سلطنة عُمان
وزارة التربية والتعليم

الرياضيات البحتة

للصف الحادي عشر

الفصل الدراسي الثاني

الطبعة الأولى ١٤٢٧ هـ - ٢٠٠٦م

سلطنة عُمان
وزارة التربية والتعليم

الرياضيات البحتة

للصف الحادي عشر

الفصل الدراسي الثاني

الطبعة الأولى ١٤٢٧هـ - ٢٠٠٦م

حضرة صاحب الجلالة السلطان قابوس بن سعيد المعظم

كتاب الرياضيات البحتة للصف الحادي عشر

أَلَّفت هذا الكتاب لجنة مشكّلة بموجب القرار الوزاري رقم ١٣٢ / ٢٠٠٣م والمؤلفة من :

رئيس اللجنة :

د. زوينة بنت صالح المسكرية

أعضاء اللجنة :

محمد بن راشد بن سعيد الحديدي	عضوًا
سعد مقبل بشير الجبور	عضوًا
سالم بن سعيد بن حميد الوهيبي	عضوًا
يعقوب بن مبارك بن محمد الرحبي	عضوًا
خليفة بن زايد الشقصي	عضوًا
طارق بن حمد بن حميد العامري	عضوًا
عزة بنت حمود الحارثية	عضوًا

تم تطوير هذ الكتاب في قسم مناهج الرياضيات

بدائرة تطوير مناهج العلوم التطبيقية.

بالمديرية العامة للمناهج

الإشراف الفني:

مركز تقنيات التعليم والكتاب المدرسي بالمديرية العامة للمناهج.

قائمة المحتويات

الموضوع	الصفحة
الوحدة الرابعة (المتتاليات والمتسلسلات)	٩
ـ المتتاليات.	١٣
ـ المتتالية الحسابية.	١٨
★ الأوساط الحسابية.	٢٢
ـ تمارين ومسائل (١).	٢٤
ـ مجموع المتسلسلة الحسابية.	٢٦
ـ تمارين ومسائل (٢).	٣٠
ـ المتتالية الهندسية.	٣٢
★ الحد العام.	٣٣
★ الأوساط الهندسية.	٣٥
ـ تمارين ومسائل (٣).	٣٧
ـ مجموع ن حدا الأولى من المتسلسلة الهندسية.	٣٩
★ مجموع المتسلسلة الهندسية غير المنتهية.	٤١
ـ تمارين ومسائل (٤).	٤٣
ـ تمارين ومسائل عامة.	٤٥
الوحدة الخامسة (هندسة الفضاء)	٤٧
ـ هندسة الفضاء.	٥١
★ مسلمات هندسية.	٥٣
ـ تمارين ومسائل (١).	٥٩
ـ الفراغ (الفضاء).	٦١
المستقيمات والمستويات في الفضاء.	٦٣
ـ تمارين ومسائل (٢).	٦٩
ـ الاحداثيات في ثلاثة أبعاد.	٧١
★ المسافة بين نقطتين واحداثيات منتصف البعد بينهما.	٧٤
★ احداثيات نقطة منتصف المسافة بين نقطتين.	٧٤

بسم الله الرحمن الرحيم

المقدمة

الحمد لله رب العالمين والصلاة والسلام على خاتم الأنبياء والمرسلين وخير خلق الله أجمعين سيدنا محمد وعلى آله وصحبه والتابعين لهم بإحسان إلى يوم الدين ... وبعد،،،

أخي الطالب / أختي الطالبة:

يسر وزارة التربية والتعليم أن تضع بين يديك هذا الكتاب وهو الجزء الثاني من سلسلة تتكون من جزئين يغطيان موضوعات مادة الرياضيات البحتة المقررة لطلبة الصف الحادي عشر، حيث يدرس الجزء الأول في الفصل الدراسي الأول، أما الجزء الثاني فيدرس في الفصل الدراسي الثاني.

بُني منهاج الرياضيات البحتة للصف الحادي عشر على فلسفة وأسس واضحة منها:

* التشجيع على التحليل والاستقصاء.
* التركيز على جوانب التعلم الذاتي والتعلم التعاوني.
* تنمية التفكير العلمي والبحث وتشجيع الابتكار.
* التركيز على المهارات العلمية.
* ارتباط محتوى الكتاب بصورة وثيقة بحياة الطالب اليومية.

هذا وقد اشتمل الجزء الأول على ثلاث وحدات، هي:

الوحدة الأولى : التباديل والتوافيق.

الوحدة الثانية : الاحتمالات.

الوحدة الثالثة : الدوال الدائرية.

الموضوع	الصفحة
المساقط العمودية.	٧٥
الزاوية الزوجية (الزاوية بين مستويين وقياسها).	٧٧
الزاوية المستوية لزاوية زوجية.	٧٨
ـ تمارين ومسائل (٣).	٨٠
ـ تمارين ومسائل عامة.	٨٢
الوحدة السادسة (الدوال)	٨٥
ـ مطلق العدد.	٨٩
دالة المطلق.	٩٠
ـ صحيح العدد.	٩٣
ـ دالة الصحيح.	٩٥
د (س) = [س]	٩٥
الدالة د (س) = $\frac{١}{س}$	٩٦
ـ تمارين ومسائل (١).	٩٧
ـ الدالة المحايدة.	٩٨
ـ الدالة العكسية.	٩٩
ـ تمارين ومسائل (٢).	١٠٥
ـ الدالة الأسية.	١٠٦
ـ تمارين ومسائل (٣).	١١٣
ـ الدالة اللوغاريتمية.	١١٤
ـ تمارين ومسائل (٤).	١١٧
ـالعمليات على اللوغاريتمات	١١٨
اللوغاريتم الاعتيادي.	١٢٢
اللوغاريتم الطبيعي.	١٢٤
خواص اللوغاريتم الطبيعي.	١٢٧
تطبيقات على اللوغاريتمات باستخدام الحاسبة.	١٢٨
ـ تمارين ومسائل (٥).	١٣٠
ـ تطبيقات حياتية على اللوغاريتمات.	١٣١
ـ تمارين ومسائل (٦).	١٣٥
ـ تمارين ومسائل عامة.	١٣٦

الوحـدة الرابعة

المتتاليات والمتسلسلات

(Sequences and Series)

واشتمل الجزء الثاني على ثلاث وحدات، هي:

الوحدة الرابعة : المتتاليات والمتسلسلات.

الوحدة الخامسة : الهندسة الفضائية.

الوحدة السادسة : الدوال.

إن دائرة تطوير مناهج العلوم التطبيقية وهي تقدم هذا الكتاب لتأمل منك أن تتعاون مع زملائك الطلبة ومعلميك وأفراد أسرتك في الاستفادة القصوى منه، وأن تحاول ترجمة المقترحات الواردة فيه إلى حقائق من خلال ربطه بأنشطتك اليومية، وأن تبتعد عن الحفظ الذي لا يستند على فهم.

اكتشف الرياضيات في بيتك ومدرستك وشوارع مدينتك أو قريتك وفي المحلات التجارية والبنوك، واعتبرها مادة حياتية ومهارة يومية تستعين بها في حل المشكلات الرياضية التي تواجهك من خلال تعاملك اليومي مفكرا وناقدا ومحللا .هذا كله خلق الله فتفكر فيه.

والله من وراء القصد وهو يهدي السبيل.

المؤلفون

✳ أهفي نح:

١ تعريف المتتالية الحسابية وتوضيحها وإيجادها.

٢ إيجاد الحد النوني في متتالية حسابية.

٣ تعريف الأوساط الحسابية وإيجاد المطلوب منها بين الحدود المعطاة.

٤ إيجاد مجموع أول «ن»حدا من متسلسلة حسابية (بما في ذلك استخدام الرمز$\sum$) .

٥ تعريف المتتالية الهندسية وتوضيحها وإيجادها.

٦ إيجاد الحد النوني في متتالية هندسية.

٧ إيجاد الأوساط الهندسية المطلوبة للمتتالية الهندسية بين الحدود المعطاة.

٨ إيجاد مجموع متسلسلة هندسية (بما في ذلك استخدام رمز المجموع).

٩ إيجاد مجموع متسلسلات هندسية لا نهائية.

١٠ حل مسائل تتضمن متتاليات حسابية أو هندسية ومتسلسلات.

المتتاليات Sequences

تمهيد :

تساعد الرياضيات على اكتشاف وتمثيل الأنماط، والتي قد تكون منتهية أو غير منتهية، حيث يمكن تواجدها في الطبيعة أو يمكن تكوينها، كثير من الأنماط الرقمية التي لها استخدامات في الحياة العملية توجد في صورة متتالية، وقد كانت الإنجازات القديمة في مجال المتتاليات والمتسلسلات ذات قيمة نظرية فقط، ولكن الدراسات حديثا أثبتت أن لها تطبيقات في مجالي العلوم والهندسة .

نشاط ١: إيجاد أطوال أضلاع المربعات:

الأدوات : قلم ، ورق ، مسطرة .

الخطوات :

١) ارسم مربعين متجاورين ومتلاصقين طول ضلع كل منهما وحدة طول واحدة.

٢) اطلب من زميلك رسم مربع بطول ضلع وحدتين طوليتين أسفل المربعين أعلاه ويلاصقهما .

٣) ارسم مربعاً آخر ملاصقاً المربع الذي طول ضلعه وحدة واحدة والمربع الذي طول ضلعه وحدتين . ما طول ضلع المربع الناتج ؟

٤) دع زميلك يرسم مربعاً أسفل المربعين اللذين أطوال أضلاعهما ٢ ، ٣ وحدات طول وملاصقاً لهما . ما طول ضلع المربع الناتج ؟

٥) استمر في الرسم بهذا النمط إلى أن ينتج المربع الذي طول ضلعه ٨ وحدات .

٦) دوّن أطوال أضلاع المربعات الناتجة في كل مرة .

٧) ابحث مع زميلك عن العلاقة بين أطوال أضلاع المربعات الناتجة وقارنه مع ما توصل إليه زملائك في المجموعات الأخرى .

تشكل أطوال أضلاع المربعات في النشاط أعلاه ما يعرف بمتتالية فيبوناتشي Fibonacci Sequences (١، ١، ٢، ٣، ٥، ٨، ١٣، ...) حيث تدل النقاط الثلاث التي تتبع حدود المتتالية على أن المتتالية غير منتهية.

تصف متتالية فيبوناتشي عدد من أنماط الأعداد التي توجد في الطبيعة مثل ترتيب بذور زهرة دوار الشمس . ولعلك

نشاط ٢: دالة المتتالية:

الأدوات : ورقة وقلم .

الخطوات :

اعتبر المتتالية : ٢، ٦، ١٠، ١٤، ١٨، ...

١) ادرس نمط المتتالية ثم أوجد الحد السادس والحد السابع .

٢) اطلب من زميلك أن يجد الحد الثامن والتاسع .

٣) ما الطريقة التي اتبعتها للحصول على الإجابة؟

٤) ناقش زملاءك في القاعدة (الحد العام) التي يمكن منها إيجاد كل حدود المتتالية، وقارن ما توصلت إليه مع ما توصلت إليه المجموعات الأخرى، ثم أجب عن الأسئلة الآتية :

أ) جد قيمة د (١) ، د (٢) ، د (٣) ، د (٤) حيث د (ن) = ٤ن − ٢

ب) قارن قيم د (ن) عند ن = ١، ٢، ٣، ... بحدود المتتالية أعلاه، ماذا تلاحظ؟

تدريب ٣

– أوجد الأربع حدود الأولى للدالة د(ن) = −٢ن + ٣

تعريف

المتتالية هي دالة حقيقية (Real Function) مجالها (Domain) مجموعة الأعدادالصحيحة الموجبة $ص^+$ أو مجموعة جزئية منها على الصورة {١، ٢، ٣، ....، م } ومداها (Range) مجموعة جزئية من ح .

- إذا كانت "د" متتالية ، فإن حدها العام (أو الحد النوني) يرمز له بالرمز $ح_ن$ أي أن :

د(ن) = $ح_ن$ وقد تكتب المتتالية على الصورة $ح_١$ ، $ح_٢$ ، $ح_٣$ ، ....، $ح_{ن-١}$ ، $ح_ن$

أو على الصورة ($ح_ن$) .

*إذا لم يذكر مجال المتتالية فإنه يعتبر $ص^+$.

تدريب ٤

أوجد الحد العام لكل من :

أ) متتالية الأعداد الفردية الموجبة .

ب) المتتالية : ١، ٨، ٢٧، ٦٤، ...

توصلت من النشـــاط السابق : أن الحد الأول والثاني يساوي ١ وكل حد بعدها ينتج من مجموع الحدين السابقين له .

تدريب ١

ابحث في الإنترنت وبالموقع(www. go.hrw.com Fibonacci)عن معلومات وأمثلة من الطبيعة تمثل متتالية فيبوناتشي واعرضها لزملائك في الصف .

مثال ١

أكمل الأماكن الفارغة بالجدول التالي، ثم أجب عن السؤال الذي يليه :

طول ضلع المربع	١	٢	٣	٤		....	ن
المساحة	١	٤			٢٥	....	

– اكتب المتتالية التي تمثل مساحة المربع.

الحل

طول ضلع المربع	١	٢	٣	٤	٥	....	ن
المساحة	١	٤	٩	١٦	٢٥	....	$ن^٢$

∴ المتتالية التي تمثل مساحة المربعات هي : (١، ٤، ٩، ١٦، ٢٥، ... ، $ن^٢$)

– نسمي القيم ١، ٤، ٩، ١٦، ٢٥ حدود المتتالية حيث ١ هو الحد الأول ويرمز له بالرمز $ح_١$ أو الرمز ٲ ، ٤ الحد الثاني ويرمز له بالرمز $ح_٢$ ... وهكذا ، والحد النوني $ح_ن$ أي أن

$ح_١ = ١$ ، $ح_٢ = ٤$ ، $ح_٣ = ٩$ ، $ح_ن = ن^٢$

– مما سبق هل توصلت إلى تعريف للمتتالية ؟

تدريب ٢

من المثال السابق أوجد متتالية محيط المربعات .

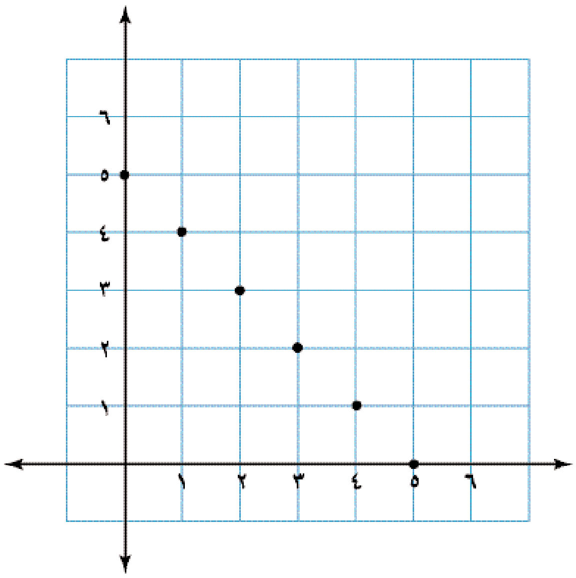
الإحداثيات الرأسية تتزايد بازدياد الإحداثيات الأفقية لها ، إن مثل هذه المتتالية تسمى متتالية متزايدة .

ب) حدود المتتالية $ح_ن$ هي : ٤ ، ٣ ، ٢ ، ١ ، ٠ ، ...

وبمقارنة $ح_ن$ ، $ح_{ن+١}$ نجد أن :

$$ح_{ن+١} - ح_ن = ٥ - (ن + ١) - (٥ - ن) = -١ < ٠$$

أي أن حدود المتتالية تتناقص كلما زادت قيم ن (تسمى $ح_ن = ٥ - ن$ متتالية متناقصة).



– في التمثيل البياني للمتتالية لماذا تؤخذ على محور السينات الأعداد ١ ، ٢ ، ٣ ، ... ؟

* اشرك زميلك وحاول أن تعطي تعريفاً للمتتالية المتزايدة والمتتالية المتناقصة .

تدريب ٦

اختبر تزايد وتناقص المتتالية : $ح_ن = (-١)^ن$

تعريف

يقال للمتتالية $(ح_ن)$ أنها :

١) متزايدة إذا وفقط إذا كان : $ح_{ن+١} > ح_ن$ لكل ن ∈ مجال المتتالية

٢) متناقصة إذا وفقط إذا كان : $ح_{ن+١} < ح_ن$ لكل ن ∈ مجال المتتالية

تدريب ٧

اختبر تزايد وتناقص كل من المتتاليتين :

أ) $(٢ن - ١)$ ب) $\left(\frac{-١}{٢ن}\right)$

مثال ٢

حدد أي مما يلي يمثل متتالية، وبين ما إذا كانت متتالية منتهية أم غير منتهية :

أ) د(ن) $= \frac{٣}{ن} + ١$ ، ن ∈ { ١، ٢، ٣، ٤، ٥ }

ب) د(ن) = ن^{٢} ، ن ∈ ح

جـ) د(ن) = ٢ ، ن ∈ ص$^{+}$

د) (٣، ٤، ٥ ، ...)

الحل

أ) د(ن) دالة حقيقية مجالها = { ١، ٢، ٣، ٤، ٥ } ⊇ ص$^{+}$

∴ د(ن) $= \frac{٣}{ن} + ١$ متتالية منتهية .   (كم عدد حدودها؟)

ب) د(ن) = ن^{٢} ليست متتالية .   (لماذا؟)

جـ) د(ن) = ٢ دالة حقيقية مجالها ص$^{+}$ ، فهي متتالية غير منتهية .

اكتب الخمسة حدود الأولى منها ، ماذا تلاحظ ؟

(كل متتالية على صورة د(ن) = أ ، أ ∈ ص تسمى متتالية ثابتة) .

د) (٣، ٤، ٥ ، ...) متتالية غير منتهية .   (لماذا؟)

تدريب ٥

أ) أكتب الأربع حدود الأولى من المتتالية ح$_{ن}$ = جتا (ن π) ، ومثلها بيانياً .

ب) مثّل بيانياً المتتالية ح$_{ن}$ = −٣ موضحاً الخمسة حدود الأولى .

مثال ٣

ادرس حدود كل من المتتاليتين الآتيتين :

أ) ح$_{ن}$ = ن^{٢} − ن

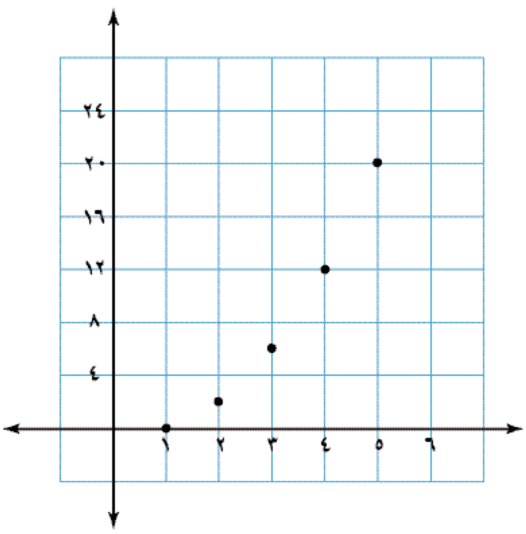
ب) ح$_{ن}$ = ٥ − ن

الحل

أ) المتتالية ح$_{ن}$ = ٠، ٢، ٦، ١٢، ٢٠ ، ...

ماذا تلاحظ بالنسبة لحدود المتتالية ؟

يتضح من التمثيل البياني للمتتالية أن



تدريب ٩

إذا كان ٢ هو الحد الأول لمتتالية حسابية ، ٢ + ٢ هو الحد الثاني، ٢ + ٤ هو الحد الثالث فاكتب الحد الخامس، الحد العاشر، $ح_{٥}$ ، $ح_{ن}$.

تعريف

المتتالية التي يكون فيه الفرق بين كل حد والذي يسبقه مباشرة مقداراً ثابتاً تسمى متتالية حسابية ويسمى المقدار الثابت أساس المتتالية ويرمز له بالرمز (د)

أي أن $ح_{٢} = ح_{١} + د$ ، $ح_{٣} = ح_{٢} + د = ح_{١} + ٢د$ ، $ح_{ن} = ح_{١} + (ن - ١)\,د$

وإذا رمزنا للحد الأول بالرمز ٢ و الحد الأخير بالرمز ل فإن الصورة العامة للمتتالية الحسابية:

٢، ٢ + د، ٢ + ٢ د ، ... ، ٢ + (ن−١) د ، ... ، ل

مثال ٥

أوجد الحدود الخمسة الأولى للمتتاليات الحسابية الآتية :

٢) $ح_{١} = -٢$ ، د = ١

ب) $ح_{٤} = ١٩$ ، د = −٣

جـ) $ح_{٥} = ١٧$ ، $ح_{١٠} = ٣٢$

الحل

٢) $ح_{١} = -٢$ ، د = ١ ، $ح_{٢} = -٢ + ١ = -١$ ،

$ح_{٣} = -٢ + ٢ \times ١ = ٠$ ، $ح_{٤} = -٢ + ٣ \times ١ = ١$

$ح_{٥} = -٢ + ٤ \times ١ = ٢$

الحدود الخمسة الأولى للمتتالية : −٢ ، −١ ، ٠ ، ١ ، ٢

ب) ∵ $ح_{ن} = ح_{١} + (ن-١)\,د$

∴ $ح_{٤} = ٢ + ٣\,د$

١٩ = ٢ + ٣ × (−٣)

∴ ٢ = ٢٨ وبإضافة −٣ لكل حد نحصل على باقي الحدود

أي أن الحدود الخمسة الأولى للمتتالية هي : ٢٨ ، ٢٥ ، ٢٢ ، ١٩ ، ١٦

المتتالية الحسابية Arithmetic Sequences

– ادرس المجموعتين أدناه والتي تمثل متتاليات.

المجموعة (١)

- ٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨ ، ...
- ٢٠ ، ١٧ ، ١٤ ، ١١ ، ...
- −٢٠ ، −٢٥ ، −٣٠ ، −٣٥ ، ...
- $\frac{١}{٢}$ ، ٢ ، ٣$\frac{١}{٢}$ ، ٥ ، ...

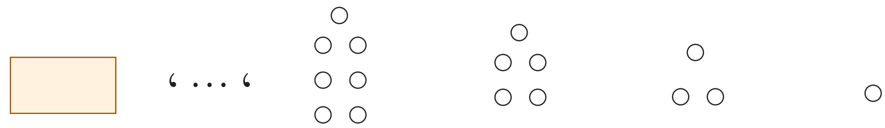
المجموعة (٢)

- ٣ ، ٢ ، ٤ ، ٦ ، ...
- ١ ، ٠ ، ٢ ، ٣ ، ...
- $\frac{١}{٢}$ ، ٣ ، −$\frac{١}{٥٢}$ ، ...
- ٢ ، ٤ ، ٨ ، ١٦ ، ...

- ما أوجه الشبه والاختلاف بين المجموعتين ؟
- ما أوجه الشبه بين المتتاليات في المجموعة (١) ؟
- اكمل بعنصرين (حدين) آخرين لكل متتالية في المجموعة (١) أذكر الخاصية المشتركة .
- هل تستطيع أن تكمل بعناصر أخرى لكل متتالية في المجموعة (٢) ؟

تدريب ٨

اختبر النمط أدناه، ثم أوجد عدد الدوائر في الشكل (١٣).



(١) (٢) (٣) (٤) ، ... ، (١٣)

مثال ٤

اعتبر المتتاليتين : أ) (٤ ، ٨ ، ١٢ ، ١٦ ، ٢٠ ، ...)

ب) (٥ ، ٣ ، ٢ ، ٠ ، −١ ، ...)

لاحظ العلاقة بين كل حد والحد الذي يسبقه مباشرة في كل منهما.

الحل

أ) ٤ ، ٨ ، ١٢ ، ١٦ ، ٢٠ ، ...

+٤ +٤ +٤ +٤

كل حد يزيد عن الحد الذي يسبقه مباشرة بمقدار ثابت هو ٤

ب) ٥ ، ٣ ، ٢ ، ٠ ، −١ ، ...

−٢ −١ −٢ −١

الفرق بين كل حد والذي يسبقه مباشرة لا يساوي مقداراً ثابتاً .

– إذا علمت أن المتتاليات في المجموعة (١) أعلاه تسمى متتالية حسابية فهل تستطيع إعطاء تعريف للمتتالية الحسابية .

مثال ٦

أراد خالد عرض بعض المعلبات في بقالته بطريقة جذّابة. ساعد خالد في تحديد عدد العلب اللازمة لترتيبها في الصف العاشر علماً بأن الصف العلوي يمثل الصف الأول ويحتوي على علبتين.

الحل

عدد العلب في الصفوف تشكل متتالية حسابية حدها الأول أ = ٢ وأساسها د = ١

∴ عدد العلب في الصف العاشر يمثل $ح_{١٠}$

$ح_{١٠} = ٢ + (١٠ - ١) \times ١$

$= ٢ + ٩ = ١١$

مثال ٧

إذا كان مجموع الحدود الثلاثة الأولى من متتالية حسابية هو ١٥ ومجموع مربعاتها ٩٣ فما هذه المتتالية ؟

الحل

بفرض الثلاثة حدود الأولى هي : أ − د ، أ ، أ + د

∴ (أ − د) + أ + (أ + د) = ١٥ ← ٣ أ = ١٥

∴ أ = ٥

$(أ - د)^{٢} + أ^{٢} + (أ + د)^{٢} = ٩٣$

$(٥ - د)^{٢} + ٢٥ + (٥ + د)^{٢} = ٩٣$

$٧٥ + ٢ د^{٢} = ٩٣$

$٢ د^{٢} = ١٨$ ∴ $د^{٢} = ٩$ ∴ د = ± ٣

إذا كانت د = ٣ فإن المتتالية : (٢ ، ٥ ، ٨ ، ...)

إذا كانت د = −٣ فإن المتتالية : (٨ ، ٥ ، ٢ ، ...)

تدريب ١٢

أوجد المتتالية الحسابية التي فيها $ح_{٢} + ح_{٥} = ٢٧$ ، $ح_{٦} + ح_{٨} = -٨$

جـ) $١٧ = أ + ٤د$ (١)

$٣٢ = أ + ٩د$ (٢)

بطرح (١) من (٢) ينتج د = ٣ وبالتعويض عن د في (١)

$١٧ = أ + ٤ \times ٣ \longrightarrow أ = ٥$

∴ الحدود الخمسة الأولى للمتتالية : ٥ ، ٨ ، ١١، ١٤، ١٧

نشاط ٣: العلاقة بين الدالة الخطية ومعامل ن:

أعمل في مجموعة ثنائية.

الأدوات: ورقة رسم بياني ـ قلم ـ بطاقات على كل منها دالة على الصورة:
د(ن) = أ ن + ب

الخطوات:

١) ضع البطاقات بشكل مقلوب، واطلب من زميلك سحب بطاقة واحدة .

٢) أوجد الحد الأول والأساس للمتتالية التي تمثلها الدالة على البطاقة .

٣) مثل المتتالية بيانيا ، ماذا تلاحظ ؟

٤) اسحب بطاقة أخرى، واطلب من زميلك إيجاد الحد الأول والأساس للدالة على البطاقة، ثم تمثيلها بيانيا.

٥) كرر العملية بالتناوب مع زميلك عدة مرات .

٦) ما العلاقة بين معامل ن والأساس ؟

تدريب ١٠

أوجد أساس المتتالية الحسابية $ح_{ن} = ٣ - \frac{٢}{٥}ن$

تعريف

المتتالية د (ن) متتالية حسابية إذا وفقط إذا كان د(ن) مقداراً من الدرجة الأولى في ن، ويكون معامل ن هو أساس المتتالية .

تدريب ١١

أي مما يلي يمثل متتالية حسابية :

أ) د(ن) = (٦ − ٣ن)

ب) د(ن) = $٢ن^{٢}$

الأوساط هي :

١٠ − ٨ = ٢

٢ − ٨ = −٦

−٦ − ٨ = −١٤

−١٤ − ٨ = −٢٢

∴ الأوساط الحسابية : ٢ ، −٦ ، −١٤ ، −٢٢

تدريب ١٤

ادخل ستة أوساط حسابية بين العددين : ٢ ، ٥,٥

– كيف تحسب الوسط الحسابي (المتوسط) لأي عددين م ، ب ؟

• اعتبر المتتالية : ٣ ، ٨ ، ١٣ ، ١٨ ، ٢٣ ، ٢٨

– أوجد الوسط الحسابي للحدين :

م) $ح_١$ ، $ح_٣$

ب) $ح_٢$ ، $ح_٤$. ماذا تلاحظ ؟

إذا شكلت الأعداد م ، ب ، حـ متتالية حسابية فإن ب – م = حـ – ب (لماذا) ؟

$م + حـ = ٢ب \leftarrow ب = \frac{م + جـ}{٢}$

وكذلك إذا كانت م ، ب ، حـ ، د متتالية حسابية فإن ب = $\frac{م + جـ}{٢}$ ، حـ = $\frac{ب + د}{٢}$

وفي هذه الحالة تسمى ب وسط أول ، حـ وسط ثاني .

نتيجة

إذا شكلت $ح_١$ ، $ح_٢$ ، $ح_٣$ ، ... ، $ح_ن$ متتالية حسابية فإن $ح_٢$ ، $ح_٣$ ، ... ، $ح_{ن-١}$ تسمى أوساطاً حسابية .

ففي المتتالية : (٣ ، ٨ ، ١٣ ، ١٨ ، ٢٣) تعتبر الحدود : ٨ ، ١٣ ، ١٨ أوساطاً حسابية بين الحدين ٣ ، ٢٣

تدريب ١٣

جد الحد الناقص في المتتالية الحسابية : ٨٤ ، ☐ ، ١١٠

مثال ٨

أوجد أربعة أوساط حسابية بين العددين : ١٠ ، –٣٠

الحل

إذا أدخلت ٤ أوساط بين العددين فإن المتتالية المتكونة : ١٠ ، ؟ ، ؟ ، ؟ ، ؟ ، –٣٠

$ح_٦ = م + (٦ - ١)\,د$

$-٣٠ = ١٠ + ٥د$

$د = -٨$

١٢) إذا كان الحدان الأول والخامس من متتالية حسابية يساويان على الترتيب الحدين الرابع والسابع من متتالية حسابية أخرى فاثبت أن الحد التاسع من المتتالية الأولى يساوي الحد العاشر من المتتالية الثانية .

١٣) س ، ص ، ع ، ل هي قيم أربعة حدود من متتالية حسابية فإذا كان مجموع رتبتي الحدين اللذين قيمتهما س ، ل يساوي مجموع رتبتي الحدين اللذان قيمتهما ص ، ع.

فاثبت أن س + ل = ص + ع .

تمارين ومسائل ١

١) مثّل بيانياً كلاً من المتتاليات التالية موضحاً الحدود الخمسة الأولى إذا كانت المتتالية غير منتهية، ثم اختبر أي منها متزايدة وأي منها متناقصة .

أ) د (ن) = $ن^{٢} - ١$

ب) هـ (ن) = $(-٢)^{ن}$ ، ن $\in$ {١، ٢، ٣، ٤ }

حـ) ل (ن) = −٤

د) م (ن) = $\begin{cases} ن & \text{، ن عدد زوجي} \\ ن - ١ & \text{، ن عدد فردي} \end{cases}$

٢) اكتب الحدود الخمسة الأولى للمتتالية الحسابية في كل من الحالات الآتية :

أ) أ = ٢ ، د = ٧

ب) أ = ٣ ، د = −٥

حـ) أ = −٤ ، د = $\frac{١}{٤}$

٣) أوجد قيمة كل من $ح_{١٢}$ ، $ح_{٢٠}$ من المتتالية الحسابية : ٤ ، ٧ ، ١٠ ، ١٣ ، ...

٤) أوجد قيمة $ح_{٦}$ + $ح_{١٠}$ من المتتالية الحسابية : ٢٦ ، ٢١ ، ١٦ ، ...

٥) إذا كانت (أ، ٩ ، ... ، ب ، ٥١) متتالية حسابية وكانت ب = ٧ أ أوجد قيمة كل من أ ، ب وكذا ترتيب حدها الأخير .

٦) في المتتالية (٨ ، ١٣ ، ١٨ ، ... ، ١٥٨) أوجد $ح_{١٣}$ معتبراً ١٥٨ حدها الأول ، ٨ حدها الأخير .

٧) متتالية حسابية فيها $ح_{١}$ = −٥١ ، $ح_{٢٢}$ = −٢٢٥ فما أساسها ؟

٨) يتناول هيثم نوعاً من العقار الطبي، وقد طلب منه الطبيب أن يقلل من استخدام العقار بمعدل حبتين كل أسبوع عن الأسبوع الذي يسبقه مباشرة، فإذا بدأ هيثم بتناول العقار بمعدل ١٤ حبة في الأسبوع الأول، فبعد كم أسبوع سوف يتوقف عن تناول العقار ؟

٩) متتالية حسابية حدها الخامس يزيد عن حدها الثالث بمقدار ٨ ، ومجموع حديها السادس والثامن يساوي ٥٨. أوجد المتتالية، وحدها العام .

