^) = ٤٧° ؟

ب) مَ = ٢١ ، بَ = ٣٢ ، ق (م^) = ١١٤° ؟

حـ) بَ = ٣٩ ، حـَ = ٤٥ ، ق (حـ^) = ٩٧° ؟

٧) يقع أحد الأبراج العالية على ضفة نهر ومن نقطة م على الضفة الثانية مقابل للبرج مباشرة وجد أن زاوية إرتفاع البرج = ٢٥° ومن نقطة على إمتداد الخط الواصل بين قاعدة البرج والنقطة م وتبعد ٧٠م عن م وجد أن زاوية الارتفاع = ٢١°، مثّل الشكل بالرسم وأوجد ارتفاع البرج وعرض النهر.

٨) حقل مثلث الشكل أبعاده ٤٥٢م ، ٥٧٢م ، ٤٩٥م أوجد قياسات زاوياه.

تمارين ومسائل عامة

١) حوِّل من زوايا نصف قطرية إلى درجات:

أ) $\frac{٢\pi}{٣}$ ب) $٦,٥\pi$

جـ) $-١٢٠ \times \frac{\pi}{٨}$ د) $\frac{٣}{٤}\pi$

٢) حول من درجات إلى زوايا نصف قطرية:

أ) ٣٤٠° ب) ١٣٥٠°

جـ) ٦٣٠° د) ٥٨°

٣) أوجد التقدير الدائري للزاوية التي يصنعها عقربي الساعات والدقائق عندما تكون الساعة الثانية والنصف (٢ : ٣٠).

٤) أوجد النسب المثلثية للزاوية ٩٣٠° .

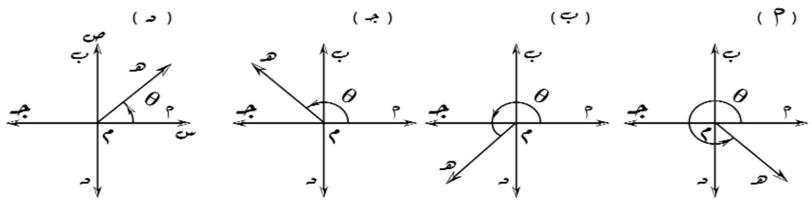
٥) يدور شريط التسجيل $٣٣\frac{١}{٢}$ دورة في الدقيقة ، ما الزاويِّة التي تصنعها نقطة على حافة الشريط؟ وما النسب المثلثية لهذه الزاوية ؟ وما السرعة الزاوية لهذه النقطة في الثانية؟

٦) ما طول قوس من دائرة نصف قطرها ١٠ سم ويقابل زاوية عند المحيط مقدارها $١,٢٥^{\circ\circ}$؟ وما مساحة القطاع الدائري الناتج؟

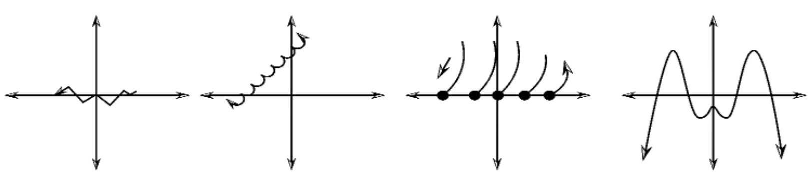
٧) أوجد السرعة الزاويِّة لنقطة على محيط لعبة الدولاب إذا كان الدولاب يدور ٢,٥ دورة في الدقيقة.

٨) يدور قمر صناعي في مدار دائري ويكون على إرتفاع ٢٠٠٠ كم فوق الارض ويكمل دورته كل ٣ ساعات فإذا كان نصف قطر الأرض ٦٤٠٠كم، فأوجد سرعة القمر الصناعي بالكم/ساعة.

