مخطط الوحدة

اسم الدرس	النتاجات	المصطلحات	المصادر والأدوات	عدد الحصص
أستعد لدراسة الوحدة			• كتاب التمارين والأنشطة العملية.	1
معمل برمجية جيوجبرا: استكشاف ميل مماس المنحنى.	• يصف التغير في قيمة ميل المماس من نقطة إلى أخرى على منحنى كثير الحدود.		• جهاز حاسوب. • برمجية جيوجبرا.	1
الدرس 1: تقدير ميل المنحنى.	• يجد ميل مماس مرسومًا عند نقطة على منحنى الاقتران. • يرسم مماسًا، ويقدر ميله عند نقطة على منحنى الاقتران. • يكتب معادلة المماس. • يقدر السرعة اللحظية عند نقطة على منحنى المسافة – الزمن.	القاطع، المماس، نقطة التماس، الميل، معادلة المماس، السرعة اللحظية، التسارع اللحظي.	• جهاز حاسوب. • برمجية جيوجبرا. • آلة حاسبة. • ورق رسم بياني.	3
الدرس 2: الاشتقاق.	• يتعرف مفهوم مشتقة كثير الحدود. • يجد مشتقة كثيرات الحدود باستعمال القوانين. • يجد الميل باستعمال المشتقة. • يجد السرعة اللحظية والتسارع اللحظي باستعمال المشتقة.	المشتقة، كثير الحدود، الميل.	• جهاز حاسوب. • برمجية جيوجبرا. • آلة حاسبة. • ورق رسم بياني.	3
الدرس 3: القيم العظمى والقيم الصغرى.	• يتعرف النقاط الحرجة. • يجد القيم العظمى والقيم الصغرى لكثيرات الحدود. • يحل مسائل حياتية عن القيم العظمى والقيم الصغرى لكثيرات الحدود.	النقطة الحرجة، القيمة العظمى، القيمة الصغرى، الميل، المشتقة.	• جهاز حاسوب. • برمجية جيوجبرا. • آلة حاسبة. • ورق رسم بياني.	3
عرض نتائج المشروع				1
اختبار الوحدة				2
مجموع الحصص				14


الوحدةُ 6

المشتقاتُ
Derivatives

ما أهميةُ هذهِ الوحدةِ؟

يُستعمَلُ الاشتقاقُ لإيجادِ الميلِ عندَ أيِّ نقطةٍ على المنحنى؛ ما يُسهِّلُ الحساباتِ في كثيرٍ منَ التطبيقاتِ العلميةِ والحياتيةِ التي يُمكِنُ نمذجتُها باستعمالِ الاقتراناتِ. ومنْ ذلكَ، حسابُ سرعةِ سيّارةٍ عندَ لحظةٍ ما، وحسابُ أعلى ارتفاعٍ تبلغُهُ كرةٌ عندَ ركلِها إلى الأعلى.

تعلَّمْتُ سابقًا:

- ✓ تعريفَ المماسِّ، والقاطعِ، ونقطةِ التماسِّ.
- ✓ حسابَ ميلِ المستقيمِ.
- ✓ معادلةَ الخطِّ المستقيمِ.
- ✓ منحنى المسافةِ – الزمنِ، ومنحنى السرعةِ – الزمنِ.

سأتعلَّمُ في هذهِ الوحدةِ:

- ◄ تقديرَ ميلِ المنحنى عنْ طريقِ رسمِ المماسِّ.
- ◄ إيجادَ المشتقةِ الأولى لكثيراتِ الحدودِ.
- ◄ إيجادَ القيمِ العظمى والصغرى لكثيراتِ الحدودِ.
- ◄ حلَّ مسائلَ حياتيةٍ عنِ القيمِ العظمى والصغرى.

54

نظرة عامة على الوحدة:

تعرف الطلبة فيما سبق مفهوم الاقتران، وكيفية تمثيله بيانيًّا وإيجاد مجاله ومداه وأصفاره. وكذلك تعرفوا مفهوم القاطع وإيجاد ميل المستقيم ومعادلته. وسيتعلمون في هذه الوحدة إيجاد ميل منحنى اقتران عند نقطة التماس مع مستقيم مرسوم، وتقدير ميل منحنى اقتران عن طريق رسم المماس، وتقدير السرعه اللحظية. وكذلك إيجاد الميل باستعمال الاشتقاق، وحساب السرعة والتسارع اللحظي، فضلًا عن تعرف مفهوم النقاط الحرجة، والقيم الصغرى، والقيم العظمى، وإيجادها، وحل مسائل حياتية عنها.

الترابط الرأسي بين الصفوف

سابقًا

الصف التاسع

- تمثيل بعض الاقترانات بيانيًّا.
- تفسير منحنى المسافة – الزمن.
- تفسير منحنى السرعة – الزمن.
- إيجاد ميل المستقيم ومعادلته.
- تعرف القاطع، والمماس، ونقطة التماس.

الصف العاشر

- إيجاد ميل منحنى مماسه مرسوم.
- تقدير ميل المنحنى عن طريق رسم المماس.
- اشتقاق كثيرات الحدود.
- إيجاد الميل باستعمال الاشتقاق.
- إيجاد السرعة والتسارع اللحظي.
- إيجاد النقاط الحرجة والقيم الصغرى والقيم العظمى.
- حل مسائل حياتية.

لاحقًا

الصف الحادي عشر العلمي

- تعرف النهايات.
- إيجاد مشتقة x^n (لأي عدد نسبي n).
- إيجاد مشتقة عِدَّة أنواع من الاقترانات.
- استعمال قاعدة السلسلة لإيجاد مشتقة تركيب اقترانين.
- إيجاد النقاط الحرجة واستعمالها لرسم منحنى الاقتران.
- تعرف القيم القصوى المحلية والمطلقة.

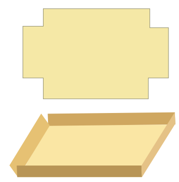
مشروعُ الوحدةِ

عملُ صندوقٍ حجمُهُ أكبرُ ما يُمكِنُ

فكرةُ المشروعِ حسابُ أكبرِ حجمٍ ممكنٍ لصندوقٍ باستعمالِ المشتقةِ.

الموادُّ والأدواتُ ورقتانِ مِنَ الكرتونِ المُقوّى مستطيلتا الشكلِ مِنَ المقاسِ نفسِهِ، مسطرةٌ، مقصٌّ، برمجيةُ جيوجبرا.

خطواتُ تنفيذِ المشروعِ:



1. أقصُّ أربعةَ مُربَّعاتٍ متساويةٍ.
2. أُطبِقُ الأطرافَ بعضَها على بعضٍ، فينتجُ صندوقٌ على شكلِ متوازي مستطيلاتٍ، مفتوحٌ مِنَ الأعلى.
3. أحسبُ حجمَ الصندوقِ، بقياسِ كلٍّ مِنَ الطولِ، والعرضِ، والارتفاعِ باستعمالِ المسطرةِ. هلْ يُمكِنُ عملُ صندوقٍ أكبرَ حجمًا باستعمالِ ورقةٍ مِنَ المقاسِ نفسِهِ؟
4. أُعيدُ الخطواتِ السابقةَ، ولكنْ بطريقةٍ جبريةٍ، وافتراضِ أنَّ طولَ ضلعِ المُربَّعِ المقصوصِ منْ كلِّ زاويةٍ يساوي x، وأكتبُ ثلاثةَ مقاديرَ جبريةٍ تُمثِّلُ الطولَ والعرضَ والارتفاعَ، ثُمَّ أستعملُها لإيجادِ حجمِ الصندوقِ بدلالةِ x.
5. أكتبُ اقترانًا يمثِّلُ حجمَ الصندوقِ $V(x)$.
6. أستعملُ المشتقةَ لإيجادِ قيمةِ x التي يكونُ عندَها الحجمُ أكبرَ ما يُمكِنُ.
7. أُمثِّلُ اقترانَ الحجمِ بيانيًّا باستعمالِ برمجيةِ جيوجبرا.
8. أتحقَّقُ مِنَ النقطةِ التي يكونُ عندَهـا الحجمُ أكبرَ ما يُمكِنُ باستعمالِ برمجيةِ جيوجبرا، وذلكَ بالضغطِ على أيقونةِ Extremum منْ شريطِ الأدواتِ، ثُمَّ نقرِ المنحنى، فتظهرُ إحداثياتُ نقاطِ القيمِ القصوى على يسارِ الشاشةِ.

عرضُ النتائجِ:

أُعِدُّ معَ أفرادِ مجموعتي عرضًا تقديميًّا أُبيِّنُ فيهِ:

1. النتائجَ التي توصَّلَ إليْها كُلُّ فردٍ في المجموعةِ.
2. بعضَ الصعوباتِ التي واجهَتْها المجموعةُ في أثناءِ العملِ بالمشروعِ، وكيفَ تجاوزَتْها.
3. مقترحًا لتطبيقٍ حياتيٍّ أوْ علميٍّ تُستعمَلُ فيهِ فكرةُ المشروعِ.

أداة تقييم المشروع

الرقم	المعيار	1	2	3
1	توثيق أفراد المجموعة مصادر المعلومات التي تعرَّفوها.			
2	تعبير أفراد المجموعة عن حجم الصندوق جبريًّا.			
3	إيجاد أفراد المجموعة أكبر حجم للصندوق، وتحققهم من صحة الحل.			
4	المشاركة الفاعلة لجميع أفراد المجموعة.			
5	مراعاة أن يكون التقرير المكتوب كاملًا، ومنظمًا، ويحوي رسومًا توضيحية.			
6	اتصاف العرض التقديمي بالوضوح والشمول.			

1 إنجاز المهمة بوجود أكثر من خطأ.
2 إنجاز المهمة بوجود خطأ بسيط.
3 إنجاز المهمة بصورة صحيحة من دون خطأ.

مشروع الوحدة: عمل صندوق حجمه أكبر ما يمكن.

هدف المشروع: ربط الرياضيات بالحياة، وتنمية مهارات التفكير والتجربة العلمية في أذهان الطلبة، بإيجاد أكبر حجم ممكن لصندوق مصنوع من قطعة ورقية مستطيلة الشكل.

خطوات تنفيذ المشروع

- عرِّف الطلبة بالمشروع وأهميته في تعلم موضوعات الوحدة.
- وزِّع الطلبة إلى مجموعات، يتكوَّن كلٌّ منها من (5–7) طلبة، ثم اطلب إلى أفراد كل مجموعة أن يوزعوا الأدوار بينهم، ويختاروا مُقرِّرًا لهم.
- اذكر للطلبة المواد والأدوات اللازمة لتنفيذ المشروع، مثل: جهاز الحاسوب، وبرمجية جيوجبرا، والورق المقوى، والمقص، والمسطرة، فضلًا عن بيان عناصر المُنتَج النهائي المطلوب منهم، مُؤكِّدًا لهم أهمية توثيق خطوات تنفيذ المشروع باستمرار، وتعزيزه بالصور المناسبة. وكذلك ذكِّرهم بإمكانية استعمال خاصية طباعة الشاشة (print screen) الموجودة على لوحة المفاتيح في جهاز الحاسوب؛ لتوثيق خطوات التنفيذ المُتعلِّقة بجهاز الحاسوب وبرمجية جيوجبرا.
- وضِّح للطلبة معايير تقييم أعمالهم، مستعينًا بسُلَّم التقدير.
- بيِّن للطلبة الأوقات التي يمكن فيها تنفيذ خطوات المشروع. فمثلًا، تُنفَّذ الخطوات (4-1) بعد الانتهاء من الدرس الأول، والخطوة (5) بعد الدرس الثاني، والخطوات (8-6) بعد الدرس الثالث.
- عند انتهاء الوحدة، حدِّد وقتًا مناسبًا لعرض النتائج التي توصَّل إليها الطلبة، وناقِشهم فيها.

عرض النتائج

- اطلب إلى أفراد كل مجموعة المشاركة في عرض جزء من نتائج المشروع (تكمن أهمية هذه الخطوة في تعزيز مهارات الطلبة التكنولوجية، ومهاراتهم الحياتية، مثل: التواصل، والتعاون).
- الفت انتباه الطلبة إلى ضرورة استعمال التكنولوجيا في عرض نتائج المشروع، وإعداد عرض تقديمي يحوي صورًا لمراحل التنفيذ.
- وضِّح للطلبة أهمية اشتمال التقرير على الصعوبات التي واجهتهم، وكيفية التغلب عليها، والمعلومات الجديدة التي تعرَّفوها، ومقترحاتهم عن كيفية تطوير المشروع؛ تعزيزًا لمهارات حل المشكلات لديهم.
- اطلب إلى الطلبة تدوين تقييمهم الذاتي للمشروع، ونبِّههم إلى إمكانية الاستعانة بأداة التقييم المجاوره.
- اطلب إلى طلبة الصف التصويت على المشروع الأفضل.

التقويم القبلي (التشخيصي):

- استعمل صفحة (أستعد لدراسة الوحدة) في كتاب التمارين والأنشطة العملية؛ لمساعدة الطلبة على تذكُّر المعرفة السابقة اللازمة لدراسة هذه الوحدة، مثل: حل المعادلات الخطية والتربيعية، وإيجاد ميل مستقيم باستعمال نقطتين واقعتين عليه، وضرب المقادير الجبرية، وحساب محيط الدائرة ومساحتها التي عُلِم نصف قطرها.
- وجِّه الطلبة إلى حل الأسئلة، ثم تجوَّل بينهم، وحث الطلبة الذين يواجهون صعوبة في حل أي سؤال على قراءة المثال المقابل له.
- اختر سؤالًا واجه الطلبة صعوبة في حله، ثم اكتب على اللوح إحدى إجابات الطلبة غير الصحيحة – من دون ذكر اسم الطالب–، وأدِرْ نقاشًا حوله.

إرشادات للمعلم

لتحديد عدد حلول المعادلة التربيعية، ذكِّر الطلبة بمميز المعادلة وحالاته الثلاث:

- المميز > 0، إذن، يوجد حلان حقيقيان.
- المميز = 0، إذن، يوجد حلان متماثلان (حل واحد حقيقي).
- المميز < 0، إذن، لا توجد حلول حقيقية.

أختبرُ معلوماتي قبلَ البدءِ بدراسةِ الوحدةِ، وفي حالِ عدمِ تأكُّدي مِنَ الإجابةِ أستعينُ بالمراجعةِ.

إيجادُ ميلِ المستقيمِ.

أجِدُ ميلَ المستقيمِ المارِّ بالنقطتيْنِ في كلٍّ ممّا يأتي:

1) $(4, 2), (5, 6)$ 4
2) $(3, 6), (-2, 6)$ 0

مثالٌ: أجِدُ ميلَ المستقيمِ المارِّ بالنقطتيْنِ: $(1, 2)$، وَ$(3, 4)$.

$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ صيغةُ ميلِ المستقيمِ m

$m = \frac{4-2}{3-1} = 1$ $(x_1, y_1) = (1, 2), (x_2, y_2) = (3, 4)$

حَلُّ المعادلاتِ الخطِّيةِ.

أحُلُّ كلًّا منَ المعادلاتِ الخطِّيةِ الآتيةِ:

1) $5x + 5 = 4 - 7x$ $x = -\frac{1}{12}$
2) $2(1 - 2x) = 8x - 3$ $x = \frac{5}{12}$
3) $3(4x - 2) = 8(x + 6)$ $x = 13.5$

مثالٌ: أحُلُّ المعادلةَ الخطِّيةَ $3x + 5 = x - 3$

$3x + 5 = x - 3$ المعادلةُ الأصليةُ

$2x + 5 = -3$ بطرحِ x منَ الطرفيْنِ

$2x = -8$ بطرحِ 5 منَ الطرفيْنِ

$x = -4$ بقسمةِ الطرفيْنِ على 2

حَلُّ المعادلاتِ التربيعيةِ.

أحُلُّ كلًّا منَ المعادلاتِ التربيعيةِ الآتيةِ:

1) $x^2 - 3x + 2 = 0$ $x = 2, x = 1$
2) $x^2 + 6x + 9 = 0$ $x = -3$
3) $x^2 - 4x + 7 = 0$ لا توجد إجابات حقيقية.

مثالٌ: أحُلُّ المعادلةَ التربيعيةَ $x^2 + x - 6 = 0$

أحُلُّ هذهِ المعادلةَ باستعمالِ التحليلِ إلى العواملِ:

$x^2 + x - 6 = 0$

$(x + 3)(x - 2) = 0$ بالتحليلِ إلى العواملِ

$x + 3 = 0, x - 2 = 0$ خاصيةُ الضربِ الصفريِّ

$x = -3, \quad x = 2$ بحَلِّ المعادلتيْنِ الناتجتيْنِ

إذنْ، حَلُّ المعادلةِ هوَ: $x_1 = -3, x_2 = 2$

يُمكِنُ أيضًا حَلُّ المعادلةِ باستعمالِ القانونِ العامِّ.

أجِدُ قيمَ المعاملاتِ: $a = 1, b = 1, c = -6$

$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ القانونُ العامُّ

$= \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2}$ بالتعويضِ، والتبسيطِ

$x_1 = \frac{-1-5}{2}, x_2 = \frac{-1+5}{2}$

إذنْ، حَلُّ المعادلةِ هوَ: $x_1 = -3, x_2 = 2$

إيجادُ ناتجِ ضربِ المقاديرِ الجبريةِ.

أكتبُ كلًّا ممّا يأتي في أبسطِ صورةٍ:

1) $8x(3x - 2)$ $24x^2 - 16x$
2) $(x - 6)(x + 4)$ $x^2 - 2x - 24$
3) $(x - 7)(x + 7)$ $x^2 - 49$

مثالٌ: أكتبُ كلًّا ممّا يأتي في أبسطِ صورةٍ:

1) $(x - 3)(x + 4)$

$(x - 3)(x + 4) = x^2 - 3x + 4x - 12$ بتوزيعِ الضربِ

$= x^2 + x - 12$ بالتبسيطِ

2) $(x + 1)(x - 1)$

$(x + 1)(x - 1) = x(x - 1) + 1 \times (x - 1)$ بتوزيعِ الضربِ على الجمعِ

$= x^2 - x + x - 1$ بتوزيعِ الضربِ على الطرحِ

$= x^2 - 1$ بجمعِ الحدودِ المتشابهةِ

حسابُ محيطِ الدائرةِ ومساحتِها.

أجِدُ المحيطَ والمساحةَ للدائرةِ المُعطى نصفُ قُطرِها في كلٍّ ممّا يأتي:

1) $r = 5\text{cm}$ $C = 10\pi$ cm, $A = 25\pi$ cm^2
2) $r = 7\text{cm}$ $C = 14\pi$ cm, $A = 49\pi$ cm^2
3) $r = 8\text{cm}$ $C = 16\pi$ cm, $A = 64\pi$ cm^2

مثالٌ: أجِدُ المحيطَ والمساحةَ للدائرةِ التي نصفُ قُطرِها 3 cm:

$C = 2\pi r$ صيغةُ محيطِ الدائرةِ

$= 2\pi(3) = 6\pi$ cm تعويضُ طولِ نصفِ القُطرِ، والتبسيطُ

$A = \pi r^2$ صيغةُ مساحةِ الدائرةِ

$= \pi(3)^2 = 9\pi$ cm^2 تعويضُ طولِ نصفِ القُطرِ، والتبسيطُ

معملُ برمجيةِ جيوجبرا

استكشافُ ميلِ مماسِّ المنحنى
Exploring The Slope of The Tangent

يُمكِنُني استعمالُ برمجيةِ جيوجبرا لوصفِ التغيُّرِ في قيمةِ ميلِ المماسِّ منْ نقطةٍ إلى أخرى على منحنى كثيرِ حدودٍ.

نشاط

أُمثِّلُ الاقترانَ $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$ بيانيًّا باستعمالِ برمجيةِ جيوجبرا، ثمَّ أرسمُ مماسًّا عندَ نقطةٍ مُتحرِّكةٍ على منحناهُ، واصفًا التغيُّرَ في قيمةِ ميلِ المماسِّ.

الخطوةُ 1: أُمثِّلُ منحنى الاقترانِ بيانيًّا باتباعِ الآتي:

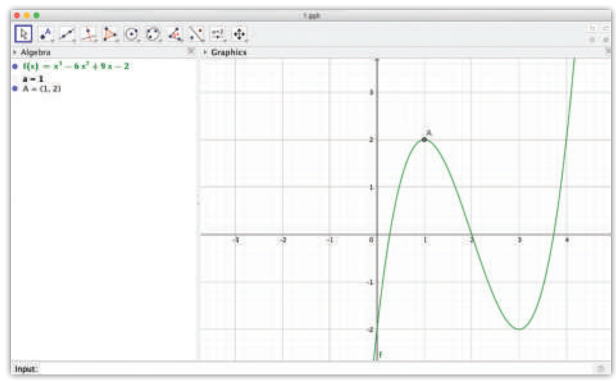
- أكتبُ $f(x)=$ في شريطِ الإدخالِ، ثمَّ أكتبُ قاعدةَ الاقترانِ بنقرِ المفاتيحِ الآتيةِ:

x ▢ⁿ 3 − 6 x ▢² + 9 x − 2 ↵

الخطوةُ 2: أُحدِّدُ نقطةً مُتحرِّكةً A على منحنى الاقترانِ باتباعِ الآتي:

- أكتبُ $a = 1$ في شريطِ الإدخالِ، ثمَّ أنقرُ زرَّ ↵ .
- أكتبُ $A = (a, f(a))$ في شريطِ الإدخالِ، ثمَّ أنقرُ زرَّ ↵ .

يُمكِنُني تغييرُ موقعِ النقطةِ A على منحنى الاقترانِ بنقرِها باستمرارٍ، ثمَّ تحريكِها.