١٠) أدخل خمسة أوساط حسابية بين العددين ٥ ، ١٧ .

١١) أدخلت عدة أوساط حسابية بين العددين ١٤ ، ٣٤ وكان مجموع الوسطين الأول والثالث يساوي ٤٤ فما عدد هذه الأوساط ؟

مثال ١

أوجد مجموع الخمسة عشرة حدا الأولى لمتسلسلة حسابية حدها الأول = ٤ وحدها الأخير = ٢٦ .

الحل

$$جـ_{١٥} = \frac{١٥}{٢}(٤ + ٢٦) = ٢٢٥$$

تدريب ٢

أوجد مجموع كل الأعداد الزوجية من ٢ إلى ٢٠٠ .

– يمكن إيجاد $جـ_ن$ بمعلومية الحد الأول والأساس وعدد الحدود كما يلي :

$$جـ_ن = \frac{ن}{٢}(أ + ل)$$

$$جـ_ن = \frac{ن}{٢}(أ + أ + (ن-١)\,د)$$

$$\boxed{جـ_ن = \frac{ن}{٢}(٢أ + (ن-١)\,د)} \longleftarrow (٢)$$

مثال ٢

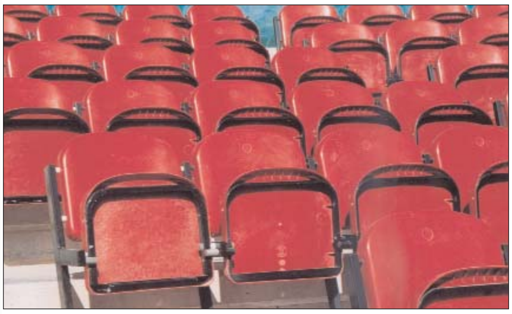
أوجد مجموع العشرين حدا الأولى للمتسلسلة الحسابية : ٦ + ٤ + ٢ + ...

الحل

$$أ = ٦ \quad ، \quad د = -٢ \quad ، \quad ن = ٢٠$$

$$جـ_{٢٠} = \frac{٢٠}{٢}(٢ \times ٦ + ١٩ \times -٢) = -٢٦٠$$

تدريب ٣



– إذا علمت أن إحدى قاعات التدريس تحتوي ١٠ صفوف بحيث تحتوي على ٨ مقاعد في الصف الأول ، ٩ مقاعد في الصف الثاني، ١٠ مقاعد في الصف الثالث وهكذا، فما مجموع عدد المقاعد ؟

– يمكن التعبير عن مجموع حدود المتتالية باستخدام الرمز $\sum$ وهو حرف إغريقي يقرأ مجموع فمثلا مجموع المتسلسلة ٢ + ٤ + ٦ + ٨ + ١٠ يكتب كالتالي : $\sum_{ن=١}^{٥}(٢ن)$

– فكر بطريقة يمكن بها إيجاد ناتج جمع حدود المتتالية : ١ ، ٢ ، ٣ ، ... ، ١٠ دون أن تجري عملية الجمع المعتادة لجميع الحدود .

– لقد أثار العالم الألماني جاوس دهشة معلمه وهو في سن السابعة من عمره (في المرحلة الابتدائية) عندما أوجد ناتج جمع الأرقام من ١ إلى ١٠٠ بصورة سريعة وذلك بملاحظته أن المجموع عبارة عن ٥٠ زوجاً من الأرقام كل زوج مجموعه ١٠١ .

– تعرف المتسلسلة الحسابية بأنها حدود المتتالية الحسابية وضعت بينها عملية جمع (+) .

فمثلاً في المتتالية الحسابية : ١ ، ٢ ، ٣ ، ... فإن مجموع ٦ حدود الأولى من المتتالية يرمز له بالرمز جـ٦

أي أن جـ٦ = ١ + ٢ + ٣ + ٤ + ٥ + ٦ (١)

وبعكس ترتيب الحدود نحصل على :

جـ٦ = ٦ + ٥ + ٤ + ٣ + ٢ + ١ (٢)

– اجمع (١) (٢) ماذا تستنتج ؟

يمكن التوصل إلى القانون العام لمجموع ن حدا الأولى لمتسلسلة حسابية كالآتي :

جـن = أ + (أ + د) + (أ + ٢د) + ... + (ل − ٢د) + (ل − د) + ل ⟵ (١)

فكر أن تجد مجموع الحدود هكذا :

جـن = ل + (ل − د) + (ل − ٢د) + ... + (أ + ٢د) + (أ + د) + أ ⟵ (٢)

بجمع (١) ، (٢)

٢ جـن = (أ + ل) + (أ + ل) + (أ + ل) + ... + (أ + ل) + (أ + ل) + (أ + ل)

٢ جـن = ن × (أ + ل) ⟵ جـن = $\frac{\text{ن}}{\text{٢}}$ (أ + ل)

تدريب ١

مستخدماً القانون الذي توصلت إليه ، أوجد مجموع حدود المتتالية د(ن) = ن حيث ن ∈ ط ١ ≤ ن ≤ ١٥، ثم تحقق من الجمع باستخدام طريقة الجمع المعتادة.

وبشكل عام يمكن إيجاد مجموع ن حدا الأولى من متسلسلة حسابية بمعلومية حدها الأول والأخير باستخدام القاعدة : جـن = $\frac{\text{ن}}{\text{٢}}$ (أ + حن) ⟵ (١)

تدريب ٥

في مسابقة لاحدى شركات المياه الغازية وضعت ٢٤ زجاجة على خط مستقيم واحد والمسافة بين كل زجاجة وأخرى ٥ أمتار، ووضع صندوق مجاور للزجاجة الأولى، فإذا قام متسابق بجمع هذه الزجاجات واحدة تلو الأخرى، ثم يضعها في الصندوق دون تحريك الصندوق. فأوجد المسافة التي قطعها المتسابق حتى أتم جمع الزجاجات كلها.

مثال ٣

أوجد قيمة $\sum_{ن=١}^{١٢}$ (٦−٢ن)

الحل

ح $_{ن}$ = ٦−٢ن   دالة خطية مجالها $ص^{+}$

ح $_{ن}$ متتالية حسابية حيث أ = ٤ ، د = −٢

المطلوب إيجاد مجموع ١٢ حدا الأولى للمتسلسلة الحسابية .

جـ $_{١٢}$ = $\frac{١٢}{٤}$ (٢ × ٤ + ١١ × −٢) = −٨٤

تدريب ٤

احسب قيمة $\sum_{ن=١}^{١٠}$ (٥ + ٤ن)

مثال ٤

خزان ماء مملوء سعته ٣٩٠ جالونا (الجالون = ٣,٧ لتر) ، يستخدم لسقي مزرعة فإذا انساب منه في اليوم الأول ٦٦ جالوناً، وكان ما ينساب منه في كل يوم تالٍ ينقص عما ينساب في اليوم السابق مباشرة بمقدار ٦ جالونات . فبعد كم يوم يصبح الخزان فارغاً ؟

الحل

كمية الماء المتسرب في اليوم الأول = ٦٦ جالوناً

كمية الماء المتسرب في اليوم الثاني = ٦٠ جالوناً

كمية الماء المتسرب في اليوم الثالث = ٥٤ جالوناً وهكذا

يتسرب الماء وفق المتسلسلة الحسابية : ٦٦ + ٦٠ + ٥٤ + ٠٠

ولكي يصبح الخزان فارغاً يجب أن يكون مجموع ما تسرب من الماء ٣٩٠ جالوناً .

٣٩٠ = $\frac{ن}{٢}$ (٢ × ٦٦ + (ن −١) × −٦)

٣٩٠ = $\frac{ن}{٢}$ (١٣٢ − ٦ن + ٦)

٣ن^{٢} − ٦٩ن +٣٩٠ = ٠

ن^{٢} − ٢٣ن +١٣٠ = ٠

(ن − ١٠) (ن−١٣) = ٠

ن = ١٠ ، ن = ١٣

يصبح الخزان فارغاً بعد ١٠ أيام . لماذا ؟

٧) متتالية حسابية حدها الأول ٥ وحدها الأخير ٣٢ وعدد حدودها ٢٠ حدا فما مجموعها؟

٨) أوجد قيمة $\frac{١+٣+٥+....+٤١}{٢+٥+٨+....+٤٤}$

٩) كم حداً يلزم أخذها من المتتالية (–١٦ ، –١٤ ، –١٢ ، ...) ابتداء من الحد الأول ليكون مجموعها صفرا؟

١٠) حوض يتسع ٦٢٥ لترا مركب عليه صنبور يصب ماء في الحوض بمعدل ٤٠ لتر في الساعة وبزيادة قدرها ٥ لترات في كل ساعة عن الساعة التي قبلها فبعد كم ساعة يمتلئ الحوض؟

١١) طريق طوله ٣٩٦ متر سار رجلان في وقت واحد أحدهما من أول الطريق والثاني من نهايته وفي اتجاهين متضادين، فإذا كان الرجل الأول يقطع مسافات ٣٦، ٣٣، ٣٠، ..... من الأمتار في الثواني الأولى والثانية والثالثة و..... وفي نفس الوقت يقطع الرجل الثاني مسافات ١٩، ١٨، ١٧، ..... من الأمتار في الثواني الأولى والثانية والثالثة و..... أوجد متى يتقابلا علماً بأنهما يتقابلا بعد عدد صحيح من الثواني، وما طول المسافة التي قد قطعها كل منهما حتى يتقابلا؟

تمارين ومسائل ٢

١) افتتح عبد الله محلا لبيع المواد الغذائية، وباع في اليوم الأول بمبلغ ٥٠ ر.ع وكان مقدار ما يبيعه في كل يوم يزيد بمقدار ٦ ر.ع عن اليوم السابق له . أوجد إجمالي المبلغ بعد ١٥ يوم؟

٢) أوجد مجموع الحدود الثلاثين الأولى من المتتالية الحسابية : ٤ ، ٩ ، ١٤ ، ...

٣) بدأ سالم العمل براتب وقدره ٤٠٠ ر.ع شهرياً فإذا كان يحصل على علاوة سنوية قدرها ١٠ ر.ع فكم يكون مجموع ما حصل عليه من رواتب في نهاية السنة العاشرة ؟

٤) شاحنة لنقل الأنابيب تقوم بنقل أنابيب المياه من المخزن إلى منطقة سكنية لتوصيل المياه للمنازل فإذا قام صاحب الشاحنة بترتيب الأنابيب في الشاحنة بحيث وضع ١٠ أنابيب في الصف السفلي ثم ٩ أنابيب في الصف الذي يعلوه ثم ٨ أنابيب وهكذا. فما عدد الأنابيب في ٦ صفوف ابتداء من الصف السفلي؟

٥) قرر سعيد وأحمد التسابق بدراجتيهما على طريق مستقيم طوله ٧٩٢ متراً حيث ابتداء التحرك في نفس اللحظة أحدهما أول الطريق والآخر من نهايته في اتجاهين متضادين فإذا قطع سعيد مسافة ٤٠ متراً في الثانية الأولى ، ٤٣ متراً في الثانية الثانية ، ٤٦ متراً في الثانية الثالثة وهكذا . أما أحمد فقطع المسافات التالية ٣١،٣٦،٤١ ، ... على الترتيب في كل ثانية ، فما هو الزمن الذي بعده يتقابل فيه سعيد وأحمد بدراجتيهما ؟ وما المسافة التي قطعها كل منهما ؟

٦) مدير أحد المزارع يدفع مبلغ ٢٠٠ ريال للموظف الجديد على أن يدفع له علاوة سنوية مقدراها ٣٠ ريالاً . بينما مدير المزرعة الثانية يدفع مبلغ ٢٥٠ ريالاً للموظف الجديد على أن يدفع له علاوة سنوية مقدارها ٢٠ ريالاً . احسب مجموع ما سيدفعه مدير كل مزرعة للموظف الجديد خلال ١٠ سنوات .

تدريب ٢

أي مما يلي يمثل متتالية هندسية :

١) $ح_ن = ١^{ن-١}$ ٢) $ح_ن = ٣^ن$

الحد العام:

– متتالية هندسية حدها الأول = ٩، وأساسها = ر

أوجد كل من : $ح_٢$ ، $ح_٣$ ، $ح_٤$ ، $ح_{١٠}$ ، $ح_{ن+١}$. ماذا تلاحظ ؟

نتيجة

إذا كانت $(ح_ن)$ متتالية هندسية أساسها ر فإن :

$$ح_ن = ح_١ \, ر^{(ن-١)}$$

وإذا رمزنا للحد الأول لمتتالية هندسية بالرمز ٩ فإن الصورة العامة هي:

$$٩، ٩ر ، ٩ر^٢ ، \ldots ، ٩ر^{(ن-١)}$$

مثال ٢

يمارس مروان رياضة المشي على الأقدام فإذا قطع في اليوم الأول مسافة ٣٠٠ متراً وكان يقطع في كل يوم تال ضعف المسافة التي قطعها في اليوم السابق له مباشرة . أكتب متتالية المسافة التي يقطعها مروان في كل يوم ولمدة ٥ أيام .

الحل

المسافة المقطوعة في اليوم الأول ٣٠٠ متر (٩ = ٣٠٠)

∵ المسافة المقطوعة في كل يوم تساوي ضعف المسافة في اليوم السابق (ر = ٢)

∴ المتتالية هي : ٣٠٠ ، ٦٠٠ ، ١٢٠٠ ، ٢٤٠٠ ، ٤٨٠٠

تدريب ٣

اكتب المتتالية الهندسية التي فيها :

الحد الأول = −٦ ، الأساس = ٣ موضحاً الحدود الخمسة الأولى

المتتالية الهندسية Geometric Sequence

نشاط ١: حدود المتتالية الهندسية:

اعمل في مجموعة ثنائية:

الأدوات: ورقة مربعة ، مقص

الخطوات:

١) اقسم الورقة المربعة إلى أربعة مناطق متطابقة .

٢) اقسم كل منطقة من هذه المناطق إلى ٤ مناطق مربعة، كم عدد المربعات الناتجة؟

٣) كرر هذه العملية ٥ مرات وفي كل مرة اكتب عدد المربعات الناتجة . ماذا تلاحظ؟

٤) دون نتائجك في جدول ، ما العلاقة بين عدد المربعات الناتجة بعد كل عملية مع عدد المربعات الناتجة في العملية السابقة لها مباشرة ؟

٥) قارن ما توصلت إليه مجموعتك مع ما توصلت إليه المجموعات الأخرى .

تدريب ١

أ) أكتب مجموعة أعداد تحقق الخاصية التي توصلت إليها في النشاط .

ب) أوجد النسبة بين كل حد والذي يسبقه مباشرة في المتتالية : ٤ ، −٨، ١٦ ، −٣٢ ، ٦٤.
ماذا تلاحظ ؟

تعريف

المتتالية $(ح_ن)$ تسمى متتالية هندسية إذا وفقط إذا كان :

$\frac{ح_{ن+1}}{ح_ن} = ر$ لكل $ن \in ص^+$ حيث ر عدد حقيقي ثابت، $ح_ن \neq$.

تسمى ر أساس المتتالية الهندسية .

مثال ١

أوجد الأساس في كل من المتتاليتين الآتيتين : (٢ ، ٤ ، ٨ ، ١٦ ، ٣٢ ، ...) ، (٢٧ ، ٩ ، ٣ ، ١ ، $\frac{١}{٣}$ ، ...)

الحل

٢ ، ٤ ، ٨ ، ١٦ ، ٣٢ ، ...

×٢ ×٢ ×٢ ×٢

الأساس = ٢

٢٧ ، ٩ ، ٣ ، ١ ، $\frac{١}{٣}$

$\times\frac{١}{٣}$ $\times\frac{١}{٣}$ $\times\frac{١}{٣}$ $\times\frac{١}{٣}$

الأساس = $\frac{١}{٣}$

مثال ٥

يزداد عدد الطلبة الملتحقين بالصف الأول بمعدل ٤٪ كل سنة في إحدى مناطق السلطنة. فإذا كان عددهم حالياً ٢٠ ألف طالب فكم سيكون عدد الطلبة بعد ٦ سنوات ؟

الحل

عدد الطلبة حالياً = ٢٠٠٠٠

عدد الطلبة في السنة الثانية = ٢٠٠٠٠ + ٢٠٠٠٠ × ٤٪

= ٢٠٠٠٠ (١+٠,٠٤)

= ٢٠٠٠٠ (١,٠٤)

عدد الطلبة في السنة الثالثة = ٢٠٠٠٠ (١,٠٤) + ٢٠٠٠٠ (١,٠٤) × ٤٪

= ٢٠٠٠٠ (١,٠٤) (١ + ٠,٠٤)

= ٢٠٠٠٠ $(١,٠٤)^{٢}$

وهكذا

عدد الطلبة بعد ست سنوات $ح_{٧}$ = ٲ $ر^{٦}$

= ٢٠٠٠٠ $(١,٠٤)^{٦}$ = ٢٥٣٠٦,٤ طالباً .

تدريب ٤

سيارة قيمتها ٧٠٠٠ ريال عماني إذا علمت أن قيمة السيارة في نهاية كل سنة تكون بنسبة ٨٠٪ من سعرها .

أوجد سعر السيارة بعد ٨ سنوات .

الأوساط الهندسية (Geometric Means)

– إذا كانت ٲ = ٤ ، ب = ٩

١) أوجد $\sqrt{\text{ٲ} \times \text{ب}}$

٢) اشترك مع زميلك وابحث العلاقة بين ٲ ، ب ، $\sqrt{\text{ٲ ب}}$

إذا شكلت الأعداد ٲ ، ب ، جـ متتالية هندسية فإن $\frac{\text{ب}}{\text{ٲ}} = \frac{\text{جـ}}{\text{ب}}$ ⟵ $\text{ب}^{٢}$ = ٲ جـ

∴ ب = $\sqrt{\text{ٲ جـ}}$ وفي هذه الحالة يسمى ب الوسط الهندسي للعددين ٲ ، جـ

وبصورة عامة تسمى الأعداد : جـ ، د ، ... ، ل أوساطاً هندسية للعددين الحقيقيين الموجبين ٲ ، ب إذا كانت ٲ ، جـ ، د ، ... ، ل ، ب متتالية هندسية .

مثال ٣

أكتب المتتالية الهندسية التي حدها الأول = ٩ وحدها السادس = ٢٨٨

الحل

$ح_٦ = أ ر^٥$

$٢٨٨ = ٩ ر^٥ \longrightarrow ر^٥ = \frac{٢٨٨}{٩} = ٣٢$

$ر^٥ = ٢^٥ \longrightarrow ر = ٢$

المتتالية هي : ٩ ، ١٨ ، ٣٦ ، ٧٢ ، ١٤٤ ، ...

مثال ٤

ثلاثة أعداد تكون متتالية هندسية فإذا كان مقلوب الحد الأول يزيد عن مقلوب الحد الثاني بمقدار ٢ وكان الحد الثالث يزيد عن الحد الثاني بمقدار ١٨ فما هذه الأعداد ؟

الحل

نفرض أن الأعداد هي أ، أ ر ، أ $ر^٢$

$\frac{١}{أ} - \frac{١}{أ ر} = ٢ \longrightarrow \frac{ر-١}{أ ر} = ٢ \longrightarrow ٢ أ ر = ر - ١ \longrightarrow (١)$

$أ ر^٢ - أ ر = ١٨ \longrightarrow أ ر (ر-١) = ١٨ \longrightarrow (٢)$

بقسمة (١) على (٢)

$\frac{٢ أ ر}{أ ر (ر-١)} = \frac{(ر-١)}{١٨} \longrightarrow (ر-١)^٢ = ٣٦$

$ر - ١ = \pm ٦ \longrightarrow ر = ٧$ أو $ر = -٥$

فإذا كانت ر = ٧ فإن ١٤ أ = ٦ $\longrightarrow$ أ $= \frac{٣}{٧}$ الأعداد هي : $\frac{٣}{٧}$ ، ٣ ، ٢١

وإذا كانت ر = −٥ فإن −١٠ أ = −٦ $\longrightarrow$ أ $= \frac{٣}{٥}$ الأعداد هي : $\frac{٣}{٥}$ ، −٣ ، ١٥

تمارين ومسائل ٣

١) حدد المتتالية الهندسية فيما يلي :

أ) ٥ ، ٢٥ ، ٦٢٥ ، ...

ب) −٣٦ ، ٦ ، −١ ، ... ، −٣٦ $(-\frac{١}{٦})^{(ن-١)}$

جـ) $(\frac{١}{٢^ن})$

د) $\frac{١}{٣^ن}$

٢) أكتب الحدود الأربعة الأولى للمتتاليات الهندسية التالية وأذكر ما إذا كانت متزايدة أم متناقصة

أ) أ = ٢ ، ر = ٣

ب) أ = ٨١ ، ر = $\frac{-١}{٣}$

جـ) أ = ٦ ، ر = ١

٣) مجموع الحدود الثلاثة الأولى لمتتالية هندسية جميع حدودها موجبة يساوي ٧ . فإذا كان حدها الثالث يساوي ١ فما حدها السادس ؟

٤) أوجد المتتالية الهندسية التي حدها الثالث = ٣٦ وحدها السادس = ٩٧٢

٥) في المتتالية (٢ ، ٦، ١٨ ، ...) أوجد رتبة الحد الذي قيمته ١٤٥٨

٦) متتالية هندسية مجموع حديها الثاني والخامس ٩٠ ومجموع حديها الثالث والسادس ١٨٠ أوجد المتتالية .

٧) سقطت كرة مطاطية من ارتفاع ٢٥٠ قدم فوق سطح الأرض . فإذا كانت الكرة ترتد إلى أعلى بعد كل اصطدام ارتفاعاً قدره (٥٠٪) من ارتفاعها السابق مباشرة ، فكم يكون ارتفاعها بعد الاصطدام الخامس ؟

٨) تتضاعف البكتيريا في وسط معين كل يوم فإذا كان عددها في اليوم الأول = ١٠٠ ، احسب عددها بعد ٧ أيام .

٩) إذا كان الوسط الهندسي للعددين ٢ ، س هو ٨ فما قيمة س ؟

١٠) أدخل أربعة أوساط هندسية بين العددين ٤ ، ١٢٨ .

١١) عددان موجبان الفرق بينهما ٨ ووسطهما الهندسي ٣ فما هما العددان ؟

تدريب ٥

أوجد قيمة س بحيث تكون ٥ ، س ، ١٨ متتالية هندسية .

مثال ٦

أدخل ٣ أوساط هندسية بين العددين ٤ ، ٦٤

الحل

بإدخال ٣ أوساط تكون المتتالية بالصورة : ٤ ، ؟ ، ؟ ، ؟ ، ٦٤

أي أن عدد حدود المتتالية = ٥ وحدها الأول = ٤ ، $ح_{٥}$ = ٦٤

$ح_{٥} = ٩ ر^{٤}$

$٦٤ = ٤ \times ر^{٤}$

$ر^{٤} = ١٦ \longleftarrow ر = \pm ٢$

تنتج متتاليتين هندسيتين الأولى أساسها ٢ والأوساط الهندسية هي : ٨ ، ١٦ ، ٣٢

والثانية أساسها −٢ والأوساط الهندسية : −٨ ، ١٦ ، −٣٢

تدريب ٦

أوجد الحدود الناقصة في المتتاليات الهندسية التالية :

(١) أ) (٥ ، ▭ ، ٢٠ ، ...) ب) (٣ ، ▭ ، ▭ ، ▭ ، ٤٨)

(٢) اثبت أن الوسط الحسابي لعددين حقيقين موجبين مختلفين أكبر من وسطهما الهندسي .

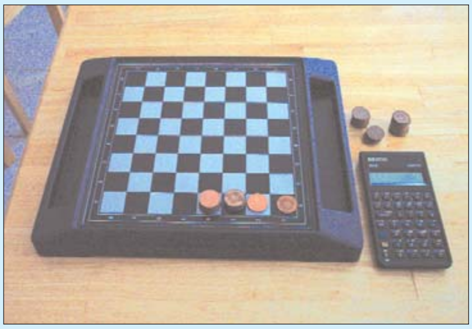
مجموع ن حدا الأولى من المتسلسلة الهندسية

نشاط ١: مجموع الأقراص على رقعة الشطرنج:

اعمل في مجموعة ثنائية:

الأدوات : رقعة شطرنج ، أقراص العد (أو قطع نقد)

الخطوات:



١) ضع قرصاً (أو قطعة نقدية) في المربع الأعلى من جهة اليمين .

٢) اطلب من زميلك أن يضع قرصين في المربع الثاني .

٣) ضع في المربع الثالث أربع أقراص .

٤) تابع مع زميلك المتتالية مضاعفاً عدد الأقراص في كل مربع جديد حتى المربع السادس (عند نفاذ الأقراص أكتب أعداد في المربعات) . (يمكن استخدام الحاسبة في مضاعفة العدد)

٥) الطالب الذي يضع العدد الصحيح من الأقراص في المربع يكسب نقاطاً حسب عدد الأقراص.

٦) ما مجموع عدد الأقراص ؟

– المتسلسلة الهندسية هي عبارة عن حدود المتتالية الهندسية وضع بينها إشارة جمع (+) .

ففي المتتالية (٢ ، ٤ ، ٨ ، ١٦ ، ...) فإن ٢ + ٤ + ٨ + ١٦ + ... تسمى متسلسلة هندسية ويرمز لمجموع الحدود بالرمز $\text{جـ}_{\text{ن}}$.

ويمكن التوصل إلى قاعدة لإيجاد مجموع ن حدا من المتسلسلة الهندسية كالآتي :

$$\text{جـ}_{\text{ن}} = \text{أ} + \text{أ}\text{ر} + \text{أ}\text{ر}^{٢} + \dots + \text{أ}\text{ر}^{\text{ن}-٢} + \text{أ}\text{ر}^{\text{ن}-١} \longrightarrow (١)$$

$$\text{ر}\,\text{جـ}_{\text{ن}} = \text{أ}\text{ر} + \text{أ}\text{ر}^{٢} + \text{أ}\text{ر}^{٣} + \dots + \text{أ}\text{ر}^{(\text{ن}-١)} + \text{أ}\text{ر}^{\text{ن}} \longrightarrow (٢)$$

بطرح (٢) من (١) :

$$\text{جـ}_{\text{ن}} - \text{ر}\,\text{جـ}_{\text{ن}} = \text{أ} - \text{أ}\text{ر}^{\text{ن}}$$

$$\text{جـ}_{\text{ن}}\,(١-\text{ر}) = \text{أ}\,(١-\text{ر}^{\text{ن}}) \longrightarrow \text{جـ}_{\text{ن}} = \frac{\text{أ}\,(١-\text{ر}^{\text{ن}})}{(١-\text{ر})}$$

١٢) ثلاثة أعداد متتالية هندسية مجموعها $\frac{1}{2}$ ٢٤ وحاصل ضربها ٣٤٣ أوجد الأعداد الثلاثة وأوجد الفرق بين الوسط الحسابي والهندسي للعددين الأول والثالث.

١٣) إذا كان ثلاثة أمثال الوسط الحسابي بين عددين يساوي خمسة أمثال وسطهما الهندسي فاثبت أن أحد العددين تسعة أمثال الآخر.

مثال ٢

أوجد قيمة $\sum_{ن=١}^{٦} ٢ \times ٣^{(ن-١)}$

الحل

$\sum_{ن=١}^{٦} ٢(٣^{ن-١})$ = مجموع ٦ حدود الأولى من متسلسلة هندسية حدها الأول = ٢ وأساسها = ٣

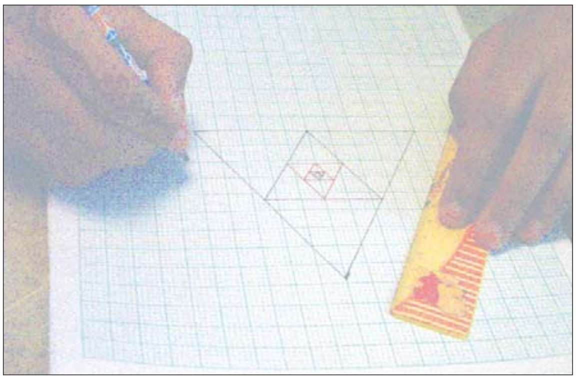
$$ج_٦ = \frac{٢(١-٣^٦)}{١-٣} = ٧٢٨$$

تدريب ٢

١) أوجد قيمة $\sum_{م=١}^{٥} ٤(٢^{م-١})$

٢) مجموع الأربع حدود الأولى من متتالية هندسية يساوي ٨٠ ، حدها الأول ينقص عن حدها الخامس بمقدار ١٦٠ . أوجد المتتالية .

مجموع المتسلسلة الهندسية غير المنتهية



رسمت أمل الشكل الهندسي المجاور حيث بدأت برسم مثلث منتظم بطول ضلع = ٢٠ سم ثم رسمت المثلث الثاني بتوصيل النقاط التي تمثل منتصفات كل ضلع واستمرت برسم المثلثات الداخلية بنفس الطريقة .

– هل عدد المثلثات الناتجة منتهية ؟ لماذا ؟

يمكن تمثيل مجموع طول ضلع كل مثلث من المثلثات الناتجة بالمتسلسلة الهندسية أدناه :

٢٠+١٠+٥+٢,٥+ ١,٢٥+ ...

– قدر مجموع هذه المتسلسلة الهندسية .

٤

قاعدة :

$$جـ_ن = ٲن \text{ إذا كانت } ر = ١$$

$$جـ_ن = \frac{ٲ(١-ر^ن)}{(١-ر)} \text{ إذا كانت } ر \neq ١$$

– هل يصح ان تكتب $جـ_ن = \frac{ٲ(ر^ن - ١)}{(ر-١)}$ ؟

مثال ١

لدى إبراهيم مزرعة لإنتاج البيض فإذا باع في الأسبوع الأول ٤٠٠ صندوق من البيض وكان مقدار ما يبيعه من البيض في كل أسبوع مثلي ما يبيعه في الأسبوع السابق له مباشرة . فما مجموع عدد صناديق البيض المباع بعد أربعة أسابيع ؟

الحل

عدد صناديق البيض المباعة في كل أسبوع يكون متتالية هندسية حيث :

$ٲ = ٤٠٠$ ، $ر = ٢$

مجموع صناديق البيض المباعة بعد أربعة أسابيع = $جـ_٤$

$$جـ_٤ = ٤٠٠ \frac{(١-٢^٤)}{١-٢} = ٤٠٠ \frac{(١-١٦)}{-١} = ٤٠٠ \times ١٥ = ٦٠٠٠ \text{ صندوق}$$

– إذا علمت أن الربح في كل صندوق ٢ ريال فما مجموع أرباح إبراهيم بعد أربعة أسابيع ؟

تدريب ١

أراد أبو ماجد توفير مبلغ من المال لتدريس ابنه في كلية خاصة بعد إكمال مرحلة التعليم العام فقرر بأن يوفر في السنة الأولى ٥٠ ريالاً وفي السنة الثانية ١٠٠ ريال وفي الثالثة ٢٠٠ ريال وهكذا. ما مقدار ما سيوفره أبو ماجد بعد :

ٲ) ٤ سنوات

ب) ٨ سنوات

تمارين ومسائل ٤

١) أوجد مجموع الحدود التسعة الأولى للمتتالية الهندسية التي حدها الأول = ٥ وأساسها = ٢

٢) أوجد مجموع الستة حدود الأولى للمتتالية : −١٢ ، ٤ ، $-\frac{٤}{٣}$ ، ...

٣) أوجد :

أ) $\sum_{ن=١}^{٧} ٢^{ن}$

ب) $\sum_{ن=١}^{٨} (-\frac{١}{٤})^{(ن+١)}$

٤) عندما كان عمر راشد ٥ سنوات وفر ٥٠٠ بيسة وكان في كل سنة تالية يوفر ٣ أمثال ما يوفره في السنة السابقة ، إذا علمت أن عمر راشد الآن ١٣ عاماً وأراد شراء جهاز حاسوب بقيمة ٥٠٠ ريال عماني. هل مجموع ما يوفره راشد منذ أن كان عمره ٥ سنوات حتى الآن يكفي لشراء الجهاز ؟ أثبت ذلك ؟

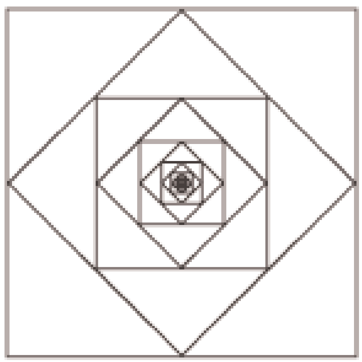
٥) كم حدا يلزم أخذها من المتتالية الهندسية (٣ ، ٩ ، ٢٧ ، ...) ليكون المجموع ١٢٠ ؟

٦) مجموع الحدين الأول والثاني في متتالية هندسية حدودها موجبة ٩ وحدها الثالث ١٢ ، فما مجموع الحدود الستة الأولى ؟

٧) حدد أي من المتتاليات التالية يمكن إيجاد مجموع حدودها إلى ما لا نهاية . ثم أوجد المجموع إن أمكن.

