١١

الجزء
الأول

بسم الله الرحمن الرحيم

دولـة فلسطين
وزارة التربية والتعليم

الرياضيـــــات

الفرع العلمي والصناعي

فريق التأليف:

أ. وهيب جبر (منسقاً)
أ. حسين عرفات
أ. رائد ملاك
أ. عبد الحافظ الخطيب
أ. عريب الزبون

مركز المناهج

أ. قيس شبانة
أ. نسرين دويكات

قررت وزارة التربية والتعليم في دولة فلسطين
تدريس هذا الكتاب في مدارسها بدءاً من العام الدراسي ٢٠١٧ / ٢٠١٨م

الإشراف العام

رئيس لجنة المناهج	د. صبري صيدم
نائب رئيس لجنة المناهج	د. بصري صالح
رئيس مركز المناهج	أ. ثروت زيد

الدائـــرة الفنية

الإشراف الإداري والفني	أ. كمال فحماوي

التحكيم العلمي	د. محمد نجيب
التحـرير اللغوي	أ. عمر عبد الرحمن
متابعة المحافظات الجنوبية	د. سمية النخالة

الطبعة الثانية
٢٠١٩ م/ ١٤٤٠ هـ

دولـــة فلسطين
وزارة التربية والتعليم
مركز المناهج

حي الماصيون، شارع المعاهد
ص. ب 719 - رام الله - فلسطين
pcdc.mohe@gmail.com | pcdc.edu.ps

mohe.ps | mohe.pna.ps | moehe.gov.ps
.com/MinistryOfEducationWzartAltrbytWaltlym
هاتف 2983280-2-970+ | فاكس 2983250-2-970+

تـقـديـم

يتصف الإصلاح التربوي بأنه المدخل العقلاني العلمي النابع من ضرورات الحالة، المستند إلى واقعية النشأة، الأمر الذي انعكس على الرؤية الوطنية المطورة للنظام التعليمي الفلسطيني في محاكاة الخصوصية الفلسطينية والاحتياجات الاجتماعية، والعمل على إرساء قيم تعزز مفهوم المواطنة والمشاركة في بناء دولة القانون، من خلال عقد اجتماعي قائم على الحقوق والواجبات، يتفاعل المواطن معها، ويعي تراكيبها وأدواتها، ويسهم في صياغة برنامج إصلاح يحقق الآمال، ويلامس الأماني، ويرنو لتحقيق الغايات والأهداف.

ولما كانت المناهج أداة التربية في تطوير المشهد التربوي، بوصفها علماً له قواعده ومفاهيمه، فقد جاءت ضمن خطة متكاملة عالجت أركان العملية التعليمية التعلمية بجميع جوانبها، بما يسهم في تجاوز تحديات النوعية بكل اقتدار، والإعداد لجيل قادر على مواجهة متطلبات عصر المعرفة، دون التورط بإشكالية التشتت بين العولمة والبحث عن الأصالة والانتماء، والانتقال إلى المشاركة الفاعلة في عالم يكون العيش فيه أكثر إنسانية وعدالة، وينعم بالرفاهية في وطن نحمله ونعظمه.

ومن منطلق الحرص على تجاوز نمطية تلقّي المعرفة، وصولاً لما يجب أن يكون من إنتاجها، وباستحضار واعٍ لعديد المنطلقات التي تحكم رؤيتنا للطالب الذي نريد، وللبنية المعرفية والفكريّة المتوخّاة، جاء تطوير المناهج الفلسطينية وفق رؤية محكومة بإطار قوامه الوصول إلى مجتمع فلسطيني ممتلك للقيم، والعلم، والثقافة، والتكنولوجيا، وتلبية المتطلبات الكفيلة بجعل تحقيق هذه الرؤية حقيقة واقعة، وهو ما كان له ليكون لولا التناغم بين الأهداف والغايات والمنطلقات والمرجعيات، فقد تآلفت وتكاملت؛ ليكون النتاج تعبيراً عن توليفة تحقق المطلوب معرفياً وتربوياً وفكرياً.

ثمّة مرجعيات تؤطّر لهذا التطوير، بما يعزّز أخذ جزئية الكتب المقررّة من المنهاج دورها المأمول في التأسيس؛ لتوازن إبداعي خلّاق بين المطلوب معرفياً، وفكرياً، ووطنياً، وفي هذا الإطار جاءت المرجعيات التي تم الاستناد إليها، وفي طليعتها وثيقة الاستقلال والقانون الأساسي الفلسطيني، بالإضافة إلى وثيقة المنهاج الوطني الأول؛ لتوجّه الجهد، وتعكس ذاتها على مجمل المخرجات.

ومع إنجاز هذه المرحلة من الجهد، يغدو إزجاء الشكر للطواقم العاملة جميعها؛ من فرق التأليف والمراجعة، والتدقيق، والإشراف، والتصميم، وللجنة العليا أقل ما يمكن تقديمه، فقد تجاوزنا مرحلة الحديث عن التطوير، ونحن واثقون من تواصل هذه الحالة من العمل.

وزارة التربية والتعليم

مركز المناهج الفلسطينية

آب / ٢٠١٧

مـقـدمـة

تُعد المرحلة الثانوية (١١-١٢) آخر مراحل التعليم المدرسي حيث تشهد أَهم التّغيّرات التي يمرّ فيها الطالب وترسُم معالم شخصيته مستقبلاً،وفيها يكتسب المعارف والخبرات الأَساسية،وفي الوقت نفسه يتمتع بحياة اجتماعية سليمة ليكون عضواً فاعلاً يواكب المستجدات في المجالات العلمية والتكنولوجية بما يخدم المجتمع.

وتلعب العملية التعليمية التعلمية في هذه المرحلة دوراً كبيراً في تمكين الطلبة من المعارف والمهارات والخبرات باكتشاف المعرفة وتوظيفها في حلّ المشكلات الحياتية واتخاذ قرارات ذات علاقة بواقع حياتهم اليومية مما يُسهم في تحسين نوعية التعليم والتعلم وصولاً إِلى طلبة باحثين مبدعين ومنتجين.

وتُعدّ الرياضيات من المباحث التي تخاطب عقل الطالب وتنمّي فيه مهارات متنوعة تكسبه القدرة على التعامل المنطقي مع محيطه ومن حوله؛ وبذلك تؤدي إِلى تمكين الطالب من اكتساب معارف ومهارات واتجاهات وقيم تساعده في تنمية ذاته ومجتمعه، من خلال معرفته بمحيطه المادي والبشري وبالأَنظمة المعرفية المختلفة، وحلّ ما يواجهه من مشكلات دراسية وعلمية في حاضره ومستقبله.

وقد تضمّن هذا الكتاب أَنشطة منظمة للمفاهيم والمعارف التي تُحاكي السياقات الحياتية الواقعية وتمكنها ضمن أَنشطة معروضة بسياقات حياتية واقعية،تُحاكي البيئة الفلسطينية وخصوصيتها وتركّز على التّعلم النشط مُراعية لقدرات الطلبة وحاجاتهم ،إذ تتاح أَمامهم الفرص لتبادل الخبرات من خلال المناقشة والحوار والعمل الجماعي وبالإِفادة من وسائل تكنولوجية لتوظيفها في البحث عن المعلومات وتوظيفها بما يحقق التّعلم الفعّال.

يتكوّن هذا الكتاب من ثلاث وحدات دراسية، تناولت الوحدة الأُولى المتجهات والهندسة الفراغية ضمن أنشطة متعددة، والوحدة الثانية المنطق الرياضي وطرق البرهان وربطها مع سياقات حياتية ورياضية، والوحدة الثالثة المعادلات والمتباينات، فهي تعميق وتطوير لمعارف الطلبة السابقة.

وأَخيراً نتمنى أَن نكون قد وُفقنا في إِنجاز هذا الكتاب لما فيه خير لأولادنا ولفلسطين العزيزة.

فريق التأليف

المحتويات

الوحدة

١

المتجهات والهندسة الفراغية

لماذا يتم صناعة حامل الكاميرا بثلاثة أرجل وليس بأربعة أرجل؟

يتوقع من الطلبة بعد الإنتهاء من دراسة هذه الوحدة والتفاعل مع أنشطتها أن يكونوا قادرين على توظيف المتجهات والعمليات عليها في الحياة العمليّة من خلال الآتي:

1. تحديد النقاط في الفراغ وإيجاد المسافة بين نقطتين وإحداثيات المنتصف بين نقطتين.
2. إجراء العمليات على المتّجهات في المستوى والفراغ وطرق تمثيلها.
3. تحديد الزوايا الاتجاهية لمتجهات في الفراغ.
4. تطبيقات فيزيائية وحياتية على المتجهات.
5. توظيف المتجهات في تطبيقات فيزيائية وهندسية وحياتية.
6. إعطاء أمثلة واقعية على المُسَلّمات والنظريات في الهندسة الفراغية وتطبيقاتها.
7. تعريف الأوضاع المختلفة لكل من: مستقيمين مختلفين، ولمستقيم ومستوى، ومستويات مختلفة في الفراغ.
8. تنمية القدرة على التعبير والدقة في استخدام المصطلحات الهندسية.

١ - ١ الإحداثيات الدّيكارتية في الفراغ ثلاثي الأبعاد Cartesian Coordinates in Space

نشاط ١: الألعاب الرياضية متعددة ، ففي بعضها تكون حركة أداة اللعب في المستوى وبعضها تكون الحركة في الفراغ .

ففي لعبة الهوكي تتحرك قطعة اللعب في بعدين في المستوى وتمثل إحداثيات موقعها بالزوج المرتب (س، ص).

هل تتحرك الكرة في لعبة كرة القدم كما تتحرك قطعة اللّعب في لعبة الهوكي؟

كيف يمكن تحديد موقع الكرة في لعبة كرة القدم؟

أتذكر أنّ : المسافة بين النقطتين أ $(س_1 ، ص_1)$ ، ب$(س_2 ، ص_2)$

$$أب = \sqrt{(س_2 - س_1)^2 + (ص_2 - ص_1)^2}$$

وإحداثيات نقطة منتصف القطعة المستقيمة أب = $\left(\frac{س_1 + س_2}{2} ، \frac{ص_1 + ص_2}{2}\right)$

نشاط ٢: بالاعتماد على الخريطة الآتية إذا مثلنا موقع مدينة رام الله بالنقطة أ(٥ , ٢ ، ٥ , ٤) وموقع مدينة غزة بالنقطة ب (−٢ ، ٥ , ١). أجد المسافة بين المدينتين. (ملاحظة : كل وحدة تعادل ١٠كم والإحداثيات تقريبية).

أب= ______________________

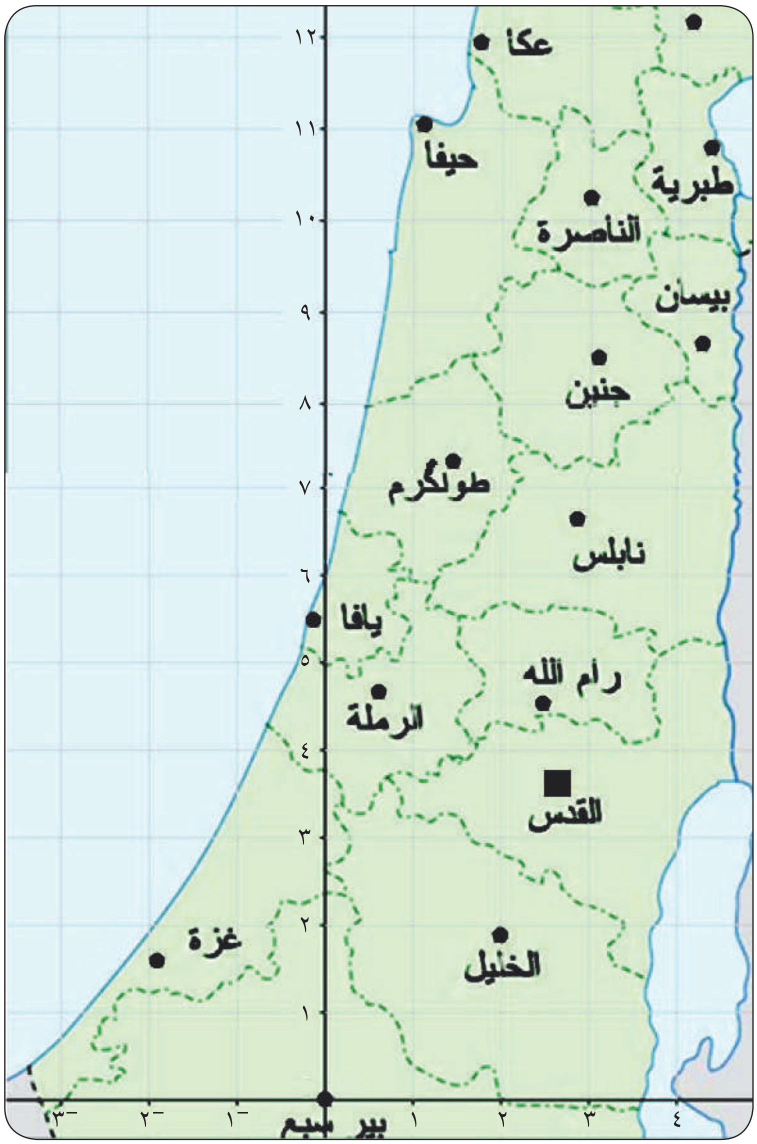
لاحظ أنّ إحداثيات موقع مدينة نابلس (٣ ، ٦ , ٦)

وإحداثيات موقع مدينة الناصرة (٣ ، ٢ , ١٠)

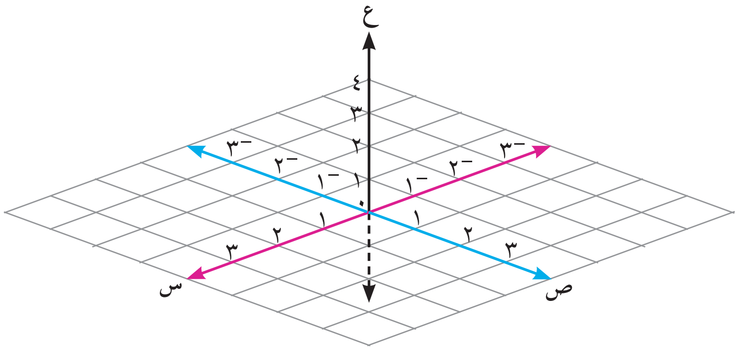
بالاعتماد على قانون إحداثيات منتصف قطعة مستقيمة، أجد إحداثيات موقع مدينة جنين والتي تقع تقريبا في منتصف المسافة بين نابلس والناصرة.

إحداثيات موقع مدينة جنين = (ــــــــــــــ ، ــــــــــــــ)

أقارن الإجابة بالرجوع إلى الخريطة. (ــــــــــــــ ، ــــــــــــــ)



إذا أردنا تحديد موقع نجم في السماء أو قمر صناعي أو طائرة أو قمة جبل، فإنّ نظام الإحداثيات ذا البعدين لا يفي بالغرض ؛ لأن هذه المواقع تمثل بنقاط في الفراغ. ولتحديد ذلك يلزمنا نظام إحداثيات ذو ثلاثة أبعاد، وهو موضح بالشكل الآتي:

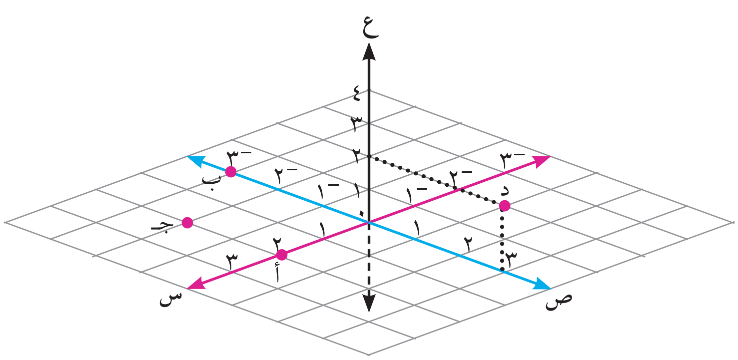


وهذا النظام يتكون من ثلاثة مستقيمات متعامدة مثنى مثنى، ومتقاطعة في نقطة واحدة تُسمّى نقطة الأصل (٠ ، ٠ ، ٠) وتُسمّى هذه المستقيمات المحاور الإحداثية، وهي بالترتيب: محور س ، محور ص ، محور ع ، وهي تقسم الفراغ إلى ثمانية أثمان تم تحديد الثمن الأول بحيث تكون س ، ص ، ع موجبة وأية نقطة في الفراغ تمثل بثلاثي مرتب أ (س ، ص ، ع) كما أنه يقسم الفراغ إلى ثلاثة مستويات رئيسة ، وهي المستوى س ص ، المستوى س ع ، المستوى ص ع.

مثال ١ : أحدّد موقع النقاط الآتية في الفراغ

أ (٢ ، ٠ ، ٠) ، ب (٠ ، ⁻٣ ، ٠) ، جـ (٢ ، ⁻٢ ، ٠) ، د (٠ ، ٣ ، ٢)

الحل : النقطة أ تقع على الجزء الموجب من محور السينات. والنقطة ب تقع على الجزء السالب من محور الصادات والنقطة جـ تقع في المستوى س ص والنقطة د تقع في المستوى ص ع .



مثال ٢ : لتحديد النقطة أ (٣ ، ٢ ، ٤) في الفراغ نقوم بتحديد النقاط الآتية:

١ و (٠ ، ٠ ، ٠) نقطة الأصل

٢ ب (٣ ، ٠ ، ٠) تقع على محور السينات

٣ جـ (٠ ، ٢ ، ٠) تقع على محور الصادات

٤ د (٠ ، ٠ ، ٤) تقع على محور العينات

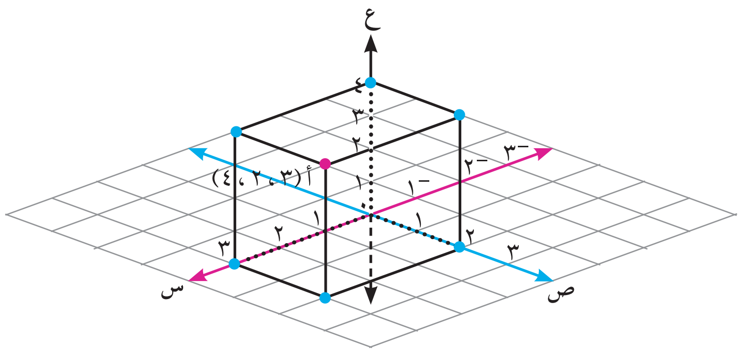
٥ هـ (٣ ، ٢ ، ٠) تقع في المستوى س ص

٦ ز (٣ ، ٠ ، ٤) تقع في المستوى س ع

٧ ح (٠ ، ٢ ، ٤) تقع في المستوى ص ع

٨ أ (٣ ، ٢ ، ٤) تقع في الثمن الأول

ألاحظ أنّ بعد النقطة أ (٣ ، ٢ ، ٤) عن المستوى س ص يساوي ٤ وحدات وهو إحداثي ع



نشاط بيتي: استخدم برامج حاسوبية مثل جيوجبرا لتمثيل النقاط السابقة في الفراغ .

المسافة بين نقطتين في الفراغ:

إذا كانت أ ($أ_١$ ، $أ_٢$ ، $أ_٣$) و ب($ب_١$ ، $ب_٢$ ، $ب_٣$) نقطتين في الفراغ فإنّ

$$أب = \sqrt{(ب_١ - أ_١)^٢ + (ب_٢ - أ_٢)^٢ + (ب_٣ - أ_٣)^٢}$$

وإذا كانت م نقطة تقع في منتصف $\overline{أب}$ فإنّ

$$م \left(\frac{أ_١ + ب_١}{٢} ، \frac{أ_٢ + ب_٢}{٢} ، \frac{أ_٣ + ب_٣}{٢} \right)$$

نشاط ٣: إذا كانت أ ، ب ، جـ ثلاث نقاط في الفراغ ، وكانت جـ تقع في منتصف $\overline{\text{أ ب}}$ بحيث أن

أ (١٢، ⁻٤ ، ٨) ، جـ (⁻٤ ، ١ ، ٥) أجد:

❶ إحداثيات ب ❷ طول $\overline{\text{أ ب}}$

الحل : ① نفرض إحداثيات ب (س ، ص ، ع)

فيكون $\frac{\text{س} + ١٢}{٢}$ = ⁻٤ ومنها س = ________

وبنفس الطريقة ص= ______ و ع = ______

② أ ب = $\sqrt{\text{\_\_\_\_\_\_\_\_} + \text{\_\_\_\_\_\_\_\_} + \text{\_\_\_\_\_\_\_\_}}$

مثال ٣ : إذا كانت أ(٢س ، ٢س ، ٥) ، ب(⁻١ ، ⁻٢، ٠) وكان أب= ٥ $\sqrt{٢}$ أجد قيم س.

الحل : (أ ب)^{٢} = (٢س + ١)^{٢} + (٢س + ٢)^{٢} + ٢٥ = ٥٠ (لماذا ؟)

ومنها ينتج ٤س^{٢} + ٤س + ١ + ٤س^{٢} + ٨س + ٤ + ٢٥ = ٥٠

٨س^{٢} + ١٢س − ٢٠ = ٠

ومنها ينتج : ٢س^{٢} + ٣س − ٥ = ٠

ومنها (٢س + ٥) (س − ١) = ٠

إذن س = $\frac{-٥}{٢}$ ، ١

تمارين ومسائل ١-١

١ أعين النقاط الآتية في الفراغ، ثم أجد بعد النقطة جـ عن المستويات س ص ، س ع ، ص ع

١ أ (٢ ، ٣ ، ٠)

٢ ب (٠ ، ٠ ، ⁻٢)

٣ جـ (⁻٣ ، ٢ ، ٤).

٢ في رحلة مدرسية ذهب طلاب مدرسة ابن رشد إلى أريحا، وركبوا ثلاث عربات تلفريك أ ، ب ، جـ . وفي لحظة ما كانت إحداثيات موقع العربتين أ ، جـ كما يلي أ (١٠ ، ٢٢ ، ٤٠)، جـ (١٣ ، ٢٩ ، ٤٥) وكانت العربة جـ تقع في منتصف المسافة بين العربتين أ ، ب أجد:

١ إحداثيات موقع العربة ب.

٢ المسافة بين العربتين أ و ب (الوحدات بالأمتار).

٣ نقطة في الفراغ بعدها عن المستوى س ص = ٢ وحدة وبعدها عن المستوى س ع = ٧ وحدات وبعدها عن المستوى ص ع = ٣ وحدات ما إحداثيات هذه النقطة. (أكتب جميع الحالات الممكنة).

٤ أ ب جـ مثلث فيه أ (١ ، ٣ ، ٢) ، جـ (⁻١ ، ٣، ٢)

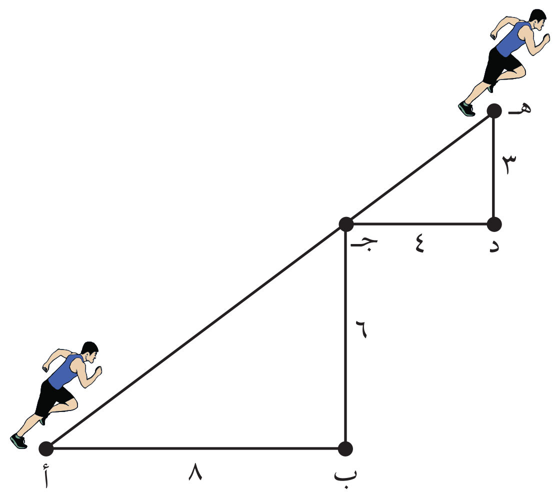
فإذا كانت النقطة د (س ، ⁻٢ ، س − ٢) هي إحداثيات منتصف $\overline{\text{أ ب}}$

وكان (جـ د) = $\sqrt{٤٢}$ وحدة أجد إحداثيات النقطة ب حيث س < ٠

٥ أ نقطة تقع على محور س ، ب نقطة تقع على محور ص ، جـ نقطة تقع على محور ع ، وكانت د ، هـ ، و تمثل إحداثيات المنتصف للقطع المستقيمة الثلاث $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{ب جـ}}$ ، $\overline{\text{جـ أ}}$ على الترتيب بحيث إنّ د (٢، ⁻٤ ، ٠)، هـ (٠ ، ⁻٤ ، ٤)، ما إحداثيات النقطة و؟

٦ إذا كانت أ (٨ ، ⁻٤ ، ٠) ، ب (٦ ، ٤ ، ٠) ، جـ (٤ ، ⁻٢ ، ٠) تشكل رؤوس المثلث أ ب جـ وتقع النقطة ن في منتصف $\overline{\text{أ ب}}$ ، النقطة م (س ، $\frac{-\text{س}}{٢}$ ، ٠) ، س ∋ ص نقطة تقع على $\overline{\text{أ جـ}}$ ، بحيث أنّ ن م = $\frac{٧}{٢}$ وحدة طول، أبين أن م جـ = ٣ م أ.

نشاط ١: مهند شاب يهوى الرياضة، فهو يدرك أنّ للرياضة فوائدَ صحيةً ونفسية كثيرة وممارستها تجعل الإنسان في نشاط دائم ، وفي أحد السباقات للجري ركض مهند مسافة ٨ كم باتجاه الشرق، ثم مسافة ٦ كم باتجاه الشمال ، ثم مسافة ٤ كم باتجاه الشرق، ثم مسافة ٣ كم باتجاه الشمال، وقد استغرق مدة من الزمن قدرها ٣ ساعات. (انظر الشكل)



المسافة التي قطعها مهند من أ إلى ب = ٨ كم باتجاه الشرق

أكمل الفراغات الآتية:

المسافة التي قطعها من ب إلى جـ = ________ كم باتجاه ____________

المسافة التي قطعها من جـ إلى د = ________ كم باتجاه ____________

المسافة التي قطعها من د إلى هـ = ________ كم باتجاه ____________

المسافة الكلية المقطوعة = ________________ والإزاحة هي _________

هل أ ، جـ ، هـ تقع على استقامة واحدة؟ فسّر إجابتك.

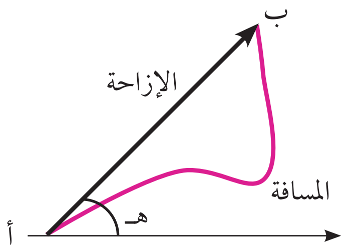
قياس الزاوية المحصورة بين القطعة المستقيمة أهـ والقطعة المستقيمة أ ب = ...

ألاحظ أن الزمن الذي استغرقه في السباق يساوي ٣ ساعات، فهل للزمن اتجاه ؟

أتذكّر أن: المسافة المقطوعة هي مجموع المسافات التي يسيرها الجسم من نقطة البداية إلى نقطة النهاية أما الإزاحة فهي كمية متجهه تحدد بعنصرين هما:

1. **طول القطعة المستقيمة الواصلة بين نقطة البداية ونقطة النهاية.**
2. **الزاوية التي تصنعها القطعة المستقيمة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات (اتجاه الحركة).**

في الشكل الآتي المسافة المقطوعة هي طول المسار باللون الأحمر، أما الإزاحة فهي تحدد بطول القطعة أب والتي تصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية قياسها هـ واتجاه الحركة هو من أ إلى ب.



أتعلم: تقسم الكميات إلى نوعين كميات متجهة تتحدد بالمقدار والاتجاه، وكميات قياسية (غير متجهة) تحدد بالمقدار فقط.

نشاط ٢: أصنف الكميات الآتية إلى كميات قياسية أو كميات متجهة:

الوزن، الكتلة، الزمن، السرعة، درجةالحرارة، القوة، الشغل، الكثافة.

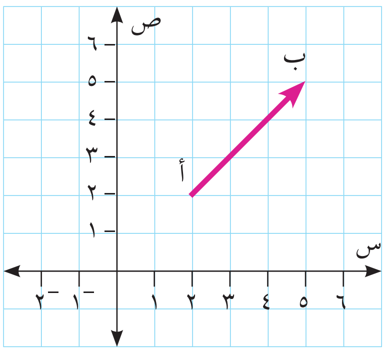
كمية متجهة	كمية قياسية
الوزن	الزمن

المتجه يحدد بالمقدار والاتجاه ويمكن تمثيله هندسيا في المستوى بقطعة مستقيمة موجهة اتجاهها من نقطة البداية إلى نقطة النهاية وطولها يمثل مقدار المتجه، ويرمز للمتجه بالرمز $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ ، بحيث تكون نقطة البداية هي أ $(\text{أ}_{1} ، \text{أ}_{2})$ ونقطة النهاية هي ب$(\text{ب}_{1} ، \text{ب}_{2})$ أو بالرمز $\overleftarrow{\text{م}}$ ، ويرمز لطول المتجه بالرمز $|\overleftarrow{\text{أ ب}}|$.

ولتسهيل تمثيل المتجهات وإجراء العمليات عليها فإنّنا نمثل المتجه في ما يسمى الوضع القياسي، بحيث نجعل نقطة البداية $(0 ، 0)$ ونقطة النهاية جـ$(\text{ب}_{1} - \text{أ}_{1} ، \text{ب}_{2} - \text{أ}_{2})$

ويكون $|\overleftarrow{\text{أ ب}}| = \sqrt{(\text{ب}_{1} - \text{أ}_{1})^{2} + (\text{ب}_{2} - \text{أ}_{2})^{2}}$

نشاط ٣: في الشكل المجاور إحداثيات نقطة البداية هي ________



إحداثيات نقطة النهاية هي ____________

طول المتجه $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ = ____________

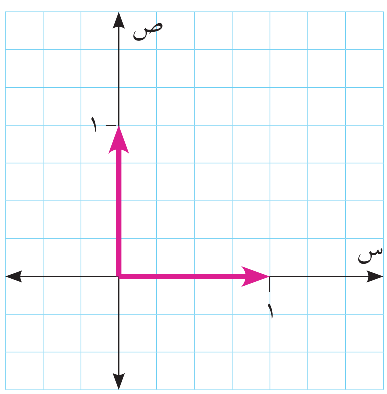
قياس الزاوية التي يصنعها المتجه $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات = ____________

أمثل المتجه $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ في الوضع القياسي

تعريف: يتساوى المتجهان $\overleftarrow{\text{م}}_1$ ، $\overleftarrow{\text{م}}_2$ إذا كان لهما نفس المقدار ونفس الاتجاه أي أنهما يمثلان بنفس الزوج المرتب في الوضع القياسي.

متجهات خاصة:

1. المتجه الصفري: وهو المتجه الذي طوله صفر وحدة واتجاهه غير معين ويرمز له بالرمز $\overleftarrow{0}$.
2. متجه الوحدة: وهو المتجه الذي طوله وحدة واحدة.
3. متجها الوحدة الأساسيان: $\overleftarrow{\text{و}}_1$ وهو متجه الوحدة السّيني، ويمثل بالزوج المرتب (١ ، ٠).
   $\overleftarrow{\text{و}}_2$ وهو متجه الوحدة الصّادي، ويمثل بالزوج المرتب (٠ ، ١).



مثال : إذا كانت أ (⁻٥ ، ٢) ، ب (١ ، ٣) ، جـ (١ ، ٤)

١ أمثّل $\overleftarrow{\text{أب}}$ في الوضع القياسي.

٢ أكتب $\overleftarrow{\text{أب}}$ بدلالة متجهي الوحدة.

٣ أجد قياس الزاوية التي يصنعها المتجه $\overleftarrow{\text{أب}}$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.

٤ أجد إحداثيات النقطة د بحيث إنّ $\overleftarrow{\text{أب}}$ = $\overleftarrow{\text{د جـ}}$.

الحل :

١ الزوج المرتب الذي يمثل $\overleftarrow{\text{أب}}$ = ب − أ = (١ ، ٣) − (⁻٥ ، ٢) = (٦ ، ١)

٢ $\overleftarrow{\text{أب}}$ = ٦ $\overleftarrow{\text{و}}_{١}$ + $\overleftarrow{\text{و}}_{٢}$

٣ ظاهـ = $\frac{\text{ص}}{\text{س}} = \frac{١}{٦}$

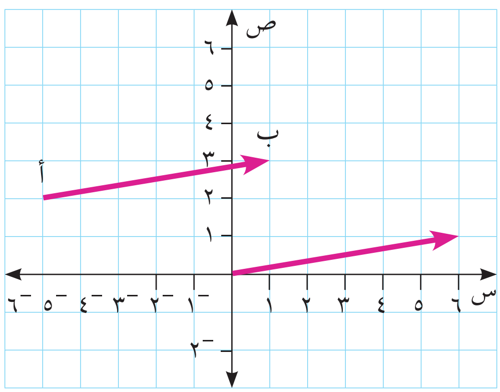
ومنها هـ تساوي تقريبا ١٠ °

٤ بما أنّ $\overleftarrow{\text{أب}}$ = $\overleftarrow{\text{د جـ}}$

إذن: ب − أ = جـ − د

(٦ ، ١) = (١ ، ٤) − د

ومنها د (⁻٥ ، ٣)



نشاط ٤: قام عامل بإزاحة صندوق خشبي من النقطة أ (٤ ، ٣) إلى النقطة ب (١٠ ، ٥)

١− أكتب المتجه $\overleftarrow{\text{أب}}$ بدلالة متجهي الوحدة الأساسيين

$\overleftarrow{\text{أب}}$ = ب − أ = (______ ، ______) = ... $\overleftarrow{\text{و}}_{١}$ + ... $\overleftarrow{\text{و}}_{٢}$

٢− | $\overleftarrow{\text{أب}}$ | = ____________

تمارينُ ومسائلُ ١-٢:

١ إذا كانت أ (−٢ ، ٣) ، ب (٢ ، ٥) ، جـ (٤ ، ٣) ثلاث نقاط في المستوى

أ أمثل المتجهين $\overleftarrow{\text{أب}}$ ، $\overleftarrow{\text{أجـ}}$ بدلالة متجهي الوحدة الأساسيين

ب أجد طول كل من: $\overleftarrow{\text{أب}}$ ، $\overleftarrow{\text{أجـ}}$.

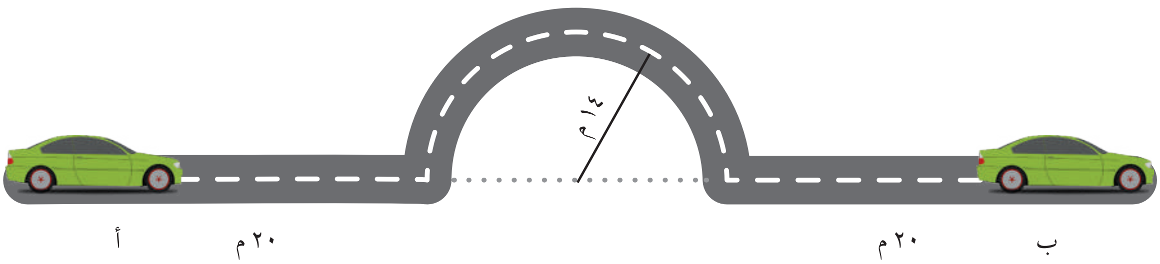
٢ إذا كان $\overleftarrow{\text{م}_١}$ = $\overleftarrow{\text{م}_٢}$ وكان $\overleftarrow{\text{م}_١}$ = (٢س + ٣ ، ص − ٢) ، $\overleftarrow{\text{م}_٢}$ = (ص ، س + ٣)

أجد قيم س و ص.

٣ تحركت سيارة من النقطة أ إلى النقطة ب حسب المسار الموضح في الشكل الآتي: أجد:

أ المسافة الكلية المقطوعة.

ب مقدار واتجاه إزاحة السيارة .

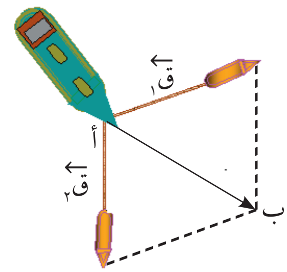


٤ أجد قياس الزاوية التي يصنعها كل من المتجهين $\overleftarrow{\text{أ}}$ = (−٣، ٣) ، $\overleftarrow{\text{ب}}$ = (٢$\sqrt{٣}$ ، ٢) مع الاتجاه الموجب لمحور السينات، ثم أجد قياس الزاوية المحصورة بينهما.