إرشادات للمعلم

- توفيرًا للوقت، ولكيلا يضطر الطلبة إلى استعمال كتبهم في أثناء تنفيذ النشاط؛ استعمل جهاز العرض (إن توافر) في المختبر لعرض صور من كتاب الطالب لمعمل برمجية جيوجبرا، ويمكنك وضع الصور في ملف العرض التقديمي (powerpoint).
- ذكِّر الطلبة أنه يمكنهم تنزيل برمجية جيوجبرا على هواتفهم الذكية من متجر الهاتف، فضلًا عن وجود العديد من البرمجيات والآلات الحاسبة البيانية التي يمكنهم استعمالها.

معملُ برمجيةِ جيوجبرا

التعلم القبلي:

- تمثيل كثيرات الحدود بيانيًّا باستعمال برمجية جيوجبرا.
- تعيين نقطة متحركة على التمثيل البياني لكثير الحدود.

إرشادات للمعلم

يمكنك تحميل برمجية جيوجبرا المجانية وتثبيتها على أجهزة الحاسوب في مختبر مدرستك، وتحديثها باستمرار، مُستعمِلًا الرابط الإلكتروني: **https://www.geogebra.org/download**

1 التهيئة

- توجَّه مع الطلبة إلى مختبر الحاسوب في مدرستك.
- وزِّع الطلبة إلى مجموعات ثنائية، بحيث يكون أحد الطالبين في كل مجموعة محيطًا بمهارات الحاسوب.
- اطلب إلى الطلبة تشغيل أجهزة الحاسوب، وفتح برمجية جيوجبرا.
- عرِّف الطلبة بمزايا برمجية جيوجبرا الجبرية والهندسية. فمثلًا، يمكن استعمال هذه البرمجية في حل المعادلات، ورسم التمثيل البياني للاقترانات، ورسم المماس عند نقطة على اقتران، وقياس الزوايا.

2 التدريس

- وضِّح للطلبة كيفية تنفيذ النشاط، ودعهم يُنفِّذوه بأنفسهم.
- اطلب إلى أفراد المجموعات تطبيق الخطوات على التوالي، وتجوَّل بينهم مُرشِدًا ومُساعِدًا ومُوجِّهًا، وتأكَّد أن كل فرد في المجموعة قد تمكَّن من تنفيذ النشاط.
- ناقِش الطلبة في النقاط التي يكون عندها ميل الاقتران موجبًا، أو سالبًا، أو صفرًا، ثم اطرح عليهم السؤالين الآتيين:
  » هل يُؤثِّر اتجاه المماس في إشارة الميل؟
  » هل يمكن إيجاد علاقة بين المماس والمحور x الموجب؟

تنويع التعليم:

- اطلب إلى الطلبة من ذوي المستوى دون المتوسط تمثيل معادلة خطية أو تربيعية بيانيًّا باستعمال برمجية جيوجبرا، ثمَّ تدرَّج معهم في الخطوات حتى يتمكنوا من تنفيذ النشاط.
- وجِّه الطلبة إلى البحث في شبكة الإنترنت عن الاستعمالات الممكنة لبرمجية جيوجبرا، وحفِّزهم على تبادل الخبرات المتعلقة بالمهارات التي تعلموها؛ تعزيزًا لمهارتي البحث والتواصل لديهم.

3 التدريب

- وجِّه الطلبة إلى حل أسئلة بند (أتدرب) الوارد ذكرها في معمل برمجية جيوجبرا، بعد الانتهاء من تنفيذ النشاط مباشرةً؛ بتطبيق ما تعلموه من مهارات باستعمال البرمجية.
- اختر بعض الأخطاء التي وقع فيها الطلبة – من دون ذكر أسمائهم؛ تجنبًا لإحراجهم-، ثم ناقِش طلبة الصف فيها.

الواجب المنزلي:

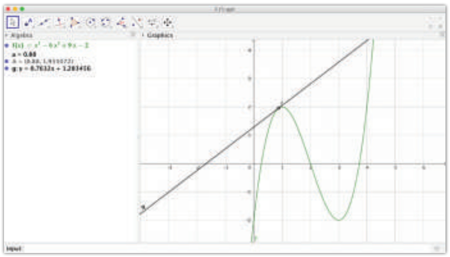
- اطلب إلى الطلبة أن يحلوا في البيت الأسئلة التي لم يتمكنوا من حلها في غرفة الصف.
- في اليوم التالي، اطَّلِع على حلول الطلبة، وناقِشهم في أي صعوبات واجهوها في أثناء الحل.

4 الإثراء

- اطلب إلى الطلبة تمثيل عِدَّة اقترانات بيانيًّا، وإيجاد النقاط التي يكون عندها الميل صفرًا، ومحاولة تفسير ذلك.
- اطلب إلى الطلبة مقارنة إجاباتهم بعضها ببعض، وحفِّز الطلبة من ذوي المستوى فوق المتوسط على مساعدة بقية زملائهم.
- وضِّح للطلبة أنه يمكنهم توثيق المهام المنوطة بهم باستعمال برمجية جيوجبرا عن طريق التقاط صور لشاشة الحاسوب باستعمال مفتاح (PrtScr)، أو من تبويب (Edit) في برمجية جيوجبرا باختيار (Graphics view to clipboard)، أو من لوحة المفاتيح بالضغط على أزرار (Ctrl+shift+C) معًا، ثم عمل لصق (paste) بالضغط على أزرار (Ctrl+shift+V) في الموضع المطلوب من الملف المراد توثيق المهمة فيه.

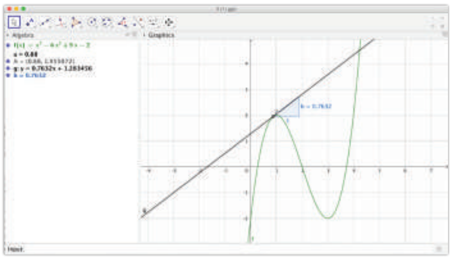
الخطوةُ 3: أرسمُ مماسًّا للمنحنى عندَ النقطةِ A.

- أكتبُ $\text{Tangent}(A, f)$ في شريطِ الإدخالِ، ثمَّ أنقرُ زرَّ ↵ .
- أُلاحِظُ أنَّ برمجيةَ جيوجبرا تُسمّي المماسَّ g بصورةٍ تلقائيةٍ.



الخطوةُ 4: أَجِدُ ميلَ المماسِّ عندَ النقطةِ A.

- أكتبُ Slope(g) في شريطِ الإدخالِ، ثمَّ أنقرُ زرَّ ↵ .



الخطوةُ 5: أُحرِّكُ النقطةَ A، مُلاحِظًا التغيُّرَ في قيمةِ الميلِ، ثمَّ أُجيبُ عنِ الأسئلةِ الآتيةِ:

- متى يكونُ ميلُ المماسِّ موجبًا؟
- متى يكونُ ميلُ المماسِّ سالبًا؟
- متى يكونُ ميلُ المماسِّ صفرًا؟

أتدرب

أُمثِّلُ كلًّا منَ الاقتراناتِ الآتيةِ بيانيًّا باستعمالِ برمجيةِ جيوجبرا، ثمَّ أرسمُ مماسًّا لكلٍّ منها عندَ نقطةٍ مُتحرِّكةٍ، واصفًا التغيُّرَ في قيمةِ ميلِ المماسِّ: (1–4) انظر ملحق الإجابات

1) $f(x) = (x-1)^2 + 3$

2) $h(x) = 3 - 2x - x^2$

3) $f(x) = x^4 - 2x^3 - 4x + 3$

4) $h(x) = \frac{2}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 - 3x + 2$

إرشادات للمعلم

يمكن إعادة توزيع الطلبة في المجموعات قبل البدء بحل أسئلة بند (أتدرب)؛ لكي يتبادلوا الخبرات فيما بينهم.

تعليمات المشروع:

- أخبر الطلبة أنه يمكنهم الاستفادة من برمجية جيوجبرا لتنفيذ الخطوتين 7 و8 في المشروع.

5 الختام

- وجِّه الطلبة إلى كتابة كثير حدود من الدرجة الثانية أو أكثر، ثم إمراره إلى زميله في المجموعة؛ لتمثيله بيانيًّا باستعمال برمجية جيوجبرا، وإيجاد ثلاث نقاط يكون عندها الميل موجبًا، وسالبًا، وصفرًا.
- اطلب إلى كل طالب أن يتحقق من حل زميله.

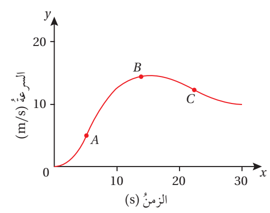
الدرسُ 1

تقديرُ ميلِ المنحنى
Estimating Slope

فكرةُ الدرسِ تقديرُ ميلِ المنحنى.

المصطلحاتُ السرعةُ اللحظيةُ، التسارعُ اللحظيُّ.

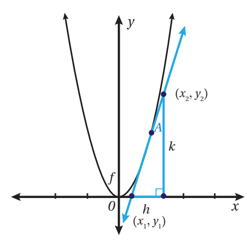
مسألةُ اليومِ يُمثِّلُ الشكلُ المجاورُ سرعةَ سيّارةٍ في 30 ثانيةً.



- هلْ يُمكِنُ إيجادُ تسارعِ السيّارةِ عندِ النقاطِ A, B, C؟
- عندَ أيِّ النقاطِ يكونُ التسارعُ موجبًا؟
- عندَ أيِّ النقاطِ يكونُ التسارعُ سالبًا؟
- عندَ أيِّ النقاطِ يكونُ التسارعُ صفرًا؟

تعلَّمْتُ سابقًا كيفيةَ حسابِ ميلِ المستقيمِ، فهلْ يُمكِنُ إيجادُ ميلِ منحنى ليسَ مستقيمًا؟

إنَّ ميلَ المنحنى عندَ نقطةٍ واقعةٍ عليْهِ يساوي ميلَ المماسِّ عندَ تلكَ النقطةِ؛ لذا، فإنَّ ميلَ المنحنى يختلفُ منْ نقطةٍ إلى أُخرى عليْهِ كما في النشاطِ المذكورِ آنفًا قبلَ الدرسِ.



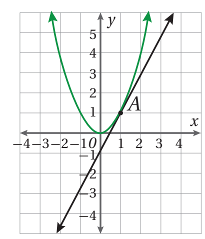
أُفكِّرُ
لماذا يكونُ ميلُ المستقيمِ ثابتًا عندَ أيِّ نقطةٍ عليْهِ؟

لإيجادِ ميلِ منحنى عندَ نقطةٍ ما، أرسمُ مماسًّا عندَ تلكَ النقطةِ، ثمَّ أَجِدُ ميلَ المماسِّ باستعمالِ إحداثياتِ نقطتيْنِ تقعانِ عليْهِ: (x_2, y_2) , (x_1, y_1)، وذلكَ بالتعويضِ في صيغةِ ميلِ المستقيمِ.

$$m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{k}{h}$$، حيثُ: $x_2-x_1 \neq 0$

مثال 1

يُمثِّلُ المستقيمُ في الشكلِ المجاورِ مماسًّا لمنحنى الاقترانِ $y = x^2$ عندَ النقطةِ $A(1, 1)$. أَجِدُ ميلَ منحنى الاقترانِ عندَ النقطةِ A.



الدرس 1

نتاجات الدرس

- يجد ميل مماس مرسومًا عند نقطة على منحنى الاقتران.
- يرسم مماسًّا، ويقدر ميله عند نقطة على منحنى الاقتران.
- يكتب معادلة المماس.
- يقدر السرعة اللحظية عند نقطة على منحنى المسافة–الزمن.

التعلم القبلي:

- تعرف القاطع، والمماس، ونقطة التماس.
- إيجاد ميل مستقيم.
- كتابة معادلة الخط المستقيم.
- تفسير منحنى المسافة – الزمن، ومنحنى السرعة – الزمن.

1 التهيئة

- مهِّد للموضوع بسؤال الطلبة عن تعريف القاطع والمماس ونقطة التماس، ثم اطلب إليهم رسم أمثلة توضيحية لكلٍّ منها على اللوح. اسألهم أيضًا عن قانون ميل المستقيم الذي درسوه سابقا، ثم اكتبه على اللوح.
- اكتب على اللوح المثالين الآتيين، ثم اطلب إلى الطلبة إيجاد الميل بين النقطتين في كلٍّ منهما:

a) $A(6, 2), B(8, 10)$

b) $C(5, 4), D(9, -10)$

- اطرح على الطلبة السؤال الآتي:

» لماذا ظهرت إشارة الميل موجبة في الفرع a، وسالبة في الفرع b؟

- اطلب إلى الطلبة إيجاد معادلة المستقيم في المثال السابق.

2 الاستكشاف

- وجِّه الطلبة الى قراءة المسألة في بند (مسألة اليوم)، ثم اسألهم:
  » ماذا يسمى هذا المنحنى؟ منحنى السرعة – الزمن.
  » ما التسارع؟ التغير في السرعة.
  » هل يمكن حساب التسارع المتوسط بين نقطتين على المنحنى؟ نعم.
  » كيف يمكن حساب ذلك؟ بقسمة فرق السرعة على فرق الزمن بين النقطتين.
  » هل يختلف التسارع من نقطة إلى أخرى على هذا المنحنى؟ نعم.
- استمع لإجابات الطلبة من دون تقديم تغذية راجعة لهم، ثم اسألهم:
  » من يؤيد الإجابة؟
  » من لديه إجابة أُخرى؟
  » اذكرها.

وذلك لتعزيز مهارات التواصل واحترام الرأي والرأي الاخر لديهم. بعد ذلك وضح لهم أنهم سيتعرفون في هذا الدرس ما يمكنهم من الإجابة عن هذه المسألة ومسائل مشابهة، ثم اكتب العنوان على اللوح.

تعزيز اللغة ودعمها

كرِّر المصطلحات الرياضية المستخدمة في الدرس باللغتين العربية والإنجليزية، وشجِّع الطلبة على استعمالها، مثل: الميل (Slope)، والمماس (Tangent)، والسرعة (velocity)، والتسارع (acceleration).

3 التدريس

اشرح على اللوح كيفية إيجاد الميل لمماس مرسوم عند نقطة على منحنى الاقتران، مستعينًا بالتمثيل البياني الوارد في كتاب الطالب بداية الدرس.

مثال 1

- ارسم التمثيل البياني الوارد في هذا المثال على اللوح، مُحدِّدًا عليه المماس بصورة دقيقة.
- أخبر الطلبة أنه يمكن إيجاد ميل المماس بتطبيق قانون ميل المستقيم لأي نقطتين واقعتين على المماس.
- أَعِدْ حساب ميل المماس، ولكن باستعمال نقطتين أخريين لإثبات أن قيمة الميل لا تتغيَّر بغض النظر عن النقطتين المُحدَّدتين على المماس.
- اسأل الطلبة عن سبب ظهور إشارة الميل موجبة، وأرشدهم إلى أن الزاوية التي يصنعها المماس مع المحور x الموجب حادة.

أخطاء مفاهيمية:

- في أثناء شرح المثال الأول، قد لا يُميِّز الطلبة من ذوي المستوى دون المتوسط بين الزاوية الحادة والزاوية المنفرجة؛ لذا وضِّح لهم مفهوم كلٍّ منهما.

ملاحظات المعلم

....

المفاهيم العابرة:

عزِّز وعي الطلبة بالقضايا الإنسانية (تقدير العلم والعلماء) عن طريق حوار تديره مع الطلبة، وتخبرهم فيه أنهم يدرسون الآن فرعًا من فروع الرياضيات يسمى التفاضل، وأن هذا الفرع قد طُوِّر في القرن السابع عشر الميلادي على يد نيوتن في إنجلترا، ثم ليبينز في ألمانيا؛ للمساعدة على وصف حركة الكواكب للأغراض الفلكية.

وجِّه الطلبة إلى البحث في مصادر المعرفة المناسبة عن ثلاثة علماء مشهورين بإسهاماتهم في علم التفاضل، ثم كتابة مقال من صفحة واحدة عنهم؟

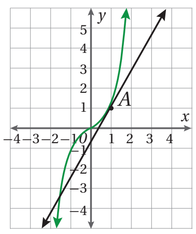
أُحدِّدُ نقطتيْنِ على المماسِّ منَ الرسمِ: $B(0, -1)$ وَ $C(2, 3)$، ثمَّ أحسبُ الميلَ:

$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ صيغةُ الميلِ

$= \frac{3-(-1)}{2-0}$ بالتعويضِ

$= 2$ بالتبسيطِ

إذنْ، ميلُ منحنى الاقترانِ عندَ النقطةِ A هوَ 2



أتحقق من فهمي

يُمثِّلُ المستقيمُ في الشكلِ المجاورِ مماسًّا لمنحنى الاقترانِ $y = x^3$ عندَ النقطةِ $A(1, 1)$.

أَجِدُ ميلَ منحنى الاقترانِ عندَ النقطةِ A. انظر الهامش

إذا لمْ يكنِ المماسُّ مرسومًا عندَ النقطةِ التي يُرادُ إيجادُ ميلِ المنحنى عندَها، فإنَّهُ يُرسَمُ باستعمالِ المسطرةِ. وبما أنَّ الرسمَ اليدويَّ ليسَ دقيقًا، فإنَّ ميلَ المماسِّ المرسومِ قدْ يختلفُ قليلًا عنِ القيمةِ الدقيقةِ لميلِ المنحنى، عندئذٍ يكونُ الناتجُ قيمةً تقريبيةً لميلِ المنحنى.

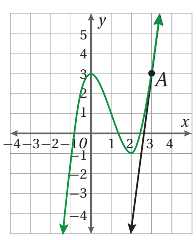
إرشادٌ

أستعملُ شبكةَ المُربَّعاتِ لتمثيلِ المنحنياتِ بيانيًّا بدقةٍ.

مثال 2

أُقدِّرُ ميلَ منحنى الاقترانِ $y = x^3 - 3x^2 + 3$ عندَ كلِّ نقطةٍ ممّا يأتي:

1 **النقطةُ $A(3, 3)$.**



الخطوةُ 1: أرسمُ مماسًّا للمنحنى عندَ النقطةِ $A(3, 3)$ باستعمالِ المسطرةِ.

الخطوةُ 2: أُحدِّدُ نقطتيْنِ على المماسِّ $A(3, 3), C(2, -5)$، ثمَّ أَجِدُ الميلَ.

$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ صيغةُ الميلِ

$= \frac{-5-3}{2-3}$ بالتعويضِ

$= 8$ بالتبسيطِ

إذنْ، ميلُ منحنى الاقترانِ عندَ النقطةِ A هوَ 8 تقريبًا.

أتعلّمُ

يكونُ ميلُ المنحنى عندَ نقطةٍ عليْهِ موجبًا إذا صنعَ مماسُّ المنحنى عندَ تلكَ النقطةِ زاويةً حادةً معَ محورِ x الموجبِ.

إجابة أتحقق من فهمي 1:

$m = 3$

إرشادات للمعلم

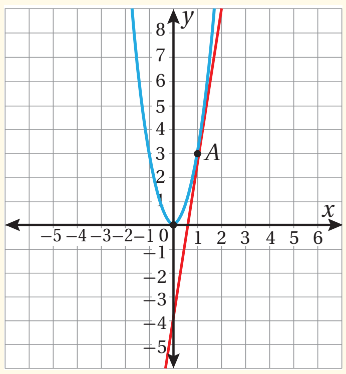
- وجِّه الطلبة إلى استعمال الورق البياني لرسم التمثيل البياني للاقتران.
- أخبر الطلبة أنه يمكن استعمال برمجية جيوجبرا في المثال الثاني لعمل تمثيل بياني ومماس دقيق.

تنبيه: رُسِم المماس بصورة تقريبية في المثال الثاني؛ لذا اقبل من الطلبة الإجابات التقريبية للميل.

تنبيه: في أثناء شرح المثال الأول، لا تقبل من الطلبة إجابات تقريبية للميل؛ لأن المماس مرسوم بصورة دقيقة.

مثال إضافي

- يُمثِّل المستقيم في الشكل المجاور مماسًّا لمنحنى الاقتران $y = 3x^2$ عند النقطة $A(1, 3)$، جد ميل منحنى الاقتران عند النقطة A.



ميل منحنى الاقتران عند النقطة A هو: 6

التقويم التكويني:

- وجِّه الطلبة إلى حل التدريب في بند (**أتحقق من فهمي**) بعد كل مثال (فرديًّا، أو ضمن مجموعات).
- تجوَّل بين الطلبة مُرشِدًا، ومُساعِدًا، ومُوجِّهًا، وقدِّم لهم التغذية الراجعة.
- اختر بعض الإجابات التي تحوي أخطاء مفاهيمية، ثم ناقِشها على اللوح، ولا تذكر اسم الطالب الذي أخطأ في الإجابة؛ تجنبًا لإحراجه.

مثال 2

- ارسم على اللوح التمثيل البياني للاقتران، وارسم مماسًّا تقريبيًّا عند النقطة $A(3, 3)$.
- حدِّد أي نقطتين على المماس، ثم جد الميل.
- أخبر الطلبة أن المماس غير مرسوم بدقة؛ ما يعني أن قيمة الميل غير دقيقة.

مثال 2

- في الفرع الثاني من المثال الثاني، اسأل الطلبة:
  - » ما سبب ظهور إشارة الميل سالبة؟
- استمع لإجابات الطلبة، ثم ناقِشهم فيها، مُبيِّنًا أن المماس كوّن زاوية منفرجة مع المحور x الموجب.
- أخبر الطلبة أنه يمكن استعمال قيمة الميل للنقطة $B(1, 1)$ وأي نقطة واقعة على المماس لكتابة معادلة المماس.
- ذكِّر الطلبة أن الصيغة العامة لمعادلة الخط المستقيم هي: $y = ax + b$، حيث تُمثِّل a الميل، و b المقطع y للخط المستقيم.