أ) $ح_{ن} = ٣(\frac{١}{٢})^{ن}$ ب) $ح_{ن} = ٤ \times ٢^{ن}$ حـ) $ح_{ن} = ٢ن + ١$

٨) وصلت منتصفات أضلاع مربع لتكوين مربع جديد إذا كـــررت هذه العملية لكل مربع جديد أوجد مجموع متسلسلة محيط المربعات غير النهائية علماً بأن طول ضلع المربع الأساسي ١٠ سم.



١٠ سم

مجموع المتسلسلة الهندسية عندما | ر | < ١

وهذا يعني أن −١ < ر < ١ وفي هذه الحالة نجد أن

$$جـ_{\infty} = \frac{م}{١-ر}$$ وذلك لأن $ر^{ن}$ = صفر عندما | ر | < ١

هل يمكن ايجاد مجموع متسلسلة هندسية لا نهائية عندما | ر | ≥ ١ ؟

نتيجة

مجموع متسلسلة هندسية غير منتهية عندما | ر | < ١ :

$$جـ_{\infty} = \frac{م}{١-ر}$$

تدريب ٣

مستخدماً القانون أوجد مجموع طول ضلع كل من المثلثات اللانهائية في الشكل الهندسي الذي رسمته أمل فيما سبق .

مثال ٣

أوجد مجموع المتسلسلة اللانهائية : ٣+١,٢+٠,٤٨+٠,١٩٢+ ... إذا كان ممكناً

الحل

$$\frac{ح_٢}{ح_١} = \frac{ح_٣}{ح_٢} = \frac{ح_٤}{ح_٣} = ٠,٤$$

المتتالية هندسية وأساسها ٠,٤ < ١

$$\therefore جـ_{\infty} = \frac{٣}{(١-٠,٤)} = ٥$$

تمارين ومسائل عامة

١) كم حدا يلزم أخذها من المتتالية (١٦، ١٢ ، ٨ ، ...) ليكون مجموعها −٢٠ ؟

٢) أوجد عدد حدود المتتالية (−١٠ ، −٧ ، −٤ ، ... ، ١٤) .

٣) إذا كانت (٥ ، ٢س ، ... ، ١٥س + ٢ ، ٦٥) متتالية حسابية فأوجد قيمة س وكذلك رتبة حدها الأخير .

٤) صنبور ماء يصب في الدقيقة الأولى ٢١ لتر ثم يزيد ما يصبه بعد ذلك ٣ لترات في الدقيقة. بعد كم دقيقة يكون مجموع ما يصبه ٩٩٠ لتر ؟

٥) مجمع رياضي به ١٢ مقعداً في الصف الأول فإذا كان كل صف آخر يتسع لعدد من المقاعد يزيد على الصف الذي يسبقه مباشرة بمقدار ٦ مقاعد. كم عدد المقاعد في هذا المجمع إذا كان يتسع لعدد ٦٠ صفا ؟

٦) فكرت عائلة هلال القيام برحلة سياحية إلى إحدى الدول العربية في أول يونيو لمدة أسبوع وعلم من خلال أحد المواقع السياحية في الإنترنت أن تكلفه الرحلة ١٥٠٠ ريالاً عمانياً ولكي يوفر هذا المبلغ بدأ بتوفير ١٠٠ ريالاً في شهر نوفمبر وعلى أن يزيد ما يوفره بنسبة ٢٠٪ كل شهر عن الشهر السابق له . هل يستطيع هلال توفير تكاليف الرحلة في الموعد المحدد؟ بماذا تنصح هلال ؟

٧) أوجد المتتالية الهندسية التي حدها الثاني = ١٠ وحدها السادس = ١٦٠

٨) متتاليتان جميع حدودهما موجبة إحداهما هندسية والأخرى حسابية فإذا كان الحد الأول في كل منهما = ٢ وكان الحد الثالث في الهندسية يساوي الحد الرابع في الحسابية وكان الحد الخامس في الهندسية يساوي ضعف الحد الثامن في الحسابية . فأوجد كلاً من المتتاليتين .

٩) عاملان بدأ كل منهما العمل براتب سنوي قدره ٥٠٠ ريال وكان الأول يحصل على علاوة سنوية ثابتة قدرها ٥٠ ريال ، والثاني يحصل على علاوة سنوية قدرها ٥٪ من راتبه في السنة السابقة ، أحسب راتب كل منهما في السنة الخامسة والعشرين . وكم ينبغي أن تكون العلاوة السنوية للأول حتى يتساوى راتبه مع زميله ؟

١٠) بئر بترول ينتج ٥٠٠ برميل خلال الشهر الأول من عمله ويهبط الإنتاج إلى ٨٠٪ من هذا الإنتاج في الشهر الثاني وإلى ٨٠٪ من إنتاج الشهر السابق له مباشرة في الشهر الثالث وهكذا. أوجد كمية الإنتاج بعد مرور ١٠ شهور .

١١) أوجد مجموع عدد لا نهائي من حدود المتتالية التي حدها النوني $\left(\frac{٢}{٣}\right)^{ن-١}$ ابتداء من الحد الأول .

٩) أوجد مجموع المتسلسلة الهندسية غير المنتهية إذا كانت أ = ١٨ ، ر = $\frac{-٢}{٧}$

١٠) أوجد قيمة $\sum_{ن=١}^{\infty} -٢ \left(\frac{-٥}{٨}\right)^{ن-١}$

١١) أسقط خالد كرة رأسياً من إرتفاع معين وكانت الكرة ترتد كل مرة عند الاصطدام بالأرض إلى أعلى ارتفاعاً قدره $\frac{٢}{٣}$ الإرتفاع السابق مباشرة ، فإذا كان الإرتفاع الذي ارتدت إليه الكرة بعد الإصطدام الأول هو ١٤ قدماً :

أ) ما الإرتفاع الذي ترتد إليه الكرة بعد الإصطدام السادس ؟

ب) ما مجموع المسافات التي قطعتها الكرة منذ لحظة سقوطها حتى اللحظة التي اصطدمت بالأرض للمرة السادسة .

حـ) أوجد مقدار الإزاحة التي حدثت للكرة حتى سكنت في الأرض.

١٢) صهريج مياه سعته ٦٣٠٥ لتراً كان فارغاً ثم ملئ بالماء بواسطة صنبور يصب في الساعة الأولى ١٢٨ لتراً، ويصب في كل ساعة تالية مرة ونصف المرة قدر ما صبه في الساعة السابقة. بعد كم ساعة يمتلئ الصهريج؟

الوحدة الخامسة

هندسة الفضاء

(Space Geometry)

١٢) إقتصد رجل في نهاية سنة ما ٨٠ ريالاً وأخذ يقتصد كل سنة تالية ١٥ ريالاً زيادة عما اقتصده في السنة السابقة لها، أوجد ما إقتصده الرجل في السنة الخامسة عشرة وأوجد كذلك مقدار ما إقتصده في السنوات الخمسة عشرة.

١٣) إذا كان عدد من دخلوا المعرض في اليوم الأول ٤٠ ألف نسمة وأخذ هذا العدد يتزايد بمقدار ثابت قدره (د) كل يوم عن اليوم السابق له مباشرة وكانت مدة المعرض ١٥يوماً وفي نهاية المدة كان مجموع من دَخَل المعرض ٩١٥ ألف نسمة فما عدد الذين دخلوا المعرض في يومه السابع.

١٤) متتالية هندسية حدودها موجبة وكان $ح_{١} + ح_{٣} = ٢٠$ ، $ح_{٣} + ح_{٥} = ٥ ح_{٢}^{٢}$ أوجد المتتالية.

١٥) في متتالية هندسية إذا كان $ح_{ر+٥} = م$ ، $ح_{ر-٥} = ن$ أثبت أن $ح_{٥} = م \left(\frac{ن}{م}\right)^{\frac{ر}{١٠}}$.

١٦) ضع كلاً من الكسور العشرية الدائرية الآتية على صورة كسر اعتيادي:

أ) $٠,\dot{٣}$

ب) $٣,٤\dot{١}\dot{٢}$

جـ) $٠,\dot{٢}\dot{٤}$

الأهداف:

١	تعريف المصطلحات التالية ـ المستوى ـ الفضاء. وتحديدها وكذلك المسلمات الخاصة بها.
٢	حل مسائل في المثلثات تتضمن ثلاثة أبعاد.
٣	إيجاد إحداثيات نقطة ممثلة في النظام الإحداثي ثلاثي الأبعاد.
٤	تمثيل نقطة في النظام الإحداثي ثلاثي الأبعاد.
٥	إيجاد المسافة بين نقطتين في الفضاء وإحداثيات منتصف القطعة المستقيمة الواصلة بينها.
٦	إيجاد مسقط نقطة على مستقيم مستوى ومسقط قطعة مستقيمة على مستوى.
٧	تعريف الزاوية الزوجية (الزاوية بين مستويين) وإيجاد قياسها.
٨	برهنة بعض النظريات ذات العلاقة بالهندسة الفضائية .

هندسة الفضاء Space Geometry

من خلال دراستك السابقة للهندسة المستوية أجب عما يلي :

أ) ما مفهومك للنقطة ؟

ب) كم نقطة تكفي لرسم خط مستقيم ؟

جـ) من خلال خارطة سلطنة عمان بماذا تمثل مدينتك أو قريتك ؟

د) كيف تمثل الشوارع والطرق في الخرائط ؟

هـ) ماذا يمثل لك كل من سطح الطاولة ؟ أرضية الغرفة ؟ جدار غرفة الصف ؟

تدريب ١

بالاستعانة بالشكل المجاور صنِّف كلاً مما يلي إلى

أ) السقف

ب) الجدار

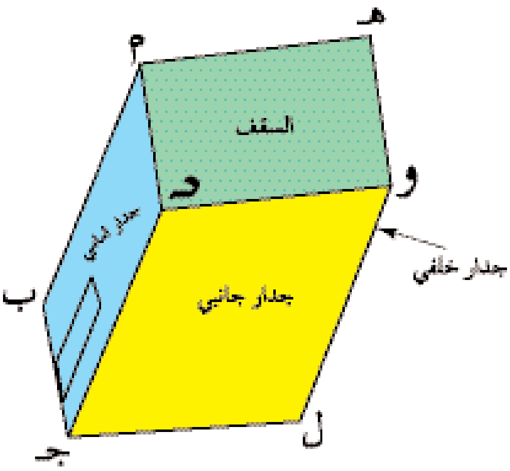
جـ) زوايا الجدار الأمامي

د) حدود السقف

هـ) تقاطع الجدار الخلفي مع الجدار الجا

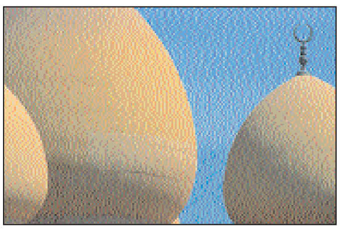
و) تقاطع جدارين متجاورين مع السقف

ز) مما سبق استنتج تعريفا للمستوى.



أمثلة لبعض المستويات:

أمثلة لأسطح غير مستوية:



مسلمات هندسية (Geometry Postulates)

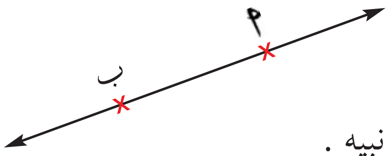
ينطلق أي بناء رياضي عادة من أمور بديهية أو مسلم بها دون حاجة إلى برهانها، وتعتبر مثل هذه المسلمات الركيزة الأولى في بناء وبرهنة مفاهيم البناء الرياضي اللاحقة :

المسلمة الأولى :

أ) يتضمن الخط المستقيم نقطتين مختلفتين على الأقل، أو يتحدد المستقيم تحديداً تاماً إذا علم عليه نقطتان مختلفتان .

ب) يتضمن المستوى ثلاث نقاط على الأقل بحيث لا تقع على استقامة واحدة، أو يتحدد المستوي تحديداً تاماً إذا علم ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة.

يمكن توضيح المسلمة الأولى بالآتي :

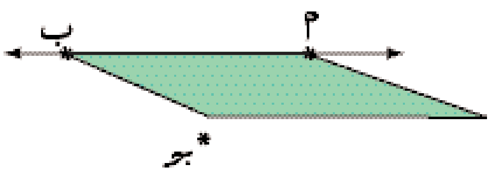


أ) • حدد نقطتين مختلفتين على الورقة مثل أ ، ب

• صل أ ب بخط مستقيم ومده على استقامته من جانبيه .

• حاول أنت وزميلك رسم مستقيم آخر يمر بالنقطتين أ ، ب ولا ينطبق على المستقيم الأول ستجد أنه يستحيل رسم المستقيم الآخر وهذا يعزز المسلمة الأولى.

ب) • ضع ثلاثة نقاط ليست على استقامة واحدة أ ، ب ، حـ ، صل أ ب بمستقيم.



• خذ قطعة من الورق المقوى على شكل مستطيل وثبت طرفها على المستقيم أ ب.

• دور الشكل حول المستقيم أ ب حتى ينطبق على النقطة حـ .

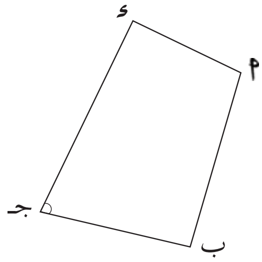
• كم وضعاً تنطبق فيه النقطة جـ على مستوى الورقة خلال دوران الورقة دورة كاملة ؟

تدريب ٤

ارسم مجسماً يحتوي على ٨ أوجه (مستويات) .

تعريف

المستوى: مفهوم هندسي لسطح لا حدود له بحيث أن المستقيم المار بأي نقطتين فيه يقع بأكمله على ذلك السطح، يمثل المستوى بشكل مغلق ويرمز له بحرف واحد مثل س~ أو ثلاثة حروف على الأقل على جوانب الشكل مثل م ب جـ



تدريب ٢

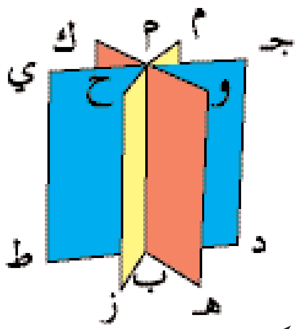
اذكر أمثلة لأسطح مستوية وأمثلة لأسطح غير مستوية.

مثال ١

اعتمد على الشكل المقابل وأجب عما يلي :

م) ما عدد المستقيمات ؟ اذكر أربعة منها .

ب) ما عدد المستويات ؟ اذكر ثلاثة منها .



الحل

عدد المستقيمات = ١٣ مستقيما مثل : $\overleftrightarrow{\text{م ب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{جـ ي}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{د ط}}$

عدد المستويات = ٣ مستويات هي جـ د ط ي ، و هـ ب ك ، م ح ز

تدريب ٣

كم عدد المستويات الموجودة في هرم ثلاثي، رباعي؟

نشاط ١: عدد المستقيمات التي تمر بنقطة.

الأدوات : قلم، ورقة، مسطرة.

الخطوات:

١) حدد نقطة أ على الورقة.

٢) ارسم مستقيما يمر بالنقطة أ.

٣) اطلب من زميلك أن يرسم خطاً مستقيماً آخر يمر بالنقطة أ .

٤) تبادل مع زميلك الأدوار في رسم المستقيمات التي تمر بالنقطة أ .

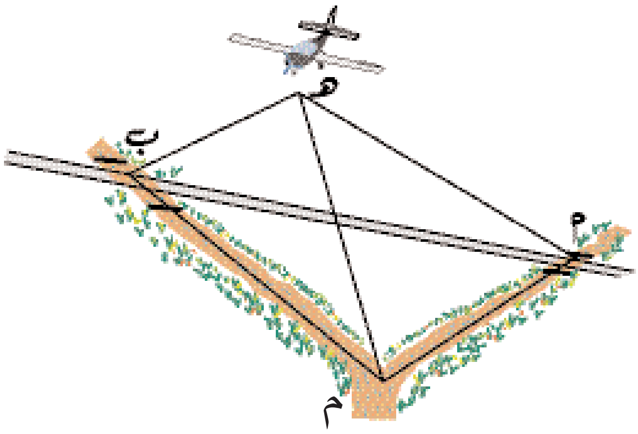
٥) ما عدد المستقيمات التي تمر بالنقطة أ ؟

مثال ٢

رصد طيار في إحدى اللحظات واديين يلتقيان في نقطة ويمر فوقهما شارع قبل نقطة تلاقيهما. مثِّل المشهد بالرسم وحدد عدد المستويات المتكونة .

الحل

يمثل كل من الأودية والشارع خطاً مستقيما فيما يمثل موقع الطائرة في تلك اللحظة نقطة خارجة .



ٲ) الشارع عبارة عن مستقيم وموقع الطائرة عبارة عن نقطة هـ خارج المستقيم .

الشارع مع موقع الطائرة يمثل مستوى هـ ٲ ب

ب) الوادي ٲ م مع موقع الطائرة عبارة عن مستقيم ونقطة خارجة تحدد مستوى هـ ٲ م.

جـ) الوادي ب م وموقع الطائرة هـ عبارة عن مستقيم ونقطة خارجه فهي تمثل مستوى هـ ب م

د) مستوى الأرض ٲ م ب والمتكون من النقاط ٲ، م ، ب والتي لا تقع على استقامة واحدة.

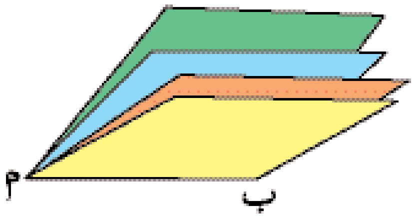
∴ هناك أربعة مستويات .

تدريب ٦

راقب سالم أبناءه من مكان مرتفع أثناء نصب شبكة لصيد السمك الكبير، وأخرى لصيد سمك السردين فإذا أخذت الشبكة الأولى اتجاهاً عمودياً على الشاطئ فيما أخذت الشبكة الثانية اتجاهاً موازياً للشاطئ فمثل المشهد من موقع سالم ثم حدد عدد المستويات .

نظرية (٢) :
المستقيمان المتقاطعان يحددان مستوى وحيد .

المسلمة الثانية : يمر بأي نقطتين مختلفتين عدد لا نهائي من المستويات .

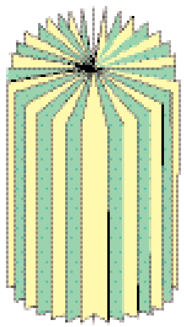


خذ كراسة واعتبر كعب الكراسة يمثل مستقيماً ، وكل صفحة من الصفحات تمثل مستوى فكم صفحة ترتبط بكعب الكراسة ؟

كم مستوى يمر بالمستقيم الذي يمثل كعب الكراسة ؟

هل يمكن إضافة صفحات أخرى تمر بكعب الكراسة ؟

هل تستطيع تحديد عدد المستويات التي يمكن أن تمر بالمستقيم الذي يمثل كعب الكراسة ؟



هل تستطيع تحديد عدد المستويات التي تمر بالمستقيم الذي يشكل محور الشكل المرسوم جانباً ؟

تدريب ٥

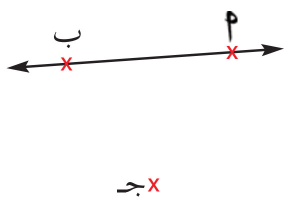
اعط مثالامن الحياة تبين فيه اشتراك عدة مستويات في مستقيم واحد .

نظرية (١) :
يمر بمستقيم معلوم ل ونقطة خارجة عنه جـ مستوى وحيد.

توضيح للنظرية :

انظر إلى محور دوران الباب في غرفة الصف، واعتبره الخط المستقيم، وحدد نقطة خارج هـذا الخط مثل نقطة التقاء القفل مع الإطار الخارجي للباب . ستلاحظ أن الباب يأخذ أوضاعاً كثيرة جداً أثناء دورانه، منها حالة وحيدة يلامس النقطة وهي عند إغلاق الباب .

برهان النظرية :

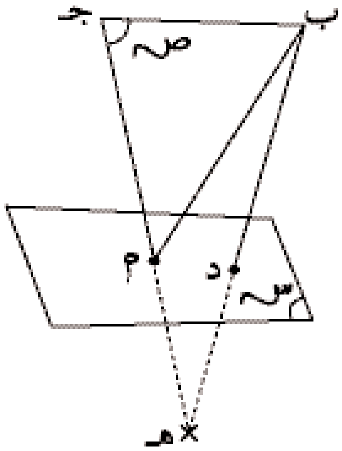


لاحظ أن :

م $\in \overleftrightarrow{\text{مب}}$ ، ب $\in \overleftrightarrow{\text{مب}}$ ، جـ $\notin \overleftrightarrow{\text{مب}}$

∴ م، ب ، جـ نقاط ليست على اسقامة واحدة . فهي تحدد مستوى وحيد . (المسلمة الأولى ب)

نظرية (٣) :
إذا اشترك مستويان في نقطة فإنهما يشتركان في مستقيم.



المعطيات : المستوى س ، والمستوى ص يشتركان في النقطة أ

المطلوب : إثبات أنهما يشتركان في مستقيم .

العمـــل : مد المستقيم حـ أ إلى هـ في الجهة الثانية من المستوى س

البرهـان : $\overleftrightarrow{\text{حـ أ}}$ ⊂ ص ∴ هـ ∈ ص (من تعريف المستوى)

ب ∈ ص ، هـ ∈ ص

∴ $\overleftrightarrow{\text{ب هـ}}$ ⊂ ص (من تعريف المستوى)

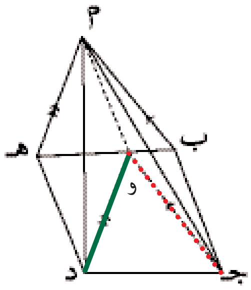
لكن النقطتان ب ، هـ تقعان في جهتين مختلفتين من المستوى س

∴ $\overleftrightarrow{\text{ب هـ}}$ يقطع المستوى س في نقطة مثل د

∴ أ ، د ∈ س ، أ ، د ∈ ص

∴ المستقيم أ د يقع في المستويين س ، ص

مثال ٤



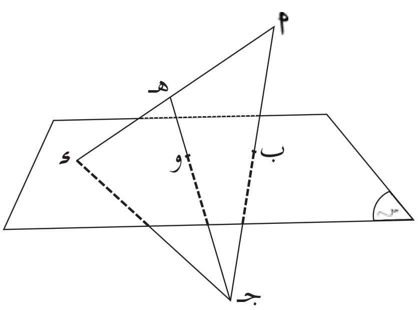
الشكل المقابل يمثل هرم قاعدته مربع ب حـ د هـ . أ ب حـ ، أ د هـ مستويان يشتركان في النقطة أ أثبت أنهما يشتركان في مستقيم

الحل

من جـ ارسم مستقيماً في المستوى أ ب حـ (لاحظ أن المستوى أ ب جـ ممتد من جميع الجهات) يوازي ب أ ،وارسم من د مستقيماً في المستوى أ د هـ يوازي هـ أ سيلتقيان في نقطة مثل و حيث أن أ ∈ أ ب حـ، أ ∈ أ د هـ ، وكـذلك و ∈ أ ب حـ ، و ∈ أ د هـ فـإن $\overleftrightarrow{\text{أ و}}$ ⊂ أ ب حـ ، $\overleftrightarrow{\text{أ و}}$ ⊂ أ د هـ .

∴ المستويان يشتركان في مستقيم.

مثال ٥

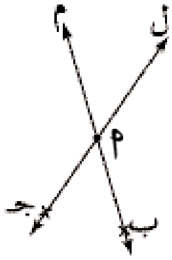


$\overline{\text{أ جـ}}$ تقطع المستوى س في نقطة ب رسم $\overleftarrow{\text{أ ء}}$ يلاقي المستوى س في ء ثم أخذت نقطة هـ ∈ $\overline{\text{أ ء}}$ ورسم $\overline{\text{هـ جـ}}$ فقطع المستوى س في و اثبت أن النقط ب ، و ، ء على استقامة واحدة.

البرهان:

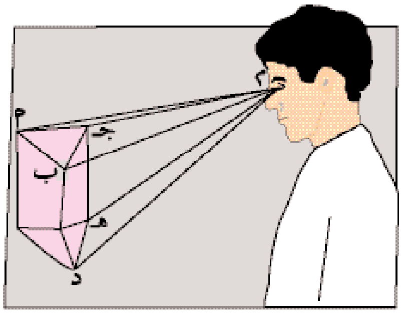
$\overleftrightarrow{\text{ل}}$ يتحدد بالنقطتين أ، حـ مثلا، $\overleftrightarrow{\text{م}}$ يتحدد بالنقطتين أ، ب مثلا، النقاط أ ، ب ، حـ ليست على استقامة واحدة فهي تحدد مستوى وحيد مثل س

$\therefore$ $\overleftrightarrow{\text{ل}} \subset$ س ، $\overleftrightarrow{\text{م}} \subset$ س



مثال ٣

اكتب عدد المستويات المتكونة من الأشعة الواردة من الجسم إلى عين المشاهد في الصورة واذكر اسم اثنين منها.



الحل

عدد الأشعة في الشكل = ٥

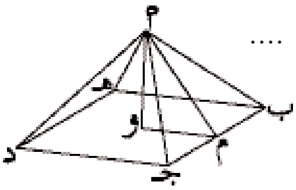
كل خطين متقاطعين (متلاقيين) تشكل مستوى

$\therefore$ عدد المستويات = $\binom{\text{٥}}{\text{٢}}$ = $\frac{\text{٥} \times \text{٤}}{\text{٢}}$ = ١٠ مستويات

من هذه المستويات : م أ حـ ، م أ ب ، حـ م ب ، أ م د ، ....

تدريب ٧

أوجد عدد المستويات المتشكلة في الشكل المرافق .



تدريب ٨

أ ثبت أنه: إذا وجد خطين مستقيمين متوازيين فإنهما يعينان مستوى وحيد.

نتيجة

إذا تقاطعت ثلاث مستقيمات مثنى مثنى فإنها تحدد مستوى وحيد .

المعطيات :

$\overleftrightarrow{\text{ل}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{م}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ن}}$ بحيث $\overleftrightarrow{\text{ل}}$ يقطع $\overleftrightarrow{\text{م}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ن}}$ في أ ، وعلى الترتيب ، $\overleftrightarrow{\text{م}}$ يقطع $\overleftrightarrow{\text{ل}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ن}}$ في أ، ب على الترتيب، $\overleftrightarrow{\text{ن}}$ يقطع $\overleftrightarrow{\text{ل}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{م}}$ في و ، ب على الترتيب.

المطلوب: إثبات أن المستقيمات ل ، م ، ن يجمعها مستوى وحيد.

البرهان: لاحظ أن النقطتين أ ، ب تنتميان للمستقيم م لكن النقطة و لا تنتمي للمستقيم م

$\therefore$ النقاط أ، و ، ب ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة

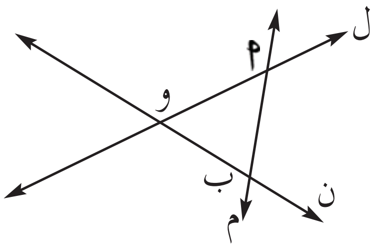
$\therefore$ يجمعها مستوى واحد أ و ب

$\overleftrightarrow{\text{أب}} \in$ المستوى أ و ب

$\overleftrightarrow{\text{أو}} \in$ المستوى أ و ب

$\overleftrightarrow{\text{بو}} \in$ المستوى أ و ب

$\therefore$ المستقيمات ل ، م ، ن يجمعها مستوى وحيد



تمارين ومسائل ١

١) إذا كانت النقاط ٢، ب ، حـ ليست على استقامة واحدة فما عدد المستقيمات التي تمر بها معاً؟ وما عدد المستويات التي تمر بها ؟

٢) إذا كانت ٢ ، ب ، حـ ثلاث نقاط على استقامة واحدة فما عدد المستقيمات التي تمر بهذه النقاط ؟ وما عدد المستويات التي تمر بالنقاط الثلاثة ؟

٣) انقل إلى دفترك، واملأ الفراغ فيما يلي :

٢) ــــــ تحدد خط مستقيم   ب) ثلاث نقاط ــــــ تحدد مستوى

جـ) مستقيمان ــــــ يحددان مستوى   د) مستويان ــــــ يحددان مستقيم

٤) اذكر نص التعريف أو المسلمة أو النظرية التي تعالج كلاً من النقاط التالية علماً بأن النقاط ٢ ، ب ، جـ ليست على استقامة واحدة .

٢) ٢ ب حـ مستوى وحيد   ب) $\overleftrightarrow{\text{٢ب}}$ مستقيم وحيد

حـ) $\overleftrightarrow{\text{٢ب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{بحـ}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{٢حـ}}$ تقع في المستوى ٢ ب جـ .

د) المستوي م ب حـ ، والمستوى ٢ ب جـ يتقاطعان في المستقيم $\overleftrightarrow{\text{بحـ}}$.

٥) كم مستقيماً تستطيع رسمه في كل حالة مما يلي؟

٢) ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة   ب) تقاطع مستويين .

حـ) أربع نقاط مستوية منها ثلاث على استقامة واحدة .

د) أربع نقاط مستوية لا تقع أي ثلاث منها على استقامة واحدة .

٦) كم مستوى تستطيع تحديده في كل حالة مما يلي :

٢) أربع نقاط غير مستوية لا تجمع أي ثلاثة منها خط مستقيم .

ب) خمس نقاط غير مستوية منها ثلاث على استقامة واحدة .

٧) ٢) فسر متى تستقر طاولة بثلاثة أرجل على الأرض .

ب) بين متى لا يمكن لطاولة لها أربع أرجل أن تستقر على الأرض .

المعطيات:

أجـ تقطع المستوى س في ب ، أء يلاقي المستوى س في ء ، هـ حـ تقطع المستوى س في و.

المطلوب:

إثبات أن النقط ب ، و ، ء على استقامة واحدة.

البرهان:

أء ، والنقطة حـ يعينان مستوياً هو أ ء حـ وليكن المستوى ص ،

∵ ب ∈ أحـ ، أحـ ⊂ ص ∴ ب ∈ المستوى ص ، ء ∈ المستوى ص

ولكن النقط ب ، و ، ء تنتمي جميعها للمستوى س

∴ النقط ب ، و ، ء واقعة في المستويين س ، ص

وحيث أن المستويين غير منطبقين

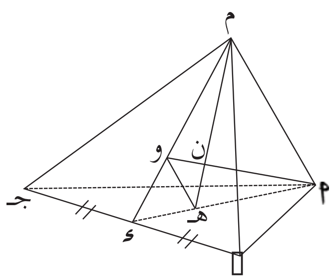
∴ ب و ء هو خط تقاطع المستويين س ، ص

أي أن ب ، و ، ء على استقامة واحدة. (وهو المطلوب)

تدريب ٩

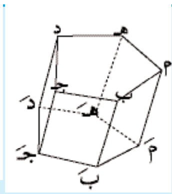
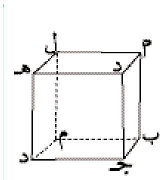
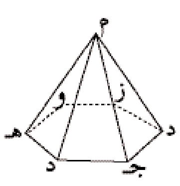
م . أب جـ هرم ثلاثي قاعدته المثلث أ ب جـ فإذا كانت هـ هي ملتقى المتوسطات في القاعدة أ ب جـ ، و هي ملتقى المتوسطات في الوجه م ب حـ ، فاثبت أن:

أو ، م هـ يجمعهما مستوى واحد.



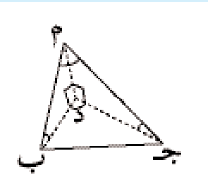
الفراغ (الفضاء) Space

نشاط ١: تحديد المجسمات (الفراغ)

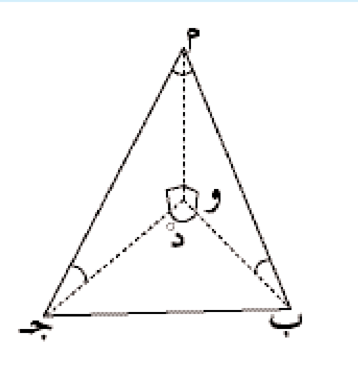
الأدوات : مجسمات هندسية (هرم ثلاثي ، هرم رباعي ، مكعب ، منشور ....)

الخطوات :



١) خذ أحد المجسمات وحدد في جدول عدد النقاط (الرؤوس) ، عدد المستقيمات (الحواف) عدد المستويات (الأوجه) .

٢) يأخذ زميلك مجسماً آخر ويقوم بنفس العمل تحتسب درجة لمن يكمل العمل بشكل صحيح.



٣) تناوب وزميلك العمل حتى تنهيا جميع المجسمات .

أجب عن الأسئلة التالية :

هل يمكن رسم مستوى يمر بجميع رؤوس المجسم ؟ وضح إجابتك.

هل يمكن رسم مستقيم يمر بجميع الرؤوس ؟ وضح إجابتك .

هل يمكن رسم مستقيم يقطع جميع مستويات الأوجه ؟ وضح إجابتك .