٥ تحرك جسم من النقطة أ(−٣ ، ٥) إلى النقطة ب(٠ ، ٨) ثم تحرك إلى النقطة جـ(س ، ٢) حيث س > ٠ ، فإذا كانت المسافة الكلية التي قطعها تساوي ٩$\sqrt{٢}$ (وحدة مسافة)، أجد إزاحة هذا الجسم مقدارا واتجاها.

١ - ٣ العمليات على المتجهات Operations on Vectors

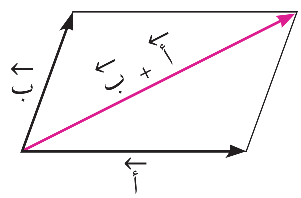
أفكّر وأناقش: يقوم قاربان بجر سفينة كما في الشكل، فتحركت السفينة من النقطة أ إلى النقطة ب، لماذا تحركت السفينة بهذا الاتجاه وما علاقة الإزاحة التي تحركتها بالقوتين المؤثرتين عليها؟



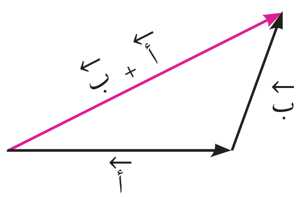
أولاً - جمع المتجهات هندسيا:

إذا كان $\overleftarrow{\text{أ}}$ ، $\overleftarrow{\text{ب}}$ متجهين، فإنّ حاصل جمعهما هو المتجه $\overleftarrow{\text{أ}} + \overleftarrow{\text{ب}}$ ويمكن إيجاده بطريقتين.

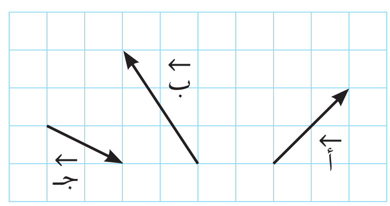
أ **طريقة متوازي الأضلاع:** حيث نسحب أحد المتجهين، بحيث يكون لهما نفس البداية، ثم نرسم متوازي أضلاع، فيكون حاصل جمع المتجهين كما هو موضح في الشكل المجاور.



ب **طريقة المثلث:** نقوم بإزاحة أحد المتجهين، بحيث تكون نقطة نهاية الأول هي نقطة بداية الثاني، ثم نوصل نقطة بداية الأول مع نقطة نهاية الثاني كما هو موضح في المجاور.

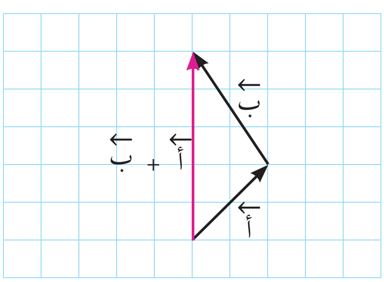


مثال ١ : إذا كان $\overleftarrow{\text{أ}}$ ، $\overleftarrow{\text{ب}}$ ، $\overleftarrow{\text{جـ}}$ ثلاثة متجهات ممثلة بالشكل الآتي:

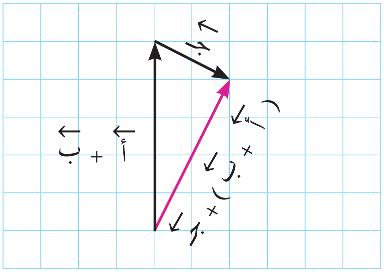


الحل : أمثل ما يلي هندسيا:

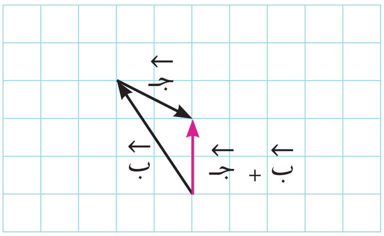
١ $\overleftarrow{\text{أ}} + \overleftarrow{\text{ب}}$



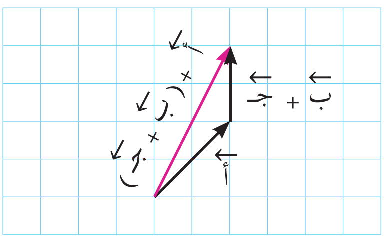
٢ $(\overleftarrow{\text{أ}} + \overleftarrow{\text{ب}}) + \overleftarrow{\text{جـ}}$



٣ $\overleftarrow{\text{ب}} + \overleftarrow{\text{جـ}}$



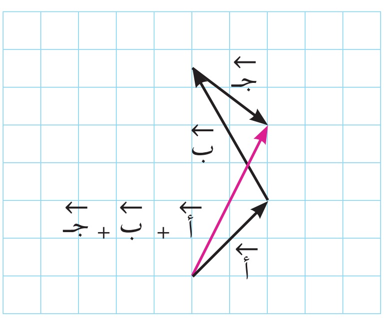
٤ $\overleftarrow{\text{أ}} + (\overleftarrow{\text{ب}} + \overleftarrow{\text{جـ}})$



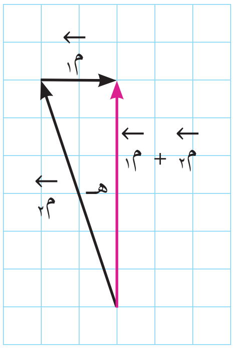
ألاحظ أنّ $(\overleftarrow{\text{أ}} + \overleftarrow{\text{ب}}) + \overleftarrow{\text{جـ}} = \overleftarrow{\text{أ}} + (\overleftarrow{\text{ب}} + \overleftarrow{\text{جـ}})$

(الخاصية التجميعية)

باستخدام الخاصية السابقة يمكن جمع المتجهات الثلاثة بوضع المتجهات بشكل تتابعي وتوصيل نقطة البداية لأول متجه بنقطة النهاية لآخر متجه .



نشاط ١: يريد ربان طائرة أن يقود الطائرة باتجاه الشمال بسرعة ٥٠٠ كم/ س، وفي نفس الوقت تهب رياح غربية بسرعة ٨٠ كم/ س، ففي أيّ اتجاه يجب أن يوجه الطائرة حتى تبقى تطير باتجاه الشمال؟



الحل : نفرض اتجاه الرياح $\overleftarrow{م}_{١}$ ، والاتجاه الذي ستوجه به الطائرة $\overleftarrow{م}_{٢}$
وحتى تبقى الطائرة باتجاه الشمال دائماً يجب أن تكون $\overleftarrow{م}_{١}$ + $\overleftarrow{م}_{٢}$
باتجاه ________

ظاهـ = ________ أي أن هـ ≈ ... ولذلك على ربان الطّائرة
أن يوجه الطائرة باتجاه ________ بزاوية ________

ثانياً- جمع المتجهات جبرياً:

جمع المتجهات هندسياً يحتاج إلى دقة في الرسم؛ لذلك نلجأ إلى طريقة الجمع جبرياً.

حيث إنه إذا كان $\overleftarrow{أ}$ = (أ$_{١}$ ، أ$_{٢}$) ، $\overleftarrow{ب}$ = (ب$_{١}$ ، ب$_{٢}$) متجهين في الوضع القياسي، فإنّ حاصل جمع المتجهين هو المتجه $\overleftarrow{أ}$ + $\overleftarrow{ب}$ = (أ$_{١}$ + ب$_{١}$ ، أ$_{٢}$ + ب$_{٢}$) .

مثال ٢ : إذا كانت أ (١ ، ٣) ، ب(–١ ، ٢) ، جـ (٢ ، –١) أجد بدلالة متجهات الوحدة الأساسية:

١ $\overleftarrow{أب}$ + $\overleftarrow{ب جـ}$

٢ $\overleftarrow{أ}$ + $\overleftarrow{جـ ب}$

الحل :

١ $\overleftarrow{أب}$ = ب – أ = (–١ ، ٢) – (١ ، ٣) = (–٢ ، –١)

$\overleftarrow{ب جـ}$ = جـ – ب = (٢ ، –١) – (–١ ، ٢) = (٣ ، –٣)

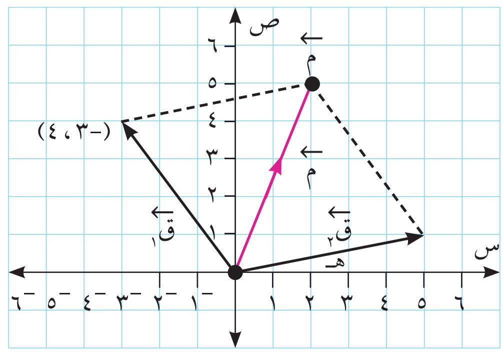
$\overleftarrow{أب}$ + $\overleftarrow{ب جـ}$ = (–٢ ، –١) + (٣ ، –٣) = (١ ، –٤) = $\overleftarrow{و}_{١}$ + –٤ $\overleftarrow{و}_{٢}$

٢ $\overleftarrow{أ}$ + $\overleftarrow{جـ ب}$ = (١ ، ٣) + (–٣ ، ٣) = (–٢ ، ٦) = –٢ $\overleftarrow{و}_{١}$ + ٦ $\overleftarrow{و}_{٢}$

نشاط ٢: أثرت قوتان $\overleftarrow{\text{ق}}_{١}$ ، $\overleftarrow{\text{ق}}_{٢}$ في جسم موجود في نقطة الأصل، فتحرك الجسم من نقطة الأصل إلى النقطة (٢ ، ٥) فإذا كانت $\overleftarrow{\text{ق}}_{١}$ = −٣ $\overleftarrow{\text{و}}_{١}$ + ٤ $\overleftarrow{\text{و}}_{٢}$ (انظر الشكل)

$\overleftarrow{\text{ق}}_{٢}$ = $\overleftarrow{\text{م}}$ − _____ = _____ − _____ = (٥ ، ١) = _____ $\overleftarrow{\text{و}}_{١}$ + _____ $\overleftarrow{\text{و}}_{٢}$

| $\overleftarrow{\text{ق}}_{٢}$ | = _____ ظاهـ =



ثالثاً - ضرب المتجه بعدد حقيقي

تعريف: إذا كان $\overleftarrow{\text{م}}$ متجها غير صفري ، وكان أ ∈ ح*

فإنّ أ $\overleftarrow{\text{م}}$ متجه يوازي $\overleftarrow{\text{م}}$ طوله = | أ . $\overleftarrow{\text{م}}$ | = | أ | | $\overleftarrow{\text{م}}$ |

ويكون في نفس اتجاه $\overleftarrow{\text{م}}$ إذا كانت أ موجبة وعكس اتجاه $\overleftarrow{\text{م}}$ إذا كانت أ سالبة.

مثال ٣: إذا كان $\overleftarrow{\text{م}}$ = (٢ ، ٤) أجد كلا من المتجهات الآتية :

١ ٢ $\overleftarrow{\text{م}}$ ، $\frac{-١}{٢}$ $\overleftarrow{\text{م}}$ ٢ أجد | ٢ $\overleftarrow{\text{م}}$ | ، | $\frac{-١}{٢}$ $\overleftarrow{\text{م}}$ |

الحل :

١ ٢ $\overleftarrow{\text{م}}$ = ٢(٢ ، ٤) = (٤ ، ٨)

$\frac{-١}{٢}$ $\overleftarrow{\text{م}}$ = $\frac{-١}{٢}$(٢ ، ٤) = (−١ ، −٢)

٢ | ٢ $\overleftarrow{\text{م}}$ | = $\sqrt{١٦ + ٦٤}$ = $\sqrt{٨٠}$

| $\frac{-١}{٢}$ $\overleftarrow{\text{م}}$ | = $\sqrt{١ + ٤}$ = $\sqrt{٥}$

تعريف: إذا كان $\overleftarrow{\text{م}}$ متجهاً غير صفري، فإنّ متجه الوحدة باتجاه $\overleftarrow{\text{م}}$ هو $\hat{\text{م}}$ حيث $\hat{\text{م}} = \frac{\overleftarrow{\text{م}}}{|\overleftarrow{\text{م}}|}$

مثال ٤ : إذا كان $\overleftarrow{\text{م}} = -٣ \overleftarrow{\text{و}}_{١} + ٤ \overleftarrow{\text{و}}_{٢}$ أجد متجه وحدة باتجاه $\overleftarrow{\text{م}}$

الحل : $|\overleftarrow{\text{م}}| = ٥$ وحدات (لماذا؟)

متجه الوحدة باتجاه $\overleftarrow{\text{م}} = \hat{\text{م}} = \frac{\overleftarrow{\text{م}}}{|\overleftarrow{\text{م}}|} = (\frac{٤}{٥} ، \frac{-٣}{٥})$ (تحقق أن طوله = ١ وحدة)

نشاط ٢: إذا كان $\overleftarrow{\text{م}}_{١} = ٣ \overleftarrow{\text{و}}_{١} - ٤ \overleftarrow{\text{و}}_{٢}$ وكان أ (٢ ، −١) ، ب (٦ ، ٢) أجد ما يلي:

١. $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ في الوضع القياسي = ____________

٢. $\overleftarrow{\text{م}}_{١} + \overleftarrow{\text{أ ب}}$ = ____________

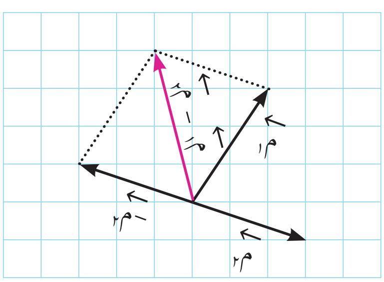
٣. $\frac{\overleftarrow{\text{م}}_{١}}{|\overleftarrow{\text{م}}_{١}|}$ = ____________

ثالثاً- طرح المتجهات:

لطرح متجهين فإنّنا نستخدم الخاصية الآتية:

$$\overleftarrow{\text{م}}_{١} - \overleftarrow{\text{م}}_{٢} = \overleftarrow{\text{م}}_{١} + (-\overleftarrow{\text{م}}_{٢})$$

الشكل المجاور يوضح عملية طرح متجهين.



أفكّر وأناقش: في الشكل السابق ما العلاقة بين $\overleftarrow{\text{م}}_{١} + \overleftarrow{\text{م}}_{٢}$ ، $\overleftarrow{\text{م}}_{١} - \overleftarrow{\text{م}}_{٢}$ ؟

نشاط ٣: إذا كان $\overleftarrow{\text{م}}_{١} = (-٢ ، ٥)$ ، $\overleftarrow{\text{م}}_{٢} = (٣ ، ٤)$ فإنّ $\overleftarrow{\text{م}}_{٢} - ٢ \overleftarrow{\text{م}}_{١}$ = (______ ، ______)

الخواصّ الأساسية للعمليات على المتجهات:

إذا كان $\overleftarrow{م}_{١}$ ، $\overleftarrow{م}_{٢}$ ، $\overleftarrow{م}_{٣}$ ثلاثة متجهات في المستوى وكانت أ ، ب ∋ ح فإنّ:

١ $\overleftarrow{م}_{١} + \overleftarrow{م}_{٢} = \overleftarrow{م}_{٢} + \overleftarrow{م}_{١}$ (الخاصية التبديلية)

٢ $(\overleftarrow{م}_{١} + \overleftarrow{م}_{٢}) + \overleftarrow{م}_{٣} = \overleftarrow{م}_{١} + (\overleftarrow{م}_{٢} + \overleftarrow{م}_{٣})$ (الخاصية التجميعية)

٣ $\overleftarrow{م}_{١} + \overleftarrow{٠} = \overleftarrow{٠} + \overleftarrow{م}_{١} = \overleftarrow{م}_{١}$ (العنصر المحايد)

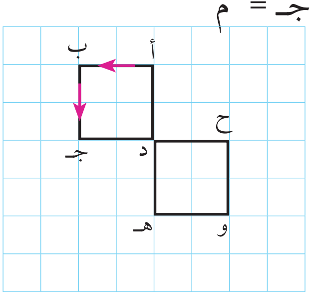
٤ $\overleftarrow{م}_{١} + (-\overleftarrow{م}_{١}) = (-\overleftarrow{م}_{١}) + \overleftarrow{م}_{١} = \overleftarrow{٠}$ (النظير الجمعي)

٥ $أ(\overleftarrow{م}_{١} + \overleftarrow{م}_{٢}) = أ\overleftarrow{م}_{١} + أ\overleftarrow{م}_{٢}$

٦ $(أ + ب)(\overleftarrow{م}_{١}) = أ\overleftarrow{م}_{١} + ب\overleftarrow{م}_{١}$

٧ $|أ\overleftarrow{م}_{١}| = |أ|\,|\overleftarrow{م}_{١}|$

نشاط ٤: يمثل الشكل المجاور مربعين متطابقين ، إذا كان $\overleftarrow{أب} = \overleftarrow{ل}$ ، $\overleftarrow{بجـ} = \overleftarrow{م}$



أجد كلا مما يلي بدلالة $\overleftarrow{ل}$ و $\overleftarrow{م}$:

$\overleftarrow{أجـ}$ = ______

$\overleftarrow{ب د} = \overleftarrow{م}$ − ______

$\overleftarrow{و ب} = \overleftarrow{و ح}$ + ______ + $\overleftarrow{د أ}$ + ______ = ______

مثال ٥ : إذا كان $\overleftarrow{أ} = (-٢ ، ٤)$ ، $\overleftarrow{ب} = (٦ ، ٢)$، أجد المتجه $\overleftarrow{س}$ الذي يحقق المعادلة الآتية:

$٢\overleftarrow{س} - \overleftarrow{أ} = ٣\overleftarrow{ب}$

الحل : بإضافة $\overleftarrow{أ}$ إلى طرفي المعادلة تصبح $٢\overleftarrow{س} = ٣\overleftarrow{ب} + \overleftarrow{أ}$

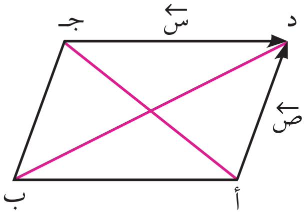
ثم نضرب المعادلة في $\frac{١}{٢}$ فتصبح $\overleftarrow{س} = \frac{١}{٢}(٣\overleftarrow{ب} + \overleftarrow{أ})$

ومنها $\overleftarrow{س} = (٨ ، ٥)$

تمارينُ ومسائلُ ١-٣

١ الشكل المجاور يمثل متوازي أضلاع،

أكتب المتجهين $\overleftarrow{\text{أجـ}}$ ، $\overleftarrow{\text{دب}}$ بدلالة $\overleftarrow{\text{س}}$ ، $\overleftarrow{\text{ص}}$



٢ إذا كان $\overleftarrow{\text{أ}}$ = (−٣ ، ٥) ، $\overleftarrow{\text{ب}}$ = ٣ $\overleftarrow{\text{و}}_{\text{١}}$ + ٤ $\overleftarrow{\text{و}}_{\text{٢}}$ ، أكتب −٥ $\overleftarrow{\text{أ}}$ + ٢ $\overleftarrow{\text{ب}}$ بدلالة متجهي الوحدة الأساسيين.

٣ إذا كانت أ (−٣ ، ١) ، ب (٢ ، ١) ، جـ(٤ ، ٤) ، د (−١ ، ٤)، أثبت باستخدام المتجهات أن الشكل أ ب جـ د متوازي أضلاع.

٤ إذا كانت أ(س ، −٢) ، ب(٥ ، س) أجد قيمة/ قيم س التي تجعل طول المتجه $\overleftarrow{\text{أب}}$ = ٥ وحدات

٥ أحل المعادلة المتجهية الآتية حيث $\overleftarrow{\text{أ}}$ = (٣ ، −٥) ، $\overleftarrow{\text{ب}}$ = (٢ ، −٦)

٤ $\overleftarrow{\text{س}}$ − ٢ $\overleftarrow{\text{أ}}$ = ٣ $\overleftarrow{\text{ب}}$

٦ أثرت قوتان في جسم بحيث إن $\overleftarrow{\text{ق}}_{\text{١}}$ = ٢ $\overleftarrow{\text{و}}_{\text{١}}$ + ٤ $\overleftarrow{\text{و}}_{\text{٢}}$ ، $\overleftarrow{\text{ق}}_{\text{١}}$ + $\overleftarrow{\text{ق}}_{\text{٢}}$ = (٥ ، ٧) أجد $\overleftarrow{\text{ق}}_{\text{٢}}$ بدلالة متجهي الوحدة الأساسيين.

٧ إذا كان $\overleftarrow{\text{أ}}$ = (−٢ ، ٦) أجد:

أ متجه طوله ٥ وحدات وعكس اتجاه $\overleftarrow{\text{أ}}$

ب متجه طوله ٥ أمثال $\overleftarrow{\text{أ}}$ وبنفس اتجاه $\overleftarrow{\text{أ}}$

٨ أ ب جـ د متوازي أضلاع م نقطة خارجه أثبت أن: $\overleftarrow{\text{أم}}$ + $\overleftarrow{\text{بم}}$ + $\overleftarrow{\text{مد}}$ + $\overleftarrow{\text{مجـ}}$ = ٢ $\overleftarrow{\text{أد}}$

١ - ٤ المتجهات في الفراغ Vectors in Space

نشاط ١: تقوم رافعة برفع حجارة وموادّ بناء في منشأة قيد الإنشاء، فإذا تم رفع جسر حديد مركز ثقله يقع في النقطة أ (١٠ ، ٤ ، ١) إلى النقطة ب (٢٠ ، ٨ ، ١٤) (الوحدات بالأمتار ونقطة الأصل تمثل قاعدة الرافعة)، فإنّ:

$\overleftarrow{\text{أ ب}}$ = ب − أ = (____ ، ____ ، ____)

متجه الوحدة السيني $\overleftarrow{\text{و}}_{١}$ = (١ ، ٠ ، ٠)

متجهه الوحدة الصادي $\overleftarrow{\text{و}}_{٢}$ = (.... ، ١ ، .....)

ويمكن تعريف متجه الوحدة العيني $\overleftarrow{\text{و}}_{٣}$ = (٠ ، ٠ ، ١)

بدلالة متجهات الوحدة $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ = ____ $\overleftarrow{\text{و}}_{١}$ + ____ $\overleftarrow{\text{و}}_{٢}$ + ____ $\overleftarrow{\text{و}}_{٣}$

أتعلم: يمكن تطبيق جميع العمليات على المتجهات في المستوى على المتجهات في الفراغ.

نشاط ٢: أطلق صاروخ من نقطة إحداثياتها أ (١ ، ٣ ، ٢) وبعد مدة من الزمن وصل إلى النقطة ب (٣٠ ، ٤٥ ، ٢٠)، فإذا كانت نقطة الأصل تمثل برج المراقبة وكانت الوحدات بالكيلومتر، فإنّ:

$\overleftarrow{\text{أ ب}}$ = (_____ ، _____ ، ٢٠ − ٢) = (_____ ، _____ ، ١٨)

$\overleftarrow{\text{أ ب}}$ = _____ + _____ + _____

مثال ١ : إذا كان $\overleftarrow{\text{م}}_{١}$ = ب $\overleftarrow{\text{و}}_{١}$ − ٢ أ $\overleftarrow{\text{و}}_{٢}$ + ٥ $\overleftarrow{\text{و}}_{٣}$ وكان $\overleftarrow{\text{م}}_{٢}$ = أ $\overleftarrow{\text{و}}_{١}$ + ب $\overleftarrow{\text{و}}_{٢}$ −٦ $\overleftarrow{\text{و}}_{٣}$ أجد: أ ، ب ، جـ علماً بأن $\overleftarrow{\text{م}}_{١}$ + $\overleftarrow{\text{م}}_{٢}$ = (٩ ، −٣ ، جـ)

الحل : $\overleftarrow{\text{م}}_{١}$ + $\overleftarrow{\text{م}}_{٢}$ = (ب + أ ، −٢ أ + ب ، −١) = (٩ ، −٣ ، جـ) ومنها جـ = −١

ب+ أ = ٩ ، −٢أ + ب = −٣ وبحل المعادلتين ينتج: أ = ٤ و ب = ٥

مثال ٢ : إذا كانت أ (−٦ ، ٤ ، ٢) ب(٨ ، −٢ ، ٤) أجد ما يلي:

١ متجه يوازي $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ وطوله ٣ امثال طول $\overleftarrow{\text{أ ب}}$.

٢ متجه عكس اتجاه $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ وطوله ٣ وحدات.

الحل :

١ $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ = (٨ ، −٢ ، ٤) − (−٦ ، ٤ ، ٢) = (١٤ ، −٦ ، ٢)

لإيجاد متجه طوله ٣ أمثال $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ ويوازيه نضرب $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ في ±٣

فيصبح ±٣ (١٤، −٦ ، ٢)

٢ نجد أولاً متجه وحدة باتجاه $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ وهو $\dfrac{\overleftarrow{\text{أ ب}}}{|\overleftarrow{\text{أ ب}}|}$ = $\left(\dfrac{١٤}{\sqrt{٢٣٦}} ، \dfrac{−٦}{\sqrt{٢٣٦}} ، \dfrac{٢}{\sqrt{٢٣٦}}\right)$

نضرب متجه الوحدة في −٣ فيكون المتجه المطلوب $\left(\dfrac{−٤٢}{\sqrt{٢٣٦}} ، \dfrac{١٨}{\sqrt{٢٣٦}} ، \dfrac{−٦}{\sqrt{٢٣٦}}\right)$

نشاط ٣: إذا كان $\overleftarrow{\text{أ}}$ = (−٢ ، ٩ ، ٥)، $\overleftarrow{\text{ب}}$ = (س + ١ ، ص^{٢}، $\dfrac{\text{ع}}{٢}$) أجد س ، ص ، ع

علما بإن : $\overleftarrow{\text{أ}}$ = $\overleftarrow{\text{ب}}$

س + ١ = ______ ومنها س = ______

ص^{٢} = ______ ومنها ص= ______

$\dfrac{\text{ع}}{٢}$ = ______ ومنها ع = ______

نشاط ٤: إذا كان $\overleftarrow{\text{أ}}$ = ٣ و$_{١}$ + ٢ و$_{٢}$ ، $\overleftarrow{\text{ب}}$ = (٣ ، ٥ ، ٨) أجد ما يلي:

١ ٢ $\overleftarrow{\text{أ}}$ + ٣ $\overleftarrow{\text{ب}}$ = ______

٢ | $\overleftarrow{\text{أ}}$ | + | $\overleftarrow{\text{ب}}$ | = ______

٣ | $\overleftarrow{\text{أ}}$ + $\overleftarrow{\text{ب}}$ | = ______

٤ متجه وحدة باتجاه $\overleftarrow{\text{أ}}$ = ______

٥ متجه وحدة باتجاه $\overleftarrow{\text{ب}}$ = ______

٦ متجه عكس اتجاه $\overleftarrow{\text{أ}}$ + $\overleftarrow{\text{ب}}$ وطوله ٤ وحدات = ______

تمارينُ ومسائلُ ١ – ٤

١ أثرت قوتان في جسم، فإذا كانت $\overleftarrow{\text{ق}}_{١} = ٣\,\overleftarrow{\text{و}}_{١} - ٢\,\overleftarrow{\text{و}}_{٢} + \overleftarrow{\text{و}}_{٣}$

$\overleftarrow{\text{ق}}_{٢} = -٢\,\overleftarrow{\text{و}}_{١} + ٤\,\overleftarrow{\text{و}}_{٢} + ٥\,\overleftarrow{\text{و}}_{٣}$ أجد محصلة هاتين القوتين.

٢ إذا كانت أ (−٦ ، ٢ ، ٣) ، ب (٢ ، ٤ ، ٨) أجد ما يلي:

أ متجه طوله ٤ أمثال $\overleftarrow{\text{أب}}$ ويوازيه.

ب متجه طوله ٤ وحدات وبنفس اتجاه $\overleftarrow{\text{أب}}$.

جـ متجه وحدة عكس اتجاه $\overleftarrow{\text{أب}}$.

٣ إذا كان $\overleftarrow{\text{أ}}$ = (−٢، ٤ ، ٦) وكان $٢\,\overleftarrow{\text{أ}} + ٣\,\overleftarrow{\text{ب}} = ٢\,\overleftarrow{\text{و}}_{١} + ٢٣\,\overleftarrow{\text{و}}_{٢}$

أجد $\overleftarrow{\text{ب}}$ بدلالة متجهات الوحدة الأساسية.

٤ إذا كان $\overleftarrow{\text{أ}} + \overleftarrow{\text{ب}}$ = (−١ ، ٧ ، ٦) وكان $٢\,\overleftarrow{\text{أ}} - ٣\,\overleftarrow{\text{ب}} = -٧\,\overleftarrow{\text{و}}_{١} - \overleftarrow{\text{و}}_{٢} - ١٣\,\overleftarrow{\text{و}}_{٣}$

أجد $|\overleftarrow{\text{أ}} - \overleftarrow{\text{ب}}|$.

٥ إذا كان المتجه $\overleftarrow{\text{أ}}$ = (م ، −٢م ، ١) ، $\overleftarrow{\text{ب}}$ = (ن ، ٢ن ، ٢) ،

أجد م ، ن علما بأن $٢\,\overleftarrow{\text{أ}} + ٣\,\overleftarrow{\text{ب}}$ = (١٩ ، −٢ ، ٨)

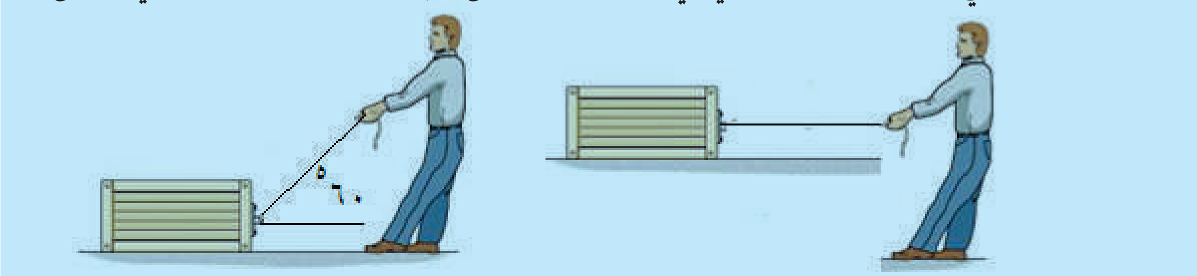
٦ ليكن $\overleftarrow{\text{أ}}$ = (١ ، −٣ ، ٢) ، $\overleftarrow{\text{ب}}$ = (س+٣ ، −س ، ٢س − ٣) أجد قيمة / قيم س

بحيث أن $|\overleftarrow{\text{أ}} + \overleftarrow{\text{ب}}| = \sqrt{٢٢}$ وحدة طول.

١ - ٥ ضرب المتجهات Product of Vectors

أولاً: الضرب (القياسي) الداخلي للمتجهات:

أفكّر وأناقش: أراد سعيد أن يسحب صندوقين لهما نفس الكتلة، فإذا سحب الصندوق الأول بحبل أفقي مسافة ٦م نحو الشرق، ثم سحب الصندوق الثاني بنفس القوة ونفس المسافة والاتجاه بحبل يميل عن الأفقي بزاوية قياسها ٦٠ °. في أي الحالتين بُذلَ شغلٌ أكبر وما الوحدة المستخدمة في الشغل؟



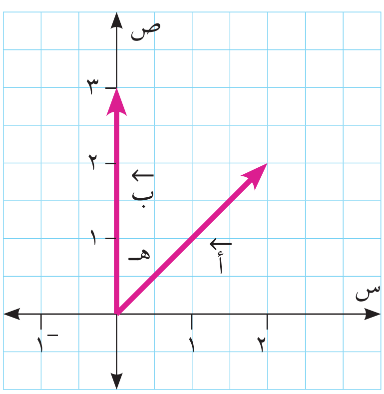
تعريف : إذا كان $\overleftarrow{\text{أ}}$ ، $\overleftarrow{\text{ب}}$ متجهين ، فإنّ الضرب القياسي لهذين المتجهين هو $\overleftarrow{\text{أ}} \cdot \overleftarrow{\text{ب}}$

حيث $\overleftarrow{\text{أ}} \cdot \overleftarrow{\text{ب}} = |\overleftarrow{\text{أ}}|\,|\overleftarrow{\text{ب}}|$ جتا هـ حيث هـ قياس الزاوية الصغرى المحصورة بين المتجهين $\overleftarrow{\text{أ}}$ ، $\overleftarrow{\text{ب}}$ حيث هـ $\in [\,٠ ، \pi\,]$.

أفكّر وأناقش: حاصل الضرب القياسي (الداخلي) لأي متجهين كمية قياسية وليس كمية متجهة.

مثال ١ : إذا كان $\overleftarrow{\text{أ}} = (٢ ، ٢)$، $\overleftarrow{\text{ب}} = (٠ ، ٣)$، أجد $\overleftarrow{\text{أ}} \cdot \overleftarrow{\text{ب}}$ باستخدام تعريف الضرب الداخلي للمتجهات.