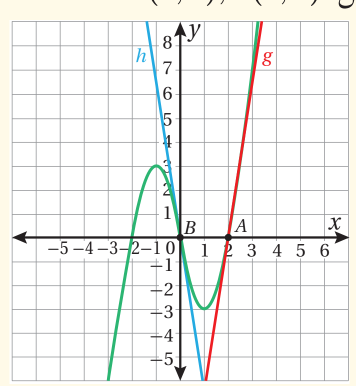
إرشادات للمعلم

قيمة الميل في الفرع الأول من المثال الثاني هي 9، وقيمة الميل في الفرع الثاني هي -3، ولكن اقبل إجابات الطلبة القريبة من ذلك.

تنبيه: وضِّح للطلبة أن الميل لا يكون معرفًا إذا كان المماس موازيًا لمحور الصادات؛ لأن فرق الصادات بين أي نقطتين واقعتين على المماس يساوي صفرًا.

مثال إضافي

- قدِّر ميل منحنى الاقتران $y = x^3 - 4x$ عند كلٍّ من النقطتين: $A(2, 0), B(0, 0)$



الميل عند A هو 8 (اقبل من الطلبة الإجابات القريبة من ذلك).

الميل عند B هو -4 (اقبل من الطلبة الإجابات القريبة من ذلك).

أتعلَّمُ

يكونُ ميلُ المنحنى عندَ نقطةٍ عليْهِ سالبًا إذا صنعَ مماسُّ المنحنى عندَ تلكَ النقطةِ زاويةً منفرجةً معَ محورِ x الموجبِ.

أُفكِّرُ

متى يكونُ ميلُ المنحنى صفرًا؟

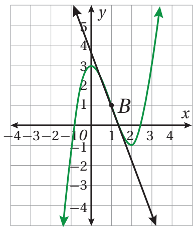
أتذكَّرُ

معادلةُ المماسِّ المارِّ بالنقطةِ (a, b) هيَ:

$y - b = m(x - a)$

2 النقطةُ $B(1, 1)$.

أرسمُ مماسًّا للمنحنى عندَ النقطةِ B، ثمَّ أُحدِّدُ نقطتيْنِ عليْهِ $B(1, 1), E(0, 3.8)$، ثمَّ أَجِدُ الميلَ:



صيغةُ الميلِ	$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$
بالتعويضِ	$= \frac{1 - 3.8}{1 - 0}$
بالتبسيطِ	$= -2.8$

إذنْ، ميلُ منحنى الاقترانِ عندَ النقطةِ B هوَ -2.8

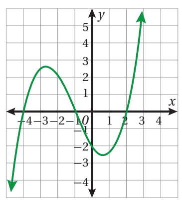
3 أكتبُ معادلةَ المماسِّ المارِّ بالنقطةِ $B(1, 1)$

معادلةُ المماسِّ	$y - b = m(x - a)$
بتعويضِ النقطةِ $B(1, 1)$ وَ $m = -1$	$y - 1 = -2.8(x - 1)$
بالتبسيطِ	$y = 3.8 - 2.8x$

أتحقق من فهمي

أُقدِّرُ ميلَ منحنى الاقترانِ المُمثَّلِ بيانيًّا في الشكلِ المجاورِ عندَ كلٍّ منَ النقطتيْنِ: $A(-4, 0), B(0, -2)$.

انظر الهامش



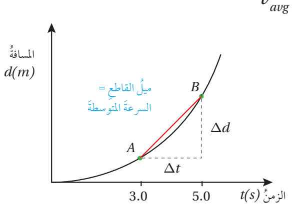
تعرَّفْتُ سابقًا أنَّ منحنى المسافةِ – الزمنِ يكونُ مستقيمًا عندَ الحركةِ بسرعةٍ ثابتةٍ، وأنَّهُ لا يكونُ مستقيمًا عندَ الحركةِ بسرعةٍ مُتغيِّرةٍ. تعرَّفْتُ أيضًا كيفيةَ حسابِ السرعةِ المتوسطةِ $\bar{v}$ لجسمٍ مُتحرِّكٍ في فترةٍ زمنيةٍ، وذلكَ بقسمةِ التغيُّرِ في المسافةِ Δd على التغيُّرِ في الزمنِ Δt:

$$v_{avg} = \bar{v} = \frac{\Delta d}{\Delta t}$$

رموزٌ رياضيةٌ

يُرمَزُ إلى التغيُّرِ في قيمةِ x بالرمزِ Δx

بالنظرِ إلى منحنى المسافةِ – الزمنِ المجاورِ، يتبيَّنُ أنَّ السرعةَ المتوسطةَ للسيّارةِ منَ الثانيةِ الثالثةِ إلى الثانيةِ الخامسةِ تساوي ميلَ القاطعِ الذي يمرُّ بالنقطتيْنِ A وَ B على المنحنى.



60

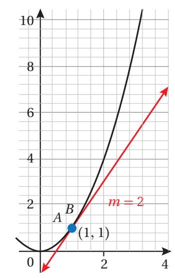
أخطاء مفاهيمية: في المثال الثاني، قد يعتقد الطلبة من ذوي المستوى دون المتوسط أن الميل هو الفرق بين قيمتي y؛ لذا أرشدهم إلى أن الميل هو ظل الزاوية التي يُكوِّنها المستقيم مع محور x الموجب، وأنّه يساوي الفرق بين قيمتي y مقسومًا على الفرق بين قيمتي x .

إجابة أتحقق من فهمي 2:

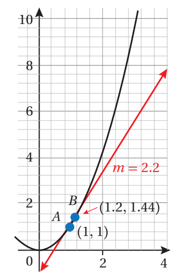
الميل عند النقطة $A(-4, 0)$ هو 4.5 (اقبل من الطلبة الإجابات القريبة من ذلك).

الميل عند النقطة $B(0, -2)$ هو -1.5 (اقبل من الطلبة الإجابات القريبة من ذلك).

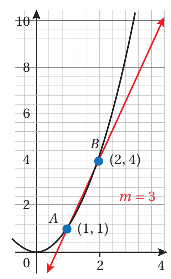
لكنَّ السـرعةَ المتوسـطةَ لا تُقدِّمُ معلوماتٍ كافيةً في كثيرٍ منَ المواقفِ، مثلِ تحديدِ سرعةِ سيّارةٍ لحظةَ مرورِها أمامَ الرادارِ؛ فتَلزَمُ عندئذٍ **السرعةُ اللحظيةُ** (velocity) التي يُمكِنُ إيجادُها بتقليصِ الفترةِ الزمنيةِ للسرعةِ المتوسطةِ حتى تصبحَ نقطةً (لحظةً) كما في الأشكالِ التاليةِ، فيصبحُ القاطعُ الذي يمرُّ بنقطتيْنِ على المنحنى مماسًّا لهُ عندَ نقطةٍ واحدةٍ.



الشكلُ (3).



الشكلُ (2).



الشكلُ (1).

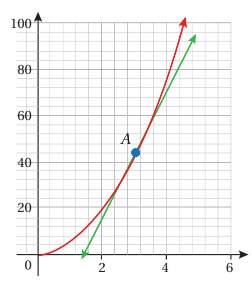
بما أنَّ ميلَ المماسِّ يساوي ميلَ المنحنى عندَ نقطةِ التماسِّ، فإنَّ السرعةَ اللحظيةَ عندَ لحظةٍ ما تساوي ميلَ منحنى المسافةِ– الزمنِ عندَ تلكَ اللحظةِ.

مثال 3

يُمثِّلُ الاقترانُ $d(t) = 4.9t^2$ العلاقةَ بينَ المسافةِ المقطوعةِ d بالمترِ والزمنِ t بالثانيةِ (منحنى المسافةِ– الزمنِ) لكرةٍ تسقطُ سقوطًا حُرًّا منْ وضعِ السكونِ. أَجِدُ سرعةَ الكرةِ بعدَ 3 ثوانٍ منْ سقوطِها.

الخطوةُ 1: أُعوِّضُ $t = 3$ بالاقترانِ لتحديدِ المسافةِ المقطوعةِ بعدَ 3 ثوانٍ، فتنتجُ النقطةُ $A(3, 44.1)$ التي تُمثِّلُ نقطةَ التماسِّ.

الخطوةُ 2: أُمثِّلُ منحنى الاقترانِ $d(t) = 4.9t^2$ بيانيًّا، ثمَّ أرسمُ المماسَّ عندَ النقطةِ $A(3, 44.1)$.



فائدةٌ

تُسمّى المعادلةُ $d(t) = 4.9t^2$ قانونَ غاليليو نسبةً إلى مُكتشِفِها غاليليو غاليلي (1564– 1642م). وهيَ تصفُ المسافةَ التي يقطعُها جسمٌ في أثناءِ سقوطِهِ بصورةٍ حُرَّةٍ منْ وضعِ السكونِ نحوَ سطحِ الأرضِ.

مثال 3

- وضِّح للطلبة الفرق بين منحنى المسافة– الزمن الذي يستعمل لحساب السرعة المتوسطة (ميل القاطع) والسرعة اللحظية (الميل عند نقطة واقعة على المنحنى)، ومنحنى السرعة– الزمن الذي يستعمل لحساب التسارع المتوسط (ميل القاطع) والتسارع اللحظي (الميل عند نقطة واقعة على المنحنى).
- استعمل التمثيلات البيانية الواردة في الصفحة 61 من كتاب الطالب لتوضيح كيفية تقليص الفترة الزمنية للوصول إلى نقطة تكون عندها السرعة لحظية.
- مثِّل بيانيًّا الاقتران المعطى في المثال 3، ثم ارسم مماسًّا تقريبيًّا عند النقطة $A(3, 44.1)$، مُوضِّحًا للطلبة أن السرعة اللحظية عند نقطة هي ميل المماس لمنحنى المسافة– الزمن عند تلك النقطة.
- أخبر الطلبة أنه ليس سهلًا رسم المماس في المثال 3
- أَثِرْ فضول الطلبة للبحث عن طريقة أخرى لإيجاد الميل على نحوٍ أسهل وأدق.

تنبيه: الفت انتباه الطلبة إلى أن منحنى المسافة – الزمن الوارد في المثال الثالث قد درسوه في الفيزياء.

مثال إضافي

- يُمثِّل الاقتران $d(t) = 2t^2 - 1$ المسافة التي يقطعها جسم ما، حيث d المسافة المقطوعة بالمتر، و t الزمن بالثانية. قدِّر السرعة اللحظية بعد ثانيتين.

اقبل من الطلبة الإجابات القريبة من الإجابة الصحيحة 8 m/s

أخطاء مفاهيمية: قد يخلط الطلبة ذو المستوى دون المتوسط بين السرعة المتوسطة والسرعة اللحظية؛ لذا وضِّح لهم الفرق بينهما.

4 التدريب

- وجِّه الطلبة إلى قراءة الأسئلة في بند (**أتدرب وأحل المسائل**)، ثم اطلب إليهم حلها.
- تجوَّل بين الطلبة مُرشِدًا، ومُساعِدًا، ومُوجِّهًا، وقدِّم لهم التغذية الراجعة.
- إذا واجه بعض الطلبة صعوبة في حل أي مسألة، فاختر طالبًا تمكَّن من حل المسألة، واطلب إليه كتابة حله على اللوح.

الواجب المنزلي:

- اطلب إلى الطلبة أن يحلوا في البيت جميع المسائل الواردة في الصفحة الخامسة عشرة من كتاب التمارين، مُحدِّدًا لهم المسائل التي يمكنهم حلها في نهاية كل حصة بحسب ما يُقدَّم من أمثلة الدرس وأفكاره.
- يمكن أيضًا إضافة المسائل التي لم يحلها الطلبة داخل غرفة الصف إلى الواجب البيتي.
- في اليوم التالي، اطَّلِع على حلول الطلبة، وناقِشهم في أي صعوبات واجهوها في أثناء الحل.

الخطوةُ 3: أحدِّدُ نقطتيْنِ على المماسِّ $A(3, 44.1)$ وَ $B(2, 16)$، ثمَّ أستعملُهُما لحسابِ الميلِ.

صيغةُ الميلِ $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

بالتعويضِ $= \frac{44.1 - 16}{3 - 2}$

بالتبسيطِ $= 28.1$

إذنْ، ميلُ منحنى الاقترانِ عندَ النقطةِ $A(3, 44.1)$ هوَ 28.1 تقريبًا. ومنْهُ، فإنَّ سرعةَ الكرةِ اللحظيةِ بعدَ 3 ثوانٍ هيَ 28.1 m/s

أفكِّر

إنَّ حسابَ السرعةِ اللحظيةِ برسمِ المماسِّ وتحديدِ نقطتيْنِ عليْهِ أمرٌ صعبٌ، فهلْ توجدُ طريقةٌ أسهلُ وأدقُّ لحسابِ الميلِ؟

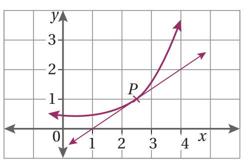
أتحقق من فهمي

يُمثِّلُ الاقترانُ $d(t) = t^2 + t$ المسافةَ التي يقطعُها جسمٌ ما، حيثُ d المسافةُ المقطوعةُ بالمترِ، وَ t الزمنُ بالثانيةِ. أُقدِّرُ السرعةَ اللحظيةَ بعدَ 5 ثوانٍ، وَ 11 ثانيةً. انظر الهامش

أتدرب وأحل المسائل

1) يُمثِّلُ المستقيمُ في الشكلِ المجاورِ مماسًّا لمنحنى اقترانٍ عندَ النقطةِ $P(2.5, 1)$.

أجِدُ ميلَ منحنى الاقترانِ عندَ النقطةِ P. $m = \frac{2}{3}$

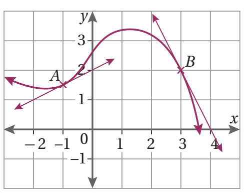


2) في الشكلِ المجاورِ، رُسِمَ مماسّانِ لمنحنى اقترانٍ عندَ النقطتيْنِ $A(-1, 1.5)$ وَ $B(3, 2)$.

أجِدُ ميلَ منحنى الاقترانِ عندَ كلٍّ منْ A وَ B.

الميل عند A هو: $\frac{1}{2}$

الميل عند B هو: -2



إجابة أتحقق من فهمي 3:

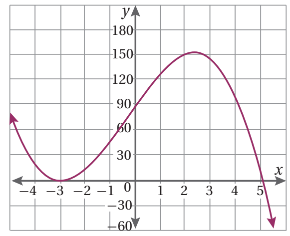
السرعة بعد 5 ثوانٍ هي 11 m/s (اقبل من الطلبة الإجابات القريبة من ذلك).

السرعة بعد 11 ثانية هي 23 m/s (اقبل من الطلبة الإجابات القريبة من ذلك).

3 أُقدِّرُ ميلَ منحنى الاقترانِ المُبيَّنِ جانبًا عندَ النقطةِ $(2, 150)$، والنقطةِ $(4.5, 60)$.

الميل عند $(2, 150)$ هو: 15

الميل عند $(4.5, 60)$ هو: -75



أستعملُ جدولَ القيمِ الآتي للإجابةِ عن الأسئلةِ (7 – 4):

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	2	1.5	2	3.5	6

4 أُمثِّلُ منحنى الاقترانِ $f(x)$ بيانيًّا في الفترةِ $0 \le x \le 4$ انظر ملحق الإجابات

5 أرسمُ مماسًّا لمنحنى الاقترانِ عندَ النقطةِ $(3, 3.5)$. انظر ملحق الإجابات

6 أُقدِّرُ ميلَ منحنى الاقترانِ عندَ النقطةِ $(3, 3.5)$. 1.9 تقريبًا

7 ما إحداثياتُ النقطةِ التي يكونُ ميلُ المنحنى عندَها صفرًا؟ $(1, 1.5)$

أنسخُ جدولَ قيمِ الاقترانِ $f(x) = 0.1x^3$ الآتيَ، ثمَّ أستعملُهُ لحلِّ المسائلَ (10–8):

x	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3
$0.1x^3$	0	0.01	0.1	0.3375	0.8	1.5625	2.7

8 أرسمُ منحنى الاقترانِ $f(x)=0.1x^3$ في الفترةِ $0 \le x \le 3$ انظر ملحق الإجابات

9 أرسمُ مماسًّا لمنحنى الاقترانِ عندَ النقطةِ $(2, 0.8)$. انظر ملحق الإجابات

10 أُقدِّرُ ميلَ منحنى الاقترانِ عندَ النقطةِ $(2, 0.8)$. 1.2 تقريبًا

أُقدِّرُ ميلَ منحنى كلِّ اقترانٍ ممّا يأتي:

11 $y = 4x^2 + 1$ عندَ النقطةِ $(1, 5)$. أي إجابة قريبة من 8

12 $y = 3 + 2x^2$ عندَ النقطةِ $(-1, 5)$. أي إجابة قريبة من -4

13 $y = 1 - x^2$ عندَ النقطةِ $(-1, 0)$. أي إجابة قريبة من 2

14 $y = 5x^4 + 1$ عندَ النقطةِ $(0, 1)$. 0

15 $y = 9 - x^2$ عندَ النقطةِ $(2, 5)$. أي إجابة قريبة من -4

16 $y = 8 - 2x$ عندَ النقطةِ $(1, 6)$. -2

مهارات التفكير العليا

- أشرِكِ الطلبة كافةً في حل هذه المسائل؛ لتنمية مهارات التفكير العليا لديهم.
- تذكَّر أنه ليس شرطًا أن يتمكَّن الطلبة كافةً من حل المسائل جميعها، ولكن عليهم أن يحاولوا حلها.
- اطلب إلى الطلبة – ضمن مجموعات– حل المسائل في بند (مهارات التفكر العليا)، ثم اطلب إلى أفراد بعضها بيان كيفية توصُّلهم إلى الحل في كل مسألة، وامنح الآخرين فرصة نقد إجابات زملائهم وتقويمها.
- شجِّع الطلبة على تبرير إجاباتهم.

5 الإثراء

- وجِّه الطلبة إلى البحث في شبكة الإنترنت أو مكتبة المدرسة عن تطبيقات حياتية للميل عند نقطة على المنحنى، مثل الرادار الذي يرصد سرعة السيارة لحظة مرورها أمامه.
- أكِّد للطلبة وجوب توثيق المعلومة دائمًا.

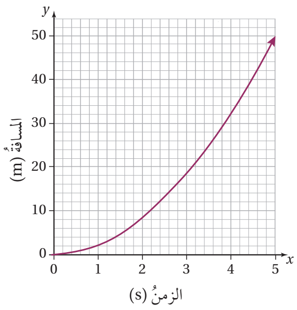
تعليمات المشروع:

- اطلب إلى الطلبة البدء بتنفيذ الخطوات (4–1) من المشروع.
- وجِّه الطلبة إلى تنظيم إجراءاتهم وتوثيقها بنسخ صورة للشاشة (print screen) في كل خطوة.

6 الختام

- اطرح على الطلبة الأسئلة الآتية:
  » ما الفرق بين القاطع والمماس؟
  » ما تعريف نقطة التماس؟
  » هل يمكن رسم المماس بدقة؟
  » متى تكون قيمة الميل موجبةً أو سالبةً أو صفرًا؟

درّاجاتٌ ناريةٌ: بدأَتْ درّاجةٌ ناريةٌ الحركةَ منْ وضعِ السكونِ في مسارٍ مستقيمٍ. ويُبيِّنُ المنحنى المجاورُ المسافةَ التي قطعَتْها الدرّاجةُ في 5 ثوانٍ:



17 أرسمُ نسخةً منَ المنحنى، مستعينًا بالجدولِ الآتي: انظر ملحق الإجابات

x	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	0	2	8	18	32	50

18 أرسمُ مماسًّا للمنحنى عندما $x=2$. انظر ملحق الإجابات

19 أُقدِّرُ سرعةَ الدرّاجةِ بعدَ ثانيتيْنِ. أي إجابة قريبة من 8 m/s

20 أُقدِّرُ سرعةَ الدرّاجةِ بعدَ 4 ثوانٍ. انظر ملحق الإجابات

سيّاراتٌ: أرادَ مهندسٌ أنْ يدرسَ تسارعَ سيّارةٍ، فسجَّلَ المسافةَ المقطوعةَ كلَّ 3 ثوانٍ كما في الجدولِ الآتي، ثمَّ استعملَ المعادلةَ $x = at^2 + bt^4$ لتمثيلِ العلاقةِ بينَ قيمِ المسافةِ والزمنِ، حيثُ a وَ b عددانِ ثابتانِ:

الزمنُ t (ثانيةٌ)	0	3	6	9	12
المسافةُ x (مترٌ)	0	26.19	95.04	177.39	224.64

21 أرسمُ منحنى المسافةِ – الزمنِ. (21–24) انظر ملحق الإجابات

22 أُقدِّرُ السرعةَ عندما $t = 9$.

23 أَجِدُ قيمةَ كلٍّ منْ: a وَ b.

24 **فيزياءُ:** تُمثِّلُ المعادلةُ $s(t) = 3t - t^2$ المسافةَ التي يقطعُها جسمٌ بالمترِ، حيثُ t الزمنُ بالثانيةِ. أُقدِّرُ سرعةَ الجسمِ عندما $t = 2$.