ما المجسم الذي له أقل عدد من الرؤوس ؟

ما أقل عدد من النقاط يمكن أن تكون رؤوس مجسم ؟ اعط وصفاً لهذه النقاط .

لعلك توصلت من النشاط السابق أن أقل عدد من النقاط التي يمكن أن تشكل مجسماً وتحتل حيزاً في الفراغ هي أربع نقاط وذلك في حالة الهرم الثلاثي حيث تكون عبارة عن ثلاث نقاط مستوية (تقع في مستوٍ واحد) ونقطة خارجة .

المسلمة الثالثة :

يتحدد الفراغ بأربع نقط غير مستوية (لا يجمعها مستوى واحد) على الأقل .

تدريب ١

حدد أية أربع نقاط غير مستوية وحاول تمرير مستوى بكل ٣ نقاط، كم مستوى تحتاج؟ وما الشكل الذي ينتج لديك؟

٨) أجب عما يلي :

أ) كم مستقيماً يمكن أن يمر بنقطة معلومة ؟

ب) كم مستوى يمكن أن يمر بمستقيمين متوازيين ؟

جـ) إذا تقاطعت ثلاث مستويات فما أقل عدد، وما أكبر عدد من المستقيمات يمكن الحصول عليها؟ مثِّل ذلك على غرفة الصف .

٩) اثبت أن أضلاع المستطيل تقع جميعا في مستوى واحد.

١٠) $\overline{\text{أجـ}}$ تقطع المستوى س في ب بحيث أب = ب جـ ، رسم $\overleftarrow{\text{أ}}$ يقطع المستوى س في د ثم نصفت $\overline{\text{أد}}$ في هـ ورسم $\overline{\text{هـ جـ}}$ فقطع المستوى س في و.

اثبت إن:

أ) النقط ب ، و ، د تقع على استقامة واحدة.

ب) ب و = $\frac{١}{٢}$ و د ، هـ و = $\frac{١}{٢}$ و جـ .

١١) إذا كان ل١ ، ل٢ مستقيمين مختلفين متقاطعين في نقطة أ، $\overleftrightarrow{\text{ل}}_{١}$ ⊇ المستوى س ، $\overleftrightarrow{\text{ل}}_{٢}$ ⊇ مستوى آخر ص وتوجد نقطة أخرى ب تقع على $\overleftrightarrow{\text{ل}}_{١}$ وتوجد نقطة أخرى جـ تقع على $\overleftrightarrow{\text{ل}}_{٢}$

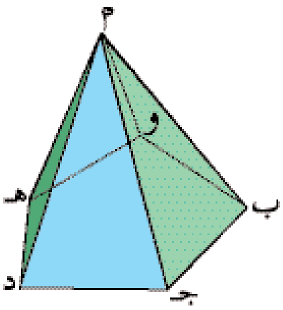
ارسم شكلا يبين ذلك، ثم أكمل:

أ) المستوى ب أ جـ ∩ ص = ...

ب) المستوى جـ أ ب ∩ س = ...

جـ) س ∩ ص ∩ المستوى ب أ جـ = ...

أ) علاقة مستقيم مع مستقيم



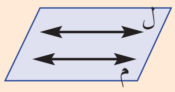
أنظر إلى الشكل المجاور فهو يمثل هرماً خماسيا، وأجب عما يلي :

- كم مستوى (وجه) يكوِّن المجسم ؟
- كم مستقيماً (حافة) يوجد في الشكل ؟
- ابحث عن مستقيمين في مستوى يكونان غير متقاطعين وغير متوازيين
- هل تتلاقى جميع المستقيمات معاً ؟
- اعط مثالاً على ثلاثة مستقيمات متلاقية في نقطة .
- اعط مثالاً على مستقيمين متلاقين.
- اعط مثالاً على مستقيمين لا يلتقيان أبداً ولا يتوازيان .

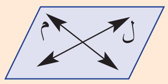
نتيجة

- إذا وقع مستقيمان في مستوى فإما أن يكونا متوازيين أو متقاطعين .
- لأي مستقيمين في الفضاء ثلاثة أوضاع .

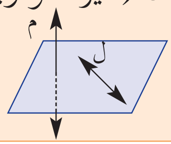
أ) متوازيان



ب) متقاطعان



جـ) متخالفان (غير متوازين وغير متقاطعين).



مثال ٢

أ) اذكر ثلاثة أزواج من المستقيمات المتخالفة في غرفة الصف .

ب) اذكر أربعة أزواج لمستقيمات متوازية في غرفة الصف وبين المستوى الذي يجمع كل زوج منها .

جـ) اذكر زوجين من المستقيمات المتقاطعة (المتلاقية) في غرفة الصف ثم بين المستوى الذي يجمعهما.

الحل

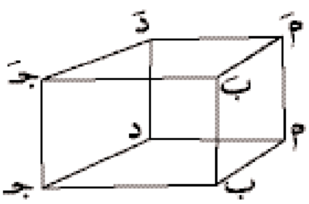
افرض أن الشكل المقابل يمثل غرفة الصف :

أ) مستقيمات متخالفة : (أأ′، جـ د) ، (ب ب′، أ د) ، (أ′ب′ ، د د′).

ب) مستقيمات متوازية :

(أ ب ، أ′ب′) في المستوى أ ب ب′أ′،

(أ د ، ب جـ) في المستوى أ د جـ ب .....



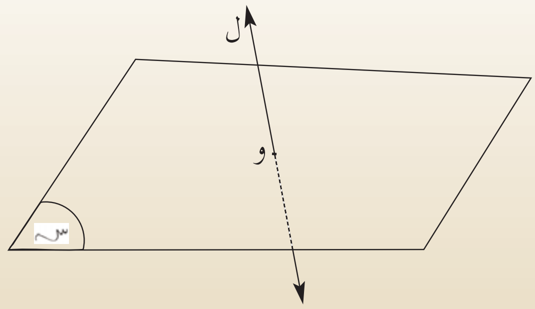
جـ) مستقيمات متقاطعة : (أأ′، أ ب) ، (ب جـ ، جـ

تعريف

الفراغ (الفضاء) هو مجموعة غير منتهية من النقط، يحتوي كل ما نفكر فيه من أجسام أو مستويات أو خطوط مستقيمة.

إذن نستطيع أن نقول أن الفراغ هو المجموعة الشاملة التي نتحدث في إطارها طالما كان حديثنا منصبا على مجموعة النقط.

وكل مستوى في الفراغ يمكن أن نتصور امتداده من جميع الجهات، وبقية نقط الفراغ (غير نقط المستوى) تكون مجموعتين مختلفتين من النقاط يقع كل نصف على أحد جهتي المستوى.



مثال ١

لاحظ الشكل المقابل التالي وحدد ما يلي (إن أمكن):

أ ـ مستويان متوازيان.

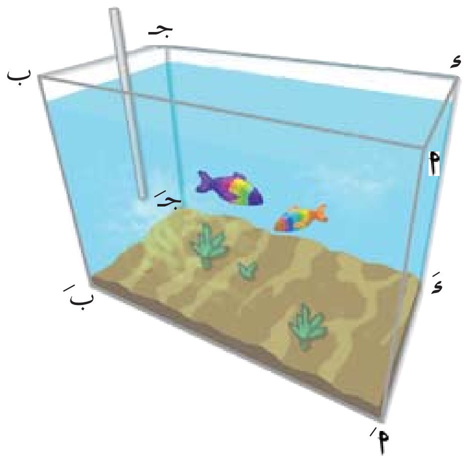
ب ـ مستويان متعامدان.

جـ ـ خطوط تقاطع المستويات.

د ـ نقطتان لا يمكن أن يجمعها مستوى واحد.

هـ ـ ثلاث نقط لا يمكن أن يجمعها مستوى واحد.

و ـ أربع نقط لا يمكن أن يجمعها مستوى واحد.



الحل

أ ـ المستوى أ ب جـ ء يوازي المستوى أَ بَ جَ ءَ.

ب ـ المستوى أ أَ ءَ ء عمودي على المستوى أَ بَ جَ ءَ.

جـ ـ أحرف شبه المكعب مثل أب، ب جـ، جـ ء، .....

د– لا يوجد

هـ – لا يوجد.

و– أ ب جـ جَ

تدريب ٢

صنف ما يلي إلى: نقطة ، مستقيم ، مستوى ، فضاء مع توضيح السبب :

أ) سطح البحر .

ب) موقع مدينة على الخارطة .

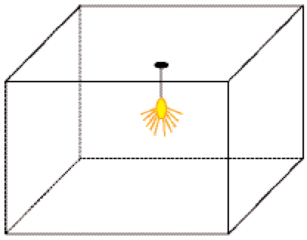
جـ) الشعاع الواصل من الجسم إلى العين .

د) شجرة .

هـ) المكان الذي تتحرك فيه مروحة الصف .

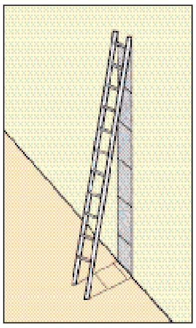
و) جسم الإنسان .

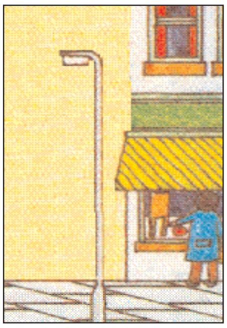
تدريب ٤



استخدم الاستنتاج الذي توصلت إليه وأجب عما يلي :

أ) يتدلى مصباح من السقف بسلك ، ما علاقة المستقيم الذي يمثله السلك مع جدران الغرفة؟





ب) إذا ارتكز سلم على الأرض وعلى جدار رأسي فما علاقة المستقيم الذي يمثله السلم بكل من مستوى الأرض ، ومستوى الجدار ؟

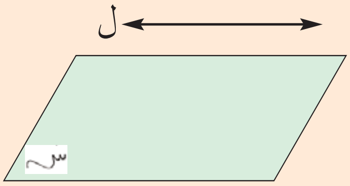
جـ) ما علاقة المستقيم الذي يمثل ظل عمود الكهرباء مع مستوى الأرض ؟

د) ما علاقة المستقيم الذي يمثل رجل الطاولة مع مستوى سطح الطاولة ؟

لعلك توصلت مما سبق إلى النتائج التالية :

نتائج

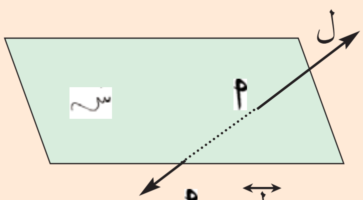
علاقة المستقيم بالمستوى تتحدد:



أولاً: المستقيم $\overleftrightarrow{ل}$ يوازي المستوى س~ وهناك حالتان:

١) $س \cap \overleftrightarrow{ل} = \emptyset$ أي لا توجد نقاط مشتركة بينهما.

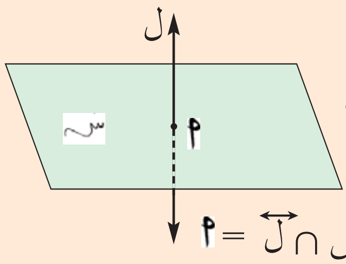
٢) $س \cap \overleftrightarrow{ل} = \overleftrightarrow{ل}$ أي جميع نقاط المستقيم مشتركة مع المستوى (المستقيم واقع بتمامه في المستوى).



$س \cap \overleftrightarrow{ل} = أ$

ثانياً: المستقيم يقطع المستوى في نقطة وله حالتان:

١) يكون المستقيم مائل على المستوى أي قياس الزاوية بين المستقيم والمستوى $\neq 90°$

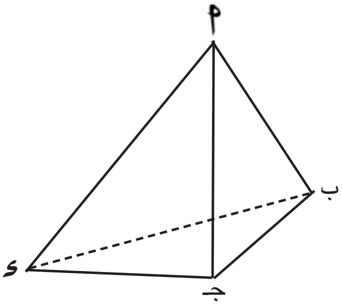


$س \cap \overleftrightarrow{ل} = أ$

٢) المستقيم يُعامد المستوى أي قياس الزاوية بين المستقيم والمستوى $= 90°$

تدريب ٣

في الشكل الموضح:



هرم ثلاثي رأسه ﺃ وقاعدته ∆ ب جـ ء

ﺃ) اذكر أسماء ثلاث مستويات.

ب) اذكر خط تقاطع كل زوج منها.

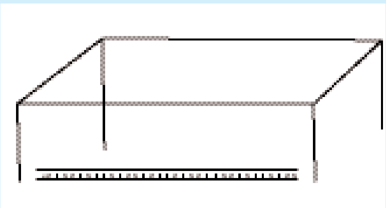
جـ) اذكر اسم كل مستوى والقطع المستقيمة القاطعة له.

ء) اذكر خط تقاطع مستوى القاعدة ب جـ ء مع الوجه الجانبي ﺃ جـ ء .

هـ) اذكر اسم ثلاث أزواج من المستقيمات المتخالفة.

ب) علاقة مستقيم مع مستوى

نشاط ٢: أوضاع المستقيم المختلفة:



المـــواد : طاولة ، متر خشبي

الخطوات :

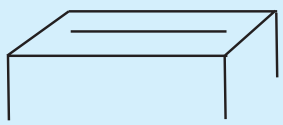
١) ضع المتر الخشبي على الأرض أسفل الطاولة ثم أجب عن الأسئلة التالية :

ﺃ) هل هنالك نقاط مشتركة بين مستوى سطح الطاولة $\tilde{س}$ والمتر الخشبي ل ؟

$\tilde{س} \cap ل = ؟$

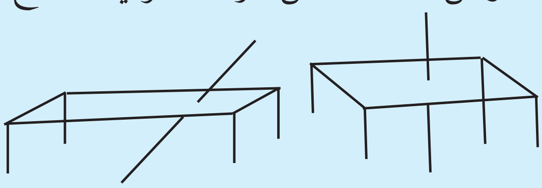
ب) هل جميع النقاط على المتر الخشبي تبعد عن سطح الطاولة نفس البعد ؟

جـ) ما علاقة الخط المستقيم الذي يمثله المتر الخشبي مع المستوى الذي يمثله سطح الطاولة ؟



٢) ضع المتر الخشبي على سطح الطاولة، ثم أجب عن الأسئلة الثلاثة السابقة .

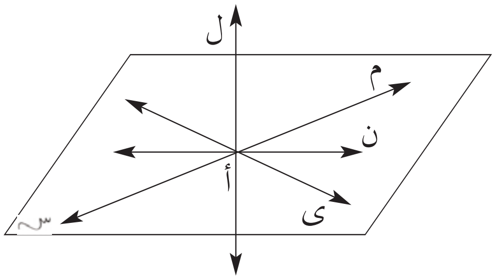
٣) ضع المتر الخشبي بشكل مائل على الأرض بحيث يمس طرفه العلوي السطح السفلي للطاولة، ثم أجب عن الأسئلة السابقة .



مما سبق استنتج أوضاع المستقيم المختلفة مع المستوى .

تعريف

يقال لمستقيم ل أنه عمودي على المستوى س إذا كان المستقيم ل عمودياً على جميع المستقيمات الواقعة في المستوى س ، ونعبر عن ذلك بالرموز كالآتي: $\overleftrightarrow{ل}$ ⊥ س .



ففي الشكل المقابل:

ل ∩ س = {أ}

ل عمودي على المستقيمات: م ، ن ، ...

الواقعة في المستوى س ، والمارة بنقطة أ.

∴ ل ⊥ س .

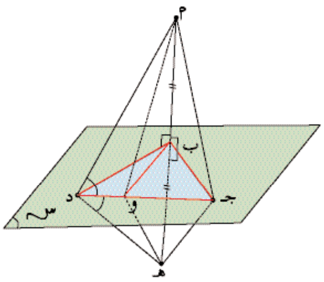
نظرية (٤) :

المستقيم العمودي على مستقيمين غير متوازيين في المستوى يكون عمودياً على المستوى.

توضيح للنظرية : لاحظ خط تقاطع جدارين في غرفة الصف يكون عمودياً على كل من خطي تقاطع الجدارين مع مستوى سطح الأرض، فإذا رسمت عدة مستقيمات في مستوى أرض الغرفة تمر بنقطة التقاطع فما قياس الزوايا بين خط تقاطع الجدارين مع تلك المستقيمات .

برهان النظرية :

المعطيات :



س مستوى فيه $\overleftrightarrow{ب حـ}$ ، $\overleftrightarrow{ب د}$ غير متوازيين (متلاقيان)،

$\overleftrightarrow{ا ب}$ ⊥ $\overleftrightarrow{ب حـ}$ ، $\overleftrightarrow{ا ب}$ ⊥ $\overleftrightarrow{ب د}$

المطلوب : إثبات أن $\overleftrightarrow{ا ب}$ يعامد مستقيماً آخر في المستوى مثل $\overleftrightarrow{ب و}$

العمـــل : نصل $\overline{ا د}$ ، $\overline{ا حـ}$ ، ونمد $\overline{ا ب}$ تحت المستوى بقدر طوله إلى هـ ،نصل $\overline{حـ هـ}$ ، $\overline{د هـ}$ ، $\overline{و هـ}$

البرهان : من تطابق المثلثين ا ب حـ ، هـ ب حـ بضلعين وزاوية محصورة (قائمة) ينتج أن

ا حـ = حـ هـ

ومن تطابق المثلثين ا ب د ، هـ ب د بضلعين وزاوية محصورة ينتج أن ا د = د هـ

ومن تطابق المثلثين ا حـ د ، هـ حـ د بثلاثة أضلاع ينتج أن ق (ا $\hat{د}$ حـ) = ق (هـ $\hat{د}$ حـ)

أي ق (ا $\hat{د}$ و) = ق (هـ $\hat{د}$ و) .

من تطابق المثلثين ا د و ، هـ د و بضلعين وزاوية محصورة ينتج أن ا و = و هـ

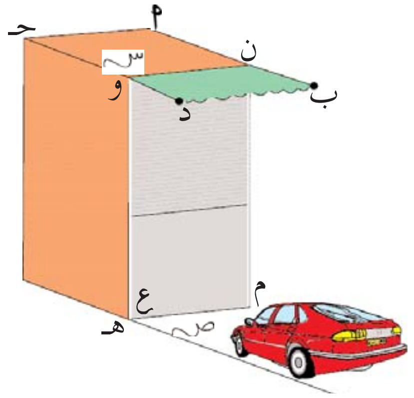
ومن تطابق المثلثين ا ب و ، هـ ب و بثلاثة أضلاع ينتج أن ق (و $\hat{ب}$ هـ) = ق (ا $\hat{ب}$ و)

لكن مجموعهما ١٨٠° على استقامة واحدة .

∴ $\overline{ا ب}$ ⊥ $\overline{ب و}$

∴ $\overline{ا ب}$ ⊥ س وهو المطلوب .

مثال ٣



أ) قام عامر ببناء كراج لسيارته الجديدة كما عمل مظلة من القماش أمام الكراج . وضح علاقة الأذرع التي تحمل مظلة القماش $\overline{\text{أب}}$ ، $\overline{\text{حـ د}}$ بكل من : مستوى سطح الكراج . مستوى أرض الكراج ، مستوى باب الكراج .

ب) هل $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ يوازي كل مستقيم في مستوى أرض الكراج ؟ وضح إجابتك .

جـ) هل $\overleftrightarrow{\text{حـ د}}$ يلتقي مع كل مستقيم في مستوى باب الكراج ؟ وضح إجابتك .

الحل

أ) الأذرع $\overline{\text{أب}}$ ، $\overline{\text{حـ د}}$ تقع في مستوى سطح الكراج، $\overline{\text{أب}} \cap$ س $=$ $\overline{\text{أب}}$ أي أن $\overline{\text{أب}}$ // س

– الأذرع $\overline{\text{أب}}$، $\overline{\text{حـ د}}$ لا تلتقي نهائياً مع مستوى أرض الكراج $\overline{\text{أب}} \cap$ ص $= \emptyset$، $\overline{\text{أب}}$ // ص

– الأذرع $\overline{\text{أب}}$ ، $\overline{\text{حـ د}}$ تتقاطع مع مستوى الباب في النقطتين ن ، و ، $\overline{\text{أب}} \cap$ ع $=$ {ن} ، $\overline{\text{حـ د}} \cap$ ع $=$ {و} وعمودية عليه .

ب) $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ // ص لكنه لا يوازي كل مستقيم فيه فمثلاً $\overleftrightarrow{\text{م هـ}} \subseteq$ ص لكن $\overleftrightarrow{\text{أب}} \nparallel \overleftrightarrow{\text{م هـ}}$

$\therefore$ $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{م هـ}}$ متخالفان

جـ) $\overline{\text{حـ د}} \cap$ ع $=$ {و} لكنه لا يلتقي مع كل مستقيم في ع فمثلا $\overline{\text{م ن}} \subset$ ع لكن $\overline{\text{م ن}} \cap \overline{\text{حـ د}} = \emptyset$

$\therefore$ $\overleftrightarrow{\text{م ن}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$ متخالفان

تدريب ٥

اعط أمثلة واقعية على مستقيم يوازي مستوى إلا أنه لا يوازي كل مستقيم في المستوى.

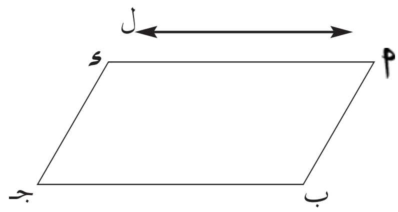
نتيجة

إذا وازى مستقيم مستوى فإن المستقيم لا يوازي كل مستقيم في المستوى

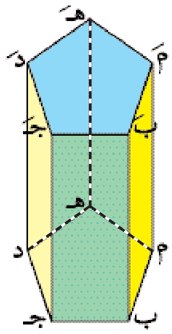
لاحظ أن:

$\overleftrightarrow{\text{ل}}$ // $\overleftrightarrow{\text{أء}}$

لكن $\overleftrightarrow{\text{ل}} \nparallel \overleftrightarrow{\text{أب}}$ ، كذلك $\overleftrightarrow{\text{ل}} \nparallel \overleftrightarrow{\text{جـ ء}}$



تدريب ٦



استخدم شكل مكعب أو منشور رباعي ، سداسي ، ثماني وحدد فيه ما يلي:

أ) الأوجه (المستويات) المتوازية .

ب) المستويات المتقاطعة وحدد خطوط التقاطع .

جـ) هل هنالك مستويات ليست متقاطعة ؟ اذكرها إن وجدت .

نتائج

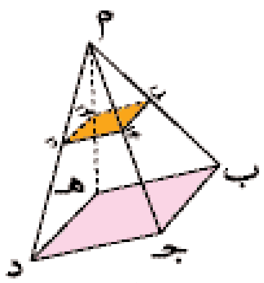
لأي مستويين في الفضاء مثل س ، ص توجد ثلاث حالات مختلفة هي:

١) س // ص ويكون س ∩ ص = ∅

٢) س // ص ويكون المستوى س ينطبق على المستوى ص .

٣) س ∩ ص = ل↔ أي المستوى س يتقاطع مع المستوى ص في خط مستقيم.

تمارين ومسائل ٢



١) من الرسم المقابل أجب عما يلي :

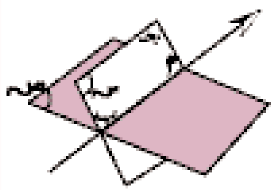
أ) اذكر ثلاثة أزواج من المستقيمات المتوازية .

ب) اذكر زوجان من المستقيمات المتخالفة .

جـ) اذكر جميع المستويات التي تشكل أوجه الشكل ب جـ د هـ بَ جـَ دَ هـَ .

د) اذكر أزواج المستويات التي يكون خطوط تقاطعها ، ب جـ↔ ، جـ جـَ↔ ، م هـ↔

هـ) ما علاقة ب جـ↔ بالمستوى بَ جـَ دَ هـَ ؟



٢) اعتمد على الشكل المقابل، وأجب عما يلي :

م) ضع نقطة مثل جـ في المستوى س وبحيث لا تقع في المستوى ص .هل يمكن للنقطة جـ أن تقع على الخط م ب ؟ ولماذا ؟

ب) ضع نقطة مثل هـ بحيث تقع في كل من المستويين س ، ص فأين يمكن لهذه النقطة أن تقع ؟ وضح إجابتك .

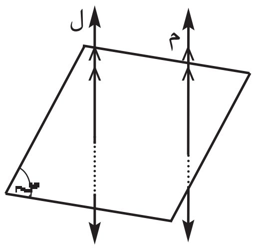
٣) من نقطة على عمود للكهرباء كم مستقيماً يمكن أن ترسم بحيث يوازي مستوى الأرض ؟

٤) من خلال جدران غرفة الصف، وأرضيتها، والسقف. بيّن كيف يمكن تمثيل المستويات، والنقاط، والمستقيمات؟ ثم اعط أمثلة على: مستويات متوازية، مستويات متقاطعة، مستقيمات متوازية، مستقيمات متقاطعة، ومستقيمات متخالفة .

نتيجة

المستقيم الذي يوازي مستقيم معامد لمستوى يكون عمودياً على المستوى .

توضيح النتيجة :



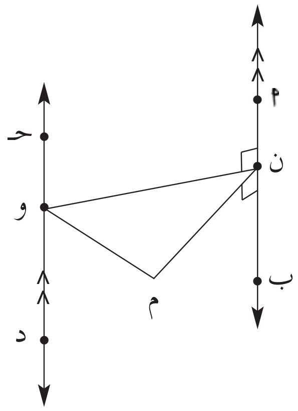
$\because$ $\overleftrightarrow{\text{م}}$ // $\overleftrightarrow{\text{ل}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ل}}$ $\perp$ المستوى س

$\therefore$ $\overleftrightarrow{\text{م}}$ $\perp$ المستوى س

مثال ٤ في الشكل:

$\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ // $\overleftrightarrow{\text{حـ د}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ $\perp$ $\overleftrightarrow{\text{ن م}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ $\perp$ $\overleftrightarrow{\text{ن و}}$

اثبت أن ق (م $\hat{\text{و}}$ حـ) = ٩٠° .



الحل

$\because$ $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ $\perp$ $\overleftrightarrow{\text{ن م}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ $\perp$ $\overleftrightarrow{\text{ن و}}$	(معطى)
$\therefore$ $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ $\perp$ المستوى م ن و	(نظرية ٣)
$\therefore$ ولكن $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ // $\overleftrightarrow{\text{حـ د}}$	
$\therefore$ $\overleftrightarrow{\text{حـ د}}$ $\perp$ المستوى م ن و	(نتيجة نظرية ٣)
$\overleftrightarrow{\text{حـ د}}$ $\perp$ $\overleftrightarrow{\text{م و}}$	(تعريف)
ق (م $\hat{\text{و}}$ حـ) = ٩٠°	

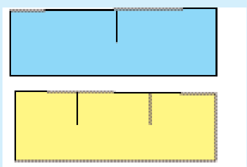
جـ – علاقة مستوى مع مستوى

نشاط ٣: المستويات المتوازية والمستويات المتقاطعة

المواد : قطع من الورق المقوى على شكل مستطيل ، مقص

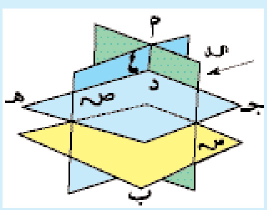
الخطوات :

١) خذ قطعتين من الورق المقوى وقص من الوسط بحيث لا ينفصل الجزآن كما في الشكل.



٢) خذ قطعتين أخريين وقصهما من موقعين دون أن تفصل الأجزاء .

٣) ركب القطع لتصبح كما في الشكل، ثم أجب عن الأسئلة الآتية:



أ) ما علاقة المستوى هـ بالمستوى ع ؟

ب) ما علاقة المستوى س بالمستوى صـ ؟

جـ) ما علاقة المستوى س بكل من المستويين هـ ، ع؟

د) ماذا يمثل كل من $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{د هـ}}$ ؟

يمكنك ملاحظة المستويات داخل غرفة الصف والإجابة عن الأسئلة .

٤) اكتب النتائج التي توصلت إليها .

الاحداثيات في ثلاثة أبعاد Coordinate in three dimentions

لقد سبق أن درست كيفية تحديد نقطة في مستوى، وإيجاد كل من الاحداثي السيني والاحداثي الصادي لنقطة في المستوى، وفي هذا الفصل سنتعرف كيفية تحديد نقطة في الفضاء، ولفهم هذا الموضوع نفذ النشاط التالي :

نشاط ١: تحديد نقطة في الفضاء

الخطوات :

١) حدد نقطة في غرفة الصف (ليس شرطاً أن تكون على أرض الغرفة أو الجدران) دون أن تخبر زميلك واطلب إليه أن يجدها بعد أن يسأل مجموعة أسئلة لا تزيد عن خمسة. يعطى درجة في حالة تحديد موقع النقطة بعد ٥ أسئلة ودرجتان إذا حددها بأربعة أسئلة وثلاثة درجات إذا حددها بثلاثة أسئلة .

٢) تبادل مع زميلك الأدوار على أن يقلص عدد الأسئلة تدريجياً إلى ثلاثة أسئلة فقط والطالب الفائز هو الذي يحصل على درجات أكثر .

٣) تناقش مع زميلك حول الاستراتيجيات التي استخدمت لطرح الأسئلة .

٤) اطلع على ما توصلت إليه بعض المجموعات الأخرى، وهل يتطابق مع النتائج التي توصلتم إليها .

أجب عما يلي :

- هل معرفة بعد الشيء عن جدار واحد يكفي لتحديد موقعه ؟ اذكر لماذا ؟
- هل معرفة بعد الشيء عن جدراين متوازيين يكفي لتحديد موقعه ؟ فسر السبب.
- هل معرفة بعد الشيء عن كل من جدارين متقاطعين يكفي لتحديد الموقع ؟ متى يمكن ومتى لا يمكن ؟
- هل معرفة بعد الشيء عن كل من جدارين متعامدين وبعدها عن أرض الغرفة أو سقفها يكفي لتحديد الموقع ؟

تدريب ١

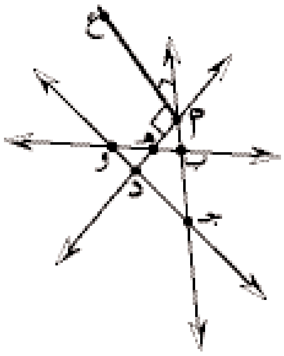
إذا أراد كهربائي أن يثبت مصباحاً كهربائياً يتدلى من سقف غرفتك فاعطه وصفاً دقيقاً لموقع المصباح .

٥) اعط التمثيل المناسب (نقطة ، مستقيم ، مستوى ، فراغ) لكل مما يلي :

أ) النجوم ب) أسلاك الكهرباء جـ) أرضية ملعب كرة القدم

د) جبل هـ) عقدة في خيط و) قطعة من القماش

ز) الضوء المنبعث من الشمس

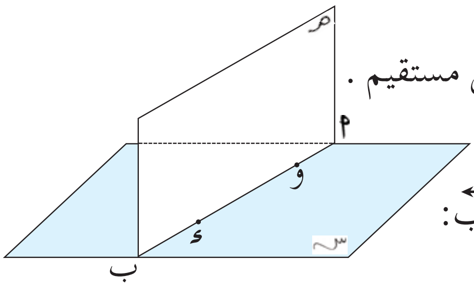


٦) إذا تقاطعت أربعة مستقيمات كما في الشكل، فأجب عما يلي :

أ) كم عدد المستويات المختلفة التي تحددها هذه المستقيمات ؟

ب) اذكر مستقيمين متخالفين إن أمكن .

حـ) إذا أقيم عمود من النقطة أ على كل من $\overleftrightarrow{\text{أحـ}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{أد}}$ مثل أ ع فاذكر مستقيماً يخالف المستقيم أ ع وآخر يعامده .



٧) اثبت أنه إذا اشترك مستويان في نقطة فإنهما يشتركان في مستقيم .

٨) في الشكل المقابل :

المستويان س ، ص متقاطعان في $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ ، و ، ء $\in \overleftrightarrow{\text{أب}}$:

أ) ارسم المستوى ع الذي يقطع المستوى س في $\overleftrightarrow{\text{ءل}}$ والمستوى ص في $\overleftrightarrow{\text{ءم}}$.

ب) ارسم المستوى ن الذي يقطع المستوى س في $\overleftrightarrow{\text{وجـ}}$ والمستوى ص في $\overleftrightarrow{\text{وهـ}}$ ، وبحيث يكون $\overleftrightarrow{\text{هـو}}$ // $\overleftrightarrow{\text{مء}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{وجـ}}$ // $\overleftrightarrow{\text{ءل}}$

جـ) أكمل:

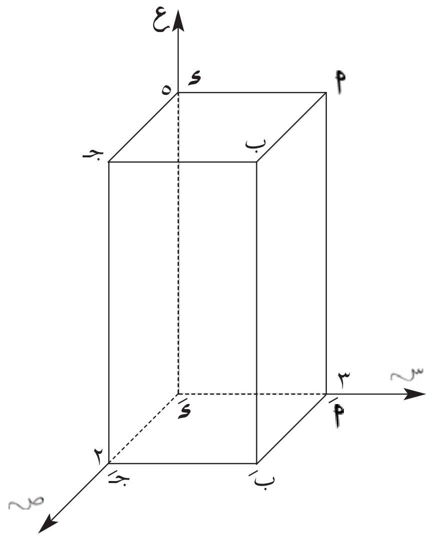
١) المستوى م ل ء .... المستوى هـ جـ و

٢) س $\cap$ ص $\cap$ م ل ء = ...