الحل : بتمثيل المتجهين هندسياً في المستوى ، فإنّ قياس الزاوية المحصورة بين المتجه $\overleftarrow{\text{أ}}$ والاتجاه الموجب لمحور السينات يساوي ٤٥ ° لماذا؟ ومنها ينتج أن: هـ = ٤٥ °



$\overleftarrow{\text{أ}} \cdot \overleftarrow{\text{ب}} = |\overleftarrow{\text{أ}}|\,|\overleftarrow{\text{ب}}|$ جتا ٤٥°

$= \sqrt{٨} \times ٣ \times \frac{١}{\sqrt{٢}} = ٦$

نشاط ١: ما قيمة ① $\overleftarrow{و_١} \cdot \overleftarrow{و_٢}$ ② $\overleftarrow{و_٢} \cdot \overleftarrow{و_٢}$ ③ $\overleftarrow{و_١} \cdot -٢\,\overleftarrow{و_٢}$

الحل :

① $\overleftarrow{و_١} \cdot \overleftarrow{و_٢} = |\overleftarrow{و_١}|\,|\overleftarrow{و_٢}|$ جتا $٩٠^\circ =$ ____________

② $\overleftarrow{و_٢} \cdot \overleftarrow{و_٢} =$ ____________

③ $\overleftarrow{و_١} \cdot -٢\,\overleftarrow{و_٢} =$ ____________

خصائص الضرب (القياسي) الداخلي:

إذا كان $\overleftarrow{أ}$ ، $\overleftarrow{ب}$ ، $\overleftarrow{جـ}$ متجهاتٍ غيرَ صفريةٍ و كان د $\in$ ح*، فإنّ

① $\overleftarrow{أ} \cdot \overleftarrow{أ} = |\overleftarrow{أ}|^٢$ لماذا ؟

② $\overleftarrow{أ} \cdot \overleftarrow{ب} = \overleftarrow{ب} \cdot \overleftarrow{أ}$ (الخاصية التبديلية) لماذا؟

③ $\overleftarrow{أ} \cdot (\overleftarrow{ب} + \overleftarrow{جـ}) = (\overleftarrow{أ} \cdot \overleftarrow{ب}) + (\overleftarrow{أ} \cdot \overleftarrow{جـ})$ (التوزيع من اليمين)

④ $(\overleftarrow{ب} + \overleftarrow{جـ}) \cdot \overleftarrow{أ} = (\overleftarrow{ب} \cdot \overleftarrow{أ}) + (\overleftarrow{جـ} \cdot \overleftarrow{أ})$ (التوزيع من اليسار)

⑤ د $(\overleftarrow{أ} \cdot \overleftarrow{ب}) = ($د$\,\overleftarrow{أ}) \cdot \overleftarrow{ب} = \overleftarrow{أ} \cdot ($د$\,\overleftarrow{ب})$ لكل د $\in$ ح*

أفكّر وأناقش: هل يوجد للتعبير $\overleftarrow{أ} \cdot \overleftarrow{ب} \cdot \overleftarrow{جـ}$ معنى؟

نشاط ٢: أثبت أن: $|\overleftarrow{أ} + \overleftarrow{ب}| \leq |\overleftarrow{أ}| + |\overleftarrow{ب}|$

$|\overleftarrow{أ} + \overleftarrow{ب}|^٢ = (\overleftarrow{أ} + \overleftarrow{ب}) \cdot (\overleftarrow{أ} + \overleftarrow{ب})$

$= |\overleftarrow{أ}|^٢ + ٢\,\overleftarrow{أ} \cdot \overleftarrow{ب} + |\overleftarrow{ب}|^٢$

$=$ ______ $+$ ______ $+ ٢\,|\overleftarrow{أ}|\,|\overleftarrow{ب}|$ جتا هـ

$\leq |\overleftarrow{أ}|^٢ + |\overleftarrow{ب}|^٢ + ٢\,|\overleftarrow{أ}|\,|\overleftarrow{ب}|$ (لماذا؟)

$\leq ($ ______ $+$ ______ $)^٢$

ومنها $|\overleftarrow{أ} + \overleftarrow{ب}| \leq |\overleftarrow{أ}| + |\overleftarrow{ب}|$

مثال ٢ : استخدم الضرب الداخلي؛ لإثبات نظرية فيثاغورس

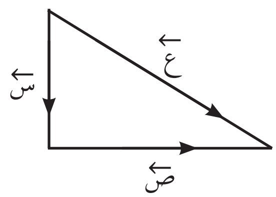
الحل :

$\overleftarrow{\text{ع}} = \overleftarrow{\text{س}} + \overleftarrow{\text{ص}}$

$\overleftarrow{\text{ع}} \cdot \overleftarrow{\text{ع}} = (\overleftarrow{\text{س}} + \overleftarrow{\text{ص}}) \cdot (\overleftarrow{\text{س}} + \overleftarrow{\text{ص}})$

$|\overleftarrow{\text{ع}}|^{٢} = |\overleftarrow{\text{س}}|^{٢} + \overleftarrow{\text{س}} \cdot \overleftarrow{\text{ص}} + \overleftarrow{\text{ص}} \cdot \overleftarrow{\text{س}} + |\overleftarrow{\text{ص}}|^{٢}$

$|\overleftarrow{\text{ع}}|^{٢} = |\overleftarrow{\text{س}}|^{٢} + |\overleftarrow{\text{ص}}|^{٢}$ لماذا ؟



نظرية : إذا كان $\overleftarrow{\text{أ}} = (\text{أ}_{١}، \text{أ}_{٢})$ ، $\overleftarrow{\text{ب}} = (\text{ب}_{١}، \text{ب}_{٢})$ فإنّ $\overleftarrow{\text{أ}} \cdot \overleftarrow{\text{ب}} = \text{أ}_{١}\text{ب}_{١} + \text{أ}_{٢}\text{ب}_{٢}$

البرهان: $\overleftarrow{\text{أ}} = \text{أ}_{١}\overleftarrow{\text{و}_{١}} + \text{أ}_{٢}\overleftarrow{\text{و}_{٢}}$ ، $\overleftarrow{\text{ب}} = \text{ب}_{١}\overleftarrow{\text{و}_{١}} + \text{ب}_{٢}\overleftarrow{\text{و}_{٢}}$

$\overleftarrow{\text{أ}} \cdot \overleftarrow{\text{ب}} = (\text{أ}_{١}\overleftarrow{\text{و}_{١}} + \text{أ}_{٢}\overleftarrow{\text{و}_{٢}}) \cdot (\text{ب}_{١}\overleftarrow{\text{و}_{١}} + \text{ب}_{٢}\overleftarrow{\text{و}_{٢}})$

$= \text{أ}_{١}\text{ب}_{١} + \text{أ}_{٢}\text{ب}_{٢}$ لماذا؟

ويمكن تعميم النظرية من المستوى إلى الفراغ كما يلي :

إذا كان $\overleftarrow{\text{أ}} = (\text{أ}_{١}، \text{أ}_{٢}، \text{أ}_{٣})$ ، $\overleftarrow{\text{ب}} = (\text{ب}_{١}، \text{ب}_{٢}، \text{ب}_{٣})$

فإنّ $\overleftarrow{\text{أ}} \cdot \overleftarrow{\text{ب}} = \text{أ}_{١}\text{ب}_{١} + \text{أ}_{٢}\text{ب}_{٢} + \text{أ}_{٣}\text{ب}_{٣}$

مثال ٣ : إذا كان $\overleftarrow{\text{أ}} = (٣، ٥، -١)$ ، $\overleftarrow{\text{ب}} = (٢، -٢، ٤)$ أجد $\overleftarrow{\text{أ}} \cdot \overleftarrow{\text{ب}}$

الحل : $\overleftarrow{\text{أ}} \cdot \overleftarrow{\text{ب}} = ٣ \times ٢ + ٥ \times -٢ + -١ \times ٤ = -٨$

نشاط ٣: إذا كان $\overleftarrow{\text{أ}} = (٣، ٠)$ ، $\overleftarrow{\text{ب}} = (٠، ٤)$

١ أعيّن المتجهين في المستوى الدّيكارتي.

٢ أجد $\overleftarrow{\text{أ}} \cdot \overleftarrow{\text{ب}}$ ، فسّر إجابتك.

$\overleftarrow{\text{أ}} \cdot \overleftarrow{\text{ب}} = |\overleftarrow{\text{أ}}| \, |\overleftarrow{\text{ب}}|$ جتا هـ = ________

نتيجة: يكون المتجهان غير الصفريين $\overleftarrow{\text{أ}}$ ، $\overleftarrow{\text{ب}}$ متعامدين إذا وفقط إذا كان $\overleftarrow{\text{أ}} \cdot \overleftarrow{\text{ب}} =$ صفرًا

مثال ٤ : أبين أن كل زوجين من المتجهات الآتية متعامدان :

١ $\overleftarrow{أ}$ = (٢ ، ٤ ، −٢) ، $\overleftarrow{ب}$ = (٣ ، ١ ، ٥)

١ $\overleftarrow{و_١}$ ، $\overleftarrow{و_٢}$ في الفراغ

الحل :

١ (٢ ، ٤ ، −٢) . (٣ ، ١ ، ٥) = ٦ + ٤ − ١٠ = صفرًا إذن $\overleftarrow{أ} \perp \overleftarrow{ب}$

٢ $\overleftarrow{و_١}$. $\overleftarrow{و_٢}$ = (١ ، ٠ ، ٠) . (٠ ، ١ ، ٠) = صفرًا إذن $\overleftarrow{و_١} \perp \overleftarrow{و_٢}$

مثال ٥ : إذا كان $\overleftarrow{أ}$ = (٢ جا س ، جاس) ، $\overleftarrow{ب}$ = (جا س ، ١) متعامدين، ما قيمة/ قيم س : س ∈] π ، ٢ π[؟

الحل :

(٢ جا س ، جاس) . (جا س ، ١) = ٠

٢ جا^٢ س + جاس = ٠

جاس (٢ جا س + ١) = ٠

إما جاس = ٠

ومنها س= ٠ ، π ، ٢ π (ترفض)

أو جاس = − $\frac{١}{٢}$ ومنها س = {$\frac{٧}{٦}$ π ، $\frac{١١}{٦}$ π}

نظرية: إذا كان المتجه $\overleftarrow{أ}$ = (أ$_١$ ، أ$_٢$ ، أ$_٣$) و كانت هـ$_١$ ، هـ$_٢$ ، هـ$_٣$ قياسات الزوايا التي يصنعها المتجه مع المحاور الإحداثية الموجبة س ، ص ، ع على الترتيب، فإنّ :

أ جتا هـ$_١$ = $\frac{أ_١}{|\overleftarrow{أ}|}$ ، جتا هـ$_٢$ = $\frac{أ_٢}{|\overleftarrow{أ}|}$ ، جتا هـ$_٣$ = $\frac{أ_٣}{|\overleftarrow{أ}|}$

ب جتا^٢ هـ$_١$ + جتا^٢ هـ$_٢$ + جتا^٢ هـ$_٣$ = ١

تُسمّى الزوايا هـ$_١$ ، هـ$_٢$ ، هـ$_٣$ الزوايا الاتجاهية للمتجه $\overleftarrow{أ}$ ، وهي الزوايا التي تحدد اتجاه المتجه في الفراغ.

مثال ٦ :

١ أجد قياسات الزوايا التي يصنعها المتجه $\overleftarrow{\text{أ}} = (١ ، ٠ ، \sqrt{٣})$ مع المحاور الإحداثية.

٢ أبين أن: $\text{جتا}^{٢}\,\text{هـ}_{١} + \text{جتا}^{٢}\,\text{هـ}_{٢} + \text{جتا}^{٢}\,\text{هـ}_{٣} = ١$

الحل :

١ $\text{جتا هـ}_{١} = \dfrac{\text{أ}_{١}}{|\overleftarrow{\text{أ}}|} = \dfrac{١}{٢}$ ومنها $\text{هـ}_{١} = ٦٠^{\circ}$

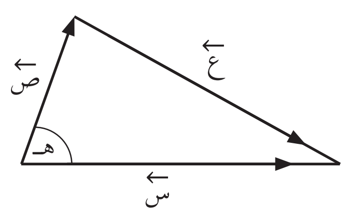
$\text{جتا هـ}_{٢} = \dfrac{\text{أ}_{٢}}{|\overleftarrow{\text{أ}}|} = \dfrac{\text{صفر}}{٢}$ ومنها $\text{هـ}_{٢} = ٩٠^{\circ}$

$\text{جتا هـ}_{٣} = \dfrac{\text{أ}_{٣}}{|\overleftarrow{\text{أ}}|} = \dfrac{\sqrt{٣}}{٢}$ ومنها $\text{هـ}_{٣} = ٣٠^{\circ}$

٢ $\text{جتا}^{٢}\,\text{هـ}_{١} + \text{جتا}^{٢}\,\text{هـ}_{٢} + \text{جتا}^{٢}\,\text{هـ}_{٣} = (\dfrac{١}{٢})^{٢} + (٠)^{٢} + (\dfrac{\sqrt{٣}}{٢})^{٢} = ١$

أفكّر وأناقش: ما قيمة المقدار $\text{جا}^{٢}\,\text{هـ}_{١} + \text{جا}^{٢}\,\text{هـ}_{٢} + \text{جا}^{٢}\,\text{هـ}_{٣}$ ؟

نشاط ٤: بالاعتماد على الشكل المجاور، اثبت باستخدام المتجهات ان



$|\overleftarrow{\text{ع}}|^{٢} = |\overleftarrow{\text{س}}|^{٢} + |\overleftarrow{\text{ص}}|^{٢} - ٢\,|\overleftarrow{\text{س}}|\,|\overleftarrow{\text{ص}}|\,\text{جتاهـ}$ (قانون جيب التمام)

$\overleftarrow{\text{ع}} = \overleftarrow{\text{س}} - $ __________

$|\overleftarrow{\text{ع}}|^{٢} = \overleftarrow{\text{ع}} \cdot \overleftarrow{\text{ع}} = (\overleftarrow{\text{س}} - \overleftarrow{\text{ص}}) \cdot (\overleftarrow{\text{س}} - \overleftarrow{\text{ص}})$

$= |\overleftarrow{\text{س}}|^{٢} + $ __________

$= |\overleftarrow{\text{س}}|^{٢} + |\overleftarrow{\text{ص}}|^{٢} - ٢\,|\overleftarrow{\text{س}}|\,|\overleftarrow{\text{ص}}|\,\text{جتاهـ}$

ثانياً: الضرب المتجهي (الخارجي)

بالإضافة للضرب القياسي (الداخلي) للمتجهات هناك ضرب آخر للمتجهات يسمى الضرب المتجهي (الخارجي) وله تطبيقات فيزيائية مثل العزم والقوة المؤثرة على جسم يسير في مجال مغناطيسي ويمكن تعريفه كما يلي:

$\overleftarrow{\text{أ}} \times \overleftarrow{\text{ب}} = |\overleftarrow{\text{أ}}|\,|\overleftarrow{\text{ب}}|$ جاهـ $\overleftarrow{\text{ن}}$ ، حيث $\overleftarrow{\text{ن}}$ متجه وحدة عمودي على كل من المتجهين $\overleftarrow{\text{أ}}$ ، $\overleftarrow{\text{ب}}$ ، هـ الزاوية الصغرى المحصورة بين المتجهين $\overleftarrow{\text{أ}}$ ، $\overleftarrow{\text{ب}}$ ويتم تحديد اتجاهه باستخدام قاعدة اليد اليمنى.

مثال ٧ : إذا كان $|\overleftarrow{\text{أ}}|$ = ٨ وحدات ، $|\overleftarrow{\text{ب}}|$ = ٦ وحدات هـ = ٣٠° ، أجد ما يلي:

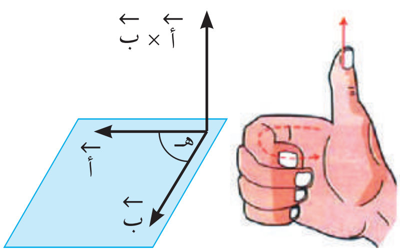
١ $\overleftarrow{\text{أ}} \times \overleftarrow{\text{ب}}$

٢ $|\overleftarrow{\text{أ}} + \overleftarrow{\text{ب}}|$

الحل :

١ $\overleftarrow{\text{أ}} \times \overleftarrow{\text{ب}} = |\overleftarrow{\text{أ}}|\,|\overleftarrow{\text{ب}}|$ جاهـ $\overleftarrow{\text{ن}}$ = ٨ × ٦ × $\frac{١}{٢}$ $\overleftarrow{\text{ن}}$ = ٢٤ $\overleftarrow{\text{ن}}$

ولتحديد اتجاهه نستخدم قاعدة اليد اليمنى كما يلي بحيث نوجه أصابع اليد اليمنى باتجاه $\overleftarrow{\text{أ}}$ ثم نحرك الأصابع باتجاه $\overleftarrow{\text{ب}}$ فيكون اتجاه الإبهام هو اتجاه $\overleftarrow{\text{أ}} \times \overleftarrow{\text{ب}}$



٢ $|\overleftarrow{\text{أ}} + \overleftarrow{\text{ب}}|^{٢} = |\overleftarrow{\text{أ}}|^{٢} + |\overleftarrow{\text{ب}}|^{٢} + ٢\,|\overleftarrow{\text{أ}}|\,|\overleftarrow{\text{ب}}|$ جتاهـ

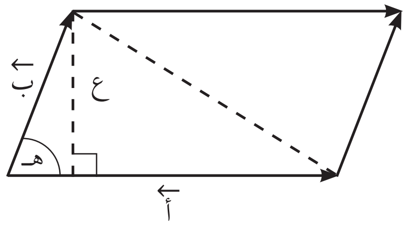
= ٦٤ + ٣٦ + ٢ × ٨ × ٦ × جتا ٣٠° ≈ ١٨٣

ومنها $|\overleftarrow{\text{أ}} + \overleftarrow{\text{ب}}|$ ≈ ١٣,٥

ألاحظ أن: $\overleftarrow{\text{أ}} \times \overleftarrow{\text{ب}} = -(\overleftarrow{\text{ب}} \times \overleftarrow{\text{أ}})$

أفكّر وأناقش: إذا كان $\overleftarrow{\text{أ}} \times \overleftarrow{\text{ب}} = \overleftarrow{\text{٠}}$ ، **ما العلاقة بين** $\overleftarrow{\text{أ}}$ ، $\overleftarrow{\text{ب}}$ ؟

بالاضافة للتطبيقات الفيزيائية توجد تطبيقات هندسية على الضرب الخارجي (المتجهي) وهي ايجاد مساحة متوازي الاضلاع ومساحة المثلث ففي الشكل المجاور



مساحة متوازي الأضلاع = القاعدة × الارتفاع

$= |\overleftarrow{\text{أ}}|\,\text{ع} = |\overleftarrow{\text{أ}}|\,|\overleftarrow{\text{ب}}|\,\text{جاهـ} = |\overleftarrow{\text{أ}} \times \overleftarrow{\text{ب}}|$

مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ مساحة متوازي الأضلاع المشترك معه في القاعدة والارتفاع.

نشاط٥: المتجهان $\overleftarrow{\text{أ}}$ ، $\overleftarrow{\text{ب}}$ يمثلان ضلعين متجاورين في متوازي أضلاع بحيث إن

$|\overleftarrow{\text{أ}}| + |\overleftarrow{\text{ب}}|$ = ١٤ وحدة، $|\overleftarrow{\text{أ}}| - |\overleftarrow{\text{ب}}|$ = ٢ وحدة

وقياس الزاوية بين المتجهين $\overleftarrow{\text{أ}}$ ، $\overleftarrow{\text{ب}}$ يساوي ٣٠°

١ $|\overleftarrow{\text{أ}}|$ = ... ، $|\overleftarrow{\text{ب}}|$ ....

٢ مساحة متوازي الاضلاع =.....................................

٣ مساحة المثلث المشترك مع متوازي الاضلاع في القاعدة والارتفاع = ...

تمارينُ و مسائلُ ١ - ٥

١ أجد ما يلي :

أ $\overleftarrow{أ} \cdot \overleftarrow{ب}$ علماً بأن: $\overleftarrow{أ}$ = (٥ ، ٣ ، ٠) ، $\overleftarrow{ب}$ = (−١ ، ٢ ، ٢)

ب $\overleftarrow{و_١} \cdot \overleftarrow{و_٣}$

٢ أجد قياس الزاوية المحصورة بين المتجهين (١ ، ٤ ، ٣) ، (٣ ، ١٢ ، ٩)

٣ أجد قيمة س فيما يلي :

أ إذا كان $\overleftarrow{أ}$ = (س ، $\sqrt{٣}$) ، $\overleftarrow{ب}$ = (−س ، $\sqrt{٣}$) وقياس الزاوية بينهما ٦٠°

ب إذا كان $\overleftarrow{أ}$ = (جتاس ، −جاس)، $\overleftarrow{ب}$ = (جتاس ، ١ + جاس)، وكان $\overleftarrow{أ} \perp \overleftarrow{ب}$، س ∈]٠ ، π[.

٤ إذا كانت أ نقطة تقع في الثمن الأول وكانت قياسات الزوايا الاتجاهية للمتجه $\overleftarrow{أ}$ هي هـ$_١$ ، هـ$_٢$ ، هـ$_٣$ بحيث إن: هـ$_١$ = $\frac{\pi}{٤}$ ، هـ$_٢$ = $\frac{\pi}{٣}$ ، ما قياس الزاوية هـ$_٣$ ؟

٥ أثبت باستخدام المتجهات أن قطري المعين متعامدان .

٦ إذا كان $\overleftarrow{أ}$ يعامد $\overleftarrow{ب}$ ، وكان $\overleftarrow{أ}$ يعامد $\overleftarrow{جـ}$ أثبت أن $\overleftarrow{أ}$ يعامد $\overleftarrow{د}$ حيث $\overleftarrow{د}$ = م $\overleftarrow{ب}$ + ن $\overleftarrow{جـ}$ ، م ، ن ∈ ح*.

٧ إذا كان | $\overleftarrow{أ} \times \overleftarrow{ب}$ | = ٤٠ $\sqrt{٢}$ ، | $\overleftarrow{أ}$ | = ١٦ ، | $\overleftarrow{ب}$ | = ٥

أ أجد الزاوية بين المتجهين $\overleftarrow{أ}$ ، $\overleftarrow{ب}$.   ب أجد | ٢ $\overleftarrow{أ}$ + ٣ $\overleftarrow{ب}$ |

٨ أثبت باستخدام الضرب المتجهي أن المساحة الجانبية للاسطوانة = ٢ π نق ع .

١ - ٦ الهندسة الفراغية Space Geometry

نشاط ١: ضمن الأنشطة اللاصفية قام معلم مدرسة الأقصى باصطحاب الطلبة لزيارة بناء قيد الإنشاء، لاحظ الطلاب أن عاملاً قد كون زاوية قائمة باستخدام الخيوط فسأل الطالب العامل: كيف تتأكد أن هذه الزاوية قائمة فأجابه العامل بأنه يكوِّن مثلثا أطوال أضلاعه ٦٠ سم، ٨٠ سم، ١٠٠ سم، ويكون هذا المثلث قائم الزاوية.

فسأل المعلم الطلبة بماذا تذكركم هذه الأعداد هندسيا؟ ___________

وهل يوجد قياسات أخرى يمكن استخدامها لتكوين زاوية قائمة؟ ___________

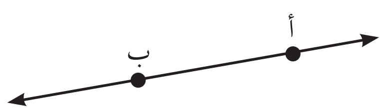
كما لاحظ الطلبة أن العمال يستخدمون ميزان الماء في البناء، لماذا؟

يتكون البناء الرياضي الهندسي من مُسميات أولية ومُسلّمات ونظريات

- **المسميات أولية:** وهي ليس لها تعريف مثل النقطة والمستقيم والمستوى والفراغ. ويمكن إعطاء أمثلة من الواقع مثل موقع مدينة على الخارطة وحافة مسطرة و ملعب كرة قدم.
- **المُسلّمة :** هي عبارة رياضية تربط بين المسميات الأولية وتقبل صحتها دون برهان.
- **النظرية:** عبارة رياضية يمكن إثبات صحتها بالاعتماد على مفاهيمَ ، أو حقائقَ ، أو مُسلّمات أو نظريات سابقة.

وفيما يلي بعض هذه المُسلّمات:

١ **مُسلّمة ١ : لأي نقطتين مختلفتين في الفراغ يوجد مستقيم واحد فقط يمر بهما.**

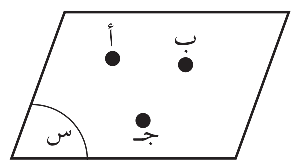


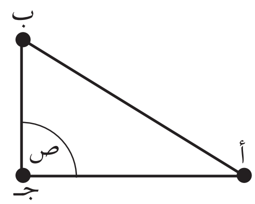
يسمى المستقيم بنقطتين واقعتين عليه مثل $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ أو المستقيم $\overleftrightarrow{\text{ل}}$

أتذكّر: أن النقاط المستقيمة هي النقاط التي تقع على خط مستقيم واحد.

٢ مُسلّمة ٢ : المستوى يحتوي على ثلاث نقاط على الأقل ، مختلفة وليست على استقامة واحدة.

يسمى المستوى أ ب جـ ، أو المستوى س





أتعلّم: النقاط المستوية هي النقاط التي تقع في نفس المستوى.

نشاط ٢: يمكن تحديد مستوى واحد فقط بـ :

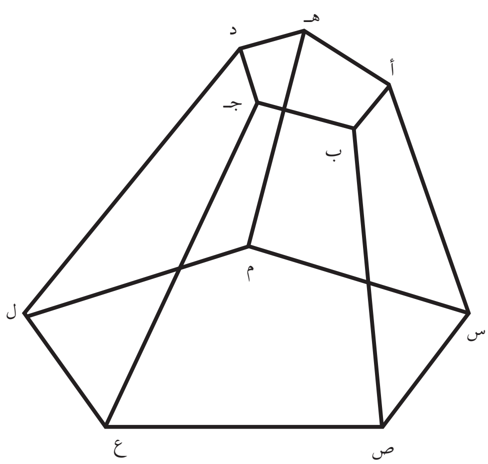
١ ثلاث نقاط غير مستقيمة .

٢ مستقيم ونقطة ______

٣ مستقيمين ________

٤ مستقيمين ________

٣ **مُسلّمة ٣: الفراغ يحتوي على أربع نقاط على الأقل مختلفة و غير مستوية.**



نشاط ٣: من الشكل المجاور أسمي

أ ٤ مستقيمات

١) المستقيم أ ب ٢) ________

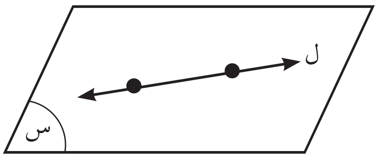
٣) ________ ٤) ________

ب ٤ مستويات

١) المستوى أ ب هـ ٢) ________

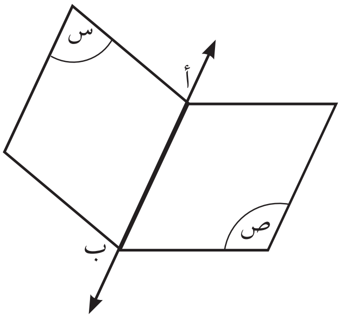
٣) ________ ٤) ________

٤ مُسلّمة ٤: إذا اشترك المستقيم $\overleftrightarrow{ل}$ والمستوى س في نقطتين مختلفتين، فإنّ المستقيم $\overleftrightarrow{ل}$ يقع بأكمله في المستوى.



٥ مُسلّمة ٥: إذا تقاطع مستويان مختلفان، فإنّ تقاطعهما هو خط مستقيم.

وبالرموز س $\cap$ ص = $\overleftrightarrow{أ ب}$

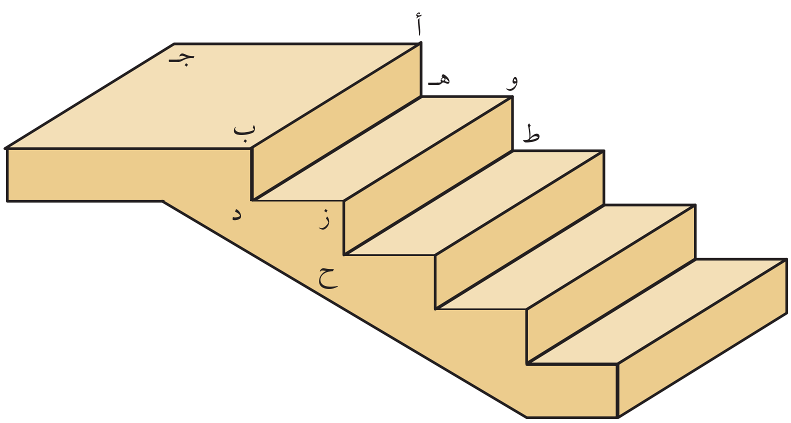


نشاط ٤: بالاعتماد على الشكل التالي أجب عما يلي:

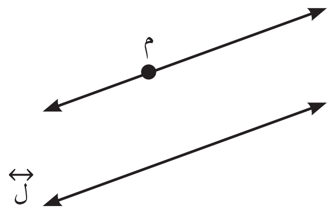
١ يحوي الشكل على عدة مستويات منها المستوى أ ب جـ ، والمستوى ـــــ ، والمستوى ـــــ

٢ المستوى أ ب جـ يتقاطع مع المستوى هـ أ ب في ـــــــ

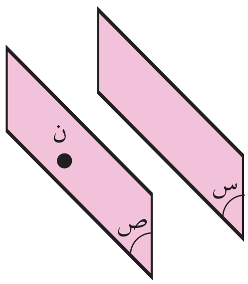
٣ المستقيم وهـ $\subseteq$ المستوى ـــــــ $\overleftrightarrow{أ ب} \cap \overleftrightarrow{ب د}$ = ـــــــ



٦ **مُسلّمة ٦ : إذا وقعت نقطة خارج مستقيم معلوم فإنّه يوجد مستقيم واحد فقط يمرّ بالنقطة ويوازي المستقيم المعلوم.**



٧ **مُسلّمة ٧: إذا كانت ن نقطة لا تنتمي للمستوى س فإنّه يوجد مستوى واحد فقط يمر بالنقطة ن ويوازي المستوى س.**



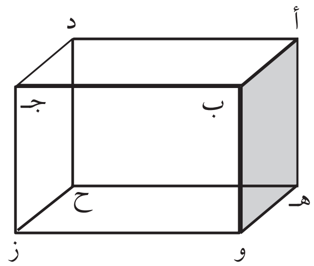
العلاقة بين مستقيمين في الفراغ :

١ مستقيمان متوازيان: وهما مستقيمان يقعان في مستوى واحد ولا يتقاطعان.

٢ مستقيمان متقاطعان: وهما مستقيمان يقعان في مستوى واحد و يتقاطعان في نقطة واحدة فقط.

٣ مستقيمان متخالفانّ: وهما مستقيمان لا يتقاطعان ولا يقعان في نفس المستوى .

نشاط ٥: مستعينا بالشكل المجاور فإنّ هنالك :



١ مستقيمين متوازيين مثل المستقيم أب مع المستقيم هـ و

وأيضا ــــــــــــ

٢ مستقيمين متقاطعين مثل المستقيمين أد ، دجـ

وأيضا ....

٣ مستقيمين متخالفين مثل المستقيمين أب ، و ز

وأيضا ــــــــــــ

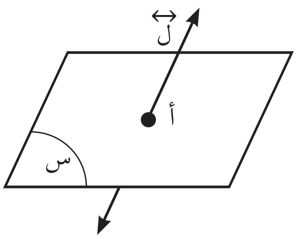
لاحظ أن المستقيم ب و عمودي على المستوى هـ و ز إذن فهو عمودي على جميع المستقيمات الواقعة في نفس المستوى.

كما أنه إذا كان المستقيم أ د ⊥ المستقيم جـ د وكذلك المستقيم أ د ⊥ المستقيم د ح إذن فهو عمودي على المستوى الذي يحويهما وهو د جـ ح .

أي أن المستقيم العمودي على المستوى يكون عموديا على جميع المستقيمات في المستوى والمستقيم العمودي على مستقيمين غير متوازيين في المستوى يكون عمودياً على المستوى.

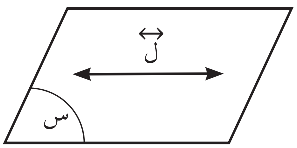
العلاقة بين مستقيم و مستوى في الفراغ

هنالك ثلاث حالات لها :



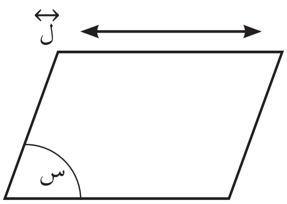
١ مستقيم يقطع مستوى في نقطة

$\overleftrightarrow{\text{ل}} \cap \text{س} = \{\text{أ}\}$



٢ مستقيم يقع بأكمله في المستوى

$\overleftrightarrow{\text{ل}} \cap \text{س} = \overleftrightarrow{\text{ل}}$



٣ مستقيم يوازي مستوى وهو مستقيم لا يشترك مع المستوى في أي نقطة

$\overleftrightarrow{\text{ل}} \cap \text{س} = \phi$

العلاقة بين المستويات في الفراغ:

يمكن للمستويات في الفراغ أن:

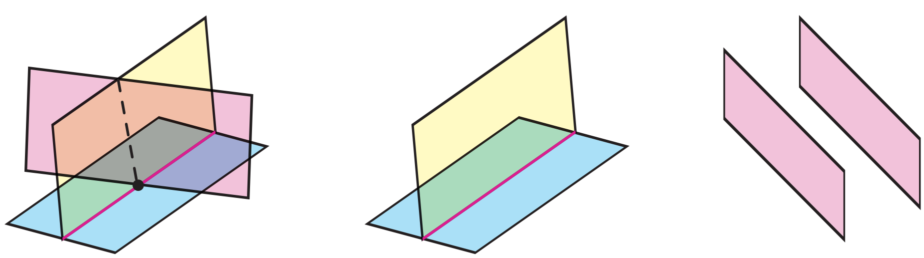
١ تتوازى.

٢ تتقاطع في خط مستقيم.

٣ تتقاطع في نقطة. انظر الشكل:

الأشكال الثلاثية الأبعاد

أوضاع المستويات في الفضاء



متوازيان — متقاطعان في مستقيم — متقاطعة في نقطة

نشاط ٦: على أي مُسلّمة تنطبق الأمثلة التالية :

١ يقوم عامل القصارة باستخدام القطعة المعدنية المستقيمة في عمله لجعل القصارة مستوية.
مسلمة رقم ٤ .

٢ يقوم عامل بتثبيت مسمارين و وصل خيط بينهما ________

٣ يستخدم المصور كاميرا مثبتة على حامل بثلاثة أرجل ________

٤ سقف غرفة يحتوي على مصباح كهربائي (يمثل بنقطة) يوازي أرضية الغرفة ______

تمارينُ و مسائلُ ١ - ٦

١ أضع دائرة حول رمز الإجابة الصحيحة :

١ المستقيمان العموديان على مستوى واحد

أ) متوازيان	ب) متقاطعان في نقطة
جـ) متخالفان	د) متقاطعان في أكثر من نقطة

٢ أي نقطتين في الفراغ يمر بهما

أ) مستقيم واحد	ب) مستقيمان
جـ) ٣ مستقيمات	د) عدد لا نهائي من المستقيمات

٣ المستقيمان اللذان لا يتقاطعان ولا يجمعهما مستوى واحد هما

أ) متوازيان	ب) متقاطعان
جـ) متخالفان	د) متطابقان

٤ إذا كان المستوى س يوازي المستوى ص و كان المستقيم ل ⊥ ص فإنّ المستقيم ل :

أ) يوازي س	ب) يعامد س
جـ) يوازي ص	د) يعامد مستقيم واحد فقط في س

٥ ما عدد نقاط تقاطع مستقيم يقطع مستوى ولا يقع بأكمله في المستوى ؟

أ) نقطة واحدة	ب) نقطتين
جـ) ٣ نقاط	د) عدد لا نهائي من النقاط

٢ أضع علامة (✓) أمام العبارة الصحيحة و علامة (✗) أمام العبارة الخاطئة فيما يلي مع ذكر السبب في حالة العبارات الخاطئة :

١ إذا وقع مستقيمان في مستوى واحد ولم يتقاطعا فإنّهما متوازيان.

٢ يمكن رسم أكثر من مستقيم يمر بنقطة معلومة عموديا على مستوى معلوم.

٣ إذا كان س ، ص مستويين متوازيين وكان المستقيم ل ⊂ س ، والمستقيم م ⊂ ص فإنّ ل // م.

٤ إذا كان ل$_{١}$ ، ل$_{٢}$ مستقيمين في الفراغ و كان س مستوى معلوم حيث ل$_{١}$ ⊥ س ول$_{٢}$ ⊥ س فإنّ ل$_{١}$ // ل$_{٢}$.

٥ أي ثلاث نقاط تعين مستوى.

٦ إذا وازى مستقيم مستوى معلوماً فإنّه يوازي جميع المستقيمات الواقعة في ذلك المستوى.

٧ المستقيمات العمودية على مستقيم واحد تكون متوازية.

٨ من نقطة خارج المستوى س يمكن رسم مستقيم واحد فقط منها عمودي على المستوى.

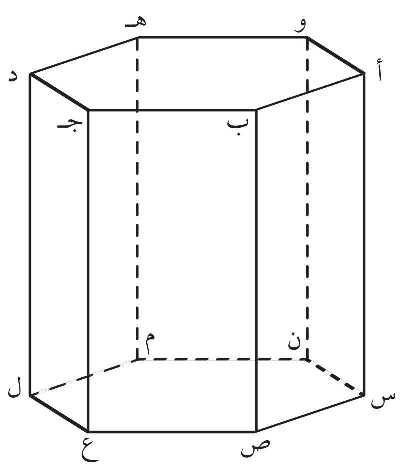
٩ إذا كان المستقيم ل // المستوى س فكل المستويات التي تحوي المستقيم ل // المستوى س.

٣ أذكر عدد المستويات التي يمكن أن تمر بكل مما يلي:

١ نقطة معلومة.

٢ نقطتين معلومتين.

٣ ثلاث نقاط معلومة ليست على استقامة واحدة.