مهارات التفكير العليا

25 **تبريرٌ:** أُقدِّرُ ميلَ منحنى الاقترانِ $f(x) = x^2 - 6x - 16$ عندَ كلٍّ منَ النقاطِ الآتيةِ، مُبرِّرًا إجابتي:

- نقطتا تقاطعِ المنحنى معَ محورِ x.
- نقطةُ تقاطعِ المنحنى معَ محورِ y.

انظر ملحق الإجابات

26 **مسألةٌ مفتوحةٌ:** أكتبُ قاعدةَ اقترانٍ منَ الدرجةِ الثانيةِ، ثمَّ أُمثِّلُهُ بيانيًّا، مُقدِّرًا ميلَهُ عندَ نقطتيْنِ مُتعاكِستيْنِ عليْهِ: $(a,b), (-a, b)$. انظر ملحق الإجابات

إرشاد: في السؤال 26:

- أخبر الطلبة أن المقصود بالنقطتين المتعاكستين اللتين ورد ذكرهما في السؤال هو النقطتان المتقابلتان على جانبي محور التماثل.
- اكتب على اللوح بعض الأمثلة على ذلك، مثل: $(1, 2)$, $(-1, 2)$ على منحنى $y = x^2$

الدرسُ 2

الاشتقاقُ
Differentiation

فكرةُ الدرسِ إيجادُ مشتقةِ كثيراتِ الحدودِ.

المصطلحاتُ المشتقةُ.

مسألةُ اليومِ يُمثِّلُ الاقترانُ $f(t) = 80t - 5t^2$ ارتفاعَ منطادٍ بالمترِ عنْ سطحِ الأرضِ بعدَ t ثانيةً منْ إطلاقِهِ. ما سرعةُ المنطادِ بعدَ 10 ثوانٍ منْ إطلاقِهِ؟

تعرَّفْتُ في الدرسِ السابقِ كيفيةَ إيجادِ الميلِ أوْ تقديرِهِ، وهيَ طريقةٌ ليسَتْ سهلةً، وتحتاجُ إلى دقةٍ عندَ رسمِ المماسِّ. سأتعرَّفُ في هذا الدرسِ طريقةً جبريةً أسهلَ لإيجادِ ميلِ منحنى الاقترانِ عندَ نقطةٍ عليهِ منْ دونِ حاجةٍ إلى رسمِ المماسِّ.

عندَ إيجادِ ميلِ منحنى الاقترانِ $y = x^2$ عندَ نقاطٍ مختلفةٍ عليْهِ باستعمالِ طريقةِ ميلِ المماسِّ التي تعرَّفْتُها سابقًا، وتنظيمِ القيمِ في الجدولِ الآتي، سأُلاحِظُ أنَّ ميلَ المنحنى عندَ أيِّ نقطةٍ (x, y) يساوي قيمةَ x مضروبةً في العددِ 2؛ أيْ إنَّ الميلَ m يساوي $2x$

(x, y)	$(-2, 4)$	$(-1, 1)$	$(0, 0)$	$(1, 1)$	$(3, 9)$	$(4, 16)$	$(5, 25)$
m	$-4 = -2 \times 2$	$-2 = -1 \times 2$	$0 = 0 \times 2$	$2 = 1 \times 2$	$6 = 3 \times 2$	$8 = 4 \times 2$	$10 = 5 \times 2$

وبالمثلِ، سأجدُ أنَّ ميلَ منحنى الاقترانِ $f(x) = x^3$ عندَ أيِّ نقطةٍ (x, y) على منحناهُ هوَ $m = 3x^2$.

بوجهٍ عامٍّ، فإنَّ ميلَ منحنى الاقترانِ $f(x) = x^n$ عندَ أيِّ نقطةٍ (x, y) عليْهِ هوَ $m = nx^{n-1}$.

مشتقةُ (derivative) الاقترانِ $f(x)$ عندَ نقطةٍ واقعةٍ على منحناهُ هيَ ميلُ المنحنى عندَ تلكَ النقطةِ، ويُرمَزُ إليْها بالرمزِ $f'(x)$.

رموزٌ رياضيةٌ

تُستعمَلُ الرموزُ $\frac{dy}{dx}, f'(x), y'$ للتعبيرِ عنِ المشتقةِ.

مفهومٌ أساسيٌّ

مشتقةُ اقترانِ القوةِ

- **بالكلماتِ:** عندَ اشتقاقِ الاقترانِ $f(x) = x^n$، فإنَّ قوةَ x في المشتقةِ تكونُ أقلَّ بواحدٍ منْ قوةِ x في الاقترانِ الأصليِّ، وإنَّ معاملَ x في المشتقةِ يساوي قوةَ x في الاقترانِ الأصليِّ.
- **بالرموزِ:** إذا كانَ $f(x) = x^n$، حيثُ n عددٌ صحيحٌ غيرُ سالبٍ، فإنَّ $f'(x) = nx^{n-1}$.

65

الدرس 2

نتاجات الدرس

- يتعرف مفهوم مشتقة كثير الحدود.
- يجد مشتقة كثيرات الحدود باستعمال القوانين.
- يجد الميل باستعمال المشتقة.
- يجد السرعة اللحظية والتسارع اللحظي باستعمال المشتقة.

التعلم القبلي:

- تقدير ميل المنحنى على نقطة واقعة عليه.
- تقدير السرعة اللحظية والتسارع اللحظي.

1 التهيئة

- ذكِّر الطلبة بما تعلموه في الدرس السابق، ثم اكتب على اللوح السؤال الآتي:

» يتحرك جسم وفق المعادلة: $d = 16t - 2t^2$، حيث d المسافة بالأمتار، وt الزمن بالثواني. ما سرعة هذا الجسم بعد ثانيتين من بدء حركته؟

- أدِرْ حوارًا بين الطلبة عن طريقة إيجاد هذه السرعة وفق الطريقة المتبعة في الدرس السابق.
- دع الطلبة يحلوا السؤال ضمن مجموعات، وتابِعهم في أثناء ذلك.

منهاجي
متعة التعليم الهادف

2 الاستكشاف

- وجِّه الطلبة إلى قراءة المسألة في بند (**مسألة اليوم**)، ثم اسألهم:
  » ما ارتفاع المنطاد بعد مرور 10 ثوانٍ على إطلاقه؟ 300 m
  » كيف يمكن إيجاد سـرعة المنطاد بعد مرور 10 ثوانٍ على إطلاقه؟ رسـم منحنى المسـافة–الزمن، ورسم مماس عندما $t = 10$، وحساب ميله.
  » هل توجد طريقة أخرى أسهل وأكثر دقة لإيجاد السرعة؟ نعم.
- استمع لإجابات الطلبة من دون تقديم تغذية راجعة لهم، ثم اسألهم:
  » من يؤيد الإجابة؟
  » من لديه إجابة أُخرى؟
  » اذكرها.

وذلـك لتعزيز مهارات التواصل واحترام الرأي والـرأي الاخر لديهم. بعد ذلك وضح لهم أنهم سيتعرفون في هذا الدرس طريقة سهلة لحساب الميل والسرعة والتسارع، ثم اكتب العنوان على اللوح.

تعزيز اللغة ودعمها

كرِّر المصطلحات الرياضية المسـتخدمة في الدرس باللغتين العربية والإنجليزية، وشجِّع الطلبة على استعمالها، مثل: كثير الحدود (polynomial)، والمشتقة (derivative)، والميل (slope).

3 التدريس

- وظِّف الشـرح الوارد بداية الدرس من كتاب الطالب في إيجاد ميل منحنى الاقتران $y = x^2$ عند عِدَّة نقاط واقعة عليه، واستنتاج قاعدة مشتقة اقتران القوة.

إرشادات للمعلم

أخبر الطلبة بوجود عِدَّة رموز للمشـتقة يمكن العثور عليها في الكتـب المرجعية، أو المواقع الإلكترونية المتخصصة، ومن هذه الرموز: $y', (f(x))\frac{d}{dx}, \frac{dy}{dx}$

تنبيه: قد لا يُميِّز بعض الطلبة من ذوي المسـتوى دون المتوسط اقتران كثير الحدود من غيره؛ لذا وضِّح لهم ذلك.

أخطـاء مفاهيمية: قد يعتقد بعض الطلبة من ذوي المسـتوى دون المتوسـط أن المماس يُرسَـم للدائرة فقط؛ لذا الفـت انتباههم إلى ذلك بتعريف الممـاس والقاطع ونقطة التماس.

ملاحظات المعلم

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

المفاهيم العابرة:

أكِّد للطلبة أهمية المفاهيم العابرة للمواد حيثما ورد ذكرها في كتاب الطالب، أو كتاب التمارين والأنشـطة العملية. ففي بند (**مسألة اليوم**)، عزِّز الوعـي بالقضايا الإنسـانية (الهواية) عن طريق حوار تديره مع الطلبة عن أهمية الهواية، وتأثيرها في الطاقة الإيجابية وزيادة درجة السعادة لديهم، ثم اسألهم:

» ما هواياتك المفضلة؟
» بماذا تشعر عند ممارسة هوايتك؟
» أيكم لديه هوايات أخرى؟
» اذكرها (إن وُجِدت).

مثال 1

- استعمل هذا المثال لتوضيح قاعدة اشتقاق اقتران القوة.
- اكتب على اللوح أمثلة أخرى لترسيخ فهم الطلبة للقاعدة.

التقويم التكويني:

- وجِّه الطلبة إلى حل التدريب في بند (**أتحقق من فهمي**) بعد كل مثال (فرديًّا، أو ضمن مجموعات).
- تجوَّل بين الطلبة مُرشِدًا، ومُساعِدًا، ومُوجِّهًا، وقدِّم لهم التغذية الراجعة.
- اختر بعض الإجابات التي تحوي أخطاء مفاهيمية، ثم ناقِشها على اللوح، ولا تذكر اسم الطالب الذي أخطأ في الإجابة؛ تجنبًا لإحراجه.

مثال إضافي

- جد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

1) $f(x) = x^{25}$ $\quad f'(x) = 25x^{24}$

2) $f(x) = x^{77}$ $\quad f'(x) = 77x^{76}$

إرشادات للمعلم

- في المثال الأول، قد ينسى الطلبة من ذوي المستوى دون المتوسط طرح واحد من الأس؛ لذا ذكِّرهم دائمًا بذلك.
- قد يخلط الطلبة من ذوي المستوى دون المتوسط عند شرح قاعدة مشتقة مضاعفات لقوة بين المنحنين؛ لأنهما رُسِما معًا؛ لذا ارسم كلًّا منهما وحده، ثم ادمجهما على المستوى الإحداثي نفسه.

مثال 1

أَجِدُ مشتقةَ كلِّ اقترانٍ ممّا يأتي:

1) $f(x) = x^8$

$f'(x) = 8x^{8-1}$ قانونُ مشتقةِ القوةِ

$f'(x) = 8x^7$ بالتبسيطِ

2) $f(x) = x^5$

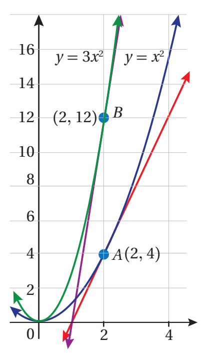
$f'(x) = 5x^{5-1}$ قانونُ مشتقةِ القوةِ

$f'(x) = 5x^4$ بالتبسيطِ

أتحقق من فهمي

أَجِدُ مشتقةَ كلِّ اقترانٍ ممّا يأتي: انظر الهامش

a) $f(x) = x^7$ b) $f(x) = x^{11}$



منَ المعلومِ أنَّ قيمَ y للاقترانِ $f(x) = 3x^2$ تساوي 3 أمثالِ قيمِ y التي تُناظِرُها للاقترانِ $g(x) = x^2$. وعليْهِ، فإنَّ ميلَ منحنى الاقترانِ $f(x) = 3x^2$ عندَ النقطةِ $(2, 12)$ يساوي 3 أمثالِ ميلِ منحنى الاقترانِ $g(x) = x^2$ عندَ النقطةِ $(2, 4)$.

وهذا يعني أنَّ مشتقةَ $(3x^2)$ تساوي 3 أمثالِ مشتقةِ (x^2)؛ أيْ $(3\times 2x)$.

بوجهٍ عامٍّ، فإنَّ مشتقةَ الاقترانِ $f(x)= ax^n$، حيثُ a عددٌ حقيقيٌّ، هيَ $f'(x)= a \times nx^{n-1}$.

مفهومٌ أساسيٌّ

قواعدُ أُخرى للمشتقةِ:

- **مشتقةُ مضاعفاتِ القوةِ:** إذا كانَ $f(x) = ax^n$، حيثُ n عددٌ صحيحٌ غيرُ سالبٍ، فإنَّ $f'(x) = anx^{n-1}$.
- **مشتقةُ الثابتِ:** إذا كانَ $f(x) = c$، حيثُ c عددٌ حقيقيٌّ، فإنَّ $f'(x) = 0$؛ أيْ إنَّ مشتقةَ الاقترانِ الثابتِ تساوي صفرًا.

أُفكِّرُ

هلْ يمكنُ استنتاجُ قاعدةٍ لمشتقةِ الاقترانِ الخطيِّ؟

66

تنبيه:

لا تطلب إلى الطلبة اشتقاق اقتران فيه أس سالب أو أس كسري؛ لأن المطلوب منهم فقط في هذه المرحلة تعرُّف اشتقاق كثير الحدود.

إجابة أتحقق من فهمي 1:

a) $f'(x) = 7x^6$ b) $f'(x) = 11x^{10}$

منهاجي
متعة التعليم الهادف

مثال 2

- وظِّف الشرح الوارد في كتاب الطالب، والمقارنة بين ميل منحنى الاقتران $g(x) = x^2$ وميل منحنى الاقتران $f(x) = 3x^2$ عند عِدَّة نقاط واقعة عليهما لها الإحداثي x نفسه؛ في استنتاج قاعدة مشتقة مضاعفات القوة، مُبيِّنًا أن ميل المماس عند A هو 2، وأن ميل المماس عند B هو 6
- يمكن استعمال برمجية جيوجبرا لتوضيح قاعدة مشتقة مضاعفات القوة، وقاعدة مشتقة الثابت.
- استعمل هذا المثال لتوضيح قاعدة مشتقة مضاعفات القوة، وقاعدة مشتقة الثابت.

أخطاء مفاهيمية: في المثال الثاني، قد يخطئ الطلبة من ذوي المستوى دون المتوسط في الاشتقاق؛ بنسيان الضرب في المعامل (في حال وجود معامل غير 1)؛ لذا الفت انتباههم إلى ذلك.

مثال إضافي

- جد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

1) $f(x) = -2x^8 \quad f'(x) = -16x^7$

2) $f(x) = 9x \quad f'(x) = 9$

3) $f(x) = -1 \quad f'(x) = 0$

مثال 2

أَجِدُ مشتقةَ كلِّ اقترانٍ ممّا يأتي:

1) $f(x) = 2x^4$

$f'(x) = 2(4x^{4-1})$ قانونُ مشتقةِ مضاعفِ القوةِ

$f'(x) = 8x^3$ بالتبسيطِ

2) $f(x) = \frac{1}{4}x^3$

$f'(x) = \frac{1}{4}(3x^{3-1})$ قانونُ مشتقةِ مضاعفِ القوةِ

$f'(x) = \frac{3}{4}x^2$ بالتبسيطِ

3) $f(x) = -2x$

$f'(x) = -2(x^{1-1})$ قانونُ مشتقةِ مضاعفِ القوةِ

$f'(x) = -2$ بالتبسيطِ

4) $f(x) = 4$

$f'(x) = 0$ قانونُ مشتقةِ الثابتِ

أتذكَّرُ
ميلُ الاقترانِ الثابتِ يساوي صفرًا.

أتحقق من فهمي

أَجِدُ مشتقةَ كلِّ اقترانٍ في ما يأتي: انظر الهامش

a) $f(x) = 5x^{12}$ b) $f(x) = -7x^8$

c) $f(x) = 0.5x^6$ d) $f(x) = -11$

مفهومٌ أساسيٌّ

مشتقةُ المجموعِ ومشتقةُ الفرقِ

- **بالكلماتِ:** مشتقةُ مجموعِ كثيرَيِ الحدودِ تساوي مجموعَ مشتقتَيْهِما، ومشتقةُ الفرقِ بينَ كثيرَيِ الحدودِ تساوي الفرقَ بينَ مشتقتَيْهِما.
- **بالرموزِ:** إذا كانَ $f(x) = g(x) \pm h(x)$، حيثُ $g(x)$ وَ $h(x)$ كثيرا الحدودِ، فإنَّ $f'(x) = g'(x) \pm h'(x)$.

إجابة أتحقق من فهمي 2:

a) $f'(x) = 60x^{11}$ b) $f'(x) = -56x^7$

c) $f'(x) = 3x^5$ d) $f'(x) = 0$

مثال 3

أَجِدُ مشتقةَ كلِّ اقترانٍ ممّا يأتي:

1 $f(x) = x^2 - 6x$

$f'(x) = 2x^{2-1} - 6x^{1-1}$ قانونُ مشتقةِ مضاعفاتِ القوى

$f'(x) = 2x - 6$ بالتبسيطِ

2 $f(x) = 5x^7 + 3x^4 - \frac{3}{2}x^2 + 8$

$f'(x) = 5(7x^{7-1}) + 3(4x^{4-1}) - \frac{3}{2}(2x^{2-1}) + 0$ قانونُ مشتقةِ مضاعفاتِ القوى

$f'(x) = 35x^6 + 12x^3 - 3x$ بالتبسيطِ

إرشادٌ
أستعملُ قواعدَ الاشتقاقِ المناسبةَ لإيجادِ المشتقةِ.

أتحقق من فهمي

أَجِدُ مشتقةَ كلٍّ منَ الاقترانيْنِ الآتييْنِ: انظر الهامش

a) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 4x - 1$

b) $g(x) = 9x - 7x^5 - 6 + \sqrt{3}\,x^2$

أُلاحِظُ منَ الأمثلةِ السابقةِ أنَّ مشتقةَ الاقترانِ هيَ اقترانٌ جديدٌ يُمثِّلُ قيمةَ ميلِ منحنى الاقترانِ الأصليِّ عندَ قيمٍ مختلفةٍ؛ لذا يُمكِنُ إيجادُ ميلِ منحنى الاقترانِ عندَ أيِّ نقطةٍ عليْهِ، بتعويضِ الإحداثيِّ x لتلكَ النقطةِ في اقترانِ المشتقةِ.

مثال 4

إذا كانَ $f(x) = 3x^2 - 18x + 5$، فأستعملُ المشتقةَ لإيجادِ كلٍّ ممّا يأتي:

1 ميلُ منحنى $f(x)$ عندَ النقطةِ $(1, -10)$.

$f(x) = 3x^2 - 18x + 5$ الاقترانُ الأصليُّ

$f'(x) = 6x - 18$ باشتقاقِ الاقترانِ

$f'(1) = 6(1) - 18$ بتعويضِ قيمةِ $x = 1$

$= -12$ بالتبسيطِ

إذنْ، ميلُ منحنى الاقترانِ $f(x)$ عندَ النقطةِ $(1, -10)$ هوَ -12

أتعلَّمُ
يُستعمَلُ الرمزُ $f'(a)$ للتعبيرِ عنْ مشتقةِ $f(x)$ عندما $x = a$.

68

إرشادات للمعلم

أثبِت للطلبة بعد شرح المثال الثالث أن مشتقة الاقتران الثابت تساوي صفرًا، وذلك برسم التمثيل البياني لاقتران ثابت، وإيجاد الميل عند عِدَّة نقاط واقعة عليه.

! تنبيه: قد يواجه بعض الطلبة صعوبة في فهم المثال الثالث؛ لذا اطلب إليهم اشتقاق كل حد وحده، ثم جمع المشتقات لكتابة مشتقة الاقتران كاملة.

إجابة أتحقق من فهمي 3:

a) $f'(x) = x + 4$

b) $g'(x) = 9 - 35x^4 + 2\sqrt{3}x$

مثال 3

- استعمل صندوق (مفهوم أساسي) لشرح قاعدة اشتقاق مجموع كثيري حدود، ومشتقة الفرق.
- استعمل هذا المثال لتوضيح قاعدة مشتقة المجموع، ومشتقة الفرق.
- اكتب على اللوح أمثلة أخرى لترسيخ فهم الطلبة للقاعدة.

مثال إضافي

- جد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

1) $f(x) = 3 - 4x^2$ $\quad f'(x) = -8x$

2) $f(x) = x^3 - 2x^2 + 5x - 1$

$f'(x) = 3x^2 - 4x + 5$

مثال 4 فرع 1

- ذكِّر الطلبة أن ميل منحنى الاقتران عند نقطة عليه هو مشتقة الاقتران عند تلك النقطة، مستعينًا بالشرح الوارد في بداية الدرس.
- جد ميل منحنى الاقتران باستعمال المشتقة.
- قدِّر الميل برسم المماس إنْ توافر وقت لذلك.
- قارِن بين طريقة تقدير الميل وإيجاد الميل باستعمال المشتقة من حيث دقة الناتج، وصعوبة الحل، والوقت المُستغرَق في ذلك.

! تنبيه: لا تقبل إجابات الطلبة التقريبية عند إيجاد الميل باستعمال المشتقة.

مثال 4 فرع 2

- ارسم التمثيل البياني للاقتران الوارد في هذا المثال.
- وضِّح للطلبة النقاط التي يساوي عندها الميل صفرًا، مستعينًا بالنشاط الوارد في بداية الوحدة.
- ذكِّر الطلبة أن الميل يساوي صفرًا عندما يكون المماس موازيًا للمحور x.
- اشرح للطلبة الطريقة الجبرية لإيجاد النقاط التي يساوي عندها الميل صفرًا، ثم قارن ذلك بالإجابة الناتجة من التمثيل البياني للاقتران.