٣) س $\cap$ ص $\cap$ ن = ...

٤) س $\cap$ ص $\cap$ ن $\cap$ م ل ء = ...

تدريب ٣



بالاستعانة بالشكل المقابل:

اكتب إحداثيات رؤوس شبه المكعب.

تدريب ٤

في النظام الاحداثي ثلاثي الابعاد:

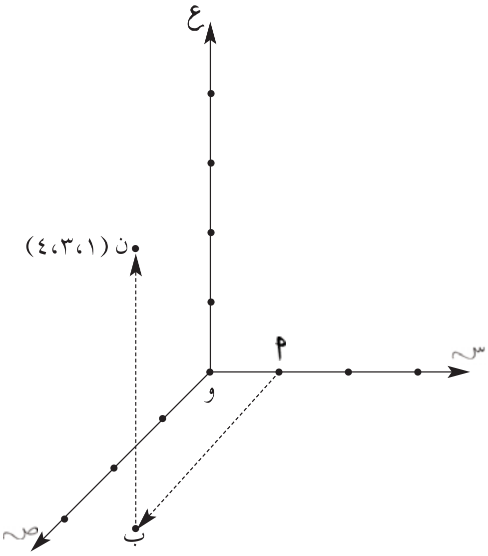
أ) ما إحداثيات النقط التي تقع على المحورس؟

ب) ما إحداثيات النقط التي تقع على المحورص؟

جـ) ما إحداثيات النقط التي تقع على المحور ع ؟

مثال ٢

مَثّل النقطة ن (١، ٣، ٤) في نظام الإحداثيات.



الحل

∵ الاحداثي السيني يساوي ١

∴ نسير في اتجاه المحورس وحدة واحدة بدء من نقطة الأصل و (نقف عند النقطة أ).

∵ الاحداثي الصادي يساوي ٣

∴ نسير في اتجاه يوازي المحور ص ثلاث وحدات بدء من النقطة أ (نقف عند النقطة ب).

∵ الاحداثي العيني يساوي ٤

∴ نسير في اتجاه يوازي المحور ع أربع وحدات بدء من النقطة ب (نصل للنقطة ن).

تدريب ٥

مثل النقاط التالية في نظام الاحداثيات ثلاثي الأبعاد.

أ) (٢، ١٠، ٣)   ب (٧، ٥، ٦)   جـ (٠، ٠، ٨)

لعلك توصلت من النشاط السابق والتدريب أنه لتحديد موقع في الفضاء لا بد من معرفة ثلاثة أبعاد عن مستويات متعامدة .

فإذا افترضت أن هنالك جسماً معلقاً بخيط من سقف غرفة الصف وأردت أن تحدد موقعه بالضبط فإنك تجد بعده عن أحد الجدران (لاحظ أن البعد هو المسافة العمودية من النقطة التي تمثل ذلك الجسم إلى مستوى الجدار) كما نجد بعده عن جدار آخر يعامد الجدار الأول، ثم نجد بعده عن مستوى الأرض فنقول أن الإحداثيات هي (٣،٤،٢) مثلاً حيث يدل البعد ٣ على بعد الجسم عن مستوى الجدار الأول، والبعد ٤ يدل على بعد الجسم عن مستوى الجدار الثاني، والبعد ٢ يدل على ارتفاع الجسم عن مستوى الأرض .

لاحظ أنه إذا كان أحد هذه الأعداد صفر فيعني أن بعد الجسم عن ذلك المستوى يساوي صفراً أي أن الجسم يقع على ذلك المستوى .

تدريب ٢

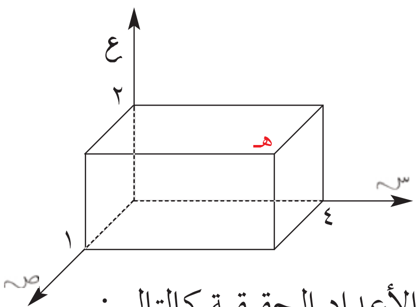
أ) مثل النظام الإحداثي في ثلاثة أبعاد باستخدام ثلاثة أعواد مختلفة (أقلام أو أعواد المص أو أعواد كبريت ...) بحيث تكون في وضع تعامد مع بعضها عند نقطة التلاقي.

ب) ارسم الشكل المتكوّن على دفترك وسم المحاور س ، ص ، ع.

جـ) اكتب أسماء المستويات التي حصلت عليها.

مثال ١

بالاستعانة بالشكل المقابل اكتب إحداثيات النقطة هـ.



الحل

يمكن كتابة إحداثيات كل نقطة بطريقة ثلاثي مرتب من الأعداد الحقيقية كالتالي:

المسقط الأول عبارة عن: بُعد نقطة تقاطع المستوى الذي يمر بالنقطة هـ ويوازي المستوى ص ع مع المحور س عن نقطة الأصل ويساوي ٤ .

المسقط الثاني عبارة عن: بُعد نقطة تقاطع المستوى الذي يمر بالنقطة هـ ويوازي المستوى س ع مع المحور ص عن نقطة الأصل ويساوي ١ .

المسقط الثالث عبارة عن: بُعد نقطة تقاطع المستوى الذي يمر بالنقطة هـ ويوازي المستوى س ص مع المحور ع عن نقطة الأصل ويساوي ٢ .

∴ إحداثيات النقطة هـ هي (٤، ١، ٢) .

مثال ٤

أوجد إحداثيات منتصف المسافة بين النقطتين حـ (٦ ، ٢ ، −٢) ، د (−٢ ، ٤ ، ١٢)

الحل

إحداثيات منتصف المسافة بين حـ ، د هي $\left(\frac{٦ + {}^{-}٢}{٢} ، \frac{٢ + ٤}{٢} ، \frac{{}^{-}٢ + ١٢}{٢} \right) = (٢، ٣، ٥)$

نتيجة

إحداثيات نقطة منتصف القطعة المستقيمة التي تربط بين النقطتين $ن_١$ (س١، ص١، ع١)، $ن_٢$ (س٢، ص٢، ع٢) هي $\left(\frac{س_١ + س_٢}{٢} ، \frac{ص_١ + ص_٢}{٢} ، \frac{ع_١ + ع_٢}{٢} \right)$

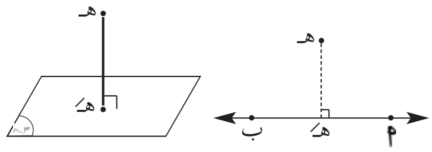
تدريب ٧

أوجد المسافة بين النقطتين أ(−١، ٢، ٨) ، ب (٦، ٤، ٢)، ثم أوجد إحداثيات منتصف المسافة بين أ ، ب .

المساقط العمودية

لندرس الحالات التالية:

١) مسقط نقطة على مستقيم أو مستوى:



النقطة هـَ هي مسقط النقطة هـ.

ولعلك تلاحظ أن النقطة هـَ عبارة عن موقع العمود النازل من النقطة هـ على المستقيم أ ب في الشكل الأول، وعلى المستوى س في الشكل الثاني.

تعريف

المسقط العمودي لنقطة على مستقيم أو مستوى هو موقع العمود النازل من النقطة على المستقيم أو المستوى.

تدريب ٨

متى يكون مسقط نقطة ما على المستوى هو النقطة نفسها؟

٢) مسقط مستقيم على مستوى:

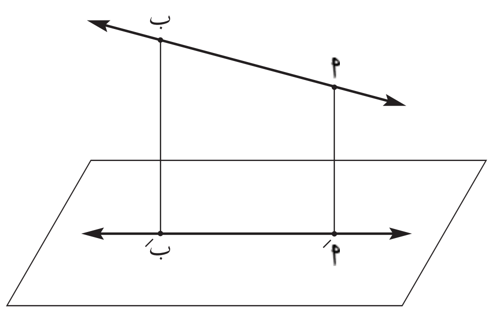
في الشكل المقابل:

أَ مسقط النقطة أ على المستوى س ،

بَ مسقط النقطة ب على المستوى س ،

فتكون $\overline{أَ بَ}$ هي مسقط $\overline{أ ب}$ على المستوى س

ويكون: $\overleftrightarrow{أَ بَ}$ هو مسقط $\overleftrightarrow{أ ب}$ على المستوى س



المسافة بين نقطتين وإحداثيات منتصف البعد بينهما:

نشاط ٢: البعد بين نقطتين في الفضاء:

الأدوات : علبة محارم ورقية ـ مسطرة

الخطوات:

١) قم بقياس أبعاد علبة المحارم الورقية.

٢) اختر أحد الرؤوس السفلية كنقطة أصل و.

٣) اختر أي رأسين آخرين سمهما أ ، ب مثلا.

٤) اكتب إحداثيات أ، ب.

٥) باستخدام المسطرة أوجد المسافة بين أ، ب.

٦) استخدم قانون المسافة الذي تعلمته سابقا ولكن بعد اعتبار المحور الثالث ليكون القانون: $أ ب = \sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢ + (ع_٢ - ع_١)^٢}$

حيث $(س_١، ص_١، ع_١)$ إحداثيات النقطة أ، $(س_٢، ص_٢، ع_٢)$ إحداثيات النقطة ب.

٧) قارن القيم التي وجدتها بالقانون والقيم التي وجدتها بالقياس. ماذا تلاحظ؟

٨) قارن نتائجك مع نتائج زملائك.

مثال ٣

أوجد المسافة بين النقطتين أ(٣، −٢، ١) ، ب(٥، ٤، −٣).

$أ ب = \sqrt{(٥-٣)^٢ + (٤ - ^-٢)^٢ + (-٣ - ١)^٢}$

$= \sqrt{٤ + ٣٦ + ١٦} = \sqrt{٥٦}$ وحدة طول

تدريب ٦

وضح أن النقاط التالية هي رؤوس مثلث متطابق الأضلاع:

أ(٤، ٥، ٢) ، ب (١، ٧، ٣) ، جـ (٢، ٤، ٥)

إحداثيات نقطة منتصف المسافة بين نقطتين

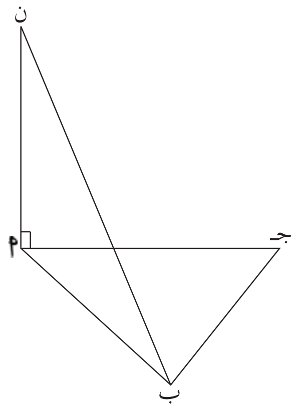
لقد تعلمت كيفية إيجاد إحداثيات منتصف المسافة بين نقطتين في المستوى الإحداثي فإذا كانت أ(٣، ٤) ، ب (−٢ ، ٦) فإن إحداثيات النقطة التي تنصف $\overline{أ ب}$ هي $\left(\frac{٣+^-٢}{٢} ، \frac{٤+٦}{٢}\right)$ $= \left(\frac{١}{٢} ، ٥\right)$ وسنطبق نفس الأسلوب في إحداثيات الثلاثة أبعاد.

مثال ٥

ﻫ ب ﺟ مثلث قائم الزاوية في ب ، $\overline{\text{ن ﻫ}}$ عمودية على مستوى المثلث، اثبت أن:

ﻫ) ﻣﻢ ∢ (ن ب ﺟ) = ٩٠°

ب) $\overline{\text{ب ﺟ}}$ ⊥ المستوى ﻫ ن ب



المعطيات : ﻣﻢ ∢ (ﻫ ب ﺟ) = ٩٠° ، $\overline{\text{ن ﻫ}}$ ⊥ المستوى ﻫ ب ﺟ

المطلوب : ﻫ) ﻣﻢ ∢ (ن ب ﺟ) = ٩٠°

ب) $\overline{\text{ب ﺟ}}$ ⊥ المستوى ﻫ ن ب

البرهــان : ∵ $\overline{\text{ن ﻫ}}$ ⊥ المستوى ﻫ ب ﺟ

∴ $\overline{\text{ﻫ ب}}$ مسقط $\overline{\text{ن ب}}$، ∵ $\overline{\text{ﻫ ب}}$ ⊥ $\overline{\text{ب ﺟ}}$ (معطى)

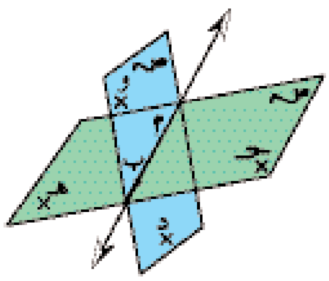
∴ $\overline{\text{ن ب}}$ ⊥ $\overline{\text{ب ﺟ}}$ (نظرية)

∴ ﻣﻢ ∢ (ن ب ﺟ) = ٩٠° (المطلوب أولاً)

، ∵ $\overline{\text{ب ﺟ}}$ ⊥ كل من $\overline{\text{ن ب}}$ ، $\overline{\text{ب ﻫ}}$

∴ $\overline{\text{ب ﺟ}}$ ⊥ على المستوى ﻫ ن ب

الزاوية الزوجية (الزاوية بين مستويين وقياسها) (Dihedral Angle)



عندما يتقاطع مستقيمان فإنهما يكونان أربع زوايا وكذلك عندما يتقاطع مستويان فإنهما يكونان أربع زوايا تشكل المستويات جوانبها مثلما تشكل المستقيمان أضلاع الزوايا المستوية. ويطلق على كل زاوية بين مستويين بالزاوية الزوجية .

لاحظ الشكل المجاور يتقاطع المستويان ﺳ ، ﺻ في $\overleftrightarrow{\text{ﻫ ب}}$.

تسمى الزاوية الزوجية بأربع نقاط : نقطة على المستوى الأول ، ونقطتان تمثلان خط التقاطع ، ونقطة على المستوى الثاني ، ففي الشكل المجاور تقرأ زوايا التقاطع الأربعة (ﺣ ، $\overleftrightarrow{\text{ﻫ ب}}$ ، د)، (ﺣ ، $\overleftrightarrow{\text{ﻫ ب}}$ ، و) ، (ﻫ ، $\overleftrightarrow{\text{ﻫ ب}}$ ، د) ، (ﻫ ، $\overleftrightarrow{\text{ﻫ ب}}$ ، و) .

تعريف

مسقط القطعة المستقيمة على مستوى عبارة عن قطعة مستقيمة محصورة بين موقعي العمودين النازلين من طرفي القطعة المستقيمة على المستوى س~ .

تدريب ٩

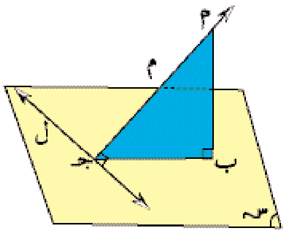
١) في الشكل السابق أيهما أطول القطعة المستقيمة أ ب أم مسقطها أ َب َ ؟ برهن صحة رأيك.

٢) متى يكون طول المسقط يساوي طول القطعة الأصلية؟ لماذا؟

٣) متى يكون مسقط القطعة المستقيمة عبارة عن نقطة؟

نظرية ٥ :

إذا عامد مستقيم مائل مستقيماً في المستوى فإن مسقط المائل يعامد ذلك المستقيم.



المعطيات : $\overleftrightarrow{ل}$ مستقيم في المستوى س~

$\overleftrightarrow{م}$ مستقيم مائل على المستوى س~ ويعامد المستقيم ل

المطلوب : إثبات أن مسقط $\overleftrightarrow{م}$ على المستوى س~ يعامد $\overleftrightarrow{ل}$

العمـــل : ننزل من نقطة مثل أ عمود على المستوى س~

مثل $\overline{أب}$، ونصل $\overline{ب حـ}$ التي تشكل مسقطاً للقطعة $\overline{أ حـ}$

البرهـــان : المستقيم ل يعامد $\overleftrightarrow{م}$ (مُعطى)، المستقيم $\overleftrightarrow{ل}$ عمودي على $\overline{أ ب}$ (لأن $\overline{أ ب}$ عمودية على المستوى س~ وبالتالي عمودية على كل مستقيم فيه).

∴ $\overleftrightarrow{ل}$ عمودي على المستوى أ ب جـ   ∴ ل ⊥ $\overline{ب جـ}$ (وهو المطلوب)

عكس نظرية ٥ :

إذا رسم مستقيم مائل على مستوى وكان مسقطه على المستوى عموديا على مستقيم فيه كان هذا المستقيم المائل عموديا على ذلك المستقيم .

تدريب ١٠

اكتب برهان عكس النظرية.

الحل

أ) ∵ $\overline{\text{ب هـ}} \perp \overline{\text{أ جـ}}$ معطى

∴ Δ أ هـ ب قائم الزاوية في هـ ، ويكون:

ب هـ = $\frac{1}{2}$ أ ب = ٥سم (أ هـ ب مثلث ثلاثيني ستيني)

∵ $\overline{\text{ب ء}} \perp$ Δ أ ب جـ

∴ $\overline{\text{ب ء}}$ عمودي على أي مستقيم في مستوى المثلث أ ب جـ

∴ $\overline{\text{ب ء}} \perp \overline{\text{ب هـ}}$

∴ ق(ء $\hat{\text{ب}}$ هـ) = ٩٠°

∴ (ء هـ)^2 = (ء ب)^2 + (ب هـ)^2

= ٢٥ + ٢٥ = ٥٠

∴ ء هـ = $\sqrt{٥٠}$ = ٥$\sqrt{٢}$سم

ب) $\overline{\text{أ جـ}}$ خط تقاطع المستويين ب أ جـ ، ء أ جـ ،

$\overline{\text{هـ ب}} \perp \overline{\text{أ جـ}}$ .... (١)

∵ $\overline{\text{ب هـ}}$ مسقط $\overline{\text{ء هـ}}$ على المستوى أ ب جـ ، $\overline{\text{ب هـ}} \perp \overline{\text{أ جـ}}$

∴ ء هـ ⊥ أ جـ .... (٢) (عكس نظرية ٥)

∴ من (١) ، (٢) ق(ء $\hat{\text{هـ}}$ ب) = قياس الزاوية الزوجية بين المستويين ب أ جـ ، ء أ جـ.

∴ طا ء $\hat{\text{هـ}}$ ب = $\frac{\text{ء ب}}{\text{ب هـ}}$ = $\frac{٥}{٥}$ = ١

∴ ق(ء $\hat{\text{هـ}}$ ب) = قياس الزاوية الزوجية = ٤٥°

تدريب ١٢

أ) أ ب جـ مثلث فيه ق($\hat{\text{أ}}$) = ٣٠°، أ ب = ١٠$\sqrt{٣}$ ، رسم من ب العمود $\overline{\text{ب د}}$. على مستوى المثلث أ ب جـ، بحيث ب د = ٥سم، وأسقط من د العمود $\overline{\text{د هـ}}$ على $\overline{\text{أ جـ}}$:

اثبت أن قياس الزاوية الزوجية بين المستويين أ ب جـ ، أ جـ د يساوي ٣٠° .

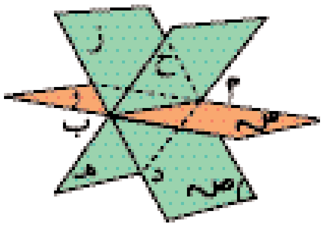
ب) م. أ ب جـ هرم ثلاثي رأسه م وقاعدته المثلث المتطابق الأضلاع أ ب جـ الذي طول ضلعه يساوي ١٠ سم، ق(م $\hat{\text{أ}}$ ب) = ق(م $\hat{\text{أ}}$ جـ) = ٩٠°، م أ = ٥سم، د منتصف $\overline{\text{ب جـ}}$

١) اثبت أن $\overline{\text{ب جـ}} \perp$ المستوى م أ د .

٢) أوجد قياس الزاوية الزوجية بين المستويين م ب جـ ، أ ب جـ .

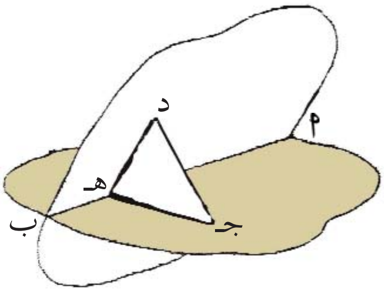
تدريب ١١

اكتب أسماء الزوايا الزوجية الناتجة من تقاطع المستويات س، ص، ع الموضحة بالشكل المجاور .



الزاوية المستوية لزاوية زوجية

إذا قطعت الزاوية الزوجية (جـ، $\overleftrightarrow{\text{أب}}$، د) بالمستوى س العمودي على $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ فإن س يقطع وجهي الزاوية الزوجية في $\overrightarrow{\text{هـ جـ}}$، $\overrightarrow{\text{هـ د}}$ والزاوية جـ هـ د التي تتألف من هذين الشعاعين الذين لهما نفس نقطة البداية هـ تسمى «زاوية مستوية» للزاوية الزوجية (جـ، $\overleftrightarrow{\text{أب}}$، د).



لاحظ أن:

١) $\overrightarrow{\text{هـ جـ}} \perp \overleftrightarrow{\text{أب}}$.

٢) $\overrightarrow{\text{هـ د}} \perp \overleftrightarrow{\text{أب}}$.

٣) جميع الزوايا المستوية للزاوية الزوجية تكون متساوية في القياس.

٤) اصطلح على اعتبار الزاوية التي قياسها $\leqslant$ ٩٠° عند البحث عن قياس الزاوية بين مستويين.

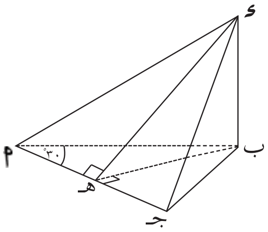
قياس الزاوية الزوجية :

هو قياس أية زاوية من زواياها المستوية.

مثال ٦

في الشكل:

Δ أب جـ فيه ق ($\hat{\text{أ}}$) = ٣٠°، أب = ١٠ سم ، $\overline{\text{ب ء}} \perp$ مستوى Δ أب جـ ، ب ء = ٥سم، $\overline{\text{ب هـ}} \perp \overline{\text{أ جـ}}$.

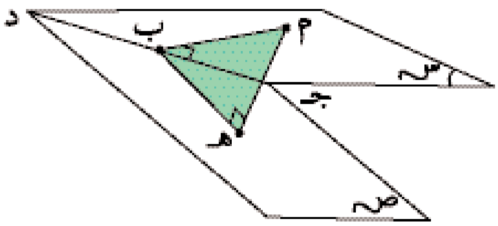


أوجد :

أ) ب هـ ، ء هـ .

ب) قياس الزاوية الزوجية بين المستويين ب أ جـ ، ء أ جـ

٦) تقاطع المستويان س ، ص في المستقيم $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$ ، ٢ نقطة في المستوى س ،فإذا أنزل من ٢ عمود على خط التقاطع مثل $\overline{\text{٢ ب}}$، وأنزل من ٢ العمود $\overline{\text{٢ هـ}}$ على المستوى ص ،فاثبت أن قياس ٢ بَ هـ يعبر عن قياس الزاوية الزوجية بين المستويين س ، ص.



٧) اختر من غرفة الصف مستقيمين متخالفين (المستقيمان عبارة عن خطوط تقاطع مستويات الجدران، وأرض الغرفة، وسقفها) ثم ابحث عن مستقيم ثالث يكون عمودياً عليهما، ومثل ذلك بالرسم .

٨) ٢ ب جـ مثلث فيه ق ($\hat{٢}$) = ٣٠°، ٢ ب = ١٠سم. رسم من ب العمود $\overline{\text{ب د}}$ على مستوى المثلث ٢ ب جـ بحيث كان ب د = ٥سم. أوجد قياس الزاوية الزوجية بين المستويين ٢ د جـ ، ٢ ب جـ .

٩) س ص ع مثلث قائم الزاوية في ص ، رسم من س العمود $\overline{\text{س د}}$ على مستوى المثلث س ص ع بحيث كان د س = س ص.
أوجد قياس الزاوية الزوجية بين المستويين س ص ع ، د ص ع .

١٠) وضح أن النقاط التالية هي رؤوس مثلث قائم الزاوية ٢ (٢،١،٦)، ب (٤،٧،٩)، جـ (٨،٥، −٦). ثم أجب عمايلي:
٢) ما رأس الزاوية القائمة؟
ب) أوجد مساحة المثلث؟

١١) في فضاء الإحداثيات ثلاثي الأبعاد أوجد المسافة بين النقطة (−٥،٢،−٣) وكل مما يلي:
- المستوى س ص　　- المستوى س ع　　- المستوى ص ع
- المحور س　　- المحور ص　　- المحور ع

١٢) ل م ن مثلث متساوي الساقين فيه ق($\hat{م}$) = ١٢٠°، نُصّف $\overline{\text{ل ن}}$ في هـ ورسم $\overline{\text{م ى}}$ ⊥ مستوى المثلث بحيث م ى = $\frac{1}{2}$ ل م، احسب قياس الزاوية الزوجية بين المستويين ى ل ن ، ل م ن.

١) أ ب حـ د أَ بَ حَ دَ مكعب طول ضلعه ٨ سم اختر ثلاثة حواف تمثل المحاور الإحداثية ثم أجب عما يلي :
أ) حدد إحداثيات رؤوس المكعب .
ب) أوجد المسافة بين رأسين متقابلين في مستوى واحد من أوجه المكعب وتحقق من صحة الإجابة بالقياس .
حـ) أوجد المسافة بين رأسين لا يقعان في مستوى واحد من أوجه المكعب .

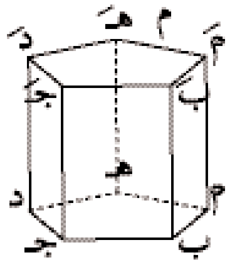
٢) إذا علمت بوجود كنز في منطقة مربعة ضلعها ٥ م وعلى عمق نصف متر فأجب عما يلي:
أ) هل تستطيع تحديد إحداثيات موقع الكنز ؟ لماذا ؟
ب) إذا أردت أن تستخرج الكنز فأي إجراء مما يلي تقوم به مع التفسير ؟
١) اختيار إحدى المواقع والحفر فيه لعمق نصف متر (نقطة) .
٢) حفر خندقاً من أحد أطراف المنطقة إلى الطرف المقابل بعرض نصف متر وعمقه نصف متر (مستقيم) .
٣) حفر كامل المنطقة بعمق نصف متر (مستوى) .
جـ) اقترح إضافة معلومات تمكن الشخص من الوصول إلى الموقع مباشرة .

٣) وضع هرم رباعي ارتفاعه ١,٥م وقاعدته مربع طول ضلعها ٢م عند زاوية غرف بحيث انطبق ضلعان متجاوران منه مع خطي تقاطع جداري الغرفة مع مستوى الأرض، أوجد إحداثيات رؤوس الهرم على اعتبار أن خطوط تقاطع المستويات الثلاثة عند تلك الزاوية هي المحاور.

٤) من ظهر بناية رصد شخص قمة جبل فإذا كان إحداثيات موقع الراصد هي (١٠،٢٥، ١٢) وإحداثيات قمة الجبل (١٠٠،٢٥،٢٥٠) فاحسب ما يلي :
أ) المسافة بين موقع الراصد وقمة الجبل .
ب) زاوية ارتفاع قمة الجبل عند موقع الرصد .

٥) مظلة للسيارات طولها ٤٨م وعرضها ٦ أمتار وترتكز من جهة الطول على جدار ارتفاعه ٣,٥م وتميل عن الأفق من الجدار الذي ترتكز عليه بزاوية ١٥° فإذا عُلم أن أشعة الشمس باتجاه رأسي فأجب عما يلي :
أ) حدد شكل ظل المظلة وأوجد أبعاده ومساحته .
ب) أيهما أكبر مساحة سطح المظلة أم مساحة ظلها ؟ ولماذا ؟
حـ) ما البعد (الطول أم العرض) الذي يختلف في المظلة عنه في ظلها فسر إجابتك .
د) هل يكفي ظل المظلة لاستيعاب سيارة طولها ٥م ؟ كيف تتحقق ؟

٦) في المنشور الخماسي القائم ٱب جـ د هـ ٱَبَ جـَ دَ هـَ الموضح جانباً أوجد قياس الزاوية بين المستوى ٱَ بَ جـَ دَ هـَ والمستوى ٱَ هـَ حـ علماً بأن قاعدة المنشور مضلع خماسي منتظم طول ضلعه يساوي ١٠سم وارتفاع المنشور ١٥سم.



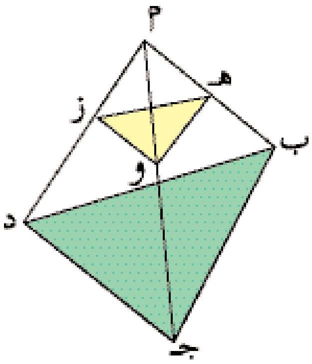
٧) اثبت أنه إذا قطع مستوى مستويين متوازيين فإن خطي التقاطع يكونان متوازيين .

٨) إذا كان $\overleftrightarrow{ل}$ يوازي المستوى س ومر مستوى آخر مثل ص بالمستقيم ل ويقطع المستوى س في $\overleftrightarrow{م}$ فاثبت أن $\overleftrightarrow{ل}$ // $\overleftrightarrow{م}$.

٩) ٱ.ب حـ د هرم ثلاثي قائم جميع حوافه متساوية وطول كل منها يساوي ١٥سم فإذا قطع بمستوى يوازي أحد الأوجه ويبعد عنه ٤سم مثل هـ و ز كما في الشكل فاحسب :

ٱ) ارتفاع الهرم الأصلي، وارتفاع الهرم الناتج من قطع المستوى لأوجه الهرم .

ب) النسبة ٱ هـ : هـ ب .



تمارين ومسائل عامة

(١) أجب بنعم أو لا لكل من الأسئلة التالية :

أ) يمر بنقطة واحدة مستقيمان فقط .

ب) أية أربع نقاط تحدد فراغاً .

حـ) المستقيم الموازي لمستوى لا يشترك معه في نقطة وحيدة .

د) يستقر كرسي على أرض أفقية إذا كان له رجلان فقط .

هـ) يوجد مستقيم وحيد يعامد مستقيم معطى عند نقطة عليه .

و) أي ثلاثة مستقيمات متوازية يجمعها مستوى وحيد .

ز) عدد المستويات التي يمكن أن تمر بعشرة نقاط تساوي $\binom{١٠}{٣}$

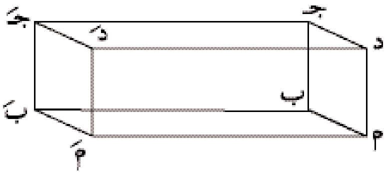
ح) طول مسقط قطعة مستقيمة على مستوى يوازي تلك القطعة يساوي طول القطعة.

ط) يمكن رسم مستقيم يعامد كلاً من مستقيمين متخالفين .

ى) إذا تعامد مستويان فإن كل مستقيم في المستوى الأول يعامد أي مستقيم في الآخر.

٢) حدد متى يمكن أن تشكل ثلاث قطع مستقيمة مستوى وحيد ثم برهن صحة كلامك .

٣) أوجد طول كل من $\overline{\text{أ جـ}}$ ، $\overline{\text{جـ أ}'}$ في المنشور القائم أ ب جـ د أ َب َجـ َد َ الذي أبعاده ١٢، ٤، ٣سم، علماً بأن قاعدته مستطيل، ثم أوجد مساحة المثلث أ أ َجـ.



٤) صنع هيكل مكعب باستخدام أسلاك تمثل الحواف فإذا كان طول أحد الحواف = ٣٠ سم فما طول السلك اللازم لصنع هيكل المكعب ؟

٥) الشكل المقابل يمثل منزلاً، السقف على شكل مستويين بينهما زاوية قياسها ١٢٠° . مامساحة مسقط السقف على الأرض إذا كانت أبعاد كل جانب ١٠، ٢٥م ؟

الوحـدة السادسة

الدوال

(Functions)

✳ الأهداف:

١	تعرف مطلق العدد ودالة المطلق وتمثيلها بيانيا.
٢	تعرف صحيح العدد الحقيقي ودالة الصحيح وتمثيلها بيانيا.
٣	حل معادلات تحتوي على المطلق وأخرى تحتوي على صحيح العدد الحقيقي.
٤	تعرف معكوس الدالة وإيجادها.
٥	تعرف الدالة الأسية والدالة اللوغاريتمية وتمثيلها بيانيا.
٦	إجراء عمليات حسابية باستخدام اللوغاريتمات لأساس غير العدد عشرة.
٧	التحويل من الصيغة الأسية إلى الصيغة اللوغاريتمية.
٨	إستخدام قوانين اللوغاريتمات.
٩	حل معادلات أسية وأخرى لوغاريتمية.
١٠	حل تطبيقات على الدوال الأسية واللوغاريتمية.

مطلق العدد

علمت سابقا أن القيمة المطلقة للعدد ٢ تتمثل في المسافة التي تفصل بين العدد ٢ عن نقطة الصفر على خط الأعداد أيا كان موقع العدد ٢ على يمين الصفر أم على شماله ويرمز لها بالرمز |٢| لذلك فهي **قيمة موجبة دائما**.