٤ بالاستعانة بالشكل المجاور أعطى امثلة على ما يلي :

١ مستقيمان متوازيان ٢ مستقيمان متخالفان

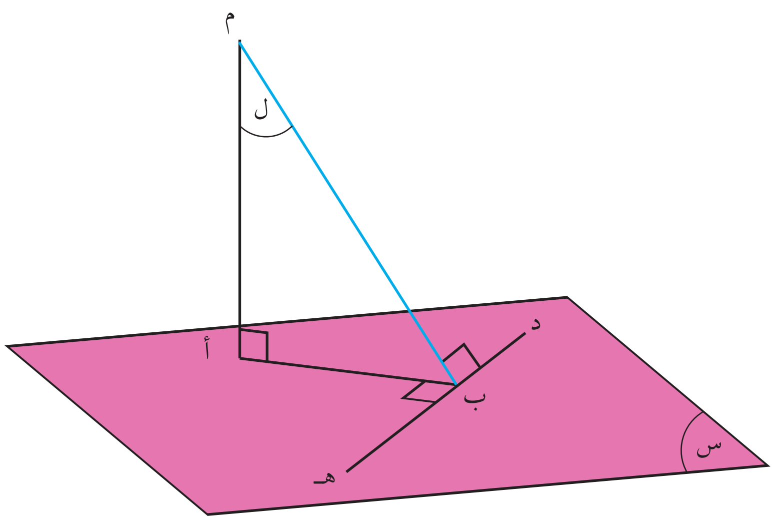
٣ مستقيمان متعامدان ٤ مستويان متقاطعان

٥ مستويان متوازيان ٦ مستقيم يقع في مستوى

افكّر وأناقش: سلم متكئ على شجرة عمودية فإذا بدأ السلم بالانزلاق و توقف عند التقائه بحافة سور، ما قياس الزاوية بين السلم و الخط الأفقي الناتج من تقاطع السور القائم مع الأرض الأفقية ؟

نظرية الأعمدة الثلاثة:

إذا رسم من نقطة في مستوى مستقيمان أحدهما عمودي على المستوى ، والآخر عمودي على مستقيم معلوم في المستوى ، فالمستقيم الواصل بين أية نقطة من نقط المستقيم العمودي على المستوى ونقطة تلاقي المستقيمين يكون عمودياً على المستقيم المعلوم.



الفرضيات المعطاة في النظرية $\overleftrightarrow{\text{أب}} \perp \overleftrightarrow{\text{هـ د}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{أم}} \perp$ المستوى س

المطلوب : إثبات أن $\overleftrightarrow{\text{م ب}} \perp \overleftrightarrow{\text{هـ د}}$ حيث م أي نقطة $\ni$ إلى المستقيم $\overleftrightarrow{\text{أم}}$

البرهان : بما أن $\overleftrightarrow{\text{أم}} \perp$ المستوى س (من المعطيات) فإنّ $\overleftrightarrow{\text{أم}}$ يعامد أي مستقيم $\subset$ س

إذن $\overleftrightarrow{\text{أم}} \perp \overleftrightarrow{\text{هـ د}}$

وبما أن $\overleftrightarrow{\text{أب}} \perp \overleftrightarrow{\text{هـ د}}$ من المعطيات

و $\overleftrightarrow{\text{هـ د}}$ يعامد كل من $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{أم}}$ إذن $\overleftrightarrow{\text{هـ د}}$ عمودي على المستوى الوحيد المار بهما و هو ل

إذن $\overleftrightarrow{\text{هـ د}}$ عمودي على كل مستقيم موجود في المستوى ل اذن $\overleftrightarrow{\text{هـ د}} \perp \overleftrightarrow{\text{ب م}}$

ملاحظة: عكس النظرية صحيح دائما

أي أنه إذا كان $\overleftrightarrow{\text{هـ د}} \perp \overleftrightarrow{\text{ب م}}$ وكان $\overleftrightarrow{\text{أم}} \perp$ المستوى س فإنّ $\overleftrightarrow{\text{أب}} \perp \overleftrightarrow{\text{هـ د}}$

نشاط ١: صالة رياضية على شكل متوازي مستطيلات، ثُبت مصدر ضوئي عند نقطة تقاطع قطري سقفها، أثبت أن الشعاع الواصل من مصدر الضوء إلى نقطة منتصف خط تقاطع حائط الصالة مع أرضيتها يكون عمودياً على هذا الخطّ.

الحل : نفرض أن مصدر الضوء أ ،

وأن تقاطع حائط الصالة مع أرضيتها هو $\overleftrightarrow{\text{هـ د}}$ ،

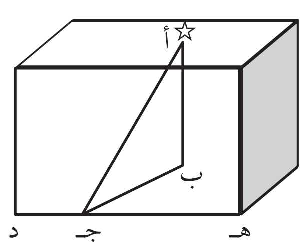
$\overleftrightarrow{\text{أب}}$ عمودي على أرضية الصالة

$\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$ عمودي على $\overleftrightarrow{\text{هـ د}}$

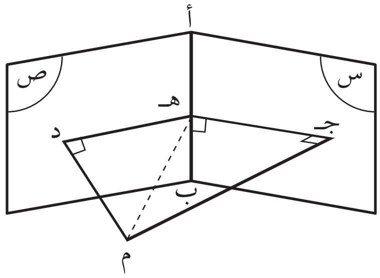
البرهان: $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ عمودي على ________

و بما أن $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}} \perp$ ________

وبحسب نظرية الأعمدة الثلاث فإنّ $\overleftrightarrow{\text{أ جـ}} \perp$ ________



مثال ٢ : س ، ص مستويان متقاطعان في $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ، م نقطة خارجة عنهما ، أنزل العمودان $\overline{\text{م جـ}}$ ، $\overline{\text{م د}}$ ، عليهما ليلاقياهما على الترتيب في جـ ، د ثم أنزل من جـ العمود جـ هـ على $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ، أثبت أن $\overleftrightarrow{\text{د هـ}} \perp \overleftrightarrow{\text{أ ب}}$



المطلوب: إثبات أن $\overleftrightarrow{\text{د هـ}} \perp \overleftrightarrow{\text{أ ب}}$

البرهان: $\overleftrightarrow{\text{م جـ}} \perp$ على المستوى س (من المعطيات)

$\overleftrightarrow{\text{جـ هـ}} \perp \overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ (من المعطيات)

إذن $\overleftrightarrow{\text{م هـ}} \perp \overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ (بالاعتماد على النظرية)

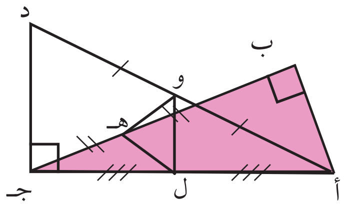
وبما أن $\overleftrightarrow{\text{م د}} \perp$ على المستوى ص

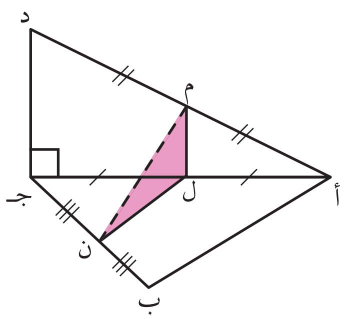
$\overleftrightarrow{\text{م د}} \perp \overleftrightarrow{\text{د هـ}}$

إذن $\overleftrightarrow{\text{د هـ}} \perp \overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ (بالاعتماد على عكس النظرية)

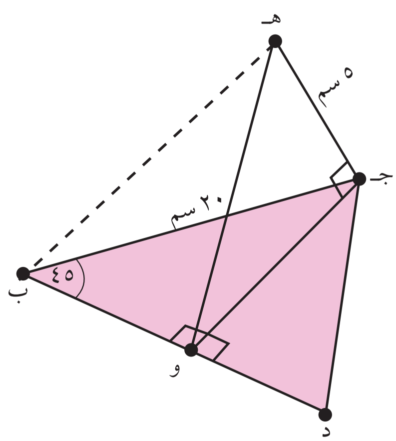
تمارينُ ومسائلُ ١ - ٧

١ المثلث أ ب جـ قائم الزاوية في ب ، رسم جـ د ⊥ المستوى أ ب جـ
ثم وصل أ د ، نصف ب جـ في هـ ،
وكذلك نصف أ د في و .
أثبت أن : و هـ ⊥ ب جـ .





٢ أ ب جـ مثلث رسم جـ د عمودي على المستوى أ ب جـ ، ثم وصل د أ ، ونصف أ د ، أ جـ ، ب جـ في م ، ل ، ن على الترتيب. ثم وصل م ن فكان عمودياً على ب جـ . أثبت أن الزاوية أ ب جـ قائمة.



٣ ب جـ ، ب د قطعتان مستقيمتان، الزاوية بينهما ٤٥ °، أنزل من جـ العمود جـ و على ب د ، فتكوّن المثلث المتساوي الساقين ب و جـ ، ثم أقيم من جـ العمود جـ هـ على المستوى جـ ب د.
أقيم من هـ العمود هـ و على ب د .
بحيث كان طول جـ هـ = ٥ سم ، وطول جـ ب = ٢٠ سم.
أجد طول هـ و .

تمارينُ عامّةٌ

1 أضعْ دائرةً حول رمز الإجابة الصحيحة فيما يلي:

١ ما عدد المستويات التي تمر بمستقيمين متوازيين؟

أ) ١ ب) ٢

جـ) ٠ د) عدد لا نهائي من المستويات

٢ ما العلاقة بين المستقيمين المتخالفين؟

أ) يقعان في مستوى واحد ولا يتقاطعان.

ب) يقعان في مستوى واحد ويتقاطعان.

جـ) لا يقعان في مستوى واحد ولا يتقاطعان.

د) لا يقعان في مستوى واحد ويتقاطعان.

٣ ما المسافة بين النقطة أ(٤ ، ٣ ، ٢) والمستوى س ع ؟

أ) ٤ ب) ٣ جـ) ٢ د) ١

٤ ما قياس الزاوية بين المتجهين $\overleftarrow{أ}$ = (٢ ، ١) $\overleftarrow{ب}$ = (-١ ، ٢)؟

أ) ٩٠° ب) ٠ جـ) ١٨٠ د) ٤٥

٥ ما قيمة س التي تجعل المتجهين الآتيين في نفس الاتجاه؟ $\overleftarrow{أ}$ = (٢ ، س) $\overleftarrow{ب}$ = (٤ ، ٦)

أ) ٠ ب) ٣ جـ) -٣ د) ١

٦ إذا كانت أ(-٥ ، ٤ ، ٢) وكانت جـ(٦ ، ٣ ، ٤) تقع في منتصف $\overline{أب}$ ، فما إحداثيات النقطة ب؟

أ) ($\frac{١}{٢}$ ، $\frac{٧}{٢}$ ، ٣) ب) (٧ ، ١٠ ، ١٠)

جـ) (١٣ ، ١ ، ٤) د) (١٧ ، ٢ ، ٦)

٧ ما قيمة م الموجبة التي تجعل المتجهين التاليين متعامدين ؟

$\overleftarrow{أ}$ = (م ، ٣ ، -١) ، $\overleftarrow{ب}$ = (م + ١ ، -٤ ، -٣م)

أ) ٦ ب) ٢ جـ) ٤ د) ٣

٨ إذا كانت أ (٤ ، ٤ ، ٠) ، ب (٤ ، ٠ ، ٤) ، جـ (٠ ، ٤ ، ٤) فما نوع المثلث أ ب جـ ؟

أ) متساوي الأضلاع ب) قائم الزاوية

جـ) منفرج الزاوية د) مختلف الأضلاع

٩ إذا كان $|\overleftarrow{\text{أ}} + \overleftarrow{\text{ب}}| = |\overleftarrow{\text{أ}}| + |\overleftarrow{\text{ب}}|$ ، ($\overleftarrow{\text{أ}}$ ، $\overleftarrow{\text{ب}}$ متجهين غير صفريين) فما العبارة الصائبة؟

أ) $\overleftarrow{\text{أ}}$ و $\overleftarrow{\text{ب}}$ متعامدين ب) $\overleftarrow{\text{أ}}$ و $\overleftarrow{\text{ب}}$ في نفس الاتجاه

جـ) $\overleftarrow{\text{أ}}$ و $\overleftarrow{\text{ب}}$ عكس الاتجاه د) $\overleftarrow{\text{أ}}$ و $\overleftarrow{\text{ب}}$ متجها وحدة

١٠ أ ب جـ مثلث متساوي الأضلاع طول كل ضلع ٦سم ما قيمة (٢ $\overleftarrow{\text{أجـ}}$) . (٣ $\overleftarrow{\text{أب}}$) ؟

أ) ١٨ ب) ٣٦ جـ) ٣٠ د) ١٠٨

٢ ما قياس الزوايا الاتجاهية للمتجه $\overleftarrow{\text{أ}}$ = (١ ، ٠ ، −١) على الترتيب؟

٣ إذا كان $\overleftarrow{\text{أ}}$ = (س، $\sqrt{٧٥}$) ، $\overleftarrow{\text{ب}}$ = (س ، ٠) س > ٠، أجد قيم س بحيث أن الزاوية المحصورة بين $\overleftarrow{\text{أ}}$ و $\overleftarrow{\text{ب}}$ تساوي ٦٠°.

٤ إذا كان $\overleftarrow{\text{أ}}$ = (−١ ، −٢) وكان $\overleftarrow{\text{ب}}$ =(م ، −١)، أجد م في كل من الحالات الآتية؟

أ $\overleftarrow{\text{أ}}$ يوازي $\overleftarrow{\text{ب}}$ ب $\overleftarrow{\text{أ}}$ عمودي على $\overleftarrow{\text{ب}}$

جـ قياس الزاوية بين $\overleftarrow{\text{أ}}$ و $\overleftarrow{\text{ب}}$ تساوي ٤٥°

٥ إذا كانت الزاوية المحصورة بين المتجهين $\overleftarrow{\text{أ}}$ ، $\overleftarrow{\text{ب}}$ تساوي ٦٠° وكان $|\overleftarrow{\text{أ}}|$ = ٤ ، $|\overleftarrow{\text{ب}}|$ = ١٠

أجد: أ $\overleftarrow{\text{أ}} . \overleftarrow{\text{ب}}$ ب $|\overleftarrow{\text{أ}} + \overleftarrow{\text{ب}}|$ جـ $|\overleftarrow{\text{أ}} - \overleftarrow{\text{ب}}|$

٦ إذا كانت $\overleftarrow{\text{أ}}$ = (٢ ، ٢) ، $\overleftarrow{\text{ب}}$ = (−٢ ، ٥) ، $\overleftarrow{\text{جـ}}$ = (٧ ، −٥) ، $\overleftarrow{\text{د}}$ (−٣ ، ٨) متجهات قياسية، وكانت $\overleftarrow{\text{م}}$ = ٢ $\overleftarrow{\text{أ}}$ + ٣ $\overleftarrow{\text{ب}}$ − $\overleftarrow{\text{جـ}}$ أثبت أن $\overleftarrow{\text{م}}$ // $\overleftarrow{\text{د}}$

٧ باستخدام المتجهات أثبت أن المثلث الذي رؤوسه أ (٧ ، ١ ، ٣) ، ب (٥ ، ٣ ، ٤) ، جـ (٣ ، ٥ ، ٣) هو مثلث متساوي الساقين.

٨ إذا كان $\overleftarrow{\text{أ}}$ = (١ ، ٦ ، ٢) ، $\overleftarrow{\text{ب}}$ = (ك ، ٣ ، م) ، = $\overleftarrow{\text{جـ}}$ = (ك ، م ، ك + م) وكان $\overleftarrow{\text{أ}}$ // $\overleftarrow{\text{ب}}$ أجد:

أ ٢ $|\overleftarrow{\text{جـ}}|^{٢}$ − ٤ $\overleftarrow{\text{ب}} . \overleftarrow{\text{ب}}$ ب (٤ $\overleftarrow{\text{ب}} . \overleftarrow{\text{جـ}}$) $\overleftarrow{\text{أ}}$

٩ $\overleftarrow{\text{أ}}$ متجه في الفراغ طوله ٨ $\sqrt{٣}$ ويصنع زوايا متساوية في القياس مع الاتجاهات الموجبة للمحاور الإحداثية أكتب $\overleftarrow{\text{أ}}$ بدلالة متجهات الوحدة الأساسية .

١٠ أثبت أن $|\overleftarrow{\text{أ}} \times \overleftarrow{\text{ب}}|^{٢} + (\overleftarrow{\text{أ}} . \overleftarrow{\text{ب}})^{٢} = |\overleftarrow{\text{أ}}|^{٢} |\overleftarrow{\text{ب}}|^{٢}$.

أقيّم ذاتي أعبر بلغتي عن كيفية توظيف المفاهيم التي تعلمتها في هذه الوحدة في حياتي العملية بما لا يزيد عن ٤ أسطر.

فكرة رياديّة

المحتوى الرياضي: متجهات، توازي متجهات تعامد متجهات ضرب متجهات جمع متجهات مستويات ونقاط ومستقيمات والعلاقة بينها في الفراغ

الفكرة الريادية: توظيف ما تم تعلمه في وحدة المتجهات والهندسة الفراغية في فتح مشغل نجارة لانتاج طاولات معدة لاستخدام الحاسوب .

نشأة واختيار الفكرة: حاجة السوق المحلي لمثل هذه الطاولات حيث تستخدم لأغراض مكتبية والحاسوب.

خطة العمل وآلية تنفيذها:

أولاً: يقوم الطلبة بتحديد الازمات والمخاطر المتوقعة من تنفيذ هذه الفكرة وتحديد مصادر التمويل والوسائل والأدوات اللازمة وكيفية تسويقها بالمناقشة والحوار.

المخاطر	الأضرار	النجاحات المتوقعة
مادية		
نفسية		
اجتماعية		

مصادر التمويل: المجتمع المحلي، ____________

الأدوات والمواد اللازمة:

محل فارغ مجهز بالكهرباء، ____________

كيفية تسويقها:

عرض الفكرة من قبل الطلبة على صفحات التواصل الاجتماعي لكسب الرأي العام للفكرة،

____

ثانياً: توزيع طلبة الصف الى مجموعات، وتعيين منسق لكل مجموعة، يقوم المنسق بإطلاع منسقي المجموعات الأخرى على مراحل العمل داخل المجموعة وتفصيلاته، والذين بدورهم يقومون بنقلها لأفراد مجموعاتهم.

المجموعة الأولى: تعمل على البحث على مكان للمشغل عن طريق التواصل مع المجتمع المحلي. يقوم منسق المجموعة بعرض أهم النتائج التي توصلت اليها المجموعة أمام الطلبة، ويتم مناقشة النتائج بإشراف المعلم.

المجموعة الثانية: تعمل على البحث عن ممول للماكنات والمعدات عن طريق التواصل مع المجتمع المحلي. يقوم منسق المجموعة بعرض أهم النتائج التي توصلت اليها المجموعة أمام الطلبة، ويتم مناقشة النتائج بإشراف المعلم.

المجموعة الثالثة: تقوم هذه المجموعة بالبحث عبر الانترنت عن طريقة صنع الطاولات والنماذج المستخدمة ومناقشتها والعمل على تطويرها وصنع نماذج جديدة وكذلك البحث عن برامج حاسوبية تساعد في التصميم والرجوع الى الكتاب المقرر والبحث عن القوانين والنظريات التي يمكن تطبيقها والاستفادة منها. يقوم منسق المجموعة بعرض أهم النتائح التي توصلت اليها المجموعة أمام الطلبة، ويتم مناقشة النتائج بإشراف المعلم.

المجموعة الرابعة: هي مجموعة استشارية بحيث تقوم بالاجتماع مع كل مجموعة ونقل الافكار بين المجموعات وتقديم النصائح والاقتراحات كما تقوم بزيارة فنيين مختصين واخذ الخبرة منهم ونقلها الى بقية المجموعات. يقوم منسق المجموعة بعرض أهم النتائج التي توصلت اليها المجموعة أمام الطلبة، ويتم مناقشة النتائج بإشراف المعلم.

النتائج: يقوم منسقو المجموعات بعرض أهم النتائج التي توصلوا لها بمشاركة بقية أفراد المجموعات، ومنها:

- الاستفادة من الرياضيات في معرفة مدى اسهامها في الحياة كعلم وفن وثقافة وتطوير الصناعات.

روابط إلكترونية

- https://www.mathsisfun.com/algebra/vectors.html
- https://mathinsight.org/vector_introduction

الوحدة
٢

المنطق الرياضي

يقول الإمام الغزالي:

«الإكراه سلاح كلِّ فقيرٍ في براهينه، فاشلٍ في إقناعه، أعْوَزه المنطق فأسعفته العصا»

أناقش هذه العبارة؟

يتوقع من الطلبة بعد الإنتهاء من دراسة هذه الوحدة والتفاعل مع أنشطتها أن يكونوا قادرين على توظيف العبارات الرياضية وجداول الصواب في الحياة العمليّة من خلال الآتي:

1. التعرف إلى أنواع العبارات الرياضية، وأدوات الربط بينها.
2. التعرف إلى جداول الصواب، وتوظيفها في إثبات تكافؤ العبارات.
3. التعرف إلى العبارات المسورة جزئياً وكلياً، ونفيها، والحكم على صحتها.
4. إثبات صحة بعض العبارات الرياضية باستخدام طرق البرهان الرياضي (المباشر، وغير المباشر، والتناقض، والاستقراء الرياضي).

٢ - ١ العبارة الرياضية، ونفيها (Mathematical Statement and Contrapositive Statements)

أولاً: العبارة الرياضية

نتحدث ونتحاور ونتناقش في حياتنا اليومية وتعاملاتنا المختلفة بكلمات وجمل، ولعل معجم كل منّا يزخر بأمثلة لأنواع من الجمل التي نتحدث بها.

نشاط ١: أقرأ الحوار الآتي الذي دار بين الصديقين حسام ويوسف:

حسام : هل اطلعت يا يوسف على القانون الأساسي الفلسطيني؟

يوسف : لم تسنح لي الفرصة لغاية الآن للاطلاع عليه، أخبرني عن مواد هذا القانون.

حسام : ما أكبر سؤالك، يا يوسف! وما أطول إجابته! فهو بحاجة إلى مختص للإجابة عليه، ولكن سأعطيك بعض الأمثلة التي أعرفها: جاء في (المادة ٢٤) من هذا القانون، «أن التعليم حق لكل مواطن، وإلزامي حتى نهاية المرحلة الأساسية على الأقل، ومجاني في المدارس والمعاهد والمؤسسات العامة».

يوسف : وماذا جاء في هذا القانون عن العمل والحياة السياسية، يا حسام؟

حسام : جاء في (المادة ٢٥) أن العمل حق لكل مواطن، وهو واجب وشرف، وتسعى السلطة الوطنية إلى توفيره لكل قادر عليه»، كما جاء في القانون أيضاً «أن التنظيم النقابي حق وينظم القانون أحكامه، والحق في الإضراب يمارس في حدود القانون»، وجاء في (المادة ٢٦) من هذا القانون «أن للفلسطينيين حق المشاركة في الحياة السياسية أفراداً وجماعاتٍ، ولهم على وجه الخصوص الحق في تشكيل الأحزاب السياسية، والانضمام إليها، والحق في تشكيل: النقابات، والجمعيات، والاتحادات، والروابط والأندية، والمؤسسات الشعبية وَفقاً للقانون».

يوسف : لقد أثرت فضولي يا حسام للبحث عن وثيقة القانون الأساسي الفلسطيني؛ لمعرفة حقوقي من جهةٍ، وما يترتب علي من واجبات من جهةٍ أخرى في مناحي الحياة كافة.

بالرجوع إلى الحوار الذي دار بين الصديقين حسام ويوسف، أعطي مثالاً على:

١ شبه جملة ٢ جملة استفهامية ٣ جملة تعجبية

٤ جملة خبرية ٥ جملة نداء ٦ جملة منفية

العبارة الرياضية : جملة خبرية (إما أن تكون صائبةً، أو خاطئةً، ولا تكون كليهما).

ولكل عبارة رياضية قيمة صواب: إما صائبة ويرمز لها بالرمز (ص) وإما خاطئة ويرمز لها بالرمز (خ).
بالرجوع إلى نشاط ١ السابق، وبالاعتماد على التعريف، أعطي أمثلةً لعبارات رياضية.

مثال ١ : أقرأ ما يأتي، وأبيّن أيّاً منها يمثل عبارة رياضية؟

١ ياسر عرفات أول رئيس لمنظمة التحرير الفلسطينية.
٢ ما أجمل بحر غزة !
٣ الأرض تدور حول الشمس.
٤ ما ارتفاع جبل جرزيم؟
٥ زويل عالم كيمياء مصري.
٦ ١ عدد أولي.
٧ فدوى طوقان شاعرة فلسطينية.
٨ استمع لنصيحتي.

الحل :

١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨
عبارة	ليست عبارة	عبارة	ليست عبارة	عبارة	عبارة	عبارة	ليست عبارة

نشاط ٢: أكتب قيم صواب العبارات الرياضية الواردة في الجدول الآتي*:

الرقم	العبارة الرياضية	قيمة الصواب
١	لُقِّب الخليفة عمر بن الخطاب رضي الله عنه بالفاروق	ص
٢	أعلى جبل في الوطن العربي هو جبل النبي شعيب في اليمن	
٣	نظم سميح القاسم قصيدة الأرض	
٤	مارك زوكربيرج مؤسس موقع فيس بوك	
٥	يقبل العدد ٢٢٥ القسمة على ٣ دون باقٍ	ص
٦	ق(٢) هو أحد أصفار الاقتران ق(س) = س^{٣} – ٨	خ

ولتسهيل التعامل مع العبارات الرياضية، فإنه بإمكاننا إعطاء العبارة الرياضية أحد الرموز الهجائية، فيمكن أن نرمز للعبارة الرياضية «النيل أطول نهر في العالم» بالرمز «ف» ونكتب ف: النيل أطول نهر في العالم.

* يمكن الحصول على بعض المعلومات بالرجوع إلى الشبكة العنكبوتية

ثانياً: نفي العبارة الرياضية

يقول الشاعر: وليـس عتـابُ النـاسِ للمـرءِ نافعـاً إذا لم يكـن للمـرءِ لُـبٌّ يعاتبـه

تتعدد في اللغة العربية أدوات النفي، مثل: ليس، لا، لم وغيرها، وبهذه الأدوات يمكن أن ننفي العبارة الرياضية، فنفي العبارة الرياضية ف: النيل أطول نهر في العالم هو: النيل ليس أطول نهر في العالم، وتكتب رمزياً ~ ف: ونفي العبارة الرياضية ن: **ط** $\subseteq$ **ص**، هو ~ ن : **ط** $\nsubseteq$ **ص**.

أفكر وأناقش: ما العلاقة بين قيمة صواب العبارة الرياضية ف، وقيمة صواب نفيها؟

مثال ١ : أنفي كل عبارة من العبارات الرياضية الآتية، دون استخدام «ليس صحيحاً أن»:

١ منير نايفة عالم ذرة فلسطيني

٢ ٩١ عدد أولي

٣ $\sqrt[3]{١٥}$ عدد غير حقيقي

٤ ٧ أحد عوامل ٨٣

٥ ٢ ≤ −٧

٦ $\frac{٢}{٣} > \frac{٣}{٢}$

الحل :

العبارة الرياضية	منير نايفة عالم ذرة فلسطيني	٩١ عدد أولي	$\sqrt[3]{١٥}$ عدد غير حقيقي	٧ أحد عوامل ٨٣	٢ ≤ −٧	$\frac{٢}{٣} > \frac{٣}{٢}$
نفيها	منير نايفة ليس عالم ذرة فلسطيني	٩١ عدد غير أولي	$\sqrt[3]{١٥}$ عدد حقيقي	٧ ليس أحد عوامل ٨٣	٢ > −٧	$\frac{٢}{٣} \leq \frac{٣}{٢}$

تمارين ومسائل ٢-١

١ أبيّن فيما إذا كانت الجمل الآتية تمثل عبارات رياضية أم لا؟

أ) يقع المسجد الأقصى في القدس. ب) سبسطية بلدة أثرية. جـ) $٢^{٣} = ٣^{٢}$

د) ٢س^{٢} + ص^{٢} = ١ تمثل معادلة دائرة. هـ) يا طلبتي الأعزاء. و) سجّل أنا عربي.

٢ أبيّن قيم الصواب لكل من العبارات الرياضية الآتية:

١ منحنى الاقتران ق(س) = $\sqrt{\text{س}}$ متماثل حول نقطة الأصل.

٢ $\sqrt{٤٥} < \sqrt[٣]{١٣٥}$

٣ ق(س) = س^{٢} اقتران فردي.

٤ العدد $٢^{١٠}$ من مضاعفات العدد ٣٢

٥ الصفر عدد نسبي.

٦ المستقيم الذي معادلته س = ٢ يعامد المستقيم الذي معادلته ص = $\frac{١}{٢}$

٣ أنفي العبارات الرياضية الواردة في السؤال السابق.

٤ أضع دائرةً حول رمز الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي:

١ ما الجملة التي تمثل عبارة رياضية فيما يأتي؟

أ) ما أعلى البرج! ب) الخوارزمي عالم رياضيات

جـ) يا مجيب الدعوات د) اشرب العصير

٢ ما الجملة التي **لا تمثل** عبارة رياضية فيما يأتي؟

أ) ٢ س + ٣ = ٥ ب) ٢ + ٣ > ٥ جـ) ٢ + ٣ ≥ ٥ د) ٢ + ٣ = ٥

٣ ما نفي العبارة الرياضية ١٢ ≤ -٢١؟

أ) -٢١ ≤ ١٢ ب) ١٢ ≥ -٢١ جـ) ١٢ < -٢١ د) ١٢ ≥ ٢١

٤ ما العبارة الرياضية التي قيمة صوابها (ص) فيما يأتي؟

أ) الزئبق مادة صلبة في الطبيعة. ب) النحاس غير موصل للتيار الكهربائي.

جـ) النيتروجين من الهالوجينات. د) الأكسجين ضروري للاحتراق.

٥ ما العبارة الرياضية التي قيمة صوابها (خ) فيما يأتي؟

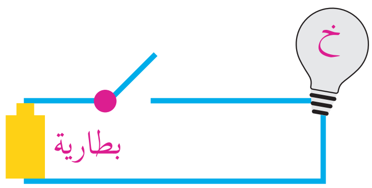
أ) رموز نظام العد الثنائي هي ١، ٢ ب) رموز نظام العد الثنائي هي ٠ ، ١

جـ) ١ جيجا بايت = $١٠^{٩}$ بايت د) ١ ميجا بايت = $١٠^{٦}$ بايت

٢ - ٢ جداول الصواب، وأدوات الربط (Truth Tables and Connection Tools)

أولاً: جداول الصواب

تعلمت في درس سابق أن العبارة الرياضية ف إما أن تكون صائبة أو خاطئة، أي أن قيمة صوابها يمكن أن تكون صائبة أو خاطئة.



ويمكن أن نمثل العبارة الرياضية بالدارة الكهربائية.
(أنظر الشكل المجاور) التي لها فرصتان للتشغيل، فإما أن تكون مغلقاً ويقابل ذلك قيمة الصواب (ص)، وإما أن تكون مفتوحاً، ويقابل ذلك قيمة الصواب (خ).

أما إذا كان لدينا العبارتان ف، ن فإن لهاتين العبارتين الرياضيتين معاً أربع حالات لقيم صوابها، وهي: العبارتان صائبتان، أو الأولى صائبة والثانية خاطئة، أو الأولى خاطئة والثانية صائبة، أو الاثنتان خاطئتان، ولتسهيل كتابة إمكانات صواب أو خطأ عبارتين رياضيتين مركبتين معاً، فقد تم تنظيم هذه الإمكانات في جداول خاصة تسمى جداول الصواب، وهي مفيدة لنا لدراسة العبارات الرياضية المركبة في جوانب عديدة كما سيتضح لاحقاً، والجدول الموضح هو جدول الصواب الخاص بالعبارتين ف، ن

ف	ن
ص	ص
ص	خ
خ	ص
خ	خ

أفكر وأناقش: عدد الإمكانات الممكنة لقيم صواب ك عبارة رياضية مركبة يساوي $٢^{ك}$.

ثانياً: العبارة الرياضية المركبة

في خضم حديثنا عن التراث الفلسطيني، تتردد بعض الجمل مثل: المسخن أكلة فلسطينية، والخبيصة (حلوى الخروب) من الحلويات الشعبية الفلسطينية التي دأبت على إعدادها الجدّات، والقمباز والكوفية، أو الحطة والعقال، أزياء تراثية طالما ارتداها أجدادنا...

العبارة الرياضية المركبة: هي عبارة رياضية تتكون من عبارتين رياضيتين، أو أكثر تربط بينها أدوات ربط مثل (و) ، (أو) ، (إذا كان... فإن ...) ، (...إذا وفقط إذا ...).

١ أداة الربط (و) (and)

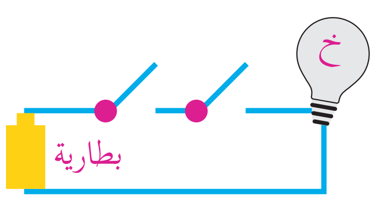
يرمز لأداة الربط (و) بالرمز $\wedge$.

نشاط ١: وعد والد كريم ابنه كريماً بأنه سيصحبه في رحلة إلى بيت لحم، وسيقدم له هديةً إن حصل على معدلٍ عالٍ، وبعد حصول كريم على معدل عال، فكر في وعد والده، فوجد إمكانات أربعة لتنفيذ الوالد وعده، فإما أن ينفذ وعده كاملاً، حيث سيصحبه إلى بيت لحم ويقدم له الهدية، وهذا هو السلوك الصائب الذي يتماشى مع القيم الإيجابية السائدة، في الإيفاء بالوعد، وإما ألّا ينفذ وعده جزئياً، بمعنى سوف لن يصحبه إلى بيت لحم ولكن سيقدم له هدية، أو سيصحبه إلى بيت لحم ولن يقدم له هدية ،أو ألّا ينفذ وعده كاملاً أي لن يصحبه إلى بيت لحم ولن يقدم له هدية، ترى كيف تصرّف الأب تجاه وعده لابنه؟

إذا رمزنا ف: صحب الأب ابنه كريماً إلى بيت لحم، ن: قدم الأب هدية لكريم، فإنه يمكن بناء جدول الصواب للعبارة الرياضية: ف $\wedge$ ن بإمكاناته الأربعة المقابلة لإمكانات تنفيذ والد كريم للوعد كما يأتي: ويلاحظ من الجدول أن ف $\wedge$ ن تكون صائبةً في الحالة الوحيدة التي تكون كل من مركبتيها صائبة، وفيما سوى ذلك تكون خاطئة.

ف	ن	ف $\wedge$ ن
ص	ص	ص
ص	خ	خ
خ	ص	خ
خ	خ	خ

أفكر وأناقش: ما أوجه الشبه بين قيم الصواب الممكنة للعبارة الرياضية ف $\wedge$ ن
وإمكانات تشغيل الدارة الكهربائية ذي المفتاح المزدوج الممثلة بالشكل المجاور؟



نشاط ٢: أكتب قيمة الصواب لكل من العبارات الرياضية المركبة الآتية في المكان المخصص، موضحاً السبب:

١ العسل مفيد لصحة الإنسان، والنحلة حشرة مفيدة للبيئة.

ألاحظ أن مركبتي العبارة صحيحتان، وأداة الربط هي (و) لذا فالعبارة المركبة صحيحة.

٢ الأسد مفترس، والحمامة جارحة ____________

٣ (٢ $\in$ ح) $\wedge$ (٢ $<$ -٥) (خ) لأن ٢ $\in$ ح صائبة ، ٢ $<$ -٥ خاطئة $\therefore$ ص $\wedge$ خ هو خ

٤ ($٢^{٣}$ = ٨) $\wedge$ لـو$_{٢}$ (٨) = ٣ ____________

٥ (جتا $\frac{\pi}{٤}$ = $\sqrt{٣}$) $\wedge$ (ظا $\frac{\pi}{٤}$ = $\sqrt{٣}$) ____________

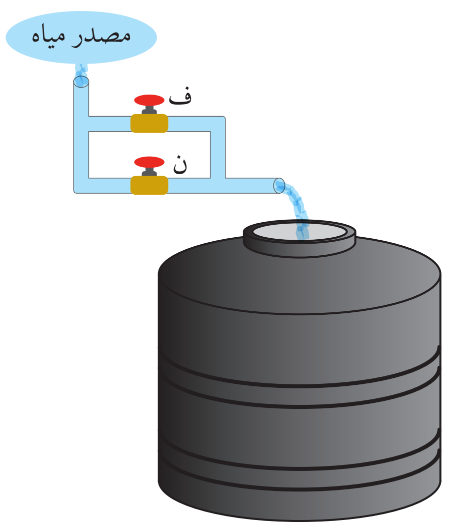
٢ أداة الربط (أو) (or)

يرمز لأداة الربط (أو) بالرمز ($\vee$)

وتكون العبارة الرياضية المركبة التي تربط مركبتيها أداة الربط (أو) خاطئةً في الحالة الوحيدة التي تكون كل من مركبتيها خاطئةً، وفيما سوى ذلك تكون صائبةً لاحظ الجدول:

ف	ن	ف $\vee$ ن
ص	ص	ص
ص	خ	ص
خ	ص	ص
خ	خ	خ

نشاط ٣: أتأمل الشكل المجاور، كيف يمكن الربط بين إمكانية تدفق الماء من مصدره، والوصول للخزان، مع أداة الربط (أو) وجدول صوابها.