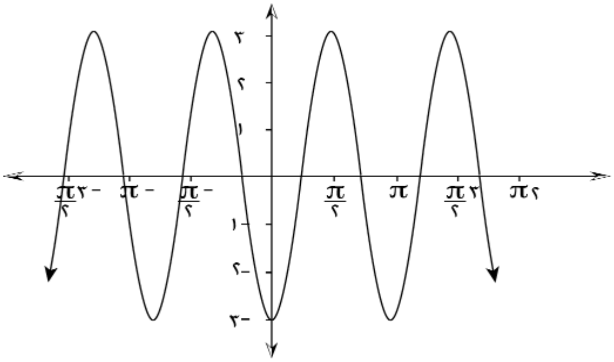
٩) الأشكال جانبا تمثل زوايا في الوضع القياسي حدد لكل منها الزاوية المرجعية ، ثم حدد اشارات النسب للزاوية θ في كل شكل.



١٠) أي من الأشكال المقابلة تعتبر دالة دورية



١١) اكتب معادلة الدالة الدورية المرسومة ثم حدد السعة ، والدورة ، والتردد.



١٢) أوجد سعة الموجة ، والدورة ، والإزاحة الأفقية والإزاحة الرأسية لكل من:

أ) ص = ٢ جتا (س − $\frac{\pi}{\text{٢}}$) + ٥ ب) ص = جا (٢ س + ٣ π) − ١

١٣) رصد قاربان من قمة منارة ترتفع ٣٨ مترا عن سطح البحر فكانتا باتجاه الغرب وزاويتا انخفاضهما °٣٠ ، °٦٠ فما البعد بين القاربين ؟

١٤) غادرت طائرة باتجاه الشرق وبسرعة ٥٤٠ كم/ساعة وبعد $\frac{\text{١}}{\text{٤}}$ساعة غادرت طائرة أخـرى المطار باتجاه °٢٠ شرق الشمال وبسرعة ٥٧٥كم/ساعة كم ستكون المسافة بينهما بعد ساعة من مغادرة الطائرة الثانية؟

١٥) أوجد إرتفاع المثلث أ ب حـ النازل من أ على $\overline{\text{ب حـ}}$ إذا كان أَ = ٢٤ ، بَ = ١٤ ، حَ = ١٨

١٦) حل المثلث أ ب حـ إذا كان أَ = ٢٥ ، بَ = ٤٦ ، ق∠ أ = °٣٧

١٧) أوجد مساحة المثلث أ ب حـ إذا كان أَ = ٣٠ ، بَ = ٤٨ ، حَ = ٦٠

١٨) برهن صحة المتطابقات الآتية:

أ) $\frac{\text{١}}{\text{١ + جا}\,\theta} + \frac{\text{١}}{\text{١ − جا}\,\theta} = \text{٢ قا}^{\text{٢}}\theta$

ب) جا θ = جتا ($\frac{\pi}{\text{٢}}$ − θ)

حـ) جتا (أ − ب) − جتا (أ + ب) = ٢ جاأ جاب

د) جتا ٢ θ = $\frac{\text{١ − ظا}^{\text{٢}}\theta}{\text{قا}^{\text{٢}}\theta}$

هـ) قتاθ = $\frac{\text{١ + ظا}^{\text{٢}}\frac{\theta}{\text{٢}}}{\text{٢ ظا}\,\frac{\theta}{\text{٢}}}$

١٩) أوجد قيمة كل مما يلي دون استخدام الآلة

أ) جا °١٠٥ ب) جا $\frac{\text{٥}\pi}{\text{١٢}}$ حـ) جتا °٧٥

٢٠) إذا كانت ٠ ⩽ θ ⩽ ٢ π فأوجد قيمة /قيم θ لكل مما يلي:

أ) ظا θ = ٠,٨٦٤٢ ب) قا θ = − ٥,٤٠٢٦

حـ) جتا θ = − ١,٤٧٧ د) جا θ = ٠,٩٠١٣

عزيزي الطالب:

محافظتك على كتابك المدرسي قيمة حضارية.

www.moe.gov.om