تدريب ١

١) ارسم خط الأعداد ثم مثل عليه الأعداد الآتية :

٣ ، ٢,٥ ، −١,٥ ، −٢

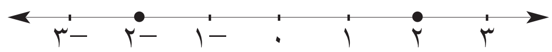
٢) أوجد القيمة المطلقة للأعداد السابقة .

مثال ١

حل المعادلة |س| = ٢ ، س ∈ ح

الحل

نبحث على خط الأعداد عن عدد حقيقي يبعد عن الصفر بمقدار وحدتين .



من الواضح أن العدد المطلوب هو ٢ أو −٢ .

∴ مجموعة الحل {٢ ، −٢}

مثال ٢

أوجد مجموعة حل المعادلة |٢س−٣|+٤=٠

الحل

|٢س − ٣| + ٤ = ٠

|٢س − ٣| = −٤

وهذا لا يتحقق لأي قيمة من قيم س، لماذا ؟

∴ مجموعة الحل = Ø

مثال ٣

مثل الدالة د(س) = |س − ١|، س ∈ ح

الحل

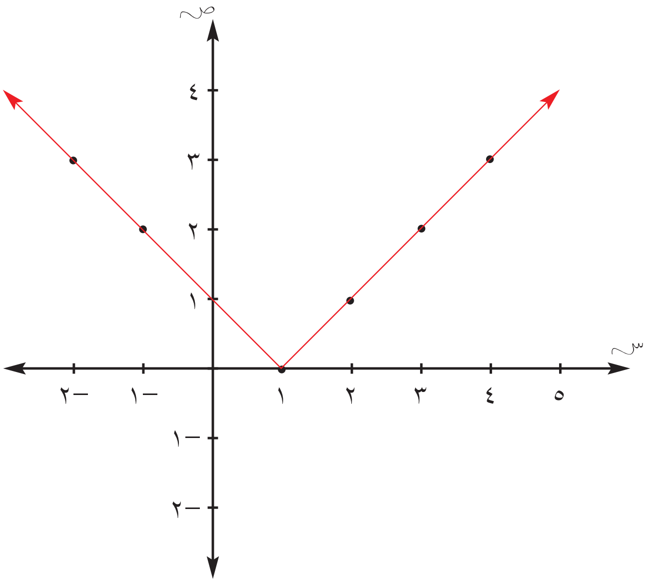
د(س) = { س − ١ ، س ⩾ ١
        −س + ١ ، س < ١

نمثل د(س) = س − ١ ، س ⩾ ١

نمثل د(س) = −س + ١ ، س < ١

س	٢	٣	٤
د(س) = س − ١	١	٢	٣

س	صفر	−١	−٢
د(س) = −س + ١	١	٢	٣



تدريب ٤

مثِّل الدوال الآتية:

د(س) = |س| + ٤ ، د(س) = |س| − ٤

ثم بيِّن العلاقة بينهما وبين الدالة د(س) = |س|

لاحظ ما يلي:

إذا كانت س = ٥ ⇐ √س٢ = س = ٥ ، |س| = ٥

إذا كانت س = −٥ ⇐ √س٢ = ٥ = ⁻(−٥) ، |س| = ٥

إذا كانت س = −١٥ ⇐ √س٢ = ⁻(−١٥) = ١٥ ، |س| = ١٥

هل تستطيع أن تجد علاقة بين √س٢ ، |س|؟

تدريب ٥

إذا كانت ٲ = −٧ فما قيمة كل من √ٲ٢، |ٲ|؟

نتيجة

√س٢ = |س| ∀ س ∈ ح

تدريب ٢

أوجد مجموعة الحل لكل مما يلي :

١) $|٤ - ٣س| = ١٨$

٢) $|ص - ٤| = ٨$

٣) $|٣س - ٤| = ١١$

دالــة المطلــق

نشاط ١: التمثيل البياني لدالة المطلق

١) ارسم مستوى الإحداثيات ثم مثل عليه بيان الدوال الآتية :

د(س) = س ، س $\geqslant$ ٠

د(س) = −س ، س $<$ ٠

٢) حدد المجال ، المجال المقابل ، المدى للتمثيل البياني لـ د (س) في ١.

٣) اكتب ملاحظاتك .

٤) هل يمكنك كتابة دالة تجمع بين الدوال السابقة بحيث يكون لها نفس التمثيل البياني .

تدريب ٣

مثّل د(س) = |س| بيانيا على مستوى الإحداثيات ثم حدد المجال ، المجال المقابل، والمدى للدالة.

تعريف

تسمى الدالة التي تكتب بالصورة الآتية:

$$د(س) = |س| = \begin{cases} س، & س \geqslant ٠ \\ -س، & س < ٠ \end{cases}$$

بـ دالة المطلق، حيث أن مجالها ⟵ ح ، ومداها هو [٠ ، ∞[.

صحيح العدد Greatest Integer

نشاط ١: صحيح العدد

الخطوات:

١) ارسم خط الأعداد ثم مثّل عليه الأعداد الآتية:

٠,٥ ، ١,٥ ، −١,٥ ، ٠,٧٥ ، −٢,٥

٢) اكتب عددين صحيحين متتاليين يحصران كل عدد من الأعداد السابقة.

٣) إذا كان العدد الحقيقي س والعددان الصحيحان اللذان يحصرانه ن، ن + ١ ، فاكتب عبارة جبرية (متباينة) تعبّر عن العلاقة بينهما.

تدريب ١

مثِّل الأعداد الآتية على خط الأعداد: ٣,٥، −٣,٧، π، $\sqrt{٣}$، ثم اكتب العلاقة التي تربط كلا من الأعداد السابقة بالعددين الصحيحين اللذين يحصرانه.

تعريف

إذا كانت س ∈ ح، فإنه يوجد عددان صحيحان متتاليان ن، ن+١ بحيث ن ⩽ س < ن+١، ويسمى العدد ن بصحيح العدد س ويرمز له بالرمز [س] ويقرأ «صحيح العدد س»، ويساوي أكبر عدد صحيح أصغر من أو يساوي العدد س .

مثال ١

اكتب صحيح العدد لكل مما يلي:

$[٢\frac{١}{٣}]$ ، [−٣] ، $[\sqrt{٢}]$

الحل

لإيجاد صحيح $٢\frac{١}{٣}$

$٢ \leqslant ٢\frac{١}{٣} < ٣$ ∴ $[٢\frac{١}{٣}] = ٢$

وكذلك: [−٣] = −٣

$[\sqrt{٢}] = ١$

تدريب ٢

اكتب قيمة كل مما يلي:

$[\frac{٥}{٢}]$، $[-\frac{٣}{٢}]$، $[\frac{٥}{٣}]$، [−٦,٥]

مثال ٤

أوجد مجموعة حل المتباينة ٤ < س^{٢} ⩽ ٩.

١) إذا كان س ⩾ ٠

٢) إذا كان س < ٠

الحل

∵ ٤ < س^{٢} ⩽ ٩

$\sqrt{٤}$ < |س| ⩽ $\sqrt{٩}$

∴ ٢ < |س| ⩽ ٣

١) إذا كان س ⩾ ٠ ، فإن |س| = س ،

ويكون ٢ < س ⩽ ٣

∴ مجموعة الحل =]٢،٣]

٢) إذا كان س < ٠ ، فإن |س| = −س

ويكون ٢ < −س ⩽ ٣

أي أن −٢ > س ⩾ −٣

∴ مجموعة الحل = [−٣،−٢[

تدريب ٦

أوجد مجموعة الحل للمتباينة الآتية:

س^{٢} + ٥ ⩽ ١٤

دالة الصحيح Greatest Integer Function

د (س) = [س]

باسترجاع تعريف صحيح العدد الحقيقي، نجد أن:

∀س ∈ [٢ ، ٣[⇐ د(س)= [س]= ٢ حيث د دالة ثابتة في الفترة.

∀س ∈ [١ ، ٢[⇐ د(س)= [س]= ١ حيث د دالة ثابتة في الفترة.

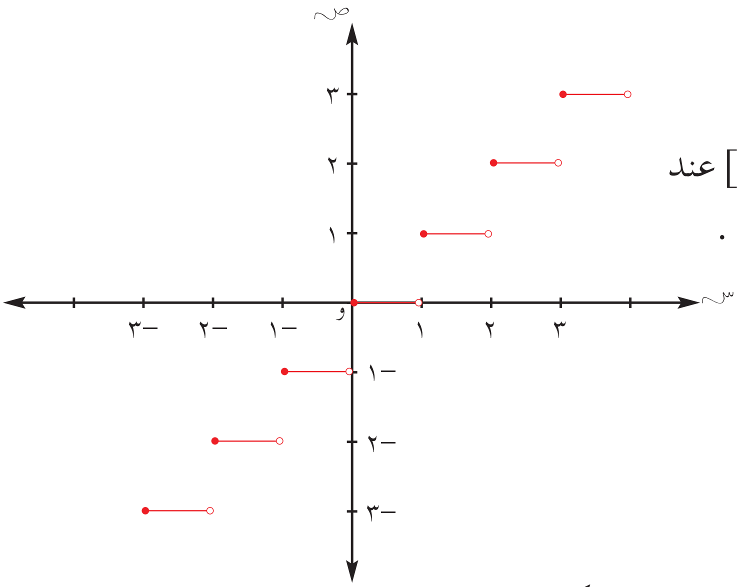
∀س ∈ [٠ ، ١[⇐ د(س)= [س]= ٠ حيث د دالة ثابتة في الفترة.

∀س ∈ [−١ ، ٠[⇐ د(س)= [س]= −١ حيث د دالة ثابتة في الفترة.

∀س ∈ [−٢،−١[⇐ د(س)= [س]= −٢ حيث د دالة ثابتة في الفترة.

∀س ∈ [−٣،−٢[⇐ د(س)= [س]= −٣ حيث د دالة ثابتة في الفترة.

وبذلك يتكون بيان الدالة د(س) = [س] من قطع مستقيمة تنتهي بنقطة انفصال كل منها توازي محور السينات كما في الشكل



* سؤال :
استخدم الرسم لإيجاد قيمة [س] عند
س = ١,٥ ، ٢,٥ ، −١,١ .

مثال ١

تتقاضى شركة إتصالات مبلغ ٣٦ بيسه في المكالمة الداخلية لوحدة الزمن التي تقترب من الدقيقة ولاتبلغها، على أن تحسب كل ربع هذه الفترة، فاكتب المعادلة الرياضية التي تعبّر عن هذه العلاقة.

الحل

د(س) = ٩ [٤س + ١]

مثال ٢

أوجد مجموعة حل المعادلة: [س] = ٢

الحل

[س] = ٢ ⇐ ٢ ≤ س < ٣

∴ مجموعة الحل = [٢، ٣[

مثال ٣

أوجد مجموعة حل المعادلة: [٢س − ١] = −٨

الحل

[٢س − ١] = −٨ ⇐ −٨ ≤ ٢س − ١ < −٧

⇐ −٧ ≤ ٢ س < −٦   (لماذا؟)

⇐ $-\frac{٧}{٢}$ ≤ س < −٣

∴ مجموعة الحل [$-٣\frac{١}{٢}$ ، −٣ [

تدريب ٣

أ) أوجد قيمة كل مما يلي عندما س = $\frac{-٣}{٢}$

[٢س] ، [١ − ٣ س]

ب) أوجد مجموعة الحل لكل مما يلي:

١) [س + ٣] = ٤   ٢) [٢س + ٥] = ٠

ج) تتقاضى مصلحة البريد رسماً بدل نقل الرسائل وفق التسعيرة التالية :

٠ < س ≤ ٥غم بسعر ١٠٠ بيسه كما تتقاضى ٥٠ بيسة إضافية عن كل ٣ غرامات أو أقل فما تكلفة إرسال رسالة زنتها : ١,٥ غم ، ٤ غرامات ، ٧,٥ غرام ١٥,١غم .

تمارين ومسائل ١

أولاً: أوجد قيمة كل مما يأتي عندما س $= -٥$:

١) $|٣\text{س}|$
٢) $|\text{س} - ٤|$
٣) $|-\text{س}| - |\text{س}|$
٤) $|\text{س}^٢|$
٥) $|٢\text{س} + ٧| - |-\text{س}|$
٦) $[٢+١٠\text{س}]$
٧) $[٣\text{س}+١١]$
٨) $[٤\text{س}-١]$

ثانياً: اكتب كلا مما يأتي باستخدام المطلق:

١) $\text{س} = ٧$ و $\text{س} = -٧$
٢) $-٨ < \text{ص} < ٨$
٣) $\text{ع} < -٣$ أو $\text{ع} > ٣$

ثالثاً: أوجد مجموعة حل كل مما يأتي حيث س،ص $\in$ ح :

١) $|٣ + \text{س}| = ٤$
٢) $|\text{ص} - ٤| = ٧$
٣) $|٤ - ٣\text{س}| = ١٨$
٤) $|\text{س} - ٤| = -٣$
٥) $|٢\text{س} - ٣| = ٠$
٦) $|\text{س} + ١| + ٤ = ٠$
٧) $٨\,|\text{ص} - ٦| = ٢٤$
٨) $|\text{س} + ١| \leqslant ٤$
٩) $|\text{س} + ٣| > ٥$
١٠) $|٢\text{ص} - ٩| \leqslant ٢٧$
١١) $|٣\,(\text{س} + ٤)| \geqslant ٤٨$
١٢) $|\text{س}| = -\text{س}$
١٣) $|١-٢\text{س}| = -٥$
١٤) $[٢\text{س}+٥] = ٠$

رابعاً: ارسم كلا من الدوال الآتية:

١) $\text{ل(س)} = \begin{cases} |\text{س}| & \text{، س} > ١ \\ \text{س} & \text{، س} < ١ \end{cases}$

٢) $\text{د(س)} = \dfrac{|\text{س}|}{\text{س}}$ ، $\text{س} \neq ٠$

٣) $\text{ق(س)} = \begin{cases} ٢\text{س} + ١ & \text{، س} \leqslant ١ \\ \dfrac{١}{\text{س}} & \text{، س} > ١ \end{cases}$

٤) $\text{د(س)} = \begin{cases} \dfrac{\text{س}^٢ - ٤}{\text{س} - ٢} & \text{، س} \neq ٢ \\ ٥ & \text{، س} = ٢ \end{cases}$

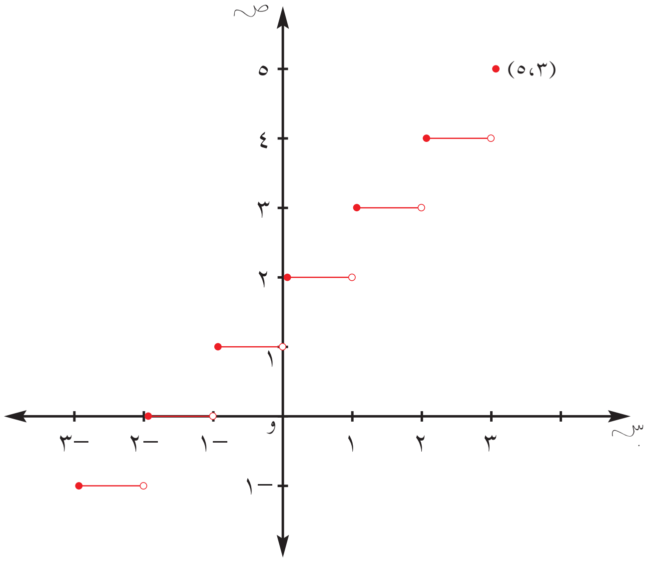
مثال ٢

ارسم بيان الدالة

ت(س) = [س+٢] ، –٣ ⩽ س ⩽ ٣.

الحل

س	[س + ٢]
–٣ ⩽ س < –٢	–١
–٢ ⩽ س < –١	٠
–١ ⩽ س < ٠	١
٠ ⩽ س < ١	٢
١ ⩽ س < ٢	٣
٢ ⩽ س < ٣	٤
س = ٣	٥



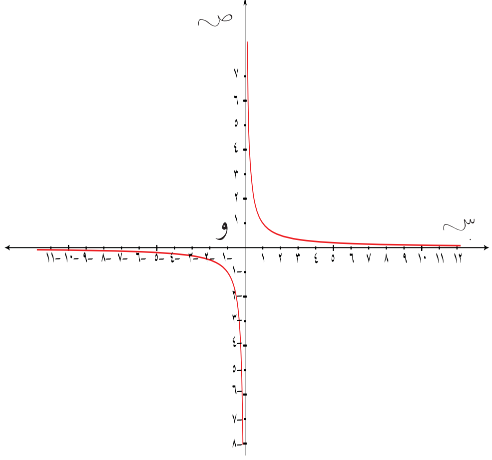
الدالة د(س) = $\frac{١}{س}$

واضح أن مجال د هو ح – {٠} (لماذا؟)

ولرسم بيان هذه الدالة ينبغي أن نأخذ الحالتين الآتيتين:

أ) إذا كان س > ٠ ، فإن: د(س) تكون موجبة دائماً، حيث تقترب د(س) من الصفر.

س	$\frac{١}{٤}$	$\frac{١}{٣}$	$\frac{١}{٢}$	١	٢	٣	٤
د(س)	٤	٣	٢	١	$\frac{١}{٢}$	$\frac{١}{٣}$	$\frac{١}{٤}$



ب) إذا كان س < ٠ ، فإن: د(س) تكون سالبة دائماً.

س	–٨	–٧	–٦	–٥	–٤	–٣	–٢	–١
د(س)	–$\frac{١}{٨}$	–$\frac{١}{٧}$	–$\frac{١}{٦}$	–$\frac{١}{٥}$	–$\frac{١}{٤}$	–$\frac{١}{٣}$	–$\frac{١}{٢}$	–١

من خلال التمثيل البياني للدالة د(س) = $\frac{١}{س}$ لاحظ قيمة د(س) في كل مما يلي:

١) عندما تقترب س من الصفر

٢) عندما تقترب س من ∞ .

٣) عندما تقترب س من $\overline{∞}$.

الدالة العكسية Reverse Function

مثال ١

أراد أحد المهندسين عمل خزان ماء رئيسي للقرية على شكل مكعب حجمه ٢١٦م^{٣}. ما طول حرف خزان الماء؟.

الحل

نفرض أن حجم المكعب ح وطول الحرف س

ح = س^{٣} ⟵ (١)

$\sqrt[٣]{ح} = \sqrt[٣]{س^{٣}}$

$\sqrt[٣]{ح}$ = س ومنها

س = $\sqrt[٣]{ح}$ ⟵ (٢)

تناقش مع زملائك في إيجاد العلاقة بين الدالة (١) والدالة (٢)

تأمل الشكل التالي وسجل ملاحظاتك:

العنصر		الدالة		العنصر		الدالة		العنصر
أ	⇄	د(س)	⇄	ب	⇄	هـ(س)	⇄	أ

في الشكل أعلاه الدالتان د(س)، هـ (س) كل منها دالة عكسية للأخرى.

مثال ٢

أوجد الدالة العكسية للدالة د(س) = ١٠س − ٥

الحل

ضع ص = ١٠س − ٥

بادل س مع ص

∴ س = ١٠ص − ٥

عين ص بدلالة س

$\boxed{ص = \frac{س + ٥}{١٠}}$ ⟹ معكوس الدالة د(س)

ويكتب معكوس الدالة د(س) بالصورة د$^{-١}$ (س) = $\frac{س + ٥}{١٠}$

الدالة المحايدة Identity Function

تدريب ١

أنقل الجدول في دفترك ثم أكمله بما يناسب:

س	٣-	٢-	١-	٠	١	٢	٣
د(س) = ٢س+١							
ق(س) = س							

- قارن بين د(س)، ق(س)، اكتب ملاحظاتك؟
- ما قيمة ق(م)؟

تعريف

يقال للدالة د أنها محايدة إذا كان ∀س ∋ مجال الدالة د يكون د(س) =س أي: إذا كانت صورة أي عنصر في الدالة د هو العنصر نفسه.

مثال ١

إذا كان د(س) = ٢س + ٣، هـ(س) = $\frac{١}{٢}$(س − ٣) برهن أن كلا من د∘هـ، هـ∘د دالة محايدة.

الحل

(د∘هـ) (س) = د (هـ (س))

= د($\frac{١}{٢}$ (س − ٣))

= ٢ ($\frac{١}{٢}$(س − ٣)) + ٣

= س

(هـ∘د) (س) = هـ (د (س)) = هـ (٢س + ٣)

= $\frac{١}{٢}$ [(٢س + ٣) − ٣]

= س

(د∘هـ) دالة محايدة، (هـ∘د) دالة محايدة.

تدريب ٢

إذا كانت د(س) دالة محايدة مجالها ط فأوجد قيمة كل مما يلي:

د(٠)، د(٢)، د(٣)، د(١٠)، د(٢٠)

تدريب ١

عين معكوس الدالة د(س) = ١٦ س^٤

نشاط ١: بالتعاون مع زميلك أكمل الجدول التالي في دفترك:

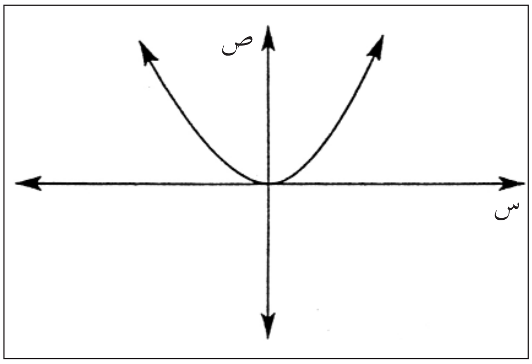
الدالة	تناظر واحد لواحد	ليس تناظر واحد لواحد	معكوس الدالة	المعكوس يمثل دالة	المعكوس لا يمثل دالة
د(س) = س + ٨	✓		د^{-١} (س) = س − ٨	✓	
هـ(س) = س − ٥					
ك(س) = س^٣					
ل(س) = س^٢ + ٥س − ١					

– ناقش الجدول بعد إكماله مع زميلك.

– ماذا تستنتج؟

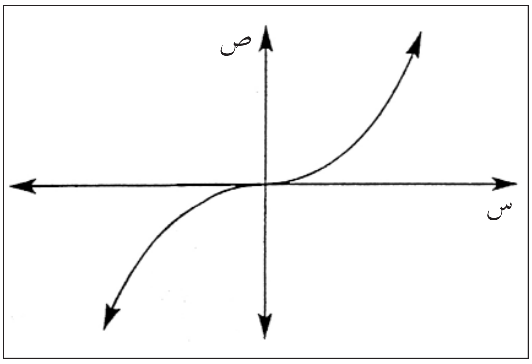
مثال ٤

لأي من الدوال الممثلة في الأشكال التالية توجد دالة عكسية:



د: ح ⟵ ح

شكل (١)



هـ: ح ⟵ ح

شكل (٢)

الحل

من شكل (١)

المدى = ح^+ ≠ المجال المقابل

د ليست شاملة.

لا توجد دالة عكسية لـ د (أو معكوس الدالة د ليس دالة)

للتحقق من صحة الحل

جد:

$$د(د^{-١}(س)) = \cancel{١٠}\frac{س + \cancel{٥}}{\cancel{١٠}} - \cancel{٥}$$

$$= س$$

وكذلك

$$د^{-١}(د(س)) = \frac{(١٠س - ٥) + ٥}{١٠}$$

$$= س$$

$\therefore$ $د(د^{-١}(س)) = د^{-١}(د(س))$ $\therefore$ $د^{-١}(س)$ دالة عكسية للدالة د(س)

مثال ٣

إذا كانت د(س) = ٢س + ٣ أوجد ما يلي:

١) $د^{-١}(س)$ ٢) $د \circ د^{-١}(س)$ ، $د^{-١} \circ د(س)$ ماذا تلاحظ؟

الحل

$\because$ د(س) = ٢س + ٣

ص = ٢س + ٣

س = ٢ص + ٣ (تبديل المتغيرات)

س − ٣ = ٢ص

$$ص = \frac{س - ٣}{٢}$$

$$\therefore د^{-١}(س) = \frac{س - ٣}{٢}$$

$$د\circ د^{-١}(س) = د^{-١}(د(س)) = د^{-١}(٢س + ٣) = \frac{٢س + ٣ - ٣}{٢} = س = \text{الدالة المحايدة}$$

$$د^{-١}\circ د(س) = د(د^{-١}(س)) = د(\frac{س - ٣}{٢}) = ٢(\frac{س - ٣}{٢}) + ٣ = س = \text{الدالة المحايدة}$$

نلاحظ أن: $د^{-١} \circ د(س)$ دالة محايدة، $د \circ د^{-١}(س)$ دالة محايدة.

تعريف

لتكن الدالة د تناظراً واحد لواحد.

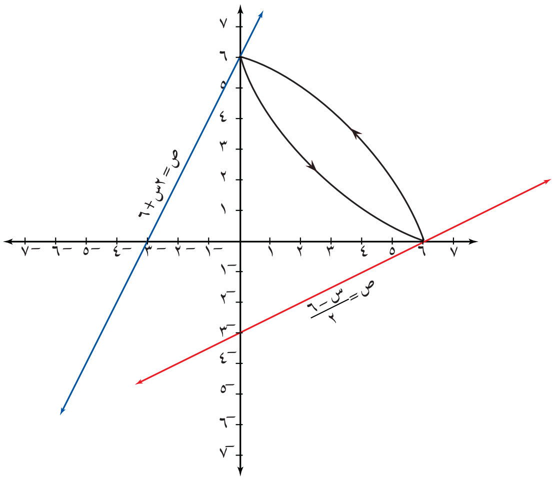
يقال إن الدالة هـ هي الدالة العكسية للدالة د إذا كان:

د(هـ(س)) = س

هـ(د(س)) = س

مثال ٥

ارسم منحنى الدالة ص = $\frac{س - ٦}{٢}$ والدالة العكسية. ثم اكتب معادلة معكوس الدالة.



الحل

– ارسم الدالة الأصلية ص = $\frac{س - ٦}{٢}$

– جد عدة نقاط في المنحنى مثلاً

(٦، ٠) ، (٠، −٣) ، (٧، $\frac{١}{٢}$)

– اعكس ترتيب الإحداثيات في النقاط السابقة.

(٦، ٠) ⇐ (٠، ٦)

(٠، −٣) ⇐ (−٣، ٠)

(٧، $\frac{١}{٢}$) ⇐ ($\frac{١}{٢}$، ٧)

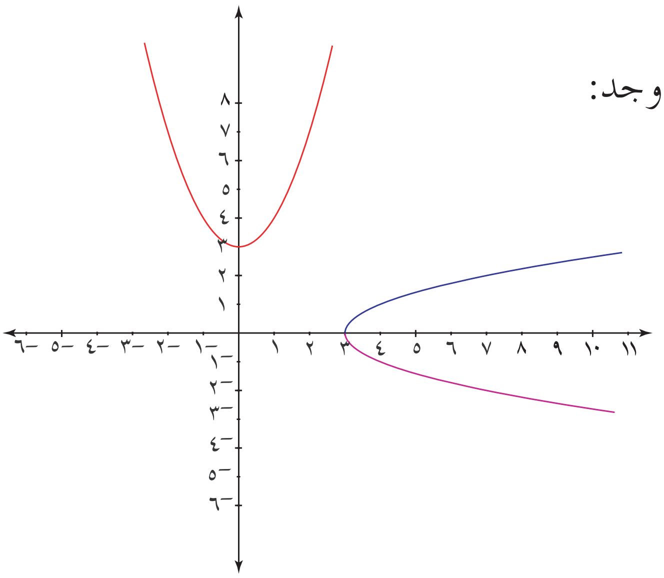
– مثل النقاط التي حصلت عليها في المستوى الإحداثي وصل بينها بخط مستقيم يمثل منحنى الدالة العكسية للدالة ص = $\frac{س - ٦}{٢}$

– لكتابة معادلة الدالة العكسية جد الميل والجزء المقطوع من محور الصادات، حيث الميل هنا يساوي ٢ (لماذا؟) والجزء المقطوع من محور الصادات يساوي ٦.

∴ المعادلة هي ص = ٢س + ٦

اكتب معادلة المعكوس بطريقة أخرى.

مثال ٦



إذا كانت الدالة د(س) = س^{٢} + ٣ فاوجد:

– معكوس الدالة د(س).

مثل الدالة د(س) ومعكوسها بيانيا:

– هل المعكوس يمثل دالة؟

الحل

∵ د(س) = س^{٢} + ٣

ص = س^{٢} + ٣

س = ص^{٢} + ٣

ص = ± $\sqrt{س - ٣}$

∴ معكوس الدالة د(س) = س^{٢} + ٣ هو ص = ± $\sqrt{س - ٣}$

نلاحظ من الرسم أن ص = ± $\sqrt{س - ٣}$ ليست دالة (باستخدام اختبار الخط الرأسي)

من شكل (٢)

الدالة هـ واحد لواحد (باستخدام اختبار الخط الأفقي)

المدى = ح = المجال المقابل

الدالة هـ شاملة

هـ تناظر واحد لواحد

يوجد دالة عكسية لـ هـ

تعريف

لتكن د: س ⟵ ب تناظرا واحد لواحد. لذلك توجد دالة من ب إلى س يرمز لها بالرمز $د^{-١}$ بحيث $د^{-١}$ (ب) = أ ⟺ د(أ) = ب لكل ب ∈ ح .

تسمى الدالة $د^{-١}$: ب ⟵ س الدالة العكسية للدالة د: س ⟵ ب

تدريب ٢

ارسم بيان الدالة ص = ٢$س^٢$ + ٤س − ٣ ثم بيّن من خلال الرسم ما إذا كان معكوسها يمثل دالة أم لا.

تدريب ٣

تحقق من أن الدالتين الواردتين في مثال ١ كل منهما دالة عكسية للأخرى.

نشاط ١: «التمثيل البياني للدالة العكسية»

الخطوات:

١) ارسم منحنى الدالة د(س) = ٢س − ٨
٢) ارسم منحنى الدالة $د^{-١}$ (س) = $\frac{س+٨}{٢}$ على نفس المستوى الإحداثي.
٣) اكتب ثلاث نقاط تقع على منحنى د(س)
٤) اعكس إحداثيي كل نقطة (ضع الإحداثي السيني مكان الإحداثي الصادي والعكس) من النقاط التي اخترتها.
٥) مثل النقاط التي حصلت عليها على نفس المستوى الإحداثي.
٦) ارسم المستقيم ق(س) = س
٧) صل كل نقطة بصورتها مثلا (٤،٠) ، (٠،٤) هل هذا الخط عمودي على منحنى الدالة ق؟
٨) ما علاقة منحنى كل من الدالتين د، $د^{-١}$ بالدالة ق؟

تمارين ومسائل ٢

١) بين فيما يلي ما إذا كانت د(س)، هـ(س) دالة عكسية للأخرى:

أ) $د(س) = \frac{٢س^{٢} + ٦}{٨}$ ، $هـ(س) = \sqrt{٤س - ٣}$ ، $س \geq \frac{٣}{٤}$

ب) $د(س) = ٢٨س^{٣}$ ، $هـ(س) = \frac{١}{٢٨س^{٣}}$ ، $س \neq ٠$

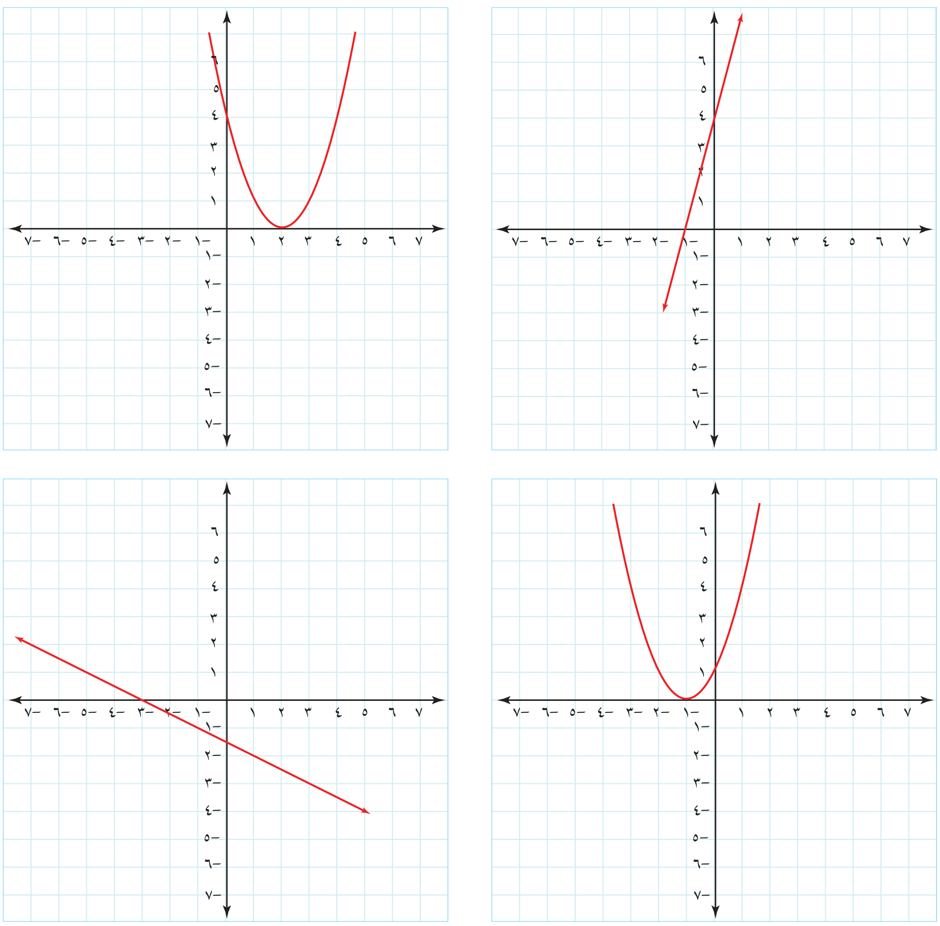
٢) اكتب معكوس كل من الدوال التالية، ثم ارسم الدالة ومعكوسها في نفس المستوى الإحداثي.