١ أذكر الحالات التي سيتدفق بها الماء من المصدر وصولاً إلى الخزان.

١- المحبسان ف ، ن مفتوحان

٢- ____________ .

٣- ____________ .

٢ ما الحالة التي لن يصل بها الماء إلى الخزان؟ ____________ .

٣ أستخدم الرمز ص إذا كان المحبس مفتوحاً، خ إذا كان مغلقاً، ثم أمثل الحالات السابقة في جدول، وأقارنه بجدول الصواب الخاص بأداة الربط (أو).

مثال ٢ : أوضح قيم صواب العبارات الرياضية المركبة الآتية:

١ المثلث مجسم أو الإسطوانة شكل مستوٍ.

٢ ($\varnothing \supset \{٠\}$) أو (٢ $\not\ni$ {٢٣})

٣ (مجموع قواسم العدد ١٨ > ٤٠) أو ٧ تقسم على ٢٨ دون باقٍ.

٤ إما المسجد الأقصى أو المسجد الحرام أولى القبلتين.

٥ باب الساهرة أحد أبواب الخليل أو الطور أحد جبالها.

الحل : ألاحظ الجدول

رقم العبارة	المركبة الأولى ف	المركبة الثانية ن	ف ∨ ن
١	خ	خ	خ
٢	ص	ص	ص
٣	خ	خ	خ
٤	ص	خ	ص
٥	خ	خ	خ

تمارين و مسائل ٢-٢

١ لتكن ف: النيون من العناصر النبيلة ، ن: الكبريت فلز

أعبر عن العبارات الرياضية الرمزية الآتية بالكلمات، وأبيّن قيمة صواب كل منها:

أ ف $\wedge$ ~ ن   ب ~ ف $\wedge$ ~ ن   جـ ~ ف $\vee$ ن

٢ أبين قيمة صواب كل من العبارات الرياضية المركبة الآتية:

أ يحدث الخسوف للشمس و يحدث الكسوف للقمر

ب م (٢ ، ٥) تحقق ص = ٢س + ١ أو ك ($^-$٢ ، $^-$١) تقع في الربع الثالث في المستوى الديكارتي

جـ ($\sqrt{٢}$ $\in$ ح) و (π عدد نسبي)

٣ أضع دائرة حول رمز الإجابة الصحيحة فيما يأتي:

١ إذا كانت ف عبارة رياضية صائبة ، ن خاطئة ، ما العبارة الرياضية المركبة الصائبة فيما يأتي؟

أ) ف $\wedge$ ن   ب) ~ ف $\wedge$ ن   جـ) ~ ف $\vee$ ~ ن   د) ن $\vee$ ~ ف

٢ ما العبارة الرياضية الصائبة فيما يأتي؟

أ) الألوان الأساسية هي: أحمر، أصفر، أزرق

ب) الألوان الثانوية هي: أحمر، أصفر، أزرق

جـ) الألوان الباردة هي: أحمر، أصفر، أزرق

د) الألوان المحايدة هي: أحمر، أصفر، أزرق.

٣ ما العبارة الرياضية **التي قيمة صوابها (خ)** فيما يأتي؟

أ) ابن الهيثم عالم بصريات و أبو قراط أبو الطب.

ب) ابن الهيثم ليس عالم بصريات أو أبو قراط أبو الطب.

جـ) ابن الهيثم عالم بصريات أو أبو قراط ليس أبا الطب.

د) ابن الهيثم ليس عالم بصريات و أبو قراط أبو الطب.

٤ ما العبارة الرياضية الصحيحة فيما يأتي؟

أ) $^-$٣ عدد غير صحيح ٧ $\sqrt{٢}$ عدد غير نسبي.

ب) $^-$٣ عدد غير صحيح ٧ $\sqrt{٢}$ عدد نسبي.

جـ) $^-$٣ عدد غير صحيح ٨ $\sqrt{٢}$ عدد نسبي.

د) $^-$٣ عدد غير صحيح ٨ $\sqrt{٢}$ عدد غير نسبي.

٢ – ٣ أدوات الربط الشرطية (Conditional Connection Tools)

أولاً: أداة الربط: (إذا كان ... فإن ...) (If... then...)

تسمى أداة الربط (إذا كان... فإن ...) أداة الشرط ويرمز لها بالرمز (←)

نشاط ١: إليك النص الآتي:

«هناك علاقة ثلاثية مميزة بين الفلاح والأرض والمطر، فإذا كان المطر يعيق حركة بعض الناس، فإن الفلاح ينتظر نزوله بفارغ الصبر؛ لتثمر أرضه وتجود بالحصاد، والخير الوفير. يطل أبو نجيب من شباك بيته، ويراقب المطر الغزير، ويقول لزوجته: إن استمر المطر في الهطول، سيكون موسم خير علينا، وستغل زروعنا، وإذا بعنا منتوجنا من الحبوب فإننا سنكون قادرين على شراء الجرّار، وإذا اشتريناه سيعيننا في العمل في الأرض، ويتضاعف إنتاجنا، وعندها سنكون قادرين على تعليم أبنائنا». إذا تأملت النص السابق تجد أنه يزخر بالعبارات الشرطية، وتجد أن كلاً منها يتكون من فعل الشرط وجوابه، تربطهما أداة الربط (إذا كان... فإن ...) ويعبر عنها رمزياً (ف ← ن) ، وتقرأ (إذا كان ف فإن ن) أو (ف إذن ن)، تسمى مركبتها الأولى ف مقدمة العبارة الرياضية الشرطية، بينما تسمى الثانية تاليها؛ أكمل جدول الصواب لهذه العبارة الرياضية كما يأتي:

ف	ن	ف ← ن
ص	ص	ص
ص		خ
خ		ص
	خ	ص

ويلاحظ أن العبارة الرياضية الشرطية ف ← ن تكون خاطئة في الحالة الوحيدة، عندما تكون مقدمتها صائبة وتاليها خاطئاً .

مثال ١ : عامر من أفضل طلبة الصف الذين يبرمجون (الروبوت) في المدرسة الصناعية، قال له مدير المدرسة في بداية العام الدراسي: إذا فزت في المسابقة التي تنظمها وزارة التربية (للروبوتات) فسأقدم لك جائزةً، جهاز حاسوب محمول. متى تكون هذه العبارة الرياضية صائبة، ومتى تكون خاطئة؟

الحل : بناءً على جدول صواب العبارة الرياضية الشرطية، وكما هو واضح في الجدول السابق، تكون العبارة الرياضية صائبة في الحالات الآتية :

١ عامر فاز في المسابقة وقدم له المدير الجائزة.

٢ لم يفز عامر ولكن المدير قدم له الجائزة.

٣ لم يفز عامر ولم يقدم له المدير الجائزة.

وتكون هذه العبارة الرياضية خاطئة في الحالة: «أن عامراً فاز بالمسابقة، ولكن المدير لم يقدم له الجائزة».

نشاط ٢: أكتب قيم صواب كل من العبارات الرياضية الآتية في المكان المخصص، وأبيّن السبب:

١ إذا كان وادي الباذان يقع في نابلس فإن سلفيت محافظة الزيتون.

وادي الباذان في نابلس عبارة صائبة،

وكذلك سلفيت محافظة الزيتون ∴ ص ← ص هو .....

٢ للمثلث متساوي الساقين محورا تماثل إذن مجموع قياسات زواياه = ١٨٠° ________ .

٣ (إذا كان الصفر حلاً للمعادلة س^{٢} = س) فإن (٤$^{-\frac{١}{٢}}$ = ٢) ________ .

الصفر حل للمعادلة س^{٢} = س صائبة، ٤$^{-\frac{١}{٢}}$ = ٢ خاطئة (لماذا؟) ∴ ص ← خ هو ___ .

٤ (٥$^{-١}$ = −٥) ← ($\sqrt{١٨}$ = ٢$\sqrt{٣}$) ________ .

ثانياً: أداة الربط (... إذا وفقط إذا...) (If and only if...)

يرمز لهذه الأداة بالرمز (↔) وتسمى أداة الشرط الثنائية وتقرأ ف إذا وفقط إذا ن

ويرمز لها (ف ↔ ن) تعني (ف ← ن) ∧ (ن ← ف)

إذا كانت ف: الضرب عملية تبديلية على ح ، ن: أ × ب = ب × أ ، أ، ب ∈ ح فإن العبارة الرياضية «الضرب عملية تبديلية إذا وفقط إذا كان أ × ب = ب × أ» ويكون جدول صواب هذه الأداة كما يأتي:

ف	ن	ف ↔ ن
ص	ص	ص
ص	خ	خ
خ	ص	خ
خ	خ	ص

مثال ٢ : أبين قيم الصواب للعبارات الرياضية الآتية:

١ الوسط الحسابي $\bar{س} = \frac{\sum س}{ن}$ إذا وفقط إذا $\sum س = ن \times \bar{س}$.

٢ قطرا المستطيل متعامدان إذا وفقط إذا كانت زواياه قوائم.

٣ ٢ + ٣ > ١٠ إذا وفقط إذا كان ٥١ عدداً أولياً.

٤ $\sqrt{٤} = \pm ٢ \leftrightarrow |-٤| = ٤$

٥ الحرم الإبراهيمي في الخليل إذا وفقط إذا كانت كنيسة المهد في القدس.

الحل : ١ ، ٣ صائبتان ، ٢ ، ٤ ، ٥ خاطئة.

تمارين ومسائل ٢-٣

١ لتكن ف : الوتر أطول أضلاع المثلث قائم الزاوية

ن : مجموع قياسات زوايا الشكل الخماسي الداخلية = ٥٤٠°

أعبر عما يأتي بالكلمات:

١ ف ← ن ٢ ~ ن ← ~ ف ٣ ~ ف ↔ ن

٢ أبين قيم الصواب لكل مما يأتي:

١ إذا كان الصفر عدداً فردياً فإن الواحد عدد أولي.

٢ إذا كان ١٠٠ أحد قوى العشرة فإما −٣ > −٢ أو [٣ ,١] = ٣

٣ إذا كان ٥ من عوامل العدد ٢٠ فإنه (٥ × ٤ = ٢٠) و (٢٠ ÷ ٥ = ٤)

٤ ٢ + −٥ = ٣ و −٨ عدد زوجي إذن ٥ × −٦ = ٣٠

٣ إذا كانت م: محمود درويش شاعر، ن: ناجي العلي رسام كاريكاتير، ع: عارف العارف مؤرخ

أعبر بالرموز عن العبارات الرياضية الآتية:

١ إذا كان محمود درويش شاعراً فإن ناجي العلي رسام كاريكاتير.

٢ ناجي العلي رسام كاريكاتير إذا وفقط إذا كان عارف العارف مؤرخاً.

٣ إذا كان محمود درويش شاعراً وعارف العارف مؤرخاً فإن ناجي العلي رسام كاريكاتير.

٤ إما عارف العارف مؤرخ أو محمود درويش شاعر إذن ناجي العلي رسام كاريكاتير.

٤ أعبر عما يأتي بأمثلة من كلماتي:

١ ف ← (ن ∨ م) ٢ ~ ف ∨ (ن ∧ م) ٣ (ن ∧ م) ↔ ف

٥ أصمم جدول الصواب لكل من العبارات الرياضية الآتية:

١ (ف ← ن) ∧ ~ ف ٢ (~ ف ∨ ن) ← (ف ∧ ~ ن) ٣ ~ (ف ← ن) ∧ ~ م

٦ أملأ الجدول الآتي بما يناسب:

ف	ن			~ ف ∧ ~ ن	
ص	ص	خ	ص	خ	ص
ص	خ	ص	ص		ص
خ	ص	خ	ص	خ	ص
خ	خ	ص	خ		خ

أولاً: إثبات تكافؤ عبارتين رياضيتين مركبتين باستخدام جداول الصواب:

من الاستخدامات المهمة لجداول الصواب، هو استخدامها في إثبات تكافؤ عبارتين رياضيتين، ويتم ذلك بكتابة قيم الصواب الممكنة لكل من العبارتين، وملاحظة القيم المتناظرة لهما:

مثال ١ : أتأمل جدول الصواب للعبارتين: ~ (ف ∧ ن) ، ~ ف ∨ ~ ن

ف	ن	ف ∧ ن	~ (ف ∧ ن)	~ ف	~ ن	~ ف ∨ ~ ن
ص	ص	ص	خ	خ	خ	خ
ص	خ	خ	ص	خ	ص	ص
خ	ص	خ	ص	ص	خ	ص
خ	خ	خ	ص	ص	ص	ص

ألاحظ أن قيم صواب العبارتين المتناظرة في الجدول هي ذاتها، فأقول: إن العبارتين متكافئتان، وأكتب ذلك بالرموز ~ (ف ∧ ن) ≡ ~ ف ∨ ~ ن

والتكافؤ السابق يوضح لنا كيف ننفي العبارة المركبة (ف ∧ ن) ، حيث يتم ذلك بنفي مركبتيها، وتحويل أداة الربط ∧ إلى ∨ ، فعند قولنا ليس صحيحاً أن «الفول من البقوليات والزعتر نبات طبي» فإن ذلك يعني: إما أن الفول ليس من البقوليات أو أن الزعتر ليس نباتاً طبياً.

تعريف: تكون العبارتان الرياضيتان المركبتان متكافئتين، إذا كان لهما نفس قيم الصواب المتناظرة في جدول صوابهما.

مثال ٢ : أبين تكافؤ أو عدم تكافؤ العبارتين ف ∨ ~ ن ، ~ ف ∧ ن باستخدام جدول الصواب

الحل :

ف	ن	~ ن	ف ∨ ~ ن	~ ف	~ ف ∧ ن
ص	ص	خ	ص	خ	خ
ص	خ	ص	ص	خ	خ
خ	ص	خ	خ	ص	ص
خ	خ	ص	ص	ص	خ

ألاحظ أن قيم الصواب المتناظرة للعبارتين ليست نفسها، لذا ف ∨ ~ ن لا تكافيء ~ ف ∧ ن

نشاط ١: إليك العبارتين التاليتين:

ف: الوطن عزيز، ن: الحرية غالية

- أعبر عن ف ← ن ، ~ ن ← ~ ف بالكلمات

- أملأ الفراغات اللازمة في جدول الصواب الآتي:

ف	ن	ف ← ن	~ ن	~ ف	~ ن ← ~ ف
ص	ص	ص			
ص	خ	خ			
خ	ص	ص			
خ	خ	ص			

-ماذا ألاحظ على قيم الصواب المتناظرة للعبارتين ف ← ن ، ~ ن ← ~ ف ؟

ألاحظ أن ف ← ن ≡ ~ ن ← ~ ف وهذا يوصلني إلى التعريف الآتي:

تعريف: المعاكس الإيجابي للعبارة الرياضية ف ← ن هو ~ ن ← ~ ف

مثال ٣: أكتب المعاكس الإيجابي لكل مما يأتي:

١ إذا ساد العدل أمن المجتمع.

٢ إذا كان العدد ١٧ أولياً فإن مجموعة قواسمه ليست ثنائية.

٣ (س – ٢) من عوامل س^{٣} – ٨ ، إذن س^{٣} – ٨ = (س – ٢) (س^{٢} + ٤)

الحل:

١ إذا لم يأمن المجتمع لم يسد العدل.

٢ إذا كانت مجموعة قواسم العدد ١٧ ثنائية فإنه ليس أولياً.

٣ إذا كان س^{٣} – ٨ ≠ (س – ٢) (س^{٢} + ٤) فإن (س – ٢) ليس من عوامل س^{٣} – ٨

مثال ٤ : أثبت أن العبارتين ف ← ن ، ~ ف ٧ ن متكافئتان.

الحل : بتكوين جدول الصواب المناسب، وملاحظة قيم الصواب المتناظرة للعبارتين السابقتين:

ف	ن	ف ← ن	~ ف	~ ف ٧ ن
ص	ص	ص	خ	ص
ص	خ	خ	خ	خ
خ	ص	ص	ص	ص
خ	خ	ص	ص	ص

بما أن قيم الصواب المتناظرة للعبارتين: ف ← ن ، ~ ف ٧ ن

∴ ف ← ن ≡ ~ ف ٧ ن

ومن التكافؤ السابق أتوصل إلى أن: نفي العبارة الرياضية الشرطية إذا كان فإن هو ف وليس ن أي تثبيت مقدمتها ونفي تاليها.

ثانياً: إثبات تكافؤ العبارات الرياضية دون استخدام جداول الصواب

تعلمنا في الدرس السابق كيفية إثبات تكافؤ عبارتين، باستخدام جدول الصواب الخاص بهما، حيث توصلنا إلى أنه إذا تشابهت قيم الصواب المتناظرة لعبارتين رياضيتين، فإنهما تتكافآن، والسؤال الآن: هل هذه هي الطريقة الوحيدة التي تمكننا من إثبات ذلك؟ والإجابة طبعاً لا، حيث نستطيع إثبات ذلك باستخدام مجموعة من الخصائص، أو من العبارات التي تم إثبات تكافئها عن طريق الجدول وسواه.

وإليك خواص العمليات ~ن ، ٨ ، ٧ وهي تعبر عن أزواج من العبارات الرياضية المتكافئة، وتساعد في إثبات تكافؤ عبارات رياضية دون اللجوء إلى جدول الصواب:

١. ~ (~ف) ≡ ف — نفي النفي (النفي المتكرر)
٢. ~(ف ٨ ن) ≡ ~ ف ٧ ~ن ، ~(ف ٧ ن) ≡ ~ ف ٨ ~ن — قانونا دي مورغان
٣. (ف ٧ ن) ≡ (ن ٧ ف) ، (ف ٨ ن) ≡ (ن ٨ ف) — خاصية التبديل
٤. (ف ٨ ن) ٨ م ≡ ف ٨ (ن ٨ م) ، (ف ٧ ن) ٧ م ≡ ف ٧ (ن ٧ م) — خاصية التجميع
٥. ف ٨ (ن ٧ م) ≡ (ف ٨ ن) ٧ (ف ٨ م)، ف ٧ (ن ٨ م) ≡ (ف ٧ ن) ٨ (ف ٧ م) خاصية التوزيع

نشاط بيتي: أبين صحة القوانين السابقة باستخدام جداول الصواب.

مثال ١ : أثبت أن ~ (ف ← ن) ≡ ف ∧ ~ ن دون استخدام جداول الصواب.

الحل : نعلم أن ف ← ن ≡ ~ ف ∨ ن

~ (ف ← ن) ≡ ~(~ ف ∨ ن)

≡ ~(~ ف) ∧ ~ ن لماذا؟

≡ ف ∧ ~ ن لماذا؟

ونستنتج من هذا التكافؤ كيفية نفي العبارة الشرطية ف ← ن

نفي العبارة الرياضية الشرطية إذا كان ف فإن ن: هو ف و ليس ن أي بتثبيت مقدمتها ونفي تاليها.

مثال ٢ : أنفي ما يأتي:

١ إذا كان ق(س) اقتراناً زوجياً فإن منحناه متماثل حول نقطة الأصل.

٢ هـ^{س} اقتران متزايد إذن (هـ^{٣} > هـ^{٢}).

الحل : ١ ق(س) اقتران زوجي ومنحناه غير متماثل حول نقطة الأصل..

٢ هـ^{س} اقتران متزايد و (هـ^{٣} ≤ هـ^{٢}).

مثال ٣ : أثبت أن (ف ∨ ن) ← ن ≡ ف ← ن

الحل : (ف ∨ ن) ← ن ≡ ~(ف ∨ ن) ∨ ن   لماذا؟

≡ (~ف ∧ ~ن) ∨ ن   لماذا؟

≡ (~ف ∨ ن) ∧ (~ن ∨ ن)   لماذا؟

≡ (~ف ∨ ن) ∧ ص   لماذا؟

≡ ~ف ∨ ن   لماذا؟

≡ ف ← ن   لماذا؟

تمارين ومسائل ٢-٤

١ أبين تكافؤ أو عدم تكافؤ العبارات الرياضية الآتية باستخدام جداول الصواب:

١ ف ← ~ن ، ~ف ∧ ن

٢ (ف ∧ ن) ← ~ف ، ~ف ∨ ~ن

٢ أكتب المعاكس الإيجابي للعبارات الرياضية الآتية:

١ (٣ ∈ ط) ← (√٢ ∈ ص)

٢ إذا كان التدخين مضراً بالصحة أو الفواكه مفيدة فإن السمك عالي القيمة الغذائية.

٣ أنفي العبارات الرياضية الآتية:

١ إذا كان المثلث متساوي الأضلاع فإنه حاد الزوايا.

٢ المنطق من فروع الرياضيات إذن الرياضيات لغة العلوم.

٣ ٢ < √٥ ≤ ٣

٤ أثبت تكافؤ ما يأتي دون استخدام جداول الصواب:

١ أثبت أن ~(ف ← ~ن) ≡ ف ∧ ن

٢ ف ← (ف ∨ ~ن) ≡ (ف ∧ ن) ← ف

٣ (~ف ∨ ن) ← (ف ∧ ~ن) ≡ ~(ف ← ن)

٤ ف ← (ن ∧ ~م) ≡ (ف ← ن) ∧ (ف ← ~م)

٥ (ف ← ن) ∨ (م ← ل) ≡ (ف ∧ م) ← (ن ∨ ل)

نشاط ١: في تلك القرية الهادئة المفعمة بالسلام، الحالم أهلها بلقمة العيش، الواقعة على أطراف القدس وفي صباح ذلك اليوم الربيعي، حيث كان الناس نياماً، تدخل عصابات العنف والبطش والمكر للقرية، تقتل ما يقارب ثلاثمائة آمن، وتشرد أهلها لتفرغ الأرض من ساكنيها، وتستولي على أراضيهم.

عن أي قرية يتحدث النص السابق؟

في معرض حديثنا عن العبارات، رأينا أن بعض الجمل ليست عبارات رياضية، لأننا لا نستطيع الحكم على صحتها، مثل جمل الاستفهام والتعجب وغيرها، ومن الجمل التي لا نستطيع الحكم على صحتها كذلك، جمل تحوي متغيرات مثل : ٢ س = ٨ التي تحوي المتغير س وتتحول إلى عبارة رياضية عند إعطاء متغيرها قيمة. ومثل هذه الجمل ليست بالغريبة عليك، فقد تعرفت عليها في بداية عهدك بالدراسة، عندما كان يطلب منك ملء فراغ ما أو مربع ما، لتصبح الجملة صحيحة، ومثال ذلك:

ــــــــــ أحد فصول السنة أو $\square$ + ٣ = ٨ دون تسميتها جملاً مفتوحة.

تعريف:

- **الجملة المفتوحة: هي جملة تحوي متغيراً أو أكثر، وتتحول إلى عبارة رياضية عند إعطاء قيم للمتغيرات**
- **مجموعة التعويض: هي مجموعة قيم المتغير التي يسمح لنا تعويضها مكانه في الجملة المفتوحة.**
- **مجموعة الحل: هي مجموعة قيم المتغير التي تجعل الجملة المفتوحة عبارةً رياضيةً صحيحةً، وهي مجموعة جزئية من مجموعة التعويض.**

ويرمز للجملة المفتوحة : ل(س) ، م(س) ، ق(س) ــــــــــ إذا كانت بمتغير واحد و بـ ك(س،ص)، هـ(س،ص) ــــــــ إذا كانت بمتغيرين.

مثال ١ : إذا كانت الجملة المفتوحة ق(س) : ٢س > ٥، مجموعة التعويض ح، أجد قيم الصواب لكل من: ق(٢)، ق(٣)، ق($\sqrt{٥}$)

الحل : ق(٢) : ٢ × ٢ > ٥ خاطئة.

ق(٣) : ٢ × ٣ > ٥ صائبة.

ق($\sqrt{٥}$) : ٢ × $\sqrt{٥}$ > ٥ خاطئة لماذا؟

نشاط ٢: أجد مجموعة حل الجملة المفتوحة ل (س): س^{٢} = ٤، مجموعة التعويض = ص

الحل : س^{٢} = ٤

ومنها $\sqrt{\text{س}^{٢}}$ = $\sqrt{٤}$

|س| = ٢

س = ـــــ ، ـــــ .

مثال ٢ : أجد مجموعة الحل للجملة المفتوحة

هـ(س ، ص): س^{٢} + ص^{٢} = ١، (س ، ص) ∈ ص × ص

الحل : مجموعة الحل = {(١،٠) ، (٠،١) ، (–١ ، ٠) ، (٠،–١)}

نشاط ٣: ليكن ف : ٩ = ٣^{٢}، ل(س) : س > ٥ ، م(س) : س عدد أولي.

ولتكن مجموعة التعويض ص أجد قيم الصواب للعبارات الآتية:

١ ف ∧ ل(٢)   ٢ ل(٥) ← م(٥)   ٣ ~ ل(٣) ↔ م(١٠)

الحل : ١ ف صائبة ، ل(٢) كذلك صائبة ، ∴ ف ∧ ل(٢) صائبة.

٢ ــــــــــــــــــــــــــــ.

٣ ــــــــــــــــــــــــــــ.

تعريف: تكون الجملتان المفتوحتان متكافئتين إذا كان لهما نفس مجموعة الحل.

مثال ٣ : إذا كانت ق(س): ٢س = ٤ ، هـ(س) : $س^٢ - س - ٦ =$ صفر، مجموعة التعويض هي **ط** .

أوضح فيما إذا كانت ق(س) ، هـ(س) متكافئتين أم لا .

الحل : مجموعة حل ق(س) = {٢} ، مجموعة حل هـ(س) = {٣} لماذا؟

ألاحظ أن مجموعتي الحل غير متساويتين.

إذن الجملتان ق(س) ، هـ(س) غير متكافئتين.

تمارين و مسائل ٢-٥

١ لتكن ل(س) : ١ ≤ س > ٣ ، هـ(س) : ٢ > س > ٤ ، س ∈ ح

أضع دائرة حول رمز الإجابة الصحيحة فيما يأتي:

١ ما العبارة الرياضية الخاطئة فيما يأتي؟

أ) ل(٢) ∨ هـ(٣)　　ب) ل(١) ∧ هـ(٣)

جـ) ل(٢) ↔ هـ(٣)　　د) هـ(٠) ∨ ل(٤)

٢ ما العبارة الرياضية التي تكافئ ل(س) فيما يأتي؟

أ) س∈ [١، ٣]　　ب) س∈ [١، ٣[

جـ) س∈]١، ٣[　　د) س∈]١، ٣]

٣ ما مجموعة حل (ل(س) ∨ هـ(س)) ؟

أ) ١ ≤ س > ٤　　ب) ١ ≤ س ≤ ٤

جـ) ٣ ≤ س > ٤　　د ٢ ≤ س ≤ ٣

٤ ما قيم س التي تجعل : ل(س) ∧ هـ(س) صائبة؟

أ) ١ > س > ٣　　ب) ٢ > س > ٣

جـ) ٣ > س > ٤　　د) ٢ ≤ س ≤ ٣

٢ أجد مجموعة حل كل من الجمل المفتوحة الآتية بالنسبة لمجموعة التعويض الموضحة بجانب كل منها:

١ ق(س) : س^{٢} = س ، س∈ ص

٢ م(س) : ٣س – ١ = ٠ ، س∈ {–١ ، ٠ ، ١}

٣ ل(س) : $\sqrt{\text{س}^{٢}}$ = ٥ ، س∈ ص

٤ هـ(س) : س^{٢} – ١١س = –٣٠ ، س∈ ط

٥ ع(س) : س^{٢} – ١ = (س–١) (س + ١) ، س∈ ص

٦ ك(س،ص) : س ص = ٨ ، (س ، ص) ∈ ص × ص

٧ ب(س): جاس = جا^{٢}س ، س ∈] ٠ ، π [

٣ ليكن ق(س) : س – ٢ ≥ ٢ ، هـ(س) : ٢س + ١ = ٧ ، مجموعة التعويض ط*

١ أكتب مجموعة حل كل من ق(س) ، هـ(س).

٢ أكتب مجموعة حل ق(س) ∨ هـ(س).

٣ أكتب مجموعة حل ق(س) ∧ هـ(س).

٤ هل ق(س) ، هـ(س) متكافئتان؟ أوضح ذلك.

٤ إذا كان ق(س): ٢جا^{٢}س – ٣جاس + ١ = صفر، هـ(س): ظا^{٢}س – $\sqrt{٣}$ ظاس = $\frac{-٢}{٣}$ ،

س ∈ [٠ ، ٢π] أجد مجموعة حل ق(س) ∧ هـ(س).

٥ إذا كانت ل(س) : [س] = ٣ ، ع(س) : |س| = ٥ ، وكانت مجموعة التعويض هي مجموعة الأعداد النسبية، أبين قيم الصواب لما يأتي:

١ ع (–٥) ← ل (٥ , ٢)

٢ ل (–٣) ← ع (٥)

٣ ل (٥ , ٢) ∨ ع (٥ , ٣)

٤ ع (٠) ← (ل (٩ , ٣) ∧ ع (٥ , ٥))

٢ - ٦ العبارات الرياضية المسورة (Quantified Mathematical Statements)

أولاً: العبارات الرياضية المسورة كلياً

نشاط ١: جاء في بعض مواد الإعلان العالمي لحقوق الإنسان، الذي تبنته الجمعية العامة للأمم المتحدة عام ١٩٤٨ بباريس «يولد جميع الناس أحراراً، متساوين في الكرامة والحقوق. وقد وهبوا عقلاً وضميراً وعليهم أن يعامل بعضهم بعضًا بروح الإخاء، وكذلك لكل فرد الحق في الحياة والحرية والسلامة الشخصية، ولا يجوز القبض على أي إنسان، أو حجزه، أو نفيه تعسفاً».

١ هل أنت مع هذا الإعلان العالمي لحقوق الإنسان؟ ولماذا؟

٢ ما الكلمات الواردة في النص وتعني كلمة جميع.

٣ ماذا يمكن أن تسمى العبارات التي تحوي مثل هذه الكلمات؟

لعلك تلاحظ وجود الكلمات كل، وجميع، وأي، في هذه المواد، وكلها كلمات تعبر عما يسمى بالسور الكلي، ويرمز للسور الكلي بالرمز $\forall$.

تعريف: إذا كانت ق(س) جملةً مفتوحةً فإن العبارة الرياضية لكل س، ق(س) تسمى عبارة رياضيةً مسورةً كلياً وتكتب $\forall$ س، ق(س).

لتكن العبارة الرياضية ق(س) : الأم حنون، يمكن كتابة العبارة الرياضية «جميع الأمهات حنونات» رمزياً بالصورة $\forall$ س، ق(س).

وتكون العبارة الرياضية $\forall$ س، ق(س) صائبةً إذا كانت مجموعة حلها مساويةً لمجموعة تعويضها، أي أنها تكون صائبةً، إذا كان كل تعويض للمتغير من مجموعة التعويض يجعلها صائبةً.

مثال ١ : أجد قيمة صواب العبارة الرياضية المسورة الآتية:

∀ س، (س + ١)^{٢} = س^{٢} + ٢س + ١ ، س ∋ ح.

الحل : العبارة الرياضية صحيحة عند أي تعويض س من مجموعة التعويض، إذن العبارة المسورة صائبة.

وتكون العبارة المسورة ∀ س، ق(س) خاطئةً، إذا كانت مجموعة حلها لا تساوي مجموعة التعويض، أي أنه إذا وجد تعويض واحد على الأقل من مجموعة التعويض يجعلها خاطئةً.

مثال ٢ : ما قيمة صواب العبارة المسورة ∀ س، س^{٢} > صفر ، س∋ ص؟

الحل : التعويض س = ٠ يجعل العبارة الرياضية خاطئةً، إذن العبارة المسورة خاطئة.

نشاط ٢: أبين قيم الصواب للعبارات الآتية:

١ جميع المثلثات قائمة الزاوية.

ألاحظ أن هذه العبارة المسورة خاطئة، لعلمنا بوجود كثير من المثلثات غير القائمة، كالمثلث منفرج الزاوية على سبيل المثال لا الحصر ...

٢ كل عدد يقبل القسمة على ١٠ يقبل القسمة على ٥ .

هذه عبارة صحيحة، أفكر في إثباتها بشكل عام .

٣ جميع أعمار طلبة الصف الحادي عشر تزيد عن ١٤ عاماً.

٤ ∀ س∋ ح، س^{٢} > س

٥ ∀ س∋ ح، س^{٢} = (س–١)(س + ١) + ١

ثانياً: العبارات الرياضية المسورة جزئياً

في تجربة رذرفورد، تم تسليط أشعة من جسيمات ألفا على رقاقة ذهب، فوجد أن بعض الأشعة ينعكس وبعضها الآخر ينكسر، ومعظمها ينفذ، ويدل ذلك على أنه يوجد بعض مساحات فارغة في الذرة، وأيضًا يوجد جسيمات لها نفس شحنة الأشعة، وهناك جسيمات لها شحنة مختلفة عن شحنة الأشعة.

لعلك لاحظت وجود الكلمات بعض، ومعظم، ويوجد، في النص السابق، وهي كلمات تعبر عما يسمى بالسور الجزئي، ويرمز للسور الجزئي بالرمز E .

ويمكن كتابة العبارة الرياضية «بعض الأعداد الحقيقية سالبة» بالصورة هـ(س) : س عدد حقيقي سالب.

تعريف: إذا كانت هـ(س) جملة مفتوحة فإن العبارة الرياضية يوجد س : هـ(س) تسمى عبارة رياضية مسورة جزئياً وتكتب E س: هـ(س)

وتكون هذه العبارة الرياضية صائبةً، إذا وجد تعويض واحد على الأقل من مجموعة التعويض، يجعلها صائبةً، وتكون خاطئةً، إذا كان كل تعويض من مجموعة التعويض يجعلها خاطئةً، أي أن مجموعة حلها = $\emptyset$

مثال ٣ : ما قيمة صواب كل من العبارات الرياضية المسورة الآتية:

١ بعض الأعداد الطبيعية تقسم على ٥.

٢ E ع : ع^{٣} = −٨ ، ع $\in$ ط

٣ E ص: ص^{٤} = ٥ ، ص $\in$ ح

٤ $\forall$ س ، (٢س = س^{٢}) $\vee$ (٢س عدد زوجي) ، س $\in$ ح

الحل :

١ صائبة.

٢ خاطئة.

٣ صائبة.

٤ خاطئة.

تمارين ومسائل ٢-٦

١ أضع دائرةً حول رمز الإجابة الصحيحة فيما يأتي:

١) ما العبارة المسورة الصائبة فيما يأتي؟

أ) $\exists$ س : س^{٢} = س ، س $\in$ ص$^{-}$
ب) $\forall$ س ، س^{٣} = س ، س $\in$ ط*
جـ) $\exists$ س : س^{٢} = س^{٣} ، س $\in$ ن
د) $\exists$ ك : ك^{٢} = −ك ، ك $\in$ ط*

٢) ما العبارة المسورة الخاطئة فيما يأتي، إذا كانت مجموعة التعويض = ح ؟

أ) $\exists$ س: [س] = ٣,٥
ب) $\exists$ س: |س| = ٨
جـ) $\exists$ س: $\dfrac{\text{س}}{\text{س}^{٢} + ١} > ٠$
د) $\exists$ س: $\sqrt{\text{س} + ١}$ = ٩

٣) أحدد العبارة المسورة الصائبة فيما يأتي؟

أ) $\forall$ س ، س $\in$ ح $\leftarrow$ س^{٢} $\in$ ح$^{+}$
ب) $\forall$ س ، س $\in$ ص $\leftarrow$ س +١ $\in$ ط*
جـ) $\forall$ س ، س $\in$ ح $\leftarrow$ $\sqrt{\text{س}}$ $\in$ ن
د) $\forall$ س ، س $\in$ ط $\leftarrow$ $\sqrt{\text{س}}$ $\in$ ح

٢ ما قيم صواب العبارات المسورة الآتية؟

١) بعض الطلبة موهوبون.
٢) كل الأشجار مثمرة.
٣) يوجد عدد حقيقي لا ينتمي جذره التربيعي إلى ص.
٤) كل زوايا المثلث حادة.
٥) بعض النقاط الواقعة على منحنى الاقتران ق(س) = |س^{٢} + ٢س + ١| تقع تحت محور السينات.