مثال إضافي

إذا كانَ $f(x) = x^3 - 2x^2 - 15x + 6$، فجد كلًّا ممّا يأتي باستعمال المشتقة:

1. ميل منحنى $f(x)$ عند النقطة $A(-2, 20)$
2. قيم x التي يساوي عندها ميل منحنى الاقتران صفرًا.
3. قيم x التي يساوي عندها ميل منحنى الاقتران 5

1) $m = 5$

2) $x = 3, x = -\frac{5}{3}$

3) $x = -2, x = \frac{10}{3}$

مثال 5: من الحياة

- ذكِّر الطلبة أنه يمكن إيجاد السرعة باستعمال منحنى المسافة – الزمن.
- نبِّه الطلبة إلى أن القيمة تُمثِّل السرعة اللحظية، لا السرعة المتوسطة.
- أخبر الطلبة أن اقتران التسارع هو مشتقة اقتران السرعة.
- وضِّح للطلبة أن قيمة التسارع موجبة لأن السرعة تزداد.

2 قيمةُ x التي يكونُ عندها ميلُ منحنى الاقترانِ صفرًا.

بمساواةِ المشتقةِ بالصفرِ	$f'(x) = 0$
بتعويضِ قيمةِ المشتقةِ	$6x - 18 = 0$
بجمعِ 18 للطرفيْنِ	$6x = 18$
بقسمةِ الطرفيْنِ على 6	$x = 3$

إذنْ، قيمةُ x التي يكونُ عندها ميلُ منحنى الاقترانِ صفرًا هيَ $x = 3$.

أتحقق من فهمي

إذا كانَ $f(x) = 5x^2 + 25x - 9$، فأستعملُ المشتقةَ لإيجادِ كلٍّ ممّا يأتي: انظر الهامش

a) ميلُ منحنى $f(x)$ عندما $x = -2$.

b) قيمةُ x التي يكونُ عندها ميلُ منحنى الاقترانِ صفرًا.

معلومةٌ

السرعةُ اللحظيةُ تساوي مشتقةَ اقترانِ المسافةِ عندَ لحظةٍ ما.
التسارعُ اللحظيُّ يساوي مشتقةَ اقترانِ السرعةِ عندَ لحظةٍ ما.

تعرَّفْتُ سابقًا أنَّ ميلَ منحنى المسافةِ – الزمنِ في لحظةٍ ما (عندَ نقطةٍ مُحدَّدةٍ) يساوي السرعةَ اللحظيةَ عندَ تلكَ النقطةِ، وبصورةٍ مشابهةٍ فإنَّ ميلَ منحنى السرعةِ – الزمنِ في لحظةٍ ما يساوي التسارعَ اللحظيَّ.

أستطيعُ الآنَ إيجادَ كلٍّ منَ السرعةِ اللحظيةِ، والتسارعِ اللحظيِّ باستعمالِ المشتقةِ بسهولةٍ منْ دونِ حاجةٍ إلى تقديرِ ميلِ المنحنى باستعمالِ المماسِّ كما في الدرسِ السابقِ.

مثال 5: من الحياة

يُمثِّلُ الاقترانُ $d(t) = 0.6t^3 - 1.5t - 0.9$ المسافةَ (بالمترِ) التي يقطعُها جسمٌ مُتحرِّكٌ، حيثُ t الزمنُ بالثانيةِ:

1 أَجِدُ سرعةَ الجسمِ بعدَ 3 ثوانٍ منْ بَدءِ حركتِهِ.

السرعةُ هيَ مشتقةُ اقترانِ المسافةِ. أفترضُ أنَّ اقترانَ السرعةِ هوَ $v(t)$.

إذنْ، $v(t) = d'(t)$.

المطلوبُ هوَ $v(3) = d'(3)$، التي تُمثِّلُ السرعةَ اللحظيةَ عندما $t = 3$.

مشتقةُ اقترانِ المسافةِ	$d'(t) = 1.8t^2 - 1.5$
تعريفُ اقترانِ السرعةِ	$v(t) = d'(t) = 1.8t^2 - 1.5$
بتعويضِ $t = 3$	$v(3) = d'(3) = 1.8(3)^2 - 1.5$
بالتبسيطِ	$= 14.7\ \text{m/s}$

إذنْ، سرعةُ الجسمِ بعدَ 3 ثوانٍ منْ بَدءِ حركتِهِ هيَ 14.7 m/s

إجابة أتحقق من فهمي 4:

a) $m = 5$ b) $x = -2.5$

2 أَجِدُ تسارعَ الجسمِ بعدَ 5 ثوانٍ منْ بَدءِ حركتِهِ.

التسارعُ هوَ مشتقةُ اقترانِ السرعةِ. أفترضُ أنَّ اقترانَ التسارعِ هوَ $a(t)$.

إذنْ، $a(t) = v'(t)$.

المطلوبُ هوَ $a(5) = v'(5)$، التي تُمثِّلُ التسارعَ عندما $t = 5$.

$a(t) = v'(t) = 3.6t$ مشتقةُ اقترانِ السرعةِ

$a(5) = 3.6(5)$ بتعويضِ $t = 5$

$a(5) = 18$ بالتبسيطِ

إذنْ، تسارعُ الجسمِ بعدَ 5 ثوانٍ منْ بَدءِ حركتِهِ هوَ 18 m/s^2

أتعلَّمُ

تكونُ قيمةُ التسارعِ صفرًا إذا كانَتِ السرعةُ ثابتةً.

أتحقق من فهمي

يُمثِّلُ الاقترانُ $d(t) = 2.5t^2 + 0.1t - 0.3$ المسافةَ (بالمترِ) التي يقطعُها جسمٌ مُتحرِّكٌ، حيثُ t الزمنُ بالثانيةِ. أَجِدُ سرعةَ الجسمِ وتسارعَهُ عندما $t = 3$. انظر الهامش

أتدرب وأحل المسائل

أَجِدُ مشتقةَ كلٍّ منَ الاقتراناتِ الآتيةِ:

1 $f(x) = -7$ $f'(x) = 0$

2 $g(x) = 3x^9$ $g'(x) = 27x^8$

3 $r(x) = -5x^2$ $r'(x) = -10x$

4 $i(x) = x^4 - 3x$ $i'(x) = 4x^3 - 3$

5 $v(x) = x^2 + x + 1$ $v'(x) = 2x + 1$

6 $t(x) = 6 - 2x + x^2$ $t'(x) = -2 + 2x$

أَجِدُ قيمةَ $f'(-2)$ في كلٍّ ممّا يأتي:

7 $f(x) = \frac{3}{5}x^3 + x^4 - 2x + 7$ -26.8

8 $f(x) = x^{99} + \sqrt{2}\,x$ $3.137435236 \times 10^{31}$

9 $f(x) = \frac{7\pi}{18}$ 0

10 أَجِدُ النقطةَ التي يكونَ عندها ميلُ منحنى الاقترانِ $f(x) = 2x^2 - 10$ هوَ 12 $x = 3$

يُمثِّلُ الاقترانُ $d(t) = t^3 - 6t + 3$ المسافةَ (بالمترِ) التي يقطعُها جسمٌ مُتحرِّكٌ، حيثُ t الزمنُ بالثانيةِ:

11 أَجِدُ الاقترانَ $v(t)$ الذي يُمثِّلُ سرعةَ الجسمِ في أيِّ لحظةٍ (t ثانيةً). $v(t) = 3t^2 - 6$

12 أَجِدُ سرعةَ الجسمِ عندما $t = 3$. 21 m/s

13 أَجِدُ الزمنَ t عندما تكونُ السرعةُ 6 m/s $t = 2$

14 أَجِدُ الاقترانَ $a(t)$ الذي يُمثِّلُ تسارعَ الجسمِ، حيثُ t الزمنُ بالثانيةِ. $a(t) = 6t$

15 أَجِدُ تسارعَ الجسمِ عندما $t = 5$. 30 m/s^2

70

إجابة أتحقق من فهمي 5:

السرعة: 15.1 m/s

التسارع: 5 m/s^2

تنبيه: في أثناء شرح المثال الخامس، لا تذكر للطلبة أن التسارع هو المشتقة الثانية لاقتران المسافة؛ لأنهم لا يعرفون ذلك في هذه المرحلة.

4 التدريب

- وجِّه الطلبة إلى قراءة الأسئلة في بند (**أتدرب وأحل المسائل**)، ثم اطلب إليهم حلها.
- تجوَّل بين الطلبة مُرشِدًا، ومُساعِدًا، ومُوجِّهًا، وقدِّم لهم التغذية الراجعة.
- إذا واجه بعض الطلبة صعوبة في حل أي مسألة، فاختر طالبًا تمكَّن من حل المسألة، واطلب إليه كتابة حله على اللوح.

الواجب المنزلي:

- اطلب إلى الطلبة أن يحلوا في البيت جميع المسائل الواردة في الصفحة السادسة عشرة من كتاب التمارين، مُحدِّدًا لهم المسائل التي يمكنهم حلها في نهاية كل حصة بحسب ما يُقدَّم من أمثلة الدرس وأفكاره.
- يمكن أيضًا إضافة المسائل التي لم يحلها الطلبة داخل غرفة الصف إلى الواجب البيتي.
- في اليوم التالي، اطَّلِع على حلول الطلبة، وناقِشهم في أي صعوبات واجهوها في أثناء الحل.

منهاجي

متعة التعليم الهادف

مهارات التفكير العليا

- أشرِك الطلبة كافةً في حل هذه المسائل؛ لتنمية مهارات التفكير العليا لديهم.
- تذكَّر أنه ليس شرطًا أن يتمكَّن الطلبة كافةً من حل المسائل جميعها، ولكن يجب عليهم أن يحاولوا حلها.
- اطلب إلى الطلبة -ضمن مجموعات- حل المسائل في بند (**مهارات التفكر العليا**)، ثم اطلب إلى أفراد بعضها بيان كيفية توصُّلهم إلى الحل في كل مسألة، وامنح الآخرين فرصة نقد إجابات زملائهم وتقويمها.
- شجِّع الطلبة على تبرير إجاباتهم.
- نبِّه الطلبة عند حل السؤال 30 إلى أن النقطة المعطاة تُحقِّق معادلة المنحنى، وأن المشتقة عندئذٍ تساوي صفرًا، وأنه يمكنهم تكوين معادلتين بالمتغيرين a,b وحلهما.
- وجِّه الطلبة عند حل السؤال 31 إلى إيجاد الزمن الذي تكون عنده السرعة 98 m/s، ثم حساب ارتفاع القذيفة في تلك اللحظة.

5 الإثراء

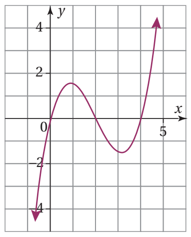
- وجِّه الطلبة إلى البحث في شبكة الإنترنت أو مكتبة المدرسة عن تطبيقات حياتية للمشتقات.
- أكِّد للطلبة وجوب توثيق المعلومة دائمًا.

تعليمات المشروع:

- اطلب إلى الطلبة البدء بتنفيذ الخطوة 5 من المشروع.
- وجِّه الطلبة إلى تنظيم إجراءاتهم وتوثيقها بنسخ صورة للشاشة في كل خطوة (print screen).
- تابع أفراد المجموعات في أثناء تنفيذ مشروع الوحدة، وزوِّدهم بتغذية راجعة وإرشادات لتحسينه.

6 الختام

- اطرح على الطلبة الأسئلة الآتية:
  » ما الفرق بين تقدير الميل برسم المماس وإيجاد الميل باستعمال المشتقة؟
  » أيهما أدق؟
  » هل يستحيل أحيانًا رسم المماس؟



يُمثِّلُ الشكلُ المجاورُ منحنى الاقترانِ $f(x) = 0.5x^3 - 3x^2 + 4x$:

16 أَجِدُ $f'(x)$. $f'(x) = 1.5x^2 - 6x + 4$

17 أَجِدُ ميلَ منحنى الاقترانِ عندَ نقاطِ تقاطعِهِ معَ محورِ x.

17) $f'(0) = 4$, $f'(2) = -2$, $f'(4) = 4$,

18 أُحدِّدُ على المنحنى النقطةَ التي يساوي عندها الميلُ 1 $x = 2+\sqrt{2}$, $x = 2-\sqrt{2}$

19 أُحدِّدُ على المنحنى النقطةَ التي يساوي عندها الميلُ 2 $x = \frac{6+2\sqrt{6}}{3}$, $x = \frac{6-2\sqrt{6}}{3}$

20 أَجِدُ معادلةَ مماسِّ منحنى الاقترانِ $f(x)=3x^3+2$ عندَ النقطةِ التي يكونُ إحداثيُّ x لها 1 $y - 5 = 9(x-1)$

تقعُ النقطةُ $P(-2, b)$ على منحنى الاقترانِ $g(x) = 3x^3 - x^2 - 7x + 4$:

21 أَجِدُ قيمةَ b. $b = -10$

22 أَجِدُ قيمةَ x التي يكونُ عندها ميلُ منحنى الاقترانِ صفرًا. $x = 1$, $x = -\frac{7}{9}$

إذا كانَتْ قيمةُ الميلِ عندما $x = 2$ لمنحنى المعادلةِ $y = x^3 - 2ax$، حيثُ a عددٌ ثابتٌ، هيَ -12

23 أَجِدُ قيمةَ الثابتِ a. $a = 12$

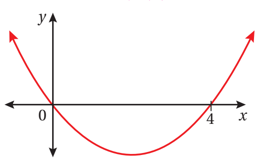
24 أَجِدُ قيمةَ ميلِ المنحنى عندما $x = 4$. 24

أَجِدُ $f'(x)$ في كلٍّ ممّا يأتي:

27 $f(x) = (x+3)(x-3)$ $f'(x) = 2x$

26 $f(x) = (x+2)(x+5)$ $f'(x) = 2x + 7$

25 $f(x) = 2x\,(x+1)$ $f'(x) = 4x + 2$



28 يُبيِّنُ الشكلُ المجاورُ التمثيلَ البيانيَّ للاقترانِ $f(x) = kx\,(x-4)$، حيثُ k عددٌ حقيقيٌّ. أَجِدُ قيمةَ k إذا كانَ ميلُ المنحنى عندَ النقطةِ $(4, 0)$ هوَ 2 $k = 0.5$

مهارات التفكير العليا

29 **تبريرٌ:** أُثبِتُ وجودَ نقطتيْنِ على منحنى الاقترانِ $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 5x + 4$، تكونُ عندَهُما مشتقةُ الاقترانِ تساوي 4، ثمَّ أَجِدُ إحداثيَّيْ هاتيْنِ النقطتيْنِ، مُبرِّرًا إجابتي. انظر ملحق الإجابات

30 **تحدٍّ:** أَجِدُ قيمَ a, b إذا كانَ ميلُ منحنى الاقترانِ $y = ax^3 + bx^2 + 5$ عندَ النقطةِ $(2, -3)$ هوَ صفرًا. انظر ملحق الإجابات

31 **تحدٍّ:** أُطلِقَتْ قذيفةٌ رأسيًّا إلى الأعلى، فكانَ ارتفاعُها عنْ سطحِ الأرضِ h بالمترِ بعدَ t ثانيةً منْ إطلاقِها $h(t) = -4.9t^2 + 147t$. ما ارتفاعُ القذيفةِ عنِ الأرضِ عندما تكونُ سرعتُها 98 m/s؟ انظر ملحق الإجابات

تنبيه على سؤال: وجِّه الطلبة إلى فك الأقواس أولًا في الأسئلة (25 –28)، ثم اشتقاق الاقترانات الناتجة.

منهاجي
متعة التعليم الهادف

الدرس 3

نتاجات الدرس

- يجد القيم العظمى والقيم الصغرى لكثيرات الحدود.
- يحل مسائل حياتية عن القيم العظمى والقيم الصغرى لكثيرات الحدود.

التعلم القبلي:

- تعرف القطع المكافئ، وإيجاد رأس القطع المكافئ.
- إيجاد مشتقة كثيرات الحدود.
- إيجاد الميل باستعمال المشتقة.

1 التهيئة

- اكتب على اللوح أي اقتران تربيعي، مثل: $f(x) = x^2 - 2x + 1$
- اسأل الطلبة عن أقل قيمة ممكنة لـ $f(x)$ قد تنتج عند التعويض في الاقتران.
- اسأل الطلبة عن إحداثيات رأس القطع المكافئ.
- ارسم على اللوح التمثيل البياني للاقتران التربيعي، ثم اسألهم:
  » ما أقل قيمة للاقتران؟
- اطرح على الطلبة السؤال الآتي:
  » هل توجد طريقة جبرية لمعرفة أقل قيمة وأكبرها لـ $f(x)$؟

الدرس 3

القيمُ العظمى والقيمُ الصغرى
Maximum and Minimum Values

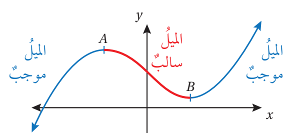
فكرةُ الدرسِ إيجادُ القيمِ العظمى والقيمِ الصغرى المحليةِ لكثيراتِ الحدودِ.

المصطلحاتُ نقطةٌ حرجةٌ، قيمةٌ عظمى، قيمةٌ صغرى.

مسألةُ اليومِ تُمثِّلُ المعادلةُ $d = -16t^2 + 75t + 2.5$ المسافةَ (بالقدمِ) التي قطعَتْها كرةٌ بعدَ ركلِها، حيثُ t الزمنُ بالثانيةِ. ما أقصى ارتفاعٍ تصلُهُ الكرةُ؟

تُسمّى النقطةُ التي يكونُ عندها ميلُ منحنى كثيرِ الحدودِ صفرًا **النقطةَ الحرجةَ** (critical point).

في الشكلِ المجاورِ، A وَ B نقطتانِ حرجتانِ؛ لأنَّ ميلَ المنحنى عندَ كلٍّ منْهُما صفرٌ.



تُسمّى القيمةُ d في النقطةِ $A(c, d)$ التي إشارةُ ميلِ المنحنى عنْ يسارِها موجبةٌ، وعنْ يمينِها سالبةٌ، **القيمةَ العظمى المحليةَ** (local maximum)؛ لأنَّها أكبرُ منَ القيمِ المجاورةِ لها. وتُسمّى القيمةُ h في النقطةِ $B(e, h)$ التي إشارةُ ميلِ المنحنى عنْ يسارِها سالبةٌ، وعنْ يمينِها موجبةٌ، **القيمةَ الصغرى المحليةَ** (local minimum)؛ لأنَّها أصغرُ منَ القيمِ المجاورةِ لها.

لغةُ الرياضياتِ
يشيرُ مصطلحُ (النقطةُ الحرجةُ) إلى النقطةِ (x, y)، ويشيرُ مصطلحُ (القيمةُ الحرجةُ) إلى الإحداثيِّ y للنقطةِ الحرجةِ.

مثال 1

أستعملُ المشتقةَ لإيجادِ القيمِ العظمى والقيمِ الصغرى للاقترانِ $f(x) = x^3 - 12x + 4$ (إنْ وُجِدَتْ).

الخطوةُ 1: أَجِدُ القيمَ الحرجةَ؛ أيْ قيمَ x التي ميلُ المنحنى عندها صفرٌ.

$f'(x) = 3x^2 - 12$	مشتقةُ الاقترانِ
$3x^2 - 12 = 0$	بمساواةِ المشتقةِ بالصفرِ
$3x^2 = 12$	بجمعِ 12 للطرفيْنِ
$x^2 = 4$	بقسمةِ الطرفيْنِ على 3
$x = \pm 2$	بأخذِ الجذرِ التربيعيِّ للطرفيْنِ

إذنْ، توجدُ نقطتانِ حرجتانِ لمنحنى الاقترانِ عندما $x = -2$ وَ $x = 2$؛ لأنَّ مشتقةَ الاقترانِ تساوي صفرًا عندَ هاتيْنِ النقطتيْنِ.

أتعلَّمُ
يمكنُ استعمالُ برمجيةِ جيوجبرا لإيجادِ القيمِ العظمى والقيمِ الصغرى، وذلكَ باختيارِ Extremum منْ شريطِ الأدواتِ، ثمَّ نقرِ المنحنى، فتظهرُ إحداثياتُ نقاطِ القيمِ القصوى على يسارِ الشاشةِ.

2 الاستكشاف

- وجِّه الطلبة إلى قراءة المسألة في بند (**مسألة اليوم**)، ثم اسألهم:
  - » ما شكل المسار الذي تسلكه الكرة؟ قطع مكافئ.
  - » ماذا يحدث لسرعة الكرة بعد ركلها؟ تتناقص سرعتها حتى تصل إلى الصفر، ثم تهبط الكرة إلى الأرض.
  - » كيف يمكن معرفة أقصى ارتفاع تصله الكرة هندسيًّا؟ رسم منحنى المسافة–الزمن، وملاحظة أقصى ارتفاع من الرسم.
  - » هل توجد طريقة جبرية لمعرفة أقصى ارتفاع تصله الكرة؟ نعم.
  - » كيف يمكن الاستفادة من درس الاشتقاق في معرفة أقصى ارتفاع؟ إيجاد سرعة الكرة بالاشتقاق، ثم جعل السرعة صفرًا لإيجاد الزمن وتعويضه بمعادلة المسافة.
- استمع لإجابات الطلبة من دون تقديم تغذية راجعة لهم، ثم اسألهم:
  - » من يؤيد الإجابة؟
  - » من لديه إجابة أُخرى؟
  - » اذكرها.