أ) $ص = \frac{١}{٢س}$ ب) $ص = \frac{س + ١}{٣}$

ج) $ص = ٥س + ٣$ د) $ص = \frac{٣}{٤}س - ٢$

هـ) $د(س) = س^{٢} - ٤$ و) $د(س) = (س - ٢)^{٢} + ٣$

٤) ارسم المنحنيات التالية ومعكوساتها في ورق مربعات وبين إن كانت المعكوسات تشكل دوالا أم لا. ثم اكتب معادلة كل منحنى ومعادلة المعكوس .



تدريب ٤

أ) تحقق من أن الدالة د(س) = ٤س^{٢} حيث س $\geqslant$ ٠ تناظر واحد لواحد وأوجد:

د$^{-١}$ (س)

مثل الدالة د(س) والدالة د$^{-١}$ (س) بيانيا.

ب) اكتب معكوس الدالة ص= س^{٢} + ٢ حيث س $\geqslant$ ٠

هل المعكوس يمثل دالة؟

تدريب ١

إذا علمت أن خلايا البكتيريا تتضاعف كل ساعة . فصمم جدولاً توضح فيه زمن الإنقسام وعدد الخلايا المناظرة لها في الساعة الأولى ، الثانية ، ...، ن وذلك بافتراض أن العدد الإبتدائي للخلايا هي (١٠٠ خلية) ، ثم مثّل الدالة بيانياً موضحاً العلاقة بين الزمن وعدد الخلايا .

تعريف

تسمى الدالة التي يكون المتغير فيها أُساً بالدالة الأسية وتكتب :

الفترة الزمنية — العدد الأصلي

$ص = حـ . ٲ^{س}$ ، حيث ٲ > ٠ ، س ∋ ح

عامل الزيادة أو النقصان — العدد بعد فترة س

مثال ١

تستفيد الدول من إجراءات التعداد السكاني، فإذا علمت أن عدد سكان إحدى الدول يُقدر بـ ٢٤ مليون نسمة في عام ١٩٩٠م وكان المتوقع زيادة سكانية بمعدل ٢,٨٪ خلال العقد الواحد (١٠ سنوات) .

كم يكون عدد السكان المتوقع في :

ٲ) عام ٢٠٠٠

ب) عام ٢٠٢٥

الحل

يمكن التعبير عن زيادة عدد السكان بدالة أسية على الصورة د(س) = م $(ٲ)^{ن}$ حيث م عدد السكان الحالي، ٲ معدل الزيادة ، ن الفترة الزمنية بالعقود .

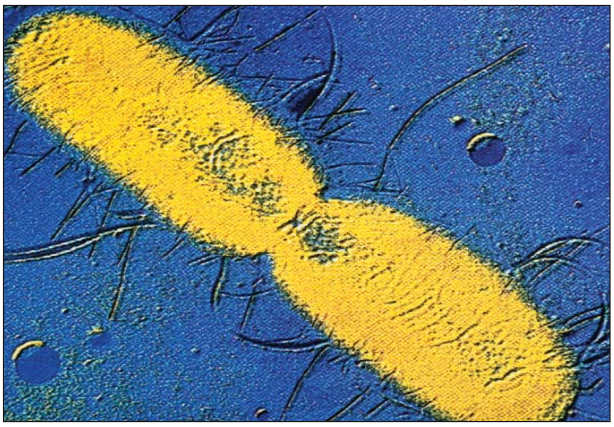
ٲ) د (١) = ٢٤٠٠٠ ٠٠٠ × $(١,٠٢٨)^{١}$ = ٢٤٦٧٢٠٠٠ مليون

(فسر كيف تم الحصول على ١,٠٢٨)

ب) د (٣,٥) = ٢٤٠٠٠ ٠٠٠ × $(١,٠٢٨)^{٣,٥}$ = ٢٦٤٣٥٤٧٧

(فسر كيف تم الحصول على ٣,٥ ؟)

الدالة الأسية Exponential Function



[illegible]

تمهيد :

معظم الخلايا البكتيرية تتكاثر بالإنشطار الثنائي، أي أن كل خلية تتضاعف حيث :
تتكاثر الخلية الواحدة لتنتج خليتين بعد فترة زمنية محددة وبعدها إلى أربع خلايا ، ثمان، ... الخ .

– ما عدد الخلايا التي تنتجها ١٨ خلية في انقسامها الأول ؟
– ما عدد الخلايا التي تنتجها في الانقسام الثاني ، الثالث ، ... ، الثامن ؟
– ما عدد الخلايا التي تنتجها بعد ن من الزمن ؟

نشاط ١: «الدالة الأسية»

الأدوات : آلة حاسبة ، ورقة وقلم .

الخطوات :

١) انقل الجدول التالي في دفترك ثم أكمله على اعتبار أن فترة الانقسام هي ساعة واحدة وعدد خلايا البكتيريا الإبتدائية ٢٥ خلية .

الزمن (بالساعات)	٠	١	٢	٣	٤	ن
عدد الخلايا	$٢٥(٢)^{٠}$	$٢٥(٢)^{١}$	$٢٥(٢)^{٢}$	...	...	...

٢) اكتب عبارة جبرية توضح عدد خلايا البكتيريا بعد (ن) من الساعات .

٣) عبّر عن عدد الخلايا بعد ١٠ ساعات ، ٢٠ ساعة ، ١٠٠ ساعة بمقدار جبري.

٤) لاحظ النمط الذي تتكاثر به الخلايا ، هل العلاقة التي تربط بين الزمن وعدد الخلايا تمثل دالة . ماذا نسمي هذه الدالة ؟

تدريب ٣

ارسم منحنى الدالة ق (س) = $(٢)^{-\text{س}}$ على مستوى الإحداثيات، ثم أوجد صورة المنحنى تحت تأثير انعكاس في الإحداثي الصادي.

نتيجة

١) إذا كانت ق (س) = $\text{أ}^{\text{س}}$ ، أ $\in$ ح$_+$ ، أ $\neq$ ١ فإن انعكاس هذه الدالة في المحور الصادي لمستوى الإحداثيات هي الدالة ل (س) = $\text{أ}^{-\text{س}} = \left(\frac{١}{\text{أ}}\right)^{\text{س}}$

٢) مجال الدالة $\text{أ}^{\text{س}}$ هو ح

٣) مدى الدالة $\text{أ}^{\text{س}}$ هو ح$_+$ ما عدا الصفر

٤) الدالة $\text{أ}^{\text{س}}$ متزايدة عندما أ $>$ ١، ومتناقصة ٠ $<$ أ $<$ ١

٥) منحنى الدالة $\text{أ}^{\text{س}}$ يقطع المحور الصادي عند النقطة (٠، ١)

مثال ٢

حل كلا من المعادلات الأسية التالية :

أ) $٤^{|٢\text{س}+١|} = ٢^{٥}$

ب) ٣٦ = $٦^{\text{ك}}$ إذا علمت أن ك = $\sqrt{٤\text{س}+٥} - \sqrt{٢\text{س}-١}$

الحل

أ) $\because ٤^{|٢\text{س}+١|} = ٢^{٥}$

$\therefore ٢^{٢|٢\text{س}+١|} = ٢^{٥}$

$٢|٢\text{س}+١| = ٥ \Leftrightarrow |٢\text{س}+١| = \frac{٥}{٢}$

إما $٢\text{س}+١ = \frac{٥}{٢}$ أو $٢\text{س}+١ = \frac{-٥}{٢}$

$\therefore ٢\text{س} = \frac{٣}{٢}$ ، $٢\text{س} = \frac{-٧}{٢}$

$\therefore \text{س} = \frac{٣}{٤}$ ، $\text{س} = \frac{-٧}{٤}$

$\therefore$ مجموعة الحل هي : $\left\{\frac{٣}{٤} ، \frac{-٧}{٤}\right\}$

تدريب ٢

أ) متوازي مستطيلات أبعاده ٢ ، ٣ ، $(\frac{١}{٢})^{س}$

١) اكتب الحجم بدلالة المتغير س

٢) اكتب الحجم بعد مضاعفة المتغير س ، وضح هل زاد الحجم أم نقص ؟

ب) إذا علمت أن ا لدالة الخطية تكتب في الصورة د (س) = أ س + جـ ، والدالة الأسية تكتب في الصورة د (س) = $أ^{س}$ حيث أ عدد حقيقي

فما الفرق بين الدالتين من حيث شكل المنحنى (ضع أ = ٢ مثلاً) .

نشاط ١: «رسم الدالة الأسية»

الأدوات : ورقة وقلم، ورق رسم بياني

الخطوات:

١) كوّن جدولا في دفترك كالتالي:

س	٣-	٢-	١-	٠	١	٢	٣
$٢^{س}$	$\frac{١}{٨}$	$\frac{١}{٤}$	*	*	*	*	*

٢) اكتب قيم س، $٢^{س}$ في صورة أزواج مرتبة (س ، $٢^{س}$).

٣) مثل الأزواج المرتبة على مستوى الإحداثيات ثم صل النقاط بخط.

٤) ما العلاقة بين س ، $٢^{س}$؟ اكتب ملاحظاتك.

٥) من الخطوة ٢ أوجد صورة كل نقطة تحت تأثير انعكاس في المحور الصادي لمستوى الإحداثيات.

٦) كرر الخطوة ٣.

٧) ما العلاقة بين المنحنى $٢^{س}$ والمنحنى الذي حصلت عليه؟

٨) اكتب قاعدة المنحنى الجديد.

٩) ما نقطة تقاطع المنحنيين؟

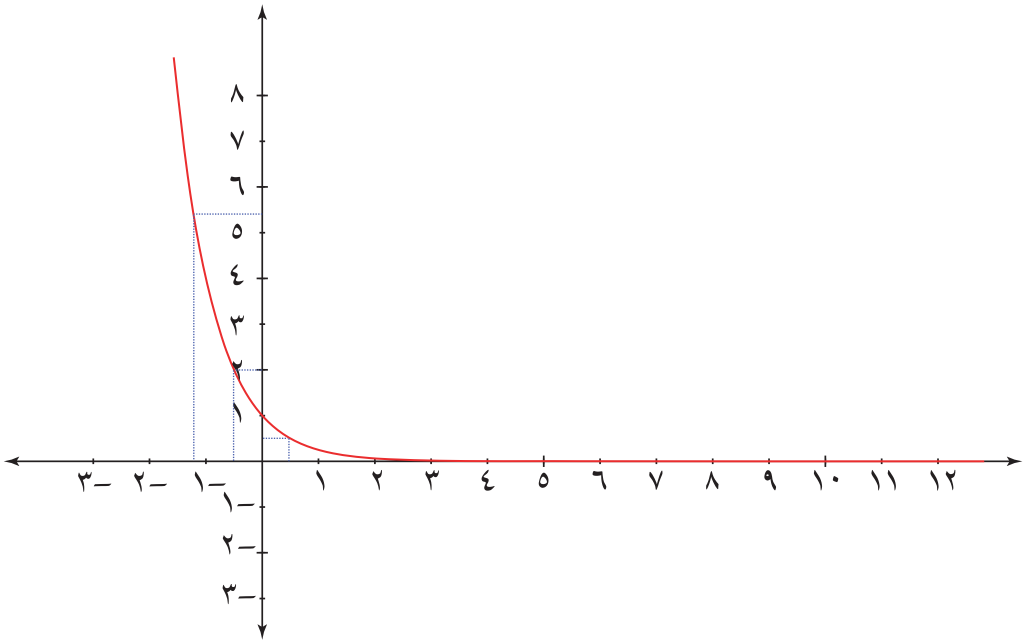
مثال ٣

مثل بيانياً الدالة د (س) = $(\frac{١}{٤})^{س}$ حيث س $\in$ [−١ ، ٣] ومن الرسم أوجد د $(\frac{١}{٢})$ ، د $(\frac{-١}{٢})$ ثم أوجد قيمة س عندما $(\frac{١}{٤})^{س} = ٥,٣$

الحل

كون الجدول الآتي :

س	−١	٠	١	٢	٣
د(س)	٤	١	$\frac{١}{٤}$	$\frac{١}{١٦}$	$\frac{١}{٦٤}$



د $(\frac{١}{٢})$ = ٠,٥ ويمكن التحقق د $(\frac{١}{٢}) = (\frac{١}{٤})^{\frac{١}{٢}} = \sqrt{\frac{١}{٤}} = \frac{١}{٢}$

د $(-\frac{١}{٢})$ = ٢ ويمكن التحقق د $(-\frac{١}{٢}) = (\frac{١}{٤})^{-\frac{١}{٢}} = ٢$

عندما د (س) = ٥,٣ س = −١,٢

تدريب ٥

مثل بيانياً منحنى الدالة د (س) = $(\frac{١}{٣})^{س}$ في الفترة [−٢ ، ٣]

ومن الرسم أوجد قيمة :

أ) د (−١,٤) ، د $(\frac{١}{٢})$

ب) س إذا كان $(\frac{١}{٣})^{س} = ٢,٥$

ب) $٣٦ = ٦^{ك}$ إذا علمت أن $ك = \sqrt{٤س + ٥} - \sqrt{٢س - ١}$

$٦^{٢} = ٦^{ك} \Leftarrow ك = ٢$

$\therefore \sqrt{٤س + ٥} - \sqrt{٢س - ١} = ٢$

$\therefore \sqrt{٤س + ٥} = ٢ + \sqrt{٢س - ١}$ بتربيع الطرفين نحصل على

$٤س + ٥ = ٤ + ٤\sqrt{٢س - ١} + ٢س - ١$

$٤س + ٥ = ٣ + ٤\sqrt{٢س - ١} + ٢س$

$٢س + ٢ = ٤\sqrt{٢س - ١}$

$س + ١ = ٢\sqrt{٢س - ١}$ بتربيع الطرفين

$س^{٢} + ٢س + ١ = ٤(٢س - ١)$

$س^{٢} + ٢س + ١ = ٨س - ٤$

$س^{٢} - ٦س + ٥ = ٠ \Leftrightarrow (س - ١)(س - ٥) = ٠$

$\therefore$ مجموعة الحل هي = $\{١ ، ٥\}$ تحقق من الإجابة.

تدريب ٤

أوجد قيم س في كل مما يلي :

أ) $٥^{٢س + ١} = \sqrt{٥}$

ب) $٢^{س} = \sqrt{٢^{(س - ٢)}}$

١) إذا كان د(س) = $٣^{س}$ فحل المعادلة التالية

د(٢س) − ٣٦ د(س) + د(٥) = ٠

٢) حدد مجال ومدى كل من الدالتين

$ص_١ = ٥^{س}$ ، $ص_٢ = \left(\frac{١}{٥}\right)^{س}$

٣) حل المعادلات الأسية التالية :

أ) $٨^{(١٤ + ٢س)} = ٤٠٩٦$

ب) $٣^{(س + ٣)} - \frac{١}{٦٥٦١} =$ صفر

حـ) $٩^{(٣س + ٢٤)} = ٧٢٩$

٤) إذا كانت د (س) = $٣^{س}$

فاوجد قيمة : $\frac{د(٢س + ٢) + د(٢س - ١)}{٥ د(٢س) - ٧ د(٢س - ١)}$

٥) ارسم منحنى كل من الدوال التالية:

١) $٣^{س}$

٢) $٣^{س} + ٢$ ماذا تلاحظ؟

مثال ٤

ارسم الدالة د (س) = $٣^{س}$ في الفترة [−٢ ، ٣]

ﺃ) من الرسم أوجد ما يلي :

د ($\frac{٣}{٢}$) ، د (− $\frac{١}{٢}$) ، س عندما $٣^{س}$ = $\frac{١}{٢}$ ٨

ب) أوجد قيمة س عندما د (س + ١) + د (س − ١) = ٩٠

الحل

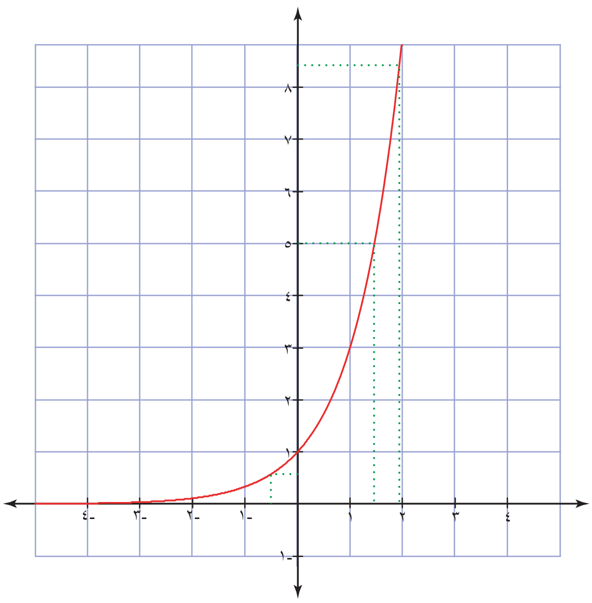
س	٣	٢	١	٠	−١	−٢
د(س)	٢٧	٩	٣	١	$\frac{١}{٣}$	$\frac{١}{٩}$

ﺃ) د ($\frac{٣}{٢}$) ≃ ٥,٢

د (− $\frac{١}{٢}$) ≃ ٠,٦

س ≃ ٢ (أقل بقليل عن ٢)

ب) $٣^{س+١}$ + $٣^{س-١}$ = ٩٠



باستخدام قواعد الأس :

$٣^{س}$ × ٣ + $٣^{س}$ × $\frac{١}{٣}$ = ٩٠

$٣^{س}$ (٣ + $\frac{١}{٣}$) = ٩٠

⇐ $٣^{س}$ = ٢٧

∴ س = ٣ (تحقق من صحة الإجابة)

تدريب ٦

ارسم الدالة د (س) = $٤^{س}$ في الفترة [−٢ ، ٢]

ﺃ) من الرسم أوجد ما يلي :

د (٠)، د (١) ، د ($\frac{١}{٢}$ ١)

ب) أوجد قيمة س إذا كانت د (س − ٢) + د (س + ١) = ٦٥ ثم تحقق من صحة إجابتك .

مثال ١

أوجد ناتج كل مما يلي:

١) $\text{لو}_{٤}\ ٦٤$ ٢) $\text{لو}_{٨}\ \frac{١}{٨}$

الحل

١) $٦٤ = ٤^{٣} \Leftrightarrow \text{لو}_{٤}\ ٦٤ = ٣$

٢) $\frac{١}{٨} = ٨^{-١} \Leftrightarrow \text{لو}_{٨}\ \frac{١}{٨} = -١$

تدريب ٢

أنقل الجدول التالي في دفترك وأكمله بما يناسب:

الصورة الأسية	$٢^{٤} = ١٦$		$٣^{-٢} = \frac{١}{٩}$	
الصورة اللوغاريتمية		$\text{لو}_{١٠}\ ١٠٠٠ = ٣$		$\text{لو}_{٩}\ ٣ = \frac{١}{٢}$

مثال ٢

أوجد قيمة س في كل مما يأتي:

١) $\text{لو}_{\text{س}}\ ١٢٥ = ٣$ ٢) $\text{لو}_{٢}\ \text{س} = ١$

الحل

١) $\text{لو}_{\text{س}}\ ١٢٥ = ٣ \Leftrightarrow \text{س}^{٣} = ١٢٥$ ، ٢) $\text{لو}_{٢}\ \text{س} = ١ \Leftrightarrow ٢^{١} = \text{س}$

$\therefore \text{س} = ٥$ لماذا؟ $\therefore \text{س} = ٢$

تدريب ٣

أوجد قيمة المتغير في كل مما يأتي:

١) $\text{س} = \text{لو}_{٧}\ ٧$ ٢) $\text{لو}_{٣}\ \text{ع} = ٠$

٣) $\text{لو}_{٥}\ \text{م} = -٣$ ٤) $\text{لو}_{٢٤٣}\ \frac{١}{٣} = \text{ص}$

الدالة اللوغاريتمية Logarithmic Function

نشاط ١: معكوس الدالة الأسية

الأدوات: ورق رسم بياني ، مسطرة ، قلم

الخطوات:

١) ارسم منحنى الدالة ص = $٢^{س}$ على مستوى الإحداثيات.

٢) ارسم منحنى الدالة ص = س على نفس الشكل.

٣) ارسم صورة منحنى الدالة ص = $٢^{س}$ تحت تأثير انعكاس حول المستقيم ص = س.

٤) كرر الخطوات السابقة مع دوال أسية أخرى مثل ص = $٣^{س}$

٥) اكتب صيغة الدالة الأسية تحت تأثير الإنعكاس حول المستقيم ص = س.

تدريب ١

أ) انقل الجدول الآتي في دفترك ثم وضح متى يمكن ومتى لا يمكن إيجاد قيم ص مع ذكر السبب:

الدالة \ س	−٢	−١	٠	١	٢
ص = $٢^{س}$					
س = $٢^{ص}$					

ب) ما الفرق بين الدالتين ص، س ؟ اكتب ملاحظاتك؟

تعريف

– معكوس الدالة الأسية = $أ^{س}$ هي $د^{-١}$(س) = $لو_{أ}$ س حيث أ > ٠، أ ≠ ١، س >٠

ويقرأ لوغاريتم س للأساس أ

– اللوغاريتم: هو القوة (الأس) التي يجب أن يرفع لها الأساس للحصول على عدد معلوم.

– الدالة اللوغاريتمية تعتبر معكوس الدالة الأسية وتعطى العلاقة بينهما س = $أ^{ص}$ ⇔ ص = $لو_{أ}$ س

تمارين ومسائل ٤

١) حول كلاً مما يلي للصورة اللوغاريتمية:

أ) $٢^{٤} = ١٦$ ب) $٠٫٠١ = ١٠^{-٢}$ جـ) $\left(\frac{١}{٢}\right)^{-٣} = ٨$

د) $٢^{-٥} = \frac{١}{٣٢}$ هـ) $(٦٤)^{\frac{٢}{٣}} = ١٦$ و) $\left(\frac{١}{٢٧}\right)^{\frac{١}{٣}} = \frac{١}{٣}$

٢) حول من الصورة اللوغاريتمية إلى الصورة الأسية لكل مما يلي:

أ) $\text{لو}_{٨}\ ١ = ٠$ ب) $\text{لو}_{٥}\ \frac{١}{٢٥} = -٢$

جـ) $\text{لو}_{١٠}\ ٠٫٠٠١ = -٣$ د) $\text{لو}_{\sqrt{٨}}\ ٥١٢ = ٦$

٣) أوجد قيمة س لكل مما يلي:

أ) $\text{لو}_{٣}\ \text{س} = ٢$ ب) $\text{لو}_{٥}\ \text{س} = -٣$ جـ) $\text{لو}_{٢}\ ١٦ = \text{س}$

د) $\text{لو}_{١٠}\ \sqrt[٣]{١٠} = \frac{\text{س}}{٦}$ هـ) $\text{لو}_{٨}\ ٢ = \text{س}$ ز) $\text{لو}_{٨}\ \text{س} = ١$

حـ) $\text{لو}_{٥}\ ٦٢٥ = \text{س}$ ط) $\text{لو}_{٣}\ \text{س} = \frac{٢}{٣}$ ي) $\text{لو}_{\text{س}}\ ٥ = ٣$

٤) يتناقص ثمن بيع آلة ميكانيكية سنويا وفقا للعلاقة التالية $\text{س}_{\text{ن}} = \text{س}_{١}\,(٠٫٩٤)^{\text{ن}}$ نتيجة الاستهلاك، حيث $\text{س}_{\text{ن}}$ الثمن بعد ن سنة، $\text{س}_{١}$ الثمن الأصلي، بعد كم سنة يصبح ثمن بيعها ربع ثمنها الأصلي؟

٥) إذا كانت العلاقة بين شدة التيار (ت) أمبير والزمن (ن) ثانية تحدد بالصيغة التالية $\text{ت} = (٢)^{-\text{ن}}$ ، فاحسب الزمن إذا كانت شدة التيار ٠٫٤ أمبير.

مثال ٣

حل المعادلة الآتية:

أ) $\text{لو}_{٢}\ ٣٢ = ٢\text{س} - ٧$ ب) $\text{لو}_{٣}\ \frac{١}{٢١٨٧} = ٣\text{س} - ٣٤$

الحل

أ) $\text{لو}_{٢}\ ٣٢ = ٢\text{س} - ٧ \quad \Leftrightarrow \quad ٢^{٢\text{س} - ٧} = ٣٢$

$٢^{٢\text{س} - ٧} = ٢^{٥} \quad \Leftarrow \quad ٢\text{س} - ٧ = ٥$

$\therefore \text{س} = ٦$ لماذا؟

ب) $\text{لو}_{٣}\ \frac{١}{٢١٨٧} = ٣\text{س} - ٣٤ \quad \Leftrightarrow \quad ٣^{٣\text{س} - ٣٤} = \frac{١}{٢١٨٧}$

$٣^{٣\text{س} - ٣٤} = ٣^{-٧} \quad \Leftarrow \quad ٣\text{س} - ٣٤ = -٧$

$\therefore \text{س} = ٩$ لماذا؟

تدريب ٤

حل المعادلات الآتية:

أ) $\text{لو}_{\text{س}+١}\ ٤ = -\frac{١}{٤}$ ب) $\text{لو}_{٢\sqrt{٣}}(\text{س}^{٢} - \text{س}) = ٢$

نشاط ٢: العمليات على اللوغاريتمات

الأدوات : ورقة ، قلم.

الخطوات :

استعن بالجدول التالي لإكمال خطوات النشاط:

س	٣	٩	٢٧	٨١	٢٤٣	٧٢٩
لو$_{٣}$ س	١	٢	٣	٤	٥	٦

١) اعتمد على الجدول أعلاه وأكمل ما يلي:

أ) لو$_{٣}$ (٣×٩) = ؟ ، لو$_{٣}$ ٣+لو$_{٣}$ ٩ = ؟

ب) لو$_{٣}$ (٣×٢٧) = ؟ ، لو$_{٣}$ ٣ + لو$_{٣}$ ٢٧ = ؟

ج) لو$_{٣}$ (٣×٨١) = ؟ ، لو$_{٣}$ ٣+لو$_{٣}$ ٨١ = ؟

٢) ما العلاقة بين العبارة الأولى والعبارة الثانية في كل مفردة؟

٣) استخدم هذا النمط لتكوين قاعدة أو تعميم حول الصيغة لو$_{ن}$ (س×ص).

٤) اعتمد على الجدول أعلاه وأكمل ما يلي:

أ) لو$_{٣}$ $\left(\frac{٢٧}{٩}\right)$ = ؟ ، لو$_{٣}$ ٢٧−لو$_{٣}$ ٩ = ؟

ب) لو$_{٣}$ $\left(\frac{٨١}{٣}\right)$ = ؟ ، لو$_{٣}$ ٨١−لو$_{٣}$ ٣ = ؟

ج) لو$_{٣}$ $\left(\frac{٢٤٣}{٣}\right)$ = ؟ ، لو$_{٣}$ ٢٤٣−لو$_{٣}$ ٢٧ = ؟

٥) ما العلاقة بين العبارة الأولى والعبارة الثانية في كل مفردة؟

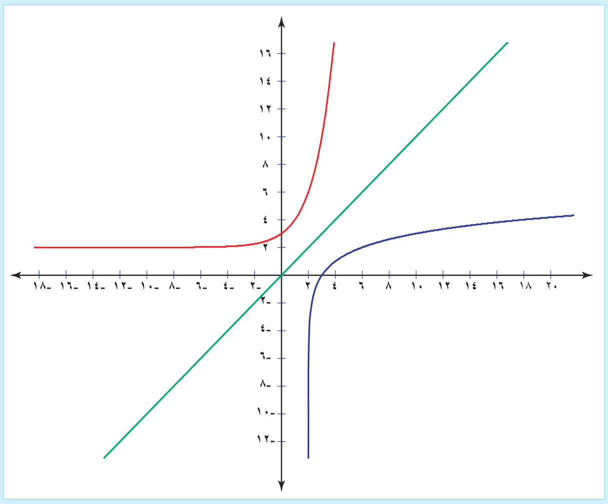
٦) استخدم هذا النمط لتكوين قاعدة أو تعميم حول الصيغة لو$_{ن}$ $\left(\frac{س}{ع}\right)$.

العمليات على اللوغاريتمات

نشاط ١: «الدالة اللوغاريتمية وخواصها»

الأدوات : مثلث قائم الزاوية ، ورقة رسم بياني ، قلم ، مسطرة .

الخطوات :



١) ارسم الدالة ص=$٢^{س}$ +٢ في دفترك كما هو موضح بالشكل

٢) جد صورة منحنى الدالة د (س) = $٢^{س}$ +٢ تحت تأثير انعكاس في المستقيم ص = س مستخدماً المثلث القائم.

٣) إذا علمت أن صورة الدالة الأسية د (س) = $٢^{س}$ +٢ تحت تأثير انعكاس حول المستقيم ص = س تسمى الدالة اللوغاريتمية فحدد ما يلي :

أ) مجال الدالة اللوغاريتمية ومداها .

ب) فترات التزايد للدالة اللوغاريتمية .

حـ) نقطة تقاطع منحنى الدالة اللوغاريتمية مع المحور السيني .

تدريب ١

ارسم الدالة ص = $(\frac{١}{٢})^{س}$ ثم ابحث صورتها تحت تأثير انعكاس في المستقيم ص = س ثم أوجد مجالها ومداها.

نتيجة

خواص الدالة اللوغاريتمية لو$_{أ}$ س:

١) مجال الدالة اللوغاريتمية ح$_{+}$ ومداها ح

٢) متزايدة إذا كانت أ > ١ ومتناقصة عند ٠ < أ < ١

٣) منحنى الدالة يمر بالنقطة (١،٠)

تدريب ٣

أوجد قيمة كل مما يلي:

١) لو$_{٣}$ ١   ٢) لو$_{٤}$ ٤   ٣) لو$_{٢}$ ١   ٤) لو$_{٦}$ ٦

مثال ٢

أوجد قيمة س في كل مما يلي:

١) لو$_{٣}$ ٢٧ + لو$_{٣}$ ٣ = لو$_{٣}$ س

٢) لو$_{٤}$ س − ٢ لو$_{٤}$ ٢ = لو$_{٤}$ ٢٤

٣) لو$_{٦}$ س = لو$_{٦}$ ٤ + لو$_{٦}$ ٦٣ − لو$_{٦}$ ٧

الحل

١) لو$_{٣}$ ٢٧ + لو$_{٣}$ ٣ = لو$_{٣}$ س

لو$_{٣}$ ٨١ = لو$_{٣}$ س

س = ٨١

٢) لو$_{٤}$ س − ٢ لو$_{٤}$ ٢ = لو$_{٤}$ ٢٤

لو$_{٤}$ س = لو$_{٤}$ ٢٤ + ٢ لو$_{٤}$ ٢

= لو$_{٤}$ ٢٤ + لو$_{٤}$ ٤

= لو$_{٤}$ ٩٦

س = ٩٦

٣) لو$_{٦}$ س = لو$_{٦}$ ٤ + لو$_{٦}$ ٦٣ − لو$_{٦}$ ٧

لو$_{٦}$ س = لو$_{٦}$ ٤ + لو$_{٦}$ $\left(\frac{٦٣}{٧}\right)$

لو$_{٦}$ س = لو$_{٦}$ ٤ + لو$_{٦}$ ٩

لو$_{٦}$ س = لو$_{٦}$ ٣٦

س = ٣٦

تدريب ٤

أوجد قيمة س لما يلي:

١) لو$_{١٠}$ س = لو$_{١٠}$ ٧,٠٨٥

٢) لو$_{٥}$ ١٥ + ٠,٥ لو$_{٥}$ ٥ − لو$_{٥}$ ٣ = لو$_{٥}$ س

تدريب ٢

استخدم الاستنتاج الذي توصلت إليه من خلال النشاط لإيجاد قيمة كل مما يلي:

١) $لو_{٣}\ ٣\times٣$ ‏ ٢) $لو_{٢}\ \frac{١٢٨}{٢}$ ‏ ٣) $لو_{٣}\ \frac{٢١٨٧}{٢٧}\times ٣$

وعموماً:

إذا كانت س، ص، ن $\in$ ح$_+$ ، ن $\neq$ ١، ن > صفر فإن:

١) $لو_{ن}\ (س\times ص) = لو_{ن}\ س + لو_{ن}\ ص$

٢) $لو_{ن}\ \frac{س}{ص} = لو_{ن}\ س - لو_{ن}\ ص$

٣) $لو_{ن}\ س = لو_{ن}\ ص \Leftrightarrow س = ص$

٤) $لو_{ن}\ س^{م} = م\ لو_{ن}\ س$

درست سابقاً في موضوع الأسس أن $(ن)^{٠} = ١$ ، $ن^{١} = ن$ وعليه يمكن برهنة ما يلي:

١) $لو_{ن}\ ١ = ٠$ ‏ ٢) $لو_{ن}\ ن = ١$

برهان

١) نفرض أن $لو_{ن}\ ١ = س$

$(ن)^{س} = ١ = (ن)^{٠} \leftarrow س = ٠$

$\therefore$ $\boxed{لو_{ن}\ ١ = ٠ ،\ ن \in ح_+ ،\ ن > ١}$

٢) نفرض أن $لو_{ن}\ ن = س$

$ن^{١} = ن^{س} \leftarrow س = ١$

$\therefore$ $\boxed{لو_{ن}\ ن = ١ ،\ ن \in ح_+ ،\ ن > ١}$

مثال ١

برهن صحة النتيجة ٤ ($لو_{ن}\ س^{م} = م\ لو_{ن}\ س$)

برهان

$\because لو_{ن}\ س^{م} = لو_{ن}\ س\times س\times س\times س$ (م من المرات)

$= لو_{ن}\ س + لو_{ن}\ س + \ldots\ldots$ م من المرات (لماذا)؟

$\therefore لو_{ن}\ س^{م} = م \times لو_{ن}\ س$

مثال ٥

حل المعادلة $٧^{٣س} = ٢٠$

الحل

بأخذ اللوغاريتم للطرفين

لو $٧^{٣س}$ = لو ٢٠

٣ س لو ٧ = لو ٢٠

$س = \frac{لو ٢٠}{٣ لو ٧}$

استخدم الآلة الحاسبة لإيجاد لو ٧ :

– أدخل العدد ٧ في الآلة الحاسبة .