٣ أبين صواب أو خطأ كل من العبارات المسورة الآتية، مع ذكر السبب.

١) $\exists$ س: س^{٢} = ٢ ، س $\in$ ح
٢) $\forall$ س ، س $\geq$ ٠ $\leftarrow$ س^{٢} $>$ ٠ ، س $\in$ ح
٣) $\forall$ س ، $\exists$ ص : س $<$ ص ، س، ص $\in$ ح
٤) $\exists$ س ، ص : (٢س + ص = ٦) $\wedge$ (س + ١ = $\frac{١}{٢}$) ، س ، ص $\in$ ح
٥) $\exists$ $\overleftarrow{\text{أ}}$ ، $\overleftarrow{\text{ب}}$: | $\overleftarrow{\text{أ}}$ + $\overleftarrow{\text{ب}}$ | = | $\overleftarrow{\text{أ}}$ | + | $\overleftarrow{\text{ب}}$ |؛ $\overleftarrow{\text{أ}}$ ، $\overleftarrow{\text{ب}}$ ينتميان لمجموعة المتجهات في الفراغ.

٢ - ٧ نفي العبارة المسورة (Negative Of Quantified Statements)

نشاط ١: ضمن الفعاليات المساندة لمعركة الأمعاء الخاوية للأسرى في إضرابهم عن الطعام لنيل حقوقهم الإنسانية المشروعة، كانت كل المحلات التجارية مغلقة:

١ ما نوع العبارة: كل المحلات التجارية مغلقة؟

٢ نفي كل المحلات التجارية هو ________________ .

٣ نفي مغلقة هو __________________________ .

٤ نفي كل المحلات التجارية مغلقة هو بعض المحلات التجارية غير مغلقة.

وعليه إذا أردت أن تنفي العبارة الرياضية المسورة: جميع الطلبة متفوقون، فإن نفيها هو « بعض الطلبة غير متفوقين» وهذا يعني أنه عند نفي العبارة الرياضية المسورة كلياً، فإننا نستبدل السور الكلي $\forall$ بالسور الجزئي $\exists$ وننفي الجملة المفتوحة.

تعريف: ~ ($\forall$ س ، ق(س)) هو ($\exists$ س : ~ ق(س))

أما إذا أردت نفي العبارة «بعض أجهزة الحاسوب معطلة» فإن نفيها هو: كل أجهزة الحاسوب غير معطلة» أي أنه عند نفي العبارة الرياضية المسورة جزئياً، فإننا نستبدل السور الجزئي $\exists$ بالسور الكلي $\forall$ وننفي الجملة المفتوحة.

تعريف: ~ ($\exists$ س : ق(س)) هو ($\forall$ س،~ ق(س))

مثال ١ : أنفي العبارات المسورة الآتية:

١ كل الأعداد الطبيعية هي أعداد حقيقية.

٢ بعض الأعداد الحقيقية نسبية.

٣ $\forall$ س ، س $\in$ ص ← س $\in$ ن

٤ $\exists$ س : ق(س) اقتران زوجي وفردي.

الحل :

١ بعض الأعداد الطبيعية ليست حقيقية.

٢ كل الأعداد الحقيقية غير نسبية.

٣ ∃ س : س ∈ ص ∧ س ∉ ن

٤ ∀ س ، ق(س) اقتران ليس زوجياً أو ليس فردياً.

تمارين ومسائل ٢-٧

١ أضع دائرة حول رمز الإجابة الصحيحة فيما يأتي:

١ ما نفي العبارة الرياضية «بعض الحيوانات غير مفترسة» ؟

أ) كل الحيوانات غير مفترسة.

ب) بعض الحيوانات غير مفترسة.

جـ) كل الحيوانات مفترسة.

د) بعض الحيوانات مفترسة.

٢ أي العبارات الرياضية الآتية تكافئ نفي العبارة الرياضية «بعض مصادر المعلومات موسوعات».

أ) جميع مصادر المعلومات موسوعات.

ب) كل مصادر المعلومات ليست موسوعات.

جـ) يوجد مصادر معلومات ليست موسوعات.

د) بعض مصادر المعلومات موسوعات.

٢ ما قيم صواب العبارات المسورة الآتية؟:

١ ∃ س ∈ ص : ٢ ≤ س < ٥

٢ ∀ س ∈ [٠، ٥] ، س^{٢} > ١

٣ ∃ س ∈ ص : س ≥ ٠ ∧ س < ١

٣ أنفي العبارات المسورة الآتية:

١ كل المربعات معينات.

٢ بعض الاقترانات دائرية.

٣ ∃ (س ، ص) ∈ ط × ط : س ≤ ص

٤ جميع مماسات الدائرة عمودية على أنصاف أقطارها.

٢ - ٨ البرهان الرياضي (Mathematical Proof)

نشاط ١: نحتاج في حياتنا اليومية في كثير من الأحيان، إثبات صحة فرضية ما، فمثلاً: إذا أراد أبو سعيد الذي يمتلك مصنعاً للجلود اختبار الفرضية «كلما زاد عدد العمال، زاد ربح المصنع» فهو بحاجة لاختبار صحة أو خطأ هذه الفرضية، وللوصول إلى النتيجة، يجب التسلسل بخطوات منطقية ومقنعة ومبنية على الحجج والبراهين، للاقتناع بصحة أو خطأ هذه الفرضية.

كيف يمكن التحقق من صحة هذه الفرضية؟

في هذا الدرس سنتطرق لبعض طرق البرهان لإثبات صحة عبارة رياضية شرطية، تكتب على الصورة : ف ← ن.

لنتذكر أن العبارة الشرطية ف ← ن ،تكون صائبةً عندما: (ف صائبة ، ن صائبة)، (ف خاطئة، ن صائبة)، (ف خاطئة، ن خاطئة)، لذلك لإثبات صحة هذه العبارة الشرطية، سنستخدم عدة طرق: البرهان المباشر، والبرهان غير المباشر، والبرهان بالتناقض، والبرهان بالاستقراء الرياضي.

أولاً: البرهان المباشر

في هذه الطريقة، نفرض أن العبارة ف صائبة، ومن خلال خطوات منطقية مبررة نصل إلى أن ن صائبة، وبهذا تكون العبارة : ف ← ن صائبةً.

مثال ١ : إذا كانت أ ، ب ،جـ ثلاثة أعداد صحيحة موجبة، وكان أ أحد عوامل ب ، ب أحد عوامل جـ ، فأثبت أن أ أحد عوامل جـ.

الحل : نفرض ف : أ أحد عوامل ب و ب أحد عوامل جـ، ن : أ أحد عوامل جـ.

المطلوب إثبات صحة: ف ← ن .

أ أحد عوامل ب، إذن ب = أ ك ، حيث ك عدد صحيح موجب.

ب أحد عوامل جـ، إذن جـ = ب ل ، حيث ل عدد صحيح موجب.

بتعويض قيمة ب نجد أن جـ = أ ك ل، لكن ك ل عدد صحيح موجب نفرضه م .

جـ = أ م إذن أ أحد عوامل جـ.

مثال ٢ : إذا كان أ عدداً فردياً و ب عدداً زوجياً، فإن أ ب = عدد زوجي.

الحل : نفرض ف : أ عدد فردي و ب عدد زوجي، ∴ أ = ٢ك + ١ حيث ك ∈ ص

و ب = ٢ل حيث ل ∈ ص

ن : أ ب عدد زوجي

المطلوب إثبات صحة: ف ← ن .

أ × ب = (٢ك + ١)(٢ل) = ٤ك ل + ٢ل = ٢ (٢ك ل + ل)

لكن ٢ك ل = عدد صحيح ونفرض أنه م............. لماذا؟

∴ أ × ب = ٢(م + ل) = ٢ و، حيث و ∈ ص....... لماذا؟

∴ أ ب عدد زوجي.

مثال ٣ : إذا كانت أ ، ب ، جـ ثلاثة أعداد حقيقية، أثبت أن: أ^{٢} + ب^{٢} + جـ^{٢} ≤ أ ب + أ جـ + ب جـ .

الحل : نفرض ف : أ ،ب ، جـ أعداد حقيقية.

ن : أ^{٢} + ب^{٢} + جـ^{٢} ≤ أ ب + أ جـ + ب جـ .

المطلوب إثبات صحة: ف ← ن .

تذكر أن س^{٢} ≤ ٠ .... لماذا؟

إذن (أ − ب)^{٢} + (أ − جـ)^{٢} + (ب − جـ)^{٢} ≤ ٠ .... لماذا؟

أ^{٢} − ٢أ ب + ب^{٢} + أ^{٢} − ٢أ جـ + جـ^{٢} + ب^{٢} − ٢ب جـ + جـ^{٢} ≤ ٠

(٢أ^{٢} + ٢ب^{٢} + ٢جـ^{٢}) − (٢أ ب + ٢أ جـ + ٢ب جـ) ≤ ٠ بالقسمة على ٢

(أ^{٢} + ب^{٢} + جـ^{٢}) − (أ ب + أ جـ + ب جـ) ≤ ٠

∴ (أ^{٢} + ب^{٢} + جـ^{٢}) ≤ (أ ب + أ جـ + ب جـ)

ثانياً: البرهان غير المباشر

لقد عرفت سابقاً أن العبارة ف ← ن ≡ ∼ن ← ∼ف ، لذلك إذا تحققت صحة ∼ن ← ∼ف تتحقق ضمناً صحة ف ← ن . لذلك نفرض صحة ∼ن ونثبت صحة ∼ف. تسمى هذه الطريقة بالبرهان غير المباشر.

مثال ٤ : أستخدم البرهان غير المباشر لإثبات أن «إذا كان المثلث متساوي الأضلاع، فإن جميع قياسات زواياه متساوية».

الحل : المعطيات: ف : أ ب جـ مثلث متساوي الأضلاع.

ن : ∡ أ = ∡ ب = ∡ جـ.

البرهان: باستخدام البرهان غير المباشر لإثبات أن :

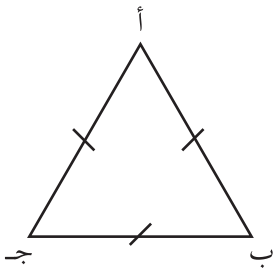
صحة ف ← ن ، نثبت أن ∼ن ← ∼ف صحيحة.

نفرض ∼ن: أ ب جـ مثلث قياسات زواياه غير متساوية صائبة.

المطلوب إثبات أن ∼ف: أ ب جـ مثلث أضلاعه غير متساوية.

نفرض أن ∡ ب ≠ ∡ جـ ، إذن أب ≠ أجـ لماذا؟

إذن أطوال أضلاع المثلث غير متساوية.



مثال ٥ : أستخدم البرهان غير المباشر لإثبات أن «إذا كان $س^{٢}$ عدد فردي، فان س عدد فردي».

الحل : المعطيات: ف : $س^{٢}$ عدد فردي

ن : س عدد فردي.

البرهان: باستخدام البرهان غير المباشر، لإثبات أن : ف ← ن ، نثبت أن: ∼ن ← ∼ف

نفرض ∼ن: س عدد زوجي عبارة صائبة.

المطلوب: إثبات أن: ∼ف: $س^{٢}$ عدد زوجي .

س عدد زوجي إذن س = ٢ك حيث ك عدد صحيح

∴ $س^{٢}$ = ٤$ك^{٢}$

= ٢(٢$ك^{٢}$) ∴ $س^{٢}$ عدد زوجي.

ثالثاً: البرهان بالتناقض

لإثبات صحة العبارة ف ← ن بطريقة التناقض، نفرض أنها خاطئة، وهذا يعني أن (ف صائبة و ن خاطئة)، ونتسلسل بخطوات منطقية للوصول لنتيجة خاطئة أو لتناقض، ويكون سبب هذا التناقض هو الفرض أن العبارة ف ← ن خاطئة أي أن العبارة صائبة.

مثال ٦ : اشترى كمال قميصين بمبلغ يزيد عن ٣٠ دينار، وبعد عدة أسابيع سأله صديقه ماجد عن ثمن كل قميص، فلم يتذكر، أثبت أن ثمن أحد القميصين على الأقل يزيد عن ١٥ دينار.

الحل : المعطيات: نفرض أن ثمن القميص الأول س ، وثمن القميص الثاني ص

ف : س + ص > ٣٠

ن : س > ١٥ أو ص > ١٥

المطلوب: إثبات صحة: ف ← ن .

نفرض ف صائبة ، ن خاطئة ، إذن ∼ ن : س ≤ ١٥ و ص ≤ ١٥

∴ س + ص ≤ ٣٠ وهذا يتناقض مع كون س + ص > ٣٠

إذن الافتراض أن ن خاطئة افتراض خاطئ ∴ ف ← ن صائبة.

مثال ٧ : إذا كانت و نقطة خارج المستقيم ل (و ∌ $\overleftrightarrow{\text{ل}}$)، فإنه لا يمكن رسم أكثر من عمود واحد على المستقيم ل يمر بالنقطة و .

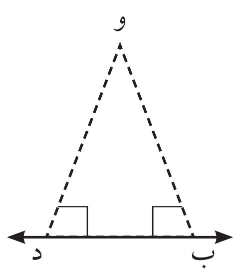
الحل : المعطيات: و نقطة تقع خارج المستقيم ل .

ن : لا يمكن رسم أكثر من عمود واحد على المستقيم ل يمر بالنقطة و.

المطلوب: إثبات صحة: ف ← ن .

نفرض ف صائبة ، ن خاطئة ، إذن ∼ن : يمكن رسم أكثر من عمود واحد على المستقيم ل يمر بالنقطة و.

نفرض أن $\overline{\text{و ب}}$ ، $\overline{\text{و د}}$ عمودان مرسومان من النقطة و على المستقيم ل ، ∴ و ب د تشكل مثلثاً فيه زاويتان قائمتان، وهذه نتيجة خاطئة.



لذلك الافتراض ن خاطئة افتراض خاطئ ∴ ف ← ن صائبة.

رابعاً: الاستقراء الرياضي

تستخدم هذه الطريقة لإثبات كثير من النظريات والتعميمات في الرياضيات والمتعلقة بالأعداد الطبيعية. عند استخدام هذه الطريقة بالبرهان:

- **نتحقق أن العبارة صحيحة عندما ن = ١ .**
- **نفرض أنها صحيحة عندما ن = ك ، ك ∈ ط***
- **نثبت صحتها عندما ن = ك + ١**

مثال ٨ : أثبت أن ١ + ٢ + ٣ + ... + ن = $\frac{\text{ن (ن + ١)}}{٢}$

الحل : أولاً: عندما ن = ١ فإن ١ = $\frac{\text{١ (١ + ١)}}{٢}$ = $\frac{٢}{٢}$ = ١

إذن عندما ن = ١ العبارة صحيحة.

ثانياً: نفرض أن العبارة صحيحة عندما ن = ك

أي أن : ١ + ٢ + ٣ + ... + ك = $\frac{\text{ك (ك + ١)}}{٢}$

ثالثاً: نثبت صحتها عندما ن = ك + ١ .

نعلم أن ١ + ٢ + ٣ + ... + ك = $\frac{\text{ك (ك + ١)}}{٢}$ بالفرض

١ + ٢ + ٣ + ... + ك + (ك +١) = $\frac{\text{ك (ك + ١)}}{٢}$ + (ك+١) ... لماذا؟

= (ك + ١) ($\frac{\text{ك}}{٢}$+١) ... لماذا؟

= (ك + ١) ($\frac{\text{ك + ٢}}{٢}$) ... لماذا؟

= $\frac{\text{(ك + ١) (ك + ٢)}}{٢}$ ... لماذا؟

مثال ٩ : أثبت أن $٣^{ن} - ١$ يقبل القسمة على ٢.

الحل : أولاً: نتحقق من صحة العبارة عندما ن = ١

$٣^{١} - ١ = ٣ - ١ = ٢$ تقبل القسمة على ٢ عبارة صحيحة.

ثانياً: نفرض أن العبارة صحيحة عندما ن = ك ،

أي أن: $٣^{ك} - ١$ يقبل القسمة على ٢

أي أن : $٣^{ك} - ١ = ٢م$ حيث م عدد صحيح موجب.

ثالثاً: نثبت صحتها عندما ن = ك + ١

$٣^{ك} - ١ = ٢م$ بالفرض

∴ $٣(٣^{ك} - ١) = ٢م × ٣$ بضرب الطرفين بالعدد ٣ ، أي أن: $٣^{ك+١} - ٣ = ٦م$

∴ $٣^{ك+١} - ١ = ٦م + ٢$ بجمع العدد ٢ للطرفين

∴ $٣^{ك+١} - ١ = ٢(٣م + ١)$ ، لكن (٣م + ١) = عدد صحيح موجب مثل و ... لماذا؟

∴ $٣^{ك+١} - ١ = ٢و$

∴ إذن $٣^{ك+١} - ١$ يقبل القسمة على ٢

∴ العبارة صحيحة عندما ن = ك + ١

(أحاول أن أحل هذا المثال بطريقة أخرى).

مثال ١٠: أثبت أن: $\frac{١}{١ × ٢} + \frac{١}{٢ × ٣} + \frac{١}{٣ × ٤} + ... + \frac{١}{(ن) × (ن + ١)} = \frac{ن}{(ن + ١)}$

الحل : أولاً: نتحقق من صحة العبارة عندما ن = ١

أي أن: $\frac{١}{١ × ٢} = \frac{١}{(١ + ١)} = \frac{١}{١ × ٢}$

ثانياً: نفرض أن العبارة صحيحة عندما ن = ك

أي أن : $\frac{١}{١ × ٢} + \frac{١}{٢ × ٣} + \frac{١}{٣ × ٤} + ... + \frac{١}{ك × (ك + ١)} = \frac{ك}{(ك + ١)}$

ثالثاً: نثبت صحتها عندما ن = ك + ١

$$\left(\frac{١}{١ \times ٢} + \frac{١}{٢ \times ٣} + \frac{١}{٣ \times ٤} + \dots + \frac{١}{\text{ك} \times (\text{ك} + ١)}\right) + \frac{١}{(\text{ك} + ١) \times (\text{ك} + ٢)}$$

$$= \frac{\text{ك}}{(\text{ك} + ١)} + \frac{١}{(\text{ك} + ١) \times (\text{ك} + ٢)}$$ (بتوحيد المقامات)

$$= \frac{\text{ك}\,(\text{ك} + ٢) + ١}{(\text{ك} + ١) \times (\text{ك} + ٢)}$$

$$= \frac{\text{ك}^{٢} + ٢\,\text{ك} + ١}{(\text{ك} + ١) \times (\text{ك} + ٢)}$$

$$= \frac{(\text{ك} + ١)^{٢}}{(\text{ك} + ١) \times (\text{ك} + ٢)}$$ ..... (لماذا؟)

$$= \frac{(\text{ك} + ١)}{(\text{ك} + ٢)}$$

∴ العبارة صحيحة عندما ن = ك + ١ .

تمارين ومسائل ٢- ٨:

١ أثبت أن: إذا كان ك عدداً فردياً فإن $ك^٢$ عدد فردي.

٢ إذا كانت ك ، ل ، م ، ثلاثة أعداد صحيحة موجبة ، وكان باقي قسمة ك على م = باقي قسمة ل على م، أثبت أن ك – ل يقبل القسمة على م.

٣ أستخدم أحد طرق البرهان لإثبات أن: إذا كان أ ، ب عددين حقيقيين،

فإن $\sqrt{أ^٢ + ب^٢} \leq |أ| + |ب|$

٤ أستخدم البرهان غير المباشر لإثبات أن: إذا كان $ك^٢$ يقبل القسمة على ٣ فإن ك يقبل القسمة على ٣.

٥ قطع وليد مسافة تزيد عن ٣٦٠ كم في رحلة، وتوقف أثناء سفره مرتين فقط، أستخدم البرهان بالتناقض لإثبات أن وليداً قطع أكثر من ١٢٠ كم في إحدى مراحل رحلته الثلاث على الأقل.

٦ أثبت أن: $٨^ن - ١$ يقبل القسمة على ٧ ، باستخدام الاستقراء الرياضي.

٧ أثبت أن : $(٢)^١ + (٢)^٢ + (٢)^٣ + ... + (٢)^ن = (٢)^{ن+١} - ٢$ ، باستخدام الاستقراء الرياضي.

٨ أثبت أن : $\frac{أ + ١}{أ + ٢} < \frac{أ + ٢}{أ + ٣}$ ، حيث أ > صفر.

تمارين عامة

١ أضع دائرةً حول رمز الإجابة الصحيحة فيما يأتي:

١ إذا كانت ف عبارةً رياضيةً صائبةً، ن عبارةً رياضيةً صائبةً، ما العبارة الرياضية المركبة الصائبة فيما يأتي؟

أ) ف ← ~ن   ب) ن ← ~ف   جـ) ف ∧ ~ن   د) ف ∨ ~ن

٢ ما نفي العبارة الرياضية (٣ + ٤ ≠ ٧) ∧ (٥ ≥ ١) ؟

أ) (٣ + ٤ = ٧) ∨ (٥ ≥ ١)   ب) (٣ + ٤ = ٧) ∨ (٥ < ١)

جـ) (٣ + ٤ ≠ ٧) ∨ (٥ ≥ ١)   د) (٣ + ٤ = ٧) ∨ (٥ > ١)

٣ ما الجملة التي تمثل عبارة رياضية فيما يأتي؟

أ) عدد يقل عن س بـ ١   ب) يا عالماً بحالي

جـ) شكراً لك   د) الصفر عدد زوجي.

٤ ما العبارة الرياضية الصائبة فيما يأتي؟

أ) -٣ ∈ ص ← ٣ عدد نسبي   ب) -٣ ∈ ص ↔ -٣ ∉ ح

جـ) -٣ ∈ ص ↔ -٣ > -٥   د) -٣ ∈ ص ∧ -٣ ∉ ح

٥ ما العبارة الرياضية التي تكافئ ف فيما يأتي؟

أ) ~ف   ب) ف ∧ ~ف   جـ) ~(ف ← ~ف)   د) ف ∨ ~ف

٦ ما المعاكس الإيجابي للعبارة الرياضية ~ف ← ن ؟

أ) ~ف ← ~ن   ب) ~ن ← ~ف   جـ) ~ن ← ف   د) ف ← ن

٧ ما مجموعة حل ق(س) : س^{٢} − ٣س − ١٨ = صفر ، س ∈ ط ؟

أ) {٦}   ب) {٣ ، ٦}   جـ) {٣}   د) Ø

٨ ما مجموعة حل ق(س) : س^{٢} + ١ = صفر ، س ∈ ص؟

أ) {-١}   ب) {-١ ، ١}   جـ) {١}   د) Ø

٩ ما نفي العبارة المسورة E س : س عدد مربع إذن س عدد زوجي ؟

أ) ∀س ، س ليس عدداً مربعاً أو زوجياً

ب) ∀س ، س عدد مربع إذن س عدد زوجي

جـ) E س : س ليس عدداً مربعاً أو زوجياً

د) ∀س ، س عدد مربع و ليس زوجياً

٢ ما قيم صواب كل مما يأتي:

أ) (٢ ≤ ١) ↔ ($٣^{٢}$ = ٦)

ب) (٢ > ١) ∨ ($٣^{٢}$ ≠ ٦)

جـ) ($٣^{٢}$ ≠ ٦) ← (٢ > ١)

د) ∃ س : $هـ^{س+١}$ = $هـ^{٢س}$ ، س ∈ ص

هـ) ∀ س ∈ ح ، $قا^{٢}$س − $ظا^{٢}$س = ١

٣ أوضح تكافؤ أو عدم تكافؤ كل زوج من العبارات الرياضية الآتية:

أ) ف ← ن ، ن ← ف

ب) ف ← ن ، ~ ف ← ~ن

جـ) ف ← ن ، ~ن ← ~ف

٤ أثبت صحة العبارات الرياضية الآتية دون استخدام جداول الصواب:

أ) (ف ← ن) ∨ (ف ← م) ≡ ف ← (ن ∨ م)

ب) ~ف ∨ (ن ∧ ~م) ≡ ~((ف ← ن) ← (ف ∧ م))

٥ إذا كان (ف ← ن) ∧ ن عبارة رياضية صائبة ، (ف ↔ ن) خاطئة، أجد قيم صواب كل من ف ، ن.

٦ أثبت أن : إذا كان س ≠ ص فإن $أ^{س}$ ≠ $أ^{ص}$ ، حيث أ > ٠ ، أ ≠ ١

٧ أثبت باستخدام الاستقراء الرياضي أن: $(١)^{٣} + (٢)^{٣} + (٣)^{٣} + ... + (ن)^{٣} = \frac{ن^{٢}(ن+١)^{٢}}{٤}$

٨ أثبت باستخدام الاستقراء الرياضي أن: $١ + \frac{١}{٤} + \frac{١}{٩} + ... + \frac{١}{ن^{٢}} \leq ٢ - \frac{١}{ن}$

أقيّم ذاتي أعبر بلغتي عن كيفية نقاط القوة والضعف الواردة في هذه الوحدة بما لا يزيد عن ٤ أسطر.

توظيف برامج حاسوبية

هناك كثير من البرامج الحاسوبية التي نستخدمها في حل بعض المسائل الرياضية، ومن هذه البرامج: برنامج مايكروسفت ماثيماتيكس (Microsoft Mathematics)

عند الدخول إلى البرنامج، نجد كثيراً من التطبيقات الرياضية، ومن ضمنها (standard) نجد أيقونات خاصة بالمنطق مثل : not ، or ، and ، isTrue وكلها أيقونات معرفة للحاسوب.

ويستخدم هذا التطبيق في:

أولاً: إيجاد قيم الصواب للعبارة الرياضية.

مثال ١ : أجد قيمة الصواب للعبارة الرياضية (٥ > -٥ أو ٥ = ٤ + ٣)

الحل : يمكن كتابة العبارة الرياضية المركبة isTrue (5 > -5 or 3 + 4 = 5)

ثم نضغط enter فنحصل على قيمة الصواب *true*

مثال ٢ : أجد قيمة الصواب للعبارة الرياضية.

(المضاعف المشترك الأصغر للعددين (٢ ، ١٠) يساوي ٣ أو ١٥ = ٣ × ٥)

الحل : يرمز للمضاعف المشترك الأصغر Least Common Multiple (lcm)

نكتب العبارة isTrue(lcm(2.10) = 3 or 15 = (5) . (3)

ثم نضغط enter فتظهر النتيجة *true*

مثال ٣ : أحدد قيمة الصواب للعبارة (~(٢>٥) ∧ ~(٤ ≠ ٨))

الحل : أدخل isTrue(not(2>5)andnot(4≠8)) ثم نضغط enter فتظهر النتيجة *false*

ثانياً: حل جمل مفتوحة (معادلات ومتباينات):

مثال ١ : أحل الجملة المفتوحة ١ − س^{٢} = ٠

الحل : أدخل $1 - x^2 = 0$ ثم أضغط enter فتظهر النتيجة $(x = 1 \text{ or } x = -1)$

مثال ٢ : لحل الجملة المفتوحة س^{٢} + س ≥ ٣٠

الحل : أدخل $x^2 + x \geq 30$ ثم أضغط enter فتظهر النتيجة $x \leq 6\text{-} \text{ or } x \geq 5$

مسائل:

١ أحدد قيم الصواب للعبارات الرياضية مستعيناً ببرنامج Microsoft Mathematics المايكروسوفت ماثيماتيكس

١) |٥| = −٥ أو |−٣| = ٣

٢) ٨ ≥ ١٠ و المضاعف المشترك الأصغر للعددين ٨ ، ٢٠ هو ٤٠

٣) جا π = صفر أو جتا π = −١

٢ أحل الجمل المفتوحة الآتية علماً بأن مجموعة التعويض هي ح:

١) ق(س): $\sqrt{\text{س}^{٢} + ٢}$ = ٥ ٢) م(س) : هـ$^{\text{س}}$ = ١

٣) ع(س): حاس جتاس = ٠ ٤) س^{٢} − ٣س − ١٠ ≥ ٠

فكرة رياديّة

إنتاج أصص ورود

ضمن فعاليات الإفادة من خامات البيئة اقتصاديا وجماليا، قامت معلمة التربية المهنية في إحدى مدارس الوطن فلسطين بتدريب طالبات الصف الحادي عشر على إنتاج أصص ورود من خامات البيئة، فأحضرت كومة من الحجارة الصغيرة وكمية من الرمل والاسمنت وقوالب لعمل الأصص، وبدأت بصف الحجارة داخل القالب وتغطيتها من الداخل بطبقة من مزيج الرمل والاسمنت والماء حتى أتمت ذلك العمل على كامل القالب ثم وضعت كمية من خلطة الاسمنت على الحافة النهائية للقالب، وتركته لليوم التالي ثم أزالت القالب فإذا به أصيص ورد أتقن صنعه، فخطرت على بال إحدى الطالبات فكرة إنتاج أصص وبيعها لصالح المدرسة.

ما علاقة الفكرة الريادية بمحتوى وحدة المنطق؟

ما المخاطر والأضرار والنجاحات المتوقعة؟

أكمل الجدول اللاحق يوضح المخاطر والأضرار والنجاحات المتوقعة:

المخاطر	الأضرار	النجاحات المتوقعة
البيئية والصحية	جمع حجارة من أماكن بيئية جميلة كحجارة الأودية ،	انتاج أصص من خامات فائضة عن الحاجة ويشكل وجودها مشكلة بيئية كقطع الرخام النتجة عن معامل الرخام ، ....
الاقتصادية	ضعف تسويق المنتج،	توفير عائد مالي للمدرسة، ....
الاجتماعية	خلق منافسة سلبية بين الطلبة ،	تأكيد قيم العمل الجماعي، .....

كيف يدار الزمن لتنفيذ الفكرة الريادية ؟ ....
....

ما مصادر التمويل المتاحة ؟ ....

ما الأدوات والمواد اللازمة للإنتاج؟ ....

ماهية المنتج: ....

كيفية تسويقها: من خلال الطلبة ، أولياء الأمور ، ....

إجراءات التنفيذ :

تقسيم الطلبة لمجموعات والمهام الموكلة بكل مجموعة:

....

....

....

....

معايير تقييم المنتج:

المجال	المؤشرات
معايير جمالية	
معايير هندسية	
معايير جودة المنتج وإتقانه	

النتائج المتوقعة:

توفير عائد مادي للمدرسة والاعتماد الذاتي في توفير جزء من الميزانية، تحسين بيئة المدرسة، التركيز على منظومة القيم الإيجابية للطلبة، ربط محتوى الوحدة التعليمية بالفكرة الريادية

توصيات :

....

....

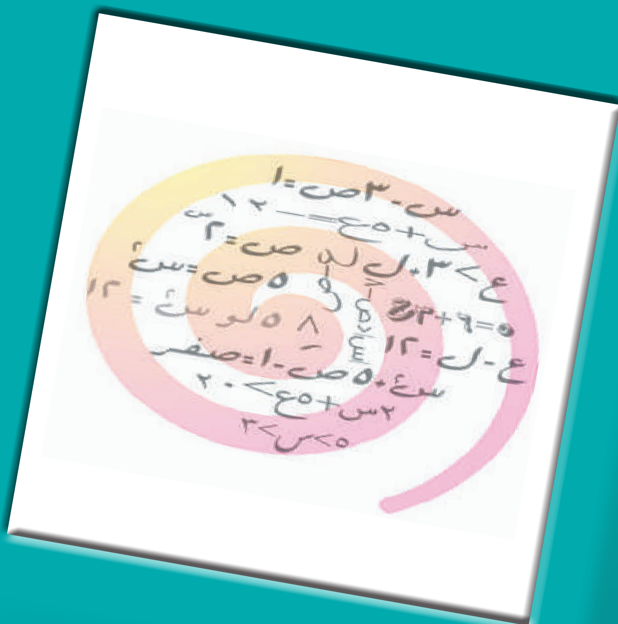
روابط إلكترونية

- https://brilliant.org/wiki/truth-tables/
- https://www.mathgoodies.com/cd
- https://www.whitman.edu/mathematics/higher_math_online/section02.01.html

الوحدة

٣

المعادلات والمتباينات



أقترح معادلةً عامةً للنجاح في الحياة

يتوقع من الطلبة بعد الإنتهاء من دراسة هذه الوحدة والتفاعل مع أنشطتها أن يكونوا قادرين على توظيف المعادلات والمتباينات في الحياة العمليّة من خلال الآتي:

1. حلّ نظام مكون من ثلاث معادلات خطّيّة.
2. حلّ نظام من معادلتين إحداهما خطّيّة، والأخرى تربيعيّة.
3. حلّ نظام من معادلتين تربيعيتين.
4. حلّ معادلات أسّيّة، ولوغاريتمية.
5. حلّ معادلات تتضمن القيمة المطلقة.
6. حلّ نظام من متباينتين خطّيّتين بمتغيرين.

نشاط ١: تخرج أمجد من جامعة بوليتيكنك فلسطين تخصص تكنولوجيا المعلومات، ثم حصل على وظيفة في إحدى الشركات الفلسطينية، وبعد عام من تعيينه تم تثبيته في الشركة، وحصل على زيادة مقدارها ١٠٪ من راتبه، بالإضافة إلى ٣٪ من راتبه علاوة غلاء معيشة، وكان المبلغ الذي قبضه بعد التثبيت ٥٦٥ ديناراً. فكم كان راتبه عند تعيينه؟

كلّف معلم الرياضيات طلاب صفه بحل هذه المسألة، وكان حلّا كمال وسامر كما يأتي:

حلّ كمال	حلّ سامر
نفرض أن راتبه عند توظيفه = س	نفرض أن راتبه قبل عام = س
الزيادة = ٠,١٠ + ٠,٠٣ = ٠,١٣	الراتب الجديد = س + ٠,١س + ٠,٠٣س
س = (١ − ٠,١٣) × ٥٦٥	= ١,١٣س
= ٠,٨٧ × ٥٦٥	١,١٣س = ٥٦٥
= ٤٩١,٥٥ ديناراً.	ومنها س = $\frac{٥٦٥}{١,١٣}$ = ٥٠٠ دينار

أناقش الحلين، وأبيّن الصحيح منهما؟ وأرى إن كان هناك طرق أخرى للحل؟

نشاط ٢: سافر خالد مع أبيه لزيارة عمه في الأردن، وأثناء الزيارة تعرّف على ابن عمه رامي. سأل خالد والده كم عمر ابن عمي رامي، فقال الأب: يا بنيّ: إنه يكبرك بأربع سنوات، كما أن خمسة أمثال عمره مضافاً إلى مثليْ عمرك، يساوي عمر جدك وهو٨٣ سنة.

الحل : إذا فرضنا أن عمر خالد س سنة، وعمر رامي ص سنة.

أتحقق أن ص = س+ ٤ و ٥ص + ٢س = ٨٣

ثم أحل النظام بإحدى الطرق التي تعلمتها، وأتحقق أن عمر رامي يساوي ١٣ سنة، وعمر خالد يساوي ٩ سنوات.

أفكر وأناقش : إذا انخفض سعر سلعة في شهر كانون ثاني بنسبة ١٠٪ ثم ارتفع في شهر آذار بنسبة ١٠٪ فهل يرجع السعر إلى سعره الأصلي في شهر كانون ثاني؟

نشاط ٣: ينتج مصنع ألبان في مدينة طوباس ثلاثة أحجام من عبوات اللبن (الصغيرة، والمتوسطة والكبيرة) فإذا كان مجموع أثمان عبوة واحدة من كل حجم يساوي ٩ دنانير، ومجموع أثمان علبتين من الحجم الصغير وعلبة من الحجم المتوسط يقل بمقدار دينار عن مثليْ ثمن علبة من الحجم الكبير، وكان مجموع أثمان ثلاثة علب من الحجم الصغير وعلبة من الحجم المتوسط، يزيد عن ثمن علبة من الحجم الكبير بمقدار ٥ دنانير. أجد سعر كل حجم من العبوات.

الحل : نفرض أن ثمن الحجم الصغير س والمتوسط ص والكبير ع فيكون:

س + ص + ع = ٩ .... (١) (لماذا؟)

٢س + ص – ٢ع = –١ .... (٢) (لماذا؟)

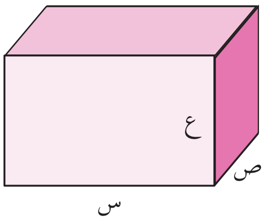
٣س + ص – ع = ٥ .... (٣) (لماذا؟)

بطرح (١) من (٢) ينتج س – ٣ع = –١٠ .... (٤)

بطرح (٣) من (٢) ينتج –س – ع = –٦ .... (٥)

أجد قيم س و ع ثم أتحقق أن ع = ٤ دنانير ، س = ٢ دينار، ثم أجد قيمة ص من إحدى المعادلات السابقة، وأتحقق أن ص = ٣ دنانير.

نشاط ٤: أراد عامل بناء أن يبني بئراً على شكل متوازي مستطيلات، بحيث يقل طولها عن مجموع عرضها وارتفاعها بمقدار ٢ متر، ومجموع أطوال أبعادها يساوي ١٢ متراً، فإذا كان محيط قاعدتها يساوي ١٨ متراً. أجد أبعاد هذه البئر.



أفرض أن الطول س متراً، والعرض ص متراً، والارتفاع ع متراً

س – ص – ع = –٢ .... (١)

س + ص + ع = ١٢ .... (٢)

٢س + ٢ص = ١٨ .... (٣)

أتحقق أن الطول يساوي ٥م والعرض يساوي ٤م والارتفاع يساوي ٣م

تمارين ومسائل ٣- ١:

١ أحلّ النظام الآتي: س + ص = $\sqrt{٨}$ ، س – ٢ص = ٥ $\sqrt{٢}$

٢ إذا كان ٣ جاأ + ٢ جتا ب = $\frac{١}{٢}$ وكان ٢ جا أ – ٣جتا ب = $\frac{٥}{٢}$ أجد أ ، ب بحيث إن: أ ، ب تنتمي للفترة] ٠ ، π[.

٣ أحل النظام الآتي:٧س + ٥ص – ٣ع = –٨ ، ٣س – ٥ص + ٢ع = –٤ ، ع + ٥س + ٣ص = ٠

٤ تعرض إحدى شركات الاتصالات الخليوية الفلسطينية ثلاثة عروض، فإذا اشترك شخص في العروض الثلاثة معا، فإنه يحصل على ٤٥٠ دقيقةً مجانيةً، وإذا اشترك في العرضيْن الأول والثاني، فإنه يحصل على ٢٥٠ دقيقةً مجانيةً، وإذا اشترك في العرضيْن الثاني والثالث، فإنه يحصل على ٣٥٠ دقيقةً مجانيةً. أجد عدد الدقائق المجانية لكل عرض.

٥ اتفق ثلاثة إخوة من قرية واد فوكين قضاء بيت لحم على أن يزرع كل واحد منهم نوعاً واحداً من الأشجار، فإذا اتفقوا على أن يزرع الأول أرضه زيتوناً، ويزرع الثاني أرضه لوزاً، ويزرع الثالث أرضه تفاحاً. فإذا كان عدد الأشجار التي زرعت من كل نوع، جميعها زيتون ما عدا ٥٠ شجرةً، وجميعها لوز ما عدا ٦٠ شجرةً، وجميعها تفاح ما عدا ٧٠ شجرةً. أجد كم شجرة من كل نوع زرع الإخوة الثلاثة؟

٦ قذف جسم راسيا الى أعلى من سطح بناية حسب العلاقة ف = أ ن + ب $ن^٢$ + جـ، حيث ف بالامتار، ن بالثواني ، فإذا رصد شخص ذلك الجسم من أسفل البناية فوجد أن ارتفاعه بعد ثانية ٤٥م، وبعد ثانيتين ٦٠م، وبعد ٣ ثواني ٦٥م، أجد السرعة الابتدائية (أ) ، التسارع (٢ب) ، ارتفاع البناية (جـ).

٣ - ٢ حلّ نظام من معادلتين في متغيرين: إحداهما خطّيّة، والأخرى تربيعيّة
Solving of System with Linear and Quadratic Equations of Two Variables

نشاط ١: الحرم الإبراهيمي مكان مقدس للمسلمين، وهو مبني من حجارة كبيرة (أنظر الشكل المجاور) فإذا كان طول أحد الحجارة يزيد عن عرضه بمقدار ٦ متر تقريباً، وطول قطره يساوي $\sqrt{٥٧}$ متراً تقريباً.

أفرض أن طول الحجر س وعرضه ص

س = ص + ٦ (لماذا؟)

س^{٢} + ص^{٢} = ٥٧ (لماذا؟)

(ص+٦)^{٢} + ص^{٢} = ٥٧

باستخدام القانون العام لحل المعادلة التربيعية، والآلة الحاسبة، أتحقق أن طوله يساوي ٧,٤م تقريباً، وعرضه يساوي ١,٤م تقريباً.

مثال ١ : يعرض أحد محلات بيع الأجهزة الكهربائية عدة مقاسات من شاشات LCD فإذا اشترى شخص شاشةً من مقاس ٥٠ بوصة (إنش) «المقاس يمثل طول قطر الشاشة» أجد أبعاد الشاشة إذا كان طولها يزيد عن عرضها بمقدار ١٠ بوصة.

الحل : نفرض أن الطول س والعرض ص

س^{٢} + ص^{٢} = ٢٥٠٠

س = ص + ١٠

(ص + ١٠)^{٢} + ص^{٢} = ٢٥٠٠

ومنها ينتج أن ص^{٢} + ١٠ ص − ١٢٠٠ = ٠

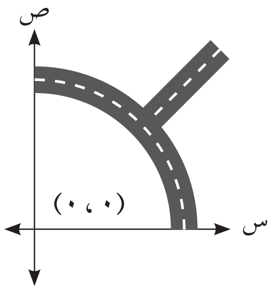
(ص + ٤٠) (ص − ٣٠) = ٠

ومنها ص = −٤٠ مرفوضة (لماذا؟)

أو ص = ٣٠ بوصة = عرض الشاشة و س= ٣٠ + ١٠ = ٤٠ بوصة = طول الشاشة.

نشاط ٢: شارعان أحدهما على شكل منحنى معادلته ٣س^٢ + ٤ص^٢ = ٢٨ والآخر مستقيم معادلته ٢ص = س + ٢ يلتقيان في مفترق طرق. أجد إحداثيي نقطة التقاطع. على اعتبار أن مركز الشارع المنحني هو (٠ ، ٠)

(انظر الشكل المجاور) (الوحدات بالكيلومتر)



٣ س^٢ + ٤ص^٢ = ٢٨

٢ص = س+٢ ينتج أن س = ٢ص −٢

٣(٢ص − ٢)^٢ + ٤ص^٢ = ٢٨

ومنها ينتج أن ٢ص^٢ − ٣ص −٢ = ٠

(٢ص + ١) (ص − ٢) = ٠

أجد قيم ص و س ثم أتحقق أن نقطة التقاطع هي (٢ ، ٢)

نشاط ٣: مثلث رؤوسه أ، ب، جـ مرسوم داخله دائرة، بحيث تمس أضلاعه من الداخل، فإذا كانت

أ ($-\frac{١}{٢}$ ، ٤) ، ب (٨ ، −١) ومعادلة الدائرة هي س^٢ + ص^٢ = ١٣

ميل المستقيم أب = ...

أتحقق أن معادلة المستقيم أب هي ص = $\frac{-٢س + ١٣}{٣}$

أعوض قيمة ص في معادلة الدائرة، ثم أتحقق أن نقطة التماس هي (٢ ، ٣).

تمارين ومسائل ٣-٢:

١ أحلّ النظام الآتي: س + ص = ٥ ، ٣س^{٢} − ٢ص^{٢} = ١٩

٢ سجادة مستطيلة الشكل طولها يزيد عن عرضها بمقدار متر واحد، وقطرها يساوي $\sqrt{١٣}$ متراً، أجد أطوال أبعادها.

٣ أجد نقطة/ نقط تقاطع المستقيم الذي ميله يساوي ٣ ويمر بالنقطة (٢ ، ٥) مع المنحنى الذي معادلته ٢ص^{٢} − ٣س^{٢} = ٥

٤ أجد نقطة تقاطع المستقيم ٢س + ٣ص= ٦ مع المنحنى (٢س + ص)^{٢} + (٢س− ص)^{٢} = ٨

٥ طاولة اجتماعات بيضاوية الشكل محاطة بإطار معدني معادلته ١٦س^{٢} + ٢٥ص^{٢} = ٦٤ (الوحدات بالأمتار). مرسوم على سطحها خطان مستقيمان متقاطعان في مركز الطاولة (٠ ، ٠) ومعادلتهما هي:

ص = ∓ ٤ $\sqrt{٣}$ س ، أجد نقاط تقاطع المستقيمين مع إطار هذه الطاولة.

٦ أجد نقاط تقاطع منحنى الدائرة التي مركزها (٣ ، ٢) وطول نصف قطرها $\sqrt{٦١}$ مع المستقيم المار بنقطة الأصل والنقطة (١ ، ١).

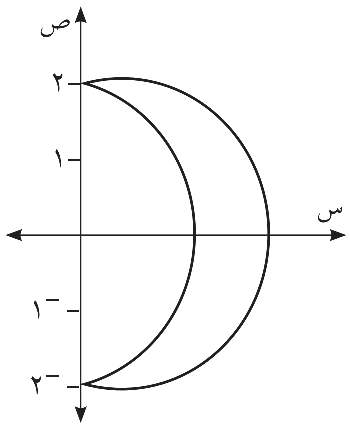
٣ - ٣ حلّ نظام مكون من معادلتين تربيعيتين في متغيرين
Solving of System with Two Quadratic Equations with Two Variables

نشاط ١: الشكل المجاور يمثل مخططاً لهلال،

معادلة القوس الداخلي هي $\text{س}^٢ + \text{ص}^٢ = ٤$

ومعادلة القوس الخارجي هي $(\text{س} - ١)^٢ + \text{ص}^٢ = ٥$

أتحقق أن نقطتي التقاطع هما (٠ ، ٢) ، (٠ ، −٢)



مثال ١ : بركة سباحة سطحها بيضاوي يحيط بها ممر صغير معادلته $٢\text{س}^٢ + ٣\text{ص}^٢ = ٦٩$ فإذا قسمت إلى ثلاث مناطق (منطقتي أ و جـ للأطفال، والمنطقة ب للكبار) فإذا حددت المناطق بحبال تقع على منحنى العلاقة $\text{س}^٢ - \text{ص}^٢ = ١٢$ كما في الشكل المجاور. أجد نقط تقاطع الحبال مع أطراف البركة على اعتبار أن مركز البركة هو نقطة الأصل.

الحل : لإيجاد نقط تقاطع الحبال مع أطراف البركة نحل النظام:

$٢\text{س}^٢ + ٣\text{ص}^٢ = ٦٩ \quad ... \quad (١)$

$\text{س}^٢ - \text{ص}^٢ = ١٢ \quad ... \quad (٢)$

$٣\text{س}^٢ - ٣\text{ص}^٢ = ٣٦$ (لماذا؟)

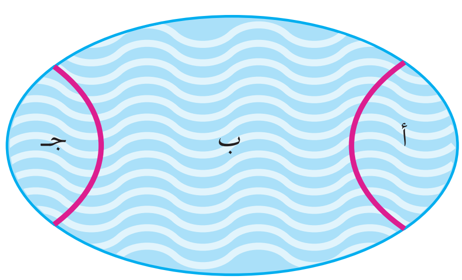
$٥\text{س}^٢ = ١٠٥$

ومنها $\text{س} = \pm\sqrt{٢١}$

$\therefore \text{ص}^٢ = ٢١ - ١٢ = ٩$

ومنها $\text{ص} = \pm ٣$

$\therefore$ نقط التقاطع هي $(\pm\sqrt{٢١} ، \pm ٣)$



مثال ٢ : أحلّ النظام الآتي: $س^{٢} + ص^{٢} = ٢٥$ ، $(س + ٢ص)^{٢} + (س - ٢ص)^{٢} = ١٤٦$

الحل : $(س + ٢ص)^{٢} + (س - ٢ص)^{٢} = ١٤٦$

بفك الأقواس والاختصار، ينتج: $س^{٢} + ٤ص^{٢} = ٧٣$

ومنها $س^{٢} + ص^{٢} + ٣ص^{٢} = ٧٣$ ، لكن $س^{٢} + ص^{٢} = ٢٥$

ومنها $٢٥ + ٣ص^{٢} = ٧٣$

ومنها $ص^{٢} = ١٦$

ص = ± ٤ ، ومنها س = ± ٣ أي أن نقط التقاطع (± ٣ ، ± ٤)

مثال ٣ : النقطة و(س ، ص) تتحرك في المستوى، بحيث يتحدد موقعها حسب العلاقتين الآتيتين:

س = ٣جتا ن ، ص = ٤جا ن.

أجد نقط تقاطع مسار هذه النقطة مع منحنى العلاقة $١٦س^{٢} - ٩ص^{٢} = ١٤٤$

الحل : $\frac{س}{٣}$ = جتا ن ، كذلك $\frac{ص}{٤}$ = جا ن بتربيع المعادلتين وجمعهما ينتج أن:

$\frac{س^{٢}}{٩} + \frac{ص^{٢}}{١٦} = جتا^{٢}ن + جا^{٢}ن = ١$ (لماذا؟)

$١٦س^{٢} + ٩ص^{٢} = ١٤٤$ .... (١)

$١٦س^{٢} - ٩ص^{٢} = ١٤٤$ ....(٢)

$٣٢س^{٢} = ٢٨٨$ ومنها ينتج أن س = ± ٣ ، ص = ٠

أي أن نقطتي التقاطع هما (± ٣ ، ٠)

تمارين ومسائل ٣-٣:

١ أحل أنظمة المعادلات الآتية:

أ $س^{٢} + ص^{٢} = ١٠٠$

$٢س^{٢} - ص^{٢} = ٨$

ب $س^{٢} + ٢ص^{٢} - ٤١ = ٠$

$٢س^{٢} - ص^{٢} = ٢$

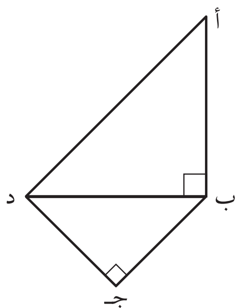
٢ غرفة أرضيتها مستطيلة الشكل، طول قطرها يساوي $\sqrt{٣٤}$ م، و ثمانية أمثال مربع عرضها يقل عن سبعة أمثال مربع طولها بمقدار ١٠٣ م، فما بعداها؟

٣ أجد نقطة/ نقط تقاطع المنحنى الذي معادلته $(س - ٣ص)^{٢} + (س + ٣ص)^{٢} = ٢٢$ مع المنحنى الذي معادلته $س^{٢} - ٤ص^{٢} = -٢$

٤ استورد تاجر نوعين من البلاط على شكل مستطيل، فإذا كان قطر أي قطعة من النوع الأول يساوي ٥٠ سم، وطول قطر أي قطعة من النوع الثاني $١٠\sqrt{٥}$ سم، وكان طول القطعة من النوع الأول يساوي ضعفيْ طول القطعة من النوع الثاني، وعرض أي قطعة من النوع الأول يساوي ٣ أضعاف عرض أي قطعة من النوع الثاني. فما طول وعرض كل قطعة من النوعين؟

٥ قطعة أرض موضحة في الشكل المجاور، يراد عمل سور حولها، أجد طول هذا السور إذا كان أب يساوي ضعفيْ ب جـ

وكان أد = ٥٠ م ، دجـ = ٤٠ م



٦ تتحرك النقطة م(س ، ص) في المستوى بحيث يتحدد موقعها حسب العلاقتين:

س = قاهـ ، ص = ظاهـ ، حيث هـ تمثل قياس زاوية حادة،

أجد نقط تقاطع منحنى مسار هذه النقطة مع منحنى العلاقة $س^{٢} + ص^{٢} = ٧$

نشاط ١: من خلال معلوماتك في الكيمياء، ماذا نعني بالمول؟ وما عدد أفوجادرو؟ وما كتلة الإلكترون؟ نلاحظ أن الكميات الكبيرة جداً، والكميات الصغيرة جداً تكتب بالصورة العلمية واستخدام الأسس (لماذا؟)

أولاً: حل معادلات أسّيّة:

مثال ١: أحل المعادلة الأسّيّة الآتية: $٤^{٣س} = ٨^{(س+١)}$

الحل: $٢^{٦س} = ٢^{٣س+٣}$ (لماذا؟)

ومنها ٦س = ٣س + ٣

وينتج أن س = ١ (أتحقق من صحة النتيجة)

مثال ٢: يتناقص سعر سيارة جديدة في أول ٥ سنوات بمعدل ٢٠٪ سنوياً، فإذا اشترى شخص سيارة قبل عدة سنوات بسعر ٢٠٠٠٠ دينار، وباعها في العام ٢٠١٦ بسعر ١٠٢٤٠ ديناراً.

١ ما هي سنة إنتاج السيارة؟

٢ متى يصبح سعرها يساوي ٤٠,٩٦٪ من سعرها الأصلي؟

الحل:

١ سعر السيارة بعد ن من السنوات س = $٢٠٠٠٠(٠,٨)^{ن}$ (لماذا؟)

$٢٠٠٠٠(٠,٨)^{ن} = ١٠٢٤٠$

$(٠,٨)^{ن} = \frac{١٠٢٤٠}{٢٠٠٠٠} = (٠,٨)^{٣}$

إذن قيمة ن = ٣ سنوات، أي أن السيارة تم إنتاجها عام ٢٠١٣

٢ سعر السيارة = ٠,٤٠٩٦ × ٢٠٠٠٠ = ٨١٩٢ ديناراً.

إذن $٨١٩٢ = ٢٠٠٠٠ \times (٠,٨)^{ن}$ ، $(٠,٨)^{٤} = (٠,٨)^{ن}$

ن = ٤ أي في العام ٢٠١٧

نشاط ٢: أحل المعادلة $٩^{٢س-٦} - ١ = ٠$

$٩^{٢س-٦} = ١$

إذن ٢س − ٦ = ٠ (لماذا؟)

س = ٣

نشاط ٣: أحل المعادلة $\frac{٨ \times ١٠^{٣س}}{٢ \times ١٠^{٥س}} = ٤ \times ١٠^{٤}$

أختصر وأتحقق من أن: $١٠^{-٢س} = ١٠^{٤}$ وأن س = −٢

مثال ٣: إذا كان ق(س) = $٤^{س} - ٢^{(س+١)}$، وكان ق(ب) = ٤٨ أجد قيمة ب

الحل :

ق(ب) = ٤٨

$٤^{ب} - ٢^{(ب+١)} = ٤٨$

ومنها $٤^{ب} - ٢^{(ب+١)} - ٤٨ = ٠$

ومنها $٢^{(٢ب)} - ٢ \times ٢^{(ب)} - ٤٨ = ٠$

$(٢^{ب} - ٨)(٢^{ب} + ٦) = ٠$

ومنها ينتج أن ب = ٣ (لماذا؟)

ثانياً: حل معادلات لوغاريتمية

أناقش : أقارن بين حل المعادلة $٥^{س} = ٢٥$ والمعادلة $٥^{س} = ١٠$

حل المعادلات الأسّيّة بالطرق العادية ليس سهلاً دائماً؛ لذلك نلجأ إلى استخدام اللوغاريتمات لحل المعادلات الأسّيّة، ففي النشاط السابق لحل المعادلة $٥^{س} = ١٠$ نأخذ اللوغاريتم العادي (الأساس ١٠) للطرفين فينتج أن:

لـو($٥^{س}$) = لـو(١٠) = ١ (لماذا؟) ومنها ينتج أن س لـو٥ = ١ (لماذا؟) ومنها س = $\frac{١}{لـو٥} \approx ١,٤٣$

مثال ٤ : أحل المعادلة الآتية: $لو_٣ س + لو_٣(س + ٦) = ٣$

الحل : $لو_٣(س^٢ + ٦س) = ٣$

ومنها ينتج أن $س^٢ + ٦س - ٢٧ = ٠$ (لماذا؟)

$(س + ٩)(س - ٣) = ٠$

ومنها ينتج أن س = −٩ (مرفوض. لماذا؟) أو س = ٣ (مقبول)

نشاط ٤: أحلّ المعادلة الآتية: $٢(لو_٢ س)^٢ - ٥ لو_٢ س - ٣ = ٠$

إرشاد: أفرض $ص = لو_٢ س$ ثم أحل المعادلة الناتجة

وأتحقق من أن $س = \frac{١}{\sqrt{٢}}$ أو س = ٨

نشاط ٥: أحلّ المعادلة الآتية: $٦^{٣س} = ٢٠$ وأتحقق من أن $س = \frac{لو ٢٠}{٣ لو ٦} \approx ٠,٥٦$

مثال ٥ : أحلّ المعادلة الآتية: لو ٥س − لو(س−١) = لو س

الحل : لو ٥س − لو(س−١) = لو س

$لو \frac{٥س}{س - ١} = لو س$

ومنها ينتج أن $\frac{٥س}{س - ١} = س$

ومنها ينتج أن $س^٢ - س = ٥س$

$س^٢ - ٦س = ٠$

ومنها ينتج أن س = ٠ (مرفوض. لماذا؟) أو س = ٦ (مقبول)

تمارين ٣ -٤:

١ أحلّ كلاً من المعادلتين الآتيتين:

أ $٤^{س^{٢}} - ٨^{س} = ٠$

ب $هـ^{٢س} - ٥ \times هـ^{س} + ٦ = ٠$ ، حيث هـ العدد النيبيري

جـ $(س^{هـ} + س^{-هـ})^{٢} - (س^{هـ} - س^{-هـ})^{٢} = ٢^{س}$

٢ أحلّ المعادلة الآتية: $٣^{(٢س+١)} - ٣^{(س+١)} - ٣^{(س+٤)} + ٨١ = ٠$

٣ أحلّ المعادلة الآتية: $لو_{٢}\, س - لو_{٢}(س - ٤) = ٣$

٤ أحلّ المعادلتين الآتيتين: ١) $٢\, لو_{٢}\, س + لو_{٢}\, ١٦ = ٢$ ٢) $(لو س)^{٢} = لو س^{٢}$

٥ إذا كان $ق(س) = لو_{٢}\, س^{٣}$ ، وكان $هـ(س) = ٥ - لو_{٢}\, س^{٢}$ أجد نقطة تقاطع المنحنيين.

٦ إذا كانت أسعار الأراضي في منطقة معينة تعطى بالعلاقة $ص = أ \times ٢^{(٠,٢ن)}$ حيث ص هو سعر الدونم بعد ن سنة، أ هو سعر الأرض الآن. فإذا اشترى شخص هذا العام أرضاً مساحتها ١ دونم بسعر ١٥٠٠٠ دينار فبعد كم سنة يصبح سعرها ٦٠٠٠٠ دينار؟

٧ أحل النظام $٢^{س} + ٢^{ص} = ٦$

$٤^{س+١} - ٤^{ص+١} = -٤٨$

٨ أثبت صحة ما يأتي :

أ $لو_{ب}\, أ = لو_{جـ}\, أ \times لو_{ب}\, جـ$ ، حيث $جـ > ٠$ ، $جـ \neq ١$

ب $لو_{ب}\, أ = \frac{١}{لو_{أ}\, ب}$

جـ $لو_{ب^{٢}}\, أ^{٢} = لو_{ب}\, أ$

نشاط ١: أعلنت إحدى وكالات الأنباء عن تأجيل إطلاق مركبة فضائية، فهل خطر ببالك لماذا يتم التأجيل؟ لاشك أن هنالك عدة أسباب لذلك، من بينها الحالة الجوية. إذ يجب أن تكون درجة الحرارة عند إطلاق المركبة بين ٣٠ و ١٠٠ فهرنهايت، وأن لا تزيد سرعة الرياح عن ٥٠ كم/ س.

كيف يمكن تحديد الحالات التي يمكن إطلاق المركبات الفضائية فيها؟

هل يمكن كتابة متباينات، أو معادلات تمثل هذه الحالات؟ هل يمكن تمثيلها بيانياً؟

عند حل نظام مكون من متباينتين خطّيّتين بمتغيرين:

أولاً: أمثل كل متباينة في النظام بيانياً، وأظلل مجموعة الحل لها.

ثانياً: أحدد المنطقة المظللة المشتركة بين مناطق حل متباينات النظام، والتي تمثل منطقة حل النظام.

أتعلم: عند تمثيل الخط المستقيم الممثل لمعادلة المتباينة، يكون هذا الخط متصلاً عندما يكون في إشارة التباين مساواة، ويكون هذا الخط متقطعاً عندما لا يكون هناك إشارة مساواة.

نشاط ٢: في مدرسة فلسطين الثانوية المختلطة، إذا كان عدد الذكور يزيد عن ١٥٠ طالباً، وعدد الإناث يزيد عن ١٢٠ طالبةً، فإذا كان عدد طلبة المدرسة لا يزيد عن ٣٠٠ طالب.

أفرض أن عدد الذكور س وعدد الإناث ص

المتباينة التي تمثل عدد الطلبة الذكور هي ....

المتباينة التي تمثل عدد الطالبات هي ....

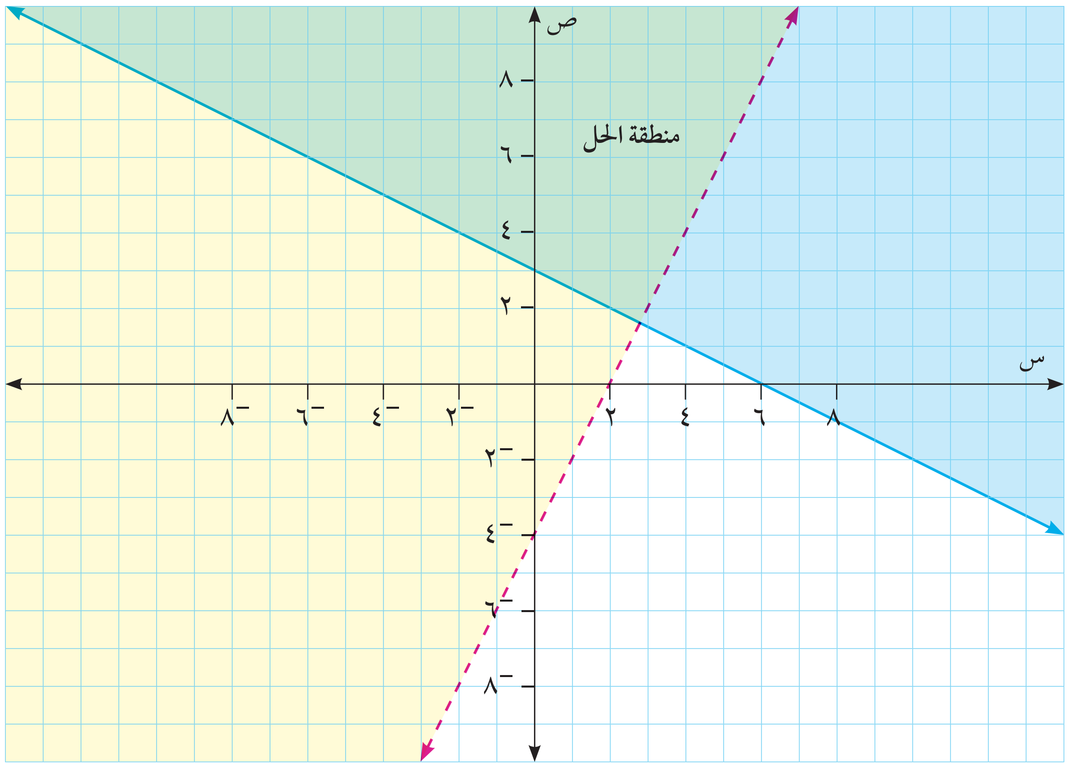
المتباينة التي تمثل عدد طلبة المدرسة هي ....

هل يمكن تمثيل هذه المتباينات على المستوى البياني؟

مثال ١ : أمثل بيانياً مجموعة الحل لنظام المتباينات الآتية:

٢س − ٤ < ص ، ٦ − س ≥ ٢ص .

الحل : نمثل الخط المستقيم ص=٢س − ٤ ، والمستقيم ٢ص=٦ − س



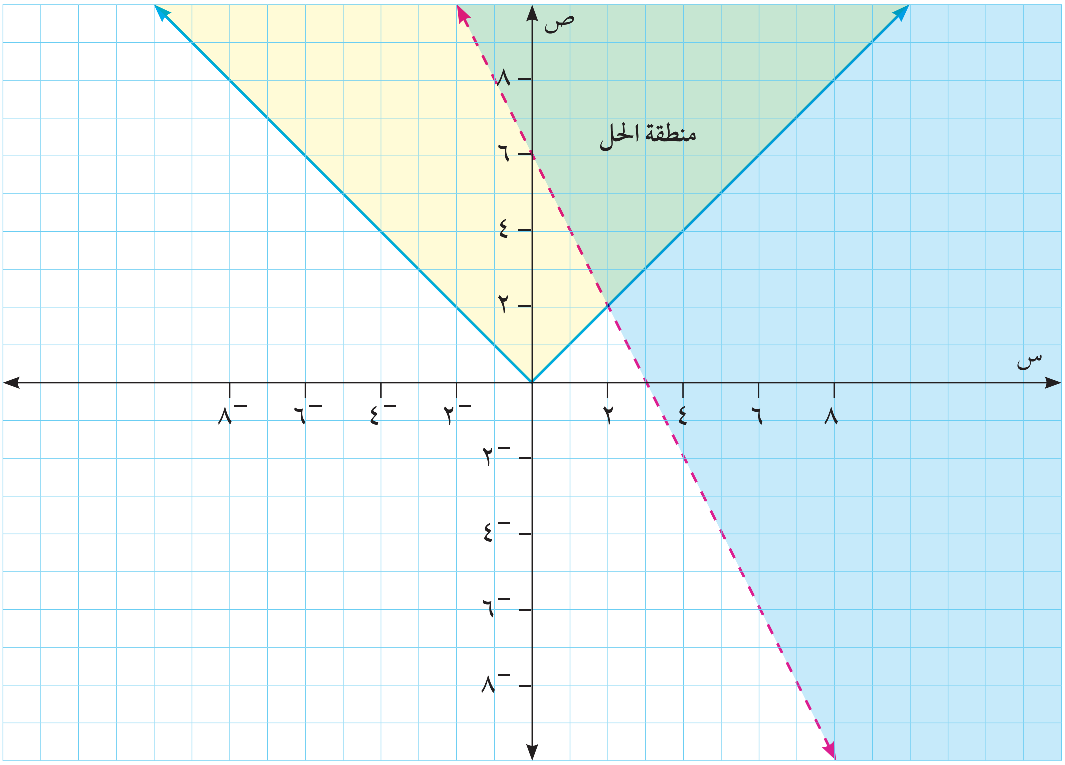
ألاحظ أن هنالك منطقةً مشتركةً بين منطقتي حل المتباينتين، ومجموعة الأزواج المرتبة الواقعة في هذه المنطقة تمثل مجموعة حل للنظام.

أتحقق أن (٤ ، ٢) ∉ مجموعة حل النظام السابق.

أتحقق أن (٠ ، ٠) ∉ مجموعة حل النظام السابق.

مثال ٢ : أمثل بيانياً مجموعة الحل لنظام المتباينات الآتي: |س| ≤ ص ، ٦ - ٢س < ص .

الحل : نمثل منطقة الحل لكل متباينة في المستوى البياني، فتكون منطقة الحل هي المنطقة المشتركة.

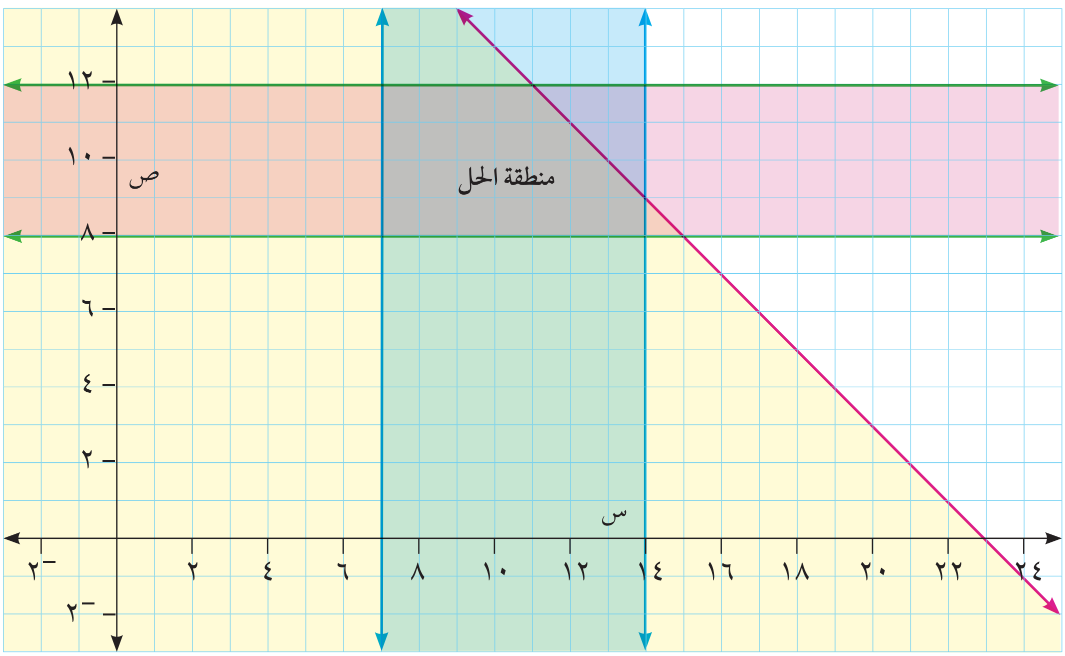


مثال ٣ : لدى خلود ٢٥ ساعةً على الأكثر للاستعداد لأداء ثلاثة امتحانات في الرياضيات والفيزياء والتاريخ، وقد وضعت جدولاً زمنياً لذلك، فخصصت ساعتين لدراسة التاريخ، وخصصت من ٧ إلى ١٤ ساعة لدراسة الرياضيات، أما الفيزياء فخصصت لدراستها من ٨ إلى ١٢ ساعة.
أكتب نظام متباينات خطّيّة يمثل هذا الجدول الزمني، وأمثلُه بيانياً.

الحل : أفرض أن عدد الساعات المخصصة لدراسة الفيزياء ص، وعدد الساعات المخصصة لدراسة الرياضيات س، ألاحظ أن س > ٠ ، ص > ٠، ... (لماذا؟)

٨ ≥ ص ≥ ١٢ ، ٧ ≥ س ≥ ١٤، وان س + ص≥ ٢٣... (لماذا؟)

أمثل مجموعة الحل لهذه المتباينات على النحو الآتي:



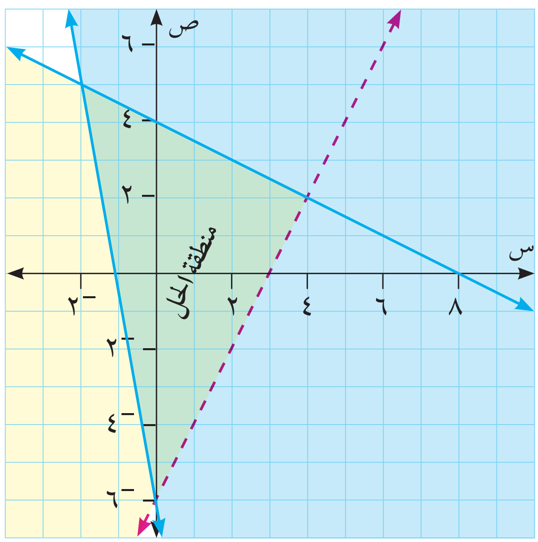
تمارين ومسائل ٣- ٥:

١ أحدد مجموعة الحل لنظام المتباينات الآتي بيانياً: ٢س + ١ ≥ ص ، ص ≥ ٨ ، ٤س + ٣ص ≤ ٨

٢ أحدد مجموعة الحل لنظام المتباينات الآتي بيانياً: ٦س – ٢ص ≤ ١٢، ٣س + ٤ص > ٨

٣ اشترك سعيد وأسيْد في تدريب للتحضير للمباراة النهائية، فإذا كانت عدد ساعات التدريب اليومي لسعيد لا تقل عن أربع ساعات، ولا تزيد عن ٨ ساعات، وعدد ساعات التدريب اليومي لأسيْد لا تقل عن ساعتين، ولا تزيد عن ٥ ساعات، وكانت عدد ساعات التدريب لكليهما لا تزيد عن ١٠ ساعات، أكتب نظام متباينات خطّيّة يمثل ساعات التدريب، وأمثله بيانياً.

٤ تمثل المنطقة المظللة في المستوى الإحداثي المجاور حلا لنظام من المتباينات الخطية بمتغيرين، أجد هذا النظام.



نشاط ١ : في سنة ٢٠١٣م اجتاحت فلسطين موجة باردة، وقد تساقطت الثلوج بكثافة، والجدول الآتي يمثل درجات الحرارة في سبعة أيام متتالية من أيام الشتاء في مدينة حلحول.

اليوم	السبت	الأحد	الإثنين	الثلاثاء	الأربعاء	الخميس	الجمعة
درجة الحرارة س°	٧	٦	٣	٠	١⁻	٢⁻	٣⁻

الفرق بين أعلى درجة حرارة وأدنى درجة = ...

بفرض أن س هي درجة الحرارة في أحد الأيام ماذا تعني |س| = ٣

وهذه درجات الحرارة ليومي ....و......

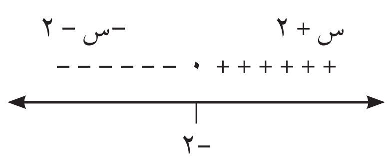
نشاط ٢: أحل المعادلة الآتية: |٦ - ٢س| = ١٦

٦ - ٢س = ١٦ ....(١) أو ٦ - ٢س = ١٦⁻ ....(٢) (لماذا؟)

من (١) - ٢س = ١٠ ومنها س = ٥⁻ . أتحقق من (٢) أن س = ١١

أفكر وأناقش : ما العلاقة بين |أ - ب| و |ب - أ|

مثال ١ : أحلّ المعادلة الآتية : |س + ٢| = ٣س - ١٢



الحل : بإعادة تعريف |س + ٢| والاستعانة بخط الأعداد

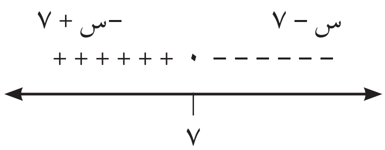
عندما س < -٢ ، تكون - س - ٢ = ٣س - ١٢

ومنها س = $\frac{٥}{٢}$ ترفض (لماذا؟)

عندما س ≥ -٢، تكون س + ٢ = ٣س - ١٢

ومنها س = ٧ تقبل (لماذا؟)

نشاط ٣: أحلّ المعادلة الآتية: |٧ − س| = س − ٧



٧ − س = ٠ ومنها س = ٧

عندما س≤ ٧ تكون س −٧ = س −٧،

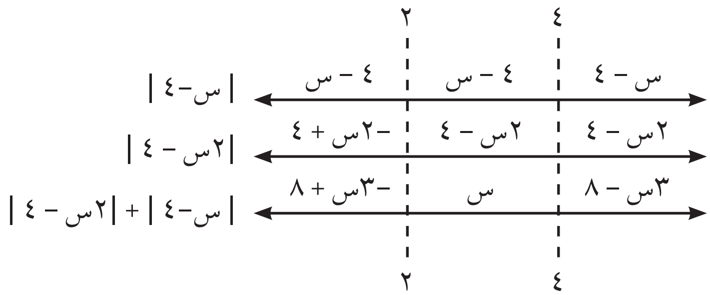
ما مجموعة الحل في هذه الحالة؟

عندما س ≥ ٧ تكون ٧ − س = س −٧،

ما مجموعة الحل في هذه الحالة؟

أتحقق أن مجموعة الحل هي س∈ [٧ ، ∞[

مثال ٢ : أحلّ المعادلة الآتية: | س−٤ | + |٢س − ٤ | = ٤



عندما س≥ ٢ تكون − ٣س + ٨ = ٤ ومنها س = $\frac{٤}{٣}$ (أتحقق من ذلك)

عندما ٤≤ س ≤ ٢ ينتج أن س = ٤ (أتحقق من ذلك)

وعندما س ≤ ٤ تكون ٣س −٨ = ٤ وينتج س = ٤

إذن الحل النهائي س = ٤ أو س = $\frac{٤}{٣}$

تمارين ومسائل ٣-٦:

١ أحلّ المعادلات الآتية:

أ $|\text{٦} - \text{٥ س}| = \text{٨}$

ب $\text{٥}\sqrt{\text{س}^{\text{٢}} + \text{٤س} + \text{٤}} - \text{١١} = \text{٤}$

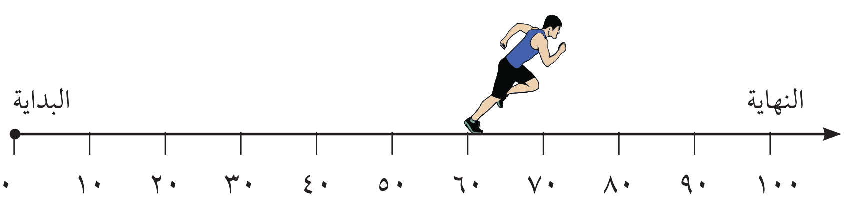
٢ إذا كان ٥ أمثال العدد أ يبعد عن العدد ٧ بمقدار ٨ وحدات ما قيمة أ ؟

٣ أحلّ المعادلة الآتية:

أ $|\text{٤} - \text{س}| = \text{٦} - |\text{س} + \text{٢}|$

ب $\sqrt{\text{س}^{\text{٢}} + \text{٦س} + \text{٩}} = |\text{٩} - \text{٢س}|$

٤ شارك أحد اللاعبين في سباق ١٠٠ م للجري. وفي لحظة ما كان ثلاثة أمثال بعده عن النقطة ٦٠م يساوي بعده عن النقطة ٨٠ م . أجد كم متراً بقي له لإنهاء السباق في تلك اللحظة؟ (كم حلاًّ للمسألة)



٥ إذا كان $\text{ق(س)} = \text{س}^{\text{٢}} - \text{٥}$ ، $\text{هـ(س)} = \text{٢} - |\text{س} + \text{٥}|$ ، أجد نقاط تقاطع المنحنيين، ثم أستخدم برنامج GeoGebra لتوضيح ذلك هندسيا.

٣ - ٧ حلّ متباينات خطية في متغيرين تتضمن القيمة المطلقة
Solving Linear Inequalities with Tow Variables In Absolute Value

نشاط ١: بائع خضار متجول لا يزيد ربحه عن ٢٠ ديناراً في اليوم، ولا تزيد خسارته عن ٢٠ ديناراً في اليوم، فإذا اشترى في أحد الأيام بضاعة قيمتها ١٠٠ دينار.

الحد الأعلى للمبلغ الذي سيقبضه بعد بيع البضاعة هو ....

الحد الأدنى للمبلغ الذي سيقبضه بعد بيع البضاعة هو ....

إذا فرضنا أن المبلغ الذي سيقبضه هو س أتحقق أن ٨٠ ≤ س ≤ ١٢٠

بطرح ١٠٠ من طرفي المتباينة ينتج أن ....

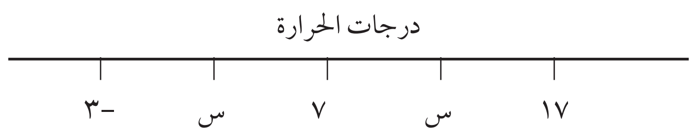
ما العلاقة بين |س-١٠٠| ≤ ٢٠ و -٢٠ ≤ س - ١٠٠ ≤ ٢٠

قاعدة: إذا كانت |س| < أ (أ عدد موجب) فإن - أ < س < أ

إذا كانت |س| > أ (أ عدد موجب) فإن س > أ أو س < - أ

مثال ١: رصدت درجات الحرارة لمدينة فلسطينية خلال فصل الشتاء، فوجد أن أصغر درجة حرارة كانت ٣ درجات مئوية تحت الصفر، وأكبر درجة حرارة كانت ١٧ مئوية. أكتب البيانات السابقة باستخدام رمز القيمة المطلقة.

الحل:



أفرض أن س هي درجة الحرارة فيكون -٣ ≤ س ≤ ١٧

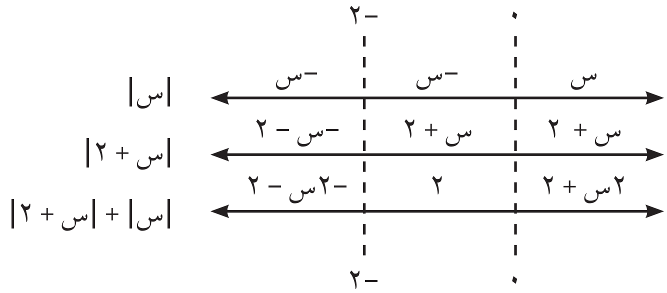
أتذكر أنه إذا كان |س- أ| ≤ ب (ب عدد موجب) فإن أ - ب ≤ س ≤ أ + ب

بفرض أن أ - ب = -٣ و أ + ب = ١٧ أتحقق أن أ = ٧ و ب = ١٠

إذن تصبح المتباينة باستخدام القيمة المطلقة |س-٧| ≤ ١٠

مثال ٢ : أحلّ المتباينة الآتية: |س| + |س + ٢| ≤ ٤

الحل : بعد إعادة تعريف |س| و |س+٢| وتمثيلها على خط الأعداد ينتج:



- عندما س ≤ -٢ تكون -٢س - ٢ ≤ ٤

ومنها ينتج أن س ≥ -٣ أي أن مجموعة الحل هي س ∈ [-٣، -٢]

- عندما -٢≤ س ≤ ٠ تكون ٢ ≤ ٤

وهذه العبارة صحيحة أي مجموعة الحل س∈ [-٢ ، ٠]

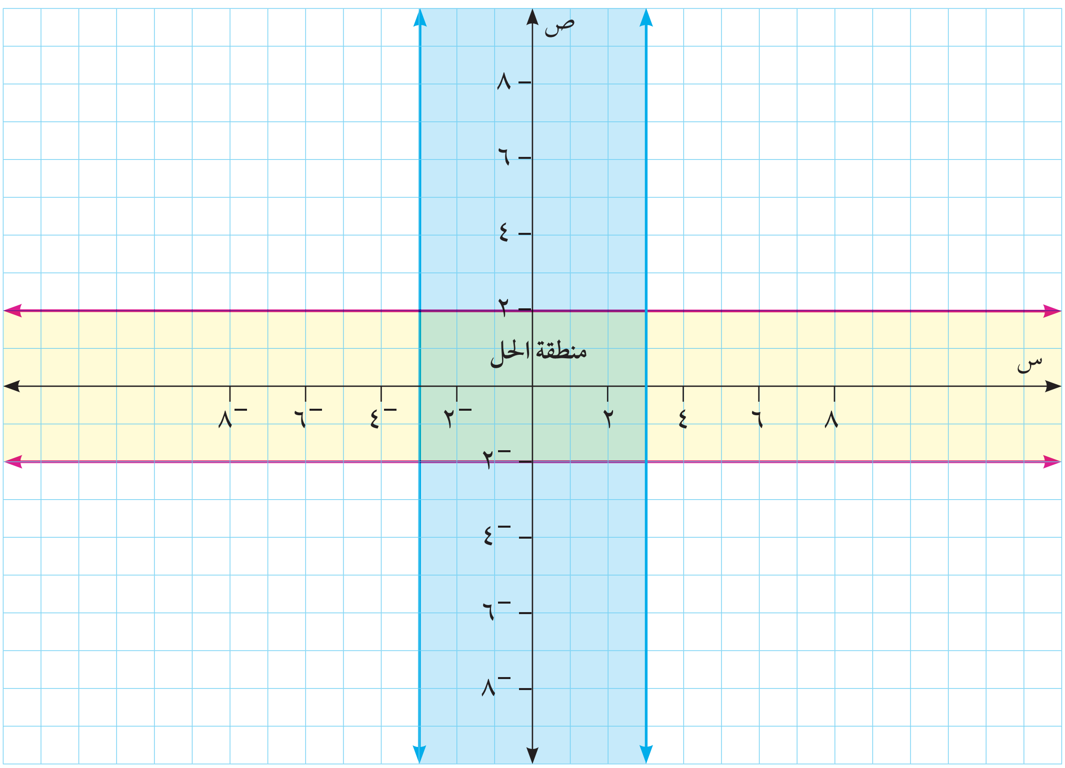
- عندما س ≥ ٠ تكون ٢س + ٢ ≤ ٤

ومنها ينتج أن س ≤ ١ أي أن مجموعة الحل هي: س ∈ [٠ ، ١]

مجموعة الحل النهائية هي اتحاد المجموعات السابقة وهي [-٣ ، ١] (أتحقق من ذلك).

مثال ٣ : تم قياس كتلتي شخصين في مركز للرياضة خلال شهر واحد، فإذا كان التغير في كتلة الأول لا يتعدى ٣ كغم، والتغير في كتلة الثاني لا يتعدى ٢ كغم.
أكون متباينات خطّيّة بمتغيرين، ثم أحلها، وأعطي أمثلةً توضح الحل.

الحل : أفرض أن التغير في كتلة الأول س فيكون |س| ≤ ٣ ومنها ينتج أن −٣ ≤ س ≤ ٣
أفرض أن التغير في كتلة الثاني ص فيكون |ص| ≤ ٢ ومنها ينتج أن −٢ ≤ ص ≤ ٢
ويمكن توضيح الحل بيانياً كما يأتي:



سؤال : ماذا تمثل النقطة (٢ ، −١)

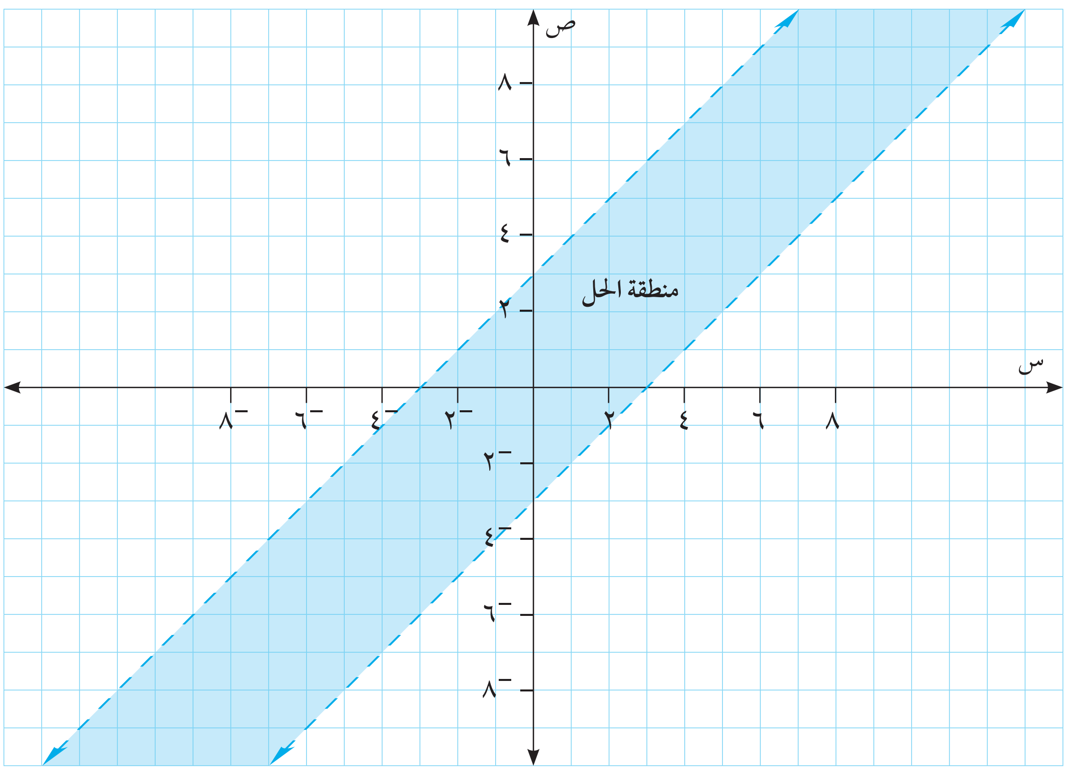
نشاط ٢: أحلّ المتباينة الآتية: | س − ص | < ٣

أستخدم خصائص القيمة المطلقة في إعادة التعريف.

أجزّئ المتباينة إلى جزأين، يمثل كل جزء متباينةً في متغيرين

أكتب المعادلة المرافقة لكل متباينة، وأمثلها بيانياً.

أتحقق أن مجموعة الحل يمكن تمثيلها كما يأتي:



تمارين ٣ - ٧:

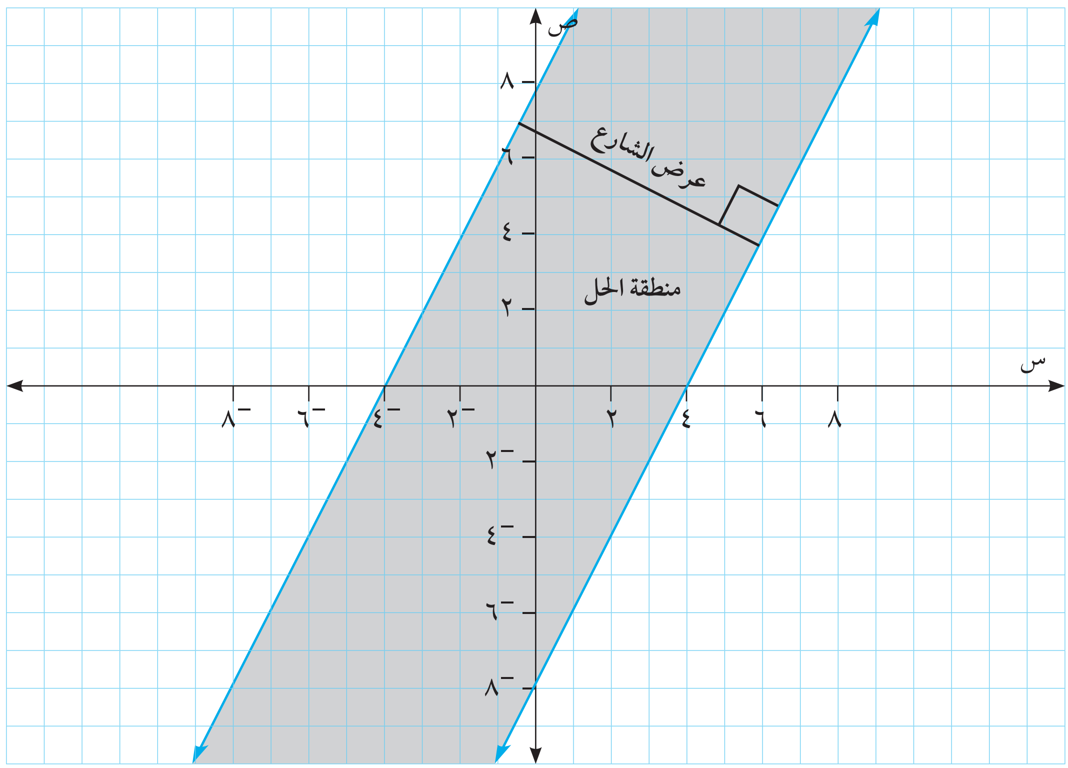
١ أحلّ المتباينة الآتية: |١٢ + ٣س| ≤ ٩ وأمثلها بيانياً.

٢ أحلّ المتباينة الآتية: ٢|٣ − ص| < ١٢ وأمثلها بيانياً.

٣ أحل المتباينة |س − ٢ص| − ١ < ٥

٤ أحل المتباينة ٢|$\frac{٢}{٣}$ س + ٦| < ص + ٨ وأمثلها بيانياً.

٥ أكتب المتباينة التي تمثل منطقة الحل الممثلة في الشكل الآتي مستخدماً رمز القيمة المطلقة:



(وإذا كانت هذه المنطقة تمثل شارعاً، أجد عرضه)

إرشاد: المسافة بين النقطة م(س١، ص١) والمستقيم أس + ب ص + جـ = ٠ هي

$$\text{ف} = \frac{|\text{أ س}_١ + \text{ب ص}_١ + \text{جـ}|}{\sqrt{\text{أ}^٢ + \text{ب}^٢}}$$

تمارين عامة

١ أضع دائرةً حول رمز الإجابة الصحيحة فيما يأتي:

١) ما قيم س التي تحقق المتباينة الآتية |$\frac{س}{٢}$ − ٦,٠| < ٤ ؟

أ) [−٨, ٦ ، ٢, ٩]　　ب) [−٨, ٩ ، −٢, ٦]

جـ)]−٨, ٦ ، ٢, ٩[　　د)]−٨, ٦ ، ٢, ٩]

٢) أكتب ما يأتي باستخدام مفهوم القيمة المطلقة «المسافة بين ثلاثة أمثال س والعدد ٢».

أ) |٢س − ٣|　　ب) |٣س − ٢|　　جـ) |٣س + ٢|　　د) ٣|س| − ٢

٣) عند حلّ نظام خطّي مكوّن من ٣ معادلات، كانت مجموعة الحل هي{(−٣ ، ١ ، ع)} ، وكانت إحدى المعادلات هي س− ص + ٣ع = ٨ . ما قيمة ع ؟

أ) ٤　　ب) −٤　　جـ) $\frac{١}{٣}$　　د) ١

٤) ما المعادلة التي يمكن أن يمثل بها النظام: ص = س + ٢ ، ص = س − ٢ ؟

أ) |ص| = |س| + ٢　　ب) |س| = |ص| + ٢

جـ) ص = ± |س − ٢|　　د) |س − ص| = ٢

٥) ما الزوج المرتب الذي يمثل حلاً للنظام الآتي: س^{٢} − ص^{٢} = ٥ ، س + ص = ٥ ؟

أ) (−٣ ، −٢)　　ب) (٣ ، ٢)　　جـ) (٢ ، ٣)　　د) (−٢ ، ٣)

٦) ما العددان الموجبان اللذان مجموع مربعيهما يساوي ٥٢ والفرق بين مربعيهما يساوي ٢٠ ؟

أ) ٤ ، ٦　　ب) ٨ ، ١٨　　جـ) −٨ ، ٦　　د) ٨ ، ٤

٧) ما قيمة س التي تحقق المعادلة الآتية: ٨$^{(٥−س)}$ = ١ ؟

أ) − ٥　　ب) ٥　　جـ) $\frac{١٤}{٣}$　　د) − $\frac{١٤}{٣}$

٨) ما قيمة / قيم س التي تحقق المعادلة الآتية: ٢لـو$_{٢}$ س + لـو$_{٢}$ ٤ = ٦ ؟

أ) ±٤　　ب) −٤　　جـ) ٤　　د) √٨

٩) إذا كان أ ، ب عددين موجبين، أ > ب وكان بعد أ عن ب يساوي ٣ وبعد أ عن معكوس ب يساوي ٧ فما قيم أ ، ب ؟

أ) ٥ ، ٢　　ب) ٦ ، ٤　　جـ) ٧ ، ٣　　د) ٤ ، ١

١٠) ما حل المعادلة ٢^{٢س} − ٢^{س} = ٢ ؟

أ) ٢　　ب) صفر　　جـ) −١　　د) ١

٢ أجد قاعدة كثير الحدود من الدرجة الثانية والذي يمر منحناه بالنقاط (١ ، ١) ، (−١ ، −٥) ، (٢ ، ١٠)

٣ أحلّ المتباينة |٣س| + |س + ١| ≥ ٥

٤ نافذة على شكل مستطيل طولها يزيد عن عرضها بمقدار متر واحد، فإذا كان طول قطرها يساوي $\sqrt{٥}$ متراً. يراد تركيب ألومنيوم للنافذة بسعر المتر المربع ٦٠ ديناراً. أجد تكلفة الألومنيوم.

٥ عددان موجبان مجموع مربعيهما يساوي ٢٥، والفرق بين ثلاثة أمثال مربع الأول ومثلَيْ مربع الثاني يساوي ٣٠. أجد العددين.

٦ أحلّ المعادلة الآتية: $٢^{٢س} - ٢^{س-٣} - ٢^{س-٢} + ٢^{-٥} = ٠$

٧ أحلّ المعادلات الآتية:

أ $لـو_{٣}$ (س − ٢) + $لـو_{٣}$ (س − ٨) = ٣

ب $لـو_{٢٧}$ (س − ٢) + $لـو_{٣}$ (س − ٢) = ٤

٨ تمت متابعة أسعار سلعتيْن على مدار عام، فإذا كان الفرق بين سعري السلعتين لا يتعدى ١٠ دنانير. أكوّن نظاماً رياضياً ثم أحله.

أقيّم ذاتي أعبر بلغتي عن المفاهيم الأكثر إثارة في هذه الوحدة.

فكرة رياديّة

حديقة طبية

كثيرة هي الأعشاب التي تزين جبال وأودية وسهول وصحاري فلسطين ، وذلك الموقعها الجغرافي المميز وتنوع تضاريسها وتنوع مناخها وتربتها، فتتنوع الأعشاب التي تنمو فيها تبعا للعوامل السابقة ، وتعد الميرمية والزعتر والبردقوش وإكليل الجبل والريحان وغيرها من النباتات الطبية الهامة التي تنمو في فلسطين، فهي تعد علاجاً للعديد من الأمراض التي تصيب الانسان، فكرت اللجنة العلمية في إحدى المدارس في فلسطين خوض تجربة تقضي بزراعة بعض الأعشاب الطبية في حديقة المدرسة، للإفادة منها في علاج آلام بعض الطلبة وتبيع ما يزيد عن حاجتها وتستفيد من ناتج البيع في قضاء بعض حوائج المدرسة المتعددة .

الجدول اللاحق يوضح المخاطر والأضرار والنجاحات المتوقعة

المخاطر	الأضرار	النجاحات المتوقعة
البيئية والصحية	استبدال بعض الأشجار الحرجية بتلك الأعشاب ،	تخضير المدرسة ، إضفاء صورة جمالية للمكان ، ....
المالية	خسارة ثمن البذور والأشتال إن لم تنجح الفكرة لظروف قاهرة،	توفير عائد مالي يرفد ميزانية المدرسة، ....
الاجتماعية	خلق منافسة سلبية بين الطلبة ،	تأكيد قيم العمل الجماعي ، والزراعة والقيم الوطنية والتشبث بالأرض، .....

إدارة الزمن ....

....

مصادر التمويل: مساهمة الطلبة ، ميزانية المدرسة ومجلس أولياء، ....

....

الأدوات والمواد اللازمة للإنتاج: البذور والأشتال ، أدوات الري ، ....

المواد المنتجة: أعشاب خضراء طبية ، أكياس من أعشاب طبية مجففة

كيفية تسويقها: من خلال الطلبة ، أولياء الأمور ، ....

إجراءات التنفيذ :

تقسيم الطلبة لمجموعات والمهام الموكلة بكل مجموعة:

....

....

....

معايير تقييم المنتج:

المجال	المؤشرات
معايير جمالية	
معايير هندسية	
معايير جودة المنتج وإتقانه	

النتائج المتوقعة:

تفير عائد مادي للمدرسة والاعتماد الذاتي في توفير جزء من الميزانية، تحسين بيئة المدرسة ، التركيز على منظومة القيم الإيجابية للطلبة ، ربط محتوى الوحدة التعليمية بالفكرة الريادية

توصيات :

....

....

روابط إلكترونية

- https://www.symbolab.com/
- https://www.mathsisfun.com/algebra/inequality-solving.html

المشروع

شكل من أشكال منهج النشاط؛ يقوم الطلبة (أفراداً أو مجموعات) بسلسلة من ألوان النشاط التي يتمكنون خلالها من تحقيق أهداف ذات أهمية للقائمين بالمشروع.
ويمكن تعريفه على أنه: سلسلة من النشاط الذي يقوم به الفرد أو الجماعة لتحقيق أغراض واضحة ومحددة في محيط اجتماعي برغبة ودافعية.

ميزات المشروع:

١. قد يمتد زمن تنفيذ المشروع لمدة طويلة ولا يتم دفعة واحدة.
٢. ينفّذه فرد أو جماعة.
٣. يرمي إلى تحقيق أهداف ذات معنى للقائمين بالتنفيذ.
٤. لا يقتصر على البيئة المدرسية وإنما يمتد إلى بيئة الطلبة لمنحهم فرصة التفاعل مع البيئة وفهمها.
٥. يستجيب المشروع لميول الطلبة وحاجاتهم ويثير دافعيّتهم ورغبتهم بالعمل.

خطوات المشروع:

أولاً: اختيار المشروع: يشترط في اختيار المشروع ما يأتي:

١. أن يتماشى مع ميول الطلبة ويشبع حاجاتهم.
٢. أن يوفّر فرصة للطلبة للمرور بخبرات متنوعة.
٣. أن يرتبط بواقع حياة الطلبة ويكسر الفجوة بين المدرسة والمجتمع.
٤. أن تكون المشروعات متنوعة ومترابطة وتكمل بعضها البعض ومتوازنة، لا تغلّب مجالاً على الآخر.
٥. أن يتلاءم المشروع مع إمكانات المدرسة وقدرات الطلبة والفئة العمرية.
٦. أن يُخطّط له مسبقاً.

ثانياً: وضع خطة المشروع:

يتم وضع الخطة تحت إشراف المعلم حيث يمكن له أن يتدخّل لتصويب أي خطأ يقع فيه الطلبة.

يقتضي وضع الخطة الآتية:

١. تحديد الأهداف بشكل واضح.
٢. تحديد مستلزمات تنفيذ المشروع، وطرق الحصول عليها.
٣. تحديد خطوات سير المشروع.
٤. تحديد الأنشطة اللازمة لتنفيذ المشروع، **(شريطة أن يشترك جميع أفراد المجموعة في المشروع من خلال المناقشة والحوار وإبداء الرأي، بإشراف وتوجيه المعلم).**
٥. تحديد دور كل فرد في المجموعة، ودور المجموعة بشكل كلّي.

ثالثاً: تنفيذ المشروع:

مرحلة تنفيذ المشروع فرصة لاكتساب الخبرات بالممارسة العملية، وتعدّ مرحلة ممتعة ومثيرة لما توفّره من الحرية، والتخلص من قيود الصف، وشعور الطالب بذاته وقدرته على الإنجاز حيث يكون إيجابياً متفاعلاً خلّاقاً مبدعاً، ليس المهم الوصول إلى النتائج بقدر ما يكتسبه الطلبة من خبرات ومعلومات ومهارات وعادات ذات فائدة تنعكس على حياتهم العامة.

دور المعلم:

١. متابعة الطلبة وتوجيههم دون تدخّل.
٢. إتاحة الفرصة للطلبة للتعلّم بالأخطاء.
٣. الابتعاد عن التوتّر مما يقع فيه الطلبة من أخطاء.
٤. التدخّل الذكي كلما لزم الأمر.

دور الطلبة:

١. القيام بالعمل بأنفسهم.
٢. تسجيل النتائج التي يتم التوصل إليها.
٣. تدوين الملاحظات التي تحتاج إلى مناقشة عامة.
٤. تدوين المشكلات الطارئة (غير المتوقعة سابقاً).

رابعاً: تقويم المشروع: يتضمن تقويم المشروع الآتي:

١. **الأهداف** التي وضع المشروع من أجلها، ما تم تحقيقه، المستوى الذي تحقّق لكل هدف، العوائق في تحقيق الأهداف إن وجدت وكيفية مواجهة تلك العوائق.

٢. **الخطة** من حيث وقتها، التعديلات التي جرت على الخطة أثناء التنفيذ، التقيّد بالوقت المحّدد للتنفيذ، ومرونة الخطة.

٣. **الأنشطة** التي قام بها الطلبة من حيث، تنوّعها، إقبال الطلبة عليها، توافر الإمكانات اللازمة، التقيد بالوقت المحدد.

٤. تجاوب الطلبة مع المشروع من حيث، الإقبال على تنفيذه بدافعيّة، التعاون في عملية التنفيذ، الشعور بالارتياح، إسهام المشروع في تنمية اتجاهات جديدة لدى الطلبة.

يقوم المعلم بكتابة تقرير تقويمي شامل عن المشروع من حيث:

- أهداف المشروع وما تحقّق منها.
- الخطة وما طرأ عليها من تعديل.
- الأنشطة التي قام بها الطلبة.
- المشكلات التي واجهت الطلبة عند التنفيذ.
- المدة التى استغرقها تنفيذ المشروع.
- الاقتراحات اللازمة لتحسين المشروع.

المراجع

التميمي، علي جاسم (2009): مقدمة في الجبر الخطي، دار المسيرة، عمان .

زيتون، عايش محمود (2004): أساسيات الإحصاء الوصفي، دار عمار للنشر والتوزيع، عمان .

عوض، عدنان (1991): الرياضيات العامة وتطبيقاتها الاقتصادية، دار الفرقان_ اربد_ الأردن .

قنديلجي، عامر إبراهيم (2008): البحث العلمي واستخدام مصادر المعلومات التقليدية والالكترونية، دار اليازوري العلمية للنشر والتوزيع- عمان- الأردن.

طبش، خليل (20132): مبادئ الرياضيات العامة , الجامعة الإسلامية .

التميمي، علي جاسم (2009): مقدمة في الجبر الخطي، دار المسيرة، عمان .

الشراونة، عبد الحكيم عامر (2006): موسوعة الرياضيات في النهايات والتفاضل، دار الاسراء للنشر والتوزيع_عمان_ الأردن .

Bostock&Perkins(1989) : Advanced Mathematics, volume1

Bell,E,T (1937):Men of Mathematics ,Simon and Schuter,N.Y

Lanl B.Boyer(1989): History of Mathematics Wiley,N.Y

Bostock&Perkins(1989) : Advanced Mathematics, volume2

لجنة المناهج الوزارية:

د. صبري صيدم
أ. ثروت زيد
د. شهناز الفار
د. بصري صالح
أ. عزام أبو بكر
د. سمية نخالة
م. فواز مجاهد
أ. علي مناصرة
م. جهاد دريدي

اللجنة الوطنية لوثيقة الرياضيات:

أ. ثروت زيد
د. محمد مطر
د. سمية النخالة
د. محمد صالح (منسقًا)
د. علا الخليلي
أ. أحمد سياعرة
د. معين جبر
د. شهناز الفار
أ. قيس شبانة
د. علي عبد المحسن
د. علي نصار
أ. مبارك مبارك
د. تحسين المغربي
د. أيمن الأشقر
أ. عبد الكريم صالح
د. عادل فوارعة
أ. ارواح كرم
أ. نادية جبر
أ. وهيب جبر
أ. حنان أبو سكران
أ. أحلام صلاح
د. عبد الكريم ناجي
أ. كوثر عطية
أ. نشأت قاسم
د. عطا أبوهاني
د. وجيه ضاهر
أ. نسرين دويكات
د. سعيد عساف
أ. فتحي أبو عودة

المشاركون في ورشات عمل كتاب الرياضيات الحادي عشر العلمي والصناعي:

د. محمد صالح
سامي بدر
محمد فايز
أحمد أمين
سمير درويش
مراد غنيم
أرواح كرم
سهيل شبير
مصطفى عفانة
ابتسام اسليم
سهيلة بدر
منى الطهراوي
باسم المدهون
عبد الكريم صالح
موسى حراحشة
حنين شرف
عوني الفقيه
مي عصايرة
رأفت عمرو
فلاح الترك
هناء أبو عامر
رائدة عويص
محمد الفرا
وائل العبيات
ريم جابر
محمد حمدان
وفاء موسى

تَمَّ بِحَمْدِ الله