وذلك لتعزيز مهارات التواصل واحترام الرأي والرأي الاخر لديهم. بعد ذلك وضح لهم أنهم سيتعرفون في هذا الدرس ما يمكنهم من الإجابة عن هذه المسألة ومسائل مشابهة، ثم اكتب العنوان على اللوح.

تعزيز اللغة ودعمها

كرِّر المصطلحات الرياضية المستخدمة في الدرس باللغتين العربية والإنجليزية، وشجِّع الطلبة على استعمالها، مثل: المشتقة (derivative)، والميل (slope)، والنقطة الحرجة (critical point)، والقيمة الصغرى (minimum)، والقيمة العظمى (maximum).

3 التدريس

- وظِّف الشرح الوارد قبل المثال الأول من كتاب الطالب في توضيح معنى النقاط الحرجة، وكيفية إيجاد القيم العظمى والقيم الصغرى.

مثال 1

- استعمل المشتقة لإيجاد النقطتين اللتين يساوي عندهما الميل صفرًا، مُبيِّنًا للطلبة أنهما نقطتان حرجتان.
- اختبر إشارة الميل (المشتقة) حول كل نقطة، ثم صنِّفها إلى عظمى وصغرى باستعمال جدول الإشارات.
- استعمل التمثيل البياني لتصنيف النقاط الحرجة إلى عظمى وصغرى، بوصف ذلك طريقةً بديلةً عن الإشارات.

ملاحظات المعلم

الخطوةُ 2: لتحديدِ أيُّ النقاطِ الحرجةِ يوجدُ عندها قيمةٌ عظمى أوْ قيمةٌ صغرى للاقترانِ، أختبرُ إشارةَ ميلِ المنحنى حولَ كلٍّ منْهُما، وذلكَ بتعويضِ بعضِ القيمِ القريبةِ منْها.

x	-2.1	-2	-1.9
$f'(x)$	1.23	0	-1.17
إشارةُ الميلِ	موجبةٌ		سالبةٌ

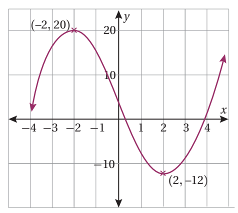
x	1.9	2	2.1
$f'(x)$	-1.17	0	1.23
إشارةُ الميلِ	سالبةٌ		موجبةٌ

تتغيَّرُ إشارةُ ميلِ المنحنى حولَ $x = -2$ منْ موجبةٍ إلى سالبةٍ؛ لذا توجدُ قيمةٌ عظمى عندما $x = -2$، هيَ $f(-2) = 20$، وتتغيَّرُ إشارةُ ميلِ المنحنى حولَ $x = 2$ منْ سالبةٍ إلى موجبةٍ؛ لذا توجدُ قيمةٌ صغرى عندما $x = 2$، هيَ $f(2) = -12$.

أُفكِّرُ

لماذا لا توجدُ قيمٌ عظمى وقيمٌ صغرى للاقترانِ الثابتِ؟
لماذا لا توجدُ قيمٌ عظمى وقيمٌ صغرى للاقترانِ الخطِّيِّ الذي مجالُهُ مجموعةُ الأعدادِ الحقيقيةِ؟

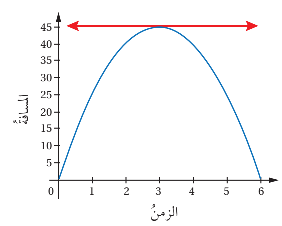
طريقةٌ بديلةٌ: يُمكِنُ أيضًا تحديدُ إذا كانَ يوجدُ عندَ النقطةِ الحرجةِ قيمةٌ عظمى أوْ قيمةٌ صغرى للاقترانِ بتمثيلِ منحنى الاقترانِ بيانيًّا. فعندَ تمثيلِ منحنى الاقترانِ $f(x)$ بيانيًّا في الشكلِ المجاورِ، فإنَّ النقطةَ $(-2, 20)$ تبدو أعلى منَ النقاطِ المجاورةِ لها على المنحنى، وبذلكَ تساوي القيمةُ العظمى 20، وتبدو النقطةُ $(2, -12)$ أخفضَ منَ النقاطِ المجاورةِ لها ، وبذلكَ تساوي القيمةُ الصغرى -12



أتحققُ من فهمي انظر الهامش

أَجِدُ القيمَ العظمى والقيمَ الصغرى للاقترانِ $g(x) = 2x^3 - 6x - 15$ (إنْ وُجِدَتْ).

يُمثِّلُ الإحداثيُّ الصاديُّ y للنقطةِ التي يتغيَّرُ عندها اتجاهُ حركةِ الجسمِ منَ الصعودِ إلى الهبوطِ قيمةً عظمى لمنحنى المسافةِ– الزمنِ؛ لأنَّ مشتقةَ المنحنى عندَ تلكَ النقطةِ تساوي صفرًا (المماسُّ أفقيٌّ)؛ لذا يُمكِنُ استعمالُ المشتقةِ لتحديدِ النقطةِ التي يبلغُ عندها الجسمُ أقصى ارتفاعٍ.



73

أخطاء مفاهيمية:

- قد يخلط الطلبة من ذوي المستوى دون المتوسط بين مفهوم النقطة الحرجة والقيمة العظمى والقيمة الصغرى؛ لذا بيِّن لهم الفرق بينها، مُذكِّرًا إيّاهم أن كل نقاط القيم القصوى هي نقاط حرجة، وأن كل نقطة حرجة ليست نقطة قيمة قصوى؛ إذ يجب أن تتغيَّر إشارة المشتقة (الميل) حول النقطة الحرجة لتكون نقطة قيمة قصوى.
- قد يخطئ بعض الطلبة في اختبار الإشارة حول النقطة الحرجة عند تصنيفها إلى عظمى وصغرى بالتعويض في الاقتران؛ لذا صحِّح لهم ذلك، مُبيِّنًا أنه يجب التعويض في المشتقة التي تُمثِّل الميل.

إجابة أتحقق من فهمي 1 :

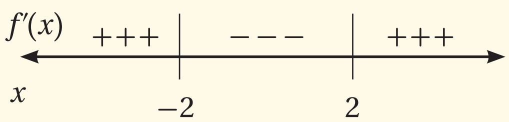
له قيمة عظمى عند $x = -1$ هي $f(-1) = 11$

وله قيمة صغرى عند $x = 1$ هي $f(1) = -19$

تنويع التعليم

يمكن اختبار إشارة المشتقة حول النقاط الحرجة في المثال الأول باستعمال خط الأعداد وحساب المشتقة عند عدد واحد في كل قسم من الأقسام التي قُسِّم إليها خط الأعداد لتحديد إشارتها:

$$f'(-3) = 3(-3)^2 - 12 = 27 - 12 = 15,$$
$$f'(0) = 3(0)^2 - 12 = 0 - 12 = -12,$$
$$f'(3) = 3(3)^2 - 12 = 27 - 12 = 15$$



تنبيه:

- في هذا الدرس، يتعيَّن على الطلبة معرفة القيم العظمى والقيم الصغرى من دون تصنيفها إلى محلية ومطلقة؛ فلا تذكر لهم ذلك.
- لا تذكر للطلبة النقطة التي لا تكون عندها مشتقة الاقتران موجودة بوصفها نقطةً حرجةً؛ لأن المطلوب منهم فقط في هذه المرحلة هو كثير الحدود.

إرشادات للمعلم

بعد شرح المثال الأول، أثبِت للطلبة أنه لا توجد قيم عظمى وقيم صغرى للاقتران الثابت والاقتران الخطي، وذلك بحل مثال على كلٍّ منهما على اللوح، مستعينًا برسم التمثيل البياني لكل اقتران.

التقويم التكويني:

- وجِّه الطلبة إلى حل التدريب في بند (**أتحقق من فهمي**) بعد كل مثال (فرديًّا، أو ضمن مجموعات).
- تجوَّل بين الطلبة مُرشِدًا، ومُساعِدًا، ومُوجِّهًا، وقدِّم لهم التغذية الراجعة.
- اختر بعض الإجابات التي تحوي أخطاء مفاهيمية، ثم ناقِشها على اللوح، ولا تذكر اسم الطالب الذي أخطأ في الإجابة؛ تجنبًا لإحراجه.

مثال إضافي

- جـد القيـم العظمـى والقيـم الصغـرى للاقتران $f(x) = 3x^2 - x$ (إن وُجِدت) باستعمال المشتقة.

القيمــة الصغرى للاقتران عندمـا $x = 0$ هي $f(0) = 0$، والقيمة العظمى له عندما $x = 2$ هي $f(2) = 4$

مثال 2: من الحياة

- وظِّف التمثيــل البياني الوارد بعــد المثال الأول من كتاب الطالب فــي توضيح أقصى ارتفاع قد يصل إليه الجسم قبل البدء بشرح المثال الثاني.
- ناقِش الطلبة فــي المثال الثاني؛ باشــتقاق الاقتران، ومســاواة المشــتقة بالصفر، وإيجاد النقطة الحرجة، واختبار إشــارة المشــتقة حولها للتأكُّد أنها عظمى، ثم التعويض في الاقتــران لإيجاد أقصى ارتفاع تصله الكرة.

تنويع التعليم:

يمكن شــرح المثال الثاني عن طريق رسم التمثيل البياني للاقتران، وإيجاد أكبر قيمة تُمثِّل أقصى ارتفاع تصله الكرة.

إرشادات للمعلم

اســتعمل برمجية جيوجبرا لإيجــاد القيم العظمى والقيم الصغرى بنقر أيقونة Extremum ، ونقر المنحنى بعد رسم منحنى الاقتران.

مثال إضافي

يُمثِّل الاقتران $h(t) = 6 + 4t - t^2$ ارتفاع كرة عن سطح الأرض بالمتر بعد t ثانية من ركلها:

1. جد سرعة الكرة بعد ثانية واحدة من ركلها.

$2\ m/s$

2. جد أقصى ارتفاع تصله الكرة.

$10\ m$

مثال 2: من الحياة

يُمثِّلُ الاقترانُ $h(t) = 1 + 25t - 5t^2$ ارتفاعَ كرةٍ عنْ سطحِ الأرضِ بالمترِ بعدَ t ثانيةً منْ ركلِها:

1 أَجِدُ سرعةَ الكرةِ بعدَ 3 ثوانٍ منْ ركلِها.

يُمثِّلُ الاقترانُ المُعطى $h(t)$ ارتفاعَ الكرةِ (المســافةُ الرأســيةُ). ومنَ المعلومِ أنَّ مشــتقةَ اقترانِ المسافةِ تساوي اقترانَ السرعةِ. لإيجادِ سرعةِ الكرةِ بعدَ 3 ثوانٍ، أُعوِّضُ $t = 3$ في $h'(t)$:

$h(t) = 1 + 25t - 5t^2$ اقترانُ الارتفاعِ

$h'(t) = 25 - 10t$ مشتقةُ اقترانِ الارتفاعِ

$h'(3) = 25 - 10(3)$ بتعويضِ $t = 3$ في $h'(t)$

$= -5$ بالتبسيطِ

إذنْ، سرعةُ الكرةِ بعدَ 3 ثوانٍ هيَ $-5\ m/s$

2 أَجِدُ أقصى ارتفاعٍ تصلُهُ الكرةُ.

يُمثِّلُ أقصى ارتفاعٍ تصلُ إليْهِ الكرةُ قيمةً عظمى لاقترانِ الارتفاعِ $h(t)$.

لإيجادِ القيمةِ العظمى، أُحدِّدُ القيمَ التي تُحقِّقُ المعادلةَ $h'(t) = 0$:

$h'(t) = 25 - 10t$ مشتقةُ اقترانِ الارتفاعِ

$25 - 10t = 0$ بمساواةِ المشتقةِ بالصفرِ

$25 = 10t$ بجمعِ $10t$ للطرفيْنِ

$t = 2.5$ بقسمةِ الطرفيْنِ على 10

تتغيَّرُ إشارةُ ميلِ المنحنى منْ موجبةٍ إلى سالبةٍ؛ لذا توجدُ قيمةٌ عظمى عندما $t = 2.5$

t		2.5	
إشارةُ الميلِ	+ + +	0	− − −

إذنْ، تصلُ الكرةُ أقصى ارتفاعٍ عندما $t = 2.5\ s$ ، وقيمةُ هذا الارتفاعِ هيَ $h(2.5)$:

$h(2.5) = 1 + 25(2.5) - 5(2.5)^2$ بتعويضِ $t = 2.5$ في $h(t)$

$= 32.25$ بالتبسيطِ

إذنْ، أقصى ارتفاعٍ تصلُهُ الكرةُ هوَ $32.25\ m$

> **أتعلَّمُ**
>
> سرعةُ الكرةِ هيَ $5\ m/s$، والإشارةُ الســالبةُ تدلُّ علــى أنَّ الكــرةَ غيَّرَتِ اتجاهَ حركتِها، وأخذَتْ تهبطُ نحوَ الأرضِ، وأنَّ ارتفاعَها عنِ الأرضِ في تناقصٍ.

> **أتعلَّمُ**
>
> بمــا أنَّ مشــتقةَ اقترانِ المســافةِ هــيَ اقتــرانُ الســرعةِ، فإنَّ القيمَ التي تســاوي عندها مشــتقةُ اقترانِ المسافةِ صفرًا هيَ القيــمُ التي تنعدمُ عندها السرعةُ.

أتحقق من فهمي

يُمثِّــلُ الاقترانُ $h(t) = 20t - 5t^2$ ارتفاعَ حجرٍ عنْ ســطحِ الأرضِ بالمترِ بعدَ t ثانيةً منْ قذفِهِ إلى الأعلى: انظر الهامش

a) أَجِدُ سرعةَ الحجرِ بعدَ ثانيتيْنِ منْ قذفِهِ.

b) أَجِدُ أقصى ارتفاعٍ يصلُهُ الحجرُ.

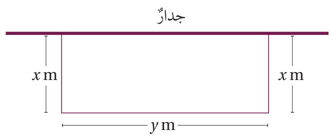
إجابة أتحقق من فهمي 2:

a) $0\ m/s$ b) $20\ m$

إذا مثَّلَ الاقترانُ $f(x)$ مِساحةَ منطقةٍ ما، فإنَّ القيمةَ الكبرى للمِساحةِ تساوي القيمةَ العظمى للاقترانِ، والقيمةَ الصغرى للمِساحةِ تساوي القيمةَ الصغرى للاقترانِ.

مثال 3: من الحياة

جدارٌ: لدى مُزارِعٍ 32 m منَ السياجِ، أرادَ أنْ يُسيِّجَ بهِ حظيرةً مستطيلةً، طولُها y مترًا، وعرضُها x مترًا، بجانبِ جدارٍ يكونُ أحدَ أضلاعِ هذهِ الحظيرةِ:



1 **أُبيِّنُ أنَّ الاقترانَ $A(x) = x(32-2x)$ يُمثِّلُ مِساحةَ الحظيرةِ.**

طولُ السياجِ 32 m؛ لذا، فإنَّ $x + y + x = 32$

إذنْ، طولُ الحظيرةِ $y = 32-2x$، ومِساحتُها $x(32-2x)$ مترًا مُربَّعًا.

2 **أَجِدُ $A'(x)$.**

$A(x) = x(32-2x)$ اقترانُ المِساحةِ

$A(x) = 32x-2x^2$ بتوزيعِ الضربِ على الطرحِ

$A'(x) = 32-4x$ مشتقةُ اقترانِ المِساحةِ

3 **أستعملُ المشتقةَ لإيجادِ قيمةِ x التي تجعلُ مِساحةَ الحظيرةِ أكبرَ ما يُمكِنُ.**

لإيجادِ قيمةِ x، أحُلُّ المعادلةَ $A'(x) = 0$:

$32 - 4x = 0$ بمساواةِ المشتقةِ بالصفرِ

$32 = 4x$ بجمعِ $4x$ للطرفيْنِ

$x = 8$ بقسمةِ الطرفيْنِ على 4

أَجِدُ أكبرَ مِساحةٍ ممكنةٍ للحظيرةِ.

أُعوِّضُ قيمةَ $x = 8$ بالاقترانِ الذي يُمثِّلُ مِساحةَ الحظيرةِ.

$A(8) = 8(32-2(8))$ بتعويضِ $x = 8$ في $A(x)$

$= 128$ بالتبسيطِ

إذنْ، أكبرُ مِساحةٍ للحظيرةِ $128\ m^2$، وهيَ تنتجُ عندما يكونُ عرضُ الحظيرةِ 8 m، وطولُها 16 m

أتذكَّرُ

تُسمّى قيمُ x التي تُحقِّقُ المعادلةَ $f'(x) = 0$ قيمًا حرجةً لمنحنى الاقترانِ $f(x)$.

تنبيهٌ

تتغيَّرُ إشارةُ ميلِ المنحنى منْ موجبةٍ إلى سالبةٍ منْ يسارِ إلى يمينِ $x = 8$؛ لذا توجدُ قيمةٌ عظمى عندما $x = 8$

x	8
إشارةُ الميلِ	+ + 0 − −

مثال 3: من الحياة

- أخبر الطلبة أنه توجد عِدَّة تطبيقات للقيم العظمى والقيم الصغرى، غير السرعة والتسارع، مثل إيجاد أكبر مساحة.
- بيِّن للطلبة أن الاقتران المعطى يُمثِّل المساحة عن طريق إيجاد العلاقة بين الأبعاد والمحيط.
- وضِّح للطلبة أن المساحة تكون أكبر ما يمكن عند نقطة القيمة العظمى لاقتران المساحة.
- أكِّد للطلبة أنه يجب اختبار إشارة المشتقة حول النقطة الحرجة؛ لتصنيفها إلى عظمى وصغرى.

الإثراء

وجِّه الطلبة إلى البحث في شبكة الإنترنت عن أمثلة حياتية مشابهة للمثال الثالث.

مثال إضافي

لدى مُزارِعٍ 36 m من السياج، أراد أن يُسيِّج به حظيرة مستطيلة، طولها y مترًا، وعرضها x مترًا:

1 بيِّن أن الاقتران $A(x) = x(18-x)$ يُمثِّل مساحة الحظيرة.

$2x + 2y = 36 \Rightarrow y = 18-x$

$A(x) = x(18-x)$

2 جد $A'(x)$

$A(x) = 18x - x^2$

$A'(x) = 18 - 2x$

3 استعمل المشتقة لإيجاد قيمة x التي تجعل مساحة الحظيرة أكبر ما يمكن.

$x = 9\ m$

4 التدريب

- وجِّه الطلبة إلى قراءة الأسـئلة في بند (**أتدرب وأحل المسائل**)، ثم اطلب إليهم حلها.
- تجوَّل بين الطلبة مُرشِـدًا، ومُساعِدًا، ومُوجِّهًا، وقدِّم لهم التغذية الراجعة.
- إذا واجــه بعض الطلبــة صعوبة في حل أي مســألة، فاختر طالبًا تمكَّن من حل المسألة، واطلب إليه كتابة حله على اللوح.

الواجب المنزلي:

- اطلب إلى الطلبة أن يحلوا في البيت جميع المســائل الواردة في الصفحة السابعة عشرة من كتاب التمارين، مُحدِّدًا لهم المســائل التي يمكنهم حلها في نهاية كل حصة بحسب ما يُقدَّم من أمثلة الدرس وأفكاره.
- يمكن أيضًا إضافة المسائل التي لم يحلها الطلبة داخل غرفة الصف إلى الواجب البيتي.
- في اليوم التالي، اطَّلِع على حلول الطلبة، وناقِشهم في أي صعوبات واجهوها في أثناء الحل.

أتحقق من فهمي

بنى عزُّ الدين أسامةُ قلعةَ عجلونَ أحدُ قادة صلاح الدين الأيوبـيِّ، وذلكَ عامَ 1184م/ 580هـ. تمتـازُ هـذهِ القلعـةُ بمتانةِ بنائِهـا، وموقعِها الاستراتيجيِّ المُطِلِّ.

يُبيِّنُ الشكلُ المجاورُ صورةً مستطيلةَ الشكلِ، محيطُها 72 cm، ومساحتُها $A\text{ cm}^2$: انظر الهامش

a) أُبيِّنُ أنَّ الاقترانَ $A(x) = 36x - x^2$ يُمثِّلُ مِسـاحةَ الصورةِ.

b) أجِدُ $A'(x)$.

c) أستعملُ المشتقةَ لإيجادِ قيمةِ x التي تجعلُ مِساحةَ الصورةِ أكبرَ ما يُمكِنُ.

d) أجِدُ أكبرَ مِساحةٍ ممكنةٍ للصورةِ.

أتدرب وأحل المسائل

أستعملُ المشتقةَ لإيجادِ القيمِ العظمى والقيمِ الصغرى لكلٍّ منَ الاقتراناتِ الآتيةِ (إنْ وُجِدَتْ): 1–10) انظر ملحق الإجابات

1) $f(x) = x^2 - 4x + 3$

2) $f(x) = x^2 + 6x - 3$

3) $f(x) = 1 + 5x - x^2$

4) $f(x) = x^3 + 1.5x^2 - 18x$

5) $f(x) = 18x^2 - x^4$

6) $f(x) = 2x^3 - 6x + 4$

7) $f(x) = x^3 - 12x - 4$

8) $f(x) = 3x^2$

9) $f(x) = x^3 - 2x + 4$

10) $f(x) = x^3 + x^2 - 8x + 54$

يُمثِّلُ الاقترانُ $h(t) = 1.2 + 19.6t - 4.9t^2$ ارتفاعَ سهمٍ عنْ سطحِ الأرضِ بالمترِ بعدَ t ثانيةً منْ إطلاقِهِ:

11) أجِدُ سرعةَ السهمِ بعدَ 3 ثوانٍ. -9.8 m/s

12) أستعملُ المشتقةَ لإيجادِ أقصى ارتفاعٍ يصِلُهُ السهمُ. 20.8 m

13) يُمثِّلُ الاقترانُ $A(x) = x(50 - x)$ مِساحةَ مستطيلٍ، حيثُ x الطولُ بالمترِ. ما أكبرُ مِساحةٍ ممكنةٍ للمستطيلِ؟ 625 m^2

إجابة أتحقق من فهمي 3:

a) $2x + 2y = 72 \Rightarrow y = 36 - x$

$A(x) = x(36 - x) = 36x - x^2$

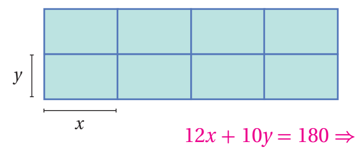
b) $A'(x) = 36 - 2x$

c) 18

d) 324 cm^2

14 للاقترانِ $f(x) = 3x^4 - 10x^3 + 6x^2 + 3$ ثلاثُ نقاطٍ حرجةٍ. أَجِدُ إحداثياتِ هذهِ النقاطِ، مُصنِّفًا إيّاها إلى عظمى، وصغرى. $(0, 3)$: صغرى، $(0.5, 3.4375)$: عظمى، $(2, -5)$: صغرى.

15 أَجِدُ قيمةَ الثابتِ k إذا كانَ للاقترانِ $f(x) = x^2 + \frac{1}{k}x$ قيمةٌ حرجةٌ عندما $x = 3$. $k = -\frac{1}{6}$



لدى مُزارِعٍ 180 m منَ الشِّباكِ، أرادَ أنْ يصنعَ منْها حظائرَ لأغنامِهِ، طولُ كلٍّ منْها x مترًا، وعرضُها y مترًا كما في الشكلِ المجاورِ:

16 أُبيِّنُ أنَّ العلاقةَ بينَ x وَy هيَ $y = 18 - 1.2x$ $12x + 10y = 180 \Rightarrow y = 18 - 1.2x$

17 أُبيِّنُ أنَّ الاقترانَ $A(x) = 144x - 9.6x^2$ يُمثِّلُ المِساحةَ الكليةَ للحظائرِ.
$A(x) = 2(18 - 1.2x)(4x)$
$= 144x - 9.6x^2$

18 أستعملُ المشتقةَ لإيجادِ قيمةِ x التي تجعلُ المِساحةَ الكليةَ للحظائرِ أكبرَ ما يُمكِنُ. $x = 7.5$

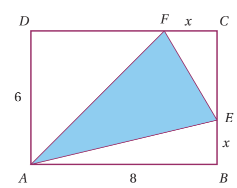
19 أَجِدُ أكبرَ مِساحةٍ كليةٍ ممكنةٍ للحظائرِ. $540\ m^2$

20 **برهانٌ:** أُثبِتُ أنَّ الاقترانَ $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 4x - 5$ ليسَ لهُ قيمٌ حرجةٌ. $f'(x) = 6x^2 + 6x + 4$
لا توجد حلول حقيقية لهذه المعادلة؛ لأن مميزها سالب.

مهارات التفكير العليا

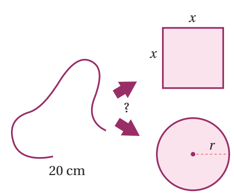
21 **تبريرٌ:** أَجِدُ قيمتَيِ الثابتيْنِ a, b إذا كانَ للاقترانِ $f(x) = x^2 + ax + b$ قيمةٌ حرجةٌ عندَ النقطةِ $(1, 3)$، ثمَّ أُحدِّدُ نوعَ القيمةِ الحرجةِ، مُبرِّرًا إجابتي. انظر ملحق الإجابات

يُبيِّنُ الشكلُ المجاورُ المثلثَ AFE الذي تقعُ رؤوسُهُ على أضلاعِ المستطيلِ $ABCD$:



22 اعتمادًا على القياساتِ المعطاةِ في الشكلِ، أُبيِّنُ أنَّ الاقترانَ $H(x) = 24 - 4x + \frac{1}{2}x^2$ يُمثِّلُ مِساحةَ المثلثِ AFE. انظر ملحق الإجابات

23 أستعملُ المشتقةَ لإيجادِ قيمةِ x التي تجعلُ مِساحةَ المثلثِ AFE أصغرَ ما يُمكِنُ. $x = 4$



24 **تحدٍّ:** سلكٌ طولُهُ 20 cm، يُرادُ قصُّهُ لعملِ مُربَّعٍ ودائرةٍ. أُحدِّدُ موقعَ القصِّ بحيثُ يكونُ مجموعُ مِساحتَيِ المُربَّعِ والدائرةِ أصغرَ ما يُمكِنُ.
انظر ملحق الإجابات

مهارات التفكير العليا

- أشرِك الطلبة كافةً في حل هذه المسائل؛ لتنمية مهارات التفكير العليا لديهم.
- تذكَّر أنه ليس شرطًا أن يتمكَّن الطلبة كافةً من حل المسائل جميعها، ولكن يجب عليهم أن يحاولوا حلها.
- اطلب إلى الطلبة – ضمن مجموعات– حل المسائل في بند (**مهارات التفكير العليا**)، ثم اطلب إلى أفراد بعضها بيان كيفية توصُّلهم إلى الحل في كل مسألة، وامنح الآخرين فرصة نقد إجابات زملائهم وتقويمها.
- شجِّع الطلبة على تبرير إجاباتهم.

5 الإثراء

- اطرح على الطلبة السؤال الآتي:
  » مجموع عدد مع ثلاثة أمثال عدد آخر أصغر منه يساوي 45، جد العددين بحيث يكون ناتج ضرب مربع العدد الصغير في العدد الكبير أكبر ما يمكن.
  10,15

تعليمات المشروع

- اطلب إلى الطلبة البدء بتنفيذ الخطوات (8–6) من المشروع.
- وجِّه الطلبة إلى تنظيم إجراءاتهم وتوثيقها بنسخ صورة (print screen) للشاشة في كل خطوة.
- أخبر الطلبة بموعد عرض مشروع الوحدة.

6 الختام

- اطرح على الطلبة السؤالين الآتيين:
  » ما الفرق بين النقطة الحرجة والقيمة العظمى والقيمة الصغرى؟
  » ما الخطوات الواجب اتباعها لإيجاد القيم العظمى والقيم الصغرى لاقتران؟
- اطلب إلى الطلبة حل السؤال الوارد في بند (**مسألة اليوم**).

التقويم الختامي:

- راجِع الطلبة في الأفكار الأساسية لدروس الوحدة.
- وزِّع الطلبة إلى مجموعــات، ثم اطلب إلى أفراد كل مجموعة حل جزء من الأســئلة، ثم عرض إجاباتهم أمام الزملاء.
- عيِّن بعض الأســئلة ليحلها الطلبة واجبًــا منزليًّا، ثم ناقِشهم في إجاباتها في اللقاء التالي.
- الفت انتباه الطلبة إلى أنَّ الأســئلة (35–31) وردت ضمن الاختبارات الدولية، أو هي مسائل مشابهة لها.

اختبارُ نهايةِ الوحدةِ

أضعُ دائرةً حولَ رمزِ الإجابةِ الصحيحةِ في ما يأتي:

1 ميلُ منحنى الاقترانِ $f(x)=3x-1$ عندَ النقطةِ $x=5$ هوَ:

a) 3   b) $\frac{1}{3}$ c) -1 d) 0

2 إذا كانَ $f(x)=x(2x+1)$، فإنَّ $f'(x)$ يساوي:

a) x b) $2x+1$ c) $2x^2+x$ d) $4x+1$

3 قيمةُ x التي عندَها قيمةٌ عظمى للاقترانِ $f(x)=(x-2)(x-3)^2$ هيَ:

a) $-\frac{7}{3}$ b) $-\frac{5}{2}$ c) $\frac{7}{3}$ d) $\frac{5}{2}$

4 إذا مثَّلَ الاقترانُ $d(t)=t^2$ المسافةَ التي يقطعُها جسمٌ مُتحرِّكٌ، حيثُ t الزمنُ بالثانيةِ، فإنَّ سرعةَ الجسمِ عندما $t=1$ هيَ:

a) 0   b) 1   c) 2   d) 4

5 أكبرُ قيمةٍ لسرعةِ جسمٍ مُتحرِّكٍ يسيرُ بسرعةٍ تُعطى بالاقترانِ $v(t)=t^3-6t^2+9t+4$، حيثُ t الزمنُ بالثانيةِ، هيَ:

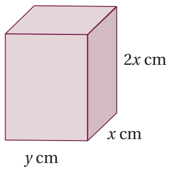
a) 3   b) 4   c) 8   d) 9

6 إذا كانَ $h(x)=2x^2+x$، فأجِدُ $h'(x)$، ثمَّ أُبيِّنُ أنَّ $x(1+h'(x))=2h(x)$. انظر ملحق الإجابات

7 إذا وقعَتِ النقطةُ $P(-1,c)$ على منحنى الاقترانِ $f(x)=5x^2+2$، فأجِدُ قيمةَ c، ثمَّ أُحدِّدُ إذا كانَ الميلُ موجبًا أو سالبًا عندَ النقطةِ P. $c=7$

الميل سالب.

8 أجِدُ معادلةَ مماسِّ منحنى الاقترانِ $f(x)=4x^3+2$ عندَ النقطةِ التي إحداثيُّ x لها -1. انظر ملحق الإجابات



يُبيِّنُ الشكلُ المجاورُ قالبًا يُستعمَلُ لصنعِ لَبِنِ البناءِ، وتبلغُ مِساحةُ سطحِهِ الكليّةُ $600\ cm^2$:

9 أُبيِّنُ أنَّ الاقترانَ $V(x)=200x-\frac{4}{3}x^3$ يُمثِّلُ حجمَ القالبِ. انظرِ ملحق الإجابات

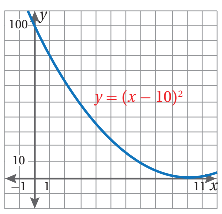
10 أستعملُ المشتقةَ لإيجادِ قيمةِ x التي تجعلُ الحجمَ أكبرَ ما يُمكِنُ. $x=\sqrt{50}$

11 أجِدُ أكبرَ حجمٍ ممكنٍ للقالبِ. $942.8\ cm^3$

12 يُمثِّلُ الاقترانُ $d(t)=t^2+1$ المسافةَ (بالمترِ) التي يقطعُها جسمٌ مُتحرِّكٌ، حيثُ t الزمنُ بالثانيةِ. أجِدُ السرعةَ بعدَ ثانيتيْنِ، ثمَّ أجِدُ الزمنَ t عندما تبلغُ السرعةُ 6 m/s

4 m/s $t=3$ s

أطلقَتْ سيّارةُ سُمَيَّةَ جرسَ إنذارٍ لتعبئةِ الوَقودِ، فتوجَّهَتْ إلى محطةِ الوَقودِ.



يُمثِّلُ المنحنى في الشكلِ المجاورِ العلاقةَ بينَ الزمنِ والمسافةِ المُتبقِّيةِ حتى وصلَتْ سُمَيَّةُ إلى المحطةِ:

13 أجِدُ سرعةَ السيّارةِ بعدَ ثانيتيْنِ منَ انطلاقِ جرسِ تعبئةِ الوَقودِ. −16 m/s

14 أجِدُ سرعةَ السيّارةِ بعدَ 10 ثوانٍ. 0 m/s

اختبارُ نهايةِ الوحدةِ

أَجِدُ مشتقةَ كلٍّ منَ الاقتراناتِ الآتيةِ:

15 $f(x) = 2\pi^3$ **16** $f(x) = x^8$ (15–20) انظر ملحق الإجابات

17 $f(x) = -3x^4$ **18** $f(x) = x$

19 $f(x) = 1-2x$ **20** $f(x) = 4-5x^2 + x^3$

أستعملُ المشتقةَ لإيجادِ القيمِ العظمى والقيمِ الصغرى لكلٍّ منَ الاقتراناتِ الآتيةِ (إنْ وُجِدَتْ):

(21–24) انظر ملحق الإجابات

21 $f(x) = 17$ **22** $f(x) = 5x + 4$

23 $f(x) = x^2-5x + 6$ **24** $f(x)=2x^3-4x^2+2x+1$

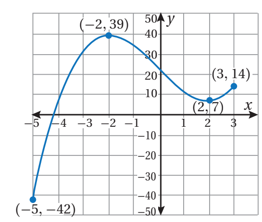
25 تُمثِّلُ العلاقةُ $d(t) = 0.6t^3 - 1.5t - 0.9$ المسافةَ (بالمترِ) التي يقطعُها جسمٌ مُتحرِّكٌ، حيثُ t الزمنُ بالثانيةِ. ما الزمنُ الذي تساوي عندَهُ السرعةُ 14.7m/s؟

$t = 3$ s

26 أَجِدُ قيمةَ الثابتِ k إذا كانَ للاقترانِ $f(x) = kx - x^3$ نقطةٌ حرجةٌ عندما $x = -1$

$k = 3$

اعتمادًا على التمثيلِ البيانيِّ الآتي:



27 أُحدِّدُ الفترةَ (الفتراتِ) التي يكونُ عندها ميلُ المنحنى موجبًا.

الفترتان: $(-\infty, -2)$، و $(2, \infty)$

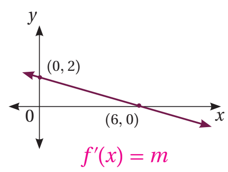
28 أُحدِّدُ الفترةَ (الفتراتِ) التي يكونُ عندها ميلُ المنحنى سالبًا.

$(-2, 2)$

29 أُحدِّدُ النقطةَ (النقاطَ) التي يكونُ عندها ميلُ المنحنى صفرًا.

النقطتان: $(-2, 39)$، و $(2, 7)$

30 إذا كانَ المستقيمُ في الشكلِ المجاورِ هوَ منحنى الاقترانِ $f(x)$، فأَجِدُ $f'(x)$.



$f'(x) = m$

ميل هذا المستقيم هو: $m = \frac{2-0}{0-6} = \frac{-1}{3}$

تدريبٌ على الاختباراتِ الدوليةِ

أضعُ دائرةً حولَ رمزِ الإجابةِ الصحيحةِ في ما يأتي:

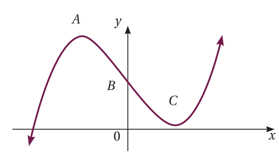
31 جميعُ قيمِ x التي عندها قيمٌ عظمى أوْ قيمٌ صغرى للاقترانِ $f(x) = 3x^5 - 5x^3 + 15$ هيَ:

a) $-1, 0, 1$ b) $-1, 0$
c) $0, 1$ d) $-1, 1$

32 عددُ النقاطِ الحرجةِ للاقترانِ $f(x) = (x-3)^9$ هوَ:

a) 1 b) 2 c) 8 d) 9

يُمثِّلُ الشكلُ المجاورُ منحنى الاقترانِ $f(x) = x^3-12x + 17$ الذي لهُ قيمةٌ عظمى عندَ النقطةِ A، وقيمةٌ صغرى عندَ النقطةِ C، ويقطعُ محورَ y عندَ النقطةِ B:



33 أَجِدُ $f'(x)$. $f'(x) = 3x^2 - 12$

34 أَجِدُ ميلَ منحنى الاقترانِ $f(x)$ عندَ النقطةِ B. -12

35 أَجِدُ إحداثيَّيْ كلٍّ منَ النقطتيْنِ A وَ C.

$A = (-2, 33)$
$B = (2, 1)$

79

تنبيه للسؤال 32 :

ورد خطأ مطبعي في كتابة اقتران هذا السؤال والاقتران الصحيح هو $f(x) = (x-3)^2$

تدريبٌ على الاختباراتِ الدوليةِ

يتقدَّم طلبة الصفين: الرابع والثامن في المدارس الأردنية إلى اختبار (TIMSS): كل أربع سنوات. ويهدف هذا الاختبار إلى قياس مستوى تقدُّم الطلبة في التحصيل الدراسي في مادتي الرياضيات والعلوم. ولهذا الاختبار أهمية في تقييم جودة التعليم في الأردن مقارنةً بالدول الأُخرى التي يتقدَّم طلبتها لهذا الاختبار، والمساعدة على رسم السياسة التربوية على المستوى الوطني بما يخدم تطوير النظام التربوي، والارتقاء بنوعية مخرجاته.

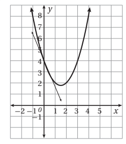
يتقدَّم أيضًا طلبة الصف العاشر في الأردن لاختبار البرنامج الدولي لتقييم أداء الطلبة PISA)

The Program for International Students Assessment: في مجالات القراءة، والرياضيات، والعلوم. وفي ما يخص الرياضيات، فإن المعرفة الرياضية – وفق هذا البرنامج– يُعبَّر عنها بمدى قدرة الفرد على صياغة الرياضيات، وتوظيفها، وتفسيرها في أوضاع مختلفة؛ إذ تتضمن القدرة على التفكير الرياضي، واستعمال المفاهيم والإجراءات والحقائق والأدوات لوصف الظواهر، والتنبُّؤ بها. وهي تسعى لمساعدة صانعي القرارات وراسمي السياسات التربوية في الدول المشاركة على تحديد معايير حقيقية وواقعية لأداء نظمها التربوية، وتُعينهم على تقييم النجاحات أو الإخفاقات، علمًا بأن الأردن يشارك في دورات هذه الدراسات والبرامج بانتظام منذ أوائل تسعينيات القرن العشرين.

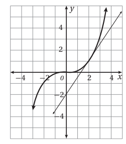
يتعيَّن عليك – عزيزي المعلِّم– تشجيع الطلبة على الاهتمام بحل هذه الأسئلة، والمشاركة في الدراسات وبرامج التقييم الدولية بكل جدية، وتضمين امتحاناتك المدرسية نوعية هذه الأسئلة.

كتاب التمارين

الدرسُ 1 تقديرُ ميلِ المنحنى



1 يُمثِّلُ المستقيمُ في الشكلِ المجاورِ مماسًّا لمنحنى الاقترانِ $y = x^2 - 3x + 4$ عندَ النقطةِ $A(0, 4)$. أُقدِّرُ ميلَ منحنى الاقترانِ عندَ النقطةِ A. −2,6 ، أو إجابة قريبة منها.



2 يُمثِّلُ المستقيمُ في الشكلِ المجاورِ مماسًّا لمنحنى الاقترانِ $y = \frac{1}{8}x^3$ عندَ النقطةِ $A(2, 1)$. أُقدِّرُ ميلَ منحنى الاقترانِ عندَ النقطةِ A.
$m = \frac{3}{2}$

3 أُقدِّرُ ميلَ منحنى الاقترانِ $y = x^3 - 3x + 1$ عندَ النقطةِ $(2, 3)$.
انظر رسوم الطلبة، واقبل الإجابات القريبة من 9

4 أُقدِّرُ ميلَ منحنى الاقترانِ $y = 4x - 3x^2$ عندَ النقطةِ $(2, -4)$.
انظر رسوم الطلبة، واقبل الإجابات القريبة من −8

5 يُمثِّلُ الاقترانُ $d(t) = 40t - 16t^2$ المسافةَ التي يقطعُها جسمٌ مُتحرِّكٌ، حيثُ d المسافةُ المقطوعةُ بالمترِ، وَ t الزمنُ بالثواني. أُقدِّرُ سرعةَ الجسمِ اللحظيةَ بعدَ ثانيتيْنِ. انظر رسوم الطلبة، واقبل الإجابات القريبة من −24

أرسمُ منحنى الاقترانِ $f(x)$ في الفترةِ $-2 \le x \le 2$ باستعمالِ جدولِ القيمِ المجاورِ:

x	−2	−1	0	1	2
$f(x)$	−7	−2	1	2	1

6 أرسمُ مماسًّا لمنحنى الاقترانِ عندَ النقطةِ $(2, 1)$. انظر ملحق الإجابات

7 أُقدِّرُ ميلَ منحنى الاقترانِ عندَ النقطةِ $(2, 1)$. −2 (اقبل إجابات الطلبة القريبة من ذلك).

8 ما إحداثياتُ النقطةِ التي يكونُ ميلُ المنحنى عندَها صفرًا؟ $(1, 2)$

أرسمُ منحنى الاقترانِ $f(x)$ في الفترةِ $-1 \le x \le 3$ باستعمالِ جدولِ القيمِ المجاورِ:

x	−1	0	1	2	3
$f(x)$	4	1	0	1	4

9 أرسمُ مماسًّا لمنحنى الاقترانِ عندَ النقطةِ $(2, 1)$. انظر ملحق الإجابات

10 أُقدِّرُ ميلَ منحنى الاقترانِ عندَ النقطةِ $(2, 1)$. 2 (اقبل إجابات الطلبة القريبة من ذلك).

11 ما إحداثياتُ النقطةِ التي يكونُ ميلُ المنحنى عندَها صفرًا؟ $(1, 0)$

الدرسُ 2 الاشتقاقُ

أَجِدُ مشتقةَ كلِّ اقترانٍ ممّا يأتي:

1 $f(x) = -\frac{7}{3}$ $f'(x) = 0$

2 $f(x) = \frac{8}{5}$ $f'(x) = 0$

3 $f(x) = -6x$ $f'(x) = -6$

4 $f(x) = 3.2x$ $f'(x) = 3.2$

5 $f(x) = 3x^{41}$ $f'(x) = 123x^{40}$

6 $f(x) = -x^{64}$ $f'(x) = -64x^{63}$

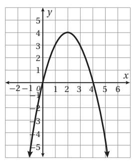
7 $f(x) = x^3 - 4x^2 + 3$ $f'(x) = 3x^2 - 8x$

8 $f(x) = 7x^3 + 6x^2 - x$ $f'(x) = 21x^2 + 12x - 1$

9 $f(x) = (x + 4)(x - 2)$ $f'(x) = 2x + 2$

10 $f(x) = (x - 5)^2$ $f'(x) = 2x - 10$

أستعملُ التمثيلَ البيانيَّ لمنحنى الاقترانِ $f(x) = 4x - x^2$ في الشكلِ المجاورِ للإجابةِ عنِ الأسئلةِ الآتيةِ:



11 أَجِدُ $f'(x)$. $f'(x) = 4 - 2x$

12 أَجِدُ ميلَ منحنى الاقترانِ عندَ نقطتَيْ تقاطعِهِ معَ محورِ x
الميل عند $(0, 0)$ هو: 4، وعند $(4, 0)$ هو: −4

13 أُحدِّدُ على المنحنى النقطةَ التي يكونُ عندَها الميلُ 1 $(1.5, 3.75)$

14 أُحدِّدُ على المنحنى النقطةَ التي يكونُ عندَها الميلُ −2 $(3, 3)$

أَجِدُ قيمةَ $f'(-1)$ في كلٍّ ممّا يأتي:

15 $f(x) = x^2 - 3x + 1$ $f'(-1) = -5$

16 $f(x) = x^3 - x^2 - 2$ $f'(-1) = 5$

17 أَجِدُ النقطةَ التي يكونُ عندَها ميلُ منحنى $f(x) = x^2 - 5x + 6$ يساوي −9 $(-2, 20)$

إذا كانَ $f(x) = x^2 + 5x + 7$، فأستعملُ المشتقةَ لإيجادِ كلٍّ ممّا يأتي:

18 ميلُ المنحنى $f(x)$ عندَما $x = 2$ 9

19 قيمةُ x التي يكونُ عندَها ميلُ منحنى $f(x)$ يساوي 0 −2.5

20 تُمثِّلُ العلاقةُ $d(t) = 2t^3 - 5t^2 + 3t + 4$ المسافةَ (بالمترِ) التي يقطعُها جسمٌ مُتحرِّكٌ، حيثُ t الزمنُ بالثواني.
أَجِدُ سرعةَ الجسمِ عندَما $t = 2$ 7 m/s

21 إذا كانَ $f(x) = a\,x^n + b$، حيثُ a، وَ b عددانِ حقيقيانِ، وَ n عددٌ صحيحٌ غيرُ سالبٍ، فأَجِدُ $f'(x)$ $f'(x) = nax^{n-1}$

الدرسُ 3 القيمُ العظمى والقيمُ الصغرى

أَجِدُ القيمَ العظمى والقيمَ الصغرى لكلٍّ منَ الاقتراناتِ الآتيةِ (إنْ وُجِدَتْ): (1–10) انظر ملحق الإجابات

1 $f(x) = 2$

2 $f(x) = -3$

3 $f(x) = 2x - 1$

4 $f(x) = 5x + 3$

5 $f(x) = x^2 + 2x + 1$

6 $f(x) = x^2 - 8x + 7$

7 $f(x) = x^3 - 6x^2 + 5$

8 $f(x) = x^3 + 6x^2 - 15x$

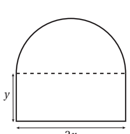
9 $f(x) = x^3(4 - x)$

10 $f(x) = (x + 1)(x - 2)$

11 أَجِدُ قيمةَ الثابتِ k، علمًا بأنَّ للاقترانِ $f(x) = kx^2 + x$ قيمةً حرجةً عندَما $x = 1$ $k = -0.5$

12 أَجِدُ العدديْنِ الموجبيْنِ اللذيْنِ مجموعُهُما 150، وحاصلُ ضربِهِما أكبرُ ما يُمكِنُ. $x = 75, y = 75$

13 يُمثِّلُ الاقترانُ $A(x) = x(9 - x)$ مِساحةَ غرفةٍ مستطيلةٍ في مُخطَّطٍ أَعدَّتْهُ المهندسةُ شفاءُ، حيثُ x الطولُ بالمترِ.
أَجِدُ أكبرَ مِساحةٍ ممكنةٍ للغرفةِ. $20.25\ m^2$



يُمثِّلُ الشكلُ المجاورُ حديقةً محيطُها 80 m، وهيَ على شكلِ مستطيلٍ طولُهُ $2x$ مترًا، وعرضُهُ y مترًا، وبجانبِهِ نصفُ دائرةٍ:

انظر ملحق الإجابات

14 أُبيِّنُ أنَّ الاقترانَ $A(x) = 80x - (2 + \frac{\pi}{2})x^2$ يُمثِّلُ مِساحةَ الحديقةِ.

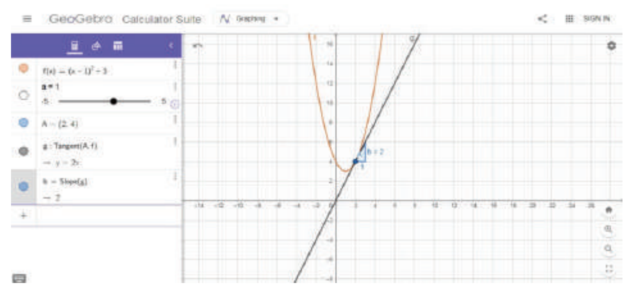
15 أستعملُ المشتقةَ لإيجادِ قيمةِ x التي تجعلُ مِساحةَ الحديقةِ أكبرَ ما يُمكِنُ. $x = 11.202$

16 أَجِدُ أكبرَ مِساحةٍ ممكنةٍ للحديقةِ. $448.08\ m^2$

17 أَجِدُ قيمتَيِ الثابتيْنِ a, b إذا كانَ للاقترانِ $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + ax + b$ قيمةٌ حرجةٌ عندَ النقطةِ $(-4, -3)$، ثمَّ أُحدِّدُ نوعَ القيمةِ الحرجةِ، مُبرِّرًا إجابتي. انظر ملحق الإجابات

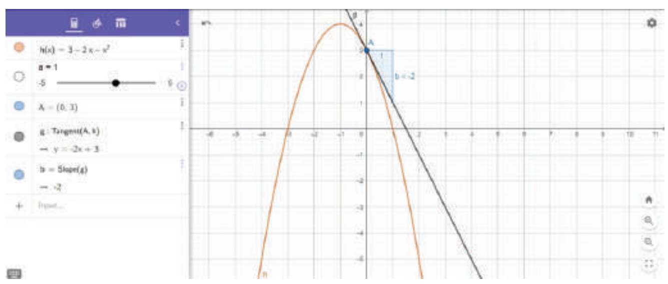
معمل برمجية جيوجبرا:

1)



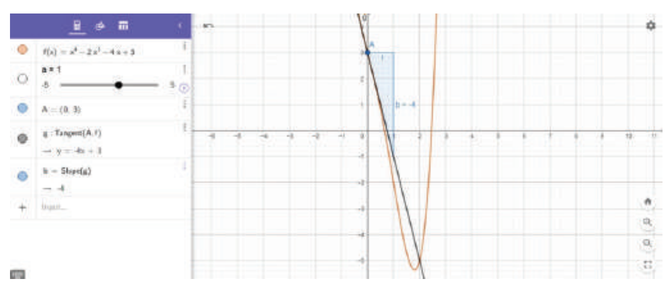
يكون الميل سالبًا لكل $x < 1$، وصفرًا عندما $x = 1$، وموجبًا لكل $x > 1$

2)



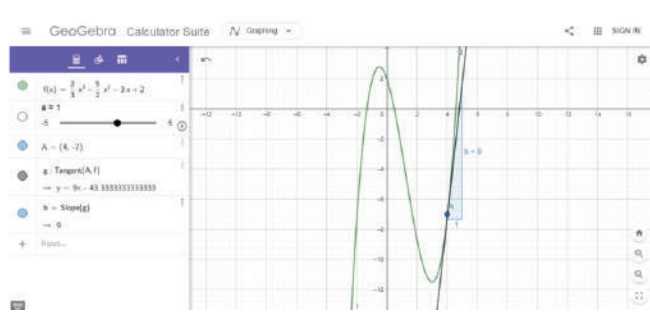
يكون الميل موجبًا لكل $x < -1$، وصفرًا عندما $x = -1$، وسالبًا لكل $x > -1$

3)



يكون الميل سالبًا لكل $x < 1.81$، وصفرًا عندما $x = 1.81$، وموجبًا لكل $x > 1.81$

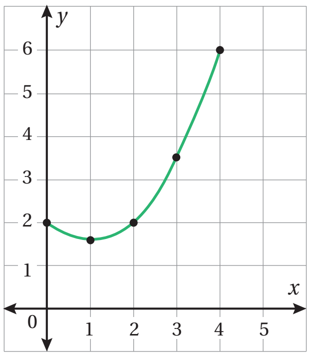
4)



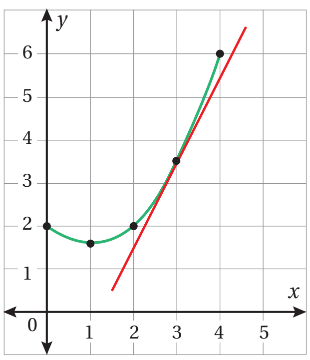
يكون الميل سالبًا لكل $-0.5 < x < 3$، وصفرًا عندما $x = -0.5$، و $x = 3$، وموجبًا لكل $x > 3$، ولكل $x < -0.5$

الدرس 1:

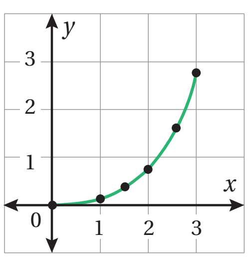
4)



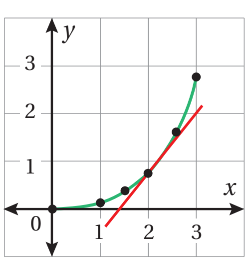
5)



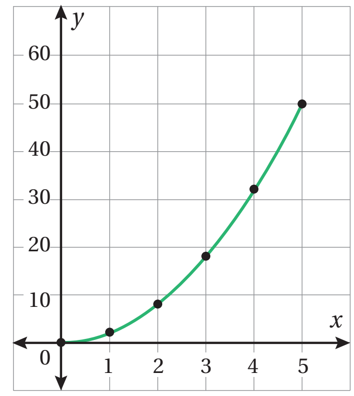
8)



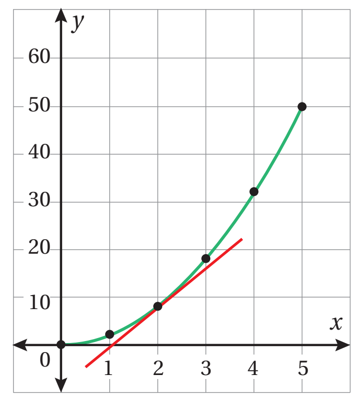
9)



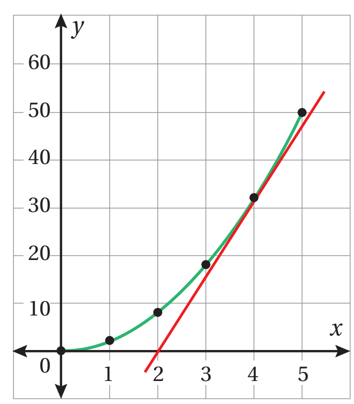
(17



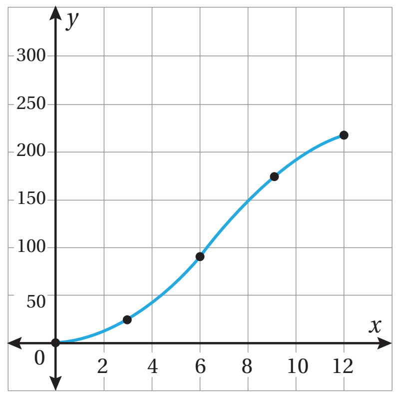
(18



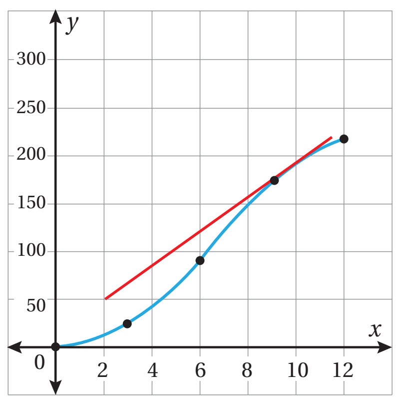
(20



(21



(22 أي إجابة قريبة من 18.75 m/s



(23 بتعويض $(3, 26.19)$ في المعادلة ينتج: $9a+ 81b = 26.19$

وبتعويض $(6, 95.04)$ في المعادلة ينتج: $36a+ 1296b=95.04$

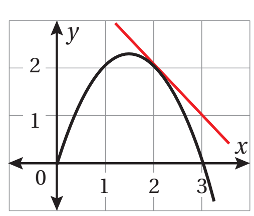
وبضرب المعادلة الأولى في (-4) وجمعها مع الثانية ينتج:

$972b = -9.72$ ، إذن: $b = -0.01$

وبتعويض قيمة b في المعادلة الأولى نجد أن: $a = 2.82$

(24 ارسم المنحنى ومماسًّا عند $(2, 2)$، مُقدِّرًا ميله.

(اقبل من الطلبة أي إجابة قريبة من -1).



25) انظر رسوم الطلبة.

يتقاطع المنحنى مع المحور x عند $(8, 0)$ و $(-2, 0)$، وميله عند $(8, 0)$ هو 10 (اقبل إجابات الطلبة القريبة)، حيث يصنع المماس عندها زاوية حادة مع المحور x، وميله عند $(-2, 0)$ هو -10 (اقبل إجابات الطلبة القريبة)، حيث يصنع المماس عندها زاوية منفرجة مع المحور x يتقاطع المنحنى مع المحور y عند $(0, -16)$، وميله عندها هو -6 (اقبل إجابات الطلبة القريبة)، حيث يصنع المماس عندها زاوية منفرجة مع المحور x

26) انظر رسوم الطلبة.

اقبل إجابات الطلبة التي تُمثِّل اقترانًا من الدرجة الثانية ومماسين عند نقطتين متقابلتين متعاكستين حول محور تماثل المنحنى.

سيختار معظم الطلبة الاقتران $f(x) = x^2$ لسهولته؛ لذا حفِّزهم إلى ذكر أمثلة غيره.

الدرس 2:

29) $f'(x) = x^2 - 5$

$x^2 - 5 = 4 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3$

وبتعويض قيم x في الاقتران، نجد الإحداثي y

$f(-3) = 10, f(3) = -2$

إذن، النقطتان، هما: $(-3, 10), (3, -2)$

30) $y' = 3ax^2 + 2bx$

النقطة $(2, -3)$ واقعة على المنحنى، فتُحقِّق معادلته، إذن:

$8a + 4b + 5 = -3 \Rightarrow 8a + 4b = -8$

والميل عندئذٍ هو صفر؛ أي إن:

$8a(2)^2 + 4b(2) = 0 \Rightarrow 12a + 4b = 0$

بحل هاتين المعادلتين، نجد أن:

$a = 2$ و $b = -6$

31) السرعة هي: $h'(t) = -9.8t + 147$

وعندما تكون السرعة 98 m/s، فإن:

$-9.8t + 147 = 98 \Rightarrow t = 5$

ارتفاع القذيفة عن الأرض عندما $t = 5$ هو: $h(5)$

$h(5) = -4.9(5)^2 + 147(5) = 612.5$ m

الدرس 3:

1) $(2, -1)$: صغرى

2) $(-3, -12)$: صغرى

3) $(2.5, 7.25)$: عظمى

4) $(-3, 40.5)$: عظمى

$(2, -22)$: صغرى

5) $(0, 0)$: صغرى

$(-3, 81)$: عظمى

$(3, 81)$: عظمى

6) $(-1, 8)$: عظمى

$(1, 0)$: صغرى

7) $(-2, 12)$: عظمى

$(2, -20)$: صغرى

8) $(0, 0)$: صغرى

9) $\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}, 5.09\right)$: عظمى

$\left(\sqrt{\frac{2}{3}}, 2.9\right)$: صغرى

10) $(-2, 66)$: عظمى

$\left(\frac{4}{3}, 47.48\right)$: صغرى

21) $f'(x) = 2x + a$

$f'(1) = 2x + a = 0 \Rightarrow a = -2$

$f'(1) = 1 + -2 + b = 3 \Rightarrow b = 4$

عند النقطة $(1, 3)$ قيمة صغرى؛ لأن إشارة المشتقة تتغيَّر من سالبة إلى موجبة من يسار $x = 1$ إلى يمينه، حيث إن $f'(0) = -2, f'(1) = 2$

22) $H(x) = 48 - \left[\left(\frac{1}{2}(x)(6-x)\right) + \left(\frac{1}{2}(8)(x)\right) + \left(\frac{1}{2}(6)(8-x)\right)\right]$

24) $A_1 = x^2$ مساحة المربع.

$d_1 = 4x$ محيط المربع.

$A_2 = \pi r^2$ مساحة الدائرة.

$d_2 = 2\pi r$ محيط الدائرة.

$$4x + 2\pi r = 20 \Rightarrow x = \frac{20-2\pi r}{4}$$

$$A = x^2 + \pi r^2$$

$$= \left(\frac{20-2\pi r}{4}\right)^2 + \pi r^2$$

$$= \left(\frac{1}{4}\pi^2 + \pi\right) r^2 - 5\pi r + 25$$

$$A' = \left(\frac{1}{2}\pi^2 + 2\pi\right) r - 5\pi$$

$$\left(\frac{1}{2}\pi^2 + 2\pi\right) r - 5\pi = 0 \Rightarrow r \approx 1.4$$

$$\Rightarrow x \approx 2.8$$

موقع القص يكون تقريبًا على بُعْد 11.2 cm من طرف السلك. يُكوِّن هذا الجزء مربعًا، ويُكوِّن الجزء الآخر دائرة محيطها 8.8 cm

اختبار نهاية الوحدة:

6) $h'(x) = 4x + 1$

$x(1 + 4x + 1) = 4x^2 + 2x = 2h(x)$

8) $f'(x) = 12x^2 \Rightarrow f'(-1) = 12$

$m = 12 \qquad f(-1) = -2$

معادلة المماس هي:

$y + 2 = 12(x + 1) \Rightarrow y = 12x + 10$

9) $2(xy) + 2(2xy) + 2(2x^2) = 600 \Rightarrow y = \frac{100}{x} - \frac{2}{3}x$

$$V(x) = \left(\frac{100}{x} - \frac{2}{3}x\right)(x)(2x)$$

$$= 200x - \frac{4}{3}x^3$$

15) $f'(x) = 0$

16) $f'(x) = 8x^7$

17) $f'(x) = -12x^3$

18) $f'(x) = 1$

19) $f'(x) = -2$

20) $f'(x) = -10x + 3x^2$

21) لا توجد قيم عظمى وقيم صغرى.

22) لا توجد قيم عظمى وقيم صغرى.

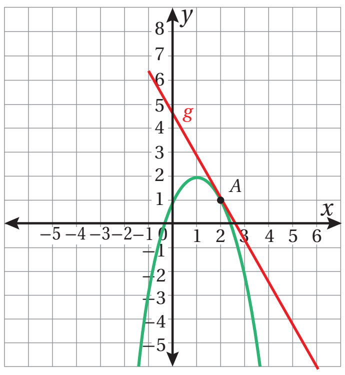
23) $(2.5, -0.25)$: صغرى

24) $(\frac{1}{3}, 1.296)$: عظمى

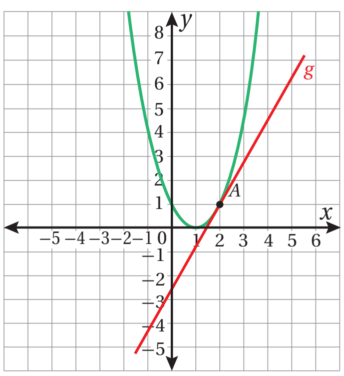
$(1, 1)$: صغرى

كتاب التمارين – الدرس 1:

6)



9)



كتاب التمارين – الدرس 3:

1) لا توجد قيم صغرى وقيم عظمى.

2) لا توجد قيم صغرى وقيم عظمى.

3) لا توجد قيم صغرى وقيم عظمى.

4) لا توجد قيم صغرى وقيم عظمى.

5) له قيمة صغرى عندما $x = -1$، هي: 0

6) له قيمة صغرى عندما $x = 4$، هي: -9

7) له قيمة عظمى عندما $x = 0$، هي: 5

له قيمة صغرى عندما $x = 4$، هي: -27

8) له قيمة عظمى عندما $x = -5$، هي: 100

له قيمة صغرى عندما $x = 1$، هي: -8

9) له قيمة عظمى عندما $x = 3$، هي: 27

10) له قيمة صغرى عندما $x = 0.5$، هي: -2.25

14) $x + 2y + \pi x = 80 \Rightarrow y = 40 - \frac{\pi}{2}x - x$

$A(x) = 2xy + \frac{1}{2}\pi x^2$

$= 2x\left(40 - \frac{\pi}{2}x - x\right) + \frac{1}{2}\pi x^2$

$= 80x - \pi x^2 - 2x^2 + \frac{1}{2}\pi x^2$

$= 80x - \frac{\pi}{2}x^2 - 2x^2 = 80x - \left(\frac{\pi}{2} + 2\right)x^2$

17) $a = 2, b = 1$

صغرى؛ لأن إشـــارة المشتقة تتغيَّر من ســالبة قبل -4 إلى موجبة بعدها، حيث:

$f'(-5) = -0.2, f'(-2) = 1$