– إضغط على المفتاح **Log** فيظهر العدد ٠,٨٤٥٠٩٨

ولإيجاد قيمة س باستخدام الآلة الحاسبة اتبع الخطوات التالية :

Log	2	0	÷	)	3	Log	7	(	=	0,5131672

ويمكنك التحقق من صحة الإجابة بالتعويض عن قيمة س بـ (٠,٥١٣١٦٧٢)

$٧^{٣س} = ٢٠ \Leftarrow ٧^{(٣ \times ٠,٥١٣١٦٧٢)} \simeq ٢٠$

تدريب ٦

حل المعادلات التالية :

أ) $٦^{٢س} = ٢١$ ب) $٣^{(س+٤)} = ١٠١$

مثال ٦

حل المعادلات اللوغاريتمية التالية :

لو (٣ س + ١) = ٥

الحل

لو (٣س + ١) = ٥

$٣ س + ١ = ١٠^{٥}$

٣ س = ١٠٠ ٠٠٠ – ١

٣ س = ٩٩٩٩٩ $\Leftarrow$ س = ٣٣ ٣٣٣

مثال ٣

إذا كان لو$_{٢}$ ٧ $\simeq$ ٢,٨٠٧٤ استخدم هذه القيمة في إيجاد القيمة التقريبية لكل من :

١) لو$_{٢}$ ٢٨   ٢) لو$_{٢}$ $(٣,٥)^{٢}$

الحل

١) لو$_{٢}$ ٢٨ = لو$_{٢}$ (٤ × ٧)

= لو$_{٢}$ ٤ + لو$_{٢}$ ٧

= ٢ + ٢,٨٠٧٤

= ٤,٨٠٧٤

٢) لو$_{٢}$ $(٣,٥)^{٢}$ = ٢لو$_{٢}$ ٣,٥

= ٢لو$_{٢}$ $\frac{٧}{٢}$

= ٢ (لو$_{٢}$ ٧ − لو$_{٢}$ ٢)

= ٢ × (٢,٨٠٧٤ − ١)

= ٢ × (١,٨٠٧٤)

= ٣,٦١٤٨

تدريب ٥

أوجد قيمة كل من:

١) لو$_{٣}$ $٨١^{١٠٠}$ ٢) لو$_{١٦}$ $٤^{٣}$

اللوغاريتم الاعتيادي:

بعد أن درست اللوغاريتمات وخواصها لأي أساس ضمن مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة، أوجد قيمة كل من:

لو$_{١٠}$ ١٠ ، لو$_{١٠}$ ١٠٠ ، لو$_{١٠}$ ١٠٠٠ ، لو$_{١٠}$ $\frac{١}{١٠}$ ، لو$_{١٠}$ $\frac{١}{١٠٠}$ ، لو$_{١٠}$ $\frac{١}{١٠٠٠}$

لاحظ: أن اللوغاريتم الذي أساسه العدد عشرة يسمى باللوغاريتم الاعتيادي ويرمز له بالرمز **لوس** ولذا فإن أي لوغاريتم لم يذكر أساسه فهو للأساس عشرة.

مثال ٤

أوجد قيمة كل من:

١) لو ١٠٠٠٠   ٢) لو $١٠^{-٢}$

الحل

١) لو ١٠٠٠٠ = لو $١٠^{٤}$ = ٤   ٢) لو $١٠^{-٢}$ = −٢

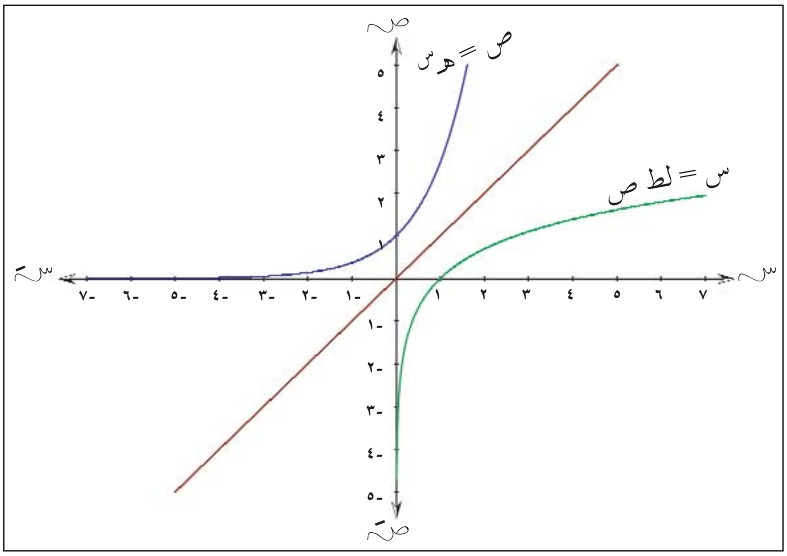
تدريب ٦

أوجد قيمة كل من :

١) لو (٢×٥٠٠)   ٢) لو$(٤٠ \times ٢٥٠)^{-١}$

تعريف

تسمى الدالة د(س) = $هـ^{س}$ بدالة الأساس الطبيعي حيث هـ هي الأساس الطبيعي ≈ ٢,٧ وأسها المتغير س ويمكن كتابتها بالصورة اللوغاريتمية: لط ص = س حيث لط ص = $لو_{هـ}$ ص



مثال ٧

أوجد كلاً مما يلي :

أ) لط ١ ب) لط هـ حـ) لط $هـ^{٣}$

الحل

أ) افرض أن لط ١ = س

لط ١ = س ⟷ $هـ^{س}$ = ١ ⟷ س = ٠

ب) افرض أن لط هـ = ع

لط هـ = ع ⟷ $هـ^{ع}$ = هـ ⟷ ع = ١

حـ) افرض أن لط $هـ^{٣}$ = ل ⟷ $هـ^{ل}$ = $هـ^{٣}$ ⟷ ل = ٣

تدريب ٨

أوجد قيم س لكل مما يلي :

أ) لط $هـ^{٢س}$ = ١٠ ب) لط $هـ^{٢}$ = ٢ س + ٥

مثال ٨

حل المعادلات التالية :

أ) لط (٣س−٩) = ٢١ ب) لط (٣س+٥) = ٤

تدريب ٧

أ) حل المعادلة ٢ لو س − لو ٣ = ٢

ب) إذا علمت أن س = $لو_٣$ ٢ ، ص = $لو_٣$ ١٠ اكتب كلاً مما يلي في صورة س ، ص

١) $لو_٣$ ٢٠ ٢) $لو_٣ \frac{١}{٨}$ ٣) $لو_٣$ ٢٥٠

جـ) أوجد كلا مما يلي :

١) $لو_٢$ ١٢٨ ÷ $لو_٤$ ٦٤ ٢) $لو_٣$ ٢٧ × $لو_{\frac{١}{٢}} \frac{١}{٦٤}$

اللوغاريتم الطبيعي Natural Logarithm

نشاط ١: «الأساس الطبيعي هـ»

الأدوات : آلة حاسبة علمية

الخطوات :

١) انقل الجدول التالي في دفترك ثم أكمله لقيم ن : ١ ، ٢ ، ٤ ، ١٢ ، ٣٦٥، ١٠٠٠ ، ١٠٠٠٠٠٠

ن	$(١ + \frac{١}{ن})^ن$	الناتج
١	$(١ + \frac{١}{١})^١$	٢
٢	$(١ + \frac{١}{٢})^٢$	٢,٢٥

٢) جرب أعداداً أكبر من مليون (ن ≥ $١٠^٦$) ثم جد الناتج باستخدام الحاسبة. ماذا تلاحظ ؟

٣) استخدم نظرية ذات الحدين لإيجاد مفكوك $(١ + \frac{١}{ن})^ن$

٤) أوجد قيمة $(١ + \frac{١}{ن})^ن$ عندما ن تكون كبيرة جدا مقرباً إلى أقرب جزء من مائة.

لعلك لاحظت أنه كلما ازدادت قيمة ن فإن قيم $(١ + \frac{١}{ن})^ن$ تقترب من ٢,٧ ويسمى هذا العدد بالأساس الطبيعي ويرمز له بالرمز هـ ويعتبر هـ عدداً حقيقياً ولكنه ليس عدداً نسبياً ويمكن رفعه إلى أي أس وإجراء العمليات الحسابية عليه، ومن الدوال الأسية المشهورة ص = $هـ^س$ حيث س متغير.

خواص اللوغاريتم الطبيعي

إن خواص اللوغاريتم الطبيعي تنسجم مع خواص اللوغاريتم المعتاد وهي :

١) $هـ^{لط س} = س$ ٢) $لط (هـ^{س}) = س$

٣) $لط ١ = صفر$ ٤) $لط هـ = ١$

يمكن إثبات خاصية (١)

بفرض أن $لط س = ٩ \Leftarrow هـ^{٩} = س \Leftarrow هـ = س^{\frac{١}{٩}}$

الطرف الأيمن $= هـ^{لط س} = (س^{\frac{١}{٩}})^{لط س}$

$= (س^{\frac{١}{\cancel{٩}}})^{\cancel{٩}} = س =$ الطرف الايسر

تدريب ١٢

اثبت بقية خواص اللوغاريتم الطبيعي .

مثال ١٠

حل المعادلة $٧^{٣ س} = ٢٠$ باستخدام اللوغاريتم الطبيعي .

الحل

بأخذ اللوغاريتم الطبيعي للطرفين

مفتاح **ln** يدل على لط

$لط ٧^{٣ س} = لط ٢٠$

$٣ س لط ٧ = لط ٢٠$

ومنه $س = \frac{لط ٢٠}{٣ لط ٧}$ $\therefore س = ٠{,}٥١٣١٦٧٢$

مثال ١١

أوجد قيمة $هـ^{٣ لط ٤}$ باستخدام قوانين اللوغاريتم الطبيعي .

الحل

$هـ^{٣ لط ٤} = هـ^{لط ٤^{٣}} = هـ^{لط ٦٤} = ٦٤$

تدريب ١٣

أوجد قيمة كل مما يلي :

٩) $\frac{لط ٤٩}{لط \sqrt[٣]{٧}}$ ب) $\frac{لط ٢٧}{٣ لط ٩}$

الحل

أ) لط (٣س−٩) = ٢١

$هـ^{٢١} = ٣س - ٩$

$٣س = هـ^{٢١} + ٩$

$\therefore س = \frac{هـ^{٢١} + ٩}{٣}$ (حيث هـ ≃ ٢,٧)

$س \simeq ٣,٨ \times ١٠^{٨}$

ب) لط (٣س+٥) = ٤

$هـ^{٤} = ٣س + ٥ \Leftarrow ٣س = هـ^{٤} - ٥$

$\therefore س = \frac{هـ^{٤} - ٥}{٣} = ١٦,٠٥$

تدريب ٩

حل المعادلات الآتية :

أ) لط $\sqrt{هـ}$ = ٣س − ٤ ب) لط $\frac{٢}{٣}$س = ١

تدريب ١٠

ارسم الدالة الأسية ص = $هـ^{س}$ ثم أوجد :

أ) نقطة تقاطع المنحنى مع المحور الصادي ب) قيمة ص عندما س = ١

مثال ٩

أوجد قيمة د (س) = $هـ^{س}$ (لأقرب جزء من ألف) مستخدماً الآلة الحاسبة لكل من :

أ) س = $\frac{١}{٢}$ ب) س = −١ حـ) س = ٢

الحل

أ) د ($\frac{١}{٢}$) = $هـ^{\frac{١}{٢}}$ = ١,٦٤٣ [2.7 | x y | 0.5 | = | 1.643]

ب) د (−١) = $هـ^{-١}$ ≃ ٠,٣٧٠ [2.7 | x y | 1- | = | 0.370]

حـ) د (٢) = $هـ^{٢}$ ≃ ٧,٢٩٠ [2.7 | x y | 2 | = | 7.29]

تدريب ١١

إذا كانت د (س) = $هـ^{س}$ فأوجد كلاً مما يلي :

أ) د (٦) ب) د (− $\frac{١}{٣}$)

مثال ١٣

استخدم اللوغاريتم الطبيعي لحل المسائل التالية :

أ) $٢^{٢س} - ١١ \times ٢^{س} + ٢٤ = ٠$ ب) $٥^{س+١} = ٦^{س-٢}$

الحل

أ) نفرض أن $٢^{س} = ص$ ومنها $٢^{٢س} = ص^{٢}$

$ص^{٢} - ١١ص + ٢٤ = ٠$

$(ص - ٣)(ص - ٨) = ٠$

ص = ٣   أو   ص = ٨

$ص = ٢^{س}$

عندما ص = ٣

$٣ = ٢^{س} \Leftarrow لط٣ = س\ لط\ ٢ \Leftarrow س = \frac{لط\ ٣}{لط\ ٢} = ١,٥٨٥$

عندما ص = ٨

$٨ = ٢^{س} \Leftarrow س = ٣$

ب) $٥^{س+١} = ٦^{س-٢}$

(س + ١) لط ٥ = (س − ٢) لط ٦

س لط ٥ + لط ٥ = س لط ٦ − ٢ لط ٦

س لط ٥ − س لط ٦ = −٢ لط ٦ − لط ٥

س (لط ٥ − لط ٦) = −٢ لط ٦ − لط ٥

$س = \frac{-٢\ لط\ ٦ - لط\ ٥}{لط\ ٥ - لط\ ٦} =$ [[ln 6 − ln 5]] ÷ [[ln 5 − 2- x ln 6-]]

= ٢٨,٤٨٢٤٠٧

تدريب ١٥

أوجد قيم س في كل مما يلي :

أ) $٢٥^{س} - ٢٧ \times ٥^{س} + ٥٠ = ٠$ ب) $٦^{(٣-٤س)} \times ٤^{(٥+س)} = ٨$

حـ) $٩^{س} - ١٤ \times ٣^{س} + ٤٥ = ٠$ د) $٣^{(١-س)} = ٠,٤$

مثال ١٢

مستخدماً خواص اللوغاريتمات أوجد قيمة س في كل مما يلي :

أ) ٢,٠١٣ × ٢٣,٠١٢ = س

ب) $(\frac{٣}{٥})^{س} = ١,١٦٨$

الحل

أ) س = ٢,٠١٣ × ٢٣,٠١٢

∴ لوس = لو ٢,٠١٣ + لو ٢٣,٠١٢

لو س = Log 2.013 + Log 23.012 = 1.6657981

س = Shift Log 1.6658

= 46.323152

استخدم اللوغاريتم الطبيعي لحل المثال ثم تحقق من صحة الإجابة .

ب) لو $(\frac{٣}{٥})^{س}$ = لو ١,١٦٨

س لو $\frac{٣}{٥}$ = لو ١,١٦٨

س = $\frac{\text{لو } ١,١٦٨}{\text{لو } \frac{٣}{٥}}$

= Log 1.168 ÷ Log $\frac{3}{5}$ = -0.3040037

∴ س = ⁻ ٠,٣٠٤٠٠٣٧ (تحقق من صحة إجابتك)

تدريب ١٤

مستخدماً اللوغاريتمات أوجد ما يلي :

أ) $\frac{٤٢,١٥ \times \sqrt[٣]{٠,٠٢٣}}{(٥,٤٣٢)^{٢}}$

ب) $\frac{(٢,٩١)^{٤} - \sqrt[٤]{٣,٧٦}}{\sqrt{٠,٦٢٤١}}$

تطبيقات حياتية على اللوغاريتمات

إن اكتشاف علم اللوغاريتمات أثر بشكل كبير في تقدم الرياضيات بوجه عام ، حيث أن اللوغاريتمات تستخدم عادة في حساب المقادير المرفوعة لأسس كبيرة جداً مثل حساب النمو : كتكاثر البكتيريا، والنمو السكاني عبر العقود ، والربح المركب ... أو حساب التلاشي أو فقدان الخاصية مثل إيجاد فترات تناقص العناصر المشعة كذلك حساب طاقة الزلازل وفقاً لدرجات مقياس ريختر ، ... إلخ ، إلى غير ذلك من الظواهر .

مثال ١

تحدث الزلازل عادة نتيجة تجمع طاقة كبيرة في جوف الأرض وتعمل على إخراجها وتتناسب شدة الزلازل مع الطاقة التي تتخلص منها الأرض وتقاس عادة بالدرجات على مقياس يسمى مقياس ريختر ، فإذا كانت العلاقة بين درجات القياس والطاقة تعطي بالعلاقة :

د = ٠,٦٧ لو ط − ٧,٦ ، حيث د (الدرجة بمقياس ريختر) ، ط (الطاقة المستهلكة بالايرج)

فاحسب : أ) درجة زلزال على مقياس ريختر إذا كانت الطاقة $٢,٥ \times ١٠^{٢٠}$ إيرج.

ب) كمية الطاقة المستهلكة إذا كانت الدرجة على مقياس ريختر = ٥ درجات .

الحل

أ) د = ٠,٦٧ لو $(٢,٥ \times ١٠^{٢٠})$ − ٧,٦

= ٠,٦٧ (لو ٢,٥ + ٢٠ لو ١٠) − ٧,٦

≃ ٦ درجات

ب) ٥ = ٠,٦٧ لو ط − ٧,٦

١٢,٦ = ٠,٦٧ لوط

لوط = ١٨,٨١

ط = $٦,٥ \times ١٠^{١٨}$ ايرج تقريباً

تدريب ١

بعد كم سنة يتبقى $\frac{١}{٨}$ كمية المادة لكل من العناصر التالية :

أ) الهيدروجين إذا علمت أن نصف العمر ١٢,٣ سنة

ب) الكـــربون إذا علمت أن نصف العمر ٥٧٣٠ سنة

تمارين ومسائل ٥

١) أكتب كلاً مما يلي في أبسط صورة :

أ) لو$_{٣}$ ١٠ − لو$_{٣}$ ٥

ب) لو$_{م}$ س + لو$_{م}$ ص − لو$_{م}$ ع

حـ) لو$_{ب}$ ٤ س − لو$_{ب}$ ٣ ص + لو$_{ب}$ ص

٢) أوجد قيم س في كل مما يلي :

أ) لو$_{٢}$ ٧ س = لو$_{٢}$ (س + ١٢)

ب) لو$_{١٠}$ (٥ س −٣) − لو$_{١٠}$ (س^{٢} +١) = ٠

حـ) لو$_{م}$ (س^{٢} −٢) + ٢ لو$_{م}$ ٦ = لو$_{م}$ ٦ س

د) ٢ لو$_{٣}$ س + لو$_{٣}$ ٥ = لو$_{٣}$ (١٤ س + ٣)

٣) استخدم الآلة الحاسبة لإيجاد قيمة المجاهيل لأقرب جزء من مائة :

أ) لو ٦,٢٢ × ١٠^{٥٩} = س

ب) لو $\sqrt{\text{س}}$ = ٠,٢٦٥٧

حـ) لو ص = ٠,٢٨٦١

د) لو (١٥٩ + س) = ٢,٢٩

٤) حل كلا من المعادلات الآتية :

أ) لط (س+١) = ٣

ب) لط س^{٢} = لط س

جـ) لط (لط س) = ١

د) لط س = ٢ + لط (١−س)

الحل

أ) لإيجاد المعادلة الأسية لاحظ أن أ = ٣٠ (أ القيمة الإبتدائية لكمية الكافيين)

∴ كمية الكافيين بعد ساعة = $٣٠ - \frac{١٥}{١٠٠} \times ٣٠ = ٣٠ \left(١ - \frac{١٥}{١٠٠}\right) = ٢٥,٥$ غم

كمية الكافيين بعد ساعتين = $٣٠ \left(١ - \frac{١٥}{١٠٠}\right) - ٣٠ \left(١ - \frac{١٥}{١٠٠}\right) \times \left(\frac{١٥}{١٠٠}\right)$

$$= ٣٠ \left(١ - \frac{١٥}{١٠٠}\right)^{٢} = ٣٠ (٠,٠٨٥)^{٢}$$

معادلة تلاشي الكافيين هي :

$$ص = ٣٠ \, (٠,٨٥)^{س}$$

كمية الكافيين المتبقية (س = ١) هي ص = ٣٠ × ٠,٨٥ = ٢٥,٥ ملغم

كمية الكافيين المتبقية (س = ٤) هي ص = $٣٠ \times (٠,٨٥)^{٤} = ١٥,٧٠$ ملغم

ب) $٩,٦ = ٣٠ \, (٠,٨٥٠)^{س}$

$$\frac{٩,٦}{٣٠} = (٠,٨٥)^{س}$$

$٠,٣٢ = (٠,٨٥)^{س}$ ⟸ لو ٠,٣٢ = لو $(٠,٨٥)^{س}$

ومنه س لو (٠,٨٥) = لو ٠,٣٢

∴ س = $\frac{\text{لو } ٠,٣٢}{\text{لو } ٠,٨٥}$ ≃ ٧ ساعات (تحقق من صحة إجابتك)

مثال ٤

الجدول التالي يبين تطور مؤشرات قطاع النفط خلال الفترة (١٩٧٠ – ١٩٩٩م) في سلطنة

المؤشر / السنة	١٩٧٠	١٩٩٩	متوسط معدل النمو السنوي (٪)
ـ متوسط الانتاج السنوي (مليون برميل)	١٢١		٣,٥
ـ متوسط الانتاج اليومي (ألف برميل)	٣٣٢		٣,٥
ـ صادرات النفط (مليون برميل)		٣٠٩	٣,٣

مثال ٢

إذا علمت أن نصف عمر البلونيوم (٢١٠) يساوي ١٥٨ يوماً . فكم عدد المليغرامات التي تبقى بعد ١٤٢٢ يوماً مع العلم أن الكتلة الابتدائية ٢ ملغم .

الحل

عدد فترات نصف العمر $= \frac{١٤٢٢}{١٥٨} =$ ٩ فترات

الفترة الأولى	الفترة الثانية	الفترة الثالثة ...
١	$\frac{١}{٢}$	$\frac{١}{٤}$
م $(\frac{١}{٢})^{١}$	م $(\frac{١}{٢})^{٢}$	م $(\frac{١}{٢})^{٣}$ ...

الكتلة بعد ن من الفترات = م $(\frac{١}{٢})^{ن}$

$= ٢ (\frac{١}{٢})^{ن}$

$\therefore$ ك$_{٩ \text{ فترات}} = ٢ \times (\frac{١}{٢})^{٩}$ $\Leftarrow$ لو ك = لو ٢ + ٩ لو $\frac{١}{٢}$ = − ٢,٤

$\therefore$ لو ك = −٢,٤ ك = ٣,٩٨ × ١٠$^{-٣}$ ملغم

تدريب ٢

إذا علمت أن نصف عمر أحد العناصر يساوي ١٥٩٩ سنة ، كم سنة يحتاج ليتحول $\frac{١٥}{١٦}$ من الكتلة؟

مثال ٣

إذا كان معدل تلاشي كمية الكافيين في جسم الإنسان تصل ١٥٪ خلال الساعة الواحدة، فإذا كانت كمية الكافيين ٣٠ ملغم، فأجب عما يلي :

أ) كم تتوقع كمية الكافيين المتبقية خلال : ساعة ، ٤ ساعات .

ب) بعد كم ساعة تكون كمية الكافيين المتبقية ٩,٦ ملغم .

تدريب ٤

أ) ٢٢٥ خلية بكتيرية يتضاعف عددها ثلاث مرات في كل ساعة احسب :

١) عدد الساعات اللازمة ليكون عدد الخلايا ٣٩٠ خلية .

٢) عدد الساعات اللازمة ليكون عدد الخلايا ٣١٥٦٦ .

ب) تتحلل مادة مشعة بحيث تتحول كتلتها إلى مادة أخرى مع مرور الزمن حسب العلاقة

$أ_٢ = أ_١ هـ^{ل ن}$ حيث $أ_١$ هي الكتلة الأصلية، $أ_٢$ هي الكتلة بعد مرور (ن) سنة

هـ = ٢,٧ (ثابت) ، ل ثابت خاص لكل مادة مشعة .

فإذا كانت الكتلة الأصلية لعينة من مادة مشعة تساوي ٢٠٠ غرام والكتلة النهائية منها بعد (١٠) عشر سنوات تساوي ١٠٠ غرام فجد الثابت ل لهذه المادة .

تمارين ومسائل ٦

١) إذا كانت العلاقة بين شدة التيار (ت) والزمن (ن) في دائرة كهربائية تعطى على الصورة $ت = ٢^{-ن}$ حيث ت بالأمبير ، ن بالثواني . فجد مقدار الزمن إذا كانت شدة التيار ٠,٣ أمبير.

٢) إذا كان ثمن بيع آلة يتناقص سنوياً بمعدل ٨٪ نتيجة الاستهلاك . فبعد كم سنة يصبح ثمنها نصف الثمن الأصلي .

٣) نصف عمر مادة مشعة ١٠٩ يوماً ، كم يوماً تحتاج لتتحول ٧٣٪ من هذه المادة ؟

٤) ٢٢٥ خلية بكتيرية تصبح ثلاثة أمثال العدد الحالي خلال ساعة فبعد كم ساعة سيكون عددها ٣٥٠٧ خلية .

أ) ماذا تتوقع أن يكون متوسط الإنتاج السنوي (مليون برميل) عام ١٩٩٩م .

ب) ماذا تتوقع أن يكون متوسط الإنتاج اليومي (ألف برميل) عام ١٩٩٩م .

حـ) كم تتوقع أن تكون صادرات النفط عام ١٩٧٠م .

الحل

أ) يمكن كتابة دالة الإنتاج بالصورة ص = ١٢١ $(١,٠٣٥)^{س}$ حيث س تمثل عدد السنوات .

معدل الإنتاج = ١٢١ × $(١,٠٣٥)^{٢٩}$ (فسر لماذا س = ٢٩ سنة)

(لعام ١٩٩٩م) = ٣٢٨ مليون برميل

ب) متوسط الإنتاج اليومي (ص) = ٣٣٢ × $(١,٠٣٥)^{٢٩}$

لعام (١٩٩٩م) = ٩٠٠ ألف برميل

حـ) يمكن التعبير عن دالة صادرات النفط (ص) = $\frac{٣٠٩}{١,٠٣٣^{س}}$ فسر هذه الخطوة

∴ كمية صادرات النفط خلال ١٩٧٠م = $\frac{٣٠٩}{١,٠٣٣^{٢٩}}$ ≈ ١٢٠,٥ مليون برميل

تدريب ٣

الجدول التالي يوضح تطور المؤشرات الخاصة بالرعاية الإجتماعية في سلطنة عمان

السنة / المؤشر	١٩٧٣	١٩٩٩	متوسط معدل النمو السنوي (٪)
ـ عدد حالات الضمان الإجتماعي	١٣١	[redacted]	٢٥,١
ـ المساعدات السنوية للضمان الإجتماعي (مليون ريال عماني)	[redacted]	٢٣,٤	٢٠

ثلاثون عاماً من السيرة التنموية (وزارة الاقتصاد الوطني)

أ) كم عدد حالات الضمان الإجتماعي لعام ١٩٩٩م ؟

ب) ما قيمة المساعدات السنوية للضمان الإجتماعي بالمليون ريال عماني لعام ١٩٧٣م ؟

٧) أوجد قيمة س في كل مما يلي :

أ) لو س = ٤ ب) لو س = $\frac{٥}{٢}$ حـ) لو س ٣ = ٩

٨) أوجد قيم المجاهيل في كل من :

أ) $٦^{٢س} = ٢٠٤٨$ ب) $٢ + ٨ س^{\frac{٣}{٥}} = ٦٦$ حـ) $٣ + \sqrt[٣]{س} = ٢٠$

د) $٨ + ١٠^{س} = ١٠٠٨$ هـ) $\sqrt[٧]{س^٢} - ١٢ = ٥$

٩) اثبت ما يلي بدون استخدام الآلة الحاسبة :

أ) $\frac{\text{٢ لو ٩ × لو ٨}}{\text{لو ٣ × ٣ لو ٢}} = ٤$ ب) $\frac{\text{لو } \sqrt{١٢٥} + \text{لو ٢٧} - \frac{٣}{٤}\text{لو ١٠٠}}{\text{لو } \frac{١}{٢} \text{ ٤}} = \frac{٣}{٢}$

١٠) الجدول التالي يوضح تطور المؤشرات في قطاع التجارة والصناعة (١٩٧٥ – ١٩٩٩م)

المؤشر / السنة	١٩٧٥	١٩٩٩	متوسط معدل النمو السنوي (٪)
ـ عدد المنشآت التجارية المسجلة في السجل التجاري	٢١٥٥	–	١٧,٤
ـ عدد المنشآت الصناعية في السجل الصناعي	–	١٨٧٢	٢٤,٤

أ) كم تتوقع عدد المنشآت التجارية عام ١٩٩٩م .

ب) كم تتوقع عدد المنشآت الصناعية لعام ١٩٧٥م .

تمارين ومسائل عامة

١) حل المعادلات الأسية التالية :

أ) $٤^{س} - ١٧ \times (٢)^{س} + ١٦ = $ صفر

ب) $٤٠٩٦^{(س+١)} = ٥١٢^{(س+٢)}$

حـ) $٢^{(س-١٠)} - \frac{١}{١٢٨} = $ صفر

٢) حل المعادلات اللوغاريتيمة التالية :

أ) $\frac{١}{٢}$ لو س = لو س

ب) لو$_{٣}$ س + لو$_{٣}$ س = لو$_{٣}$ ٢ س

جـ) لط هـ(س) = ١

٣) تزايدت أعداد البكتيريا من ٥٢ إلى ٢٣٨ خلية في خلال ساعة و ٢٤ دقيقة ، كم سيكون عدد البكتريا بعد مرور ٧ ساعات ، ٥٦ دقيقة .

٤) مادة تتلاشى بنسبة ٠,٠٩ في السنة ، كم من الوقت تحتاج هذه المادة ليبقى منها ٠,٠٧ فقط .

٥) رسم أحد الطلاب رسماً توضيحياً لإزدياد أعداد سكان أحد المدن لتصل إلى ٤١٦٢٢ فرداً، بعد أن كان ١٠٠٧٧ فرداً ، وكانت نسبة التزايد السنوية ٤,١٦٪ ، فنسى أن يكتب عدد السنوات التي تمت فيها هذه الزيادة . فهل يمكنك مساعدة الطالب لإيجاد عدد السنوات ؟ وضح ذلك .

٦) أوجد قيم المجاهيل في كل من :

أ) لو$_{ر}$ ٢٧ = $\frac{٣}{٢}$

ب) لو$_{\frac{١}{٩}}$ $\frac{١}{٣}$ = ص

حـ) لو$_{١٦}$ $\sqrt{٢}$ = س

د) $٣^{(س-١١)} - \frac{١}{٢٤٣} = ٠$

هـ) $٩^{(٣س+٢٤)} = ٧٢٩$

و) $٩^{س+١} = \frac{١}{٨١}$

تم بحمد الله

رقم الإيداع: