المملكة الأردنية الهاشمية
وزارة التربية والتعليم
إدارة المناهج والكتب المدرسية

الرياضيات

الفصل الدراسي الثاني

الصف الثاني عشر

للفرعين العلمي والصناعي

الرياضيات الفصل الدراسي الثاني الصف الثاني عشر للفرعين العلمي والصناعي

١٤٤٠هـ / ٢٠١٩م

ISBN:978-9957-84-771-5
9 789957 847715

مطبعة الدستور

المملكة الأردنية الهاشمية
وزارة التربية والتعليم
إدارة المناهج والكتب المدرسية

الرياضيات

الفصل الدراسي الثاني

الصف الثاني عشر

للفرعين العلمي والصناعي

منهاجي
متعة التعليم الهادف

النّاشر
وزارة التربية والتعليم
إدارة المناهج والكتب المدرسية

يسر إدارة المناهج والكتب المدرسية استقبال ملاحظاتكم وآرائكم على هذا الكتاب على العناوين الآتية:
هاتف: ٤٦١٧٣٠٤/٥٠٨ فاكس: ٤٦٣٧٥٦٩ ص.ب. (١٩٣٠) الرمز البريدي: ١١١١٨
أو على البريد الإلكتروني: E-mail: Scientific.Division@moe.gov.jo

قررت وزارة التربية والتعليم تدريس هذا الكتاب في جميع مدارس المملكة الأردنية الهاشمية بناءً على قرار مجلس التربية والتعليم رقم ٢٠١٧/٢م تاريخ ٢٠١٧/١/١٧م بدءًا من العام الدراسي ٢٠١٧ / ٢٠١٨م.

رقم الإيداع لدى دائرة المكتبة الوطنيّة
(٢٠١٧/٣/١٥٦٩)

ISBN: 978 – 9957 – 84 – 771–5

أشرف على تأليف هذا الكتاب كل من:

أ.د. حسن زارع هديب (رئيسًا)
أ.د. أحمد عبد الله رحيل
أ.د. عبد الله محمد ربابعة
د. معاذ محمود الشياب

وقام بتأليفه كل من:

د. لانا كمال عرفة
إبراهيم أحمد عمايرة
د. يوسف محمد صبح
د. حسين عسكر الشرفات
نفين أحمد جوهر
أمل حسني الخطيب

التحرير العلمي: نفين أحمد جوهر

التصميم : عمر أحمد أبوعليان
الرسم : عمر أحمد أبو عليان
التصوير : أديب أحمد عطوان
التحرير اللغوي : ميساء عمر الساريسي
التحرير الفني : نداء فؤاد أبو شنب
الإنتاج : د. عبدالرحمن سليمان أبو صعيليك

دقّق الطباعة: هبة ماهر التميمي
راجعها : نڤين أحمد جوهر

الطبعة الأولى ١٤٣٨هـ/ ٢٠١٧م
أعيدت طباعته ٢٠١٨ – ٢٠١٩م

قائمة المحتويات

الموضـــوع | الصفحة

الفصل الدراسي الثاني

الوحدة الرابعة : التكامل وتطبيقاته ٦
الفصل الأول: التكامل ٨
أولًا: معكوس المشتقة ٨
ثانيًا: التكامل غير المحدود ١٤
ثالثًا: التكامل المحدود ٢٤
رابعًا: اقتران اللوغاريتم الطبيعي ٣٨
خامسًا: مشتقة وتكامل الاقتران الأسي الطبيعي ٤٤
الفصل الثاني: طرائق التكامل ٥٠
أولًا: التكامل بالتعويض ٥٠
ثانيًا: التكامل بالأجزاء ٦١
ثالثًا: التكامل بالكسور الجزئية ٦٩
الفصل الثالث: تطبيقات على التكامل ٧٦
أولًا: المساحة ٧٦
ثانيًا: المعادلات التفاضلية ٩٠
أسئلة الوحدة ٩٦

الوحدة الخامسة : القطوع المخروطية وتطبيقاتها ١٠٢
الفصل الأول: القطوع المخروطية ١٠٤
أولًا: القطع المخروطي ١٠٤
ثانيًا: المحل الهندسي ١٠٧
الفصل الثاني: معادلات القطوع المخروطية ١١٢
أولًا: الدائرة ١١٢
ثانيًا: القطع المكافئ ١٢٠

ثالثًا: القطع الناقص ١٣٣
رابعًا: القطع الزائد ١٤٦
أسئلة الوحدة ١٥٨

الوحدة السادسة: الإحصاء والاحتمالات ١٦٢

الفصل الأول: الإحصاء ١٦٤
أولًا: الارتباط ١٦٤
ثانيًا: معامل ارتباط بيرسون الخطي ١٦٩
ثالثًا: معادلة خط الانحدار ١٧٤
الفصل الثاني: الاحتمالات ١٧٨
أولًا : المتغير العشوائي ١٧٨
ثانيًا: توزيع ذي الحدين ١٨٦
ثالثًا: العلامة المعيارية ١٩١
رابعًا: التوزيع الطبيعي ١٩٦
أسئلة الوحدة ٢٠٤
ملحق (١): متطابقات مثلثية ٢٠٦
ملحق (٢): جدول التوزيع الطبيعي المعياري ٢٠٧
قائمة المراجع ٢٠٨

الفصل الدراسي الثاني

منهاجي
متعة التعليم الهادف

الوحدة الرابعة

٤

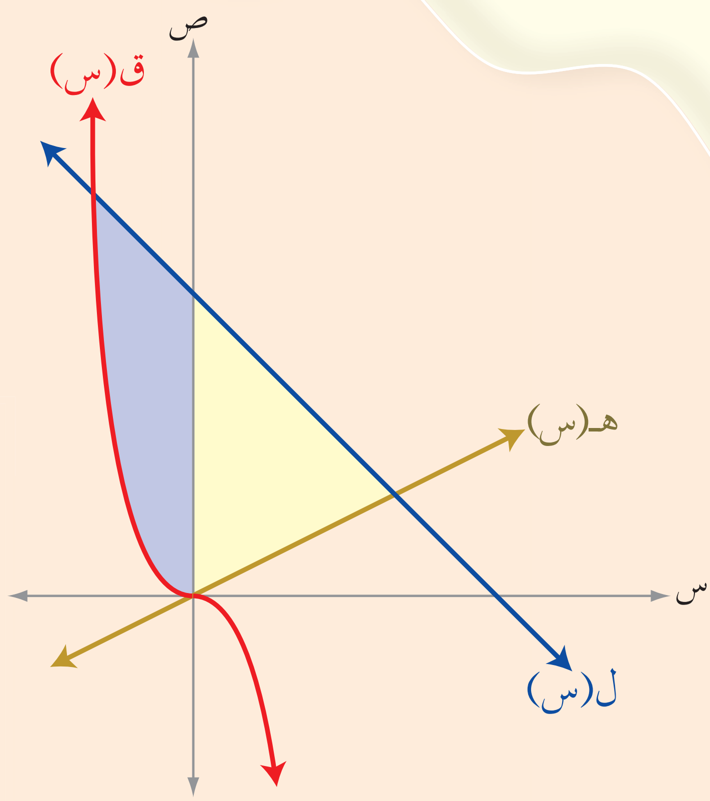
التكامل وتطبيقاته

Integration and its Applications

تعد المشتقة و التكامل المحدود أهم موضوعين في علم التفاضل والتكامل ، ويدخل هذا العلم في العديد من التطبيقات في الهندسة والعلوم المختلفة حيث تعالج المشتقة إيجاد ميل المماس وتعريف السرعة والتسارع، وقد سبق لك دراسة هذا الموضوع وتعرفت تطبيقاته، بينما يعالج التكامل المحدود إيجاد مساحات مناطق محدودة بمنحنيات يصعب حسابها بالقوانين العادية ، وهذا أحد تطبيقات التكامل المتعددة في الرياضيات والعلوم الأخرى. وهناك ارتباط وثيق بين المشتقة والتكامل ستتعرفه في هذه الوحدة.

يتوقع من الطالب بعد نهاية هذه الوحدة أن يكون قادرًا على:

- تَعرُّف مفهوم معكوس المشتقة لاقتران ما ، وإيجاده.
- استخدام رمز التكامل للتعبير عن عكس المشتقة.
- إيجاد التكامل غير المحدود لاقترانات كثيرات حدود ، ومثلثية ، وأسية ، ونسبية .
- تَعرُّف مفهوم التكامل المحدود ، وإيجاد قيمته.
- تَعرُّف قواعد التكامل.
- توظيف قواعد التكامل في إيجاد تكاملات معطاة.
- إيجاد مشتقة اقتران اللوغاريتم الطبيعي وتكامله.
- إيجاد مشتقة الاقتران الأسي الطبيعي وتكامله.
- استخدام عدة طرق لإجراء التكامل مثل التعويض، والأجزاء، والكسور الجزئية.
- استخدام التكامل لإيجاد قيمة المساحة المحصورة بين ثلاثة منحنيات على الأكثر.
- حَلِّ معادلات تفاضلية.



الفصل الأول

التكامل

Integration

النتاجات

- تتعرف معكوس المشتقة للاقتران المتصل.
- تستخدم رمز التكامل للتعبير عن عكس المشتقة.
- تتعرف قواعد التكامل غير المحدود، وتحسبه لاقترانات كثيرات الحدود، واقترانات مثلثية وأسية ونسبية.
- تتعرف التكامل المحدود على الفترة [أ ، ب]، وخصائصه، وتحسبه لاقترانات معطاة.
- تجد مشتقة اقتران اللوغاريتم الطبيعي.
- تجد مشتقة الاقتران الأسي الطبيعي وتكامله.

أولًا معكوس المشتقة Antiderivative

إذا كان ق(س) = ٣س^{٢}، فجد الاقتران الذي مشتقته ق(س).

ستجد أنَّ هناك عددًا لانهائيًّا من الاقترانات التي مشتقتها ٣س^{٢} مثل :

س^{٣} ، س^{٣}+١ ، س^{٣}− $\frac{١}{٢}$ ، س^{٣}+ $\sqrt{٣}$ ... إلخ

ويمكن كتابة هذه الاقترانات على الصورة م (س) = س^{٣} + جـ ، حيث جـ عدد ثابت، يسمى الاقتران م(س) **معكوسًا لمشتقة** الاقتران ق.

حيث مَ (س) = ق(س)

تعريف

إذا كان ق اقترانًا متصلًا على الفترة [أ ، ب] فإنَّ م(س) يسمى معكوسًا لمشتقة الاقتران ق(س) إذا كان مَ (س) = ق(س) لكل س ∈ (أ ، ب).

مثال ١

بيّن أنَّ الاقتران م (س) = س^{٥} + ٤س^{٢} + ٢ هو معكوس لمشتقة الاقتران

ق(س) = ٥س^{٤} + ٨س

الحل

ق(س) اقتران متصل على ح لأنَّه كثير حدود.

مَ (س) = ٥س^{٤} + ٨س = ق(س)

∴ م (س) معكوس لمشتقة الاقتران ق(س)

تدريب ١

بيّن أنّ الاقتران م (س) = س^{٤}– جاس – $\frac{١}{٣}$ ، هو معكوس لمشتقة الاقتران

ق(س) = ٤س^{٣} – جتاس

نشاط

جد معكوسًا لمشتقة كلٍّ من الاقترانات المعطاة في الجدول، ثم أكمل الجدول:

الاقتران	معكوس المشتقة	الفرق
ق(س) = ٢س	م$_{١}$(س) = ...	م$_{١}$ – م$_{٢}$(س) = ...
	م$_{٢}$(س) = ...	م$_{٢}$ – م$_{٣}$(س) = ...
	م$_{٣}$(س) = ...	م$_{١}$ – م$_{٣}$(س) = ...
ل(س) = ٣س^{٢}	م$_{١}$(س) = ...	م$_{١}$ – م$_{٢}$(س) = ...
	م$_{٢}$(س) = ...	م$_{٢}$ – م$_{٣}$(س) = ...
	م$_{٣}$(س) = ...	م$_{١}$ – م$_{٣}$(س) = ...
هـ(س) = قا^{٢}س	م$_{١}$(س) = ...	م$_{١}$ – م$_{٢}$(س) = ...
	م$_{٢}$(س) = ...	م$_{٢}$ – م$_{٣}$(س) = ...
	م$_{٣}$(س) = ...	م$_{١}$ – م$_{٣}$(س) = ...

قارن إجابتك مع إجابات زملائك . ماذا تستنتج؟

لابد أنَّك لاحظت أنَّ الفرق بيْن أيِّ معكوسين لمشتقة اقتران معين يساوي ثابتًا.

مثال ٢

إذا كان الاقترانان م(س) ، هـ (س) معكوسين لمشتقة الاقتران المتصل ق(س)، وكان ل(س) = م(س) – هـ(س) ، فجد لَ(٤) .

الحل

الاقترانان م ، هـ معكوسان لمشتقة الاقتران ق

إذن م(س) – هـ(س) = جـ (ثابت) ، ومنه ل(س) = جـ

∴ لَ(س) = صفرًا ، لَ(٤) = صفرًا

حُلّ مثال (٢) بطريقة أخرى .

تدريب ٢

إذا كان الاقترانان م(س) ، هـ(س) معكوسين لمشتقة الاقتران المتصل ق(س) ، وكان ل(س) = ٣م(س) – ٥هـ(س)، فجد لَ(س) بدلالة ق(س).

مثال ٣

جد معكوسًا لمشتقة كلٍّ من الاقترانات الآتية:

١) ق(س) = جاس ٢) ق(س) = قاس ظاس ٣) ق(س) = ٩س^{٨}

الحل

١) م(س) = – جتاس + جـ ٢) م(س) = قاس + جـ ٣) م(س) = س^{٩} +جـ

يسمى أيُّ معكوس للمشتقة: **بالتكامل غير المحدود** للاقتران ق، وهذا يقودنا إلى التعريف الآتي:

تعريف

إذا كان م معكوسًا لمشتقة الاقتران ق على الفترة [أ ، ب] فإنَّ الصورة العامة لقاعدة أي معكوس لمشتقة الاقتران ق هي : م(س) + جـ ، حيث جـ ثابت وذلك؛ لأنَّ:

$\frac{ء}{ءس}$ (م(س) + جـ) = مَ (س) = ق(س)

ويسمى أي معكوس للمشتقة: بالتكامل غير المحدود للاقتران ق(س) بالنسبة إلى س ويرمز له على النحو الآتي : $\int$ ق(س) ءس

ويُقرأ: تكامل ق(س) دال س ويعني تكامل الاقتران ق بالنسبة إلى المتغير س .

مثال ٤

جد كلًّا مما يأتي:

١) $\int$ ٥س^{٤} ءس   ٢) $\int$ قتا^{٢}س ءس

الحل

١) $\int$ ٥س^{٤} ءس = س^{٥} + جـ   لماذا؟

٢) $\int$ قتا^{٢}س ءس = − ظتـاس + جـ   لماذا؟

تعرّفت أنَّ الصورة العامة لقاعدة أي معكوس لمشتقة الاقتران ق(س)

هي م(س) + جـ ، حيث مَ (س) = ق(س)

$\int$ ق(س) ءس = م(س) + جـ .... (١)

وعليه فإنَّ $\int$ مَ (س) ءس = م(س) + جـ

وباشتقاق الطرفين في (١) ينتج أنَّ

$\frac{ء}{ءس}$ $\int$ ق(س) ءس = (م(س) + جـ)´ = مَ (س)

وبما أنَّ مَ (س) = ق(س)

إذن $\frac{ء}{ءس}$ $\int$ ق(س) ءس = ق(س)

مثال ٥

إذا كان $\int$ ق(س) ءس = س^{٢} − جتاس + ٢ ، فجد ق(س) ، قَ(س)

الحل

$\int$ ق(س) ءس = س^{٢} − جتاس + ٢

ق(س) = ٢س + جـاس   اشتقاق الطرفين

قَ(س) = ٢ + جتاس   اشتقاق الطرفين

تدريب ٣

إذا كان ق اقترانًا متصلًا على مجاله، وكان $\int$ ق(س) جا $\frac{٣\pi}{٢}$ ءس = ١ + س^{٣}، فجد ق (س)

مثال ٦

إذا كان ق اقترانًا متصلاً على ح ،

وكان $\int$ (ق(س) + ٢) ءس = س^{٣} + ب س^{٢} + ٩ ، ق(١) = ٧ ، فجد قيمة الثابت ب .

الحل

$\int$ (ق(س) + ٢) ءس = س^{٣} + ب س^{٢} + ٩

ق(س) + ٢ = ٣س^{٢} + ٢ب س   اشتقاق الطرفين

ق(١) + ٢ = ٣ (١)^{٢} + ٢ ب (١)   التعويض بقيمة س= ١

٧ + ٢ = ٣ + ٢ب

٩ = ٣ + ٢ب

٢ب = ٦ ، ومنه ب = ٣

تدريب ٤

إذا كان $\int$ قَ(س) ءس = جا^{٢}س – أجتاس + ١، قَ($\frac{\pi}{٤}$) = صفرًا،

فجد قيمة الثابت أ.

١) بيّن أنَّ الاقتران م(س) = $\frac{س}{س+١}$ هو معكوس لمشتقة الاقتران

ق(س) = (س+١)$^{-٢}$ ، س ≠ −١

٢) بيّن أنَّ الاقتران م(س) = جا^{٢}س هو معكوس لمشتقة الاقتران ق(س) = جا٢س.

٣) إذا كان م(س) = س^٣ + ٥س^٢ − ٣س + جـ ، معكوسًا لمشتقة الاقتران ق، فجد ق(−٢).

٤) إذا كان م(س) = ٢س^٤ + $\sqrt{س^٢ + ٣}$ معكوسًا لمشتقة الاقتران ق ، فجد ق(١).

٥) إذا كان ق(س) = ٣س^٢ فجد م معكوسًا لمشتقة الاقتران ق؛ علمًا بأنَّ م(٢) = ٥

٦) إذا كان الاقترانان م$_١$(س)، م$_٢$(س) معكوسين لمشتقة الاقتران ق وكان

م$_١$(س) = ٣س^٢ − ٢س + ٥ ، م$_٢$(٢) = ٤ فجد قاعدة م$_٢$(س) .

٧) إذا كان ص = $\int \sqrt{٣س^٢ − ٤س + ١٢}$ ءس ، فجد $\left.\frac{ءص}{ءس}\right|_{س = −٢}$

٨) إذا كان $\int$ق(س) ءس = س^٣ − س^٢ + ٢س + ١ ، فجد قَ(−٣).

٩) إذا كان $\int$ق(س) ءس = جاس − جتاس + ٣. فأثبت أنَّ ق($\frac{\pi}{٢}$) − قَ($\frac{\pi}{٢}$)=٢

١٠) جد معكوسًا لمشتقة كلٍّ من الاقترانات الآتية:

أ) ق(س) = $\frac{−١}{س^٢}$

ب) ق(س) = قاس جتاس

جـ) ق(س) = $\frac{١}{٢\sqrt{س}}$

د) ق(س) = ٥ + ٥ ظا^{٢}س

١١) إذا كان م(س) معكوسًا لمشتقة الاقتران ق حيث ق(س)= ظتاس + ١، فجد مً ($\frac{\pi}{٤}$).

ثانيًا التكامل غير المحدود Indefinite Integral

جد $\int \frac{س^2 - س}{\sqrt{س} - 1} \, ءس$

تعلمت سابقًا إيجاد التكامل لبعض الاقترانات واعتمدت على المشتقة لإيجاده ، وفي هذا الدرس ستتعرف بعض قواعد التكامل غير المحدود.

قاعدة (١)

$\int أ \, ءس = أ س + جـ$ ، حيث أ ثابت ، جـ ثابت التكامل .

مثال ١

جد كلًّا مما يأتي :

١) $\int -٥ \, ءس$ ٢) $\int \pi \, ءع$

الحل

١) $\int -٥ \, ءس = -٥س + جـ$

٢) $\int \pi \, ءع = \pi \, ع + جـ$

تدريب ١

جد كلًّا مما يأتي :

١) $\int ءس$ ٢) $\int \frac{-١}{٤} \, ءل$

قاعدة (٢)

$\int س^{ن} \, ءس = \frac{س^{ن+١}}{ن+١} + جـ$ ، ن $\neq -١$

مثال ٢

جد كلًّا مما يأتي :

١) $\int$ س^٦ ءس ٢) $\int \sqrt[٥]{\text{س}}$ ءس ٣) $\int \frac{١}{\text{س}^٤}$ ءس

الحل

١) $\int$ س^٦ ءس $= \frac{\text{س}^{٦+١}}{٦+١} +$ جـ $= \frac{\text{س}^٧}{٧} +$ جـ

٢) $\int \sqrt[٥]{\text{س}}$ ءس $= \int$ س$^{\frac{١}{٥}}$ ءس لماذا؟

$= \frac{\text{س}^{\frac{١}{٥}+١}}{\frac{١}{٥}+١} +$ جـ $= \frac{\text{س}^{\frac{٦}{٥}}}{\frac{٦}{٥}} +$ جـ $= \frac{٥}{٦}\sqrt[٥]{\text{س}^٦} +$ جـ

٣) $\int \frac{١}{\text{س}^٤}$ ءس $= \int$ س$^{-٤}$ ءس

$= \frac{\text{س}^{-٤+١}}{-٤+١} +$ جـ $= \frac{\text{س}^{-٣}}{-٣} +$ جـ $= \frac{-١}{٣\text{س}^٣} +$ جـ لماذا؟

تدريب ٢

جد كلًّا مما يأتي :

١) $\int$ ١٠س ءس ٢) $\int \frac{١}{\sqrt[٧]{\text{س}^٢}}$ ءس

تعميم

خصائص التكامل غير المحدود:

١) $\int$ أ ق(س) ءس = أ $\int$ ق(س) ءس

٢) $\int$ (ق(س) + ل(س)) ءس = $\int$ق(س) ءس + $\int$ ل(س) ءس

٣) $\int$ (ق(س) − ل(س)) ءس = $\int$ق(س) ءس − $\int$ ل(س) ءس

ويمكن تعميم خاصيتي الجمع والطرح لأكثر من اقترانين.

مثال ٣

جد كلًّا مما يأتي :

١) $\int (٣س^{٣} + ٥س - ٤)\, ءس$ ٢) $\int \frac{س^{٢} + ٢س - ١٥}{س - ٣}\, ءس$ ٣) $\int \frac{س - ٥}{\sqrt[٣]{س}}\, ءس$

الحل

١) $\int (٣س^{٣} + ٥س - ٤)\, ءس$

$= \int ٣س^{٣}\, ءس + \int ٥س\, ءس - \int ٤\, ءس$ تطبيق خصائص التكامل

$= \frac{٣س^{٤}}{٤} + \frac{٥س^{٢}}{٢} - ٤س + جـ$

٢) $\int \frac{س^{٢} + ٢س - ١٥}{س - ٣}\, ءس = \int \frac{(س+٥)(س-٣)}{س-٣}\, ءس$

$= \int (س+٥)\, ءس = \frac{س^{٢}}{٢} + ٥س + جـ$

٣) $\int \frac{س - ٥}{\sqrt[٣]{س}}\, ءس = \int (س - ٥)\, س^{\frac{-١}{٣}}\, ءس = \int (س^{\frac{٢}{٣}} - ٥س^{\frac{-١}{٣}})\, ءس$

$= \frac{٣}{٥} س^{\frac{٥}{٣}} - ٥ \times \frac{٣}{٢} س^{\frac{٢}{٣}} + جـ = \frac{٣}{٥} \sqrt[٣]{س^{٥}} - \frac{١٥}{٢} \sqrt[٣]{س^{٢}} + جـ$

فكر وناقش

هل $\int س \sqrt{س}\, ءس = \int س\, ءس \times \int \sqrt{س}\, ءس$ ؟ برّر إجابتك.

مثال ٤

جد $\int \frac{س^{٣} - ٤س^{٢}}{\sqrt{س} - ٢}\, ءس$

الحل

$\int \frac{س^{٣} - ٤س^{٢}}{\sqrt{س} - ٢}\, ءس = \int \frac{س^{٢}(س - ٤)}{\sqrt{س} - ٢}\, ءس$ إخراج $س^{٢}$ عاملًا مشتركًا

$= \int \frac{س^{٢}(\sqrt{س} - ٢)(\sqrt{س} + ٢)}{\sqrt{س} - ٢}\, ءس$ تحليل البسط فرقًا بين مربعين

$= \int (س^{\frac{٥}{٢}} + ٢س^{٢})\, ءس = \frac{٢}{٧} س^{\frac{٧}{٢}} + \frac{٢}{٣} س^{٣} + جـ = \frac{٢}{٧} \sqrt{س^{٧}} + \frac{٢}{٣} س^{٣} + جـ$

فكر وناقش

حُلَّ مثال (٤) بطريقة أخرى.

تدريب ٣

جد كلًّا مما يأتي:

١) $\int \frac{س^٢ - ٩س}{\sqrt{س} - ٣}\, ءس$ ٢) $\int \frac{(٢ - س)^٣}{س\sqrt{س}}\, ءس$

نشاط(١)

أكمل الجدول الآتي :

معكوس المشتقة م(س)	مَ(س) = ق(س)	$\int$ ق(س) ءس
م(س) = $\frac{(س - ٢)^٣}{٣}$ + ٢	ق(س) = $(س - ٢)^٢$	$\int (س - ٢)^٢ ءس = \frac{(س - ٢)^٣}{٣}$ + جـ
م(س) = $\frac{(٢س + ٣)^٦}{١٢}$ − ٤	ق(س) = $(٢س + ٣)^٥$	$\int (٢س + ٣)^٥ ءس$ = ...
م(س) = ...	ق(س) = $(٥س + ٤)^٧$	$\int (٥س+٤)^٧ ءس = \frac{(٥س+٤)^٨}{....\times ٥}$ + جـ
م(س) = ...	ق(س) = $(٣ - ٢س)^٤$	$\int (٣-٢س)^٤ ءس = \frac{(٣-٢س)^٥}{....\times ....}$ + جـ

ماذا تلاحظ؟

قاعدة (٣)

$\int (أس + ب)^ن\, ءس = \frac{(أس + ب)^{ن+١}}{أ(ن + ١)}$ + جـ ، ن ≠ −١ ، أ ≠ صفرًا

مثال ٥

جد كلًّا مما يأتي :

١) $\int (٦ - ٥س)^٨ ءس$ ٢) $\int \sqrt[٣]{٤س + ٢}\, ءس$

الحل

١) $\int (٦ - ٥س)^٨ ءس = \frac{(٦-٥س)^{٨+١}}{(٨+١)\times(-٥)}$ + جـ $= \frac{(٦ - ٥س)^٩}{-٤٥}$ + جـ

٢) $\int \sqrt[3]{\text{٤س} + \text{٢}}\ \text{ءس} = \int (\text{٤س}+\text{٢})^{\frac{\text{١}}{\text{٣}}}\ \text{ءس} = \dfrac{(\text{٤س}+\text{٢})^{\frac{\text{٤}}{\text{٣}}}}{\text{٤} \times \frac{\text{٤}}{\text{٣}}} + \text{جـ}$

$= \dfrac{\text{٣}}{\text{١٦}} \sqrt[3]{(\text{٤س}+\text{٢})^{\text{٤}}} + \text{جـ}$

تدريب ٤

جد كلًّا مما يأتي:

١) $\int \dfrac{\text{٣}}{(\text{٧س}+\text{٥})^{\text{٤}}}\ \text{ءس}$

٢) $\int \text{س}^{\text{٤}}(\text{٥} - \dfrac{\text{٣}}{\text{س}})^{\text{٤}}\ \text{ءس}$

نشاط (٢)

أكمل الجدول الآتي :

ق(س)	قَ(س)	$\int$ قَ(س) ءس
جاس	جتاس	$\int$ جتاس ءس = جاس + جـ
جتاس	− جاس	$\int$ −جاس ءس = جتاس + جـ
ظاس	....	....
ظتاس	....	....
قاس	....	....
قتاس	....	....

قاعدة (٤)

١) $\int$ جاس ءس = − جتاس + جـ

٢) $\int$ جتاس ءس = جاس + جـ

٣) $\int \text{قا}^{\text{٢}}\text{س}$ ءس = ظاس + جـ

٤) $\int \text{قتا}^{\text{٢}}\text{س}$ ءس = − ظتاس + جـ

٥) $\int$ قاس ظاس ءس = قاس + جـ

٦) $\int$ قتاس ظتاس ءس = − قتاس + جـ

قاعدة (٥)

١) $\int$ جا(أس + ب) ءس = $\frac{-١}{أ}$ جتا (أس + ب) + جـ

٢) $\int$ جتا(أس + ب) ءس = $\frac{١}{أ}$ جا (أس + ب) + جـ

٣) $\int$ قا^٢(أس + ب) ءس = $\frac{١}{أ}$ ظا (أس + ب) + جـ

٤) $\int$ قتا^٢(أس + ب) ءس = $\frac{-١}{أ}$ ظتا (أس + ب) + جـ

٥) $\int$ قا(أس + ب) ظا (أس + ب) ءس = $\frac{١}{أ}$ قا (أس + ب) + جـ

٦) $\int$ قتا (أس + ب) ظتا (أس + ب) ءس = $\frac{-١}{أ}$ قتا (أس + ب) + جـ

حيث أ، ب ∈ح، أ ≠ صفرًا

مثال ٦

جد كلاًّ من التكاملات الآتية:

١) $\int$(جاس – ٤ جتاس + ٥ قتا^{٢}س) ءس

٢) $\int$(جا٢س + جتا٣س) ءس

٣) $\int$(قا٣س ظا٣س + قا^٢ ٥س) ءس

الحل

١) $\int$(جاس – ٤ جتاس + ٥ قتا^{٢}س) ءس

= $\int$جاس ءس – $\int$٤ جتاس ءس + $\int$٥ قتا^{٢}س ءس

= – جتاس – ٤ جاس – ٥ ظتاس + جـ

٢) $\int$(جا٢س + جتا٣س) ءس = $\int$جا٢س ءس + $\int$جتا٣س ءس

= $\frac{-١}{٢}$ جتا٢س + $\frac{١}{٣}$ جا٣س + جـ لماذا؟

٣) $\int$(قا٣س ظا٣س + قا^٢ ٥س) ءس = $\int$ قا٣س ظا٣س ءس + $\int$ قا^٢ ٥س ءس

= $\frac{١}{٣}$ قا٣س + $\frac{١}{٥}$ ظا٥س + جـ لماذا؟

تدريب ٥

جد كلًّا من التكاملات الآتية:

١) $\int (\text{قتا}\,٤\text{س}\ \text{ظتا}\,٤\text{س} + \text{قتا}^{٢}\,٣\text{س})\ \text{ءس}$　　　٢) $\int \left(\text{جتا}\,٤\text{س}\ \text{ظا}\,٤\text{س} + \dfrac{١}{\text{جتا}^{٢}\,٦\text{س}}\right) \text{ءس}$

مثال ٧

جد كلًّا من التكاملات الآتية:

١) $\int \text{جا}^{٢}\text{س}\ \text{ءس}$　　　٢) $\int \dfrac{١}{١ + \text{جتاس}}\ \text{ءس}$

الحل

١) $\int \text{جا}^{٢}\text{س}\ \text{ءس} = \int \dfrac{١}{٢}(١ - \text{جتا}\,٢\text{س})\ \text{ءس}$　　　لماذا؟

$= \dfrac{١}{٢}(\text{س} - \dfrac{١}{٢}\,\text{جا}\,٢\text{س}) + \text{جـ}$

٢) $\int \dfrac{١}{١ + \text{جتاس}}\ \text{ءس}$　　　اضرب كلًّا من البسط والمقام في مرافق المقام (١ − جتاس)

$= \int \dfrac{١}{١ + \text{جتاس}} \times \dfrac{١ - \text{جتاس}}{١ - \text{جتاس}}\ \text{ءس} = \int \dfrac{١ - \text{جتاس}}{١ - \text{جتا}^{٢}\text{س}}\ \text{ءس}$

$= \int \dfrac{١ - \text{جتاس}}{\text{جا}^{٢}\text{س}}\ \text{ءس} = \int \dfrac{١}{\text{جا}^{٢}\text{س}}\ \text{ءس} - \int \dfrac{\text{جتاس}}{\text{جا}^{٢}\text{س}}\ \text{ءس}$　　　$\text{جا}^{٢}\text{س} + \text{جتا}^{٢}\text{س} = ١$

$= \int \text{قتا}^{٢}\text{س}\ \text{ءس} - \int \text{قتاس}\ \text{ظتاس}\ \text{ءس}$　　　لماذا؟

$= -\,\text{ظتاس} + \text{قتاس} + \text{جـ}$

فكر وناقش

حُلَّ مثال (٧) فرع (٢) بطريقة أخرى.

مثال ٨

جد كلًّا من التكاملات الآتية:

١) $\int \text{ظا}^{٢}\text{س}\ \text{ءس}$　　　٢) $\int \text{جا}\,٥\text{س}\ \text{جتا}\,٣\text{س}\ \text{ءس}$

الحل

١) $\int$ ظا^{2}س ءس = $\int$ (قا^{2}س − ١) ءس

= ظا س − س + جـ

١+ظا^{2}س=قا^{2}س

٢) $\int$ جا٥س جتا٣س ءس = $\int \frac{١}{٢}$(جا(٥س − ٣س)+ جا(٥س + ٣س)) ءس

لماذا؟

= $\int \frac{١}{٢}$ (جا٢س + جا٨س) ءس = $\frac{١}{٢}$ ($\frac{-١}{٢}$ جتا٢س + $\frac{-١}{٨}$ جتا٨س) + جـ

= $\frac{-١}{٤}$ جتا٢س − $\frac{١}{١٦}$ جتا٨س + جـ

تدريب ٦

جد كلًّا من التكاملات الآتية:

١) $\int$ (قاس + ظاس)^2 ءس

٢) $\int \frac{٣}{١ - جتا٢س}$ ءس

٣) $\int \frac{جتا٢س}{جا^2س\ جتا^2س}$ ءس

٤) $\int$ (جتاس − جاس)^2 ءس

١) جد كلًّا من التكاملات الآتية:

أ) $\int \left(\text{س}^{٦} + \frac{٣}{\text{س}^{٥}} - \sqrt[٥]{\text{س}^{٢}}\right) \text{ءس}$

ب) $\int (٥ + ٣\text{ص})^{٤} \text{ءص}$

جـ) $\int \frac{\text{س}^{٣} - ٨}{\text{س} - ٢} \text{ءس}$

د) $\int (٤\text{س}^{٢} + ٢٠\text{س} + ٢٥)^{٥} \text{ءس}$

هـ) $\int \frac{(\text{س}+٣)^{٢} - ٩}{\text{س}} \text{ءس}$

و) $\int (١ - \text{س})(\text{س} - ١)^{٥} \text{ءس}$

ز) $\int \text{س} \sqrt[٣]{\frac{٥}{\text{س}^{٣}} - \frac{١}{\text{س}^{٢}}} \text{ءس}$

ح) $\int \frac{\text{س} - \sqrt{\text{س}}}{\sqrt{\text{س}} - ١} \text{ءس}$

ط) $\int \sqrt[٣]{\text{س}} \left(\sqrt[٣]{\text{س}} + \frac{٥}{\sqrt[٣]{\text{س}}}\right) \text{ءس}$

ي) $\int \frac{٥\text{س}}{\sqrt{٧\text{س} + ٣} + \sqrt{٢\text{س} + ٣}} \text{ءس}$

ك) $\int (٣ - ٢\text{ب})^{٧} \text{ءس}$

٢) إذا كان ق كثير حدود من الدرجة الثالثة؛ بحيث إنَّ $\text{قَ(س)} = ٣\text{س}^{٢} - ٢$ ، وكانت النقطة (٠، ١) تقع على منحناه. فجد قاعدة الاقتران ق.

٣) إذا كان $\text{قً(س)} = \frac{٦}{\sqrt{\text{س}}}$ ، ومنحنى الاقتران ق يمر بالنقطة (٤ ، ٠) ، وميل المماس عند هذه النقطة يساوي (١)، فجد قاعدة ق(س).

٤) إذا كان $\int \left(\text{قَ(س)} + ٢\text{س}\right) \text{ءس} = \text{س}^{٣} + \text{ب س}^{٢} + ١$ ، وكان قَ(١) = ٥، ق(٢) = ٧، فجد ق(−٢).

٥) إذا كان $\text{قً(س)} = -٤ \text{ جتا}٢\text{س}$ ، وكان للاقتران ق(س) قيمة صغرى محلية قيمتها (−٢) عند $\text{س} = \frac{\pi}{٢}$، فجد قاعدة الاقتران ق .

٦) جد كلًّا من التكاملات الآتية:

أ) $\int \left(\frac{٥}{جا^٢ س} - \frac{٣}{جتا^٢ س}\right)$ ءس

ب) $\int \frac{جا^٢ س + جتا^٢ س}{١ + جتا ٢ س}$ ءس

جـ) $\int$ (ظتاس − قتاس)^٢ ءس

د) $\int \frac{جاس + جتا^٢ س}{١ - جا^٢ س}$ ءس

هـ) $\int \frac{١ - حا^٢ س}{جا^٢ \frac{س}{٢} \times جتا^٢ \frac{س}{٢}}$ ءس

و) $\int \frac{١ - جا ٢ س}{جاس - جتاس}$ ءس

ز) $\int \frac{جتا ٣ س}{جتا س}$ ءس

ح) $\int \frac{ءس}{جا^٢ س - جا^٤ س}$

ط) $\int$ قاس (ظا س + جتا س) ءس

ي) $\int$ جا٦س جا٤س ءس

ك) $\int$ جتا^٢ س ءس

ل) $\int \frac{جتا^٣ س - ٥}{١ - جا^٢ س}$ ءس

م) $\int$ جتا٣ س جتا٧س ءس

ن) $\int$ (جتا^{٤}س − جا^٤ س) ءس

س) $\int \frac{١}{قاس - ١}$ ءس

ع) $\int \frac{جا س}{١ - جاس}$ ءس

ثالثًا التكامل المحدود
The Definite Integral

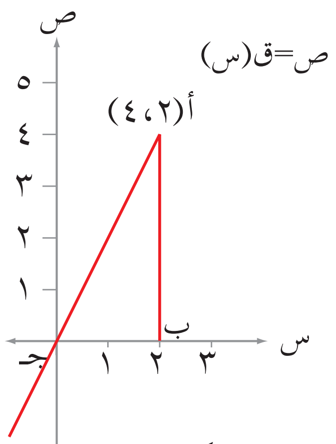
معتمداً الشكل (٤-٢) الذي يمثل منحنى الاقتران ق(س)=٢س، أجب عن كل ممّا يأتي :

١) احسب مساحة المثلث أب جـ.

٢) جد قاعدة الاقتران ل حيث ل(س) = $\int$ ٢س ءس

٣) احسب قيمة ل(٢) – ل(٠)

ماذا تلاحظ؟



شكل (٤-٢)

لابد أنك لاحظت أن ل(٢) – ل(٠) = مساحة المثلث المحصور بين منحنى ق ومحور السينات في الفترة [٠ ، ٢] ويسمى ل(٢) – ل(٠) **بالتكامل المحدود للاقتران ق** ويكتب على الصورة

$\int_{٠}^{٢}$ ق(س) ءس

تعريف

إذا كان ق(س) اقترانًا متصلاً على [أ ، ب] ، م(س) معكوسًا لمشتقة الاقتران ق ، يُسمى

$\int_{\text{أ}}^{\text{ب}}$ ق(س) ءس بالتكامل المحدود حيث:

$\int_{\text{أ}}^{\text{ب}}$ ق(س) ءس = $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}}$ مَ(س) ءس = م(س)$]_{\text{أ}}^{\text{ب}}$ = م(ب) – م(أ)

حيث أ: الحد السفلي للتكامل ، ب : الحد العلوي للتكامل

لاحظ أنَّ التكامل المحدود يمثل مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س)، ومحور السينات والمستقيمين س= أ ، س = ب .حيث ق(س) > صفر لكلِّ س ∈[أ ، ب]

مثال ١

إذا كان ق(–٢) = –٨ ، ق(١) = ١، فجد $\int_{-٢}^{١}$ قَ(س) ءس

الحل

$$\int_{-٢}^{١} \text{قَ}(\text{س})\, \text{ءس} = \text{ق}(\text{س})\Big]_{-٢}^{١} = \text{ق}(١) - \text{ق}(-٢)$$ لماذا؟

$$= -١ - -٨ = ٩$$

تدريب ١

إذا كان ق اقترانًا متصلًا ، ق(١) = ٤ ، ق(٢) = ١٢ ، $\int_{١}^{٢} \text{أ قَ}(\text{س})\, \text{ءس} = ١٦$

فجد قيمة الثابت أ .

مثال ٢

احسب قيمة كلٍّ من التكاملين الآتيين:

١) $\int_{١}^{٥} ٣\text{س}\, \text{ءس}$

٢) $\int_{\frac{\pi}{٢}}^{\pi} \text{جتاس}\, \text{ءس}$

الحل

١) $\int_{١}^{٥} ٣\text{س}\, \text{ءس} = \left[\frac{٣\text{س}^٢}{٢}\right]_{١}^{٥} = \frac{٧٥}{٢} - \frac{٣}{٢} = ٣٦$

٢) $\int_{\frac{\pi}{٢}}^{\pi} \text{جتاس}\, \text{ءس} = \Big[\text{جاس}\Big]_{\frac{\pi}{٢}}^{\pi} = \text{جا}\,\pi - \text{جا}\,\frac{\pi}{٢} = ٠ - ١ = -١$

فكر وناقش

عدمَ كتابة ثابت التكامل عند إجراء التكامل المحدود.

تدريب ٢

احسب قيمة كلٍّ من التكاملين الآتيين:

١) $\int_{٢}^{٧} ٤\text{س}\, \text{ءس}$

٢) $\int_{\frac{\pi}{٦}}^{\frac{\pi}{٤}} \text{قا}^٢\text{س}\, \text{ءس}$

قاعدة

$\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{جـ}\, \text{ءس} = \text{جـ}(\text{ب} - \text{أ})$ ، حيث جـ عدد حقيقي.

مثال ٣

جد $\int_{٢}^{٦}$ ٥ ءس

الحل

$\int_{٢}^{٦}$ ٥ ءس = ٥(٦ − ٢) = ٥ × ٤ = ٢٠

مثال ٤

إذا كان $\int_{-٢}^{٤}$ ٣ب ءس = ٤٨ ، فجد قيمة الثابت ب .

الحل

$\int_{-٢}^{٤}$ ٣ب ءس = ٣ب (٤ − -٢)

٣ب (٤ − -٢) = ٤٨ ، ومنه ١٨ ب = ٤٨ ، ومنه ب = $\frac{٨}{٣}$

تدريب ٣

إذا كان $\int_{١+ب}^{٢+٣ب}$ ٥ ءس = ٤٠ ، فجد قيمة الثابت ب.

خصائص التكامل المحدود

هناك خصائص مهمة للتكامل المحدود تساعد في تسهيل حسابه لبعض الاقترانات في كثير من الحالات، ومن هذه الخصائص:

خاصية (١)

١) $\int_{أ}^{أ}$ ق(س) ءس = ٠

٢) $\int_{أ}^{ب}$ ق(س) ءس = − $\int_{ب}^{أ}$ ق(س) ءس

مثال ٥

جد $\int_{-٣}^{٣} \text{س}\sqrt{\text{س}^{٢} + ١}\ \text{ءس}$

الحل

$\int_{-٣}^{٣} \text{س}\sqrt{\text{س}^{٢} + ١}\ \text{ءس} = \text{صفرًا}$

مثال ٦

إذا كان $\int_{١}^{٤} \text{ق(س) ءس} = \frac{٣}{٥}$ ، فجد $\int_{٤}^{١} \text{ق(س) ءس}$

الحل

$\int_{٤}^{١} \text{ق(س) ءس} = - \int_{١}^{٤} \text{ق(س) ءس}$

$= \frac{-٣}{٥}$

تدريب ٤

إذا كان $\int_{٠}^{\sqrt{٨}} \frac{\text{س}}{\sqrt{\text{س}^{٢} + ١}}\ \text{ءس} = ٢$، فجد $\int_{\sqrt{٨}}^{٠} \frac{\text{س}}{\sqrt{\text{س}^{٢} + ١}}\ \text{ءس}$

خاصية (٢)

١) $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{جـ ق(س) ءس} = \text{جـ} \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق(س) ءس}$

٢) $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \left(\text{ق(س)} + \text{هـ(س)}\right) \text{ءس} = \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق(س) ءس} + \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{هـ(س) ءس}$

٣) $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \left(\text{ق(س)} - \text{هـ(س)}\right) \text{ءس} = \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق(س) ءس} - \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{هـ(س) ءس}$

ويمكن تعميم خاصيتَيْ الجمع والطرح لأكثر من اقترانين.

مثال ٧

جد $\int_{١}^{٤} (٣س^٢ + ٥س)\, ءس$

الحل

$$\int_{١}^{٤} (٣س^٢ + ٥س)\, ءس = \int_{١}^{٤} ٣س^٢\, ءس + \int_{١}^{٤} ٥س\, ءس$$

$$= [س^٣]_{١}^{٤} + [\frac{٥}{٢} س^٢]_{١}^{٤} = (٦٤ - ١) + (٤٠ - \frac{٥}{٢}) = ١٠٠,٥$$

مثال ٨

إذا كان $\int_{١}^{٥} \frac{١}{٢} ق(س)\, ءس = -٣$ ، $\int_{٥}^{١} ٣هـ(س)\, ءس = ١٨$

فجد $\int_{١}^{٥} (٤ق(س) - ٥هـ(س))\, ءس$

الحل

$\int_{١}^{٥} \frac{١}{٢} ق(س)\, ءس = -٣$ ، $\frac{١}{٢} \int_{١}^{٥} ق(س)\, ءس = -٣$ لماذا؟

$\therefore \int_{١}^{٥} ق(س)\, ءس = -٦$

$\int_{٥}^{١} ٣هـ(س)\, ءس = ١٨$ ، $٣ \int_{٥}^{١} هـ(س)\, ءس = ١٨$ ، $\int_{١}^{٥} هـ(س)\, ءس = -٦$

$$\int_{١}^{٥} (٤ق(س) - ٥هـ(س))\, ءس = ٤ \int_{١}^{٥} ق(س)\, ءس - ٥ \int_{١}^{٥} هـ(س)\, ءس$$

$$= ٤ \times -٦ - ٥ \times -٦ = ٦$$

تدريب ٥

إذا كان $\int_{١}^{٣} (٤ق(س) + ٧هـ(س))\, ءس = ١٩$ ، $\int_{١}^{٣} ٣ق(س)\, ءس = ٩$

فاحسب قيمة $\int_{٣}^{١} ٥هـ(س)\, ءس$

مثال ٩

اذا كان $\int_{أ}^{ب}$ ق(س) ءس = ٥، فما قيمة $\int_{أ}^{ب}$ ق(س) ءس − $\int_{ب}^{أ}$ ق(س) ءس؟

الحل

$\int_{أ}^{ب}$ ق(س) ءس − $\int_{ب}^{أ}$ ق(س) ءس = $\int_{أ}^{ب}$ ق(س) ءس + $\int_{أ}^{ب}$ ق(س) ءس   لماذا؟

$\int_{أ}^{ب}$ (ق(س) + ق(س)) ءس = ٢ × $\int_{أ}^{ب}$ ق(س) ءس = ٢ × ٥ = ١٠

تدريب ٦

إذا كان ع = $\int_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{٣\pi}{٤}}$ قتا^{٢}س ءس ، ل = $\int_{\frac{٣\pi}{٤}}^{\frac{\pi}{٤}}$ ظتا^{٢}س ءس

فما قيمة (ع + ل) ؟

خاصية (٣)

إذا كان ق قابلًا للتكامل على فترة مغلقة تحوي الأعداد أ ،ب،جـ فإنَّ:

١) $\int_{أ}^{ب}$ ق(س) ءس = $\int_{أ}^{جـ}$ ق(س) ءس + $\int_{جـ}^{ب}$ ق(س) ءس

فكر وناقش

هل من الضروري أن تقع جـ بين أ ، ب في خاصية (٣)؟ برِّر ذلك.

مثال ١٠

إذا كان $\int_{١}^{٨} \text{ق(س) ءس} = ١٠$ ، فجد $\int_{١}^{٥} \text{ق(س) ءس} - \int_{٨}^{٥} \text{ق(س) ءس}$

الحل

$$\int_{١}^{٥} \text{ق(س) ءس} - \int_{٨}^{٥} \text{ق(س) ءس} = \int_{١}^{٥} \text{ق(س) ءس} + \int_{٥}^{٨} \text{ق(س) ءس}$$

$$= \int_{١}^{٨} \text{ق(س) ءس} = ١٠$$

مثال ١١

إذا كان $\int_{٣}^{٥} \left(\frac{\text{ق(س)}}{٢} - ٣\right) \text{ءس} = ٤$ ، $\int_{٨}^{٥} \text{ق(س) ءس} = ٦$

فجد $\int_{٣}^{٨} (\text{ق(س)} + ٤\text{س}) \text{ءس}$

الحل

$$\int_{٣}^{٥} \left(\frac{\text{ق(س)}}{٢} - ٣\right) \text{ءس} = ٤ \text{ ، } \int_{٣}^{٥} \frac{\text{ق(س)}}{٢} \text{ءس} - \int_{٣}^{٥} ٣ \text{ ءس} = ٤$$

$$\int_{٣}^{٥} \frac{\text{ق(س)}}{٢} \text{ءس} - ٣(٥-٣) = ٤ \text{ ، } \int_{٣}^{٥} \frac{\text{ق(س)}}{٢} \text{ءس} = ١٠$$

$$\therefore \int_{٣}^{٥} \text{ق(س) ءس} = ٢٠$$

$$\int_{٣}^{٨} (\text{ق(س)} + ٤\text{س}) \text{ءس} = \int_{٣}^{٨} \text{ق(س) ءس} + \int_{٣}^{٨} ٤\text{س ءس}$$

$$\int_{٣}^{٥} \text{ق(س) ءس} + \int_{٥}^{٨} \text{ق(س) ءس} + \left[٢\text{س}^{٢}\right]_{٣}^{٨}$$

$$= (٢٠ + -٦) + (١٢٨ - ١٨) = ١٢٤$$

تدريب ٧

إذا كان $\int_{٩}^{٢} \left(٢\text{ق}(\text{س}) + ٣\right) \text{ءس} = -١٧$، $\int_{٢}^{٥} \frac{\text{ق}(\text{س})}{٣} \text{ءس} = -٢$

فجـــد $\int_{٥}^{٩} \left(٤\text{ق}(\text{س}) - ١\right) \text{ءس}$

مثال ١٢

جد $\int_{٠}^{٣} \sqrt{\text{س}^٢ - ٤\text{س} + ٤}\ \text{ءس}$

الحل

$\int_{٠}^{٣} \sqrt{\text{س}^٢ - ٤\text{س} + ٤}\ \text{ءس} = \int_{٠}^{٣} \sqrt{(\text{س} - ٢)^٢}\ \text{ءس} = \int_{٠}^{٣} |\text{س} - ٢|\ \text{ءس}$ لماذا؟

$\therefore \int_{٠}^{٢} (٢ - \text{س})\ \text{ءس} + \int_{٢}^{٣} (\text{س} - ٢)\ \text{ءس}$ لماذا؟

$= \left[(٢\text{س} - \frac{\text{س}^٢}{٢})\right]_{٠}^{٢} + \left[(\frac{\text{س}^٢}{٢} - ٢\text{س})\right]_{٢}^{٣}$

$= (٤ - ٢) - (\text{صفر}) + (\frac{٩}{٢} - ٦) - (٢ - ٤)$

$= ٢,٥$

تدريب ٨

جد $\int_{٠}^{٢\pi} \sqrt{\frac{١ - \text{جتا}٢\text{س}}{٢}}\ \text{ءس}$

خاصية (٤)

١) إذا كان ق اقترانًا قابلًا للتكامل على [أ ، ب] ، ق(س) ≤ صفر لكل س ∈ [أ ، ب] فإنَّ

$\int_{أ}^{ب}$ ق(س) ءس ≤ صفر

٢) إذا كان ق اقترانًا قابلًا للتكامل على [أ ، ب] ، ق(س) ≥ صفر لكل س ∈ [أ ، ب] فإنَّ

$\int_{أ}^{ب}$ ق(س) ءس ≥ صفر

٣) إذا كان ق، هـ اقترانين قابلين للتكامل على [أ ، ب] ، ق(س) ≤ هـ(س) لكل س ∈ [أ ، ب]

فإنَّ $\int_{أ}^{ب}$ ق(س) ءس ≤ $\int_{أ}^{ب}$ هـ (س) ءس

٤) إذا كان ق اقترانًا قابلًا للتكامل على [أ ، ب]، ل ≤ ق(س) ≤ ك لكل س ∈ [أ ، ب] فإنَّ

$\int_{أ}^{ب}$ ل ءس ≤ $\int_{أ}^{ب}$ ق(س) ءس ≤ $\int_{أ}^{ب}$ ك ءس

مثال ١٣

دون حساب قيمة التكامل، بيّن أنّ $\int_{٠}^{٢\pi}$ (١ + جا س) ءس ≥ ٠

الحل

ادرس إشارة (١ + جاس) في الفترة [٠ ، ٢ π]

١+جاس ≥ ٠ لكل س ∈ [٠ ، ٢ π]

−١ ≤ جاس ≤ ١

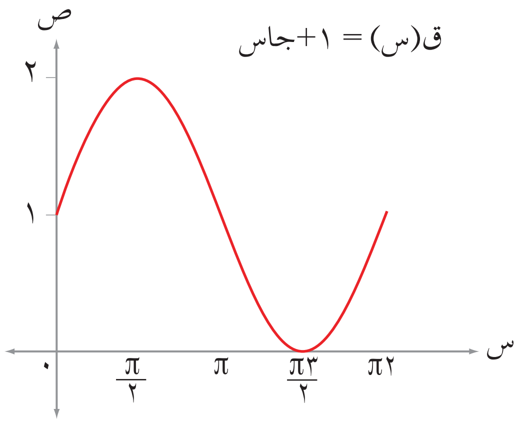
∴ $\int_{٠}^{٢\pi}$ (١ + جا س) ءس ≥ ٠

لماذا؟

فكر وناقش

ادرس الشكل (٤-٣) الذي يمثل منحنى الاقتران ق(س) = ١ + جاس

وفسّر لماذا $\int_{٠}^{٢\pi}$ (١ + جا س) ءس ≥ ٠



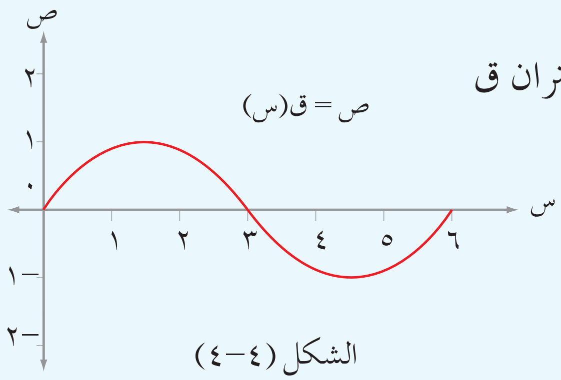
الشكل (٤-٣)

تدريب ٩

اعتمادًا على الشكل (٤-٤) الذي يمثل منحنى الاقتران ق المتصل على الفترة [٠ ، ٦] أجب عن كلٍّ مما يأتي :

ما إشارة $\int_{١}^{٣}$ ق(س) ءس ، لماذا؟

ما إشارة $\int_{٣}^{٦}$ ق(س) ءس ، لماذا؟



الشكل (٤-٤)

مثال ١٤

بيّن أنَّ $\int_{٢-}^{٥}$ (س^٢ + ٤) ءس ≥ $\int_{٢-}^{٥}$ ٣س ءس ، دون حساب قيمة كلٍّ من التكاملين.

الحل

افرض أنَّ ق(س) = س^٢ + ٤ ، هـ(س) = ٣س ،

ل(س) = ق(س) − هـ(س)

ادرس إشارة ل(س)

ل(س) ≥ صفر لكل س ∈ [−٢ ، ٥] لماذا ؟

س^٢ − ٣س + ٤ ≥ صفر

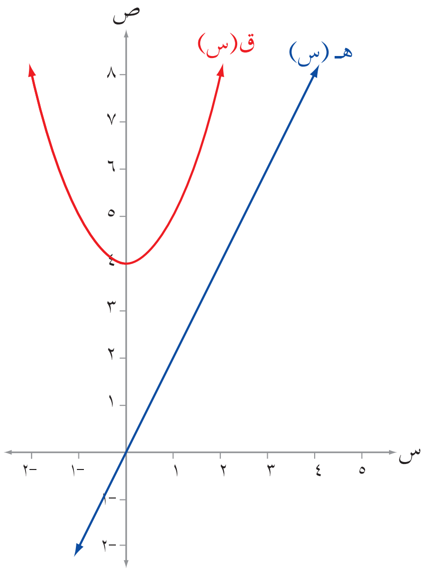
$س^٢ + ٤ \geq ٣س$ لكل $س \in [-٢ ، ٥]$

$$\therefore \int_{-٢}^{٥} (س^٢ + ٤)\, ءس \geq \int_{-٢}^{٥} ٣س\, ءس$$

فكر وناقش

ادرس الشكل (٤–٥) وفسّر ما يأتي؟

$$\int_{-٢}^{٥} ق(س)\, ءس \geq \int_{-٢}^{٥} هـ(س)\, ءس$$



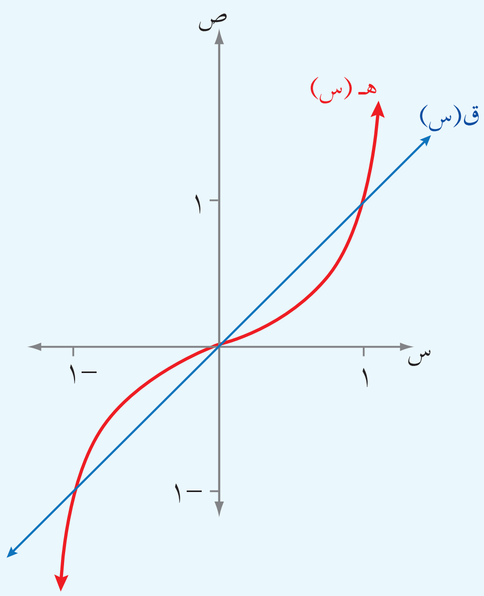
الشكل (٤–٥)

تدريب ١٠

اعتمادًا على الشكل (٤–٦) الذي يمثل منحنيي الاقترانين ق، هـ قارن بين قيمتي التكامل في كلٍّ مما يأتي؛ مبررًا إجابتك:

١) $\int_{٠}^{١} ق(س)\, ءس$ ، $\int_{٠}^{١} هـ(س)\, ءس$

٢) $\int_{-١}^{٠} ق(س)\, ءس$ ، $\int_{-١}^{٠} هـ(س)\, ءس$



الشكل (٤–٦)

مثال ١٥

بيّن أنَّ $\int_{0}^{2\pi}$ (٣+ جتا^{2} س) ءس ينحصر بين ٦ π ، ٨ π

دون إيجاد قيمة التكامل

الحل

–١ ≥ جتاس ≥ ١ لكل س ∈ [٠ ، ٢ π] لماذا؟

٠ ≥ جتا^{2}س ≥ ١ لماذا؟

٣ ≥ ٣+جتا^{2}س ≥ ٤

$\int_{0}^{2\pi}$ ٣ ءس ≥ $\int_{0}^{2\pi}$ (٣+ جتا^{2} س) ءس ≥ $\int_{0}^{2\pi}$ ٤ ءس

ومنه ٦ π ≥ $\int_{0}^{2\pi}$ (٣+جتا^{2}س) ءس ≥ ٨ π

∴ المقدار $\int_{0}^{2\pi}$ (٣+جتا^{2}س) ءس ينحصر بين ٦ π ، ٨ π

فكر وناقش

حُلّ مثال (١٥) بطريقة أخرى.

تدريب ١١

إذا علمت أنَّ م ≥ $\int_{0}^{1} \frac{٢}{١ + س^{2}}$ ءس ≥ ك ، فجد أكبر قيمة ممكنة للثابت م ، وأصغر قيمة ممكنة للثابت ك تحقق المتباينة دونَ حساب قيمة $\int_{0}^{1} \frac{٢}{١ + س^{2}}$ ءس.

فكر وناقش

حُلّ تدريب (١١) بطريقتين مختلفتين.

تمارين ومسائل

١) احسب قيمة كلٍّ من التكاملات الآتية:

أ) $\int_{٢}^{٨} \frac{١}{\text{س}^{٢}} \, \text{ءس}$

ب) $\int_{٠}^{٣} \left(\text{س}^{٢} - |\text{س} - ١|\right) \text{ءس}$

جـ) $\int_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{\pi}{٢}} \text{جا}٢\text{س} \, \text{ءس}$

د) $\int_{\frac{\pi}{٢}}^{٠} (\text{س} + \text{جتاس}) \, \text{ءس}$

هـ) $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \frac{\sqrt{١ + \text{جا}٢\text{س}}}{\text{جاس} + \text{جتاس}} \, \text{ءس}$

و) $\int_{٢}^{٢} (٩\text{س} - ٧)^{٥} \, \text{ءس}$

ز) $\int_{-١}^{٣} (\text{س} - ١)(\text{س}^{٢} + \text{س} + ١) \, \text{ءس}$

ح) $\int_{٠}^{١} \sqrt{\text{س}} \left(\sqrt{\text{س}} + ٢\right)^{٢} \text{ءس}$

ط) $\int_{٢}^{٤} \frac{١}{(\text{س} - ١)^{٢}} \, \text{ءس}$

ي) $\int_{١}^{٣} \frac{٢\text{س}^{٣} - ٤\text{س}^{٢} + ٥}{\text{س}^{٢}} \, \text{ءس}$

ك) $\int_{٢}^{٣} \sqrt{٩\text{س}^{٢} - ١٢\text{س} + ٤} \, \text{ءس}$

ل) $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} (\text{جتاس} - \text{جاس}) \, \text{ءس}$

٢) إذا كان $\text{ق(س)} = \left| \left(\int_{٠}^{-٢} ٤ \, \text{ءس} - ٣\text{س}^{٢} \right) \text{ءس} \right.$ ، فجد $\text{ق}'(-١)$.

٣) إذا كان $\int_{\text{ب}}^{٢} ٢\text{ب} \, \text{ءس} = -٣٠$، حيث $\text{ب} \in \text{ح}$ ، فجد قيمة الثابت ب .

٤) إذا كان $\int_{٠}^{\text{جـ}} \text{س}(١ - \text{س}) \, \text{ءس} = ٠$ ، حيث $\text{جـ} \in \text{ح}$ ، فجد قيمة جـ .

٥) إذا كان $\int_{-١}^{٣} \left(٣\text{س}^{٢} - ٢ \int_{٠}^{\text{جـ}} ٣\text{م} \, \text{ءم} \right) \text{ءس} = -٢٠$ ، فجد قيمة الثابت جـ.

٦) إذا كان ق(س) = $\begin{cases} -س & ، \quad -٣ \le س \le ٠ \\ س & ، \quad ٠ < س \le ٤ \end{cases}$ ، فجد $\int_{-٣}^{٤}$ ق(س) ءس

٧) إذا كان $\int_{٢}^{ب}$ (٢س−٣) ءس = ٢٠، فجد قيمة الثابت ب.

٨) إذا كان $\int_{١}^{٣}$ (٢ق(س) + $\frac{١}{س^٢}$ −٦) ءس = ١٢ ، فجد $\int_{١}^{٣}$ ($\frac{ق(س)}{٢}$ − $س^٢$) ءس

٩) دون حساب تكامل المقدار $\int_{٠}^{\pi}$ $\frac{١}{٣جتا^٢س + ٢}$ ءس بيّن أنَّ

$$\frac{\pi}{٥} \le \int_{٠}^{\pi} \frac{١}{٣جتا^٢س + ٢} ءس \le \frac{\pi}{٢}$$

١٠) إذا علمت أن م ≤ $\int_{-٣}^{٣}$ $\sqrt{٩ - س^٢}$ ءس ≤ ك ، فجد أكبر قيمة ممكنة للثابت م ، وأصغر قيمة ممكنة للثابت ك تحقق المتباينة دونَ حساب قيمة $\int_{-٣}^{٣}$ $\sqrt{٩ - س^٢}$ ءس

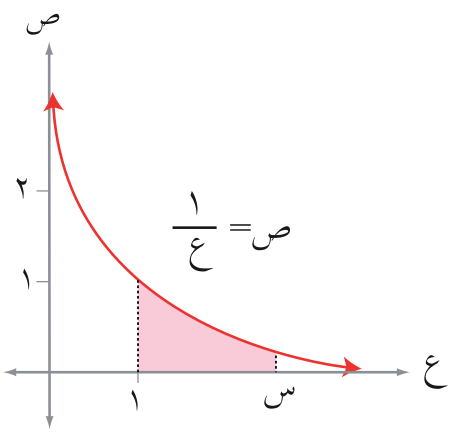
١١) إذا كان ق اقتران كثير حدود من الدرجة الثانية ، وكان ق(٠) = ٥ ، قً(س) = ٤ ،

$\int_{٠}^{١}$ قَ(س) ءس = ٣ ، فجد قاعدة الاقتران ق.

١٢) جد كثير حدود ق(س) من الدرجة الأولى بحيث $\int_{-١}^{١}$ق(س) ءس = ٤ ، $\int_{١}^{٣}$ق(س) ءس = ٢

رابعًا اقتران اللوغاريتم الطبيعي
Natural Logarithmic Function

هل يمكن إيجاد $\int \frac{١}{س}$ ءس باستخدام قواعد التكامل التي تعلمتها سابقًا؟ فسّر إجابتك.



الشكل (٤-٧)

يبين الشكل (٤-٧) منحنى الاقتران ص $= \frac{١}{ع}$ ، ع > ٠،

المتصل على (٠ ، ∞) ، ويمكن إيجاد ل(س) = $\int_{١}^{س} \frac{١}{ع}$ ءع

التي تمثل مساحة المنطقة المظللة

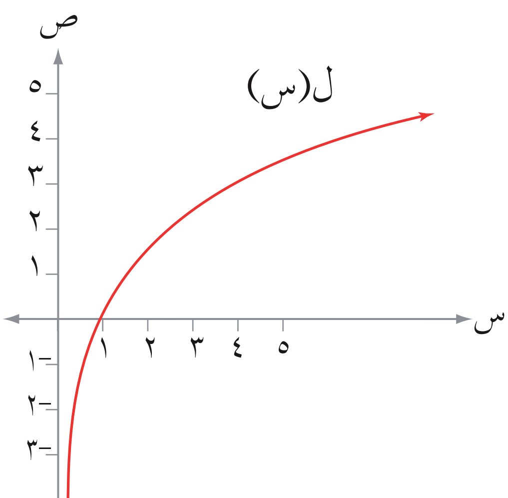
وفي ما يأتي نورد بعض خصائص الاقتران ل(س) ، س > ٠

١) ل(١) = ٠

٢) لَ(س) $= \frac{١}{س}$

٣) ل(س) اقتران متزايد على (٠ ، ∞) لماذا؟

٤) منحنى ل(س) مقعر للأسفل على (٠ ، ∞) لماذا؟



الشكل (٤-٨)

بالاستعانة بهذه الخصائص يمكن رسم منحنى تقريبي للاقتران ل. يبين الشكل (٤-٨) منحنى ل(س) وهو منحنى **اقتران اللوغاريتم**. إنَّ العدد الحقيقي الذي يجعل مساحة المنطقة المظللة في الشكل (٤-٧) تساوي وحدة واحدة يسمى **العدد النيبيري**، ويرمز له بالرمز (هـ) وهو أساس اللوغاريتم الطبيعي، وهو عدد غير نسبي يساوي ٢,٧ تقريبًا.

تعريف

الاقتران اللوغاريتمي: هو اقتران ق غير ثابت قابل للاشتقاق على مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة يحقق ق(أ ب) = ق(أ) + ق(ب) لكل أ > ٠ ، ب > ٠

إذا كانت س ∋ (٠ ، ∞) فإنَّ الاقتران $\int_{١}^{س} \frac{١}{ع}$ ءع = لــوهـس ويقرأ **اللوغاريتم الطبيعي لِـ س**.

قاعدة

١) إذا كان ق(س)= لـــوهـ س ، س > ٠ ، فإنَّ قَ(س) = $\frac{١}{س}$

٢) إذا كان ق(س)= لـــوهـ ل(س)، وكان ل(س) قابلًا للاشتقاق، فإنَّ قَ(س) = $\frac{لَ(س)}{ل(س)}$ ،
حيث ل(س)> ٠

مثال ١

جد قَ(س) لكلٍّ مما يأتي :

١) ق(س) = لـــوهـ (س^٢ + ٥) ٢) ق(س) = لـــوهـ جا ٢س ٣) ق(س) = لـــوهـ $\sqrt{س^٢ + ٧}$

الحل

١) قَ(س) = $\frac{٢س}{س^٢ + ٥}$

٢) قَ(س) = $\frac{٢ جتا ٢س}{جا ٢س}$ = ٢ ظتا ٢س

٣) ق(س) = لـــوهـ $\sqrt{س^٢ + ٧}$ = $\frac{١}{٢}$ لـــوهـ (س^٢ + ٧) لماذا؟

∴ قَ(س) = $\frac{١}{٢}$ × $\frac{٢س}{س^٢ + ٧}$ = $\frac{س}{س^٢ + ٧}$

نشاط

جد قَ(س) لكلٍّ مما يأتي:

١) ق(س) = لـــوهـ (س − ٤)

٢) ق(س) = لـــوهـ |س − ٤| (إرشاد: أعد تعريف |س − ٤|)

ماذا تستنتج؟

تدريب ١

جد قَ(س) لكل مما يأتي:

١) ق(س) = لوهـ (٢ − جتاس)

٢) ق(س) = لوهـ |٢س + ٥|

مثال ٢

إذا كان ق(س) = لوهـ $\left(\frac{\text{جتا س}}{\sqrt{\text{٤} - \text{٣س}^{\text{٢}}}}\right)$، فجد قَ(س)

الحل

ق(س) = لوهـ جتا س − لوهـ $\sqrt{\text{٤} - \text{٣س}^{\text{٢}}}$ لماذا؟

= لوهـ جتا س − $\frac{\text{١}}{\text{٢}}$ لوهـ (٤ − ٣س$^{\text{٢}}$) لماذا؟

قَ(س) = $\frac{-\text{جا س}}{\text{جتاس}} - \frac{\text{١}}{\text{٢}} \times \frac{-\text{٦س}}{\text{٤} - \text{٣س}^{\text{٢}}} = -\text{ظاس} + \frac{\text{٣س}}{\text{٤} - \text{٣س}^{\text{٢}}}$

فكر وناقش

حُلَّ مثال (٢) بطريقة أخرى.

مثال ٣

جد معكوسًا لمشتقة كلٍّ من الاقترانات الآتية:

١) ق(س) = $\frac{\text{١}}{\text{س}}$

٢) ق(س) = $\frac{\text{٣س}^{\text{٢}}}{\text{س}^{\text{٣}} + \text{٧}}$

الحل

١) م(س) = لوهـ |س| + جـ

٢) م(س) = لوهـ |س$^{\text{٣}}$ + ٧| + جـ

قاعدة

١) $\int \frac{١}{س} \, ءس = لـو_{هـ} |س| + جـ$

٢) $\int \frac{قَ(س)}{ق(س)} \, ءس = لـو_{هـ} |ق(س)| + جـ$

مثال ٤

جد كلًّا من التكاملات الآتية:

١) $\int \frac{٣}{س} \, ءس$ ٢) $\int_{١}^{٣} \frac{٦س}{٣س^{٢} + ٥} \, ءس$ ٣) $\int ظتاس \, ءس$

الحل

١) $\int \frac{٣}{س} \, ءس = ٣ \int \frac{١}{س} \, ءس = ٣ \, لـو_{هـ} |س| + جـ$

٢) $\int_{١}^{٣} \frac{٦س}{٣س^{٢} + ٥} = \left[لـو_{هـ} |٣س^{٢} + ٥| \right]_{١}^{٣}$

$= لـو_{هـ} |٢٧ + ٥| - لـو_{هـ} |٣ + ٥| = لـو_{هـ} ٣٢ - لـو_{هـ} ٨ = لـو_{هـ} ٤ = ٢ \, لـو_{هـ} ٢$ لماذا؟

٣) $\int ظتاس \, ءس = \int \frac{جتا س}{جاس} \, ءس = لـو_{هـ} |جاس| + جـ$

تدريب ٢

جد كلًّا من التكاملات الآتية:

١) $\int_{٢}^{٤} \frac{١}{٩ - ٢س} \, ءس$ ٢) $\int_{-\frac{\pi}{٤}}^{\frac{\pi}{٤}} \frac{قا^{٢}س}{٢ + ظاس} \, ءس$

تمارين ومسائل

١) جد المشتقة الأولى لكلٍّ من الاقترانات الآتية:

أ) ق(س) = لـو$_{هـ}$ ٢س

ب) ق(س) = لـو$_{هـ}$ جا^{٣}٥س

جـ) ق(س) = لـو$_{هـ}$ |س^{٢} + ٤س − ٥|

د) ق(س) = لـو$_{هـ}$ (س^{٢} + ٥س + ٣)

هـ) ق(س) = س^{٣} لـو$_{هـ}$ س

و) ق(س) = لـو$_{هـ}$ (٢ + $\sqrt{\text{س}}$)

ز) ق(س) = لـو$_{هـ}$ س^{٣}ظاس

ح) ق(س) = لـو$_{هـ}$ $\left(\dfrac{\text{س}}{\text{س}^{٢} + ١}\right)$

ط) ق(س) = (لـو$_{هـ}$ س)^{٣}

ي) ق(س) = لـو$_{هـ}$ $\dfrac{(٤\text{س}^{٢} + ٥)^{٦}}{(٧ - ٢\text{س})^{٥}}$

ك) ق(س) = لـو$_{هـ}$ $\sqrt[٣]{٥\text{س}^{٣} + ٤\text{س}}$

ل) ق(س) = ظا(لـو$_{هـ}$ س)

٢) إذا كان ق(س) = لـو$_{هـ}$ (س + $\sqrt{\text{س}^{٢} - ١}$) أثبت أنَّ قَ(س) = $\dfrac{١}{\sqrt{\text{س}^{٢} - ١}}$

٣) إذا كان $\int$ (قَ(س) − س) ءس = لـو$_{هـ}$ |قاس + ظاس| + س^{٢} فأثبت أنَّ:

قَ(س) = ٣س + قاس

٤) بيّن أنَّ الاقتران م(س) = لـو$_{هـ}$ جاس هو معكوس لمشتقة الاقتران ق(س) = ظتاس.

٥) جد كلًّا من التكاملات الآتية:

أ) $\displaystyle\int \dfrac{٢\text{س}}{\text{س}^{٢} + ٣}$ ءس

ب) $\displaystyle\int \dfrac{١ + \text{جتاس}}{\text{س} + \text{جاس}}$ ءس

جـ) $\displaystyle\int \dfrac{٥ + ٥\text{ظتا}^{٢}\text{س}}{\text{ظتاس}}$ ءس

د) $\displaystyle\int \dfrac{٣\text{س}^{٢}}{\text{س}^{٣} + ٥}$ ءس

هـ) $\int \frac{\text{س} + ٥}{\text{س}} \, \text{ءس}$

و) $\int_{٣}^{٥} \frac{\text{س} - ٢}{\text{س}^{٢} - ٤} \, \text{ءس}$

ز) $\int_{-١}^{٢} \frac{|٢\text{س}|}{\text{س}^{٢} + ١} \, \text{ءس}$

ح) $\int \frac{\text{جا}٣\text{س}}{١ + \text{جتا}٣\text{س}} \, \text{ءس}$

ط) $\int \frac{٢\text{س} - ١}{\text{س}(\text{س} - ١)} \, \text{ءس}$

ي) $\int \text{ظاس} \, \text{ءس}$

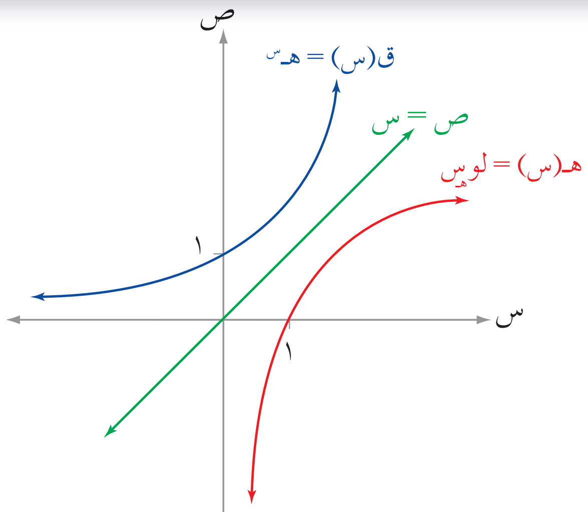
٦) جد معكوسًا لمشتقة كلٍّ من الاقترانات الآتية:

أ) $\text{ق(س)} = \left(\frac{٢\text{س}}{\text{س}^{٢} + ٤}\right)$

ب) $\text{ق(س)} = \left(\frac{٣\text{جتا}٣\text{س}}{٥ + \text{جا}٣\text{س}}\right)$

خامسًا مشتقة وتكامل الاقتران الأسي الطبيعي
Derivative and Integral of Natural Exponential Function

الاقتران الأسي الطبيعي $ق(س) = هـ^{س}$، حيث هـ: هو العدد النيبيري، هو الاقتران العكسي لاقتران اللوغاريتم الطبيعي انظر الشكل (٤-٩).



الشكل (٤-٩)

قاعدة (١)

١) إذا كان $ق(س) = هـ^{س}$ فإن $قَ(س) = هـ^{س}$

٢) إذا كان $ق(س) = هـ^{ل(س)}$ ، حيث ل(س) قابل للاشتقاق؛ فإنَّ

$قَ(س) = لَ(س)\ هـ^{ل(س)}$

البرهان

١) $ص = هـ^{س} \leftarrow لو_{هـ} ص = س$ لماذا؟

$\frac{صَ}{ص} = ١$ اشتقاق الطرفين

$صَ = ص \leftarrow \frac{ءص}{ءس} = هـ^{س}$

فكر وناقش

برهن فرع (٢) من قاعدة (١)

مثال ١

جد $قَ(س)$ لكلٍّ مما يأتي:

١) $ق(س) = هـ^{س} + لو_{هـ}(س^{٣} + ٥)$

٢) $\text{ق}(\text{س}) = \text{هـ}^{٧ - ٢\text{س}^{٣}}$

٣) $\text{ق}(\text{س}) = \text{هـ}^{\frac{١}{\text{س}}}$

الحل

١) $\text{قَ}(\text{س}) = \text{هـ}^{\text{س}} + \dfrac{٣\text{س}^{٢}}{\text{س}^{٣} + ٥}$

٢) $\text{قَ}(\text{س}) = -٦\text{س}^{٢}\,\text{هـ}^{٧ - ٢\text{س}^{٣}}$

٣) $\text{قَ}(\text{س}) = \dfrac{-١}{\text{س}^{٢}}\,\text{هـ}^{\frac{١}{\text{س}}}$

تدريب ١

جد قَ(س) لكلٍّ مما يأتي:

١) $\text{ق}(\text{س}) = \text{هـ}^{\text{جاس}}$

٢) $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{٤}\,\text{هـ}^{٢\text{س}}$

فكر وناقش

برهن أنّه إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \text{هـ}^{\text{لو}_{\text{هـ}}\text{ل}(\text{س})}$ ، فإنَّ $\text{ق}(\text{س}) = \text{ل}(\text{س})$

مثال ٢

جد قَ(س) لكلٍّ مما يأتي:

١) $\text{ق}(\text{س}) = \text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{هـ}^{\text{س}^{٣}}$

٢) $\text{ق}(\text{س}) = \text{هـ}^{\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}^{٤}}$

الحل

١) $\text{ق}(\text{س}) = \text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{هـ}^{\text{س}^{٣}} = \text{س}^{٣}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{هـ}$ قوانين اللوغاريتمات

$\therefore$ $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{٣}$ ، $\text{قَ}(\text{س}) = ٣\text{س}^{٢}$

٢) $\text{ق}(\text{س}) = \text{هـ}^{\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}^{٤}} = \text{س}^{٤}$ ، ومنه: $\text{قَ}(\text{س}) = ٤\text{س}^{٣}$

تدريب ٢

جد قَ(س) لكلٍّ مما يأتي:

١) $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{هـ}^{\text{س}^{٢}}$

٢) $\text{ق}(\text{س}) = \text{هـ}^{٣\,\text{لو}_{\text{هـ}}(١ + \text{جاس})}$

قاعدة (١)

$\int$ هـ^{س} ءس = هـ^{س} + جـ

مثال ٣

جد $\int$ (هـ^{٢} + هـ^{س}) ءس

الحل

$\int$ (هـ^{٢} + هـ^{س}) ءس = هـ^{٢}س + هـ^{س} + جـ

مثال ٤

جد معكوسًا لمشتقة كلٍّ من الاقترانات الآتية:

١) ق(س) = ٢ هـ^{٢س} ٢) ق(س) = −٣ هـ$^{١−٣س}$

٣) ق(س) = هـ^{أس}

الحل

١) م(س) = هـ^{٢س} + جـ

٢) م(س) = هـ$^{١−٣س}$ + جـ

٣) م(س) = $\frac{١}{أ}$ هـ^{أس} + جـ لماذا؟

ماذا تلاحظ؟

تعميم

$\int$ هـ^{أس} ءس = $\frac{١}{أ}$ هـ^{أس} + جـ

مثال ٥

جد كلًّا من التكاملات الآتية:

١) $\int \text{هـ}^{\text{٥س}} \, \text{ءس}$ ٢) $\int \text{هـ}^{\text{٣−٤س}} \, \text{ءس}$

الحل

١) $\int \text{هـ}^{\text{٥س}} \, \text{ءس} = \frac{\text{١}}{\text{٥}} \text{هـ}^{\text{٥س}} + \text{جـ}$

٢) $\int \text{هـ}^{\text{٣−٤س}} \, \text{ءس} = \frac{\text{−١}}{\text{٤}} \text{هـ}^{\text{٣−٤س}} + \text{جـ}$

تدريب ٣

جد كلًّا من التكاملات الآتية:

١) $\int_{\text{٠}}^{\text{١}} (\text{١} + \text{هـ}^{\text{س}})^{\text{٢}} \, \text{ءس}$ ٢) $\int \text{هـ}^{\text{٣س}} (\text{١} + \text{هـ}^{\text{٢س}}) \, \text{ءس}$

١) جد $\frac{ءص}{ءس}$ لكلٍّ من الاقترانات الآتية:

أ) $ص = س + هـ^{٩س}$

ب) $ص = س^{٣} + هـ^{٦-٥س^{٤}}$

جـ) $ص = جاهـ^{٢س}$

د) $ص = \sqrt{١ + هـ^{٢س}}$

هـ) $ص = هـ^{\frac{١}{س}} + لو_{هـ}\sqrt{س}$

و) $ص = هـ^{٥} + لو_{هـ} قاس$

ز) $ص = هـ^{٤لو_{هـ}(س^{٣}+٢)}$

ح) $ص = \frac{١ + هـ^{٢س}}{هـ^{٥س}}$

ط) $ص = هـ^{٢} + س^{٣} هـ^{جاس}$

ي) $ص = (هـ^{٤س+٥})^{٦}$

٢) إذا كان $ص = هـ^{ظاس} + أ لو_{هـ} جتاس + \int_{٠}^{\frac{\pi}{٣}} \frac{ءس}{١ + ظا^{٢}س}$

وكان $\left.\frac{ءص}{ءس}\right|_{س = \frac{\pi}{٤}} = ٢هـ + ١$، فجد قيمة الثابت أ .

٣) إذا كان $قً(س) = جاس + هـ^{٢س}$ ، $ق(٠) = \frac{١}{٤}$، $قَ(٠) = \frac{١}{٢}$ ، فجد قاعدة الاقتران ق.

٤) إذا كان $هـ^{ص س} = س - ص$، فأثبت أن $\frac{ءص}{ءس} = \frac{ص^{٢} - ص س + ١}{س^{٢} - س ص + ١}$

٥) إذا كان $ص = هـ^{أس}$ ، فجد قيمة (قيم) الثابت أ التي تحقق المعادلة الآتية:

$صً - ٥صَ + ٦ص = صفرًا$

٦) إذا كان $ق(س) = ٣^{ل(س)}$، حيث ل(س) قابل للاشتقاق؛ فأثبت أنَّ:

$قَ(س) = ٣^{ل(س)} \times لَ(س) لو_{هـ} ٣$

٧) إذا كان $\int \text{قَ(س)} \, \text{ءس} = \text{هـ}^{١-\text{س}^٢} + ٤\,\text{هـ}$ ، $\text{قَ(ب)} = -٢\,\text{ب}$ ، ب $\neq$ صفرًا فجد قيمة (قيم) الثابت ب.

٨) جد كلاًّ من التكاملات الآتية:

أ) $\int \text{هـ}^{٧\text{س}} \, \text{ءس}$

ب) $\int_{٠}^{١} ٣\,\text{هـ}^{٣\text{س}} \, \text{ءس}$

جـ) $\int_{١}^{٣} \text{هـ}^{٤} \, \text{ءس}$

د) $\int \dfrac{٤\,\text{هـ}^{٤\text{س}} - ٣}{\text{هـ}^{٤\text{س}} - ٣\text{س}} \, \text{ءس}$

هـ) $\int \dfrac{\text{هـ}^{٣\text{س}} - ٢٧}{\text{هـ}^{\text{س}} - ٣} \, \text{ءس}$

و) $\int \text{هـ}^{٥ + \text{لو}_{\text{هـ}} \text{جتاس}} \, \text{ءس}$

ز) $\int_{١}^{\text{هـ}^٢} \dfrac{١}{\text{هـ} - ١} \, \text{ءس}$

ح) $\int ٣\text{س}\,\text{هـ}^{٢ + \text{لو}_{\text{هـ}} \text{س}^٢} \, \text{ءس}$

ط) $\int \text{هـ}^{٥\text{س}} \sqrt{\text{هـ}^{٢\text{س}} + ٤\,\text{هـ}^{\text{س}} + ٤} \, \text{ءس}$

ي) $\int (\text{هـ}^{٢\text{س}+٥})^٢ \, \text{ءس}$

الفصل الثاني

طرائق التكامل

Techniques of Integration

النتاجات

- تتعرف طريقة التكامل بالتعويض، وتستخدمها في إيجاد بعض التكاملات.
- تتعرف طريقة التكامل بالأجزاء، وتستخدمها في إيجاد بعض التكاملات.
- تتعرف طريقة التكامل بالكسور الجزئية، وتستخدمها في إيجاد بعض التكاملات.

عندما يُطلب منك إجراء تكامل ما، قد يكون بالإمكان تطبيق قواعد التكامل التي سبق لك أن درستها، أمّا في بعض الحالات التي لاتخضع للتطبيق المباشر لقواعد التكامل الأساسية؛ فمن الممكن استخدام طرق أخرى مثل:

– التكامل بالتعويض.

– التكامل بالأجزاء.

– التكامل بالكسور الجزئية.

وفي هذا الفصل سيتم توضيح كلٍّ من هذه الطرق.

أولًا: التكامل بالتعويض Integration by Substitution

نشاط

أجب عن كلٍّ مما يأتي :

١) بيّن أن م(س) $= \frac{١}{٦}$(س^{٢} + ٣)^{٦} معكوس لمشتقة الاقتران ق(س) = ٢س(س^{٢} + ٣)^{٥}

٢) جد $\int$ ٢س (س^{٢} + ٣)^{٥} ءس

٣) افرض ص= س^{٢} + ٣ ثم جد $\frac{ءص}{ءس}$

٤) اكتب التكامل في (٢)؛ بدلالة ص باستخدام الرموز في (٣) ماذا تلاحظ؟

مثال ١

جد $\int ٦س^{٥} (س^{٦} + ٤)^{٧}\,ءس$

الحل

افرض $ص = س^{٦} + ٤$

ومنها $ءص = ٦س^{٥}\,ءس$ اشتقاق الطرفين

$$\int ٦س^{٥}(س^{٦}+٤)^{٧}\,ءس = \int (س^{٦}+٤)^{٧}(٦س^{٥}\,ءس) = \int (ص)^{٧}\,ءص = \frac{ص^{٨}}{٨} + جـ$$

$$= \frac{(س^{٦}+٤)^{٨}}{٨} + جـ$$

وتُسمى عملية إجراء التكامل على هذا النحو **بالتكامل بالتعويض.**

قاعدة

$$\int ق\,(هـ(س))\,هـ'(س)\,ءس = \int ق\,(ص)\,ءص$$

حيث $ص = هـ(س)$ ، $ءص = هـ'(س)\,ءس$

ويمكن تلخيص الخطوات التي يتم بها إجراء التكامل بالتعويض، على النحو الآتي:

١) افرض $ص = هـ(س)$

٢) اشتق الطرفين واكتب ءص على الصورة $ءص = هـ'(س)\,ءس$.

٣) عوِّض ص بدلًا من هـ (س)، وعوّض ءص بدلًا من $هـ'(س)\,ءس$.

٤) أي مقدار يبقى بدلالة س بعد عملية التعويض والتبسيط، اكتبه بدلالة ص.

٥) احسب التكامل الناتج بعد عملية التعويض بدلالة ص.

٦) أعد كتابة ناتج التكامل بدلالة س.

مثال ٢

جد $\int س^{٣}\sqrt[٣]{٣س^{٤} + ٤}\,ءس$

الحل

افرض $ص = ٣س^{٤} + ٤$ ، $ءص = ١٢س^{٣}\,ءس$

$$\int س^{٣}\sqrt[٣]{٣س^{٤}+٤}\,ءس = \frac{١}{١٢}\int \sqrt[٣]{٣س^{٤}+٤}\,(١٢س^{٣})\,ءس = \frac{١}{١٢}\int (ص)^{\frac{١}{٣}}\,ءص$$

$$= \frac{١}{١٢} \times \frac{٣}{٤}ص^{\frac{٤}{٣}} + جـ = \frac{١}{١٦}\sqrt[٣]{(٣س^{٤}+٤)^{٤}} + جـ$$

مثال ٣

جد $\int \frac{٦س - ٩}{(س^٢ - ٣س + ١)^٣}$ ءس

الحل

افرض ص = س^٢ − ٣س + ١ ومنه ءص = (٢س − ٣) ءس

$$\int \frac{٦س - ٩}{(س^٢ - ٣س + ١)^٣} ءس = \int \frac{٣(٢س - ٣)}{(س^٢ - ٣س + ١)^٣} ءس$$

$$= \int \frac{٣}{(س^٢ - ٣س + ١)^٣} \times (٢س - ٣) ءس = \int \frac{٣}{(ص)^٣} ءص = \int ٣ص^{-٣} ءص$$

$$= \frac{٣ص^{-٢}}{-٢} + جـ = \frac{٣(س^٢ - ٣س + ١)^{-٢}}{-٢} + جـ = \frac{-٣}{٢(س^٢ - ٣س + ١)^٢} + جـ$$

تدريب ١

جد كلاً من التكاملات الآتية:

١) $\int س^٢ (٦س^٣ + ٥)^٣$ ءس

٢) $\int (س + ٣) \sqrt[٥]{س^٢ + ٦س - ٤}$ ءس

٣) $\int \frac{١٠س - ٥}{\sqrt[٣]{(س^٢ - س + ١)^٢}}$ ءس

مثال ٤

جد $\int س^٣ (س^٢ + ٤)^٦$ ءس

الحل

افرض ص = س^٢ + ٤ ، ومنه ءص = ٢س ءس

$$\int س^٣ (س^٢ + ٤)^٦ ءس = \frac{١}{٢} \int س^٢ (ص)^٦ (٢س \times ءس)$$ لماذا؟

$$\frac{١}{٢} \int س^٢ (ص)^٦ ءص$$ تعويض و تبسيط

لاحظ هنا بعد التبسيط بقي المتغير س؛ لذا نعود إلى الفرض لكتابة المتغير س بدلالة المتغير ص

ومنه س^٢ = ص − ٤

$$\int \frac{1}{2}(ص - ٤)ص^{٦}\,ءص = \int \frac{1}{2}(ص^{٧} - ٤ص^{٦})\,ءص$$ تعويض و تبسيط

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{ص^{٨}}{٨} - \frac{٤ص^{٧}}{٧}\right) + جـ$$ إجراء التكامل

$$= \frac{(س^{٢}+٤)^{٨}}{١٦} - \frac{٢(س^{٢}+٤)^{٧}}{٧} + جـ$$ كتابة الناتج بدلالة س

تدريب ٢

جد كلًّا من التكاملات الآتية:

١) $\int س^{٧}\sqrt{س^{٤}-٣}\,ءس$ ٢) $\int ٢س^{٥}(س^{٢}+٥)^{٤}\,ءس$

مثال ٥

جد $\int \frac{(س+١)^{٩}}{س^{١١}}\,ءس$

الحل

اكتب $\int \frac{(س+١)^{٩}}{س^{١١}}\,ءس$ على الصورة $\int \frac{(س+١)^{٩}}{س^{٩}\times س^{٢}}\,ءس$ لماذا؟

$$\int \frac{\left(\frac{س+١}{س}\right)^{٩}}{س^{٢}}\,ءس$$

افرض ص $= \frac{س+١}{س}$ ، ص $= ١ + \frac{١}{س}$، ءص $= \frac{-١}{س^{٢}}$ ءس تبسيط الطرفين واشتقاقهما

$$\int \frac{\left(\frac{س+١}{س}\right)^{٩}}{س^{٢}}\,ءس = -\int \left(\frac{س+١}{س}\right)^{٩} \times \frac{-١}{س^{٢}}\,ءس = -\int ص^{٩}\,ءص$$ تعويض و تبسيط

$$= \frac{-ص^{١٠}}{١٠} + جـ$$ إجراء التكامل

$$= \frac{-\left(\frac{س+١}{س}\right)^{١٠}}{١٠} + جـ$$ كتابة الناتج بدلالة س

فكر وناقش

حُلَّ مثال (٥) بطريقة أخرى وذلك بإخراج س عاملاً مشتركًا.

تدريب ٣

جد كلًّا من التكاملات الآتية:

١) $\int \frac{(\text{٢س}+١)^{٥}}{\text{س}^{٧}}\,\text{ءس}$

٢) $\int \text{س}^{٢}\,\sqrt[٣]{\text{س}^{٧}+\text{٥س}^{٣}}\,\text{ءس}$

٣) $\int \sqrt[٣]{\text{٤س}^{٥}+\text{٢س}^{٣}}\,\text{ءس}$

٤) $\int (\text{٧س}^{٥}-\text{٢س})^{٣}\,\text{ءس}$

مثال ٦

جد $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \frac{\text{جا٢س}}{\sqrt{١+\text{جتا}^{٢}\text{س}}}\,\text{ءس}$

الحل

افرض $\text{ص} = ١ + \text{جتا}^{٢}\text{س}$

$\text{ءص} = -\text{٢جاس جتاس ءس}$ ، $\text{ءص} = -\text{جا٢س ءس}$ متطابقة $\text{جا٢س} = \text{٢جاس جتاس}$

وبما أنَّ حدود التكامل بدلالة س؛ إذن يلزم تغييرها بحيث تصبح بدلالة ص

عندما س = ٠ فإنَّ $\text{ص} = ١ + \text{جتا}^{٢}(٠) = ٢$

عندما $\text{س} = \frac{\pi}{٢}$ فإنَّ $\text{ص} = ١ + \text{جتا}^{٢}(\frac{\pi}{٢}) = ١$

$$\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \frac{\text{جا٢س}}{\sqrt{١+\text{جتا}^{٢}\text{س}}}\,\text{ءس} = \int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \frac{-١}{\sqrt{١+\text{جتا}^{٢}\text{س}}} \times -\text{جا٢س ءس}$$

$$= \int_{٢}^{١} \frac{-١}{\sqrt{\text{ص}}}\,\text{ءص} = \int_{٢}^{١} -\text{ص}^{\frac{-١}{٢}}\,\text{ءص} = -\text{٢ص}^{\frac{١}{٢}}\Big]_{٢}^{١}$$

$$= -٢\sqrt{\text{ص}}\Big]_{٢}^{١} = -٢(\sqrt{١}-\sqrt{٢}) = ٢\sqrt{٢}-٢$$

فكر وناقش

ناقش مع زملائك إيجاد التكامل غير المحدود في مثال (٦)، ثم جد قيمة التكامل المحدود لقيمة س، وقارن إجابتك.

تدريب ٤

جد كلًّا من التكاملات الآتية:

١) $\int_{٠}^{٤} \text{س}\sqrt{\text{س}^{٢} + ٩}\ \text{ءس}$ 　　 ٢) $\int_{١}^{٢} \frac{(\text{س} + ١)^{٥}}{\text{س}^{٧}}\ \text{ءس}$

مثال ٧

جد $\int \text{قا}^{٢}\ ٢\text{س} \times \text{هـ}^{\text{ظا}٢\text{س}}\ \text{ءس}$

الحل

افرض $\text{ص} = \text{ظا}٢\text{س}$ ، ومنه $\text{ءص} = (٢\text{قا}^{٢}\ ٢\text{س})\ \text{ءس}$

$$\int \text{قا}^{٢}\ ٢\text{س} \times \text{هـ}^{\text{ظا}٢\text{س}}\ \text{ءس} = \int \frac{١}{٢}\text{هـ}^{\text{ظا}٢\text{س}}(٢\text{قا}^{٢}\ ٢\text{س} \times \text{ءس}) = \int \frac{١}{٢}\text{هـ}^{\text{ص}}\ \text{ءص}$$

$$= \frac{١}{٢}\text{هـ}^{\text{ص}} + \text{جـ} = \frac{١}{٢}\text{هـ}^{\text{ظا}٢\text{س}} + \text{جـ}$$

مثال ٨

جد $\int (\text{س} + ٣)\ \text{قتا}^{٢}(\text{س}^{٢} + ٦\text{س} - ٤)\ \text{ءس}$

الحل

افرض $\text{ص} = \text{س}^{٢} + ٦\text{س} - ٤$ ، ومنه $\text{ءص} = (٢\text{س} + ٦)\ \text{ءس}$

$$\int (\text{س} + ٣)\ \text{قتا}^{٢}(\text{س}^{٢} + ٦\text{س} - ٤)\ \text{ءس} = \int \frac{١}{٢}\text{قتا}^{٢}(\text{س}^{٢} + ٦\text{س} - ٤)(٢)(\text{س} + ٣)\ \text{ءس}$$

$$= \int \frac{١}{٢}\text{قتا}^{٢}\ \text{ص}\ \text{ءص} = \frac{-١}{٢}\text{ظتاص} + \text{جـ} = \frac{-١}{٢}\text{ظتا}(\text{س}^{٢} + ٦\text{س} - ٤) + \text{جـ}$$

تدريب ٥

جد كلًّا من التكاملات الآتية:

١) $\int (\text{س}^{٢} + ١)\,\text{جا}(\text{س}^{٣} + ٣\text{س} + ١)\ \text{ءس}$ ٢) $\int \text{س}\ \text{ظا}^{٢}(\text{س}^{٢} + ٥)\ \text{ءس}$

٣) $\int_{١}^{٢} \frac{\text{هـ}^{\frac{٣}{\text{س}}}}{\text{س}^{٢}}\ \text{ءس}$

مثال ٩

جد $\int \text{جا}^{٣}\ ٢\text{س}\ \text{جتا}^{٥}\ ٢\text{س}\ \text{ءس}$

الحل

افرض $\text{ص} = \text{جتا}٢\text{س}$ ، ومنه $\text{ءص} = -٢\,\text{جا}٢\text{س}\ \text{ءس}$

$$\int \text{جا}^{٣}\ ٢\text{س}\ \text{جتا}^{٥}\ ٢\text{س}\ \text{ءس} = \int \frac{-١}{٢}\text{جا}^{٢}\ ٢\text{س}\ \text{جتا}^{٥}\ ٢\text{س}\ (-٢\,\text{جا}٢\text{س}\ \text{ءس})$$

$$\int \frac{-١}{٢}\,(\text{جا}^{٢}\ ٢\text{س})\,\text{ص}^{٥} \times \text{ءص} = \int \frac{-١}{٢}\,(١ - \text{جتا}^{٢}\ ٢\text{س})\ \text{ص}^{٥} \times \text{ءص}$$

لاحظ هنا: بَعد التبسيط بقي المتغير س؛ لذا نعود إلى الفرض لكتابة المتغير س بدلالة المتغير ص ،

$$\int \frac{-١}{٢}\,(١ - \text{ص}^{٢}) \times \text{ص}^{٥}\ \text{ءص} = \int \frac{-١}{٢}(\text{ص}^{٥} - \text{ص}^{٧})\ \text{ءص}$$

$$= \frac{-١}{٢}\left(\frac{\text{ص}^{٦}}{٦} - \frac{\text{ص}^{٨}}{٨}\right) + \text{جـ} = \frac{(\text{جتا}٢\text{س})^{٨}}{١٦} - \frac{(\text{جتا}٢\text{س})^{٦}}{١٢} + \text{جـ}$$

فكر وناقش

في مثال (٩) افرض ص = جا٢س، وناقش الحل مع زملائك، وقارن إجابتك.

مثال ١٠

جد $\int \text{جا}^{٤}\text{س}\ \text{جتا}^{٣}\text{س}\ \text{ءس}$

الحل

افرض $\text{ص} = \text{جاس}$، ومنه $\text{ءص} = \text{جتا س}\ \text{ءس}$

$$\int \text{جا}^{٤}\text{س}\ \text{جتا}^{٣}\text{س}\ \text{ءس} = \int \text{جا}^{٤}\text{س}\ \text{جتا}^{٢}\text{س}(\text{جتاس} \times \text{ءس}) = \int \text{ص}^{٤}\,\text{جتا}^{٢}\text{س}\ \text{ءص}$$

لاحظ هنا بعد التبسيط بقي المتغير س؛ لذا نعود إلى الفرض لكتابة المتغير س بدلالة المتغير ص.

$$=\int \text{ص}^{٤}\,(١-\text{جا}^{٢}\text{س})\,\text{ءص}=\int \text{ص}^{٤}\,(١-\text{ص}^{٢})\,\text{ءص}$$ لماذا؟

$$=\int (\text{ص}^{٤}-\text{ص}^{٦})\,\text{ءص}=\frac{\text{ص}^{٥}}{٥}-\frac{\text{ص}^{٧}}{٧}+\text{جـ}=\frac{(\text{جاس})^{٥}}{٥}+\frac{(\text{جاس})^{٧}}{٧}+\text{جـ}$$

فكر وناقش

هل يمكن حلّ مثال (١٠) من خلال فرض ص = جتاس ؟ برر إجابتك.

مثال (١١)

جد $\int \text{جتا}^{٢}\text{س}\ \text{جا}^{٤}\text{س}\ \text{ءس}$

الحل

$$\int \text{جتا}^{٢}\text{س}\ \text{جا}^{٤}\text{س}\ \text{ءس}=\int \text{جتا}^{٢}\text{س}\ \text{جا}^{٢}\text{س}\ \text{جا}^{٢}\text{س}\ \text{ءس}$$

$$=\int (\text{جتاس}\times\text{جاس})^{٢}\ \text{جا}^{٢}\text{س}\ \text{ءس}=\int \left(\frac{١}{٢}\text{جا٢س}\right)^{٢}\times\frac{١}{٢}(١-\text{جتا٢س})\ \text{ءس}$$ لماذا؟

$$=\int \frac{١}{٨}\left(\text{جا}^{٢}\text{٢س}-\text{جا}^{٢}\text{٢س}\ \text{جتا٢س}\right)\text{ءس}=\int\frac{١}{٨}\text{جا}^{٢}\text{٢س}\ \text{ءس}-\int\frac{١}{٨}\text{جا}^{٢}\text{٢س}\ \text{جتا٢س}\ \text{ءس}$$

أولًا جد $\int \frac{١}{٨}\text{جا}^{٢}\text{٢س}\ \text{ءس}$

$$=\int \frac{١}{١٦}(١-\text{جتا٤س})\ \text{ءس}=\frac{١}{١٦}\left(\text{س}-\frac{١}{٤}\text{جا٤س}\right)+\text{جـ}$$ متطابقة $\text{جا}^{٢}\text{س}=\frac{١}{٢}(١-\text{جتا٢س})$

$$\therefore \int \frac{١}{٨}\text{جا}^{٢}\text{٢س}\ \text{ءس}=\frac{١}{١٦}\left(\text{س}-\frac{١}{٤}\text{جا٤س}\right)+\text{جـ}$$ .... (١)

ثم جد $\int \frac{١}{٨}\text{جا}^{٢}\text{٢س}\ \text{جتا٢س}\ \text{ءس}$

افرض ص = جا٢س، ومنه ءص = (٢جتا٢س) ءس

$$\int \frac{١}{٨}\text{جا}^{٢}\text{٢س}\ \text{جتا٢س}\ \text{ءس}=\int\frac{١}{١٦}\text{جا}^{٢}\text{٢س}\times(\text{٢جتا٢س}\ \text{ءس})$$ لماذا؟

$$=\int\frac{١}{١٦}\text{ص}^{٢}\ \text{ءص}=\frac{\text{ص}^{٣}}{٤٨}+\text{جـ}=\frac{\text{جا}^{٣}\text{٢س}}{٤٨}+\text{جـ}$$

$\therefore \int \frac{١}{٨}\,\text{جا}^{٢}\,٢\text{س جتا}\,٢\text{س ءس} = \frac{\text{جا}^{٣}\,٢\text{س}}{٤٨} + \text{جـ}$ .... (٢)

إذن: $\int \frac{١}{٨}\,\text{جا}^{٢}\,٢\text{س ءس} - \int \frac{١}{٨}\,\text{جا}^{٢}\,٢\text{س جتا}\,٢\text{س ءس} = \frac{١}{١٦}(\text{س} - \frac{١}{٤}\,\text{جا}\,٤\text{س}) - \frac{\text{جا}^{٣}\,٢\text{س}}{٤٨} + \text{جـ}$

ومنه $\int \text{جتا}^{٢}\,٢\text{س جا}^{٤}\text{س ءس} = \frac{١}{١٦}(\text{س} - \frac{١}{٤}\,\text{جا}\,٤\text{س}) - \frac{\text{جا}^{٣}\,٢\text{س}}{٤٨} + \text{جـ}$

تدريب ٦

جد كلًّا من التكاملات الآتية:

١) $\int \text{ظا}^{٥}\,٣\text{س قا}^{٢}\,٣\text{س ءس}$

٢) $\int \frac{\text{جتا}\,٢\text{س}}{\text{قتا}^{٥}\,٢\text{س}}\,\text{ءس}$

٣) $\int \text{جا}^{٣}\text{س ءس}$

٤) $\int \text{جا}^{٤}\,٥\text{س جتا}^{٣}\,٥\text{س ءس}$

تحدّث

تحدّث إلى زملائك عن كلٍّ مما يأتي:

١) لماذا سُميت طريقة التكامل السابقة التكامل بالتعويض؟

٢) متى تستخدم طريقة التكامل بالتعويض؟

١) جد كلاً من التكاملات الآتية:

أ) $\int_{٠}^{٢} (\text{س}+٣)\sqrt{\text{س}^{٢}+٦\text{س}}\ \text{ءس}$

ب) $\int \dfrac{٢\text{س}-٣}{٢\text{س}^{٢}-٦\text{س}-٥}\ \text{ءس}$

جـ) $\int \dfrac{٢}{(٤\text{س}^{٢}-٢٠\text{س}+٢٥)^{٧}}\ \text{ءس}$

د) $\int_{٣}^{٤} \dfrac{٧}{\text{س}^{٢}-٤\text{س}+٤}\ \text{ءس}$

هـ) $\int \dfrac{\text{ظتا}^{٢}\frac{١}{\text{س}}}{\text{س}^{٢}}\ \text{ءس}$

و) $\int \dfrac{(٥+\sqrt{\text{س}})^{٧}}{\sqrt{\text{س}}}\ \text{ءس}$

ز) $\int \dfrac{١}{\text{س}^{٢}}\sqrt{\dfrac{٢\text{س}+١}{\text{س}}}\ \text{ءس}$

ح) $\int_{١}^{\text{هـ}^{٣}} \dfrac{١}{\text{س}\sqrt{١+\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}}}\ \text{ءس}$

ط) $\int \text{هـ}^{\text{س}^{٣}+٢\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}}\ \text{ءس}$

ي) $\int \dfrac{\text{س}^{٣}}{(\text{س}+١)^{٥}}\ \text{ءس}$

ك) $\int \sqrt[٣]{\text{س}^{-\frac{٣}{٤}}+١}\ \text{ءس}$

ل) $\int \text{جتا}^{٣}\text{س}(١+\text{حاس})^{٧}\ \text{ءس}$

٢) إذا كان $\int_{١}^{٨} \text{ق(س)}\ \text{ءس}=١٨$ ؛ فجد قيمة $\int_{١}^{٢} \text{س}^{٢}\ \text{ق(س}^{٣})\ \text{ءس}$

٣) إذا كان $\int_{٠}^{١} \text{ق(س)}\ \text{ءس}=٨$ ؛ فجد قيمة $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٤}} ٣\text{جتا(٢س)}\ \text{ق(جا٢س)}\ \text{ءس}$

٤) جد كلًّا من التكاملات الآتية:

أ) $\int \text{هـ}^{\text{جاس}+\text{لو}_{\text{هـ}}\text{جتاس}}\ \text{ءس}$

ب) $\int_{٠}^{٢} \dfrac{\text{س}^{٣}}{\sqrt{(\text{س}^{٢}+٩)^{٣}}}\ \text{ءس}$

جـ) $\int \dfrac{١-\text{ظا}^{٢}\text{س}}{\text{جتا}^{٢}\text{س}}\ \text{ءس}$

د) $\int \dfrac{\text{جاس}\sqrt{\text{جا}^{٢}\text{س}+٤}}{\text{قاس}}\ \text{ءس}$

هـ) $\int \text{قتا}^{٤}\,٦\text{س}\ \text{ظتا}^{٣}\,٦\text{س}\ \text{ءس}$

و) $\int \text{جتا}^{٤}\text{س}\ \text{ءس}$

ز) $\int \frac{\text{جا}٢\text{س}}{(١ + \text{جتا}^{٢}\text{س})^{٥}}\ \text{ءس}$

ح) $\int \text{جا}٢\text{س} \times \text{هـ}^{\text{جتا}^{٢}\text{س}}\ \text{ءس}$

ط) $\int \frac{\sqrt[٣]{\text{س}}}{٥ - \text{س}\sqrt[٣]{\text{س}}}\ \text{ءس}$

ي) $\int \text{قا}^{٤}\text{س}\ \text{ءس}$

ك) $\int \frac{١}{\sqrt{\text{س}}\,(٢ + \sqrt{\text{س}})}\ \text{ءس}$

ل) $\int \frac{\sqrt[٣]{\text{ظتاس} + ٣}}{٢ - ٢\text{جتا}^{٢}\text{س}}\ \text{ءس}$

م) $\int \text{جاس}(١ + \text{جتا}٢\text{س})^{٥}\ \text{ءس}$

ن) $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \sqrt{\text{جتاس} - \text{جتا}^{٣}\text{س}}\ \text{ءس}$

س) $\int \text{جتا}٢\text{س}(\text{جاس} - \text{جتاس})^{٨}\ \text{ءس}$

٥) أثبت أنَّ $\int_{\frac{١}{٢}}^{١} \frac{(\text{س}-١)^{\text{ن}}}{\text{س}^{\text{ن}+٢}}\ \text{ءس} = \begin{cases} \frac{-١}{\text{ن}+١} & \text{، حيث ن عدد فردي} \\ \frac{١}{\text{ن}+١} & \text{، حيث ن عدد زوجي} \end{cases}$

٦) اكتب الفرض المناسب لإيجاد كلٍّ من التكاملات الآتية؛ بطريقة التكامل بالتعويض (دون إجراء التكامل):

أ) $\int \text{جتا}^{١٠}\text{س}\ \text{جا}^{٧}\text{س}\ \text{ءس}$

ب) $\int \text{جتا}^{٥}\text{س}\ \text{جا}^{٧}\text{س}\ \text{ءس}$

جـ) $\int \text{ظا}^{٥}\text{س}\ \text{قا}^{٤}\text{س}\ \text{ءس}$

د) $\int \text{ظا}^{٣}\text{س}\ \text{قا}^{٥}\text{س}\ \text{ءس}$

هـ) $\int \text{ظتا}^{٦}\text{س}\ \text{قتا}^{٤}\text{س}\ \text{ءس}$

و) $\int \text{ظتا}^{٧}\text{س}\ \text{قتا}^{٤}\text{س}\ \text{ءس}$

ثانيًا التكامل بالأجزاء Integration By Parts

نشاط

أجب عن كلٍّ مما يأتي:

١) بيّن أنَّ م(س) = س جاس + جتاس معكوس لمشتقة الاقتران ق(س) = س جتاس

٢) جد $\int$ س جتاس ءس

٣) افرض ق= س ، هـَ = جتاس ءس ثم جد قَ ، هـ

٤) اكتب ناتج التكامل في (٢) باستخدام الرموز في (٣) ماذا تلاحظ؟

إذا كان ق، هـ اقترانين قابلين للاشتقاق بالنسبة إلى المتغير س فإنَّ :

(ق(س) × هـ(س))َ = قَ(س) × هـ(س) + ق(س) × هـَ(س)

أي أنَّ ق(س) × هـَ(س) = (ق(س) × هـ(س))َ − قَ(س) × هـ(س)

وبإجراء التكامل للطرفين بالنسبة إلى س يكون :

$\int$ ق(س) × هـَ(س) ءس = $\int$(ق(س) × هـ(س))َ ءس − $\int$ قَ(س) × هـ(س) ءس

لكن ءهـ = هـَ(س) ءس ، ءق = قَ(س) ءس

أي أنَّ:

تعميم

$\int$ ق × ءهـ = ق × هـ − $\int$ هـ × ءق

وتُسمى هذه بقاعدة التكامل بالأجزاء

مثال ١

جد $\int$ ٢س جاس ءس

الحل

افرض

$ق = ٢س$ $\quad\quad$ $ءق = ٢ ءس$ $\quad\quad$ اشتقاق

$ءهـ = جاس ءس$ $\quad\quad$ $هـ = -جتاس$ $\quad\quad$ إجراء التكامل

باستخدام القاعدة : $\int ق \times ءهـ = ق \times هـ - \int هـ \times ءق$

فإنَّ $\int ٢س جاس ءس = ٢س \times -جتاس - \int -جتاس \times ٢ءس$

$$= -٢س جتاس + \int ٢ جتاس ءس$$

$$= -٢س جتاس + ٢ جاس + جـ$$

مثال ٢

جد $\int س \times هـ^{٣س} ءس$

الحل

افرض

$ق = س$ $\quad\quad$ $ءق = ءس$

$ءهـ = هـ^{٣س} ءس$ $\quad\quad$ $هـ = \frac{١}{٣} هـ^{٣س}$

وباستخدام القاعدة : $\int ق \times ءهـ = ق \times هـ - \int هـ \times ءق$

$$\int س \times هـ^{٣س} ءس = س \times \frac{١}{٣} هـ^{٣س} - \int \frac{١}{٣} هـ^{٣س} ءس$$

$$= \frac{١}{٣} س هـ^{٣س} - \frac{١}{٩} هـ^{٣س} + جـ$$

تدريب ١

جد كلًّا من التكاملات الآتية :

١) $\int س جتاس ءس$ $\quad\quad$ ٢) $\int س جا٥س ءس$

٣) $\int (٢س - ٣) هـ^{س} ءس$ $\quad\quad$ ٤) $\int س قا^{٢}س ءس$

مثال ٣

جد $\int$ س جتا^{٢}س ءس

الحل

افرض

ق = س ‏ ‏ ‏ ‏ ءق = ءس

ء هـ = جتا^{٢}س ءس = $\frac{١}{٢}$(١ + جتا٢س) ءس ‏ ‏ ‏ ‏ هـ = $\frac{١}{٢}$(س + $\frac{١}{٢}$ جا٢س)

$\int$ ق × ء هـ = ق × هـ − $\int$ هـ × ءق

$\int$ س جتا^{٢}س ءس = س × $\frac{١}{٢}$(س + $\frac{١}{٢}$ جا٢س) − $\int$ $\frac{١}{٢}$(س + $\frac{١}{٢}$ جا٢س) ءس

= $\frac{١}{٢}$ س (س + $\frac{١}{٢}$ جا٢س) − $\frac{١}{٢}$ ($\frac{١}{٢}$ س^{٢} − $\frac{١}{٤}$ جتا٢س) + جـ

مثال ٤

جد $\int_{هـ}^{هـ^{٢}}$ لــو$_{هـ}$س ءس

الحل

افرض

ق = لــو$_{هـ}$س ‏ ‏ ‏ ‏ ءق = $\frac{١}{س}$ ءس

ء هـ = ءس ‏ ‏ ‏ ‏ هـ = س

وباستخدام القاعدة : $\int$ ق × ءهـ = ق × هـ − $\int$ هـ × ءق

$\int_{هـ}^{هـ^{٢}}$ لــو$_{هـ}$س ءس = $[$لــو$_{هـ}$س × س$]_{هـ}^{هـ^{٢}}$ − $\int_{هـ}^{هـ^{٢}}$ س × $\frac{١}{س}$ ءس

= $[$س لــو$_{هـ}$س$]_{هـ}^{هـ^{٢}}$ − $\int_{هـ}^{هـ^{٢}}$ ءس

= (هـ^{٢} × لــو$_{هـ}$هـ^{٢}) − (هـ × لــو$_{هـ}$هـ) − (هـ^{٢} − هـ) = هـ^{٢}

تدريب ٢

جد كلًّا من التكاملات الآتية:

١) $\int \text{س جا}^{٢}\text{س ءس}$

٢) $\int \text{س لو}_{\text{هـ}}\text{س}^{٣}\text{ ءس}$

٣) $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \text{٣س جاس ءس}$

٤) $\int \frac{\text{س}}{\text{١ − جتا٢س}} \text{ ءس}$

مثال ٥

جد $\int \text{س}^{٢}\text{ جاس ءس}$

الحل

افرض

$\text{ق} = \text{س}^{٢}$ $\qquad$ $\text{ءق} = \text{٢س ءس}$

$\text{ءهـ} = \text{جاس ءس}$ $\qquad$ $\text{هـ} = -\text{جتاس}$

وباستخدام القاعدة : $\int \text{ق} \times \text{ءهـ} = \text{ق} \times \text{هـ} - \int \text{هـ} \times \text{ءق}$

$\int \text{س}^{٢}\text{ جاس ءس} = -\text{س}^{٢}\text{ جتاس} + \int \text{٢س جتاس ءس}$

لاحظ أنَّ $\int \text{٢س جتاس ءس}$ يمثل تكامل حاصل ضرب اقترانين ليس أحدهما مشتقة للآخر؛ لذلك استخدم التكامل بالأجزاء مرة أخرى.

افرض

$\text{ق} = \text{٢س}$ $\qquad$ $\text{ءق} = \text{٢ ءس}$

$\text{ءهـ} = \text{جتاس ءس}$ $\qquad$ $\text{هـ} = \text{جاس}$

$\int \text{٢س جتاس ءس} = \text{٢س جاس} - \int \text{٢جاس ءس}$

وعليه فإنَّ

$\int \text{س}^{٢}\text{ جاس ءس} = -\text{س}^{٢}\text{ جتاس} + \text{٢س جاس} - \int \text{٢جاس ءس}$

$= -\text{س}^{٢}\text{ جتاس} + \text{٢س جاس} + \text{٢ جتاس} + \text{جـ}$

تدريب ٣

جد كلًّا من التكاملات الآتية :

١) $\int$ س^٢ هـ^{س} ءس   ٢) $\int$ س (لـوهـ س)^٢ ءس

ويمكن حل مثال (٥) بطريقة أخرى تسمى **طريقة الجدول (Tabular Method)**

وفي ما يلي توضيح لخطوات هذه الطريقة: لحل $\int$ س^٢ جاس ءس

على فرض أنَّ: ق = س^٢ ، ل(س) = جاس

١) اشْتَقَّ الاقتران ق عدة مرات حتى تحصل على (٠)، وأدرج النتائج في العمود الأول كما في الجدول التالي.

٢) أجرِ التكامل للاقتران ل(س) بعدد مرات تفاضل (ق)، وأدرج النتائج في العمود الثاني من الجدول.

٣) ارسم أسهمًا من مدخلة العمود الأول إلى المدخلة الثانية للعمود الثاني بشكل قطري.

٤) ضع إشارة + و – بالتناوب على الأسهم بدءًا بـ(+)

٥) وبذلك يكون الناتج النهائي كما يلي :

ق(إجراء التفاضل)		ءهـ (إجراء التكامل)
س^٢	+	جاس
٢س	–	– جتاس
٢	+	– جاس
صفر		جتاس

$\int$ س^٢ جاس ءس = س^٢ × – جتاس – ٢س × – جاس + ٢ × جتاس + جـ

= – س^٢ جتاس + ٢س جاس + ٢ جتاس + جـ

ملاحظة: حالات استخدام طريقة الجدول

حاصل ضرب اقترانين أحدهما كثير حدود، والاقتران الآخر على إحدى الصور الآتية:

١) جا أ س   ٢) جتا أ س   ٣) هـ^{أس} ٤) (أس + ب)^{ن} ، ن≠ – ١، أ≠صفرًا

تدريب ٤

جد كلًّا من التكاملات الآتية:

١) $\int$ س^٣ هـ^{س} ءس   ٢) $\int$ س^{٢}جتا٤س ءس

٣) $\int$ (س^٢– س) جا٢س ءس   ٤) $\int$ س^٢ (٢س + ١)^٥ ءس

مثال ٦

جد $\int$ س^{٥} جتاس^{٣} ءس

الحل

افرض ص = س^{٣} ، ومنه ءص = ٣س^{٢} ءس

$\int$ س^{٥} جتاس^{٣} ءس = $\int \frac{١}{٣}$ س^{٣} جتاس^{٣} (٣س^{٢} ءس) = $\int \frac{١}{٣}$ ص جتاص ءص

والآن استخدم طريقة التكامل بالأجزاء لإجراء تكامل المقدار $\int \frac{١}{٣}$ ص جتاص ءص

افرض

ق = $\frac{١}{٣}$ ص   ءق = $\frac{١}{٣}$ ءص

ءهـ = جتاص ءص   هـ = جاص

$\int \frac{١}{٣}$ ص جتاص ءص = $\frac{١}{٣}$ ص × جاص − $\int \frac{١}{٣}$ جاص ءص

= $\frac{١}{٣}$ ص × جاص + $\frac{١}{٣}$ جتاص + جـ

= $\frac{١}{٣}$ س^{٣} × جا س^{٣} + $\frac{١}{٣}$ جتا س^{٣} + جـ

تدريب ٥

جد كلًّا من التكاملات الآتية:

١) $\int$ قا^{٢}س هـ$^{\sqrt{\text{ظاس}}}$ ءس

٢) $\int$ جا٢س هـ$^{\text{جاس}}$ ءس

٣) $\int$ جتا $\sqrt{٢س + ١}$ ءس

٤) $\int_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{\pi}{٣}}$ ٣قا^{٤}س لو$_{هـ}$ ظاس ءس

مثال ٧

جد $\int \text{هـ}^{\text{٢س}}\ \text{جاس}\ \text{ءس}$

الحل

افرض $\text{ق} = \text{هـ}^{\text{٢س}}$ $\qquad$ $\text{ءق} = \text{٢ هـ}^{\text{٢س}}$

$\text{ءهـ} = \text{جاس ءس}$ $\qquad$ $\text{هـ} = -\ \text{جتاس}$

$\int \text{هـ}^{\text{٢س}}\ \text{جاس}\ \text{ءس} = -\text{هـ}^{\text{٢س}}\text{جتاس} + \text{٢} \int \text{هـ}^{\text{٢س}}\text{جتاس}\ \text{ءس}$ $\quad$ ($\int \text{هـ}^{\text{٢س}}\ \text{جتاس}\ \text{ءس}$ تكامل بالأجزاء)

$= -\text{هـ}^{\text{٢س}}\text{جتاس} + \text{٢}(\text{هـ}^{\text{٢س}}\text{جاس} - \text{٢} \int \text{هـ}^{\text{٢س}}\ \text{جاس}\ \text{ءس})$

ومنه $\int \text{هـ}^{\text{٢س}}\ \text{جاس}\ \text{ءس} = \frac{\text{٢}}{\text{٥}}\text{هـ}^{\text{٢س}}\ \text{جاس} - \frac{\text{١}}{\text{٥}}\text{هـ}^{\text{٢س}}\ \text{جتاس} + \text{جـ}$

حل مثال (٧) بطريقة أخرى.

تحدث

تحدّث إلى زملائك عن كلٍّ مما يأتي:

١) لماذا سُميت طريقة التكامل بالأجزاء بهذا الاسم؟

٢) متى تستخدم طريقة التكامل بالأجزاء؟

١) جد كلاً من التكاملات الآتية:

أ) $\int_{\text{٠}}^{\pi} (\text{٢س} + \text{١})\ \text{جتا ٣س ءس}$

ب) $\int \text{س}^{\text{٢}}\ \text{لـو}_{\text{هـ}}\ \text{س ءس}$

جـ) $\int_{-\text{٢}}^{\text{١}} \text{٥س} \sqrt{\text{س} + \text{٣}}\ \text{ءس}$

د) $\int \frac{\text{س جاس}}{\text{جتا}^{\text{٣}}\text{س}}\ \text{ءس}$

هـ) $\int \text{قا}^{\text{٢}}\text{س}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\ \text{ظاس ءس}$

و) $\int \frac{\text{س}}{\text{هـ}^{\text{٢س}}}\ \text{ءس}$

ز) $\int \text{جتا} \sqrt[\text{٣}]{\text{س}}\ \text{ءس}$

ح) $\int \text{جتاس}\ \text{لـو}_{\text{هـ}}\ \text{جاس ءس}$

ط) $\int \text{س}(\text{جاس} + \text{جتاس})^{\text{٢}}\ \text{ءس}$

ي) $\int \text{هـ}^{\text{س}}\ \text{جتا٣س ءس}$

ك) $\int \frac{\text{لـو}_{\text{هـ}}(\text{س} + \text{٣})}{\sqrt{\text{س} + \text{٣}}}\ \text{ءس}$

ل) $\int (\text{س}^{\text{٢}} - \text{٢س}) \sqrt{\text{س} + \text{٣}}\ \text{ءس}$

م) $\int \text{قا}^{\text{٢}}\text{س}\ \text{لـو}_{\text{هـ}}\ \text{جاس ءس}$

ن) $\int \text{٢ هـ}^{\text{س}}\ \text{جاس جتاس ءس}$

س) $\int (\text{س}^{\text{٣}} + \text{٢س})\ \text{هـ}^{\text{س}}\ \text{ءس}$

ع) $\int \frac{\text{س هـ}^{\text{س}}}{(\text{١} + \text{س})^{\text{٢}}}\ \text{ءس}$

٢) إذا كان $\int_{\text{١}}^{\text{٢}} \text{ق(س)ءس} = \text{٣}$ ، ق(١) = ٥ ، ق(٢) = ٨ ، فاحسب قيمة $\int_{\text{١}}^{\text{٢}} \text{س قَ(س)ءس}$

٣) إذا كان ق اقترانًا قابلًا للاشتقاق على مجموعة الأعداد الحقيقية ح وكان
$\int_{\text{١}}^{\text{٢}} \text{ق(س) ءس} = \text{١٠}$ ، ق(٢) = ٣ ، ق(١) = −١ ، فجد قيمة $\int_{\text{٠}}^{\text{١}} \text{س}^{\text{٥}}\ \text{قَ}(\text{س}^{\text{٣}} + \text{١})\ \text{ءس}$

ثالثًا التكامل بالكسور الجزئية
Integration by Partial Fractions

نشاط

أجب عن كلٍّ مما يأتي:

١) بيّن أنَّ م(س) = لـوهـ |س − ١| − لـوهـ |س + ١| معكوس لمشتقة الاقتران ق(س) = $\frac{٢}{س^٢ - ١}$

٢) جد $\int \frac{٢}{س^٢ - ١}$ ءس

٣) جزِّئ الكسر $\frac{٢}{س^٢ - ١}$

٤) جد تكامل المقدار الناتج من تجزئة الكسر في (٣)، ماذا تلاحظ؟

مثال ١

جد $\int \frac{٢}{س^٢ - ٤}$ ءس

الحل

$\frac{٢}{س^٢ - ٤} = \frac{٢}{(س - ٢)(س + ٢)}$ تحليل المقام

افرض: $\frac{٢}{(س-٢)(س+٢)} = \frac{أ}{س-٢} + \frac{ب}{س+٢}$

$= \frac{أ(س+٢) + ب(س - ٢)}{(س - ٢)(س + ٢)}$ توحيد المقامات

من هذه المساواة يمكنك استنتاج أنَّ:

٢ = أ(س + ٢) + ب(س − ٢) تساوي كسرين لهما المقام نفسه

يمكنك إيجاد أ ، ب بتعويض قيم محددة لـ س، ولتكن أصفار المقام

عندما س = ٢ ← ٢ = ٤ أ ← أ = $\frac{١}{٢}$

عندما س = −٢ ← ٢ = −٤ ب ← ب = $\frac{-١}{٢}$

ومنه $\int \frac{٢}{س^٢ - ٤}$ ءس = $\int \frac{٢}{(س - ٢)(س + ٢)}$ ءس

= $\int \frac{\frac{١}{٢}}{س - ٢}$ ءس − $\int \frac{\frac{١}{٢}}{س + ٢}$ ءس

= $\frac{١}{٢}$ لــوهـ |س − ٢| − $\frac{١}{٢}$ لــوهـ |س + ٢| + جـ

وتسمى عملية إجراء التكامل على هذا النحو **بالتكامل بالكسور الجزئية**

ملاحظة

١) عند تجزئة الاقتران النسبي يجب أن تكون درجة البسط أقل من درجة المقام.

٢) عند تجزئة الاقتران النسبي يجب أن يكون مقام كل من الاقترانات الجزئية عاملاً من عوامل مقام الاقتران الأصلي.

٣) إذا كانت درجة البسط أكبر من أو تساوي درجة المقام، نقوم بإجراء القسمة الطويلة ثم نجزِّئ الكسر.

٤) سنناقش في هذا الدرس اقترانات نسبية مقامها من الدرجة الثانية، ويمكن تحليله.

تدريب ١

جد $\int \frac{٥}{س^٢ - ٤س + ٣}$ ءس

مثال ٢

جد $\int_{٢}^{٤} \frac{٤س - ١}{س^٢ + س - ٢}$ ءس

الحل

$$\frac{٤س - ١}{س^٢ + س - ٢} = \frac{٤س - ١}{(س - ١)(س + ٢)} = \frac{أ}{س - ١} + \frac{ب}{س + ٢}$$

$٤س - ١ = أ(س + ٢) + ب(س - ١)$

بتعويض $س = ١$ ، تجد أنَّ $أ = ١$

بتعويض $س = -٢$ ، تجد أنَّ $ب = ٣$

إذن

$$\int_{٢}^{٤} \frac{٤س - ١}{س^٢ + س - ٢}\, ءس = \int_{٢}^{٤} \frac{١}{س - ١}\, ءس + \int_{٢}^{٤} \frac{٣}{س + ٢}\, ءس$$

$$= [لو_هـ |س - ١|]_{٢}^{٤} + ٣[لو_هـ |س + ٢|]_{٢}^{٤}$$

$$= لو_هـ ٣ - لو_هـ ١ + ٣ لو_هـ ٦ - ٣ لو_هـ ٤ = لو_هـ \frac{٨١}{٨}$$

تدريب ٢

جد $\int \frac{س - ١٣}{٢س^٢ - ٧س + ٣}\, ءس$

مثال ٣

جد $\int \frac{٢س^٢ + ٣}{س^٢ - س}\, ءس$

الحل

لاحظ أنَّ درجة البسط تساوي درجة المقام؛ لذلك

أجرِ عملية القسمة الطويلة؛ كما هو موضح جانبًا

$$\begin{array}{r|l} ٢ & \\ \hline ٢س^٢ \quad + ٣ & س^٢ - س \\ -\ ٢س^٢ - ٢س & \\ \hline ٢س + ٣ & \end{array}$$

$$\frac{٢س^٢ + ٣}{س^٢ - س} = ٢ + \frac{٢س + ٣}{س^٢ - س}$$

جزِّئ الكسر $\frac{٢س + ٣}{س^٢ - س}$

$$\frac{٢س + ٣}{س^٢ - س} = \frac{٢س + ٣}{س(س - ١)} = \frac{أ}{س} + \frac{ب}{س - ١}$$

$٢س + ٣ = أ(س - ١) + ب\,س$

بتعويض $س = ٠$ تجد أنَّ $أ = -٣$

بتعويض $س = ١$ تجد أنَّ $ب = ٥$

$$\text{إذن}\quad \int \frac{٢س^{٢} + ٣}{س^{٢} - س}\,ءس = \int ٢\,ءس + \int \frac{-٣}{س}\,ءس + \int \frac{٥}{س - ١}\,ءس$$

$$= ٢س - ٣لو_{هـ}|س| + ٥لو_{هـ}|س - ١| + جـ$$

تدريب ٣

جد كلًّا من التكاملات الآتية:

١) $\int \frac{س^{٢} + س + ٥}{س^{٢} + س}\,ءس$ ٢) $\int_{٢}^{٣} \frac{س^{٣} + س}{س - ١}\,ءس$

فكر وناقش

قام كلٌّ من أحمد وعلي بإيجاد $\int \frac{٢س^{٢}}{س^{٢} - ١}\,ءس$ فكانت إجابة كلٍّ منهما كما يأتي:

أحمد : $٢س + لو_{هـ}|س - ١| - لو_{هـ}|س + ١| + جـ$

علي : $لو_{هـ}|س - ١| - لو_{هـ}|س + ١| + جـ$

ناقش: (أيّ منهما إجابته صحيحة) . مبررًا إجابتك.

مثال ٤

جد $\int \frac{٢}{س - ٣\sqrt{س} - ٤}\,ءس$

الحل

افرض $ص = \sqrt{س}$ فتكون $ص^{٢} = س$ ، ومنه $٢ص\,ءص = ءس$ اشتقاق ضمني

$$\int \frac{٢}{س - ٣\sqrt{س} - ٤}\,ءس = \int \frac{٢}{ص^{٢} - ٣ص - ٤} \times ٢ص\,ءص = \int \frac{٤ص}{ص^{٢} - ٣ص - ٤}\,ءص$$

استخدم الكسور الجزئية لإيجاد $\int \frac{\text{٤ص}}{\text{ص}^{٢} - \text{٣ص} - ٤} \, \text{ءس}$

$$\frac{\text{٤ص}}{\text{ص}^{٢} - \text{٣ص} - ٤} = \frac{\text{٤ص}}{(\text{ص} - ٤)(\text{ص} + ١)} = \frac{\text{أ}}{\text{ص} - ٤} + \frac{\text{ب}}{\text{ص} + ١}$$

$$\text{٤ص} = \text{أ}(\text{ص} + ١) + \text{ب}(\text{ص} - ٤)$$

عندما ص $= ٤$ فإنَّ أ $= \frac{١٦}{٥}$ عندما ص $= -١$ فإنَّ ب $= \frac{٤}{٥}$

$$\int \frac{\text{٤ص}}{\text{س}^{٢} - \text{٣ص} - ٤} \, \text{ءص} = \int \frac{\frac{١٦}{٥}}{\text{ص} - ٤} \, \text{ءص} + \int \frac{\frac{٤}{٥}}{\text{ص} + ١} \, \text{ءص}$$

$$= \frac{١٦}{٥} \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{ص} - ٤| + \frac{٤}{٥} \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{ص} + ١| + \text{جـ}$$

$$= \frac{١٦}{٥} \text{لو}_{\text{هـ}} |\sqrt{\text{س}} - ٤| + \frac{٤}{٥} \text{لو}_{\text{هـ}} |\sqrt{\text{س}} + ١| + \text{جـ}$$

مثال ٥

جد $\int \frac{\text{٨هـ}^{\text{س}}}{\text{هـ}^{\text{٢س}} - ١٦} \, \text{ءس}$

الحل

افرض ص $=$ هـ$^{\text{س}}$ ، ومنه ءص $=$ هـ$^{\text{س}}$ ءس

$$\int \frac{\text{٨هـ}^{\text{س}}}{\text{هـ}^{\text{٢س}} - ١٦} \, \text{ءس} = \int \frac{٨}{(\text{هـ}^{\text{س}})^{٢} - ١٦} \times \text{هـ}^{\text{س}} \, \text{ءس} = \int \frac{٨}{\text{ص}^{٢} - ١٦} \, \text{ءص}$$

$$\frac{٨}{\text{ص}^{٢} - ١٦} = \frac{٨}{(\text{ص} - ٤)(\text{ص} + ٤)} = \frac{\text{أ}}{\text{ص} - ٤} + \frac{\text{ب}}{\text{ص} + ٤}$$

$$٨ = \text{أ}(\text{ص} + ٤) + \text{ب}(\text{ص} - ٤)$$

عندما ص $= ٤$ فإنَّ أ $= ١$ ، عندما ص $= -٤$ فإنَّ ب $= -١$

$$\int \frac{٨}{\text{ص}^{٢} - ١٦} \, \text{ءص} = \int \frac{١}{\text{ص} - ٤} \, \text{ءص} + \int \frac{-١}{\text{ص} + ٤} \, \text{ءص}$$

$$= \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{ص} - ٤| - \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{ص} + ٤| + \text{جـ} = \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{هـ}^{\text{س}} - ٤| - \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{هـ}^{\text{س}} + ٤| + \text{جـ}$$

تدريب ٤

جد كلًّا من التكاملات الآتية:

١) $\int \frac{\text{قا}^{٢}\text{س}}{٥\text{ظا}^{٢}\text{س} - ٣\text{ظاس} - ٢} \, \text{ءس}$

٢) $\int \frac{\sqrt[٣]{\text{س}} - ١}{\sqrt[٣]{\text{س}^{٢}} - ٤} \, \text{ءس}$

٣) $\int_{٠}^{٣} \frac{\sqrt{\text{س} + ١} - ١}{\sqrt{\text{س} + ١} + ١} \, \text{ءس}$

تحدث

تحدث إلى زملائك عن كلٍّ مما يأتي :

١) لماذا سُميت طريقة التكامل السابقة بالتكامل بالكسور الجزئية؟

٢) متى تستخدم طريقة التكامل بالكسور الجزئية؟

جد كلًّا من التكاملات الآتية:

١) $\int \frac{٧}{\text{س}^{٢} - ٣\text{س} - ١٠} \, \text{ءس}$

٢) $\int_{١}^{٣} \frac{٢\text{س}}{\text{س}^{٢} - ٤\text{س} - ١٢} \, \text{ءس}$

٣) $\int_{-١}^{١} \frac{|١ - \text{س}|}{\text{س}^{٢} - ٥\text{س} + ٦} \, \text{ءس}$

٤) $\int \frac{\text{س}^{٣} + ٤\text{س} - ٨}{\text{س}^{٢} - ٩} \, \text{ءس}$

٥) $\int_{٠}^{١} \frac{٣\text{س}^{٢} + ٣}{٣\text{س}^{٢} - \text{س} - ٤} \, \text{ءس}$

٦) $\int \frac{\text{ظاس}}{٢٥ - (\text{لو}_{\text{هـ}}\text{جتاس})^{٢}} \, \text{ءس}$

٧) $\int \frac{١}{\text{هـ}^{\text{س}} + ١} \, \text{ءس}$

٨) $\int \frac{\text{هـ}^{٣\text{س}}}{\text{هـ}^{٢\text{س}} - ٣\text{هـ}^{\text{س}} - ٤} \, \text{ءس}$

٩) $\int_{٩}^{١٦} \frac{\sqrt{\text{س}}}{\text{س} - ٤} \, \text{ءس}$

١٠) $\int \frac{\text{جتاس}}{١ + ٣\text{جاس} - \text{جتا}٢\text{س}} \, \text{ءس}$

١١) $\int \text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}^{٢} - ٩) \, \text{ءس}$

١٢) $\int \frac{\text{س}}{\text{س}^{٤} + \text{س}^{٢}} \, \text{ءس}$

١٣) $\int_{٩}^{١٦} \frac{\text{ءس}}{\text{س} - ٣\sqrt{\text{س}} + ٢}$

١٤) $\int \frac{\sqrt{\text{س} - ٢} + ١}{\sqrt{٤\text{س} - ٨} - ٢} \, \text{ءس}$

١٥) $\int \sqrt{١ - \text{هـ}^{\text{س}}} \, \text{ءس}$

١٦) $\int \frac{\text{قا}^{٢}\text{س}}{٥ - \text{قا}^{٢}\text{س}} \, \text{ءس}$

١٧) $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \frac{\text{جتاس}}{٨ + \text{جتا}^{٢}\text{س}} \, \text{ءس}$

١٨) $\int \frac{\text{ءس}}{\text{س}(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})^{٢} - ٤\text{س}}$

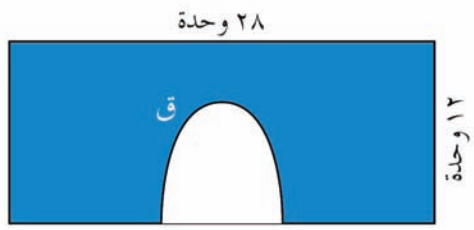
تطبيقات التكامل
Applications of the Integral

النتاجات

- تستخدم التكامل لإيجاد مساحة المنطقة المحصورة بين ثلاثة منحنيات على الأكثر.
- تـحلّ معادلات تفاضلية.
- تـحلّ مسائل في مواقف حياتية تتضمن علاقات ضمنية.

أولًا المساحة Area

الشكل (٤-١٠) يمثل الواجهة الأمامية لأحد المباني وشكل المدخل لهذا المبنى يمثله منحنى $ق(س) = ٨ - \frac{س^{٢}}{٢}$ ، ما التكلفة الكلية لدهان المنطقة الملوّنة باللون الأزرق؛ إذا علمت أنَّ سعر الدهان للوحدة المربعة (٤٠) قرشًا؟



الشكل (٤-١٠)

تعلمت سابقًا حساب مساحة منطقة مستوية على شكل مضلع أو دائرة، وفي هذا الدرس ستتعلم كيفية حساب مساحة منطقة محصورة بين أكثر من منحنى لا يمكن حسابها بالطرق المعتادة.

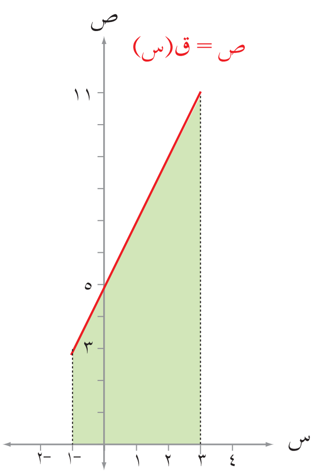
إيجاد مساحة منطقة محصورة بين منحنى اقتران ومحور السينات

مثال ١

اعتمادًا على الشكل (٤-١١) الذي يمثل منحنى الاقتران $ق(س) = ٢س + ٥$ في الفترة $[-١ ، ٣]$

أجب عن كلٍّ مما يأتي:

١) جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق ومحور السينات والمستقيمين $س = -١$ ، $س = ٣$



الشكل (٤-١١)

٢) جد $\int_{-١}^{٣} |ق(س)| ءس$

الحل

١) لاحظ أنَّ المنطقة المطلوبة على شكل شبه منحرف

$م = \frac{١}{٢}$ (مجموع طولي القاعدتين المتوازيتين) × الارتفاع

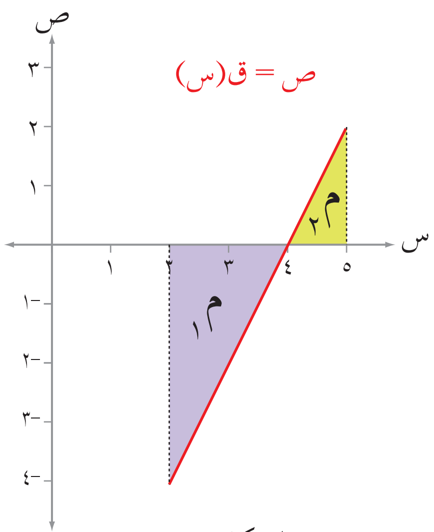
$م = \frac{١}{٢} \big(ق(-١) + ق(٣) \big) \times \big(٣ - (-١) \big)$

$م = \frac{١}{٢} (٣ + ١١) (٤) = ٢٨$ وحدة مساحة

٢) $\int_{-١}^{٣} |ق(س)| ءس = \int_{-١}^{٣} (٢س+٥) ءس = [س^٢ + ٥س]_{-١}^{٣}$

$= (٩ + ١٥) - (١ - ٥) = ٢٨$

ماذا تلاحظ؟



الشكل (٤-١٢)

مثال ٢

اعتمادًا على الشكل (٤ - ١٢) الذي يمثل منحنى

ق(س) = ٢س - ٨ في الفترة [٢ ، ٥] أجب عن كلٍّ مما يأتي:

١) احسب مساحة المنطقة المظللة.

٢) جد $\int_{٢}^{٥} |ق(س)| ءس$

الحل

لاحظ أنَّ المنطقة المطلوبة عبارة عن منطقتين، كل واحدة على شكل مثلث، إذن

$م_١ = \frac{١}{٢} \times$ طول القاعدة × الارتفاع

$= \frac{١}{٢} \times (٤ - ٢) \times ٤ = ٤$ وحدة مساحة

$م_٢ = \frac{١}{٢} \times ١ \times ٢ = ١$ وحدة مساحة

ولكن $م = م_١ + م_٢$

$م = ٤ + ١ = ٥$ وحدة مساحة

٢) $\int_{٢}^{٥} |ق(س)| ءس = \int_{٢}^{٤} (٨ - ٢س) ءس + \int_{٤}^{٥} (٢س - ٨) ءس$

$= [٨س - س^٢]_{٢}^{٤} + [س^٢ - ٨س]_{٤}^{٥}$

= (٣٢ – ١٦) –(١٦ – ٤) + (٢٥ – ٤٠) – (١٦ – ٣٢)

= ٥

ماذا تستنتج؟

لابد أنَّك لاحظت في المثالين (١) ، (٢) أنَّ مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق ومحور السينات والمستقيمين س = أ ، س= ب ، تساوي $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} |\text{ق(س)}|\, \text{ءس}$

قاعدة

إذا كان ق اقترانًا قابلًا للتكامل في الفترة [أ ، ب] فإنَّ مساحة المنطقة (م) المحصورة بين منحنى الاقتران ق ومحور السينات في الفترة [أ ، ب] تُعطى وفق القاعدة م = $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} |\text{ق(س)}|\, \text{ءس}$

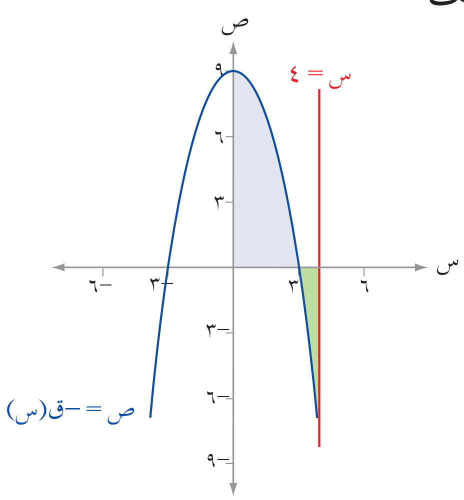
لإيجاد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران ومحور السينات في فترة محددة؛ اتبع الخطوات الآتية:

١) ارسم منحنى الاقتران، وحدّد المنطقة المطلوبة.

٢) جد أصفار الاقتران، ثم جزِّئ المنطقة المطلوبة حسب موقعها من محور السينات (فوق محور السينات، تحت محور السينات).

٣) احسب مساحة كلِّ منطقة جزئية على حدة؛ باستخدام التكامل مع الانتباه إلى أنَّ قيمة المساحة يجب أن تكون موجبة.

٤) اجمع المساحات التي حصلت عليها في خطوة (٣)، وبذلك تكون قد حصلت على مساحة المنطقة المطلوبة.



الشكل (٤–١٣)

مثال ٣

جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) = ٩ – س^{٢} و محور السينات على الفترة [٠ ، ٤]

الحل

المنطقة المظللة في الشكل (٤– ١٣) تمثل المساحة المطلوبة

$$\text{م} = \int_{٠}^{٤} |\text{ق(س)}|\,\text{ءس}$$

$$= \int_{٠}^{٣} (٩ - \text{س}^٢)\,\text{ءس} + \int_{٣}^{٤} (\text{س}^٢ - ٩)\,\text{ءس}$$

$$= \left[\frac{-\text{س}^٣}{٣} + ٩\text{س}\right]_{٠}^{٣} + \left[\frac{\text{س}^٣}{٣} - ٩\text{س}\right]_{٣}^{٤}$$

$$= (-٩ + ٢٧) - \text{صفر} + \left(\frac{٦٤}{٣} - ٣٦\right) - (٩ - ٢٧)$$

$$= \frac{٦٤}{٣}\ \text{وحدة مساحة}$$

تدريب ١

جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $\text{ق(س)} = ٢ - \sqrt{\text{س}}$ ، وكلٍّ من محوري السينات والصادات.

مثال ٤

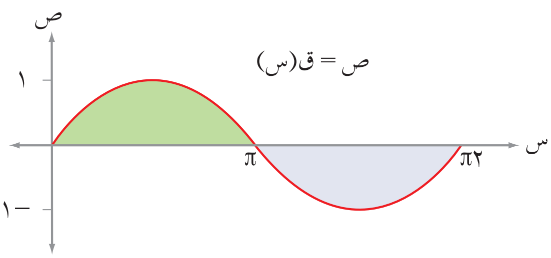
إذا كان $\text{ق(س)} = \text{جاس}$ ، $\text{س} \in [٠ ، ٢\pi]$ فجد كلًّا مما يأتي :

١) مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق ومحور السينات في الفترة $[٠ ، ٢\pi]$

٢) $\int_{٠}^{٢\pi} \text{ق(س)}\,\text{ءس}$

الحل

١) الشكل (٤-١٤) يوضح منحنى الاقتران ق والمنطقة المطلوبة



الشكل (٤-١٤)

$$\text{م} = \int_{٠}^{٢\pi} |\text{ق(س)}|\,\text{ءس}$$

$$= \int_{٠}^{٢\pi} |\text{جاس}|\,\text{ءس}$$

$$= \int_{٠}^{\pi} \text{جاس}\,\text{ءس} + \int_{\pi}^{٢\pi} -\text{جاس}\,\text{ءس}$$

$$= -\left[\text{جتاس}\right]_{٠}^{\pi} + \left[\text{جتاس}\right]_{\pi}^{٢\pi}$$

$$= \big(-\text{جتا}(\pi) + \text{جتا(صفر)}\big) + \big(\text{جتا}(٢\pi) - \text{جتا}(\pi)\big)$$

$$= (١ + ١) + (١ + ١) = ٤\ \text{وحدة مساحة}$$

٢) $\int_{٠}^{٢\pi} \text{ق(س)}\,\text{ءس} = \int_{٠}^{٢\pi} \text{جاس}\,\text{ءس} = \left[-\text{جتاس}\right]_{٠}^{٢\pi}$

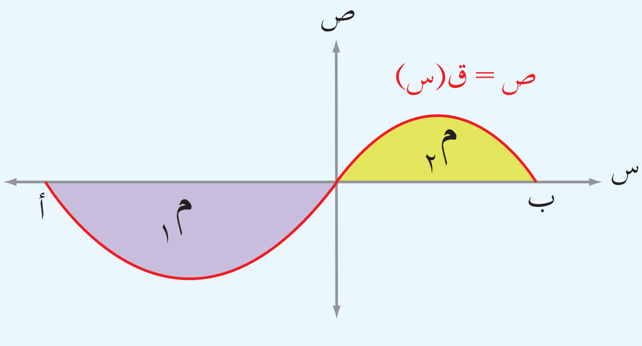
$$= \big(-\text{جتا}(٢\pi) + \text{جتا}(٠)\big) = (-١ + ١) = \text{صفرًا}$$

فكر وناقش

ناقش مع زملائك الإجابات التي حصلت عليها في فرعَي مثال (٤).

تدريب ٢

يمثل الشكل (٤-١٥) المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق، ومحور السينات في الفترة [أ ، ب] فإذا علمت أنَّ مساحة المنطقة (م$_{١}$) تساوي (٨) وحدات مربعة، ومساحة المنطقة (م$_{٢}$) تساوي (٥) وحدات مربعة فجد $\int_{أ}^{ب}$ ق(س)ءس.



الشكل (٤-١٥)

تدريب ٣

جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) = جتا(πس) ومحور السينات في الفترة [٠ ، ٢]

إيجاد مساحة منطقة محصورة بين منحنيين

مثال ٥

اعتماداً على الشكل (٤-١٦) الذي يمثل منحنى ق(س) = ٤ − س^{٢} ، والمستقيم ل(س) = س + ٢

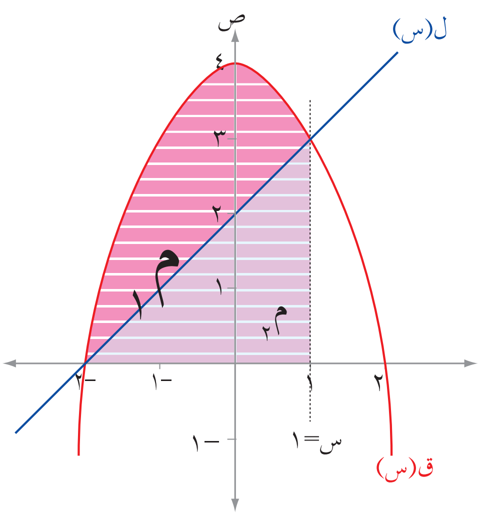
أجب عن كلٍّ مما يأتي:

١) جد مساحة المنطقة (م$_{١}$) المحصورة بين منحنى الاقتران ق ومحور السينات في الفترة [−٢ ، ١]

٢) جد مساحة المنطقة (م$_{٢}$) المحصورة بين منحنى الاقتران ل ومحور السينات في الفترة [−٢ ، ١]

٣) جد قيمة م$_{١}$ − م$_{٢}$

٤) جد قيمة $\int_{-٢}^{١}$ (ق(س) − ل(س)) ءس، ماذا تلاحظ؟



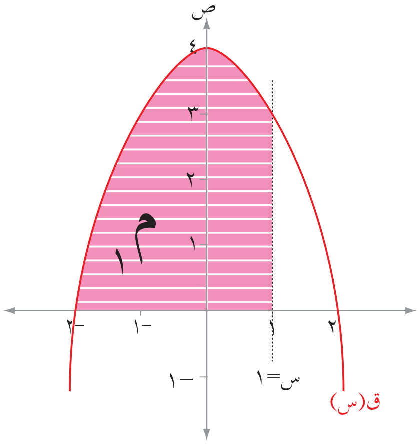
الشكل (٤-١٦)

الحل

١) الشكل (٤-١٧) يوضح منحنى الاقتران ق والمنطقة المطلوبة

$$م_{١} = \int_{-٢}^{١} (٤ - س^{٢})\, ءس = \left[٤س - \frac{س^{٣}}{٣}\right]_{-٢}^{١}$$

$$= (٤ - \frac{١}{٣}) - (-٨ + \frac{٨}{٣}) = ٩ \text{ وحدات مساحة}$$

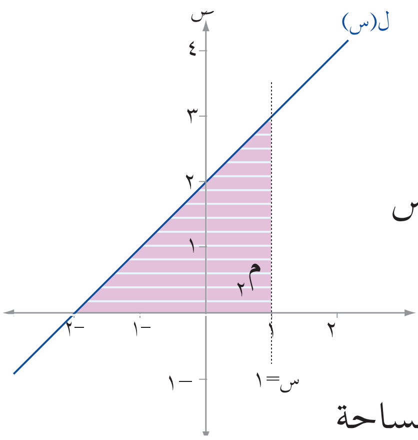


الشكل (٤-١٧)

٢) الشكل (٤-١٨) يوضح منحنى الاقتران ل والمنطقة المطلوبة

$$م_{٢} = \int_{-٢}^{١} (س + ٢)\, ءس = \left[\frac{س^{٢}}{٢} + ٢س\right]_{-٢}^{١}$$

$$= (\frac{١}{٢} + ٢) - (٢ - ٤) = ٤,٥ \text{ وحدة مساحة}$$



الشكل (٤-١٨)

٣) $م_{١} - م_{٢} = ٩ - ٤,٥ = ٤,٥$ وحدة مساحة

٤) $$\int_{-٢}^{١} (ق(س) - ل(س))\, ءس = \int_{-٢}^{١} ((٤ - س^{٢}) - (س + ٢))\, ءس$$

$$= \int_{-٢}^{١} (٢ - س^{٢} - س)\, ءس = \left[٢س - \frac{س^{٣}}{٣} - \frac{س^{٢}}{٢}\right]_{-٢}^{١}$$

$$= (٢ - \frac{١}{٣} - \frac{١}{٢}) - (-٤ + \frac{٨}{٣} - ٢) = ٤,٥ \text{ وحدة مساحة}$$

لابد أنَّك لاحظت أنَّ مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى

الاقتران ق والمستقيم ل(س) في الفترة [-٢ ، ١] هي : $\int_{-٢}^{١} (ق(س) - ل(س))\, ءس$

قاعدة

إذا كان ق، هـ اقترانين متصلين على الفترة [أ ، ب] وكان ق(س) ≥ هـ(س) لكل س ∈ [أ ، ب]

فإنَّ مساحة المنطقة المحصورة بينهما في الفترة [أ ، ب] هي: $م = \int_{أ}^{ب} (ق(س) - هـ(س))\, ءس$

لإيجاد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيين؛ اتبع الخطوات الآتية:

١) جد نقط تقاطع المنحنييْن.

٢) ارسم منحنى كلِّ اقتران، وحدِّد المنطقة المطلوب حساب مساحتها.

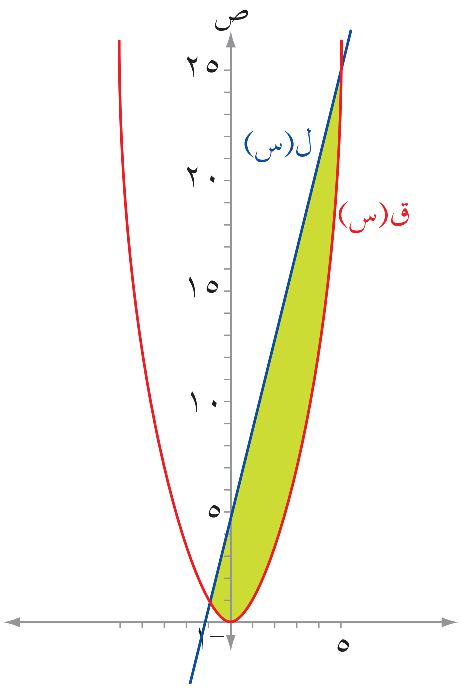
٣) احسب مساحة كلِّ منطقة جزئية على حدة باستخدام التكامل المحدود.

٤) اجمع مساحات المناطق الجزئية التي حصلت عليها في خطوة (٣)، فيكون الناتج المساحة المطلوبة.

مثال ٦

جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران

ق(س) = س^{٢} ومنحنى الاقتران ل (س) = ٤س + ٥



الشكل (٤-١٩)

الحل

جد نقط تقاطع المنحنيين

س^{٢} = ٤س + ٥، ومنه س^{٢} −٤س − ٥ = صفرًا

(س− ٥) (س + ١) = صفرًا ،منه س =٥ ، س= −١

نقط التقاطع هي:(−١،١) ، (٥،٢٥)

لاحظ أنَّ ل(س) ≥ ق(س) لكلِّ س ∈[−١، ٥]

انظر الشكل(٤−١٩)

م = $\int_{-1}^{5}$ (ل(س) − ق(س)) ءس= $\int_{-1}^{5}$ (٤ س +٥ − س^{٢})ءس

=٢س^{٢} + ٥س− $\frac{\text{س}^3}{3}$]$_{-1}^{5}$ =(٥٠+٢٥ − $\frac{125}{3}$) − (٢ − ٥+ $\frac{1}{3}$)

=٣٦ وحدة مساحة

> **تدريب ٤**
>
> جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقترانين ق(س) = ٤س^{٢}−٣س ، هـ(س)=٥س

مثال ٧

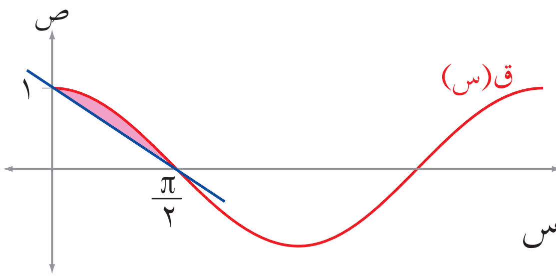
جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) = جتاس ، والقطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين (٠، ١) ، ($\frac{\pi}{2}$،٠)

الحل

أولًا جد معادلة المستقيم المار بالنقطتين (٠، ١)، ($\frac{\pi}{2}$،٠): ميل المستقيم = $\frac{\text{ص}_2 - \text{ص}_1}{\text{س}_2 - \text{س}_1}$

= $\frac{0 - 1}{\frac{\pi}{2} - 0}$ = $\frac{-2}{\pi}$

معادلة المستقيم: ص = $\frac{-2}{\pi}$ (س − $\frac{\pi}{2}$) ومنه ص= $\frac{-2}{\pi}$س + ١



الشكل (٤-٢٠)

انظر الشكل (٤ – ٢٠)

$$\text{م} = \int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} (\text{ق} - \text{ص})\, \text{ءس} = \int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} (\text{جتاس} + \frac{٢}{\pi}\text{س} - ١)\, \text{ءس}$$

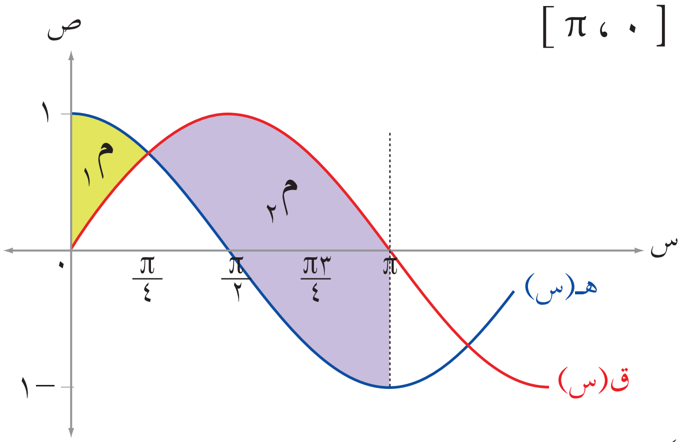
$$= \left[\text{جاس} + \frac{\text{س}^٢}{\pi} - \text{س}\right]_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} = (١ - \frac{\pi}{٤}) \text{ وحدة مساحة}$$

مثال ٨

جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين

ق(س) = جـاس، هـ(س) = جتاس في الفترة [٠ ، π]

الحل



الشكل (٤-٢١)

جد نقط تقاطع المنحنيين في الفترة [٠ ، π]

بتعويض جاس = جتاس ومنها س = $\frac{\pi}{٤}$

انظر الشكل (٤ – ٢١)

$$\text{م}_١ = \int_{٠}^{\frac{\pi}{٤}} (\text{هـ} - \text{ق})\, \text{ءس} = \int_{٠}^{\frac{\pi}{٤}} (\text{جتاس} - \text{جاس})\, \text{ءس}$$

$$= \left[(\text{جاس} + \text{جتاس})\right]_{٠}^{\frac{\pi}{٤}} = (\frac{١}{\sqrt{٢}} + \frac{١}{\sqrt{٢}}) - ١ = (\sqrt{٢} - ١) \text{ وحدة مساحة}$$

$$\text{م}_٢ = \int_{\frac{\pi}{٤}}^{\pi} (\text{ق} - \text{هـ})\, \text{ءس} = \int_{\frac{\pi}{٤}}^{\pi} (\text{جاس} - \text{جتاس})\, \text{ءس} = \left[(-\text{جتاس} - \text{جاس})\right]_{\frac{\pi}{٤}}^{\pi}$$

$$= ١ - (-\frac{١}{\sqrt{٢}} - \frac{١}{\sqrt{٢}}) = (١ + \sqrt{٢}) \text{ وحدة مساحة}$$

إذن المساحة المطلوبة هي: $\text{م} = \text{م}_١ + \text{م}_٢$

ومنه $\text{م} = \sqrt{٢} - ١ + ١ + \sqrt{٢} = ٢\sqrt{٢}$ وحدة مساحة

تدريب ٥

جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقترانين ق(س) = ١ + جاس،

هـ(س) = ١ + جتاس في الفترة $[\frac{\pi}{٢} ، \frac{٣\pi}{٢}]$.

إيجاد مساحة المنطقة المحصورة بين ثلاثة منحنيات

لإيجاد مساحة المنطقة المحصورة بين ثلاثة منحنيات؛ اتبع الخطوات الآتية:

١) ارسم منحنى كلِّ اقتران ثم حدد المنطقة المطلوب حساب مساحتها.

٢) جزِّئ المنطقة المطلوب حساب مساحتها إلى مناطق جزئية؛ بحيث تكون كلٌّ منها محصورة بين منحنيين، أو منحنى ومحور السينات.

٣) جد الإحداثيات السينية لنقط تقاطع المنحنيات مع بعضها ومع محور السينات.

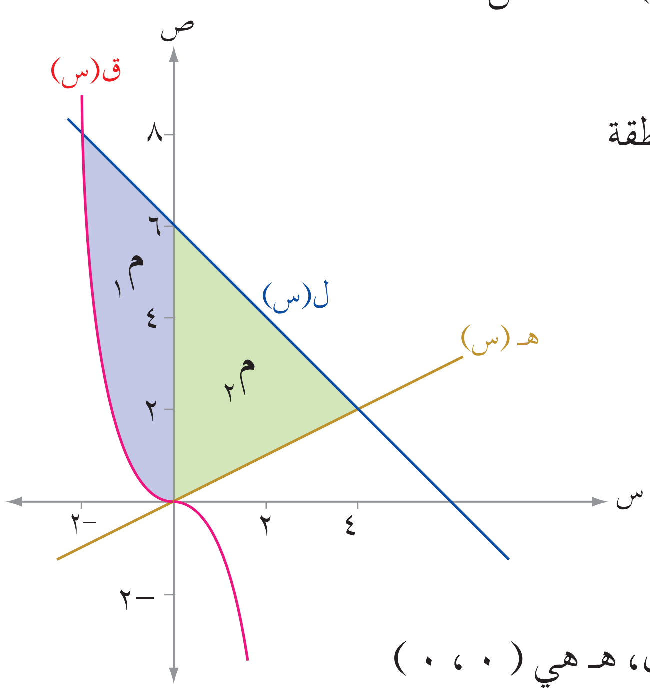
٤) جد مساحة كلِّ منطقة جزئية، ثم جد المساحة المطلوبة بجمع مساحات المناطق الجزئية.

مثال ٩

جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيات الاقترانات الآتية:

ق(س) = $-$ س^{٣} ، هـ (س) = $\frac{١}{٢}$ س ، ل(س) = ٦ $-$ س

الحل



الشكل (٤−٢٢)

١) ارسم منحنيات الاقترانات الثلاثة وحدّد المنطقة المطلوبة انظر الشكل (٤ − ٢٢)

٢) جد نقط التقاطع بين كلِّ منحنيين .

لتجد نقط التقاطع بين ق، هـ:

حُلَّ المعادلة

$-$ س^{٣} = $\frac{١}{٢}$ س ، س^{٣} + $\frac{١}{٢}$ س = ٠

ومنه س= ٠

أي أنَّ نقطة التقاطع بين منحنيي الاقترانين ق، هـ هي (٠ ، ٠)

لتجد نقط التقاطع بين ق، ل:

حُلَّ المعادلة :

$-$ س^{٣} = ٦ $-$ س ، س^{٣} $-$ س + ٦ = ٠

(س + ٢) (س^{٢} $-$٢س + ٣) = ٠ ومنه س= $-$ ٢

أي أنَّ نقطة التقاطع بين منحنيي ق، ل هي (− ٢ ، ٨)

لتجد نقاط التقاطع بين ل، هـ:

حُلّ المعادلة:

$٦ - \text{س} = \frac{١}{٢}\text{س}$ ومنه $\text{س} = ٤$

أي أنَّ نقطة التقاطع بين منحنيي ل، هـ هي (٤ ، ٢)

٣) جزِّئ المنطقة المطلوب حساب مساحتها إلى جزأين:

$\text{م}_{١}$: المنطقة المحصورة بين منحنيي ل ، ق في [−٢ ، ٠]

$\text{م}_{٢}$: المنطقة المحصورة بين منحنيي ل ، هـ في [٠ ، ٤]

٤) احسب المساحة كما تعلمت في الأمثلة السابقة

$$\text{م}_{١} = \int_{-٢}^{٠} \left(\text{ل(س)} - \text{ق(س)}\right) \text{ءس} = \int_{-٢}^{٠} (٦ - \text{س} + \text{س}^{٣}) \text{ءس}$$

$$= \left[٦\text{س} - \frac{\text{س}^{٢}}{٢} + \frac{\text{س}^{٤}}{٤}\right]_{-٢}^{٠} = \text{صفر} - (-١٢ - ٢ + ٤) = ١٠ \text{ وحدات مساحة}$$

$$\text{م}_{٢} = \int_{٠}^{٤} \left(\text{ل(س)} - \text{هـ(س)}\right) \text{ءس} = \int_{٠}^{٤} \left(٦ - \text{س} - \frac{\text{س}}{٢}\right) \text{ءس} = \int_{٠}^{٤} \left(٦ - \frac{٣\text{س}}{٢}\right) \text{ءس}$$

$$= \left[٦\text{س} - \frac{٣\text{س}^{٢}}{٤}\right]_{٠}^{٤} = (٢٤ - ١٢) - \text{صفر} = ١٢ \text{ وحدة مساحة}$$

ولكن $\text{م} = \text{م}_{١} + \text{م}_{٢}$ ومنه $\text{م} = ١٠ + ١٢ = ٢٢$ وحدة مساحة

تدريب ٦

جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيات الاقترانات الآتية:

$\text{ق(س)} = \text{س}^{٢} - ١$ ، $\text{هـ(س)} = ١ - \text{س}$ ، $\text{ل(س)} = ٣$

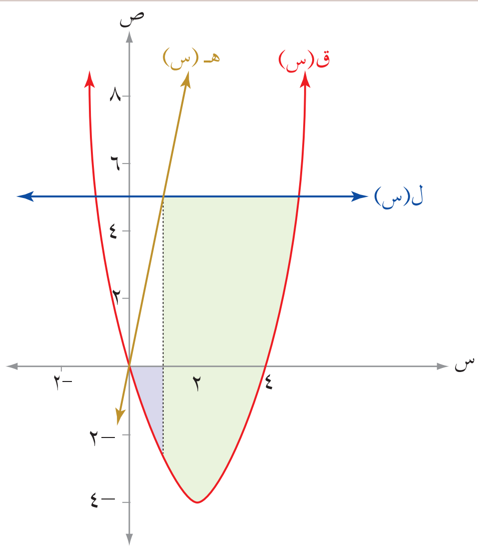
مثال ١٠

جد مساحة المنطقة المظللة في الشكل (٤ − ٢٣)

حيث $\text{ق(س)} = \text{س}^{٢} - ٤\text{س}$

$\text{هـ(س)} = ٥\text{س}$

$\text{ل(س)} = ٥$



الشكل (٤−٢٣)

الحل

جد نقط التقاطع بين منحنيي ل، هـ:

$٥\text{س} = ٥ \leftarrow \text{س} = ١$

إذن نقطة التقاطع بين منحنيي الاقترانين ل، هـ هي: (١ ، ٥)

جد نقطة التقاطع بين منحنيي الاقترانين ل ، ق:

$س^{٢} - ٤س = ٥$، $س^{٢} - ٤س - ٥ = $ صفرًا، $(س - ٥)(س + ١) = $ صفرًا

$س = ٥$، $س = -١$ تهمل (لماذا؟) إذن نقطة التقاطع بين منحنيي ل، ق هي: (٥ ، ٥)

لاحظ أنَّ : $م = م_{١} + م_{٢}$

$م_{١} = \int_{٠}^{١} (-س^{٢} + ٤س)\, ءس$ لماذا؟

$= -\left[\frac{س^{٣}}{٣} + ٢س^{٢}\right]_{٠}^{١} = \frac{-١}{٣} + ٢ = \frac{٥}{٣}$ وحدة مساحة

$م_{٢} = \int_{١}^{٥} (ل(س) - ق(س))\, ءس = \int_{١}^{٥} (٥ - س^{٢} + ٤س)\, ءس$

$= \left[٥س - \frac{س^{٣}}{٣} + ٢س^{٢}\right]_{١}^{٥} = (٢٥ - \frac{١٢٥}{٣} + ٥٠) - (٥ - \frac{١}{٣} + ٢) = \frac{٨٠}{٣}$ وحدة مساحة

ولكن $م = م_{١} + م_{٢}$ ومنه $م = \frac{٥}{٣} + \frac{٨٠}{٣} = \frac{٨٥}{٣}$ وحدة مساحة

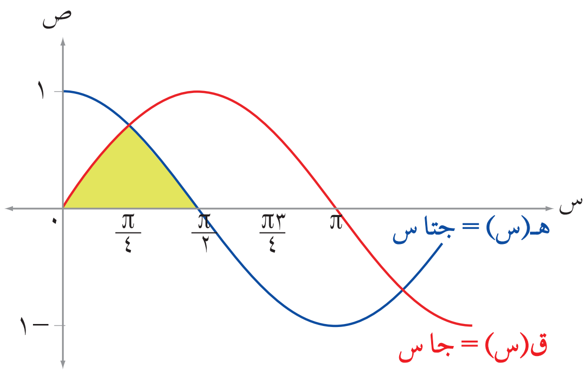
فكر وناقش

حُلّ مثال (١٠) بطريقة أخرى، وناقش الحل مع زملائك.

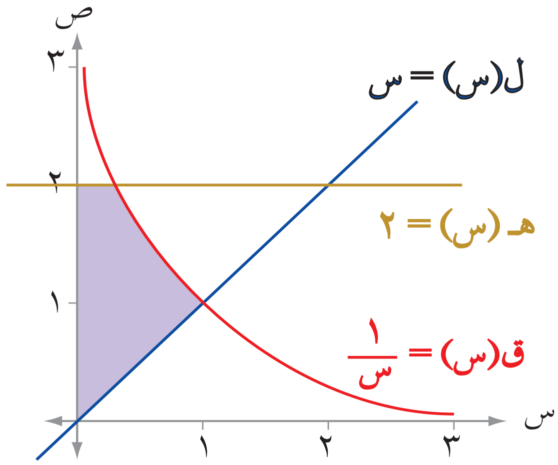
تدريب ٧

حُلَّ المسألة الواردة في مقدمة الدرس.

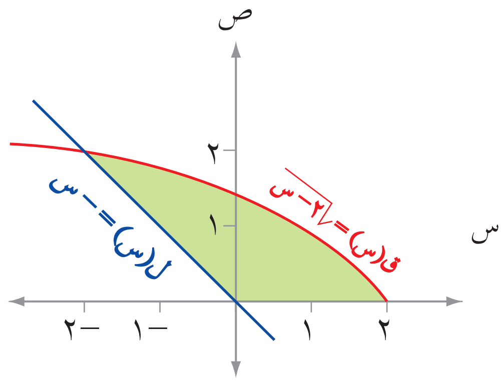
١) اكتب التكامل المحدود الذي يعبر عن مساحة المنطقة المظللة في كلٍّ من الأشكال الآتية:



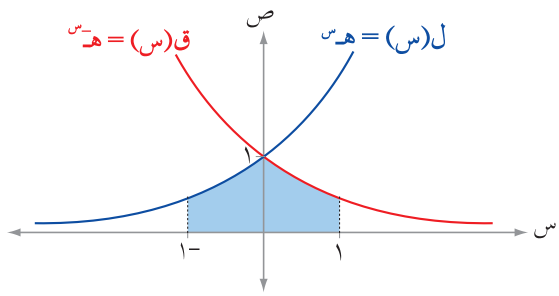
الشكل (٤–٢٤)



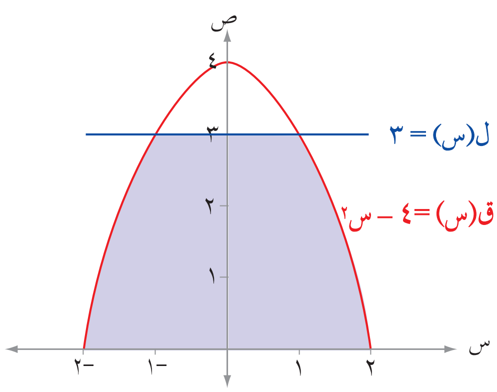
الشكل (٤–٢٥)



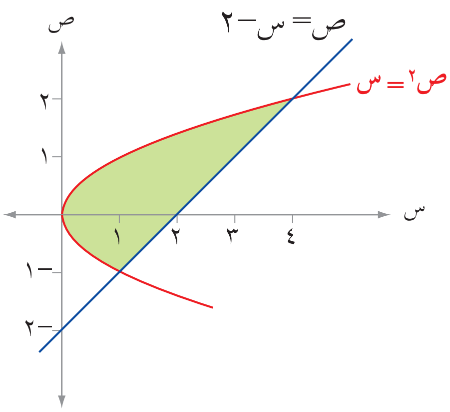
الشكل (٤–٢٦)



الشكل (٤–٢٧)



الشكل (٤–٢٨)



الشكل (٤–٢٩)

٢) جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) = ٤س^{٣} – ٤س ، ومحور السينات .

٣) جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين ق(س) = ٤س^{٣} – ٣س ، هـ(س) = ٥س

٤) إذا كان ق(س) = ٣س^{٢} –٣، جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى ق(س) ومحور السينات والمستقيمين س= – ٣ ، س= ٢

٥) جد مساحة المنطقة الواقعة في الربع الأول والمحصورة بين المستقيم ص = ٨س ، ومنحنى الاقتران ص = ٩ – س^{٢} ومحور السينات.

٦) جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين ق(س) = جاس ، هـ(س) = جا٢س

حيث س ∈ [٠، $\frac{\pi}{٢}$] .

٧) جد مساحة المنطقة الواقعة في الربع الأول المحصورة بين منحنى الاقتران ق (س) = $\frac{٢}{س}$ ، ومحور السينات والمستقيم ٢س – ص = ٠ ، والمستقيم هـ – س = صفرًا (هـ : العدد النيبيري)

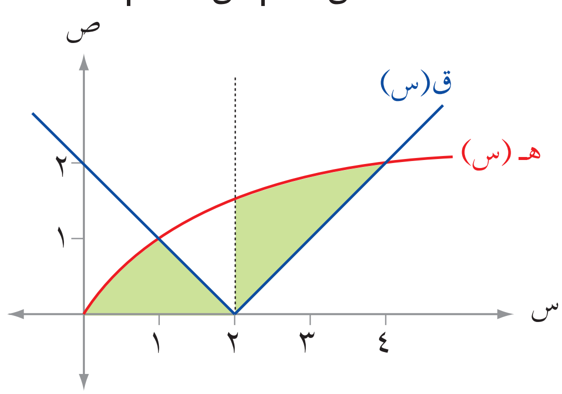
٨) جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) = ١ – س^{٢} ، ومحور الصادات والمستقيم س + ص = ٥ والمستقيم ص = س – ١

٩) جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين ق(س) = ١ + س^{٣} ، ل(س) = س^{٢} + ٥ والمستقيمين ص + س – ١ = ٠ ، ٣ – س = ٠

١٠) جد مساحة المنطقة الواقعة في الربع الأول المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) = س^{٢} – ٤ ، والمستقيم ص = ٢ س + ٤ ، والمحورين الإحداثيين.

١١) جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى العلاقة ص^{٢} = ٤س والمستقيم س – ص = ٣

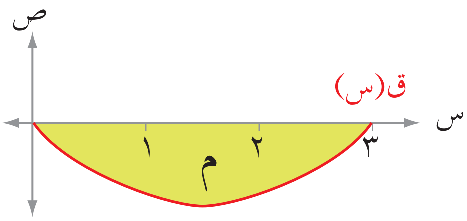
١٢) جد مساحة المنطقة المظللة في الشكل (٤ – ٣٠) حيث ق(س) = | س – ٢ | ، هـ(س) = $\sqrt{س}$



الشكل (٤–٣٠)

١٣) معتمدًا الشكل (٤ – ٣١) الذي يمثل منحنى الاقتران ق(س) في الفترة [٠، ٣] إذا كانت مساحة المنطقة (م) تساوي ٦ وحدات مربعة

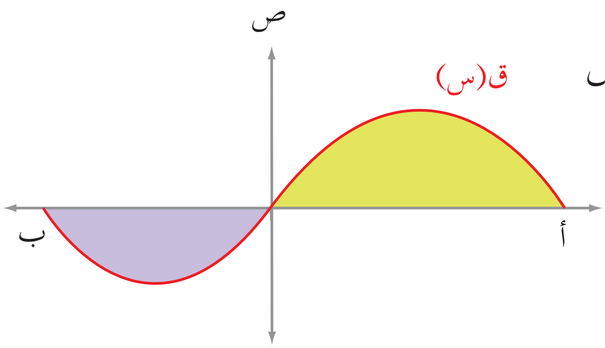
فجد $\int_{٠}^{٣}$ (٢– ق(س))ءس



الشكل (٤–٣١)

١٤) معتمدًا الشكل (٤ – ٣٢)،إذا كانت مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) ومحور السينات تساوي (١٤) وحدة مربعة

وكان $\int_{٠}^{ب}$ ق(س)ءس= ٦ فما قيمة $\int_{أ}^{٠}$ ق(س)ءس



الشكل (٤–٣٢)

ثانيًا المعادلات التفاضلية Differential Equations

إذا كان ميل المماس لمنحنى علاقة عند النقطة (س ، ص) يساوي ٢ س ص، فجد قاعدة العلاقة ص.

يمكن إيجاد قاعدة العلاقة ص كما يأتي :

$\frac{ءص}{ءس}$ = ٢ س ص   لماذا؟

وتسمى هذه المعادلة **بالمعادلة التفاضلية**

$\frac{ءص}{ص}$ = ٢ س ءس   فصل المتغيرات

لــوهـ |ص| = س^٢ + جـ   إجراء التكامل للطرفين

|ص| = هـ^(س^٢+جـ)   ومنه | ص | = جـ١ هـ^(س^٢) |ص| = هـ^(س^٢) × هـ^جـ = جـ١ هـ^(س^٢)

تعريف

المعادلة التفاضلية: هي معادلة تحوي على مشتقات أو تفاضلات .

ويقصد **بحلّ المعادلة التفاضلية** إيجاد علاقة تربط بين المتغير ص و المتغير س، بحيث تحقق المعادلة.

مثال ١

حُلَّ المعادلة التفاضلية :

$\frac{٢ءص}{١-س}$ = (٢س + ١) ءس

الحل

٢ءص= (١ − س) (٢س + ١) ءس   ضرب طرفي المعادلة بـ (١ − س)

∫٢ءص = ∫(−٢س^٢ + س + ١) ءس   إجراء التكامل غير المحدود لطرفي المعادلة

٢ ص = $\frac{-٢س^٣}{٣}$ + $\frac{س^٢}{٢}$ + س + جـ١

$$ص = \frac{-س^{٣}}{٣} + \frac{س^{٢}}{٤} + \frac{س}{٢} + \frac{جـ_{١}}{٢}$$ قسمة طرفي المعادلة على ٢

$$ص = \frac{-س^{٣}}{٣} + \frac{س^{٢}}{٤} + \frac{س}{٢} + جـ$$ حيث $جـ = \frac{جـ_{١}}{٣}$

مثال ٢

حُلَّ المعادلة التفاضلية: $جتا^{٢}س \, ءص + ص \, ءس = ءص$

الحل

اجعل المقدارين اللذين يحويان ءص في طرف والمقدار الذي يحوي ءس في طرف آخر

$$جتا^{٢}س \, ءص - ءص = - ص \, ءس$$

$$(جتا^{٢}س - ١) \, ءص = - ص \, ءس$$ إخراج ءص عاملًا مشتركًا

$$\frac{ءص}{ص} = \frac{-ءس}{جتا^{٢}س - ١}$$ قسمة طرفي المعادلة على $(جتا^{٢}س - ١) \times ص$

$$\frac{ءص}{ص} = قتا^{٢}س \, ءس$$ لماذا؟

$$\int \frac{ءص}{ص} = \int قتا^{٢}س \, ءس$$ إجراء التكامل غير المحدود لطرفي المعادلة

$$لـو_{هـ}|ص| = - ظتاس + جـ$$

$$|ص| = هـ^{-ظتاس + جـ_{١}} \quad ومنه \quad |ص| = هـ^{-ظتاس} \times هـ^{جـ_{١}}$$

$$|ص| = جـ \, هـ^{-ظتاس}$$ $جـ = هـ^{جـ_{١}}$

تدريب ١

حُلَّ المعادلة التفاضلية:

$$(س^{٢} - ٣س) \, ءص = هـ^{-ص}(س^{٢} + س - ١٢) \, ءس$$

مثال ٣

إذا كان ميل المماس لمنحنى علاقة عند النقطة (س، ص) يساوي $\frac{\sqrt{٢ص + ١}}{\sqrt{٣س - ٢}}$

فجد قاعدة هذه العلاقة؛ إذا علمت أنَّ منحناها يمر بالنقطة (١، ٤).

الحل

ميل المماس = $\frac{ءص}{ءس}$

$\frac{ءص}{ءس} = \frac{\sqrt{٢ص + ١}}{\sqrt{٣س - ٢}}$ ، $\frac{ءص}{\sqrt{٢ص + ١}} = \frac{ءس}{\sqrt{٣س - ٢}}$

$\int (٢ص + ١)^{\frac{-١}{٢}} ءص = \int (٣س - ٢)^{\frac{-١}{٢}} ءس$

$\frac{١}{٢} \times ٢(٢ص+١)^{\frac{١}{٢}} = \frac{١}{٣} \times ٢ (٣س-١)^{\frac{١}{٢}} + جـ$

$\sqrt{٢ص + ١} = \frac{٢}{٣} \sqrt{٣س - ٢} + جـ$

ولكن المنحنى يمر بالنقطة (١ ، ٤)

ومنه $\sqrt{٢ \times ٤ + ١} = \frac{٢}{٣} \sqrt{٣ \times ١ - ٢} + جـ$ ، جـ $= \frac{٧}{٣}$

$\sqrt{٢ص + ١} = \frac{٢}{٣} \sqrt{٣س - ٢} + \frac{٧}{٣}$

تدريب ٢

إذا كان ميل العمودي على المماس لمنحنى العلاقة ص عند النقطة (س، ص) يساوي س $\sqrt{٣ + لـو_{هـ} س}$ ، فجد قاعدة العلاقة ص علمًا بأنَّ منحناها يمر بالنقطة (هـ ، ٤)، حيث هـ : العدد النيبيري

مثال ٤

يسير جُسيم على خط مستقيم وفق العلاقة ت = ٢$\sqrt{ع}$ ، حيث ع > صفر ، ت: تسارع الجسيم، ع: سرعة الجسيم. فإذا كانت سرعة الجُسيم عند بدء حركته ٩م/ث فجد المسافة التي يقطعها الجسيم بعد (٣) ثوانٍ من بدء حركته؛ علمًا بأنّه قطع مسافة قدرها $\frac{٦٤}{٣}$ متر في أول ثانية من حركته.

الحل

المعطيات: ت = ٢$\sqrt{ع}$ ، ع(٠) = ٩م/ث ، ف(١) = $\frac{٦٤}{٣}$ متر

المطلوب : إيجاد ف(٣)

ت = $\frac{ءع}{ءن}$ ، $\frac{ءع}{ءن} = ٢\sqrt{ع}$ ومنه $\frac{ءع}{٢\sqrt{ع}} = ءن$

$\int \frac{1}{2} \times ع^{-\frac{1}{2}}$ ءع $= \int$ ءن

$ع^{\frac{1}{2}} =$ ن + جـ ...... (١)

لكن ع(٠) = ٩ بالتعويض في معادلة (١) ، ٣ = ٠ + جـ ، ومنه جـ = ٣

ع = (ن + ٣)^{٢} لماذا؟

ولكن ع = $\frac{ءف}{ءن}$ ، $\frac{ءف}{ءن}$ = (ن + ٣)^{٢} ، ومنه ءف = (ن+٣)^{٢} ءن

$\int$ ءف = $\int$ (ن + ٣)^{٢} ءن

ف = $\frac{(ن + ٣)^{٣}}{٣}$ + جـ$_{١}$ ...... (٢)

لكن ف(١) = $\frac{٦٤}{٣}$ بالتعويض في معادلة (٢)،

$\frac{٦٤}{٣} = \frac{(ن + ٣)^{٣}}{٣}$ + جـ$_{١}$

جـ$_{١}$ = ٠ ، ومنه ف = $\frac{(ن + ٣)^{٣}}{٣}$

ف(٣) = $\frac{(٣ + ٣)^{٣}}{٣}$ ← ف(٣) = ٧٢ م

أي المسافة التي قطعها الجُسيم بعد (٣) ثوانٍ من حركته تساوي ٧٢ م.

تدريب ٣

يسير جُسيم على خط مستقيم وفق العلاقة ت = $\sqrt{ع}$، حيث ع > ٠ ، ت: تسارع الـجُسيم، ع: سرعة الـجُسيم. فإذا كانت سرعة الـجُسيم عند بدء حركته ٩ م/ث، وقطع مسافة (٨٠) مترًا في (٤) ثوانٍ. فجد المسافة التي قطعها الـجُسيم بعد ثانيتين من بدء حركته.

تدريب ٤

قُذفت كرة من قمة برج ارتفاعه (٤٥) مترًا عن سطح الأرض إلى أعلى بسرعة ابتدائية مقدارها (٤٠) م/ث وبتسارع مقداره (–١٠) م/ث^{٢}. جد الزمن الذي استغرقته الكرة لتعود إلى سطح الأرض.

١) حُلَّ كلاً من المعادلات التفاضلية الآتية:

أ) $س^{٣} \, ءص - ص \, ءس = ٠$

ب) $ءس - ٣ \, ءص = جتاس \, ءس$

جـ) $هـ^{-ص} \, جاس - \frac{ءص}{ءس} \, جتا^{٢}س = ٠$

د) $قا^{٢} \frac{س}{٢} \, ءص - جا^{٢} \frac{س}{٢} \, ءس = ٠$

هـ) $\frac{ءص}{ءس} = ١ - ص + س^{٢} - ص \, س^{٢}$

و) $(س^{٢} + ٣س) \frac{ءص}{ءس} = هـ^{-٢ص} (س+١)(س^{٢} - ٩)$

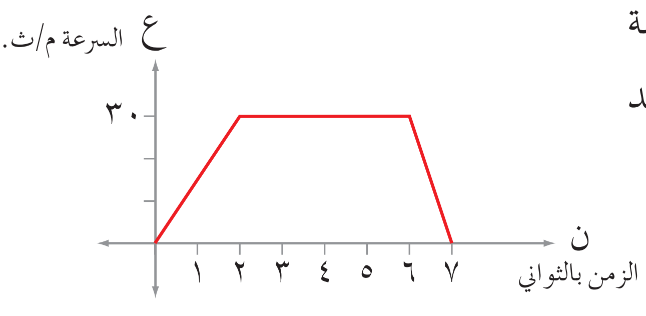
٢) آلة صناعية قيمتها عند الشراء (٢٥٠٠) دينار، إذا كانت قيمتها تتناقص بمرور الزمن وفق العلاقة $\frac{ء ق}{ء ن} = \frac{-٥٠٠}{(ن+١)^{٢}}$ حيث ق : قيمة الآلة بعد ن سنة من شرائها، فاحسب قيمة هذه الآلة بعد (٣) سنوات من شرائها.

٣) إذا كان ميل المماس لمنحنى العلاقة ص عند النقطة (س ،ص) يساوي $\frac{هـ^{س-ص}}{هـ^{س} + ١}$

حيث هـ: العدد النيبيري .

فجد قاعدة العلاقة ص علماً بأنَّ منحناها يمر بالنقطة (١، ٠)

٤) يمثل الشكل (٤-٣٣) العلاقة بين السرعة والزمن لجسم يتحرك على خط مستقيم فجد المسافة المقطوعة في الفترة الزمنية [٠ ، ٧]



الشكل (٤-٣٣)

٥) ابتدأ جُسيم الحركة من نقطة الأصل على محور السينات وفقا للعلاقة ت $= -٤$ ع$^{\frac{٣}{٢}}$، حيث ع $>$ ٠ ، ت: تسارع الجُسيم ، ع: سرعة الجُسيم فإذا كانت سرعته عند بدء الحركة ٤سم/ث. أثبت أن ف$=$ ٢ن $\sqrt{ع}$.

٦) قذف جسم رأسيًا لأعلى بسرعة ابتدائية مقدارها (٤٠)م/ث وبتسارع مقداره (-١٠) م/ث^{٢}، إذا كان ارتفاعه عن سطح الأرض بعد ثانية واحدة من بدء حركته يساوي (٨٠)مترًا، فجد أقصى ارتفاع وصل إليه الجسم.

٧) يزداد عدد سكان مدينة حسب العلاقة $\frac{ءع}{ءن} = ٠,٠٢٥$ ع ، حيث ع: عدد السكّان، ن: الزمن بالسنوات، إذا علمت أنَّ عدد سكان المدينة بلغ (٢٠٠٠٠٠) نسمة عام (٢٠١٥)، فجد عدد سكّانها بعد (٤٠) عامًا.

١) جد كلًّا من التكاملات الآتية:

أ) $\int_{2}^{3} \sqrt{4س + 1}\ ءس$

ب) $\int \frac{س\ قا^2 س - س\ ظا^2 س}{\sqrt[3]{س}}\ ءس$

جـ) $\int \frac{\sqrt{س^2 - س^4}}{س^5}\ ءس$

د) $\int ظتاس\ لـو_{هـ} جاس\ ءس$

هـ) $\int (س^8 - 4س)^6\ ءس$

و) $\int قا^4 س\ لـو_{هـ} ظاس\ ءس$

ز) $\int \sqrt[3]{2س^5 - س^3}\ ءس$

ح) $\int_{0}^{1} \frac{هـ^{س}}{هـ^{2س} + 2هـ^{س} + 1}\ ءس$

ط) $\int جا(لـو_{هـ} س)\ ءس$

ي) $\int \frac{س^3}{2س^4 + س^8}\ ءس$

ك) $\int \frac{\sqrt{4س + 12} - 3}{\sqrt{س + 3} + 3}\ ءس$

ل) $\int لـو_{هـ}(س^2 + 2س)\ ءس$

٢) حُلَّ المعادلة التفاضلية $3ظاص - \frac{ءص}{ءس} قاس = 0$.

٣) إذا كان $ص^2 = لـو_{هـ} س\ ص - هـ^{س^2}$ ، فجد $\frac{ءص}{ءس}$

٤) إذا كان م(س) = س^3 + ب س^2 − ١ معكوسًا لمشتقة الاقتران ق(س) ، ق(٢) = ٢٤ ، فجد قيمة الثابت ب.

٥) إذا كان م(س) ،هـ(س) معكوسين لمشتقة الاقتران ق(س) ،

وكان $\int_{-1}^{3} (م(س) - هـ(س))\ ءس = 12$ ، فجد $\int_{0}^{4} 2س\ م(س)\ ءس + \int_{4}^{0} 2س\ هـ(س)ءس$

٦) إذا كان $\int_{2}^{1} (2ق(س)) + \int_{0}^{2} (2م\ ءم)\ ءس = 14$ ، فجد $\int_{1}^{3} 3ق(س)\ ءس$

٧) إذا كان ق(س) = $س^2 - \int (3س^2 - \int_{0}^{1} 2ص\ ءص)\ ءس$، فجد قَ(س)

٨) إذا كان $\int_{-١}^{١} (٤ق(س) + ٣)\, ءس = ١٨$ ، $\int_{١}^{٤} ٢ق(س)\, ءس = ٢٠$ ، فجد

$$\int_{٤}^{-١} (٢س - ق(س))\, ءس$$

٩) يسير جسيم على خط مستقيم حسب العلاقة $ت = أ\sqrt[٣]{ع}$ ، $ع > ٠$ ، حيث ت :تسارع الجسيم ، ع:سرعة الجسيم. إذا تحرك الجسيم من السكون، فجد قيمة الثابت أ التي تجعل سرعته ٨سم/ث بعد (٣) ثوانٍ من بدء حركته.

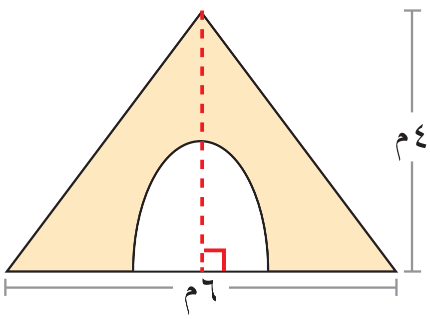
١٠) إذا كان ميل المماس لمنحنى العلاقة ص عند النقطة (س ، ص) يساوي $\frac{\sqrt{هـ^{ص}}}{١ - جتا^{٢}س}$ فجد قاعدة العلاقة ص علمًا بأنَّ منحناها يمر بالنقطة $(\frac{\pi}{٤} ، ٠)$

١١) جد مساحة المنطقة المحصورة في الربع الأول و المحدودة بمنحنى الاقتران ق (س)= ٤ − $س^{٢}$ ، ومحور الصادات و المستقيمين ص= س − ٢ ، ص = ٦ − س

١٢) جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيات الاقترانات الآتية:

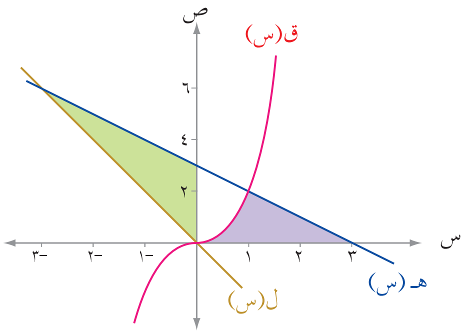
$ق(س) = \frac{٣}{س}$ ، هـ (س) = س − ٢ ، ل (س) = ٣

١٣) الشكل(٤−٣٤) يمثل الواجهة الأمامية لأحد المباني، مدخل هذا المبنى على شكل منحنى الاقتران $ق(س) = ٢ - \frac{١}{٢}س^{٢}$. ما التكلفة الكلية لدهان المنطقة المظللة؟ إذا علمت أنَّ سعر دهان الوحدة المربعة نصف دينار.



الشكل (٤−٣٤)

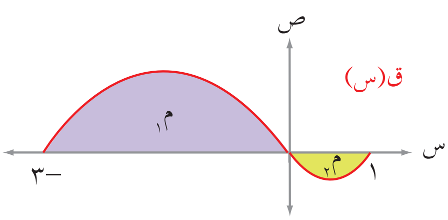
١٤) جد مجموع مساحتي المنطقتين المظللتين المبيّنتين في الشكل (٤ – ٣٥) حيث ق(س) = ٢س^{٣} ،
هـ(س) = ٣ – س ، ل(س) = – ٢س



الشكل (٤–٣٥)

١٥) اعتمادًا على الشكل (٤–٣٦) الذي يمثل منحنى الاقتران ق في الفترة [–٣ ، ١] حيث م$_{١}$ =(١٠) وحدات مربعة، م$_{٢}$ = (٤) وحدات مربعة، فجد

$$\int_{٠}^{٢} \text{س ق}(١-\text{س}^{٢})\ \text{ءس}$$



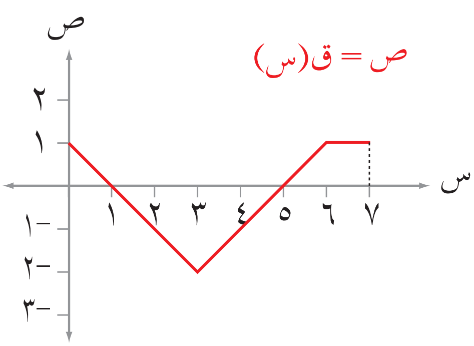
الشكل (٤–٣٦)

١٦) اعتمد على الشكل (٤ –٣٧) الذي يمثل منحنى الاقتران ق(س) في إيجاد كلٍّ ممّا يأتي:

أ) $\int_{٠}^{٧} \text{ق(س) ءس}$

ب) $\int_{٠}^{٧} |\text{ق(س)}|\ \text{ءس}$

جـ) $\left|\int_{٠}^{٧} \text{ق(س) ءس}\right|$



الشكل (٤–٣٧)

١٧) جد كلًّا من التكاملات الآتية:

أ) $\int \text{جا}\sqrt{\text{س}}\ \text{جتا}^{٣}\sqrt{\text{س}}\ \ \text{ءس}$

ب) $\int \text{س}^{٣}\sqrt{\text{س}^{٢}+١}\ \text{ءس}$

جـ) $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٦}} \dfrac{\text{قا}^{٤}\text{س}}{\text{ظا}^{٢}\text{س} - ٣\text{ظاس} + ٢}\ \text{ءس}$

د) $\int \dfrac{\text{ظاس قتاس}}{٩ - ٤\text{قتا}^{٢}\text{س}}\ \text{ءس}$

هـ) $\int_{٠}^{٢} \text{س}^{٤}\text{هـ}^{\text{س}^{٣}+\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}}\ \text{ءس}$

و) $\int \text{جا٣س قتاس ءس}$

ز) $\int \frac{٢جا٣س جتاس}{جتا٢س}$ ءس   ح) $\int \frac{س + جاس}{١ + جتاس}$ ءس

ط) $\int \frac{٤لوـ_{هـ}س}{(س-١)^{٢}}$ ءس   ي) $\int$ (ظاس+ قاس)^{١٠} قاس ءس

١٨) يتكون هذا السؤال من (١١) فقرة من نوع الاختيار من متعدد، لكل فقرة (٤) بدائل، واحد فقط منها صحيح، ضع دائرة حول رمز البديل الصحيح:

(١) إذا كان ق اقتراناً متصلاً على مجاله ، وكان $\int$ ق(س)ءس= هـ^{جا٢س} – لوـ$_{هـ}$ جتاس–١، فإن ق(٠) تساوي:

أ) ١   ب) هـ   جـ) ٢هـ   د) ٢

(٢) إذا كان $\int$ق(س) ءس = س^{٥} + جاس + ٣ ، فإنَّ ق(س) يساوي:

أ) ٥س^{٤} + جتاس   ب) $\frac{١}{٦}$س^{٦} – جتاس + ٣س +جـ

جـ) ٥س^{٤}– جتاس   جـ) $\frac{١}{٦}$س^{٦} – جتاس

(٣) إذا كان ق اقترانًا معرفًا على الفترة[–١ ، ٢] وكان ١ ≤ ق(س) ≤ ٤ فما أكبر قيمة للمقدار $\int_{-١}^{٢}$ ٢ق(س) ءس؟

أ) ٦   ب) ٢٤   جـ) ٣   د) ١٢

(٤) إذا كان $\int_{-٢}^{٣}$ ٢ق(س) ءس = ١٠، $\int_{-٢}^{١}$ ق(س) ءس = ٤، فإنَّ $\int_{١}^{٣}$ (٢ق(س)+ ٣) ءس يساوي:

أ) ٥   ب) ١٤   جـ) ٨   د) ٢٤

(٥) $\int_{أ}^{ب}$ قَ (هـ (س)) × هـَ (س) ءس يساوي:

أ) ق(ب) – ق(أ)   جـ) ق(هـ (ب)) – ق(هـ (أ))

ب) قَ (ب) – قَ (أ)   د) قَ (هـ (ب)) – قَ (هـ (أ))

(٦) إذا كان م(س) ، هـ(س) معكوسين لمشتقة الاقتران المتصل ق وكان

$\int_{-١}^{٢}$ (م(س) − هـ(س)) ءس = ١٢ ، فما قيمة $\int_{-١}^{٢}$ ٢س(م(س) − هـ(س)) ءس؟

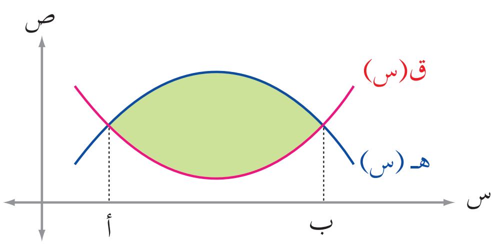
أ) ٣ ب) ٤,٥ جـ) ١٢ د) ١٨

(٧) إذا كان $\int_{١}^{هـ}$ س ق(س) ءس = ٤ ، فما قيمة $\int_{٠}^{٢}$ هـ^س ق($\sqrt{هـ^{س}}$) ءس؟

أ) ١ ب) ٨ جـ) ٢ د) ٤

(٨) إذا كان ق(س) = هـ^٢ + لوهـ جاس فإنَّ قَ(س) تساوي:

أ) ظتاس ب) − ظتاس جـ) ٢هـ + ظتاس د) هـ^٢ + ظتاس

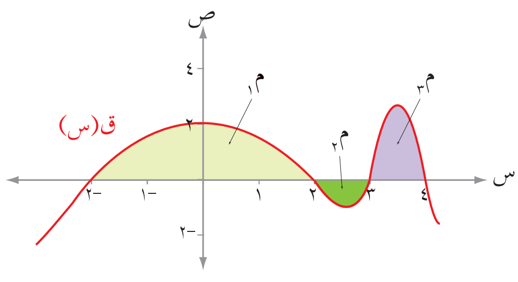


الشكل (٤–٣٨)

(٩) معتمدًا الشكل (٤–٣٨)، إذا علمت أنَّ مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين ق ، هـ تساوي (٦) وحدات مربعة وكان

$\int_{أ}^{ب}$ ق(س) ءس = ١٠ ، فإنَّ قيمة $\int_{أ}^{ب}$ هـ (س) ءس =

أ) ١٠ ب) ٦ جـ) ١٦ د) − ٤



الشكل (٤–٣٩)

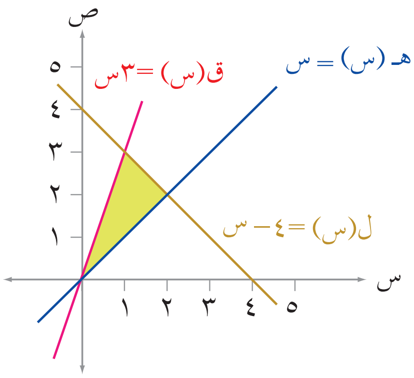
*(١٠) معتمدًا الشكل (٤–٣٩) الذي يبين المساحة بين منحنى ق(س) ومحور السينات، إذا علمت أن م$_١$=٤,٨ وحدة مربعة، م$_٢$=٠,٨ وحدة مربعة،

م$_٣$=٢ وحدة مربعة، فإنَّ $\int_{-٢}^{٤}$ ق(س) ءس تساوي:

أ) ٥,٦ ب) ٦ جـ) ٦,٨ د) ٧,٦

(*) السؤال من أسئلة الاختبارات الدولية.

(١١) معتمدًا الشكل (٤ – ٤٠) ما مساحة المنطقة المظللة؟



الشكل (٤–٤٠)

أ) $\int_{٠}^{١}$ (٣س – س) ءس

ب) $\int_{٠}^{١}$ ٢س ءس + $\int_{١}^{٢}$ (٤ – ٢س) ءس

جـ) $\int_{٠}^{١}$ ٢س ءس + $\int_{١}^{٢}$ (٤ – س) ءس

د) $\int_{١}^{٢}$ (٣س – س) ءس

الوحدة الخامسة

٥

القطوع المخروطية وتطبيقاتها

Conic Sections and its Applications

تبرز أهمية القطوع المخروطية ودراستها من خلال تطبيقاتها المتعددة في العلوم المختلفة.
فحركة الكواكب والنجوم وحركة إلكترونات الذرة في مساراتها حول النواة، تكون في مسارات إهليليجية.

ويتم استخدام القطوع المخروطية في المرايا والعدسات وبناء المراصد الفلكية والجسور المعلقة، والأطباق اللاقطة للإشارات اللاسلكية ، والأقمار الصناعية، وفي المقذوفات، وبناء الروبوتات، والمحاكاة، والصور المتحركة، ومعظم الصناعات الحديثة.

يتوقع من الطالب بعد نهاية هذه الوحدة أن يكون قادرًا على:

- كتابة معادلة محل هندسيّ تمثل:
  (مستقيم، ودائرة، وقطع مكافئ، وقطع ناقص، وقطع زائد).
- تعرُّفِ الصيغة القياسية لمعادلة (دائرة، وقطع مكافئ، وقطع ناقص، وقطع زائد).
- تمييز نوع القطع المخروطي إذا علمت معادلته.
- تمثيل القطع المخروطي بيانيًا إذا عُلمت معادلته.
- نمذجة مسائل حياتية على القطوع المخروطية وحلّها، مع تبرير الحل.

الفصل الأول

القطوع المخروطية

Conic Sections

النتاجات

- تتعرف القطع المخروطي.
- تتعرف المحل الهندسي.
- تجد معادلة محل هندسي.

أولًا القطع المخروطي Conic Section

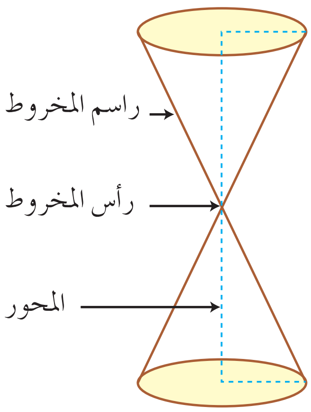
الشكل (٥–١) يبين مخروطًا دائريًا قائمًا مزدوجًا، حدد الشكل الناتج إذا قطع مستوى المخروط في كل من الحالات الآتية:

١) بشكل أفقي (عمودي على المحور ولا يحتوي الرأس).

٢) بشكل مائل قليلًا عن المحور بحيث يقطع أحد المخروطين دون الآخر.

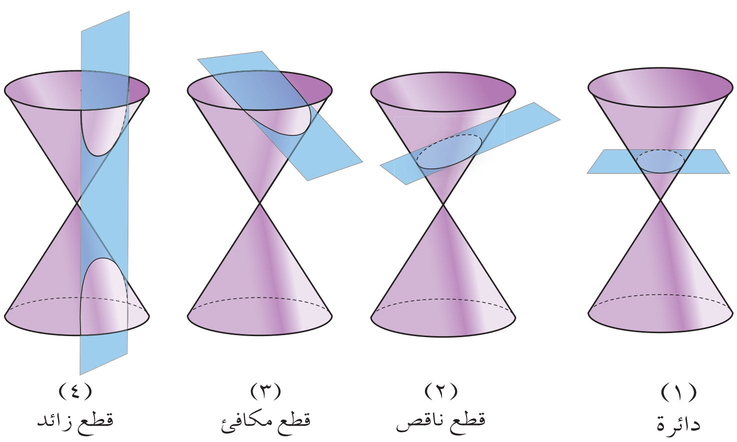
٣) بشكل مائل موازٍ لراسم المخروط بحيث يقطع أحدهما دون الآخر.

٤) فرعي المخروط ولا يمر بالرأس.



الشكل (٥–١)

انظر الأشكال الناتجة عن كل حالة:



الشكل (٥–٢)

١) إذا كان المستوى القاطع عموديًّا على المحور ولا يمر بالرأس، فإنَّ الشكل الناتج **دائرة** (Circle).

٢) إذا كان المستوى القاطع مائلًا قليلًا على المحور، ويقطع أحد المخروطين دون الآخر ، فإنَّ الشكل الناتج يُسمّى **قطعًا ناقصًا** (Ellipse).

٣) إذا زاد ميل المستوى القاطع ليصبح موازيًا لراسم المخروط ويقطع أحد المخروطين دون الآخر، فإنَّ الشكل الناتج يُسمّى **قطعًا مكافئًا** (Parabola).

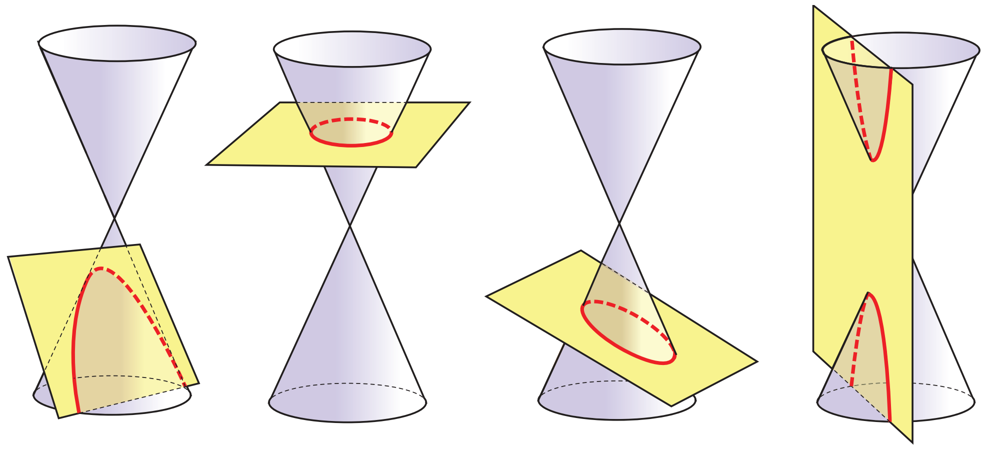
٤) إذا قطع المستوى فرعَيْ المخروط، وكان القطع لا يحتوي على نقطة الرأس، فإنَّ الشكل الناتج يُسمّى **قطعًا زائدًا** (Hyperbola).

تسمى الأشكال السابقة الناتجة **قطوع مخروطية**، وسندرس في هذه الوحدة كلًّا منها بالتفصيل.

فكر وناقش

ماذا ينتج عن تقاطع مستوى مع مخروط دائري قائم مزدوج بشكل عمودي على المحور، ومحتويًا رأس المخروط؟

١) اعتمادًا على الشكل (٥–٣)؛ اكتب اسم القطع المخروطي الناتج في كل حالة:



الشكل (٥–٣)

٢) اكتب اسم الشكل الناتج عن قطع مستوى لمخروط قائم مزدوج في كلٍّ من الحالات الآتية:

أ) إذا قطع المستوى فَرْعَي المخروط حيث لا يحتوي القطع على رأس المخروط.
(   )

ب) إذا قطع المستوى المخروط بشكل عمودي على المحور، ولا يحوي رأس المخروط.
(   )

جـ) إذا قطع المستوى المخروط بشكل مائل موازٍ لراسم المخروط بحيث يقطع أحدهما دون الآخر. (   )

د) إذا قطع المستوى المخروط بشكل مائل قليلًا عن المحور، بحيث يقطع أحد المخروطين دون الآخر. (   )

ثانيًا المحل الهندسي Locus

الشكل (٥–٤) يوضح خطوات أحمد الذي يسير بحيث يبعد بعدًا ثابتًا عن حافة الرصيف.

ما الشكل الهندسي الناتج عن مسار خطواته؟

الشكل (٥–٤)

لاحظ أنَّ حافة الرصيف تُمثّل في المستوى على شكل مستقيم، وبما أن بُعد أحمد عن الرصيف مقدار ثابت، فإنَّ مسار خطواته يشكل مستقيمًا موازيًا لحافة الرصيف. لماذا؟

ويُسمى المستقيم في هذه الحالة **محلًا هندسيًا**.

تعريف

المحل الهندسي

هو المنحنى الناتج عن حركة نقطة في المستوى الإحداثي تحت شروط معينة.

أما العلاقة الجبرية التي تربط بين الإحداثيين السيني والصادي للنقطة المتحركة فتسمى **معادلة المحل الهندسي**.

مثال ١

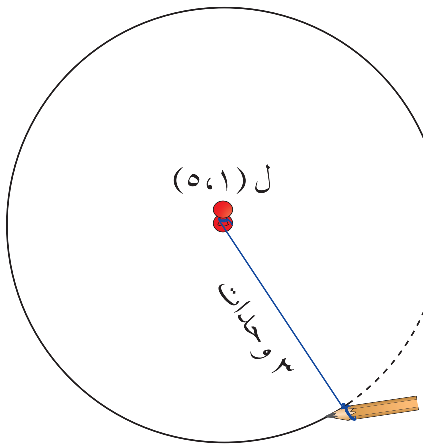
جد معادلة المحل الهندسي للنقطة المتحركة في المستوى ن(س ، ص) التي تبعد بعدًا ثابتًا مقداره (٣) وحدات، عن النقطة الثابتة ل (١، ٥).

الحل

لمعرفة شكل المحل الهندسي الناتج عن حركة النقطة (ن) في المستوى؛ أحضر خيطًا، اربط بطرفه قلمًا صغيرًا، وثبّت الطرف الآخر من الخيط في نقطة ثابتة في المستوى، ثم حرّك القلم بصورة مستمرة باتجاه واحد دون رفعه عن المستوى، مع بقاء الخيط مشدودًا، حتى يعود رأس القلم إلى نقطة البداية، ما الشكل الناتج؟

لا بد أنَّك لاحظت أنَّ رأس القلم يمثل النقطة المتحركة ن(س، ص) في المستوى الإحداثي، وأنَّ طول الخيط يمثل البعد الثابت، والنقطة الثابتة تمثل النقطة (ل).

وأنَّ المحل الهندسي الناتج هو دائرة، كما يوضح الشكل (٥–٥) مركزها النقطة الثابتة ل (١،٥) وطول نصف قطرها البعد الثابت ٣ وحدات.



الشكل (٥–٥)

ولإيجاد معادلة المحل الهندسي الناتج؛ استخدم قانون البُعد بين النقطتين ن(س ، ص)، ل(١ ، ٥) كما يأتي:

$$ن\,ل = \sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢}$$

$$٣ = \sqrt{(س - ١)^٢ + (ص - ٥)^٢}$$

ومنه $(٣)^٢ = (س - ١)^٢ + (ص - ٥)^٢$

إذن معادلة المحل الهندسي المطلوب هي: $(س - ١)^٢ + (ص - ٥)^٢ = ٩$

تدريب ١

جد معادلة المحل الهندسي للنقطة المتحركة في المستوى ب (س ، ص) التي تبعد بُعدًا ثابتًا مقداره وحدة واحدة، عن النقطة الثابتة ك (٢ ، –٤).

مثال ٢

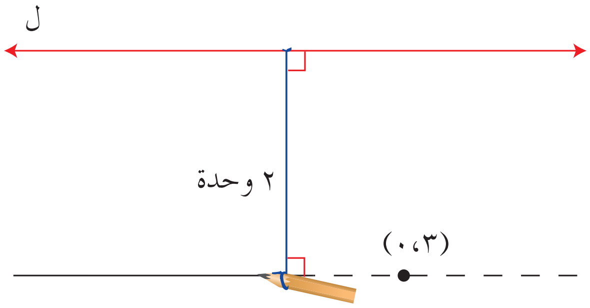
جد معادلة المحل الهندسي للنقطة هـ (س ، ص) التي تتحرك في المستوى، بحيث تبعد بُعدًا ثابتًا مقداره (وحدتان) عن المستقيم ل: ٤ ص – ١ = ٣س ، وتمر أثناء حركتها بالنقطة (٣ ، ٠).

الحل

لمعرفة شكل المحل الهندسي الناتج عن حركة النقطة (هـ) في المستوى؛ ارسم خطًّا ثابتًا على المستوى البياني باستخدام المسطرة، ثم أحضر الخيط الذي استخدمته في مثال (١)، وثبِّت الطرف الحر منه على المستقيم المرسوم، وحرِّك القلم مع الطرف الآخر من الخيط بصورة مستمرة باتجاه واحد ومن جانب واحد أيضًا ودون رفعه عن المستوى، مع بقاء الخيط مشدودًا بشرط أن يبقى الخيط عموديًّا

على المستقيم المرسوم، ما الشكل الناتج؟

لا بد أنَّك لاحظت أنَّ الشكل الناتج عن حركة القلم في المستوى هو مستقيم يوازي المستقيم ل، وأنَّه يبعد عنه بُعدًا ثابتًا مقداره طول الخيط المشدود. انظر الشكل (٥-٦).



الشكل (٥-٦)

ولإيجاد معادلة المحل الهندسي الناتج؛ اكتب معادلة المستقيم ل على الصورة العامة، ثم استخدم قانون البعد بين النقطة هـ (س، ص) والمستقيم ل: ٣س − ٤ص + ١ = ٠ ، حيث إنَّ:

$$\text{البُعد} = \left| \frac{\text{أس}_1 + \text{ب ص}_1 + \text{جـ}}{\sqrt{\text{أ}^2 + \text{ب}^2}} \right|$$

$$٢ = \left| \frac{٣\text{س} - ٤\text{ص} + ١}{\sqrt{(٣)^2 + (-٤)^2}} \right|$$

$$٢ = \left| \frac{٣\text{س} - ٤\text{ص} + ١}{٥} \right| \qquad \text{إذن} \quad \left| ٣\text{س} - ٤\text{ص} + ١ \right| = ١٠$$

وبحل المعادلة تجد أنَّ:

٣س − ٤ص + ١ = ١٠ ، ومنه ٣س − ٤ص −٩ = ٠

أو ٣س − ٤ص + ١ = −١٠ ، ومنه ٣س − ٤ص +١١ = ٠

وبما أنَّ النقطة هـ تمر أثناء حركتها بالنقطة (٣ ، ٠)، إذن معادلة المحل الهندسي هي:

٣س − ٤ص −٩ = ٠

فكر وناقش

لماذا يُشترط أن يبقى الخيط عموديًّا على المستقيم الثابت في مثال (٢)؟

تدريب ٢

جد معادلة المحل الهندسي للنقطة المتحركة في المستوى جـ (س ، ص)، بحيث تبعد بُعدًا ثابتًا مقداره ($\sqrt{٥}$) وحدة طول عن المستقيم م: ص = −٢س ، وتمر أثناء حركتها بالنقطة (−١ ، −٣).

مثال ٣

جد معادلة المحل الهندسي للنقطة ن(س ، ص) المتحركة في المستوى، التي يكون بُعدها عن النقطة ب (−٣ ، ٠) مساويًا دائمًا لبعدها عن المستقيم م: س= ٣ .

الحل

بما أن بُعد النقطة ن عن النقطة ب يساوي بُعدها عن المستقيم م، فإنَّ طول $\overline{\text{ن ب}}$ يساوي بُعد النقطة ن عند المستقيم م، أي أنَّ $\sqrt{(\text{س} + ٣)^٢ + (\text{ص} - ٠)^٢} = \left| \frac{\text{س} - ٣}{\sqrt{١ + ٠}} \right|$

و بتربيع الطرفين، ينتج أنَّ:

$(\text{س} + ٣)^٢ + (\text{ص} - ٠)^٢ = (|\text{س} - ٣|)^٢$

$(\text{س} + ٣)^٢ + (\text{ص} - ٠)^٢ = (\text{س} - ٣)^٢$

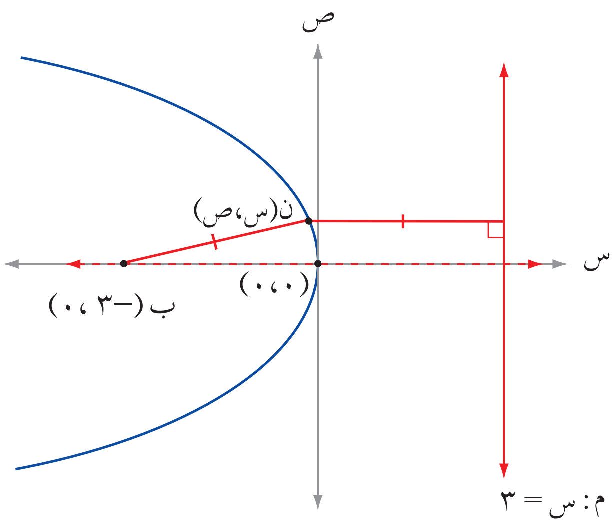
$\text{س}^٢ + ٦\text{س} + ٩ + \text{ص}^٢ = \text{س}^٢ - ٦\text{س} + ٩$

ومنه $\text{ص}^٢ = -١٢\text{س}$

إذن معادلة المحل الهندسي الناتج هي:

$\text{ص}^٢ = -١٢\text{س}$

انظر الشكل (٥−٧).



الشكل (٥−٧)

فكر وناقش

كيف يمكن أن تتحقق من شكل المحل الهندسي الناتج عن حركة النقطة أ في المستوى في مثال(٣) باستخدام الخيط وقلم الرصاص؟

تدريب ٣

جد معادلة المحل الهندسي للنقطة جـ(س ، ص) المتحركة في المستوى، التي يكون بعدها عن محور الصادات مساويًا ثلاثـة أمثال بُعدها عن النقطة د(٢ ، −١).

١) جد معادلة المحل الهندسي للنقطة المتحركة في المستوى ب (س،ص) التي تبعد بُعدًا ثابتًا مقداره (٧) وحدات، عن النقطة الثابتة ك(–٢ ، ٦).

٢) جد معادلة المحل الهندسي للنقطة ع (س،ص) التي تتحرك في المستوى، بحيث تبعد بُعدًا ثابتًا مقداره (٤) وحدات عن المستقيم الذي معادلته س= ١، وتمر أثناء حركتها بالنقطة (–٣ ، ٢)

٣) جد معادلة المحل الهندسي للنقطة د(س ، ص) المتحركة في المستوى، التي يكون بُعدها عن النقطة هـ (٥ ،٣) مساويًا دائمًا لمثلَيْ بُعدها عن المستقيم الذي معادلته ص=٤ .

الفصل الثاني

معادلات القطوع المخروطية
Equationes of Conic Sections

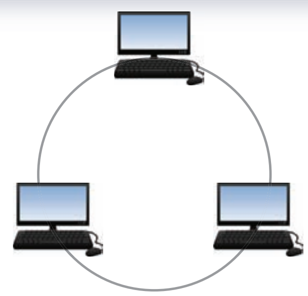
النتاجات

- تتعرف القطوع المخروطية (الدائرة، القطع المكافئ، القطع الناقص، القطع الزائد).
- تكتب معادلة قطع مخروطي إذا عُلِمَت شروط كافية.
- تميز نوع قطع مخروطي وتحدد عناصره إذا عُلِمَت معادلته.
- تمثل قطعًا مخروطيًّا بيانيًّا.

أولًا الدائرة The Circle

أراد أحد المهندسين توصيل ثلاثة أجهزة حاسوب مع جهاز مركزي؛ بحيث يعد الجهاز المركزي بُعدًا متساويًا عن الأجهزة الثلاثة.

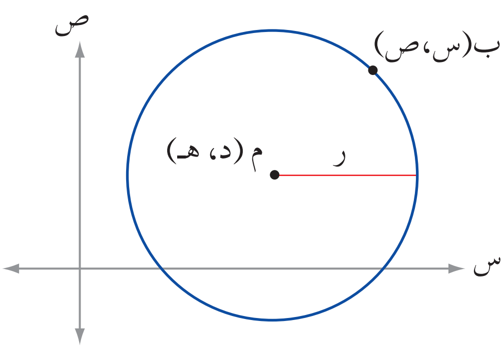
كيف يحدد المهندس موقع الجهاز المركزي؟



تعلمت سابقًا أنَّ **الدائرة** قطع مخروطي، وشكلها نتج عن المسار الذي ترسمه نقطة تتحرك في المستوى بحيث تبعد بُعدًا ثابتًا عن نقطة ثابتة، حيث يمثل البُعد الثابت طول نصف القطر والنقطة الثابتة مركز الدائرة.

ولإيجاد معادلة الدائرة التي مركزها النقطة م (د ، هـ) وطول نصف قطرها (ر)؛ افرض النقطة ب (س ، ص) نقطة على الدائرة، كما يوضح الشكل (٥-٨). وباستخدام قانون البُعد بين النقطتين ب، م تجد أنَّ معادلة الدائرة هي:

(س − د)^{٢} + (ص − هـ)^{٢} = ر^{٢} (وضح ذلك)



الشكل (٥-٨)

الصورة القياسية لمعادلة الدائرة التي مركزها النقطة (د ، هـ) ، وطول نصف قطرها (ر) وحدة هي: $(س - د)^٢ + (ص - هـ)^٢ = ر^٢$

مثال ١

جد معادلة الدائرة التي مركزها النقطة (−٦ ، ١) وطول نصف قطرها (٤) وحدات.

الحل

$(س - د)^٢ + (ص - هـ)^٢ = ر^٢$

$(س + ٦)^٢ + (ص - ١)^٢ = ١٦$

مثال ٢

جد معادلة الدائرة التي مركزها النقطة (٥ ، ٣) وتمر بالنقطة (١ ، ٠).

الحل

إحداثيا مركز الدائرة (د ، هـ) هو (٥ ، ٣)

وطول نصف قطر الدائرة: هو البعد بين المركز والنقطة التي تمر بها الدائرة

إذن: $ر^٢ = (س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢$

$= (٥ - ١)^٢ + (٣ - ٠)^٢$

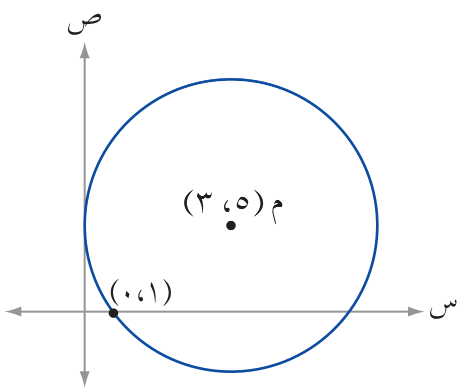
$= ١٦ + ٩ = ٢٥$

ومنه ر = ٥ وحدات

ومنه معادلة الدائرة هي:

$ر^٢ = (س - د)^٢ + (ص - هـ)^٢$

$٢٥ = (س - ٥)^٢ + (ص - ٣)^٢$ انظر الشكل (٥–٩).



الشكل (٥–٩)

تدريب ١

١) جد معادلة الدائرة التي نهايتا قطر فيها النقطتان (٧ ، ٣)، (٥ ، −١).

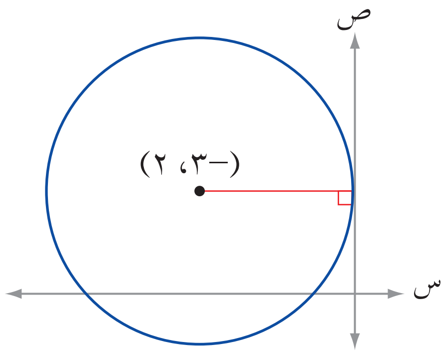
٢) جد إحداثيَّيْ مركز، وطول نصف قطر الدائرة التي معادلتها:

$(س + ١)^٢ + (ص - ٤)^٢ = ٣٠$

مثال ٣

جد معادلة الدائرة التي مركزها النقطة (−٣ ، ٢) وتمس محور الصادات.

الحل



الشكل (٥−١٠)

بما أنَّ الدائرة تمس محور الصادات ومركزها النقطة (−٣، ٢)،

فإنَّ ر = ٣ وحدات. (لماذا؟) انظر الشكل (٥−١٠).

إذن معادلة الدائرة هي:

(س + ٣)^{٢} + (ص − ٢)^{٢} = ٩

تدريب ٢

جد معادلة الدائرة التي مركزها النقطة (٤ ، −١) وتمس محور السينات.

ماذا تلاحظ من خلال حل كلٍّ من مثال (٢) وتدريب (٢)؟

تدريب ٣

جد معادلة الدائرة في كلٍّ من الحالات الآتية:

١) مركزها النقطة (٤ ، −١) وتمس المستقيم الذي معادلته ص = −٢

٢) تمس المحورين الإحداثيين وطول نصف قطرها يساوي (٣) وحدات (ادرس جميع الحالات الممكنة).

الصورة العامة لمعادلة الدائرة:

لاحظ أنَّه يمكن كتابة معادلة الدائرة بصورة أخرى عن طريق فك الأقواس، وبما أنَّ

(س − د)^{٢} + (ص − هـ)^{٢} = ر^{٢}

فإن س^{٢} + ص^{٢} − ٢ د س − ٢ هـ ص + د^{٢} + هـ^{٢} − ر^{٢} = صفرًا

وبفرض أن (−٢ د) = أ ، (−٢ هـ) = ب ، (د^{٢} + هـ^{٢} − ر^{٢}) = جـ

فتكون معادلة الدائرة هي:

س^{٢} + ص^{٢} + أ س + ب ص + جـ = صفرًا . وتسمى هذه الصيغة **الصورة العامة لمعادلة الدائرة.**

الصورة العامة لمعادلة الدائرة

$س^{٢} + ص^{٢} + أ س + ب ص + جـ = ٠$ ، حيث إنَّ أ ، ب، جـ أعداد حقيقية، وإنَّ $أ^{٢} + ب^{٢} - ٤ جـ > ٠$ لاحظ أنَّ:

١) معامل $س^{٢}$ = معامل $ص^{٢} = ١$

٢) مركز الدائرة (د ، هـ)

هو (− نصف معامل س ، − نصف معامل ص) = $\left(\frac{-أ}{٢} ، \frac{-ب}{٢} \right)$

٣) طول نصف القطر $ر = \sqrt{د^{٢} + هـ^{٢} - جـ}$ ، حيث $د^{٢} + هـ^{٢} - جـ > ٠$

مثال ٤

جد مركز وطول نصف قطر الدائرة التي معادلتها:

$٢س^{٢} + ٢ص^{٢} + ١٦ ص = ١٨$

الحل

اكتب المعادلة على الصورة العامة:

$س^{٢} + ص^{٢} + ٨ ص - ٩ = ٠$ لماذا؟

المركز (د ، هـ) = (− نصف معامل س، − نصف معامل ص)= (٠ ، −٤)

طول نصف قطر الدائرة $ر = \sqrt{(٠)^{٢} + (-٤)^{٢} - (-٩)}$

$= \sqrt{١٦ + ٩} = ٥$ وحدة طول.

فكر وناقش

١) حُلَّ مثال (٤) بطريقة أخرى (استخدم الصورة القياسية).

٢) رجوعًا إلى الصورة العامة لمعادلة الدائرة، لماذا كان الشرط ($أ^{٢} + ب^{٢} - ٤ جـ > ٠$) ؟

تدريب ٤

جد مركز وطول نصف قطر الدائرة المعطاة معادلتها في كلٍّ مما يأتي:

١) $س^{٢} + ص^{٢} - ٢س + ٦ ص - ٦ = ٠$

٢) $(٣س + ٦)^{٢} + (٣ص - ١٢)^{٢} = ٣٦$

مثال ٥

جد معادلة الدائرة التي تمر بالنقط (٠ ، ٠) ، (٣ ، −١) ، (−٢ ، ٤).

الحل

بما أنَّ النقط تقع على الدائرة، فإنَّها تحقق معادلتها، ومنه:

$(٠)^٢ + (٠)^٢ + أ (٠) + ب (٠) + جـ = ٠$ تعويض النقطة (٠ ، ٠)

إذن جـ = ٠

$(٣)^٢ + (−١)^٢ + ٣ أ − ب = ٠$ تعويض النقطة (٣ ، −١)

٣ أ − ب = −١٠ .... (١)

$(−٢)^٢ + (٤)^٢ − ٢ أ + ٤ ب = ٠$ تعويض النقطة (−٢ ، ٤)

−٢ أ + ٤ ب = −٢٠ ...... (٢)

وبحل المعادلتين (١)، (٢) جبريًّا ينتج أنَّ:

أ = −٦ ، ب = −٨

ومنه تكون معادلة الدائرة: $س^٢ + ص^٢ − ٦ س − ٨ ص = ٠$

تدريب ٥

جد معادلة الدائرة التي تمر بالنقط (٠ ، ٠)، (٠ ، ٢)، (−١ ، ٣)، ثم جد مركزها وطول نصف قطرها.

مثال ٦

جد معادلة الدائرة التي تمر بالنقطتين (٢ ، ٣) ، (−١ ، ١) ويقع مركزها على المستقيم الذي معادلته س−٣ص−١١ =٠

الحل

بما أنَّ النقط (٢ ، ٣) ، (−١، ١) تقع على الدائرة، فإنَّها تحقق معادلتها، ومنه:

٢ أ $+ ٣$ ب $+$ جـ $= -١٣$ ..... (١)

$-$ أ $+$ ب $+$ جـ $= -٢$ ...... (٢)

وبما أنَّ مركز الدائرة (د ، هـ) يقع على المستقيم الذي معادلته س -٣ص $-١١ = ٠$

إذن د $- ٣$هـ $- ١١ = ٠$

ومنه $-$ أ $+ ٣$ب $= ٢٢$ ...... (٣) لماذا؟

وبحل نظام المعادلات الخطية الناتجة جبريًّا ينتج أنَّ:

أ $= -٧$ ، ب $= ٥$ ، جـ $= -١٤$

ومنه فإنَّ معادلة الدائرة هي: س^٢ + ص^٢ $- ٧$ س $+ ٥$ ص $- ١٤ = ٠$

تدريب ٦

جد معادلة الدائرة التي تمر بالنقطتين (-١ ، ٣) ، (٥ ، ١) ويقع مركزها على محور الصادات.

١) جد معادلة الدائرة في كلٍّ حالة من الحالات الآتية:

أ) مركزها نقطة الأصل وطول قطرها ٨ وحدات.

ب) مركزها النقطة (–٢ ، ١) وتمر بالنقطة (٥ ، ١).

جـ) مركزها النقطة (٣ ، –٧) وتمس محور السينات.

د) نهايتا قطر فيها هما النقطتان (٦ ، –١) ، (٤ ، ٣).

هـ) طول نصف قطرها يساوي (٥) وحدات، وتمس المحورين الإحداثيين، ويقع مركزها في الربع الرابع.

و) تمر بالنقطتين (٤ ، ٤) ، (٠ ، –٢) ويقع مركزها على محور السينات.

ز) تمر بالنقط (–٥ ، ٠) ، (–٣ ، ٤) ، (١ ، ٢).

ح) تمر بالنقطة (١ ، ٢) وتمس محور السينات عند النقطة (٧ ، ٠).

٢) جد إحداثيي المركز، وطول نصف قطر الدائرة المعطاة معادلتها في كل مما يأتي:

أ) س^{٢} + ص^{٢} = ١٤٤

ب) (س + ١١)^{٢} = ١٣ – (ص+٤)^{٢}

جـ) س^{٢} + (ص – ٧)^{٢} = ٨١

د) س^{٢} + ص^{٢} – ٩ = ٨س + ٦ص

هـ) ٣س^{٢} + ٣ص^{٢} + ٦ص – ٢٧ = ٠

و) (٢س – ٢)^{٢} + (٢ص + ١٠)^{٢} = ١٠٠

ز) (س + ٤)^{٢} + ص^{٢} – ١٦ = ٠

٣) جد معادلة الدائرة التي يقع مركزها على المستقيم الذي معادلته ص–٢س=٤ وتمس محور السينات عند النقطة (١ ، ٠).

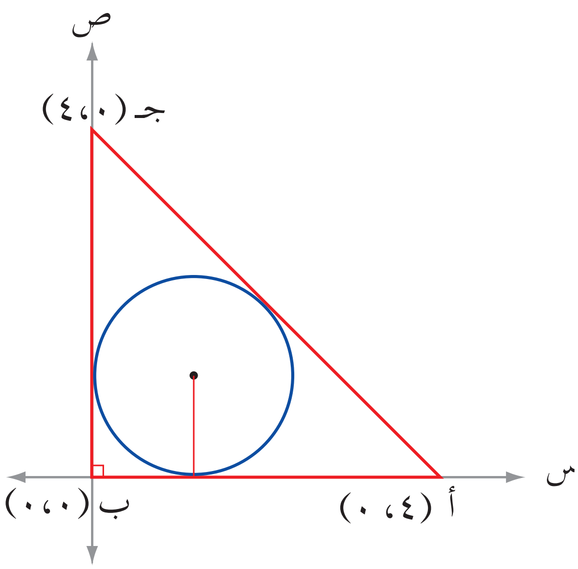
٤) جد معادلة الدائرة التي مركزها النقطة (–٢ ، –٢) وتمس المستقيم الذي معادلته ص=٣س+١٠

٥) تتحرك النقطة ل(س ، ص) في المستوى بحيث يتحدد موقعها بالمعادلتين س=٣+٢جاهـ ، ص=٤+٢جتاهـ حيث هـ زاوية متغيرة. جد معادلة المحل الهندسي للنقطة ل، وبيِّن نوعه.

٦) جد قيم الثابت جـ التي تجعل المعادلة س^{٢} + ص^{٢} + ٨س − ٤ص + جـ = ٠ معادلة دائرة.

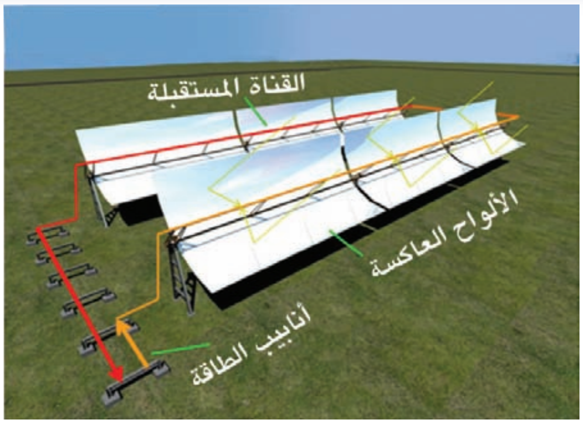
٧) جد معادلة الدائرة التي تمس كلًّا من المستقيمين س = ٠ ، ص = −٢ ، وتمر بالنقطة (٤ ، ٠) ويقع مركزها في الربع الأول، وطول نصف قطرها أكبر من وحدتين.

٨) معتمدًا الشكل (٥−١١) الذي يمثل دائرة مرسومة داخل المثلث أ ب جـ وتمس أضلاعه، جد معادلة هذه الدائرة.



الشكل (٥−١١)

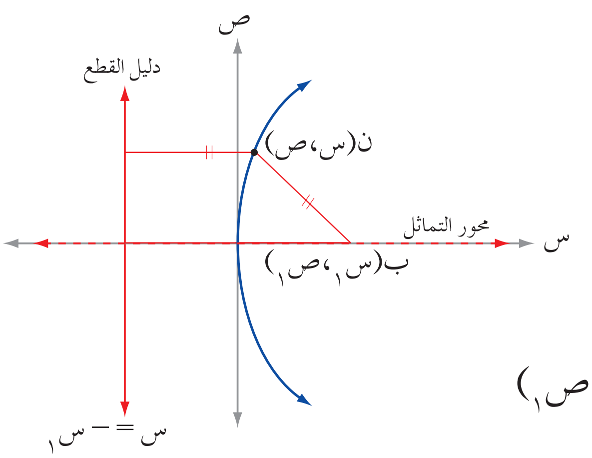
ثانيًا القطع المكافئ The Parabola



استخدمت الطاقة الشمسية لتوليد الكهرباء؛ حيث تُستعمل مرايا على شكل قطوع مكافئة، تعمل على تسخين زيت يمر خلال أنابيب مارّة ببؤر هذه القطوع.

في الحقيقة إنَّ استخدامات القطع المكافئ تجدها في العديد من التطبيقات مثل: العدسات والمرايا، أطباق البث والاستقبال، السلاسل والجسور المعلقة، وصناعة السيارات والطائرات والصواريخ والمركبات، كذلك مسارات المقذوفات الأرضية، فما القطع المكافئ؟

إذا تحركت النقطة ن(س ، ص) في المستوى الإحداثي، بحيث يكون بعدها عن نقطة ثابتة ب(س$_{١}$، ص$_{١}$) مساويًا دائمًا لبعدها عن المستقيم س = − س$_{١}$ الواقع في المستوى نفسه، فإنَّ المنحنى الناتج عن حركة هذه النقطة يُسمى قطعًا مكافئًا. انظر الشكل (٥−١٢).



الشكل (٥−١٢)

ويكون رأسه النقطة (٠، ص$_{١}$)، **بؤرته** النقطة (س$_{١}$، ص$_{١}$)

و**معادلة محوره:** ص = ص$_{١}$ ، **معادلة دليله:** س = −س$_{١}$

تعريف

القطع المكافئ

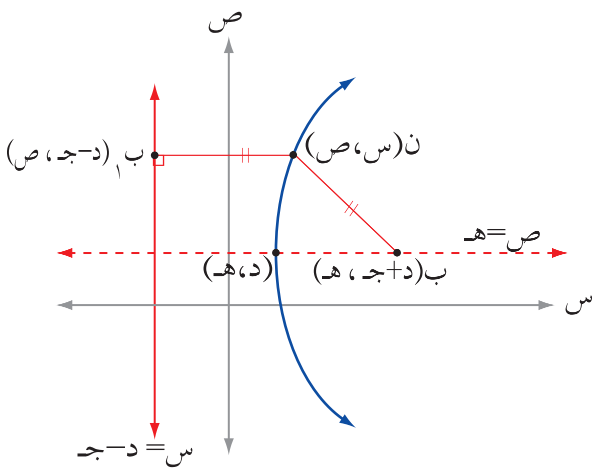
هو المحل الهندسي للنقطة ن(س ، ص) التي تتحرك في المستوى البياني، بحيث يكون بُعدها عن نقطة ثابتة ب (تُسمى بؤرة القطع المكافئ) مساويًا دائمًا لبعدها عن مستقيم معلوم ل لا يحوي النقطة ب (يُسمى دليل القطع المكافئ).

لاحظ أنَّ القطع المكافئ متماثل حول المستقيم المار في البؤرة والعمودي على الدليل ويسمى هذا المستقيم محور التماثل أو محور القطع الكافئ وتسمّى النقطة الواقعة على محور القطع على منتصف المسافة بين البؤرة والدليل رأسَ القطع.

الصورة القياسية لمعادلة القطع المكافئ الذي رأسه النقطة (د ، هـ)، ومحور تماثله محور السينات أو يوازيه:

لإيجاد معادلة القطع المكافئ، الذي رأسه النقطة م (د ، هـ)، لاحظ أن محوره يوازي محور السينات ومعادلته ص= هـ.

افرض أنَّ ن (س ، ص) النقطة المتحركة في المستوى حيث تقع على منحنى القطع المكافئ الذي بؤرته ب وتقع إلى اليمين من رأسه، فيكون إحداثيا البؤرة ب هما (د + جـ، هـ) حيث جـ هو بعد البؤرة عن الرأس، لاحظ أيضًا أنَّ النقطة ب$_1$ هي موقع العمود النازل من النقطة ن على الدليل ل، فيكون إحداثيا النقطة ب$_1$ هما (د− جـ ، ص). انظر الشكل (٥–١٣)



الشكل (٥–١٣)

ومن تعريف القطع المكافئ تجد أنَّ:

ن ب = ن ب$_1$

$$\sqrt{(س - (د+جـ))^٢ + (ص - هـ)^٢} = \sqrt{(س - (د - جـ))^٢ + (ص - ص)^٢}$$

وبتربيع الطرفين:

$$(س - (د + جـ))^٢ + (ص - هـ)^٢ = (س - (د - جـ))^٢ + (ص - ص)^٢$$

$$((س - د) - جـ)^٢ + (ص - هـ)^٢ = ((س - د) + جـ)^٢ + ٠$$

وبفك الأقواس تجد أنَّ:

$(س - د)^٢ - ٢جـ(س - د) + جـ^٢ + (ص - هـ)^٢ = (س - د)^٢ + ٢جـ(س - د) + جـ^٢$ ومنه:

$$\boxed{(ص - هـ)^٢ = ٤جـ(س - د) \quad ، \quad جـ > ٠} \quad .... (١)$$

وهي إحدى الصور القياسية لمعادلة القطع المكافئ الذي عناصره هي:

١) رأسه النقطة (د ، هـ).

٢) محور تماثله يوازي محور السينات ومعادلته هي: ص= هـ.

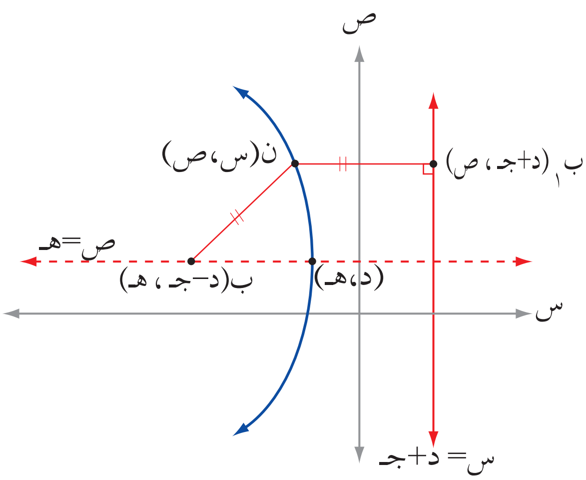
٣) بؤرته ب (د+جـ ، هـ) ، حيث جـ هي بعد البؤرة عن الرأس.

٤) معادلة دليله س= د − جـ.

ويكون منحنى القطع المكافئ مفتوحًا نحو اليمين.

أما إذا كان محور القطع المكافئ يوازي محور السينات ورأسه في النقطة (د ، هـ) وبؤرته ب (د− جـ ، هـ) تقع على يسار رأسه، انظر الشكل (٥–١٤).

فإنَّ معادلته هي:



الشكل (٥–١٤)

(ص − هـ)٢ = −٤جـ (س − د) ، جـ > ٠ ......(٢)

وهي إحدى الصور القياسية لمعادلة القطع المكافئ الذي عناصره هي:

١) رأسه النقطة (د ، هـ).

٢) محور تماثله يوازي محور السينات ومعادلته هي ص= هـ.

٣) بؤرته ب (د− جـ ، هـ) ، حيث جـ هي بعد البؤرة عن الرأس.

٤) معادلة دليله س= د + جـ.

ويكون منحنى القطع المكافئ مفتوحًا نحو اليسار.

مثال ١

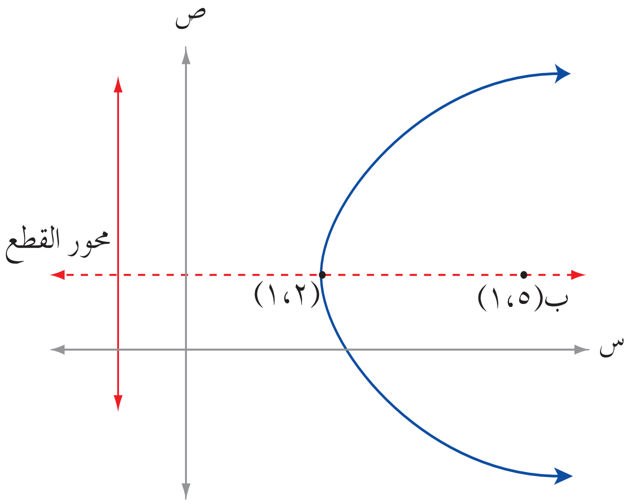
جد معادلة القطع المكافئ في كلٍّ مما يأتي:

١) رأسه النقطة (٢ ، ١) ، وبؤرته النقطة (٥ ، ١).

٢) رأسه النقطة (٠ ، ٠) ومعادلة دليله س=٤.

الحل

١) ارسم شكلًا تقريبيًا للقطع المكافئ، وحدّد عليه العناصر كما في الشكل (٥ – ١٥).



الشكل (٥–١٥)

بما أنَّ القطع المكافئ مفتوح نحو اليمين،

إذن معادلة القطع المكافئ هي:

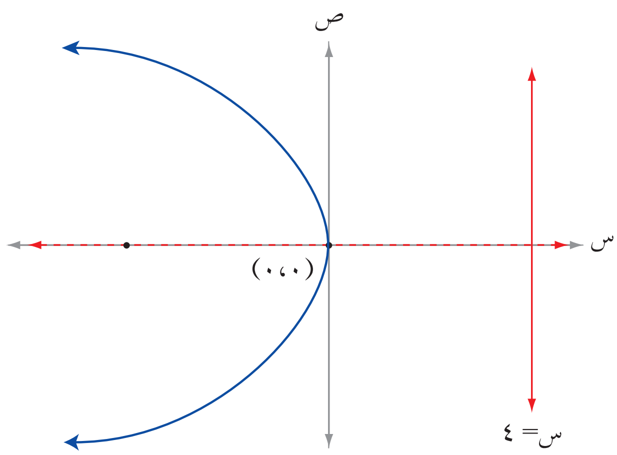
(ص – هـ)^{٢} = ٤ جـ (س – د)

إحداثيا الرأس (د ، هـ) هما (٢ ، ١)

والبُعد بين الرأس والبؤرة جـ = ٣ (لماذا؟)

إذن المعادلة هي: (ص – ١)^{٢} = ١٢ (س – ٢)

٢) ارسم شكلًا تقريبيًا للقطع المكافئ وحدد عليه العناصر كما في الشكل (٥ – ١٦).



الشكل (٥–١٦)

بما أنَّ منحنى القطع مفتوح نحو اليسار،

إذن الصورة القياسية لمعادلة القطع المكافئ هي:

(ص – هـ)^{٢} = – ٤ جـ (س – د)

وبما أنَّ إحداثيي رأس القطع المكافئ (د ، هـ) هما (٠ ، ٠)

وَ بُعد الرأس عن الدليل يساوي ٤ ، إذن جـ = ٤

ومنه معادلة القطع المكافئ هي:

ص^{٢} = – ١٦ س

تدريب ١

جد معادلة القطع المكافئ في كل مما يأتي، ثم ارسم منحناه:

١) رأسه النقطة (−١ ، ١) ، وبؤرته النقطة (−٥ ، ١) .

٢) رأسه النقطة (٢ ، −٣) ، ومعادلة دليله س = ١ .

فكر وناقش

ما هي العناصر اللازمة لكتابة معادلة القطع المكافئ؟

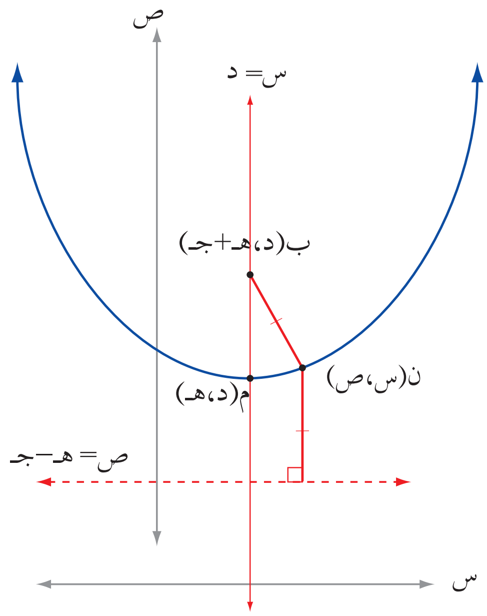
الصورة القياسية لمعادلة القطع المكافئ الذي رأسه النقطة (د ، هـ)، ومحور تماثله محور الصادات أو يوازيه:

إذا كان محور القطع المكافئ يوازي محور الصادات، ورأسه النقطة (د ، هـ) وبؤرته ب (د ، هـ + جـ) تقع إلى الأعلى من رأسه.

انظر الشكل (٥–١٧).

فإنَّ معادلته هي:

$\boxed{(س - د)^{٢} = ٤ جـ (ص - هـ)، جـ > ٠}$ .... (٣)



الشكل (٥–١٧)

وهي إحدى الصور القياسية لمعادلة القطع المكافئ الذي عناصره هي:

١) رأسه النقطة (د ، هـ).

٢) محور تماثله يوازي محور الصادات، ومعادلته هي س = د.

٣) بؤرته النقطة ب (د ، هـ + جـ) ، حيث جـ هي بعد البؤرة عن الرأس.

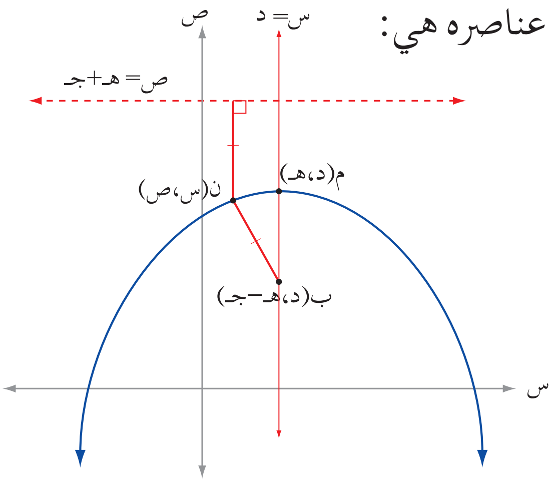
٤) معادلة دليله ص = هـ − جـ.

ويكون منحنى القطع المكافئ مفتوحًا نحو الأعلى.

أما إذا كان محور القطع المكافئ يوازي محور الصادات ورأسه النقطة (د ، هـ) وبؤرته النقطة ب (د، هـ − جـ) تقع إلى الأسفل من رأسه، فإنَّ معادلة هذا القطع المكافئ هي:

(س − د)^{٢} = −٤ جـ (ص − هـ)، جـ $>$ ٠ ......(٤)

وهي إحدى الصور القياسية لمعادلة القطع المكافئ الذي عناصره هي:



الشكل (٥−١٨)

١) رأسه النقطة (د ، هـ).

٢) محور تماثله يوازي محور الصادات، ومعادلته هي س=د.

٣) بؤرته النقطة ب (د ، هـ − جـ) ، حيث جـ هي بعد البؤرة عن الرأس.

٤) معادلة دليله ص= هـ + جـ.

ويكون منحنى القطع المكافئ مفتوحًا نحو الأسفل.

انظر الشكل (٥−١٨).

فكر وناقش

كيف توصلنا إلى كلٍّ من الصور القياسية (٢)، (٣)، (٤) ؟

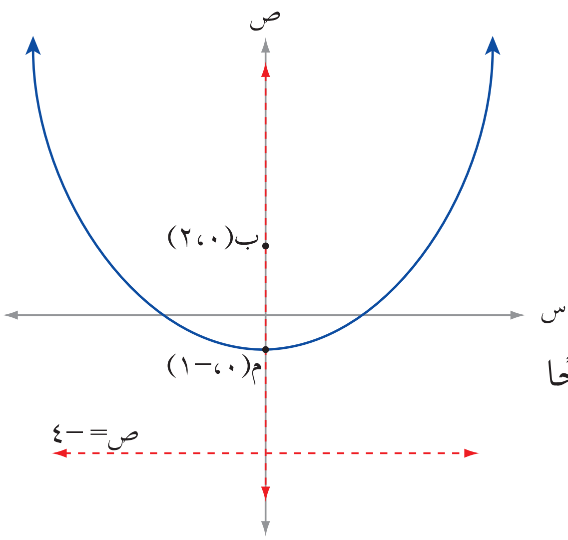
مثال ٢

جد معادلة القطع المكافئ في كلٍّ مما يأتي، ثم ارسم منحناه بشكل تقريبي:

١) رأسه النقطة (٠ ، −١) ، وبؤرته النقطة (٠ ، ٢).

٢) رأسه النقطة (١ ، ١) ومعادلة دليله ص=٢.

الحل



الشكل (٥−١٩)

١) بما أنَّ الرأس هو النقطة (٠ ، −١)، وَ البؤرة هي النقطة (٠ ، ٢) ؛

إذن جـ = ٣، ويكون منحنى القطع المكافئ مفتوحًا نحو الأعلى. ومنه معادلة القطع المكافئ هي:

(س − د)^{٢} = ٤ جـ (ص − هـ)

س^{٢} = ١٢ (ص + ١) . والشكل (٥−١٩) يوضح ذلك.

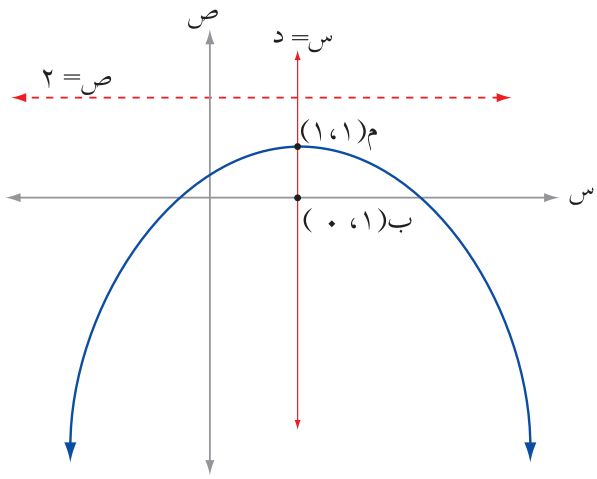
٢) بما أنَّ الرأس هو النقطة (١، ١)، وَ معادلة دليله ص=٢ إذن جـ=١ ، ويكون منحنى القطع المكافئ مفتوحًا نحو الأسفل.

وَ تكون معادلة القطع على الصورة:

(س – د)^{٢} = –٤ جـ (ص – هـ)

(س – ١)^{٢} = – ٤ (ص – ١)

والشكل (٥–٢٠) يوضح التمثيل البياني التقريبي للقطع المكافئ.



الشكل (٥–٢٠)

تدريب ٢

جد معادلة القطع المكافئ في كلٍّ مما يأتي، ثم ارسم منحناه بشكل تقريبي:

١) رأسه النقطة (١ ، ١) ، وبؤرته النقطة (١ ، –٤).

٢) رأسه النقطة (٠ ، ٣) ومعادلة دليله ص + ٢ = ٠

٣) بؤرته النقطة (٠ ، ٠) ومعادلة دليله س = –٦

مثال ٣

قطع مكافئ معادلته ص^{٢} = ٨(س + ٤) ، جد عناصره ، ثم ارسم منحناه بشكل تقريبي.

الحل

معادلة القطع هي ص^{٢} = ٨(س + ٤)

وعند مقارنتها بالصورة القياسية لمعادلة القطع المكافئ (ص – هـ)^{٢} = ٤ جـ (س – د)

تجد أنَّ:

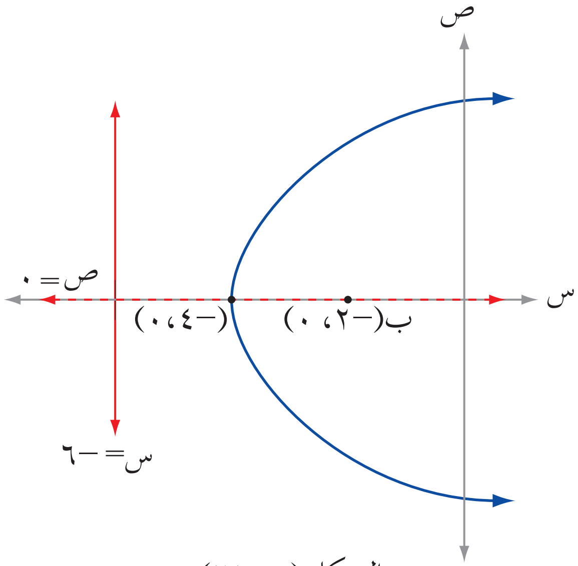
منحنى القطع مفتوح نحو اليمين. وإحداثيي الرأس (د ، هـ) هما (–٤، ٠) وَ جـ=٢ ، لماذا؟

ومنه فإنَّ البؤرة هي النقطة (–٢ ، ٠)

ومعادلة الدليـل هي س = −٦

ومعادلة المحور هي ص = ٠

وَ الشكل (٥−٢١) يمثل منحنى القطع بيانيًا بشكل تقريبي.



الشكل (٥−٢١)

تدريب ٣

جد إحداثيي الرأس والبؤرة، ومعادلة المحور والدليل، للقطع المكافئ الذي معادلته (س− ١)^{٢} = − ص − ٣ ، ثم ارسم منحناه بشكل تقريبي.

بالرجوع إلى مثال (٢) فرع (٢)، لاحظ أنَّه عند فك الأقواس في معادلة القطع المكافئ (س − ١)^{٢} = −٤(ص − ١) ستجد أنَّ:

س^{٢} −٢س +١ = − ٤ ص +٤

أي أنَّ س^{٢} −٢س + ٤ ص −٣ = ٠

وأنَّه يمكن كتابتها على الصورة ص = أس^{٢} + ب س + جـ.

كذلك في مثال(٣)، عند فك الأقواس في المعادلة ص^{٢} = ٨(س + ٤) ، ستجد أنَّ:

ص^{٢} − ٨س − ٣٢ = ٠.

وأنَّه يمكن كتابتها على الصورة س = أ ص^{٢} + ب ص + جـ.

• الصورة العامة لمعادلة القطع المكافئ الذي محوره يوازي محور السينات هي:

س = أ ص^{٢} + ب ص + جـ ، أ ، ب ، جـ أعداد حقيقية. أ ≠ ٠

• الصورة العامة لمعادلة القطع المكافئ الذي محوره يوازي محور الصادات هي:

ص = أ س^{٢} + ب س + جـ ، أ ، ب ، جـ أعداد حقيقية. أ ≠ ٠

مثال ٤

قطع مكافئ معادلته $ص^٢ + ٢ص + ٤س - ٧ = ٠$ ، جد عناصره:

الحل

اكتب معادلة القطع على الشكل الآتي:

$$ص^٢ + ٢ص = -٤س + ٧$$

وبإكمال المقدار ($ص^٢ + ٢ص$) إلى مربع كامل، تجد أنَّ:

$$ص^٢ + ٢ص + ١ = -٤س + ٧ + ١$$ لماذا؟

أي أنَّ معادلة القطع المكافئ هي:

$(ص + ١)^٢ = -٤ (س - ٢)$ وهو قطع مكافئ محوره يوازي محور السينات، ومنحناه مفتوح نحو اليسار.

فيكون رأس القطع هو النقطة (٢ ، -١)

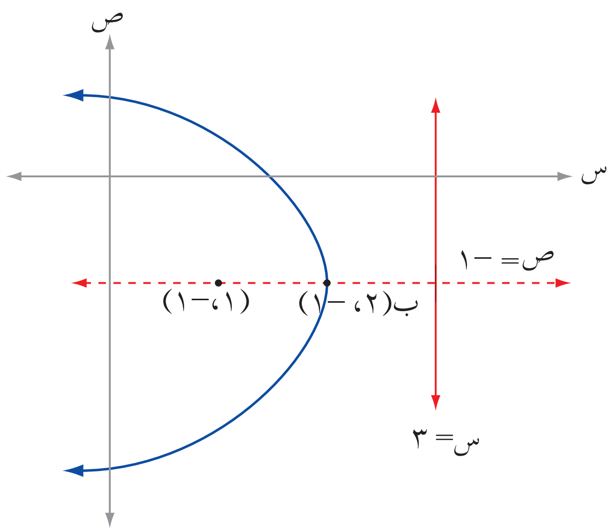
وبما أنَّ $-٤جـ = -٤$ فإن $جـ = ١$

وتكون بؤرته النقطة (٢ - جـ ، -١) وتساوي (١ ، -١)

ومعادلة دليله $س = ٢ + جـ$ ، ومنه $س = ٣$

ومعادلة محوره $ص = هـ$ ، ومنه $ص = -١$

انظر الشكل (٥-٢٢).



الشكل (٥-٢٢)

تذكر:

لإكمال مربع في س نضيف ($\frac{١}{٢}$ معامل س)^٢ إلى طرفي المعادلة، أو نضيفه ونطرحه في الطرف الواحد من المعادلة، بشرط أن يكون معامل $س^٢$ يساوي ١.

تدريب ٤

جد عناصر القطع المكافئ الذي معادلته س^{٢} − ٤ ص + ٤ = ٠

مثال ٥

جد معادلة القطع المكافئ الذي محوره يوازي محور السينات، وبؤرته النقطة (−٣ ، ٤) ويمر بالنقطة (٠ ، ٠) ، ويقع رأسه إلى يمين بؤرته. ثم ارسم منحناه.

الحل

بما أنَّ محوره يوازي محور السينات، ويقع رأسه إلى يمين بؤرته، فإنَّ منحناه مفتوح نحو اليسار ومعادلته على الصورة:

(ص − هـ)^{٢} = − ٤ جـ (س − د)

بؤرة القطع (د − جـ ، هـ) هي النقطة (−٣ ، ٤)

إذن $\boxed{\text{هـ = ٤}}$

د − جـ = −٣ ⟵ د = جـ −٣ .... (١)

بما أنَّ القطع يمر بالنقطة (٠ ، ٠) فإنَّها تحقق معادلته.

إذن (٠ − ٤)^{٢} = −٤ جـ (٠ − جـ + ٣)

ومنه جـ^{٢} − ٣ جـ − ٤ = ٠ لماذا؟

أي أنَّ (جـ −٤) (جـ +١) = ٠

ومنه جـ = ٤ أو جـ = −١ تهمل لماذا؟

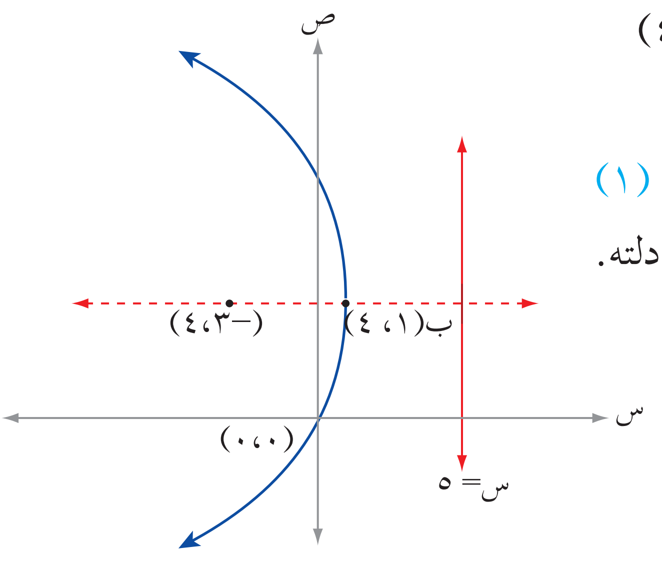
إذن $\boxed{\text{جـ = ٤}}$ ، $\boxed{\text{د = ١}}$

ومنه فإنَّ إحداثيي رأس القطع (د ، هـ) هما (١ ، ٤)

وتكون معادلة القطع المكافئ هي:

(ص − ٤)^{٢} = −١٦ (س − ١)

انظر الشكل (٥−٢٣).



الشكل (٥−٢٣)

تدريب ٥

جد معادلة القطع المكافئ الذي يمر بالنقطتين (٠ ، ٠) ، (١ ، ٣) ومحوره المستقيم الذي معادلته س = −٢ .

فكر وناقش

ادعت ليلى أنَّ القطع المكافئ الذي معادلته $ص^٢ - ٤ص - ٨س + ١ = ٠$ مفتوح لليمين، وأنَّ القطع الذي معادلته $س^٢ + ٨س + ٣ص + ١ = ٠$ مفتوح للأسفل.

حاول أن تتنبأ كيف توصلت ليلى إلى إجابتها.

١) جد معادلة القطع المكافئ في كل حالة مما يأتي، ثم ارسم منحناه بشكل تقريبي:

أ) رأسه النقطة (−١ ، ٠) وبؤرته النقطة (−٥ ، ٠)

ب) رأسه النقطة (−١ ، ٠) وبؤرته النقطة (٣ ، ٠)

جـ) رأسه النقطة (٢، ٣) وبؤرته النقطة (٢ ، ٨)

د) رأسه النقطة (٢ ، ٣) وبؤرته النقطة (٢ ، −٢)

هـ) بؤرته النقطة (١ ، ٠) ومعادلة دليله ص = −٣

و) بؤرته النقطة (٠ ، ٠) ومعادلة دليله س = ٥

ز) بؤرته النقطة (٢ ، −٥) ومعادلة دليله س = ١,٢٥

ح) رأسه النقطة (٢ ، −٣) ومعادلة دليله س = −١

ط) رأسه النقطة (−١ ، ٢) ومعادلة دليله ص = ٥

٢) جد كلًّا من إحداثيي الرأس، وإحداثيي البؤرة، ومعادلة الدليل، ومعادلة المحور، لكلٍّ من القطوع المكافئة المعطاة معادلتها في كلٍّ مما يأتي:

أ) (ص − ٣)^{٢} = ١٢(س + ١)

ب) (س + ٥)^{٢} = ص − ٢

جـ) س = ص^{٢}

د) ٢ص^{٢} − ١٢ص − ١٦س = ١٤ .

هـ) ٣س^{٢} − ٤ = ٨ص + ١٢

و) ٤س − ٣ص^{٢} + ٩ص + ١٢ = ٠

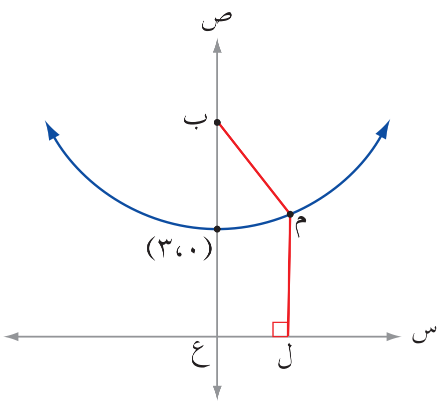
٣) جد معادلة القطع المكافئ الذي معادلة محوره س = ٢، ومعادلة دليله ص = ٥، وتبعد بؤرته ٨ وحدات عن دليله، ومفتوح نحو الأسفل.

٤) جد معادلة القطع المكافئ الذي يمر بالنقطتين (٨ ، ٦) ، (٤ ، −٢)، ومحور تماثله المستقيم الذي معادلته س = ٢.

٥) جد معادلة القطع المكافئ الذي محوره يوازي محور الصادات، وبؤرته النقطة (١،٢) ويمر بالنقطة (٥ ، −١) ويقع رأسه أسفل بؤرته.

٦) جد معادلة القطع المكافئ الذي محوره يوازي محور السينات، ويمرمنحناه بالنقط (٢ ، ٠)، (٥ ، ٢)، (٢ ، −٤).

٧) في الشكل (٥−٢٤) قطع مكافئ رأسه النقطة (٠ ، ٣) وبؤرته النقطة ب ودليله محور السينات، والنقطة م (٢، $\frac{١٠}{٣}$) تقع على منحناه. جد محيط الشكل الرباعي ل م ب ع.

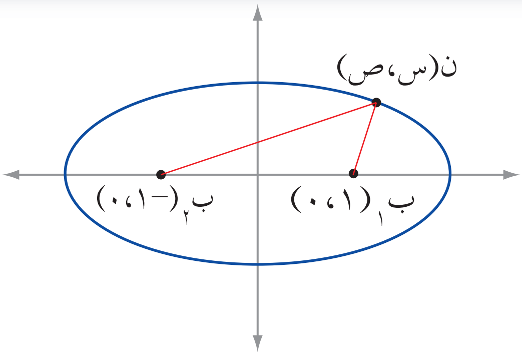


الشكل (٥−٢٤)

٨) قوس على شكل قطع مكافئ تقع قاعدته على أرض مستوية، طولها ١٢ مترًا، ورأس القوس يرتفع ٩ أمتار فوق سطح الأرض. اكتب المعادلة الممثلة لهذا القوس، علمًا أنَّه متماثل حول محور الصادات.

ثالثًا القطع الناقص The Ellipse

جد معادلة المحل الهندسي للنقطة ن(س، ص) التي تتحرك في المستوى بحيث يكون مجموع بُعديها عن النقطتين الثابتتين ب$_{١}$(١ ، ٠) ، ب$_{٢}$ (−١ ، ٠) يساوي دائمًا ٦ وحدات.



الشكل (٥−٢٥)

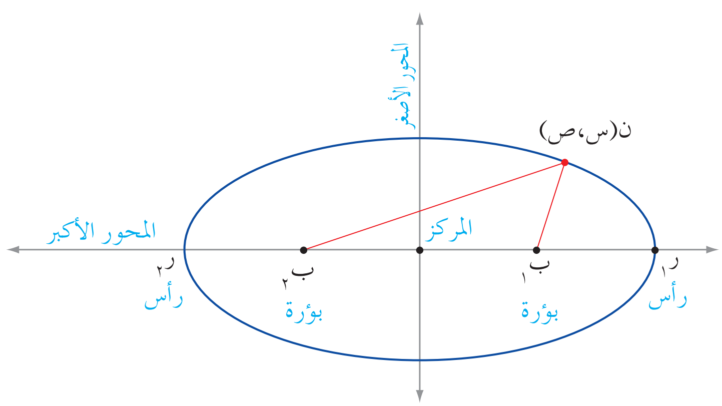
تعلمت سابقًا بعض أنواع القطوع المخروطية، والآن ستتعرف نوعًا آخر يسمى **القطع الناقص**.

تعريف

القطع الناقص

هو المحل الهندسي للنقطة ن(س ، ص) التي تتحرك في المستوى الإحداثي، بحيث يكون مجموع بعديها عن نقطتين ثابتتين ب$_{١}$ ، ب$_{٢}$ (تسميان البؤرتين) يساوي مقدارًا ثابتًا.

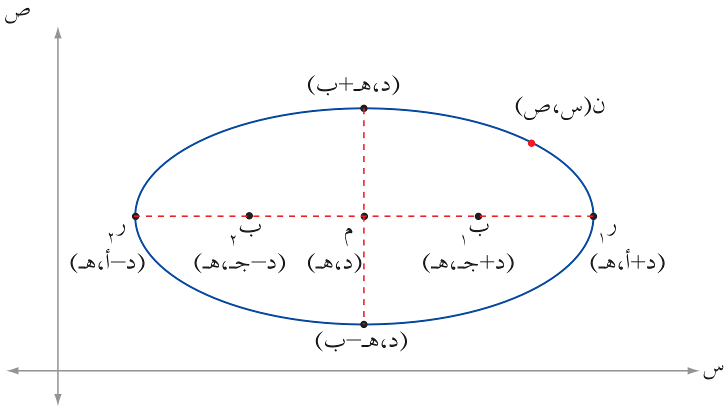
يمثل الشكل (٥−٢٦) منحنى قطع ناقص، له محوران للتماثل هما المستقيم المارّ بالبؤرتين ب$_{١}$، ب$_{٢}$ والمستقيم العمودي عليه والمنصف للقطعة المستقيمة $\overline{\text{ب}_{١}\text{ب}_{٢}}$، تسمى نقطة تقاطع المحورين **مركز القطع الناقص**، وتسمى المسافة بين البؤرتين **البعد البؤري**، أما المستقيم المار بالبؤرتين فيقطع منحنى القطع الناقص في النقطتين ر$_{١}$، ر$_{٢}$ وتُسميان **رأسَي القطع**، والقطعة المستقيمة $\overline{\text{ر}_{١}\text{ر}_{٢}}$ تسمى **المحور الأكبر (المحور البؤري)**، بينما يتقاطع منحنى القطع مع المحور العمودي على المحور الأكبر في نقطتين، تشكل المسافة بينهما **طول المحور الأصغر** للقطع الناقص.



الشكل (٥−٢٦)

الصورة القياسية لمعادلة القطع الناقص الذي مركزه النقطة (د ، هـ)، ومحوره الأكبر محور السينات أو يوازيه:

اعتمادًا على الشكل (٥–٢٧)، لاحظ أنَّ مركز القطع الناقص هو النقطة م(د، هـ)، ومحوره الأكبر يوازي محور السينات، وبفرض أنَّ البعد البؤري يساوي (٢جـ) ، والمقدار الثابت (٢أ) يساوي مجموع بعدي النقطة المتحركة ن عن بؤرتي القطع، حيث ٢أ > ٢جـ ، أ ، جـ أعداد حقيقة موجبة وبذلك فإنَّ إحداثيي



الشكل (٥–٢٧)

بؤرتي القطع الناقص هما: ب١ (د+جـ ، هـ) ، ب٢ (د– جـ ، هـ)

ومن تعريف القطع الناقص تجد أنَّ:

ن ب١ + ن ب٢ = ٢أ ومنه

$$\sqrt{(س - (د+جـ))^٢ + (ص - هـ)^٢} + \sqrt{(س - (د - جـ))^٢ + (ص - هـ)^٢} = ٢أ$$

$$\sqrt{(س - (د+جـ))^٢ + (ص - هـ)^٢} = ٢أ - \sqrt{(س - (د - جـ))^٢ + (ص - هـ)^٢}$$

وبتربيع الطرفين ينتج أنَّ:

$$((س - د) - جـ)^٢ + (ص - هـ)^٢ =$$

$$٤أ^٢ - ٤أ \sqrt{((س - د) + جـ)^٢ + (ص - هـ)^٢} + ((س - د) + جـ)^٢ + (ص - هـ)^٢$$

وبفك الأقواس وتبسيط المعادلة تجد أنَّ:

$$أ^٢ + جـ(س - د) = أ \sqrt{((س - د) + جـ)^٢ + (ص - هـ)^٢}$$

وبتربيع الطرفين وإخراج حدود كعوامل مشتركة تجد أنَّ:

$$(أ^٢ - جـ^٢)(س - د)^٢ + أ^٢(ص - هـ)^٢ = أ^٢(أ^٢ - جـ^٢)$$

وبقسمة طرفي المعادلة على $أ^٢(أ^٢ - جـ^٢)$ ينتج أنَّ:

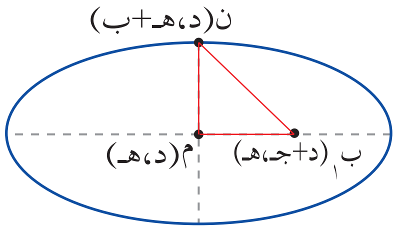
$$\frac{(س - د)^٢}{أ^٢} + \frac{(ص - هـ)^٢}{(أ^٢ - جـ^٢)} = ١$$

وبما أنَّ أ > جـ من تعريف القطع الناقص، وكلًّا من العددين أ ، جـ موجب فإنَّ

$\text{أ}^{٢} > \text{جـ}^{٢}$ ومنه $\text{أ}^{٢} - \text{جـ}^{٢} > ٠$

وإذا انطبقت النقطة ن على المحور الأصغر الموجب

كما في الشكل (٥–٢٨)



الشكل (٥–٢٨)

سينتج المثلث ن م $\text{ب}_{١}$ قائم الزاوية في م. لماذا؟

فيه ن م = ب ، $\text{ب}_{١}$ م = جـ ، ن $\text{ب}_{١}$ = أ لماذا؟

وبتطبيق مبرهنة فيثاغورس على المثلث ن م $\text{ب}_{١}$ تجد أنَّ:

$\text{أ}^{٢} = \text{ب}^{٢} + \text{جـ}^{٢}$ ومنه $\text{ب}^{٢} = \text{أ}^{٢} - \text{جـ}^{٢}$ (فسِّر هذه النتيجة).

وبتعويض $\text{ب}^{٢}$ في المعادلة ينتج أنَّ:

$$\frac{(\text{س} - \text{د})^{٢}}{\text{أ}^{٢}} + \frac{(\text{ص} - \text{هـ})^{٢}}{\text{ب}^{٢}} = ١ \qquad \text{..........(١)}$$

وهي تمثل إحدى الصور القياسية لمعادلة القطع الناقص، وفي ما يأتي عناصره:

١) المركز النقطة (د ، هـ).

٢) البؤرتان النقطتان $\text{ب}_{١}$(د+جـ ، هـ) ، $\text{ب}_{٢}$(د− جـ ، هـ) حيث جـ هي بُعد البؤرة عن المركز.

٣) الرأسان هما النقطتان $\text{ر}_{١}$(د+ أ ، هـ) ، $\text{ر}_{٢}$(د− أ ، هـ)

٤) معادلة المحور الأكبر ص = هـ ، وطوله يساوي ٢أ

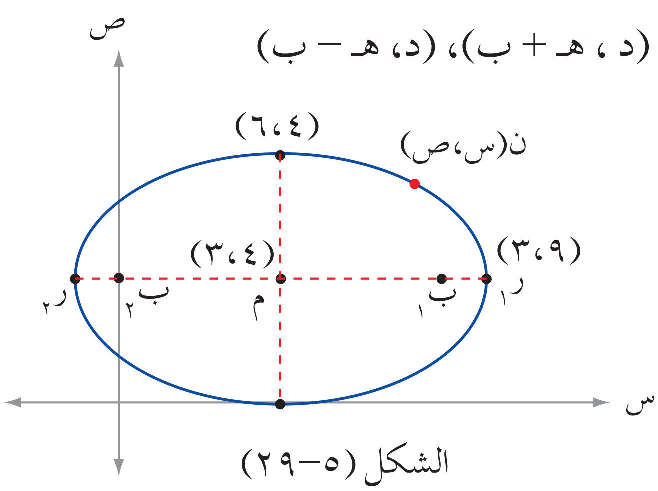
٥) معادلة المحور الأصغر س = د ، وطوله يساوي ٢ب.

لاحظ أنَّ البُعد البؤري يساوي ٢جـ. (حيث $\text{جـ}^{٢} = \text{أ}^{٢} - \text{ب}^{٢}$)

وأن إحداثيي طرفي محوره الأصغر هما النقطتان (د ، هـ + ب)، (د، هـ − ب)

مثال ١

جد معادلة القطع الناقص الممثل منحناه في الشكل (٥–٢٩).



الشكل (٥–٢٩)

الحل

إحداثيا مركز القطع النقطة (٤ ، ٣)

ومن تعريف القطع الناقص تجد أنَّ:

نصف طول المحور الأصغر ب = ٣ وحدات. لماذا؟

نصف طول المحور الأكبر أ = ٥ وحدات. لماذا؟

وبما أنَّ المحور الأكبر موازٍ لمحور السينات، إذن معادلة القطع الناقص هي:

$$\frac{(\text{س} - ٤)^{٢}}{٢٥} + \frac{(\text{ص} - ٣)^{٢}}{٩} = ١$$

تدريب ١

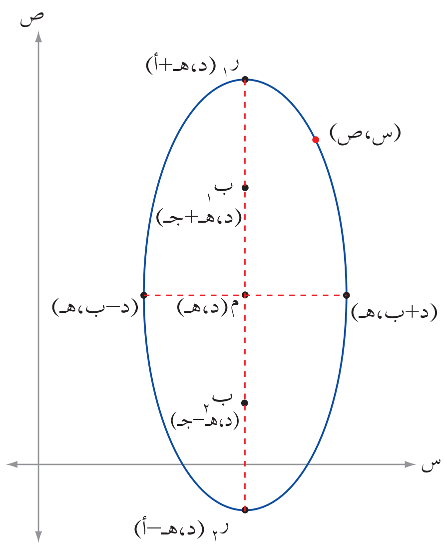
جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل، ومحوره الأصغر يوازي محور الصادات وطوله يساوي ٤ وحدات، وإحدى بؤرتيه النقطة (−٣ ، ٠). ثم ارسم منحناه بشكل تقريبي.

الصورة القياسية لمعادلة القطع الناقص الذي مركزه النقطة (د ، هـ)، ومحوره الأكبر محور الصادات أو يوازيه:

إذا كان المحور الأكبر للقطع الناقص يوازي محور الصادات،

فإنَّ بؤرتي القطع الناقص هما النقطتان:

$\text{ب}_{١}$(د ، هـ+جـ) ، $\text{ب}_{٢}$(د، هـ − جـ) كما يوضح الشكل (٥−٣٠).



الشكل (٥−٣٠)

وبإجراء الخطوات السابقة تجد أنَّ معادلة القطع الناقص هي:

$$\frac{(\text{س} - \text{د})^{٢}}{\text{ب}^{٢}} + \frac{(\text{ص} - \text{هـ})^{٢}}{\text{أ}^{٢}} = ١$$ ....(٢) لماذا؟

وهي تمثل إحدى الصور القياسية لمعادلة القطع الناقص الذي عناصره هي:

١) مركزه النقطة (د ، هـ).

٢) بؤرتاه هما النقطتان $ب_١$(د ، هـ + جـ) ، $ب_٢$(د ، هـ − جـ) حيث جـ هي بعد البؤرة عن المركز.

٣) إحداثيا الرأسين هما النقطتان $ر_١$(د، هـ + أ) ، $ر_٢$(د، هـ − أ)

٤) المحور الأكبر يوازي محور الصادات ومعادلته س= د ، وطوله يساوي ٢أ

٥) المحور الأصغر يوازي محور السينات ومعادلته ص= هـ ، وطوله يساوي ٢ب.

لاحظ أنَّ البعد البؤري يساوي ٢جـ. (حيث $جـ^٢ = أ^٢ - ب^٢$)

وأن إحداثيي طرفي محوره الأصغر هما النقطتان (د + ب ، هـ)، (د − ب، هـ)

الاختلاف المركزي للقطع الناقص

لاحظ من تعريف القطع الناقص أنَّ جـ < أ ، وأنَّ كلًّا من القيمتين أ ، جـ موجبتان، ومنه $\frac{جـ}{أ} < ١$ (لماذا؟)

تسمى النسبة ($\frac{جـ}{أ}$) **الاختلاف المركزي للقطع الناقص**، وستلاحظ أنَّ قيمة الاختلاف المركزي <١، ولذلك سُمِّي القطع ناقصًا؛ لأنَّ اختلافه المركزي نقص عن واحد.

تعريف

الاختلاف المركزي للقطع الناقص:

هو النسبة بين نصف البُعد البؤري إلى نصف طول المحور القاطع (الأكبر) = جـ : أ

مثال ٢

جد معادلة القطع الناقص في كلٍّ مما يأتي:

١) مركزه النقطة(٢ ، ٣)، وإحدى بؤرتيه النقطة(٢ ، −١)، وطول محوره الأصغر يساوي (٦) وحدات.

٢) بؤرتاه النقطتان (٤ ، ١) ، (٠ ، ١) ويتقاطع منحناه مع المحور الأكبر عند س = ٢ + $\sqrt{٥}$

الحل

١) لاحظ أنَّ المركز والبؤرة يقعان على مستقيم يوازي محور الصادات، أي أنَّ المحور الأكبر يوازي محور الصادات.

إذن معادلة القطع الناقص هي: $\frac{(س - د)^٢}{ب^٢} + \frac{(ص - هـ)^٢}{أ^٢} = ١$

وبما أنَّ المركز(٢ ، ٣) والبؤرة (٢، –١)، فإنَّ نصف البُعد البؤري جـ = ٤ وحدات.

وطول المحور الأصغر = ٦ وحدات، أي أنَّ ب = ٣ وحدات.

لإيجاد أ استخدم المعادلة:

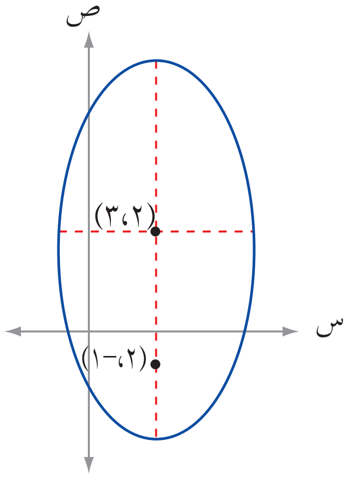
أ^{٢} = ب^{٢} + جـ^{٢}

ومنه أ^{٢} = ٩ + ١٦ = ٢٥

إذن معادلة القطع الناقص هي:

$$\frac{(\text{س} - ٢)^{٢}}{٩} + \frac{(\text{ص} - ٣)^{٢}}{٢٥} = ١$$

انظر الشكل(٥–٣١).



الشكل (٥–٣١)

٢) بما أنَّ البؤرتين تقعان على مستقيم يوازي محور السينات، فإنَّ المحور الأكبر للقطع يوازي محور السينات، وتكون معادلة القطع هي:

$$\frac{(\text{س} - \text{د})^{٢}}{\text{أ}^{٢}} + \frac{(\text{ص} - \text{هـ})^{٢}}{\text{ب}^{٢}} = ١$$

والبؤرتان (٤ ، ١)، (٠ ، ١) ومنه جـ =٢.

إحداثيا مركز القطع الناقص النقطة (٢ ، ١) لماذا؟

وبما أنَّ منحنى القطع يتقاطع مع المحور الأكبر في الرأسين ؛ فإن إحداثيي أحد رؤوس القطع هو النقطة (٢+$\sqrt{٥}$ ، ١)، وبذلك فإنَّ أ = $\sqrt{٥}$. لماذا؟

ولإيجاد قيمة ب، استخدم المعادلة:

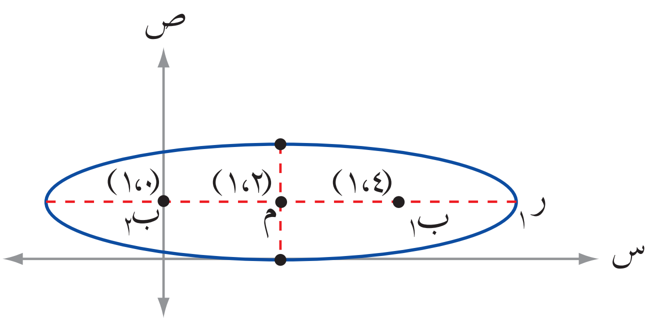
ب^{٢} = أ^{٢} – جـ^{٢}

= ٥ – ٤ =١

إذن معادلة القطع هي:

$$\frac{(\text{س} - ٢)^{٢}}{٥} + \frac{(\text{ص} - ١)^{٢}}{١} = ١$$

انظر الشكل (٥–٣٢).



الشكل (٥–٣٢)

تدريب ٢

جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه النقطتان $ب_١(-٢ ، ٣)$ ، $ب_٢(-٢ ، ٩)$ ، وطول محوره الأكبر ١٢ وحدة.

مثال ٣

جد عناصر القطع الناقص الذي معادلته $\frac{(س + ١)^٢}{١٦} + \frac{(ص - ٢)^٢}{٢٥} = ١$ ، ثم ارسم منحناه بشكل تقريبي.

الحل

بما أنَّ $أ^٢ = ٢٥$ ، $ب^٢ = ١٦$ فإنَّ المحور الأكبر يوازي محور الصادات وتكون معادلة القطع الناقص على الصورة:

$$\frac{(س - د)^٢}{ب^٢} + \frac{(ص - هـ)^٢}{أ^٢} = ١$$

$أ^٢ = ٢٥$ ، ومنه أ $= \mp ٥$ تهمل القيمة السالبة، لماذا؟

$ب^٢ = ١٦$، ومنه ب $= \mp ٤$ تهمل القيمة السالبة، لماذا؟

$جـ^٢ = أ^٢ - ب^٢ = ٩$ ومنه جـ $= \mp ٣$ تهمل القيمة السالبة، لماذا؟

عناصر القطع الناقص هي:

١) مركزه: (د ، هـ) هو النقطة (-١ ، ٢).

٢) بؤرتاه: $ب_١$ (د ، هـ + جـ) = (-١ ، ٥) ،

$ب_٢$ (د ، هـ - جـ) = (-١ ، -١)

٣) رأساه: $ر_١$ (د ، هـ + أ) = (-١ ، ٧) ،

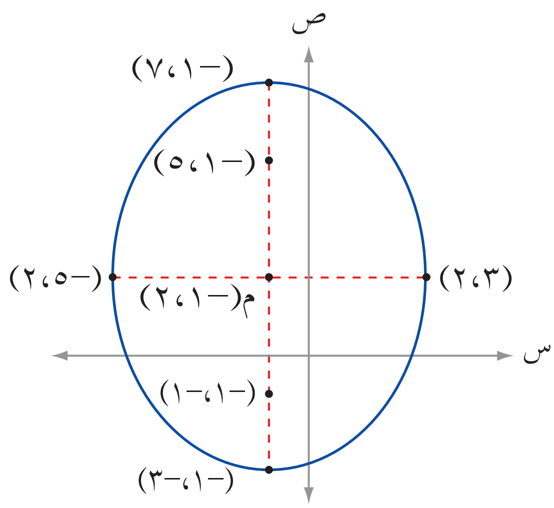
$ر_٢$ (د ، هـ - أ) = (-١ ، -٣)

٤) محوره الأكبر يوازي محور الصادات

ومعادلته س = -١، وطوله = ٢أ = ١٠ وحدات

٥) محوره الأصغر يوازي محور السينات

ومعادلته ص = ٢، وطوله = ٢ب = ٨ وحدات



الشكل (٥-٣٣)

والشكل (٥-٣٣) يمثل شكلًا تقريبيًا لمنحنى القطع.

لاحظ أنَّ إحداثيي طرفي محوره الأصغر هما النقطتان (٣ ، ٢) ، (-٥، ٢)

تدريب ٣

جد عناصر القطع الناقص الذي معادلته $\frac{س^٢}{٢٥} + \frac{ص^٢}{٩} = ١$ ثم ارسم منحناه بشكل تقريبي.

مثال ٤

جد عناصر ومعادلة القطع الناقص الذي رأساه هما النقطتان (٥ ، ٠)، (−٥ ، ٠) واختلافه المركزي ٠٫٨.

الحل

لاحظ أنَّ محور القطع الأكبر يوازي محور السينات، فتكون معادلة القطع الناقص:

$$\frac{(س - د)^٢}{أ^٢} + \frac{(ص - هـ)^٢}{ب^٢} = ١$$

٢أ = ١٠، ومنه أ = ٥ لماذا؟

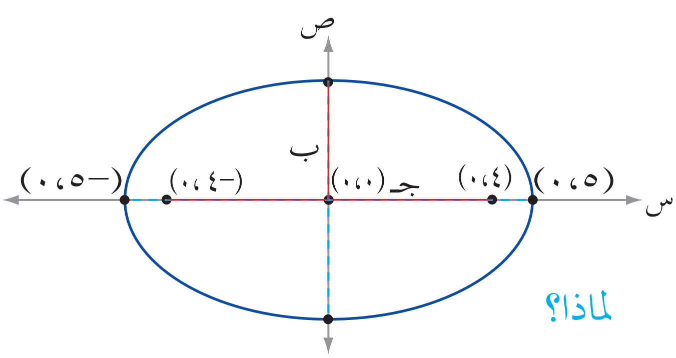
وبما أنَّ الاختلاف المركزي = $\frac{جـ}{أ} = \frac{٨}{١٠}$

إذن جـ = ٤

$ب^٢ = أ^٢ - جـ^٢$

= ٢٥ − ١٦

= ٩ ، ومنه ب = ٣



الشكل (٥−٣٤)

وبذلك فإنَّ عناصر هذا القطع الناقص هي:

١) مركزه (د ، هـ) هو النقطة (٠ ، ٠)

٢) بؤرتاه (د ∓ جـ ، هـ) = (∓ ٤ ، ٠) لماذا؟

٣) رأساه (∓ ٥، ٠)

٤) محوره الأكبر ينطبق على محور السينات ومعادلته ص=٠، وطوله ٢أ = ١٠ وحدات.

٥) محوره الأصغر ينطبق على محور الصادات ومعادلته س=٠، وطوله ٢ب = ٦ وحدات.

ومعادلته هي: $\frac{س^٢}{٢٥} + \frac{ص^٢}{٩} = ١$

انظر الشكل (٥−٣٤).

لاحظ أنَّ إحداثيي طرفي محوره الأصغر هما النقطتان (٠، ٣) ، (٠، −٣).

تدريب ٤

جد معادلة القطع الناقص الذي أحد رؤوسه النقطة (٤ ، ١)، والبؤرة القريبة من هذا الرأس هي النقطة (٢ ، ١) واختلافه المركزي ٠,٥

اعتمادًا على مثال(٣) معادلة القطع الناقص هي :

$$\frac{(س+١)^{٢}}{١٦} + \frac{(ص-٢)^{٢}}{٢٥} = ١$$

وبفك حدود المعادلة لتحويلها إلى الصورة العامة، تجد ما يلي:

$$٢٥(س + ١)^{٢} + ١٦(ص - ٢)^{٢} = ٤٠٠$$

$$٢٥(س^{٢} + ٢س + ١) + ١٦(ص^{٢} - ٤ص + ٤) - ٤٠٠ = ٠$$

$$٢٥س^{٢} + ٥٠س + ٢٠ + ١٦ص^{٢} - ٦٤ص + ٦٤ - ٤٠٠ = ٠$$

$$٢٥س^{٢} + ١٦ص^{٢} + ٥٠س - ٦٤ص - ٣١١ = ٠$$

لاحظ أنَّ المعادلة هي على الصورة:

$$أ\,س^{٢} + ب\,ص^{٢} + جـ\,س + د\,ص + هـ = ٠$$

الصورة العامة لمعادلة القطع الناقص هي:

$أ\,س^{٢} + ب\,ص^{٢} + جـ\,س + د\,ص + هـ = ٠$ ، حيث أ ، ب ، جـ ، د ، هـ أعداد حقيقية

$أ \times ب > ٠$، $أ \neq ب$

تدريب ٥

جد معادلة القطع الناقص الذي يمس كلًّا من المستقيمات:

$س = ٨$ ، $س = -٢$ ، $ص = ٩$ ، $ص = ١$. حل السؤال بطريقتين مختلفتين.

فكر وناقش

بالرجوع إلى الصورة العامة لمعادلة القطع الناقص، ناقش ما يأتي:

١) لماذا وُضِع الشرط $أ \neq ب$ ؟

٢) ما الشكل الهندسي الذي تمثله المعادلة إذا كانت $أ \times ب = ٠$ ؟ (ناقش جميع الحالات)

تحدث

ما المعطيات اللازمة لإيجاد معادلة قطع ناقص؟

مثال ٥

جد عناصر القطع الناقص الذي معادلته:

$$\text{س}^{٢} + ١٠\text{ص}^{٢} - ٦\text{س} - ٤٠\text{ص} - ١١ = ٠$$

الحل

أعد ترتيب المعادلة مع تجميع الحدود تجد أنَّ:

$$(\text{س}^{٢} - ٦\text{س}) + ١٠(\text{ص}^{٢} - ٤\text{ص}) = ١١$$

وبإكمال المقدارين داخل الأقواس إلى مربعين كاملين تجد أنَّ:

$$(\text{س}^{٢} - ٦\text{س} + (-٣)^{٢} - (-٣)^{٢}) + ١٠\left(\text{ص}^{٢} - ٤\text{ص} + (-٢)^{٢} - (-٢)^{٢}\right) = ١١$$

$$(\text{س}-٣)^{٢} - ٩ + ١٠(\text{ص}-٢)^{٢} - ٤٠ = ١١$$

$$(\text{س}-٣)^{٢} + ١٠(\text{ص}-٢)^{٢} = ٦٠$$

أي أنَّ $\frac{(\text{س}-٣)^{٢}}{٦٠} + \frac{(\text{ص}-٢)^{٢}}{٦} = ١$ لماذا؟

أكمل الحل لإيجاد عناصر القطع الناقص.

تدريب ٦

قطع ناقص معادلته $٤\text{س}^{٢} + ٣\text{ص}^{٢} + ١٦\text{س} = ١٧٦$، جد كلًّا مما يأتي:

١) إحداثيي مركزه. ٢) إحداثيي الرأسين.

٣) إحداثيي البؤرتين. ٤) الاختلاف المركزي.

فكر وناقش

كتب خالد وعمر المعادلة ($س^٢ + ١٠ص^٢ - ٦س - ٤٠ص - ١١ = ٠$) على الصورة القياسية بالشكل الآتي، وعلى الترتيب:

خالد: $\frac{(س-٣)^٢}{١} + \frac{(ص-٢)^٢}{١٠٠} = ١$

عمر: $\frac{(س-٣)^٢}{١٠٠} + \frac{(ص-٢)^٢}{١} = ١$

اكتشف الخطأ في حل كلٍّ منهما، واكتب الصواب.

فكر وناقش

هل تختلف عناصر القطع الناقص الذي معادلته $س^٢ + ٤ص^٢ + ٦س - ٨ص + ٩ = ٠$ عن عناصر القطع الناقص الذي معادلته $٢س^٢ + ٨ص^٢ + ١٢س - ١٦ص + ١٨ = ٠$ ؟ برِّر إجابتك.

تُعطى مساحة القطع الناقص بالمقدار (π أ ب)

مثال ٦

جد مساحة القطع الناقص الذي معادلته $\frac{س^٢}{١٢١} + \frac{ص^٢}{٩} = ١$

الحل

مساحة القطع الناقص = أ ب π

$= ١١ \times ٣ \times \pi = ٣٣\pi$ وحدة مساحة   لماذا؟

١) جد معادلة القطع الناقص في كلٍّ مما يأتي، ثم ارسم منحناه بشكل تقريبي:

أ) رأساه النقطتان (٤ ، ١)، (−٢ ، ١) وطول محوره الأصغر ٤ وحدات.

ب) بؤرتاه النقطتان (٠ ، ∓ ٢) ، ورأساه النقطتان (٠ ، ∓ ٥).

جـ) مركزه نقطة الأصل، وبؤرتاه تقعان على محور السينات، وبعده البؤري ٦ وحدات، والفرق بين طولَيْ محورَيْه يساوي ٢ وحدة.

د) مركزه نقطة الأصل، ومحوره الأكبر يوازي محور السينات، ويمر منحناه بالنقطة (١ ، ٣)، واختلافه المركزي ٠,٥

هـ) يمر بالنقطة (−٨ ، ٣)، ويقع مركزه على المستقيم س=٢، وبؤرتاه تقعان على المستقيم الذي معادلته ص= ٣ واختلافه المركزي ٠,٦ .

و) رأساه النقطتان (٢ ، ٠)، (−٨ ، ٠)، وطول محوره الأصغر يساوي أربعة أمثال المسافة بين أحد رأسيه والبؤرة القريبة من ذلك الرأس.

ز) نهايتا محوره الأصغر النقطتان (∓ ٣ ، ٠) ويمر بالنقطة (٢ ، ٣).

٢) جد عناصر القطع الناقص المعطاة معادلته في كلٍّ مما يأتي:

أ) $\frac{\text{س}^{٢}}{١٤٤} + \frac{\text{ص}^{٢}}{٢٥} = ١$

ب) $\frac{(\text{س}-٤)^{٢}}{٢٥} + \frac{(\text{ص}+١)^{٢}}{٨١} = ١$

جـ) $\text{س}^{٢} + ٤\text{ص}^{٢} = ١٠٠$

د) $\text{س}^{٢} + ٢\text{ص}^{٢} + ٤\text{ص} = ٦\text{س} - ٧$

هـ) $(٢\text{ص}+٤)^{٢} + (٣ - \text{س})^{٢} = ٦٤$

و) $٤\text{س}^{٢} + ٣\text{ص}^{٢} = \frac{٤}{٣}$

٣) جد معادلة القطع الناقص الذي إحدى بؤرتيه مركز الدائرة التي معادلتها $(٢\text{س} - ٦)^{٢} + (٢\text{ص} - ٤)^{٢} = ٣٦$ ، وطول محوره الأصغر يساوي طول قطر هذه الدائرة، ومعادلة محوره الأصغر هي س= −١ .

٤) جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه النقطة (١ ، ١)، وإحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ $(ص-١)^{٢}-١٢س=٠$ ، وطول محوره الأصغر يساوي (١٠)وحدات.

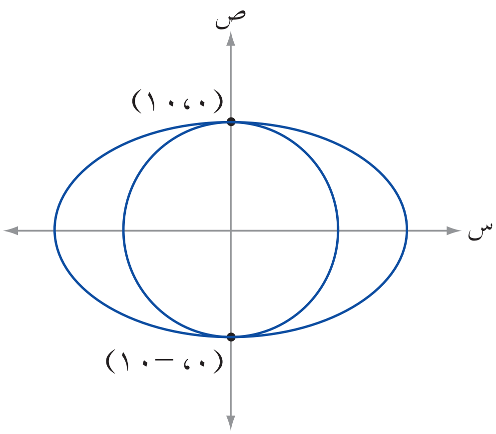
٥) قطع ناقص بؤرتاه النقطتان ب$_{١}$(٤ ، ٠) ، ب$_{٢}$(−٤ ، ٠) والنقطة ن(س ، ص) تقع على منحنى القطع حيث إنَّ محيط المثلث ن ب$_{١}$ ب$_{٢}$ يساوي ٢٤سم، جد معادلته.

٦) تتحرك النقطة و(س ، ص) حيث يتحدد موقعها بالمعادلتين س= ٥+ ٣جاهـ ، ص= ٢+٢جتاهـ ، حيث هـ زاوية متغيرة، بيِّن أنَّ النقطة (و) تتحرك على منحنى قطع ناقص، ثم جد بعده البؤري.

٧) قطع ناقص مساحته(٤٠ π) وحدة مربعة، ورأساه النقطتان ($\mp$ ٨ ، ٠) ، جد معادلته.

٨) جد طول نصف قطر الدائرة التي مساحتها تساوي مساحة القطع الناقص الذي معادلته

$$\frac{س^{٢}}{٨١}+\frac{ص^{٢}}{١٦}=١$$



الشكل (٥−٣٥)

٩) يمثل الشكل (٥−٣٥) دائرة وقطع ناقص مشتركين في المركز (٠ ، ٠)، إذا كانت مساحة القطع الناقص تساوي مثلَيْ مساحة الدائرة المرسومة داخله، فجد كلًّا مما يأتي:

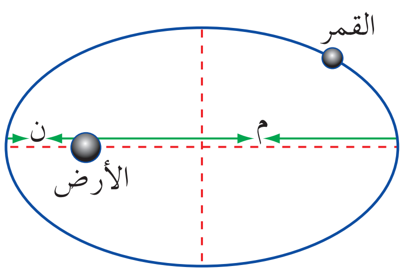
أ) الاختلاف المركزي للقطع الناقص.

ب) معادلة القطع الناقص.

١٠) لمعادلة القطع الناقص $\frac{(س-ل)^{٢}}{أ^{٢}}+\frac{(ص-ك)^{٢}}{ب^{٢}}=١$

أثبت أنَّ $ب^{٢}=أ^{٢}(١-هـ^{٢})$ حيث هـ: الاختلاف المركزي للقطع الناقص.

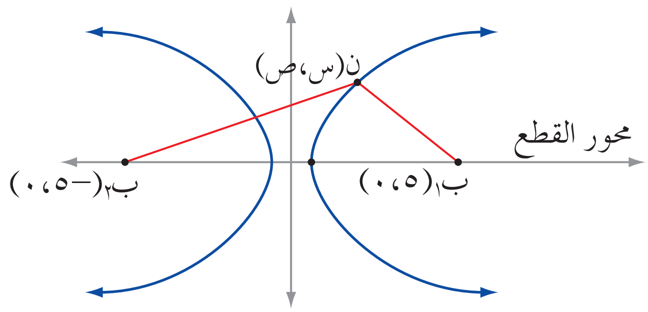
١١) يدور القمر حول الأرض في مدار على شكل قطع ناقص ، حيث تقع الأرض في إحدى بؤرتي المدار، فإذا كانت أطول مسافة بين الأرض والقمر تساوي (م) كم، وأقصر مسافة بينهما تساوي (ن) كم، كما في الشكل (٥−٣٦)، فأثبت أنَّ الاختلاف المركزي لهذا القطع الناقص يساوي $\frac{م-ن}{م+ن}$



الشكل (٥−٣٦)

رابعًا القطع الزائد The Hyperbolic

جد معادلة المحل الهندسي للنقطة ن(س ، ص) التي تتحرك في المستوى بحيث يكون الفرق المطلق بين بُعدَيْها عن النقطتين الثابتتَيْن ب$_1$(٥ ، ٠) ، ب$_2$(−٥ ، ٠) يساوي دائما ٨ وحدات.



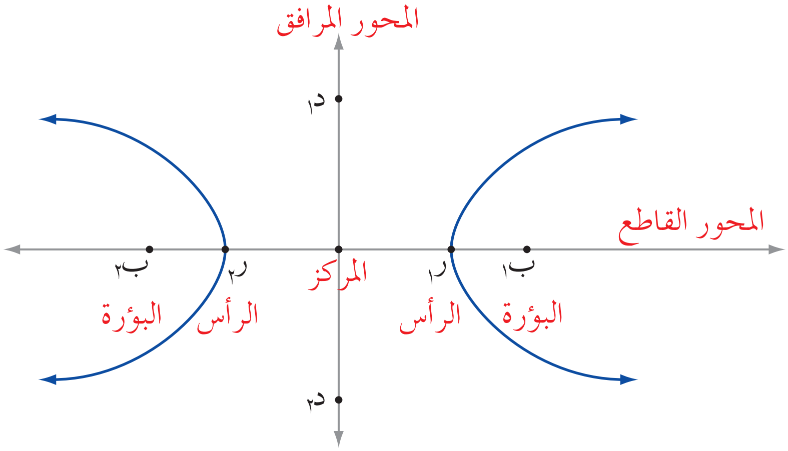
الشكل (٥−٣٧)

تعلمت سابقًا بعض أنواع القطوع المخروطية، والآن ستتعرف نوعا آخر يسمى **القطع الزائد**.

تعريف

القطع الزائد

هو المحل الهندسي للنقطة ن(س ، ص) التي تتحرك في المستوى الإحداثي، بحيث يكون الفرق المطلق بين بُعْدَيها عن نقطتين ثابتتين ب$_1$ ، ب$_2$ (تُسميان البؤرتين) يساوي مقدارًا ثابتًا.

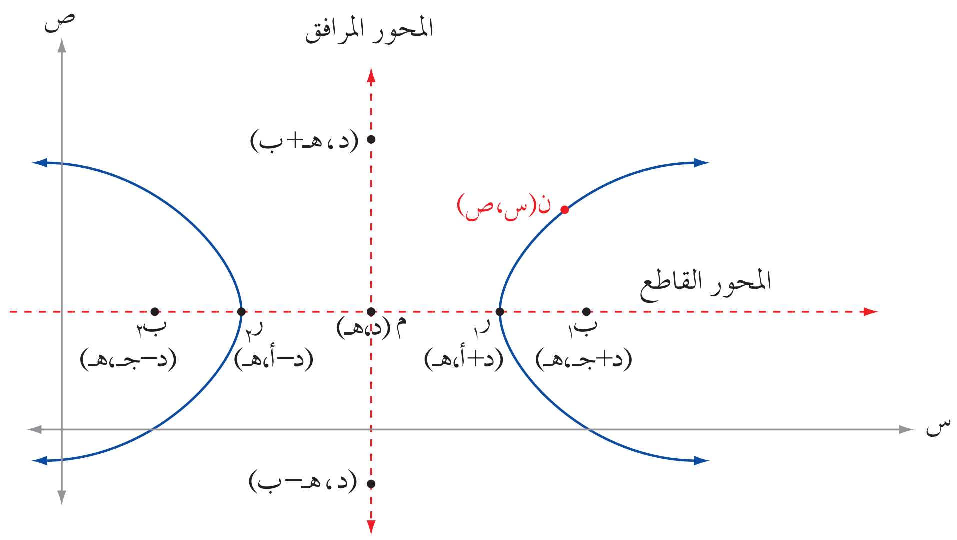


الشكل (٥−٣٨)

يمثل الشكل (٥–٣٨) منحنى قطع زائد، له محوران للتماثل هما المستقيم المارّ بالبؤرتين $ب_١$ ، $ب_٢$ والمستقيم العمودي عليه والمنصف للقطعة المستقيمة $\overline{ب_١ ب_٢}$ ، تُسمى نقطة تقاطع المحورين **مركز القطع الزائد**، وتسمى المسافة بين البؤرتين **البعد البؤري**، أما المستقيم المار بالبؤرتين فيقطع منحنى القطع الزائد في النقطتين $ر_١$، $ر_٢$ وتسميان **رأسي القطع**، والقطعة المستقيمة $\overline{ر_١ ر_٢}$ تُسمى **المحور القاطع** (المحور البؤري)، بينما تسمى القطعة المستقيمة التي طرفيها النقطتان $د_١$ ، $د_٢$ **المحور المرافق** للقطع الزائد.

الصورة القياسية لمعادلة القطع الزائد الذي مركزه النقطة (د ، هـ)، ومحوره القاطع محور السينات أو يوازيه:

اعتمادًا على الشكل (٥–٣٩)، لاحظ أنَّ مركز القطع الزائد هو النقطة م(د، هـ)، ومحوره القاطع يوازي محورالسينات، وبفرض أنَّ البعد البؤري يساوي (٢جـ) ، والمقدار الثابت (٢أ) يساوي الفرق المطلق بين بُعدَي النقطة المتحركة ن عن بؤرَتَيْ القطع، حيث ٢أ < ٢ جـ ، أ ، جـ أعداد حقيقية موجبة وبذلك فإنَّ إحداثيَيْ بؤرتَيْ القطع الزائد هما: $ب_١$(د+جـ ، هـ)، $ب_٢$(د− جـ ، هـ)



الشكل (٥–٣٩)

ومن تعريف القطع الزائد تجد أنَّ:

$|ن ب_١ − ن ب_٢| = ٢أ$ ومنه

$$\sqrt{(س − (د+جـ))^٢ + (ص − هـ)^٢} − \sqrt{(س − (د − جـ))^٢ + (ص − هـ)^٢} = \mp ٢أ$$

$$\sqrt{(س − (د+جـ))^٢ + (ص − هـ)^٢} = \mp ٢أ + \sqrt{(س − (د − جـ))^٢ + (ص − هـ)^٢}$$

وبتربيع الطرفين:

$$((\text{س}-\text{د})-\text{جـ})^{٢}+(\text{ص}-\text{هـ})^{٢}=$$

$$٤\text{أ}^{٢}\pm ٤\text{أ}\sqrt{((\text{س}-\text{د})+\text{جـ})^{٢}+(\text{ص}-\text{هـ})^{٢}}+((\text{س}-\text{د})+\text{جـ})^{٢}+(\text{ص}-\text{هـ})^{٢}$$

وبفك الأقواس وتبسيط المعادلة تجد أنَّ:

$$\text{أ}^{٢}+\text{جـ}(\text{س}-\text{د})=\pm\text{أ}\sqrt{((\text{س}-\text{د})+\text{جـ})^{٢}+(\text{ص}-\text{هـ})^{٢}}$$

وبتربيع الطرفين وإخراج حدود كعوامل مشتركة تجد أنَّ:

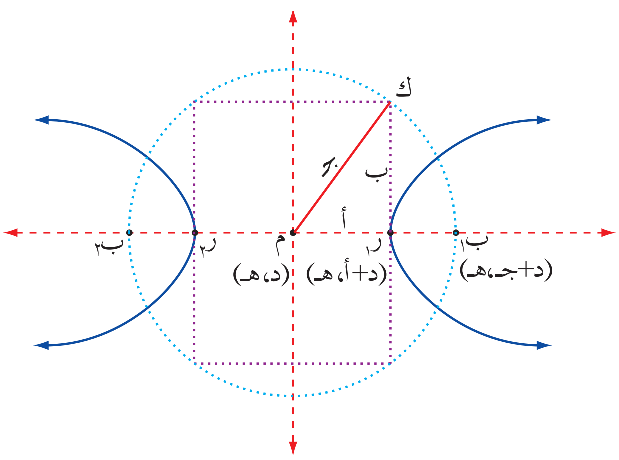
$$(\text{أ}^{٢}-\text{جـ}^{٢})(\text{س}-\text{د})^{٢}+\text{أ}^{٢}(\text{ص}-\text{هـ})^{٢}=\text{أ}^{٢}(\text{أ}^{٢}-\text{جـ}^{٢})$$

وبقسمة طرفي المعادلة على $\text{أ}^{٢}(\text{أ}^{٢}-\text{جـ}^{٢})$ ينتج أنَّ:

$$\frac{(\text{س}-\text{د})^{٢}}{\text{أ}^{٢}}+\frac{(\text{ص}-\text{هـ})^{٢}}{(\text{أ}^{٢}-\text{جـ}^{٢})}=١$$

من تعريف القطع الزائد تجد أنَّ $\text{أ}<\text{جـ}$، وبما أنَّ كلًّا من العددين أ ، جـ موجب فإنَّ

$\text{أ}^{٢}<\text{جـ}^{٢}$ ومنه $\text{أ}^{٢}-\text{جـ}^{٢}<٠$



الشكل (٥-٤٠)

وإذا رُسِمت دائرة مركزها (م)، وطول نصف قطرها (جـ) وبداخلها مستطيل أبعاده (٢أ)، (٢ب) كما في الشكل (٥-٤٠) تجد أنَّ جميع رؤوس المستطيل تمس الدائرة وسينتج المثلث ك م $\text{ر}_{١}$ قائم الزاوية في $\text{ر}_{١}$.

وبتطبيق مبرهنة فيثاغورس على المثلث ك م $\text{ر}_{١}$ ستجد أن:

$\text{جـ}^{٢}=\text{أ}^{٢}+\text{ب}^{٢}$ ومنه $-\text{ب}^{٢}=\text{أ}^{٢}-\text{جـ}^{٢}$

وبتعويض المقدار $(-\text{ب}^{٢})$ في المعادلة ينتج أنَّ:

$$\frac{(\text{س}-\text{د})^{٢}}{\text{أ}^{٢}}-\frac{(\text{ص}-\text{هـ})^{٢}}{\text{ب}^{٢}}=١\quad ....(١)$$

وهي تمثل إحدى الصور القياسية لمعادلة القطع الزائد الذي عناصره هي:

١) مركزه النقطة (د ، هـ).

٢) بؤرتاه هما النقطتان $ب_١$ (د+جـ ، هـ) ، $ب_٢$(د−جـ ، هـ) حيث جـ هي بعد البؤرة عن المركز.

٣) إحداثيا الرأسين هما $ر_١$ (د+ أ ، هـ) ، $ر_٢$(د − أ ، هـ)

٤) محوره القاطع يوازي محور السينات ومعادلته ص= هـ ، وطوله يساوي ٢أ.

٥) محوره المرافق يوازي محور الصادات ومعادلته س= د ، وطوله يساوي ٢ب.

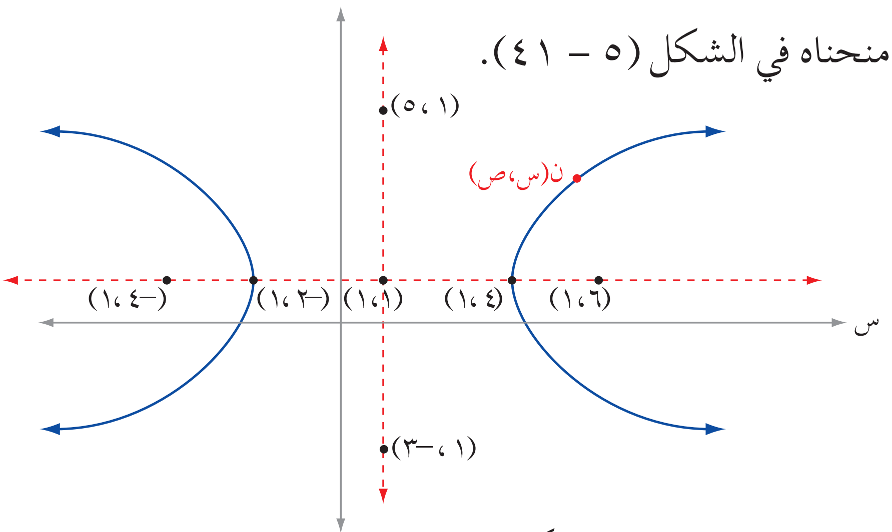
لاحظ أنَّ بعده البؤري (المسافة بين البؤرتين) يساوي ٢جـ. (حيث $جـ^٢ = أ^٢ + ب^٢$)

واختلافه المركزي $= \frac{جـ}{أ}$.

و إحداثيي طرفي محوره المرافق هما النقطتان (د ، هـ+ب) (د ، هـ − ب)

مثال ١

جد معادلة القطع الزائد الممثل منحناه في الشكل (٥ − ٤١).



الشكل (٥− ٤١)

الحل

إحداثيا مركز القطع (١ ، ١)

من تعريف القطع الزائد تجد أنَّ:

نصف طول المحور المرافق ب = ٤ وحدات. لماذا؟

المسافة بين رأس القطع ومركزه أ = ٣ وحدات. لماذا؟

وبما أنَّ المحور القاطع يوازي محور السينات، إذن معادلة القطع الزائد هي:

$$\frac{(س−١)^٢}{٩} − \frac{(ص−١)^٢}{١٦} = ١$$

تدريب ١

جد معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل، ومحوره المرافق يوازي محور الصادات وطوله يساوي ١٢ وحدة، وإحدى بؤرتيه النقطة (١٠ ، ٠)، ثم ارسم منحناه بشكل تقريبي.

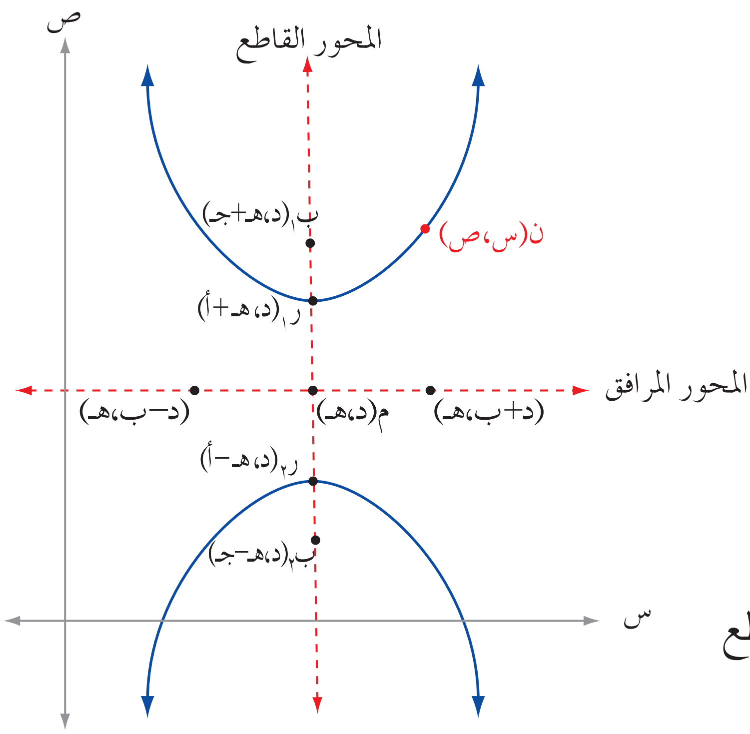
الصورة القياسية لمعادلة القطع الزائد الذي مركزه النقطة (د ، هـ)، ومحوره القاطع محور الصادات أو يوازيه:

إذا كان المحور القاطع للقطع الزائد يوازي محور الصادات، فإنَّ بؤرتي القطع الزائد هما النقطتان:

ب$_{١}$(د ، هـ+جـ)، ب$_{٢}$(د، هـ – جـ) كما يوضح الشكل (٥–٤٢).

وبإجراء الخطوات السابقة تجد أنَّ معادلة القطع الزائد هي:

$$\frac{(\text{ص}-\text{هـ})^{٢}}{\text{أ}^{٢}} - \frac{(\text{س}-\text{د})^{٢}}{\text{ب}^{٢}} = ١ \quad ....(٢) \qquad \text{لماذا؟}$$



الشكل (٥–٤٢)

وهي تمثل إحدى الصور القياسية للقطع الزائد الذي عناصره هي:

١) مركزه النقطة (د ، هـ).

٢) بؤرتاه النقطتان ب$_{١}$(د ، هـ + جـ) ، ب$_{٢}$(د ، هـ – جـ) حيث جـ هي بعد البؤرة عن المركز.

٣) إحداثيا الرأسين هما ر$_{١}$(د، هـ + أ) ، ر$_{٢}$(د، هـ – أ)

٤) محوره القاطع يوازي محور الصادات ومعادلته س= د ، وطوله يساوي ٢أ

٥) محوره المرافق يوازي محور السينات ومعادلته ص= هـ ، وطوله يساوي ٢ب.

لاحظ أنَّ بعده البؤري (المسافة بين البؤرتين) يساوي ٢ جـ. (حيث جـ^{٢} = أ^{٢} + ب^{٢})

واختلافه المركزي = $\frac{\text{جـ}}{\text{أ}}$.

و إحداثيي طرفي محوره المرافق هما النقطتان (د + ب، هـ) (د – ب، هـ)

لاحظ من تعريف القطع الزائد أنَّ جـ > أ، وأنَّ كلًّا من القيمتين أ ، جـ موجبتان، ومنه $\frac{\text{جـ}}{\text{أ}} > \text{١}$ (لماذا؟)
ولذلك سمي القطع زائدًا، لأنَّ اختلافه المركزي زاد عن واحد.

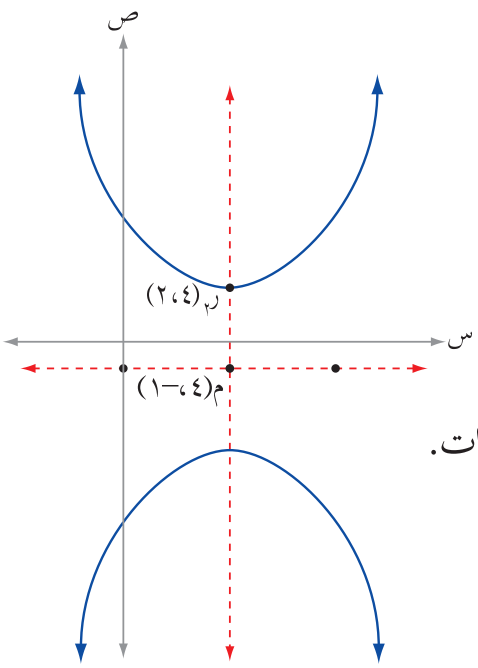
مثال ٢

جد معادلة القطع الزائد في كل مما يأتي:

١) مركزه النقطة (٤ ، −١)، وأحد رؤوسه النقطة (٤ ، ٢)، وطول محوره المرافق (٨) وحدات.

٢) بؤرتاه النقطتان (٦ ، ٠) ، (٠ ، ٠) ويقطع منحناه محور السينات عند س = ٥ .

الحل



الشكل (٥–٤٣)

١) لاحظ أنَّ المركز والرأس يقعان على مستقيم يوازي محور الصادات، أي أنَّ المحور القاطع يوازي محور الصادات.

إذن معادلة القطع الزائد هي:

$$\frac{(\text{ص} - \text{هـ})^{\text{٢}}}{\text{أ}^{\text{٢}}} - \frac{(\text{س} - \text{د})^{\text{٢}}}{\text{ب}^{\text{٢}}} = \text{١}$$

بما أنَّ م(٤ ، −١) ، ر(٤ ، ٢)، فإنَّ أ = ٣ لماذا؟

وحيث أنَّ طول المحور المرافق = ٨ وحدات، إذن ب = ٤ وحدات.

ومنه فإن معادلة القطع هي:

$$\frac{(\text{ص} + \text{١})^{\text{٢}}}{\text{٩}} - \frac{(\text{س} - \text{٤})^{\text{٢}}}{\text{١٦}} = \text{١}$$

انظر الشكل (٥–٤٣).

٢) بما أنَّ البؤرتين تقعان على محور السينات ، فإنَّ المحور القاطع يقع على محور السينات أيضا،
وتكون معادلة القطع الزائد هي:

$$\frac{(\text{س} - \text{د})^{\text{٢}}}{\text{أ}^{\text{٢}}} - \frac{(\text{ص} - \text{هـ})^{\text{٢}}}{\text{ب}^{\text{٢}}} = \text{١}$$

البؤرتان (٦ ، ٠)، (٠ ، ٠) ومنه جـ = ٣.

مركز القطع الزائد هو النقطة (٣ ، ٠)

إحداثيا أحد رؤوس القطع النقطة (٥ ، ٠)، ومنه أ = ٢

ومن العلاقة بين عناصر القطع الزائد، تجد أنَّ:

$ب^{٢} = جـ^{٢} - أ^{٢}$

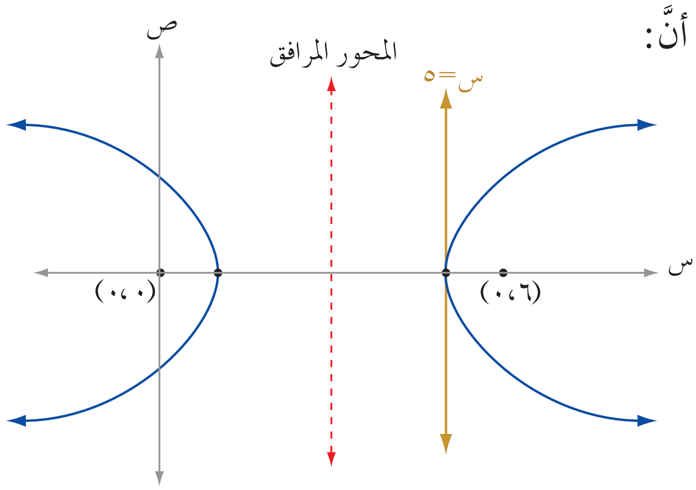
$= ٩ - ٤$

$= ٥$

إذن معادلة القطع هي:

$$\frac{(س-٣)^{٢}}{٤} - \frac{ص^{٢}}{٥} = ١$$

انظر الشكل (٥-٤٤)



الشكل (٥-٤٤)

تدريب ٢

جد معادلة القطع الزائد الذي نهايتا محوره المرافق النقطتان (∓٢ ، ٠) ويمر بالنقطة (١ ، ٣).

مثال ٣

جد عناصر القطع الزائد الذي معادلته $\frac{(س-١)^{٢}}{١٦} - \frac{(ص+٢)^{٢}}{٩} = ١$

ثم ارسم منحناه بشكل تقريبي.

الحل

من المعادلة تجد أنَّ المحور القاطع للقطع موازٍ لمحور السينات.

$أ^{٢} = ١٦$ ، ومنه أ = ٤

$ب^{٢} = ٩$ ، ومنه ب = ٣

وبذلك فإنَّ جـ = ٥

وبذلك تجد أنَّ عناصر القطع الزائد هي:

١) مركزه هو النقطة (١ ، -٢).

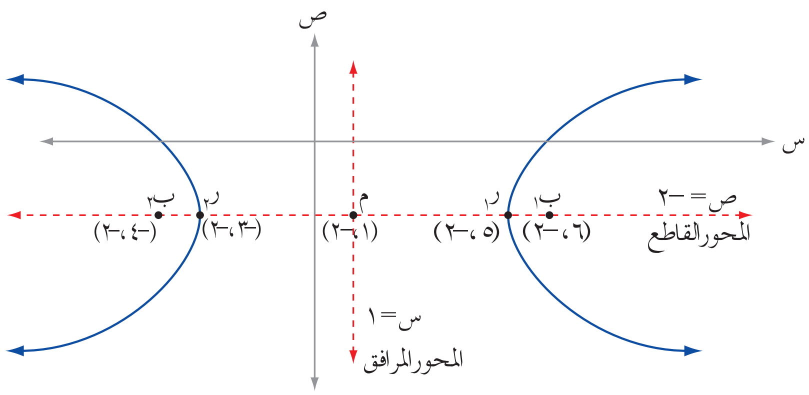
٢) بؤرتاه: $ب_{١}$ (د+ جـ ، هـ) = (٦ ، -٢) ، $ب_{٢}$ (د- جـ ، هـ) = (-٤ ، -٢)

٣) رأساه: $ر_١$ (د + أ ، هـ) = (٥ ، −٢) ، $ر_٢$ (د − أ ، هـ) = (−٣ ، −٢)

٤) معادلة محوره القاطع ص= −٢، وطوله =٢أ = ٨ وحدات.

٥) محوره المرافق يوازي محور الصادات ومعادلته س=١، وطوله= ٢ب = ٦ وحدات.

والشكل (٥−٤٥) يمثل منحنى القطع.



الشكل (٥−٤٥)

تدريب ٣

جد عناصر القطع الزائد الذي معادلته $\frac{ص^٢}{٢٥} - \frac{(س-١)^٢}{١٤٤} = ١$ ثم ارسم منحناه بشكل تقريبي.

مثال ٤

جد عناصر ومعادلة القطع الزائد الذي رأساه النقطتان (١ ، ∓ ٤) ، واختلافه المركزي $\frac{٥}{٢}$ ،
ثم ارسم منحناه بشكل تقريبي.

الحل

معادلة القطع الزائد على الصورة : $\frac{(ص-هـ)^٢}{أ^٢} - \frac{(س-د)^٢}{ب^٢} = ١$ لماذا؟

٢أ = ٨، ومنه أ = ٤

بما أنّ $\frac{جـ}{أ} = \frac{٥}{٢}$

إذن جـ = ١٠ ، ومنه ب = $٢\sqrt{٢١}$

وبذلك فإنّ عناصر هذا القطع هي:

١) مركزه النقطة (١ ، ٠) لماذا؟

٢) بؤرتاه النقطتان (١ ، ∓ ١٠).

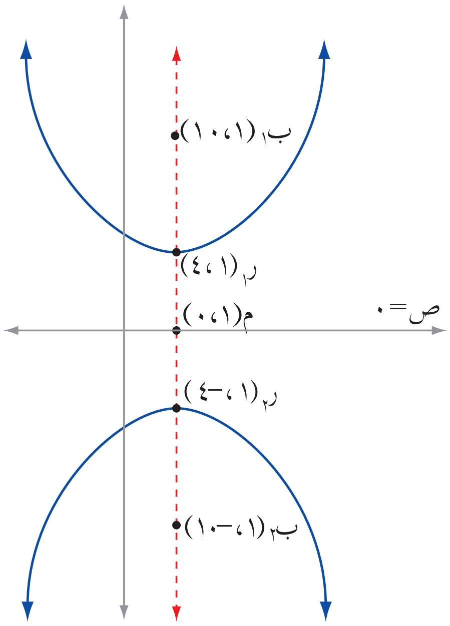
٣) رأساه النقطتان (١ ، ∓ ٤)

٤) المحور القاطع يوازي محور الصادات ومعادلته س=١، وطوله ٨ وحدات.

٥) المحور المرافق ينطبق على محور السينات ومعادلته ص=٠، وطوله $٤\sqrt{٢١}$ وحدة.

٦) معادلة القطع الزائد هي: $\frac{ص^{٢}}{١٦} - \frac{(س-١)^{٢}}{٨٤} = ١$

والشكل (٥-٤٦) يمثل منحنى القطع.



الشكل (٥-٤٦)

تدريب ٤

جد معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل، وإحدى بؤرتيه النقطة (-٥، ٠) واختلافه المركزي $\frac{٥}{٣}$.

اعتمادًا على مثال(٣) تجد أنَّ معادلة القطع الزائد وهي :

$$\frac{(س-١)^{٢}}{١٦} - \frac{(ص+٢)^{٢}}{٩} = ١$$

وبفك حدود المعادلة لتحويلها إلى الصورة العامة تجد ما يلي:

$$٩(س - ١)^{٢} - ١٦(ص + ٢)^{٢} = ١٤٤$$

$$٩(س^{٢} - ٢س + ١) - ١٦(ص^{٢} + ٤ص + ٤) - ١٤٤ = ٠$$

$$٩س^{٢} - ١٨س + ٩ - ١٦ص^{٢} - ٦٤ص - ٦٤ - ١٤٤ = ٠$$

$$٩س^{٢} - ١٦ص^{٢} - ١٨س - ٦٤ص - ١٩٩ = ٠$$

لاحظ أنَّ المعادلة هي على الصورة: أ س^{٢} + ب ص^{٢} + جـ س + د ص + هـ = ٠

الصورة العامة لمعادلة القطع الزائد وهي :

أ س^{٢} + ب ص^{٢} + جـ س + د ص + هـ = ٠ ، حيث أ ، ب ، جـ ، د ، هـ أعداد حقيقية

أ × ب < ٠

تحدث إلى زملائك

ما المعطيات اللازمة لإيجاد معادلة قطع زائد؟

مثال ٥

جد عناصر القطع الزائد الذي معادلته:

$$١٢س^٢ - ٤ص^٢ + ٢٤س + ١٦ص - ٥٢ = ٠$$

الحل

$$١٢(س^٢ + ٢س) - ٤(ص^٢ - ٤ص) = ٥٢$$

وبإكمال المقدارين داخل الأقواس إلى مربعين كاملين تجد أنَّ:

$$١٢(س^٢ + ٢س + (١)^٢ - (١)^٢) - ٤(ص^٢ - ٤ص + (-٢)^٢ - (-٢)^٢) = ٥٢$$

$$١٢(س+١)^٢ - ١٢ - ٤(ص-٢)^٢ + ١٦ = ٥٢$$

$$١٢(س+١)^٢ - ٤(ص-٢)^٢ = ٤٨$$

$$\frac{(س+١)^٢}{٤} - \frac{(ص-٢)^٢}{١٢} = ١$$

أكمل الحل لإيجاد عناصر القطع الزائد.

تدريب ٥

جد عناصر القطع الزائد إذا علمت معادلته في كل مما يلي:

١) $٢س^٢ - ٤س = ٥ص^٢ + ٣٠ص + ٥٣$

٢) $٩س^٢ - ٤ص^٢ = ٣٦$

تحدث إلى زملائك

١) كيف تستطيع أن تحدد نوع القطع المخروطي من الصورة العامة لمعادلته؟

٢) كيف تستطيع أن تحدد نوع القطع المخروطي من الصورة القياسية لمعادلته؟

٣) كيف تحدد نوع القطع المخروطي (مكافئًا، أو ناقصًا، أو زائدًا) إذا عُلِمَ اختلافه المركزي؟

١) جد معادلة القطع الزائد في كلٍّ مما يأتي، ثم ارسم منحناه بشكل تقريبي:

أ) رأساه النقطتان (∓ ٣ ، ٠)، وطول محوره المرافق ٤ وحدات.

ب) بؤرتاه النقطتان (٠ ، ∓ ١٣) ، ورأساه النقطتان (٠ ، ∓ ٥).

جـ) مركزه نقطة الأصل، ومحوره القاطع منطبق على محور الصادات وطوله ١٢ وحدة، واختلافه المركزي $\frac{٣}{٢}$

د) رأساه النقطتان (−٣ ، ١)، (١ ، ١) ويمر بالنقطة (٢ ، ٣).

هـ) مركزه نقطة الأصل، ومحوره القاطع منطبق على محور السينات، وطوله ٨ وحدات، وطول محوره المرافق ٤ وحدات.

و) مركزه نقطة الأصل وبؤرتاه تقعان على محور الصادات، وطول محوره المرافق ٢ $\sqrt{٢}$ وحدة، واختلافه المركزي ٣.

٢) جد عناصر كلِّ قطع زائد إذا علمت معادلته في كلٍّ مما يأتي:

أ) $\frac{س^٢}{١٤٤} - \frac{ص^٢}{٢٥} = ١$

ب) $\frac{(ص - ٢)^٢}{٣٦} - \frac{(س + ١)^٢}{١٦} = ١$

جـ) $ص^٢ = ٤س^٢ - ١٦$

د) $٤س^٢ - ص^٢ - ١٠ص = ١٦س + ١٧$

هـ) $٤س^٢ - ٣ص^٢ = \frac{٤}{٣}$

و) $(س + ٢)^٢ - (ص - ٣)^٢ = ١$

٣) جد معادلة القطع الزائد الذي إحدى بؤرتيه مركز الدائرة التي معادلتها

$(٢س - ٦)^{٢} + (٢ص - ٤)^{٢} = ٣٦$ ، وطول محوره المرافق يساوي طول قطر هذه الدائرة،

ومعادلة محوره المرافق هي س= −١ .

٤) جد معادلة القطع الزائد الذي أحد رأسيه مركز الدائرة التي معادلتها

$(٢س - ٨)^{٢} + (٢ص - ٦)^{٢} = ١٦$ وطول محوره المرافق يساوي طول قطر هذه الدائرة،

ومركزه يقع على المستقيم الذي معادلته س= −١ .

٥) قطع زائد مركزه نقطة الأصل ومعادلته ل $س^{٢}$ − ك $ص^{٢} = ٩٠$، وطول محوره القاطع $(٦\sqrt{٢})$

وحدة، وبؤرتاه تنطبقان على بؤرتَيْ القطع الناقص الذي معادلته $٩س^{٢} + ١٦ص^{٢} = ٥٧٦$،

جد قيمة كل من ل ، ك حيث ل ، ك أعداد حقيقية.

٦) تتحرك النقطة و(س ، ص) حيث يتحدد موقعها بالمعادلتين س= ٥قاهـ −٤،

ص= ٢−٣ظاهـ ، هـ زاوية متغيرة، جد معادلة مسار النقطة (و) ، ثم بيِّن نوعه.

١) جد عناصر كلِّ قطع إذا عُلِمَت معادلته في كلٍّ مما يأتي:

أ) $س^٢ = ٣ ص + ٢$

ب) $ص^٢ = ١٥ - ٢س^٢$

جـ) $٢س^٢ + ٢ص^٢ - ٤س + ١٢ص - ١٢ = ٠$

د) $٩س^٢ + ٨ص - ٤ = ٤ص^٢ + ٣٦$

هـ) $٣(س+٢)^٢ - (ص + \frac{٣}{٢})^٢ = \frac{٣٩}{٤}$

و) $س^٢ = ٣ص + ٢ص^٢$

٢) جد معادلة القطع المخروطي في كلٍّ من الحالات الآتية:

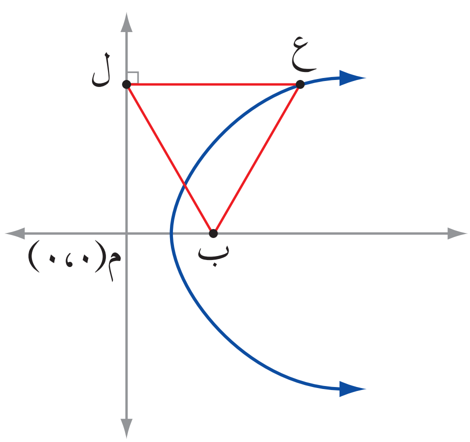
أ) قطع مكافئ محوره يوازي محور السينات، ويمر بالنقاط (٣ ، ٣)، (٦ ، ٠) ، (٠ ، ٢).

ب) قطع ناقص مركزه النقطة (٣ ، ٢)، وبؤرتاه النقطتان (١ ، ٢)، (٥ ، ٢) وطول محوره الأكبر يساوي ٦ أمثال البعد البؤري.

جـ) قطع زائد بؤرتاه النقطتان (٣ ، −٢)، (٣ ، ٤)، ورأساه النقطتان (٣ ، −١)، (٣ ، ٣).

٣) جد معادلة المحل الهندسي لنقطة تتحرك في المستوى الإحداثي؛ بحيث تبعد بعدًا متساويًا عن المحورين الإحداثيين، وتمر أثناء حركتها في الربعين الثاني والرابع.

٤) الشكل (٥−٤٧) يمثل منحنى قطع مكافئ بؤرته النقطة ب، إذا علمت أنَّ المثلث ب ع ل متطابق الأضلاع، طول ضلعه (٤٠) وحدة، فجد معادلة القطع المكافئ.



الشكل (٥−٤٧)

٥) جد معادلة المحل الهندسي للنقطة المتحركة في المستوى الإحداثي ن(س ، ص) التي يكون بُعدها عن المستقيم س= ٧ يساوي مثلَيْ بُعدها عن النقطة ك(١ ، ٠)، وبيِّن نوعه.

٦) تتحرك النقطة و(س ، ص) في المستوى الإحداثي حيث يتحدد موقعها في اللحظة ن $\leq$ ٠ بالمعادلتين س= جتا٢ن ، ص= ٣جان، جد معادلة مسار النقطة و ، ثم بيِّن نوعه.

٧) جد معادلة المحل الهندسي للنقطة م (س ، ص) المتحركة في المستوى بحيث تبعد بُعدًا ثابتًا مقداره (٣) وحدات عن المستقيم الذي معادلته ٣س + ٤ص= ٥ ، وتمر أثناء حركتها بمركز الدائرة التي معادلتها $(س - ٤)^{٢} + (ص - ٢)^{٢} = ٩$

٨) قطع مخروطي اختلافه المركزي < ١، وبؤرتاه (−٢ ، −١)، (٢ ، −١) ويمر بنقطة الأصل، جد عناصر هذا القطع.

٩) إذا كانت المعادلة: ك $س^{٢}$ + ٣$ص^{٢}$ = ١١ تمثل معادلة قطع ناقص محوره الأكبر مواز لمحور السينات، أثبت أنَّ ك = $\frac{١١}{ب^{٢}+جـ^{٢}}$

١٠) إذا كان $هـ_{١}$ ، $هـ_{٢}$ يمثلان الاختلافين المركزيين للقطعين المخروطيين اللَّذين معادلتاهما:

$$\frac{س^{٢}}{ل^{٢}} - \frac{ص^{٢}}{ك^{٢}} = ١$$

$$\frac{ص^{٢}}{ك^{٢}} - \frac{س^{٢}}{ل^{٢}} = ١$$

فأثبت أنَّ: $\frac{١}{هـ^{٢}_{١}} + \frac{١}{هـ^{٢}_{٢}} = ١$

١١) يتكون هذا السؤال من ١٣ فقرة من نوع الاختيار من متعدد، لكل منها ٤ بدائل واحد منها فقط صحيح، ضع دائرة حول رمز البديل الصحيح:

(١) طول نصف قطر الدائرة التي معادلتها $(٢س+٤)^{٢} + (٢ص - ١٠)^{٢} = ٣٦$ يساوي:

أ) ٣ وحدات ب) ٦ وحدات جـ) ٧ وحدات د) ٩ وحدات

(٢) معادلة دليل القطع المكافئ الذي معادلته ص^{٢} + ٤س − ٨ = ٠ هي:

أ) س=١ ب) س= ٣ جـ) ص= ١ د) ص= ٣

(٣) نوع القطع المخروطي الذي معادلته ص^{٢}= ٣س+ ٢س^{٢} هو:

أ) دائرة ب) مكافئ جـ) ناقص د) زائد

(٤) إذا كانت بؤرة القطع المكافئ الذي معادلته (ص+١)^{٢} = −٨(س + د) هي النقطة

(٣ ، −١) ، فإن د تساوي:

أ) −٥ ب) −٣ جـ) ٣ د) ٥

(٥) إحداثيا نهايتي المحور المرافق للقطع الزائد الذي معادلته (س+٢)^{٢} −(ص−٣)^{٢}=١ هي:

أ) (−٢ ∓ ١، ٣) ب) (−٢، ٣ ∓ ١)

جـ) (٢ ∓١، −٣) د) (٢، −٣ ∓ ١)

(٦) طول المحور الأصغر للقطع الناقص الذي يمس كلًّا من المستقيمات س=١، س=٩ ، ص=−١ ، ص = ٥ ، يساوي:

أ) ٣ وحدات ب) ٤ وحدات جـ) ٦ وحدات د) ٨ وحدات.

(٧) تتحرك النقطة ن(س ، ص) في المستوى بحيث يتحدد موقعها بالمعادلة

$$\frac{س^{٢}}{ل} + \frac{ص^{٢}}{ل - ١٦} = ١$$

حيث ل عدد ثابت، إذا كانت ٠ < ل < ١٦، فإنَّ المحل الهندسي لحركة النقطة ن يمثل:

أ) قطعًا مكافئًا ب) قطعًا ناقصًا جـ) قطعًا زائدًا د) دائرة

(٨) تتحرك النقطة ن(س ، ص) في الربعين الأول والثالث من المستوى الإحداثي، حيث تبقى على بُعدينِ متساويينِ من المحورين الإحداثيين. إنَّ معادلة المحل الهندسي للنقطة ن هي:

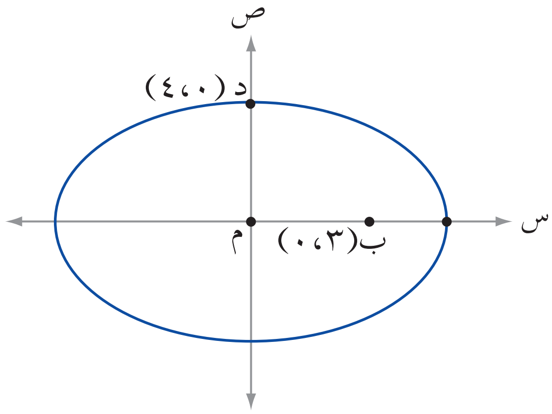
أ) ص = س^{٣} ب) س = ص^{٣} جـ) ص = − س د) ص = س

(٩) قطع مخروطي معادلته ٩(س + ١)^{٢} − ١٦(ص − ٢)^{٢} = −١٤٤ ، فإنَّ اختلافه المركزي يساوي:

أ) $\frac{٣}{٥}$ ب) $\frac{٥}{٣}$ جـ) $\frac{٤}{٥}$ د) $\frac{٥}{٤}$

(١٠) الشكل (٥–٤٨) يمثل منحنى قطع ناقص مركزه نقطة الأصل، وإحدى بؤرتيه النقطة ب(٣ ، ٠)، وإحدى نهايتي محوره الأصغر النقطة د(٠ ، ٤). فإنَّ طول محوره الأكبر يساوي:

أ) ١٢ ب) ١٠ جـ) ٧ د) ٥



الشكل (٥–٤٨)

(١١) مساحة القطع الناقص الذي معادلته ٤س^{٢} + ٩ص^{٢} = ٣٦ بالوحدات المربعة يساوي:

أ) ٥ π ب) ٦ π جـ) ١٣ π د) ٣٦ π

(١٢) قطع مكافئ يقع رأسه على مركز القطع الزائد الذي معادلته $\frac{٩}{٢}$ (س − ١)^{٢} − ٨(ص−٢)^{٢} = ٧٢ ، وبؤرته (١ ، ٣)، فإنَّ معادلة محور تماثل القطع المكافئ هي:

أ) س = ١ ب) س = −١ جـ) ص = ٢ د) ص = −٢

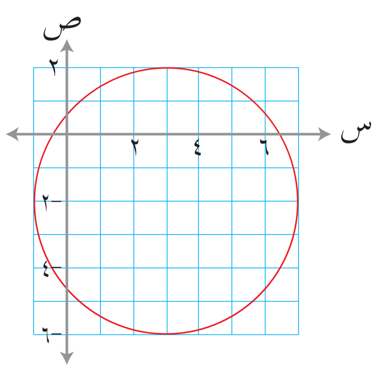
* (١٣) معادلة الدائرة الممثلة بالشكل (٥–٤٩) هي:

أ) س^{٢} + ص^{٢} − ٦س + ٤ص − ٩ = ٠

ب) س^{٢} + ص^{٢} − ٦س + ٤ص + ٩ = ٠

جـ) س^{٢} + ص^{٢} − ٦س − ٤ص − ٣ = ٠

د) س^{٢} + ص^{٢} − ٦س + ٤ص − ٣ = ٠



الشكل (٥–٤٩)

(*) السؤال من أسئلة الاختبارات الدولية

الوحدة السادسة

٦

الإحصاء والاحتمالات

Statistic and Probability

في هذه الوحدة ستتعرّف جزءًا من علم الإحصاء، وهو الجزء الذي يعبر عن العلم الذي يقوم على جمع المعلومات وتصنيفها وعرضها وتحليلها؛ ليتم بعد ذلك استخلاص النتائج والتوصيات المفيدة في المجالات الصناعية والاجتماعية والاقتصادية والزراعية والبحث العلمي وغيرها.

أما الاحتمالات فتهتم بحساب فرصة وقوع حادث ما في التجارب العشوائية، ويُستفاد منها في التنبؤ بقضايا مستقبلية.

يتوقع من الطالب بعد نهاية هذه الوحدة أن يكون قادرًا على:

- تحديد طبيعة الارتباط بين متغيرين من خلال شكل الانتشار.
- حساب معامل ارتباط (بيرسون) بين متغيرين.
- تفسير دلالة معامل ارتباط (بيرسون) بالنسبة إلى شكل الانتشار.
- تحديد أثر التعديلات الخطية في قيمة معامل ارتباط (بيرسون).
- إيجاد معادلة خط الانحدار للارتباط بين متغيرين.
- تطبيق معادلة خط الانحدار للتنبؤ بقيم أحد المتغيرين.
- تعرف المتغير العشوائي المنفصل وحَلّ مسائل عملية عليه.
- تعرف توزيع ذي الحدين و حساب احتمالات خاصة بها.
- تعرف العلامة المعيارية وحسابها وتفسيرها.
- تعرف المتغير العشوائي المتصل واستقصاء خصائص منحنيات التوزيع الطبيعي.
- استخدام خصائص التوزيع الطبيعي وجدول المساحات الخاص به في حل مشكلات عملية.

الفصل الأول

الإحصاء

Statistic

النتاجات

- تحدد طبيعة الارتباط بين متغيرين من خلال شكل الانتشار.
- تحسب معامل ارتباط (بيرسون) بين متغيرين.
- تفسر دلالة معامل ارتباط (بيرسون) بالنسبة إلى شكل الانتشار.
- تجد أثر التعديلات الخطية في قيمة معامل ارتباط (بيرسون).
- تجد معادلة خط الانحدار للارتباط بين متغيرين.
- تطبق معادلة خط الانحدار للتنبؤ بقيم أحد المتغيرين، وتجد الخطأ في التنبؤ.

أولًا الارتباط Correlation

في محاضرة حول الأمراض المزمنة التي يتعرض لها الإنسان، قام الطبيب المحاضر بتوجيه الأسئلة الآتية لطلبته:

١) هل هناك علاقة بين وزن الإنسان وضغط دمه؟

٢) ما نوع هذه العلاقة؟

كثيراً ما تواجهنا مسائل عملية أو مواقف حياتية تتضمن متغيرين، ويكون الهدف منها معرفة في ما إذا كان هناك علاقة بينهما، وما نوعها؟ وما قوة هذه العلاقة؟

ففي المسألة الواردة بداية الدرس لاحظ أنَّ هناك متغيرين هما وزن الإنسان وضغط دمه.

فإذا كان لدينا المتغيران س، ص، وكان حجم العينة (ن)، فيمكن كتابة البيانات على صورة أزواج مرتبة: (س$_{١}$ ، ص$_{١}$)، (س$_{٢}$ ، ص$_{٢}$)، (س$_{٣}$ ، ص$_{٣}$)، ....، (س$_{ن}$ ، ص$_{ن}$)، حيث يمكن تمثيل الأزواج المرتبة في المستوى الإحداثي بمجموعة من النقط. ويسمى الشكل الناتج **شكل الانتشار** .

ومن شكل الانتشار يمكننا معرفة نوع العلاقة بين المتغيرين س، ص، وقوتها.

وهذا يقودنا إلى تعريف الارتباط على النحو الآتي:

تعريف

الارتباط الخطي: هو علاقة بين متغيرين بحيث إنَّ التغير في أحدهما يؤدي إلى التغير في الآخر زيادةً أو نقصانًا، فإذا كان المتغيران يزيدان معًا، أو ينقصان معًا فإنَّ العلاقة بينهما طردية، أما إذا كان أحدهما ينقص والآخر يزداد، فإنَّ العلاقة بينهما عكسية.

مثال ١

يبين الجدول الآتي علامات ستة طلاب (ص) وعدد ساعات الدراسة اليومي (س) لكلٍّ منهم:

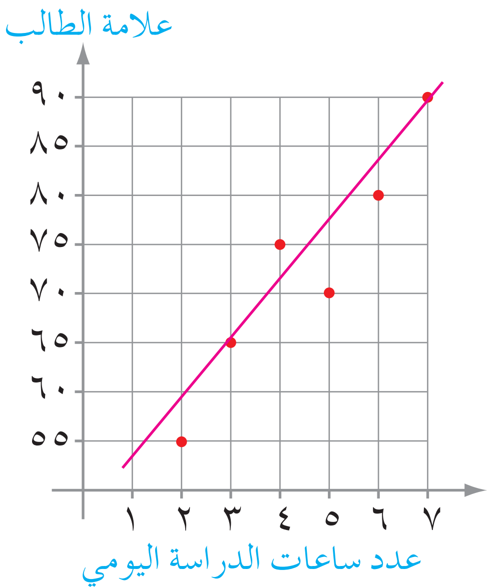
رقم الطالب	١	٢	٣	٤	٥	٦
عدد ساعات الدراسة (س)	٢	٣	٥	٦	٤	٧
علامة الطالب (ص)	٥٥	٦٥	٧٠	٨٠	٧٥	٩٠

ارسم شكل الانتشار بين المتغيرين س، ص، وبين نوع الارتباط بين عدد ساعات الدراسة اليومي، وعلامة الطالب.

الحل

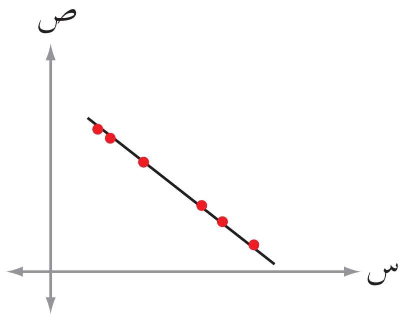
لاحظ من الشكل (٦–١) الذي يمثل شكل الانتشار أنَّ هناك ارتباطًا بين عدد ساعات الدراسة اليومي، وعلامة الطالب؛ إذ تزداد علامة الطالب (ص) بازدياد عدد ساعات الدراسة اليومي (س).

يُسمى مثل هذا النوع من الارتباط **ارتباطًا طرديًّا** إيجابيًّا.



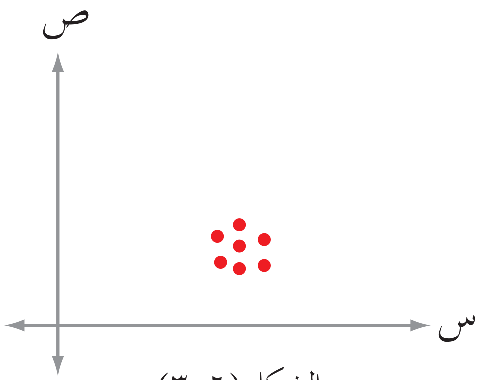
الشكل (٦–١)

والآن سندرس حالات أخرى؛ ففي الشكل (٦–٢) نلاحظ أنَّه كلما ازدادت قيم المتغير (س) فإنَّ قيم المتغير (ص) تتناقص. ويسمى مثل هذا النوع من الارتباط **ارتباطًا عكسيًّا** سلبيًّا.



الشكل (٦–٢)

وهناك بعض الحالات لا يوجد ما يشير إلى أي نوع من الارتباط بين المتغيرين (س)، (ص)، حيث تتجمع النقاط على شكل دائرة أو بشكل عشوائي؛ مما يدل على **عدم وجود ارتباط خطي** كما في الشكل(٦–٣)



الشكل (٦–٣)

في الشكل (٦–١)، والشكل (٦–٢) لاحظ أنَّ النقط تتجمع حول خط مستقيم أو تقع على خط مستقيم؛ لذلك يسمَّى هذا الارتباط **ارتباطًا خطيًّا**

وبالتالي فإنَّ الارتباط في الشكل(٦–١) **ارتباطًا خطيًّا طرديًّا** ، ويسمَّى الارتباط في الشكل(٦–٢) **ارتباطًا خطيًّا عكسيًّا**.

فكر وناقش

في أي أشكال الانتشار السابقة يكون الارتباط قويًّا، ومتى يكون ضعيفًا؟ برِّر إجابتك.

تدريب ١

يبين الجدول الآتي درجات الحرارة (س) و عدد عبوات الماء المبيعة (ص)، في أحد المحلات التجارية خلال خمسة أيام من شهر آب في إحدى السنوات:

درجة الحرارة (س)	٣٢	٣٤	٣٦	٣٨	٤٠
عدد العبوات المبيعة (ص)	١١	١٤	١٥	١٨	٢٠

ارسم شكل الانتشار بين المتغيرين س، ص، وبيِّن نوع الارتباط بينهما.

نشاط(١)

المعادلات الآتية تمثل علاقات ارتباطية بين المتغيرين س، ص. ارسم شكل الانتشار لكلٍّ منها، ثم أجب عن الأسئلة التي تليها:

١) ص = ٢س + ٥ ٢) ص = ٣س – ٧ ٣) ص = ٥س + ٢

أ) ما إشارة معامل س في كلِّ معادلة؟

ب) ما نوع الارتباط بين المتغيرين س، ص في كلِّ معادلة ؟

جـ) ماذا تلاحظ؟

نشاط(٢)

المعادلات الآتية تمثل علاقات ارتباطية بين المتغيرين س، ص. ارسم شكل الانتشار لكلٍّ منها، ثم أجب عن الأسئلة التي تليها:

١) ص = ٤ – س ٢) ص = –٣ – ٢س ٣) ص = –٥س + ١

أ) ما إشارة معامل س في كلِّ معادلة؟

ب) ما نوع الارتباط بين المتغيرين س، ص في كلِّ معادلة ؟

جـ) ماذا تلاحظ؟

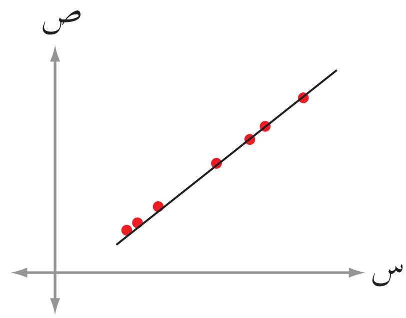
تدريب ٢

بيِّن نوع الارتباط بين المتغيرين س، ص، في العلاقة ص = ١–٣س. برِّر إجابتك.

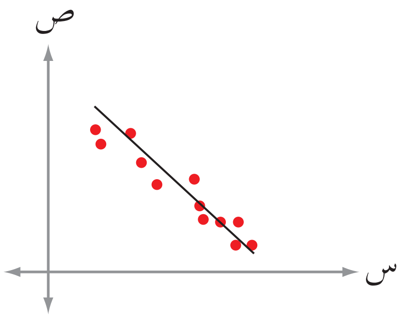
١) الجدول الآتي يمثل علامات ستة طلاب في مبحثي العلوم (س) والرياضيات (ص) في امتحان قصير، نهايته العظمى (١٠)، ارسم شكل الانتشار بين المتغيرين س، ص، وبيِّن نوع الارتباط بينهما.

رقم الطالب	١	٢	٣	٤	٥	٦
مبحث العلوم (س)	٦	٤	٨	٧	٢	٣
مبحث الرياضيات (ص)	٩	٨	١٠	٨	٥	٢

٢) أ) حدد نوع الارتباط بين المتغيرين س، ص في كل من الشكلين (٦–٤)، (٦–٥):



الشكل (٦–٤)



الشكل (٦–٥)

ب) قال أحمد: إنَّ شكل الانتشار الموضح في الشكل (٦–٥) يمكن أن يُعبَّر عنه بشكل تقريبي بالمعادلة: ص = ٦ +٣س. هل توافق أحمد بما قال؟ برر إجابتك.

٣) أعط أمثلة حياتية لمتغيرين يكون الارتباط بينهما:

أ) طرديًا. ب) عكسيًا.

٤) هل تستطيع تحديد نوع العلاقة بين متغيرين إذا أُعطيت علاقة الارتباط فقط؟ أم أنك تحتاج لشكل الانتشار؟

٥) أ) اكتب جدولاً لقيم متغيرين يكون الارتباط بينهما طرديًا.

ب) اكتب جدولاً لقيم متغيرين يكون الارتباط بينهما عكسيًا.

جـ) ناقش إجابتك مع زميلك.

٦) إذا كانت ص = ٣س – ٢. فأجب عن كلٍّ مما يأتي:

أ) ما نوع هذا الارتباط بين المتغيرين س، ص؟

ب) ما قوة هذا الارتباط؟ (برِّر إجابتك).

ثانيًا معامل ارتباط بيرسون الخطي
Pearson Linear Correlation Coefficient

تعلمت سابقًا كيفية تحديد نوع الارتباط وقوته بيانيًا بالاستعانة بشكل الانتشار. وفي هذا الدرس ستتعرف مقياسًا كميًا يستخدم لتحديد قوة العلاقة بين متغيرين ونوعها وهو **معامل ارتباط بيرسون الخطي**.

إذا كانت $(س_١، ص_١)، (س_٢، ص_٢)، (س_٣، ص_٣)، ....، (س_ن، ص_ن)$، أزواجًا مرتبةً للمتغيرين س، ص، فإنَّ معامل ارتباط بيرسون الخطي بين المتغيرين (يُرمز له بالرمز ر)، يُعرف بالعلاقة:

$$ر = \frac{\sum_{ك=١}^{ن} (س_ك - \bar{س})(ص_ك - \bar{ص})}{\sqrt{\sum_{ك=١}^{ن} (س_ك - \bar{س})^٢ \times \sum_{ك=١}^{ن} (ص_ك - \bar{ص})^٢}}$$

وترمز $س_ك$ لقيم المتغير س، وترمز $ص_ك$ لقيم المتغير ص، بينما $\bar{س}$ ، $\bar{ص}$ هما المتوسطان الحسابيان لقيم س، ص على الترتيب، ك = ١، ٢، ٣، ....، ن .

مثال ١

الجدول الآتي يبين علامات ستة طلاب في مبحثي العلوم (س) والرياضيات (ص) في امتحان قصير، نهايته العظمى (١٠)، جد معامل ارتباط بيرسون الخطي بين س، ص.

رقم الطالب	١	٢	٣	٤	٥	٦
علامة العلوم (س)	٦	٤	٨	٧	٢	٣
علامة الرياضيات (ص)	٩	٨	١٠	٨	٥	٢

الحل

جد المتوسط الحسابي لكلٍّ من المتغيرين س، ص:

$$\bar{\text{س}} = \frac{\sum_{\text{ك}=١}^{\text{ن}} \text{س}_{\text{ك}}}{\text{ن}} = \frac{٦+٤+٨+٧+٢+٣}{٦} = ٥$$

$$\bar{\text{ص}} = \frac{٤٢}{٦} = ٧ \quad \text{لماذا؟}$$

كوِّن الجدول الآتي:

س	ص	$(\text{س} - \bar{\text{س}})$	$(\text{ص} - \bar{\text{ص}})$	$(\text{س} - \bar{\text{س}})(\text{ص} - \bar{\text{ص}})$	$(\text{س} - \bar{\text{س}})^٢$	$(\text{ص} - \bar{\text{ص}})^٢$
٦	٩	١	٢	٢	١	٤
٤	٨	−١	١	−١	١	١
٨	١٠	٣	٣	٩	٩	٩
٧	٨	٢	١	٢	٤	١
٢	٥	−٣	−٢	٦	٩	٤
٣	٢	−٢	−٥	١٠	٤	٢٥
المجموع		٠	٠	٢٨	٢٨	٤٤

وبالتعويض في قانون معامل ارتباط بيرسون تجد أنَّ:

$$\text{ر} = \frac{٢٨}{\sqrt{٢٨ \times ٤٤}} = ٠,٧٩$$

تدريب ١

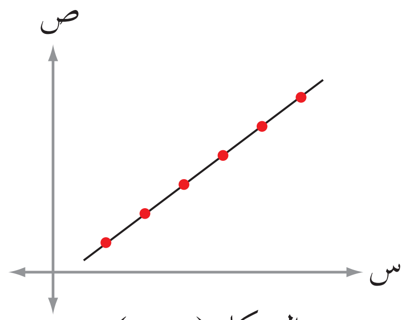
يبين الجدول الآتي معدل عدد ساعات الدراسة اليومي، ومعدلات خمسة طلاب في الصف العاشر، ارسم شكل الانتشار، ثم احسب معامل ارتباط بيرسون الخطي بين س، ص:

رقم الطالب	١	٢	٣	٤	٥
معدل عدد ساعات الدراسة اليومي (س)	٢	٣	٥	٧	٨
المعدل (ص)	٦٥	٧٠	٩٠	٩٠	٨٥

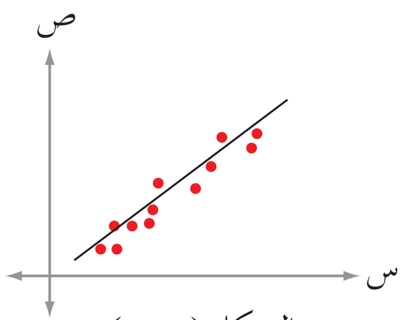
وعند تقدير معامل الارتباط (ر)، من شكل الانتشار نجد ما يأتي:

١) $-١ \leq \text{ر} \leq ١$

٢) إذا كان هناك ارتباط خطي طردي بين س، ص فإنَّ: ٠ < ر ≤ ١
كما في الشكلين (٦–٦)، (٦–٧)

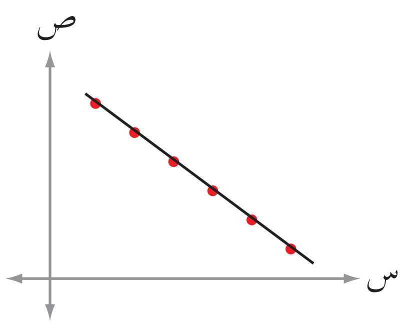


الشكل (٦–٦)

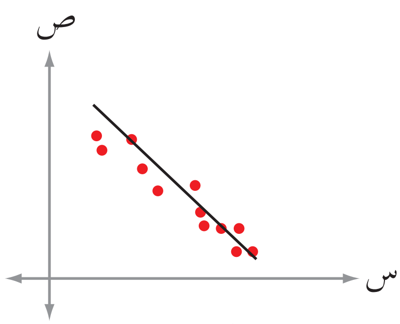


الشكل (٦–٧)

٣) إذا كان هناك ارتباط خطي عكسي بين س، ص فإنَّ: −١ ≤ ر < ٠
كما في الشكلين (٦–٨)، (٦–٩)



الشكل (٦–٨)



الشكل (٦–٩)

٤) تزداد القيمة المطلقة لمعامل الارتباط (تزداد قوة الارتباط)؛ كلما اقتربت النقط في شكل الانتشار من الخط المستقيم.

٥) إذا وقعت جميع النقط في شكل الانتشار على خط مستقيم فإنَّ: |ر| = ١، ويكون **الارتباط تامًّا**. كما في الشكلين (٦–٦)، (٦–٨)

تدريب ٢

أكمل الفراغ في الجمل الآتية للحصول على عبارات صحيحة:

١) يكون الارتباط طرديًا تامًّا إذا كانت قيمة معامل الارتباط تساوي ......

٢) يكون الارتباط عكسيًّا تامًّا إذا كانت قيمة معامل الارتباط تساوي ......

٣) كلما كانت القيمة المطلقة لمعامل الارتباط قريبة من الصفر يكون الارتباط ......

أثر التعديلات الخطية في قيمة معامل ارتباط بيرسون

إذا كان معامل ارتباط بيرسون الخطي بين المتغيرين س، ص يساوي (ر)، وعُدِّلت قيم كلٍّ من س، ص حسب العلاقة:

س* = أ س + ب ، ص* = جـ ص + د ، حيث أ، ب، جـ، د أعداد حقيقية أ ≠ ٠، جـ ≠ ٠

فإن معامل الارتباط بين س*، ص* يكون:

١) (ر) إذا كانت إشارتا أ، جـ متشابهتين.

٢) (– ر) إذا كانت إشارتا أ، جـ مختلفتين.

فكر وناقش

تحقّق من صحة العبارة (١)، والعبارة (٢) أعلاه.

مثال ٢

إذا كان معامل ارتباط بيرسون الخطي بين المتغيرين س، ص يساوي (–٠,٧٥)، فجد معامل ارتباط بيرسون الخطي بين س*، ص* في كلٍّ مما يأتي:

١) س* = ٧ س – ٦ ، ص* = ١ – ٤ ص

٢) س* = ٣ س +١ ، ص* = –٥ + ص

الحل

١) بما أنَّ معاملي س، ص مختلفان في الإشارة فإنَّ معامل ارتباط بيرسون بين س*، ص* يساوي (٠,٧٥).

٢) معامل ارتباط بيرسون بين س*، ص* يساوي (–٠,٧٥).

تدريب ٣

إذا كان معامل ارتباط بيرسون الخطي بين المتغيرين س، ص يساوي (٠,٨٩)، فجد معامل ارتباط بيرسون الخطي بين س*، ص* في كلٍّ من الحالات الآتية:

١) س* = –٢س – ٦ ، ص* = ١ – ٤ ص

٢) س* = ٣ + س ، ص* = –٥ + ٢ص

١) أكمل الفراغ في كلٍّ مما يأتي للحصول على عبارات صحيحة:

أ) كلما كانت القيمة المطلقة لمعامل الارتباط الخطي قريبة من العدد (١) يكون الارتباط ......

ب) لا يوجد ارتباط خطي إذا كانت قيمة معامل الارتباط تساوي ....

جـ) يستخدم معامل ارتباط بيرسون لتحديد.......... الارتباط بين متغيرين.

٢) يبين الجدول الآتي أطوال خمسة طلاب بالسنتيمترات وكتلهم بالكيلوغرامات، احسب معامل ارتباط بيرسون الخطي بين س، ص:

رقم الطالب	١	٢	٣	٤	٥
الطول (س)	١٥٠	١٥٦	١٦٣	١٦٤	١٦٧
الكتلة (ص)	٥٤	٥٦	٦٨	٧٠	٧٢

٣) إذا كان س، ص متغيرين، عدد قيم كلٍّ منهما (٥) وكان $\sum_{ر=١}^{٥}$ (س$_ر$ − $\overline{س}$) (ص$_ر$ − $\overline{ص}$) = −١، $\sum_{ر=١}^{٥}$ (س$_ر$ − $\overline{س}$)^٢ = ١٠، $\sum_{ر=١}^{٥}$ (ص$_ر$ − $\overline{ص}$)^٢ = ١٠، فاحسب قيمة معامل ارتباط بيرسون الخطي بين المتغيرين س، ص.

٤) ما دلالة كلٍّ من الإشارة الموجبة والإشارة السالبة لمعامل الارتباط؟

٥) إذا كان معامل الارتباط بين المتغيرين س، ص يساوي (٠,٨)، وكان معامل الارتباط بين المتغيرين م، ن يساوي (−٠,٩)، أيُّ الارتباطين أقوى؟ برر إجابتك.

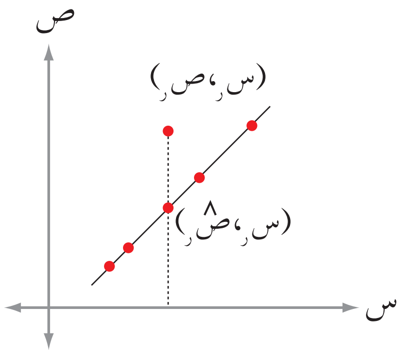
٦) إذا كان معامل ارتباط بيرسون الخطي بين المتغيرين س، ص يساوي (٠,١٣)، فجد معامل ارتباط بيرسون الخطي بين س*، ص* في كلٍّ من الحالات الآتية:

أ) س* = −٢س + ١ ، ص* = ١ + ٤ ص

ب) س* = ٣ − س ، ص* = ٧ − ٢ ص

ثالثًا معادلة خط الانحدار Regression Line Equation

تعرفنا سابقًا إلى نوع الارتباط وقوته بيانيًا عن طريق شكل الانتشار، وحسابيًا باستخدام معامل ارتباط بيرسون الخطي، وفي هذا الدرس ستجد علاقة رياضية تربط بين المتغيرين، وذلك لاستخدامها في تقدير (التنبؤ) بقيمة أحد المتغيرين؛ إذا علمت قيمة المتغير الآخر، فإذا عُلِمَ أنَّ هناك ارتباطًا بين معدل الطالب وعدد ساعات الدراسة، فإنَّه يمكن تقدير (التنبؤ) بمعدل الطالب إذا عُلِمَ عدد ساعات الدراسة لديه من خلال معادلة خط الانحدار التي تربط معدل الطالب وعدد ساعات دراسته.



الشكل (٦–١٠)

بما أنَّ العلاقة بين المتغيرين خطية، فإنَّه يمكن تمثيلها بمعادلة خط مستقيم هي:

$\hat{ص}$ = أس + ب، أ $\neq$ ٠، يُسمى **خط انحدار ص على س**، وتُسمى معادلته **معادلة خط الانحدار**، حيث $\hat{ص}$ القيمة المتنبأ بها للقيمة الحقيقية ص$_ر$.

وللحد من تأثير انحرافات النقاط عن الخط المستقيم نختار قيمتي أ، ب كما يأتي:

$$أ = \frac{\sum_{ك=1}^{ن} (س_ك - \bar{س})(ص_ك - \bar{ص})}{\sum_{ك=1}^{ن} (س_ك - \bar{س})^٢} \quad ، \quad ب = \bar{ص} - أ\bar{س}$$

وعند رسم شكل الانتشار بين المتغيرين فإنَّ النقط التي لا تقع على الخط المستقيم الذي يمثل معادلة خط الانحدار تسبب خطأ في التنبؤ يعبر عنه كالآتي:

الخطأ في التنبؤ = القيمة الحقيقية – القيمة المتنبأ بها.

وبالرموز: الخطأ في التنبؤ = ص$_ر$ – $\hat{ص}_ر$ ، حيث ص$_ر$: القيمة الحقيقية، $\hat{ص}_ر$: القيمة المتنبأ بها.

فكر وناقش

متى يكون الخطأ في التنبؤ موجبًا، ومتى يكون سالبًا؟ وضح ذلك جبريًّا وبيانيًّا.

مثال ١

لاحظ صاحب أحد المحلات التجارية زيادة عدد شكاوى الزبائن من طريقة تعامل العاملين في المحل، فأخضع العاملين لبرنامج تدريبي يوضح كيفية التعامل مع الزبائن، والجدول الآتي يبين رقم الأسبوع (س) وعدد شكاوى الزبائن (ص) خلال الأسابيع الخمسة التي تلي التَّدريب، استعِنْ بالجدول في الإجابة عما يأتي:

رقم الأسبوع (س)	١	٢	٣	٤	٥
عدد الشكاوى (ص)	٢٠	١٧	١٣	٩	٦

١) جد معادلة خط الانحدار للتنبؤ بقيم ص.

٢) قدِّر عدد الشكاوى المتوقعة في الأسبوع السادس.

٣) جد الخطأ في التنبؤ في الأسبوع الثالث. فسِّر النتيجة بيانيًّا.

الحل

١) $\bar{س} = ٣$، $\bar{ص} = ١٣$ تحقق من ذلك.

كون الجدول الآتي:

س	ص	$(س - \bar{س})$	$(ص - \bar{ص})$	$(س - \bar{س})(ص - \bar{ص})$	$(س - \bar{س})^٢$
١	٢٠	−٢	٧	−١٤	٤
٢	١٧	−١	٤	−٤	١
٣	١٣	٠	٠	٠	٠
٤	٩	١	−٤	−٤	١
٥	٦	٢	−٧	−١٤	٤
المجموع		٠	٠	−٣٦	١٠

احسب قيمة كلٍّ من أ، ب على النحو الآتي:

$$أ = \frac{\sum_{ك=١}^{ن} (س_ك - \bar{س})(ص_ك - \bar{ص})}{\sum_{ك=١}^{ن} (س_ك - \bar{س})^٢} = \frac{-٣٦}{١٠} = -٣{,}٦$$

ب = $\overline{\text{ص}}$ − أ $\overline{\text{س}}$

= ١٣ − (−٣,٦)×٣

= ٢٣,٨

إذن معادلة خط الانحدار هي:

$\hat{\text{ص}}$ = أ س + ب = −٣,٦س + ٢٣,٨

٢) لتقدير عدد الشكاوى المتوقعة في الأسبوع السادس، عوِّض بمعادلة خط الانحدار

$\hat{\text{ص}}_{\text{ر}}$ = −٣,٦س + ٢٣,٨ بقيمة س = ٦

$\hat{\text{ص}}_{\text{ر}}$ = −٣,٦ × ٦ + ٢٣,٨

يتوقع أن يكون عدد الشكاوى في الأسبوع السادس اثنتين تقريبًا. لماذا؟

٣) لإيجاد الخطأ في التنبؤ في الأسبوع الثالث.

احسب القيمة المتنبأ بها عندما س = ٣

$\hat{\text{ص}}_{\text{ر}}$ = −٣,٦ × ٣ + ٢٣,٨ = ١٣

الخطأ في التنبؤ = القيمة الحقيقية – القيمة المتنبأ بها = ١٣ – ١٣ = صفر، (فسّر هذه النتيجة)

ارسم شكل الانتشار لتفسير النتيجة بيانيًّا.

تدريب ١

يبين الجدول الآتي عدد سنوات الخبرة (س) و الأجر اليومي (ص) بالدينار، لخمسة عمال في إحدى الشركات:

عدد سنوات الخبرة (س)	٤	٥	٦	٧	٨
الأجر اليومي (ص)	١٥	١٦	١٧	١٨	١٩

١) خمِّن شكل معادلة خط الانحدار من خلال الجدول.

٢) جد معادلة خط الانحدار للتنبؤ بقيم ص إذا علمت قيم س.

٣) قدِّر الأجر اليومي لعامل خبرته ١٠ سنوات.

٤) جد الخطأ في التنبؤ عندما س = ٦.

١) يبين الجدول الآتي الأجر اليومي بالدينار الأردني (ص) و عدد ساعات العمل (س)، لخمسة موظفين في إحدى الشركات:

عدد ساعات العمل (س)	٦	٧	٨	٩	١٠
الأجر اليومي بالدينار (ص)	١٥	١٦	١٧	١٨	٢٤

أ) جد معادلة خط الانحدار للتنبوٴ بقيم ص.

ب) قدِّر الأجر المتوقع لموظف يعمل سبع ساعات يوميًا.

جـ) احسب الخطأ في التنبوٴ لعامل عمل ٦ ساعات في أحد الأيام.

٢) يبين الجدول الآتي ست قيم للمتغيرين س، ص.

معامل الذكاء (س)	٢	٤	٣	٥	٧	٩
علامة الفيزياء (ص)	٧	١٣	١٠	١٦	٢٢	٢٨

جد معادلة خط الانحدار للتنبوٴ بقيم (ص) إذا عُلِمَت قيم (س).

٣) إذا علمت أنَّ معادلة خط الانحدار الخطي للعلاقة بين ساعات العمل (س)، وعدد الأخطاء التي يرتكبها موظف في اليوم الواحد (ص) هي: ص = ٠,٥ س + ١، فأجب عن كلٍّ مما يأتي:

أ) جد قيم أ، ب من المعادلة.

ب) قدِّر عدد الأخطاء التي يرتكبها موظف يعمل (٨) ساعات في اليوم.

جـ) إذا كان عدد الأخطاء التي يرتكبها موظف يعمل ست ساعات في اليوم هي أربعة أخطاء، فجد الخطأ في التنبوٴ.

٤) على ماذا تدل إشارة (أ) في معادلة خط الانحدار؟

٥) إذا كان س، ص متغيرين عدد قيم كلٍّ منهما (٦) وكان $\overline{س} = ٤$ ، $\overline{ص} = ٦$ ،

$$\sum_{ر=١}^{٦} (س_ر - \overline{س})(ص_ر - \overline{ص}) = ٧ ،\ \sum_{ر=١}^{٦} (س_ر - \overline{س})^٢ = ١٠$$

فَجد معادلة خط الانحدار للتنبوٴ بقيم ص إذا عُلِمَت قيم س.

٦) إذا كانت معادلة خط الانحدار هي: $\hat{ص}_ر = ٢س + ١$ ، وكانت (٣، ٩) نقطة من نقط شكل الانتشار للمتغيرين س، ص، فجد الخطأ في التنبوٴ عندما س = ٣.

٧) اكتب جدولًا يكون فيه الارتباط بين المتغيرين س، ص عكسيًا تامًا.

الفصل الثاني

الاحتمالات

Probabilities

النتاجات

- تتعرّف مفهوم المتغيّر العشوائي.
- تتعرّف المتغير العشوائي المنفصل والمتصل.
- تكوّن جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المنفصل.
- تحسب الاحتمال باستخدام توزيع ذي الحدين.
- تتعرف العلامة المعيارية وعلاقتها بالعلامة الخام.
- تحسب العلامة المعيارية وتفسرها.
- تتعرف منحنى التوزيع الطبيعي وخصائصه.
- تستخدم خصائص التوزيع الطبيعي وجدول المساحات الخاص به في حل مسائل عملية.

أولاً المتغير العشوائي Random Variable

في كثير من التجارب العشوائية يكون الاهتمام بربط نتائجها بأعداد حقيقية أكثر من النتائج نفسها؛ فمثلاً عندما يخوض منتخبنا الوطني لكرة القدم خمس مباريات تجريبية فإنَّ المدرب غالباً ما يهتم بعدد المرات التي يفوز بها المنتخب.

لاحظ أنَّ عدد مرات الفوز هي: {٠، ١، ٢، ٣، ٤، ٥}.

وهذا يقودنا للتعريف الآتي:

تعريف

المتغير العشوائي: اقتران مجاله الفضاء العيني Ω، ومداه مجموعة جزئية من الأعداد الحقيقية، ويُرمزُ له بأحد الرموز: ق، ع للدلالة عليه.

المتغير العشوائي

المنفصل

أهم توزيعاته
(التوزيع ذو الحدين)

المتصل

أهم توزيعاته
(التوزيع الطبيعي)

أنواع المتغيرات العشوائية

يتم تصنيف المتغيرات العشوائية إلى نوعين هما:

١) متغير عشوائي منفصل (Discrete Random Variable)، وتكون مجموعة مداه قابلة للعد مثل: عدد العمليات الجراحية الناجحة من بين (١٠) عمليات أُجْرِيَتْ، أو عدد الزائرين لأحد المتاجر في يوم ما.

٢) متغير عشوائي متصل (Continuous Random Variable)، وتكون مجموعة مداه فترة أو اتحاد فترتين أو أكثر مثل: أوزان الأطفال حديثي الولادة في إحدى المستشفيات. وسيتم التطرق له لاحقًا في هذه الوحدة.

مثال ١

حدد نوع المتغير العشوائي في كل من الحالات الآتية:

١) قياس أطوال طلاب الصف الثاني عشر في مدرسة ما.

٢) في تجربة سحب كرتين على التوالي دون إرجاع من صندوق يحتوي (٣) كرات حمراء، و(٥) كرات بيضاء، ودَلَّ المتغير العشوائي على عدد الكرات البيضاء المسحوبة.

٣) كمية الأمطار في شهر كانون الثاني لعام ٢٠١٧م.

٤) عدد الأخطاء الطباعية في كتاب في طبعته الأولى.

الحل

١) متصل؛ لأن الأطوال تمثل فترة بدايتها طول أقصر طالبٍ ونهايتها طول أطول طالب.

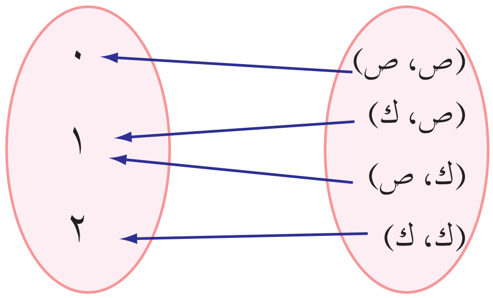
٢) منفصل؛ لأن عدد الكرات البيضاء المسحوبة = ٠، ١، ٢ وهي قيم قابلة للعدّ.

٣) متصل.   لماذا؟

٤) منفصل.   لماذا؟

مثال ٢

إذا دل المتغير العشوائي ق على عدد مرات ظهور الكتابة عند إلقاء قطعة نقد مرتين وتسجيل الوجه الظاهر في كل مرة، فجد مدى المتغير العشوائي ق.



الشكل(٦-١١)

الحل

الفضاء العيني Ω = {(ص، ص)، (ص، ك)، (ك، ص)، (ك، ك)}

حيث (ص): تدل على صورة، و (ك): تدل على كتابة.

ق(ص، ص) = ٠ ، لأنَّ عدد مرات ظهور الكتابة = ٠

ق(ص، ك) = ق(ك، ص) = ١   لماذا؟

ق(ك، ك) =٢   لماذا؟

إذن؛ مدى المتغير العشوائي ق هو: س = ٠، ١، ٢، كما هو موضح في الشكل(٦-١١).

تدريب ١

اكتب مدى المتغير العشوائي في كل من الحالات الآتية وناقش إجابتك مع زملائك:

١) في تجربة إلقاء حجري نرد منتظمين وتسجيل عدد النقاط الظاهرة على الوجهين العلويين، إذا دل المتغير العشوائي ق على مجموع النقاط الظاهرة على الوجهين العلويين.

٢) في تجربة إلقاء قطعة نقد أربع مرات وتسجيل الوجه الظاهر في كل مرة، إذا دل المتغير العشوائي ق على عدد مرات ظهور الصورة.

٣) في تجربة سحب خمس كرات على التوالي دون إرجاع من صندوق يحتوي ٤ كرات بيضاء، و٧ كرات زرقاء، إذا دل المتغير العشوائي ع على عدد الكرات البيضاء المسحوبة.

مثال ٣

يحتوي صندوق على ٤٠ بطاقة، منها: ١٠ بطاقات مكتوب عليها الرقم (١)، و١٥ بطاقة مكتوب عليها الرقم (٣)، وبقية البطاقات مكتوب عليها الرقم (٥)، إذا سحبت بطاقة واحدة عشوائيًّا ودلَّ

المتغير العشوائي ع على الرقم المكتوب على البطاقة المسحوبة، فجد مدى المتغير العشوائي ع، وجد احتمال كلٍّ قيمة من قيم مدى المتغير العشوائي ع.

الحل

قيم المدى للمتغير العشوائي المنفصل ع هي: س = ١، ٣، ٥ لماذا؟

وبما أنَّ المتغير العشوائي المنفصل يأخذ قيمًا معدودة، فيمكن إيجاد احتمال كلٍّ من تلك القيم،

ل(س = ١) = $\frac{١٠}{٤٠}$ لماذا؟

ل(س =٣) = $\frac{١٥}{٤٠}$

ل(س = ٥) = $\frac{١٥}{٤٠}$ لماذا؟

تحقق من الإجابة

تعريف

التوزيع الاحتمالي: هو الاقتران الذي يربط مدى المتغير العشوائي ق مع الاحتمالات المقابلة وقد يكتب على صورة جدول أو مجموعة أزواج مرتبة.

ففي مثال(٣) يمكن كتابة جدول التوزيع الاحتمالي كما في الجدول الآتي:

س	١	٣	٥
ل(س)	$\frac{١٠}{٤٠}$	$\frac{١٥}{٤٠}$	$\frac{١٥}{٤٠}$

ويمكن كتابة التوزيع الاحتمالي كما يلي: { (١، $\frac{١٠}{٤٠}$)، (٣، $\frac{١٥}{٤٠}$)، (٥، $\frac{١٥}{٤٠}$) }.

تدريب ٢

اكتب جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي ق الوارد في تدريب (١).

مثال ٤

يحتوي صندوق على ٥ كرات حمراء، ٣ كرات بيضاء، سحبت من الصندوق ثلاث كرات. إذا دَلَّ المتغير العشوائي ق على عدد الكرات الحمراء المسحوبة، فكوِّنْ جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي ق في كلٍّ من الحالات الآتية:

١) إذا كان سحب الكرات على التوالي دون إرجاع.

٢) إذا كان سحب الكرات على التوالي مع الإرجاع.

٣) إذا سُحِبَتْ الكرات الثلاث معًا.

الحل

قيم المدى للمتغير العشوائي المنفصل ق هي: س = ٠، ١، ٢، ٣ لماذا؟

١) إذا كان سحب الكرات على التوالي دون إرجاع.

$$ل(س = ٠) = ل(ب\ ب\ ب) = \frac{٣}{٨} \times \frac{٢}{٧} \times \frac{١}{٦} = \frac{١}{٥٦}$$

ل(س = ١) = ل(ح ب ب، ب ح ب ، ب ب ح)

$$= \frac{٥}{٨} \times \frac{٣}{٧} \times \frac{٢}{٦} + \frac{٣}{٨} \times \frac{٥}{٧} \times \frac{٢}{٦} + \frac{٣}{٨} \times \frac{٢}{٧} \times \frac{٥}{٦} = \frac{١٥}{٥٦}$$

$ل(س = ٢) = \frac{٣٠}{٥٦}$ ، $ل(س = ٣) = \frac{١٠}{٥٦}$ تحقق من ذلك.

إذن جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير ق:

س	٠	١	٢	٣
ل(س)	$\frac{١}{٥٦}$	$\frac{١٥}{٥٦}$	$\frac{٣٠}{٥٦}$	$\frac{١٠}{٥٦}$

٢) إذا كان سحب الكرات على التوالي مع الإرجاع:

$$ل(س = ٠) = ل(ب\ ب\ ب) = \frac{٣}{٨} \times \frac{٣}{٨} \times \frac{٣}{٨} = \frac{٢٧}{٥١٢}$$

ل(س = ١) = ل(ح ب ب، ب ح ب ، ب ب ح)

$$= (\frac{٥}{٨} \times \frac{٣}{٨} \times \frac{٣}{٨}) + (\frac{٥}{٨} \times \frac{٣}{٨} \times \frac{٣}{٨}) + (\frac{٣}{٨} \times \frac{٣}{٨} \times \frac{٥}{٨}) = \frac{١٣٥}{٥١٢}$$

$ل(س = ٢) = \frac{٢٢٥}{٥١٢}$ تحقق من ذلك.

$ل(س = ٣) = \frac{١٢٥}{٥١٢}$ تحقق من ذلك.

إذن جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي ق:

س	٠	١	٢	٣
ل(س)	$\frac{٢٧}{٥١٢}$	$\frac{١٣٥}{٥١٢}$	$\frac{٢٢٥}{٥١٢}$	$\frac{١٢٥}{٥١٢}$

٣) إذا سُحِبَتْ الكرات الثلاث معًا:

$$ل(س = ٠) = \frac{\binom{٥}{٠}\times\binom{٣}{٣}}{\binom{٨}{٣}} = \frac{١}{٥٦} \quad ، \quad ل(س = ١) = \frac{\binom{٥}{١}\times\binom{٣}{٢}}{\binom{٨}{٣}} = \frac{١٥}{٥٦}$$

$ل(س = ٢) = \frac{٣٠}{٥٦}$ ، $ل(س = ٣) = \frac{١٠}{٥٦}$ تحقق من ذلك.

إذن جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير ق:

س	٠	١	٢	٣
ل(س)	$\frac{١}{٥٦}$	$\frac{١٥}{٥٦}$	$\frac{٣٠}{٥٦}$	$\frac{١٠}{٥٦}$

وسيمر معك لاحقًا أنَّ سحب الكرات على التوالي مع الإرجاع يتبع لتوزيع يسمى توزيعًا ذا الحدين.

فكر وناقش

في مثال(٤) ما مدى المتغير العشوائي ق، إذا كان عدد الكرات الحمراء ٥ كرات، وعدد الكرات البيضاء اثنان فقط؟

تعريف

إذا كان ق متغيرًا عشوائيًّا منفصلًا مداه $س_١$ ، $س_٢$ ، ....، $س_ن$ ، فإنَّ الاقتران ل الذي يحقق الشرطين:

١) $ل(س_ر) \geq ٠$ ، ر = ١، ٢، ٣، ......، ن حيث $٠ \leq ل(س) \leq ١$

٢) $\sum_{ر=١}^{ن} ل(س_ر) = ١$

يسمى **اقتران الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي المنفصل.**

مثال ٥

إذا كان ق متغيرًا عشوائيًّا منفصلًا مداه ٠، ١، ٢، وكان ل(س)= $\frac{س+٢}{٩}$. تحقق من أنَّ ل(س) هو اقتران الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي المنفصل ق.

الحل

ل(س = ٠) = $\frac{٢}{٩}$

ل(س = ١) = $\frac{٣}{٩}$

ل(س = ٢) = $\frac{٤}{٩}$

إذن، ل(س) ≥ ٠ لكل س = ٠، ١، ٢

(٢) ل(س = ٠) + ل(س = ١) + ل(س = ٢) = $\frac{٢}{٩} + \frac{٣}{٩} + \frac{٤}{٩}$ = ١

إذن، $\sum_{ر=١}^{ن}$ ل (س$_ر$) = ١

من (١) و (٢) تجد أنَّ ل(س) يحقق شروط اقتران الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي ق.

تدريب ٣

إذا كان التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي ع معطى بالمجموعة:

{(−٢، ٢ك)، (٢، ٣,٠)، (٤، ٤٥,٠)، (٣، ٣ك)}، فجد قيمة الثابت ك.

فكر وناقش وقدم تبريرًا

صندوق يحتوي ١٠ بطاقات مرقمة من ١ إلى ١٠، سُحِبَتْ ثلاث بطاقات دفعة واحدة، إذا دل المتغير العشوائي ق على الرقم الأكبر في البطاقات الثلاث المسحوبة، فاكتب القيم الممكنة للمتغير العشوائي ق.

١) إذا دل المتغير العشوائي ق على عدد الأطفال الذكور في تجربة اختيار عشوائي لعائلة لديها ثلاثة أطفال، وتسجيل النتائج حسب الجنس وتسلسل الولادة، فجد مدى المتغير العشوائي ق.

٢) في تجربة اختيار أربع لعب من إنتاج مصنع ألعاب، إذا دل المتغير العشوائي ق على عدد اللعب التالفة، فجد مدى المتغير العشوائي ق.

٣) إذا دل المتغير العشوائي ع على الفرق المطلق بين عدد النقاط الظاهرة على الوجهين العلويين عند إلقاء حجرَي نرد منتظمين، فكوِّن جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي ع.

٤) يحتوي صندوق على ٦ كرات بيضاء، وكرتين حمراوين، سُحِبت من الصندوق ثلاث كرات على التوالي دون إرجاع. إذا دل المتغير العشوائي ق على عدد الكرات البيضاء المسحوبة، فكوِّن التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي ق.

٥) إذا كان ل يمثل اقتران الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي المنفصل ق

$$\text{وكان } ل(س) = \begin{cases} ٤ب\, س^{٢} &، \quad س = ١ \\ ب\, س &، \quad س = ٢ \\ ب(س + ١) &، \quad س = ٣ \end{cases}$$

فأجب عن كلٍّ مما يأتي:

أ) جد قيمة الثابت ب.

ب) كوِّن جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المنفصل ق.

جـ) جد ل($١ < س \leq ٣$)

٦) إذا كان س = −٢، ٣، ٤ يمثل مدى المتغير العشوائي المنفصل ق، وكان

ل(س) =ك $س^{٢}$ يمثل اقتران الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي ق، فجد قيمة الثابت ك.

٧) في تجربة سحب كرة (دون إرجاع) من صندوق يحتوي على ٣ كرات بيضاء، وكرتين حمراوين، إذا دل المتغير العشوائي ق على رقم السحب الذي تظهر فيه أول كرة حمراء، فَكوِّن التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي ق.

ثانيًا توزيع ذي الحدين Binomial Distribution

في اختبار من نوع اختيار من متعدد مكون من ٧ فقرات، لكلِّ فقرة أربعة بدائل مختلفة واحد منها فقط صحيح، إذا أجاب أحمد بطريقة عشوائية على جميع فقرات هذا الاختبار، فما احتمال:

١) أن يجيب أحمد على فقرة واحدة بشكل صحيح؟

٢) أن يجيب أحمد على فقرتين على الأقل بشكل صحيح؟

٣) أن يجيب أحمد على فقرة واحدة على الأكثر بشكل صحيح ؟

من التجربة السابقة نلاحظ ما يأتي:

- التجربة تكونت من (٧) محاولات.
- كل محاولة مستقلة ومتماثلة.
- كل محاولة لها ناتجان إما نجاح (وهي الإجابة الصحيحة)، أو فشل (وهي الإجابة الخطأ).
- احتمال النجاح ثابت في كل محاولة ويساوي $\frac{١}{٤}$

إنَّ مثل هذه التجارب العشوائية تُسمى **تجربة ذات الحدين** ، ولها الخصائص الآتية:

- التجربة تكونت من (ن) محاولات.
- كل محاولة مستقلة ومتماثلة.
- كل محاولة لها ناتجان إما نجاح (وهي وقوع الحادث قيد الاهتمام)، أو فشل (وهي عدم وقوع الحادث قيد الاهتمام).
- احتمال النجاح ثابت في كل محاولة ويساوي (أ) وبصورة عامة:

إذا أُجريت تجربة ذات الحدين (ن) من المرات، وكان ق متغيرًا عشوائيًّا ذا الحدين معاملاه: ن، أ ، ودل ق على عدد مرات النجاح في (ر) من المحاولات، **فإنَّ**:

$$ل(س = ر) = \binom{ن}{ر} (أ)^{ر} (١ - أ)^{ن-ر}$$

ويمثل توزيع ذو الحدين أهم توزيعات المتغير العشوائي المنفصل.

تحدث

أعط أمثلة على تجارب ذات الحدين وحدد قيم كلٍّ من: ن، أ.

مثال ١

إذا كان ق متغيراً عشوائيًا ذا الحدين، معاملاه: ن = ٦، أ = ٠,٦، فجد كلًّا مما يأتي:

١) ل(س=٢)　　٢) ل(س<١)　　٣) ل(س≥٥)　　٤) ل(س≥١)

الحل

بما أنَّ: ن = ٦، أ = ٠,٦، فإنَّ:

١) ل(س=٢) = $\binom{٦}{٢}$ $(٠,٦)^{٢}$ $(٠,٤)^{٤}$ = ١٥ × ٠,٣٦ × ٠,٠٢٥٦ = ٠,١٣٨٢٤

٢) ل(س<١) = ل(س=٠) = $\binom{٦}{٠}$ $(٠,٦)^{٠}$ $(٠,٤)^{٦}$ = $(٠,٤)^{٦}$ = ٠,٠٠٤٠

٣) ل(س≥٥) = ل(س=٥) + ل(س= ٦)　　.......... جد الناتج.

٤) ل(س≥١) = ل(س=١) + ل(س= ٢)+ .... + ل(س=٥) + ل(س= ٦)

= ١ – ل(س = ٠)　　لماذا؟ برِّر إجابتك.

= ....

تدريب ١

إذا كان ق متغيرًا عشوائيًا ذا الحدين، معاملاه: ن = ٣، أ = ٠,٤، فجد كلًّا مما يأتي:

١) ل(س=٣)　　٢) ل(س<١)　　٣) ل(س≥٢)　　٤) ل(س≥١)

مثال ٢

إذا كان احتمال أن يحرز لاعب كرة قدم هدفاً في كل ضربة جزاء ينفذها على المرمى ٠,٩، فإذا نفَّذ ٣ ضربات جزاء على المرمى، فما احتمال:

١) إحراز هدف في كل ضربة جزاء؟

٢) عدم إحراز أي هدف؟

٣) إحراز هدفين على الأكثر؟

٤) إحراز هدف واحد على الأقل؟

٥) عبَّرَ معاذ عن احتمال إحراز هدفين على الأقل بالآتي: ل(س<٢)، ناقش ما عبّر عنه معاذ.

الحل

ن = ٣، أ = ٠,٩ برِّر ذلك؟

١) احتمال إحراز هدف في كل ضربة جزاء ل(س=٣) $= \binom{٣}{٣}$ (٠,٩)^{٣} (٠,١)^{٠}

= (٠,٩)^{٣} = ٠,٧٢٩

٢) احتمال عدم إحراز أي هدف = ل(س=٠)= $\binom{٣}{٠}$ (٠,٩)^{٠} (٠,١)^{٣}= ٠,٠٠١

٣) احتمال إحراز هدفين على الأكثر = ل(س≤٢) = ل(س=٢)+ ل(س=١)+ ل(س=٠)

= ١ – ل(س=٣)

= ١ – ٠,٧٢٩ = ٠,٢٧١

٤) احتمال إحراز هدف واحد على الأقل = ل(س≥١) =ل(س=١)+ل(س=٢)+ل(س=٣)

= ١ – ل(س=٠) = ١ – ٠,٠٠١ = ٠,٩٩٩

٥) تعبير معاذ خاطئ. لماذا؟

تدريب ٢

حُلَّ المسألة الواردة في بداية الدرس.

مثال ٣

في تجربة إلقاء حجر نرد مكتوب على أوجهه الأرقام: ١، ١، ٢، ٣، ٣، ٣، إذا أُلْقِيَ الحجر أربع مرات، فما احتمال ظهور الرقم (١) على الوجه العلوي في ثلاث مرات على الأقل؟

الحل

ن = ٤، أ = ٠,٥ تحقق من ذلك.

احتمال ظهور الرقم (١) في ثلاث مرات على الأقل

ل(س≥٣) = ل(س=٣) + ل(س=٤)

$= \binom{٤}{٣}$(٠,٥)^{٣}(٠,٥)^{١} + $\binom{٤}{٤}$ (٠,٥)^{٤}(٠,٥)^{٠}

= ٤× ٠,١٢٥×٠,٥ + (٠,٥)^{٤}

= ٠,٢٥٠٠ + ٠,٠٦٢٥ = ٠,٣١٢٥

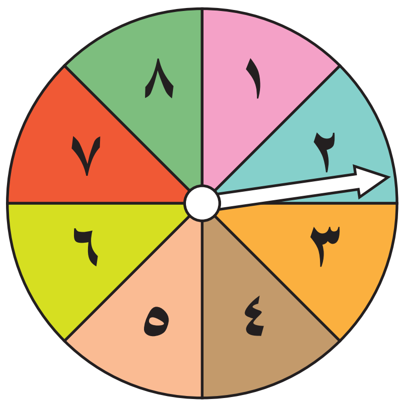
تدريب ٣

أظهرت دراسة أن ٠,٧٥ ممن يقودون السيارات يستعملون حزام الأمان أثناء القيادة، إذا اختير ٢٠ شخصًا عشوائيًّا، فما احتمال:

١) أن يكون ربعهم يستعملون حزام الأمان أثناء القيادة؟

٢) ألّا يستعمل أيٌّ منهم حزام الأمان أثناء القيادة؟

مثال ٤



الشكل (٦–١٢)

في الشكل (٦–١٢) إذا أُديرَ المؤشر عشوائيًّا في القرص الدائري خمس مرات، فما احتمال:

١) وقوف المؤشر عند رقم يقبل القسمة على ٢ ثلاث مرات؟

٢) وقوف المؤشر عند رقم يقبل القسمة على ٥ مرة واحدة؟

الحل

١) ن = ٥

الرقم الذي يقبل القسمة على ٢∋ {٢، ٤، ٦، ٨}

ومنه، أ = ٠,٥ برِّر ذلك.

$$ل(س = ٣) = \binom{٥}{٣}(٠,٥)^{٣}(٠,٥)^{٢} = ١٠\times(٠,٥)^{٥} = ٠,٣١٢٥$$

٢) ن = ٥، الرقم الذي يقبل القسمة على ٥ هو: الرقم ٥ فقط

ومنه، أ = $\frac{١}{٨}$ برِّر ذلك.

$$ل(س = ١) = \binom{٥}{١}\left(\frac{١}{٨}\right)^{١}\left(\frac{٧}{٨}\right)^{٤}$$

فكر وناقش

في فرعَي مثال (٤)، لماذا تغيرت قيمة أ؟

تمارين ومسائل

١) إذا كان احتمال نجاح عملية جراحية ٠,٧٠، إذا أُجْرِيَتْ خمس عمليات فما احتمال نجاح ثلاث منها على الأقل؟

٢) في تجربة إلقاء قطعة نقد منتظمة ثماني مرات، جد كلًّا مما يأتي:

أ) احتمال ظهور الكتابة ٤ مرات.

ب) احتمال ظهور الكتابة ٣ مرات على الأقل.

٣) في تجربة إلقاء حجر نرد منتظم (٨) مرات وتسجيل عدد النقاط الظاهرة على الوجه العلوي، إذا دل المتغير العشوائي ق على عدد مرات ظهور عدد يقبل القسمة على (٣)، فجد احتمال ظهور عدد يقبل القسمة على (٣) مرتين على الأقل.

٤) يحتوي صندوق على ٥ كرات حمراء، ٣ كرات بيضاء، سحبت من الصندوق ثلاث كرات على التوالي مع الإرجاع. إذا دل المتغير العشوائي ق على عدد الكرات الحمراء المسحوبة، فكوّن جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي ق.

٥) إذا كان ق متغيرًا عشوائيًّا ذا الحدين حيث ن = ٣، ل(س≤١) = $\frac{٣٧}{٦٤}$، فجد كلًّا مما يأتي:

أ) قيم س (مدى ق) ب) قيمة أ جـ) ل(س = ٣)

ثالثًا العلامة المعيارية Standard Score

إذا كانت علامة جنى في مبحث الرياضيات (٩٠)، وعلامتها في الفيزياء (٨٠)، وكان المتوسط الحسابي لعلامات الرياضيات (٨٨)، والانحراف المعياري لها (٦)، أما المتوسط الحسابي لعلامات الفيزياء (٦٥)، والانحراف المعياري لها (١٠)، ففي أيِّ المبحثين كان مستوى تحصيل جنى أفضل بالمقارنة مع طالبات صفها؟ ولماذا؟

على الرغم من أن ظاهر علامتي جنى يشير إلى أنَّ تحصيلها في الرياضيات أفضل من تحصيلها في الفيزياء، إلا أنَّ ذلك ليس مؤكدًا؛ فقد يكون موقع علامتها في الفيزياء بالنسبة إلى علامات طالبات صفها أفضل منه في الرياضيات، تُرى كيف يمكننا المفاضلة بين العلامتين بطريقة علمية؟ لنتمكن من المفاضلة بين العلامتين لابد أن نأخذ المتوسط الحسابي والانحراف المعياري لكلِّ علامة بعين الاعتبار، وذلك بإيجاد الانحرافات المعيارية لكلِّ علامة عن متوسطها في كلِّ مبحث، وبذلك نكون قد حوَّلنا كل علامة من العلامات الأصلية إلى علامة جديدة تسمى: **العلامة المعيارية**، ومن ثم نقارن بين العلامتين الأصليتين بناءً على العلامة المعيارية لكلٍّ من العلامتين الأصليتين.

تعريف

إذا كان المتوسط الحسابي لعينة عشوائية ($\bar{س}$)، وكان الانحراف المعياري لها (ع)، وكانت (س) مشاهدة في هذه العينة فإنَّ:

العلامة المعيارية للمشاهدة س: هي نسبة انحراف المشاهدة (س) عن المتوسط الحسابي ($\bar{س}$)، إلى الانحراف المعياري (ع)، ويرمز لها بالرمز (ز)، أي أنَّ:

$$ز = \frac{س - \bar{س}}{ع} ، ع \neq ٠$$

مثال ١

إذا كان المتوسط الحسابي لعلامات طلاب الصف الرابع في اللغة العربية (٨٠)، والانحراف المعياري لها (٥)، وكانت علامات هاشم، يوسف، حمزة في اللغة العربية (٩٠)، (٨٠)، (٧٥)، على الترتيب. فجد العلامة المعيارية لعلامة كلٍّ منهم.

الحل

لنفرض أنَّ العلامات المعيارية لكلٍّ من هاشم، يوسف، حمزة هي: $ز_{٩٠}$، $ز_{٨٠}$، $ز_{٧٥}$ على الترتيب.

$$ز_{٩٠} = \frac{٩٠-٨٠}{٥} = ٢$$

$$ز_{٨٠} = \frac{٨٠-٨٠}{٥} = ٠$$

$$ز_{٧٥} = \frac{٧٥-٨٠}{٥} = -١$$

لاحظ أن:

- علامة هاشم (٩٠) أكبر من المتوسط الحسابي وتنحرف عنه بمقدار (١٠) علامات وهذا يعادل انحرافين معياريين؛ لأنَّ الانحراف المعياري (٥)، وهذا يعني أنَّ العلامة (٩٠) تنحرف فوق المتوسط الحسابي انحرافين معياريين؛ فكانت $ز_{٩٠} = ٢$ (فوق المتوسط الحسابي).
- علامة يوسف (٨٠) تساوي المتوسط الحسابي نفسه، وانحرافها عنه بمقدار صفر فكانت $ز_{٨٠} = ٠$.
- علامة حمزة (٧٥) أقل من المتوسط الحسابي وتنحرف عنه بمقدار (−٥)، وهو سالب وهذا يعادل انحرافًا معياريًّا واحدًا، وهذا يعني أنَّ العلامة (٧٥) تنحرف تحت المتوسط الحسابي انحرافًا معياريًّا واحدًا، فكانت $ز_{٧٥} = -١$ (تحت المتوسط الحسابي).

وبصورة عامة:

تكون $|ز|$ مساوية لعدد الانحرافات المعيارية التي تنحرفها المشاهدة (س) عن المتوسط الحسابي للتوزيع، أما إشارة ز فتدل على موقع المشاهدة (س) فوق المتوسط أو تحته.

تدريب ١

إذا كان المتوسط الحسابي لمجموعة من القيم (٤٠)، والانحراف المعياري (٣)، فجد كلًّا مما يأتي:

١) العلامة المعيارية للقيمة ٤٦

٢) القيمة التي علامتها المعيارية تساوي (١,٥).

٣) القيمة التي تنحرف انحرافين معياريين فوق المتوسط الحسابي.

٤) القيمة التي تنحرف انحرافًا معياريًّا واحدًا تحت المتوسط الحسابي.

مثال ٢

إذا كانت علامتا بشار في مبحثي التربية الإسلامية، والعلوم هما على الترتيب: (٧١)، (٦٣)، وكان المتوسط الحسابي لعلامات صفه في المبحثين (٨٥)، (٨٠) والانحراف المعياري لهما (٧)، (١٠)، على الترتيب، ففي أي المبحثين كان مستوى تحصيل بشار أفضل؟ ولماذا؟

الحل

العلامة المعيارية لعلامة بشار في التربية الإسلامية هي: $ز_{٧١} = \frac{٧١-٨٥}{٧} = -٢$

العلامة المعيارية لعلامة بشار في العلوم هي: $ز_{٦٣} = \frac{٦٣-٨٠}{١٠} = -١,٧$

وبما أن $ز_{٦٣} > ز_{٧١}$ ؛ فإنَّ تحصيل بشار في العلوم أفضل من تحصيله في التربية الإسلامية بالمقارنة مع طلاب صفه.

تدريب ٢

حُلَّ المسألة الواردة في بداية الدرس.

مثال ٣

إذا كانت علامات ثلاثة طلاب في أحد الصفوف: ٨٢، ٧٥، ٦١، وكانت علاماتهم المعيارية: ٢، ١، ز، على الترتيب. فما قيمة ز؟

الحل

$٢ = \frac{٨٢ - \bar{\text{س}}}{\text{ع}}$ ، ومنه، $٢\text{ع} = ٨٢ - \bar{\text{س}}$ ......(١)

$١ = \frac{٧٥ - \bar{\text{س}}}{\text{ع}}$ ، ومنه، $\text{ع} = ٧٥ - \bar{\text{س}}$ ......(٢)

$٢\text{ع} = ٨٢ - \bar{\text{س}}$ ......(١)

$\text{ع} = ٧٥ - \bar{\text{س}}$ ......(٢)

بالطرح ينتج: $\text{ع} = ٧$

وبالتعويض عن قيمة ع =٧ في المعادلة (٢) ينتج أنَّ:

$٧ = ٧٥ - \bar{\text{س}}$ ومنه، $\bar{\text{س}} = ٦٨$

والآن ز $= \frac{٦١ - ٦٨}{٧} = -١$

تدريب ٣

إذا كانت علامات الطالبات رغد، شهد، زينب: ٦٥، ٧٧، س، وكانت علاماتهن المعيارية: −٢، ١، ٣، على الترتيب. فجد كلًّا مما يأتي:

١) الانحراف المعياري لعلامات طالبات الصف.

٢) المتوسط الحسابي لعلامات طالبات الصف.

٣) علامة الطالبة زينب.

٤) تحدث لزميلك كيف أوجدت علامة زينب.

فكر وناقش وقدم تبريرًا

إذا كان المتوسط الحسابي لعينة عشوائية ($\bar{\text{س}}$)، وكان الانحراف المعياري لها (ع)، وكانت (س) مشاهدة في هذه العينة وعدلت المشاهدة (س) حسب العلاقة: ص = أس + ب، فإنَّ العلامة المعيارية الجديدة للمشاهدة (س) بعد التعديل تبقى نفسها قبل التعديل.

١) إذا كانت علامتا طالبين من الصف نفسه في أحد الاختبارات (٥٣)، (٦٣)، والعلامتان المعياريتان المناظرتان لهما (−١)، (١) على الترتيب، فجد المتوسط الحسابي لعلامات طلاب الصف في هذا الاختبار.

٢) إذا كان المتوسط الحسابي لعلامات طالبات الصف السابع في اللغة الإنجليزية (٦٠)، والانحراف المعياري (٤)، وكانت علامة رفيف (٨٠)، فأجب عما يأتي:

أ) ما العلامة المعيارية لعلامة رفيف؟

ب) إذا عُدِّلَت علامات الصف حسب العلاقة ص = ١,١ س − ٥، حيث س هي العلامة قبل التعديل، ص هي العلامة بعد التعديل، فما العلامة المعيارية لعلامة رفيف بعد التعديل؟ ماذا تلاحظ؟

٣) إذا كانت العلامات المعيارية للطلاب مؤمن، سالم، مهند كما يلي: ٣، ١، ٠,٧٥ على الترتيب، والمتوسط الحسابي لعلامات جميع طلبة الصف (٦٨)، والفرق بين علامتي مؤمن ومهند هو (٩)، فجد كلًّا مما يأتي:

أ) الانحراف المعياري لعلامات طلبة الصف.

ب) العلامات الفعلية لمؤمن، وسالم، ومهند.

جـ) علامة الطالب التي تنحرف انحرافًا معياريًّا واحدًا تحت المتوسط الحسابي.

٤) إذا كان الفرق بين علامتي أحمد وسفيان في الصف الثاني عشر في أحد الاختبارات يساوي (٩)، والفرق بين العلامتين المعياريتين المناظرتين لهما (١,٥)، فجد الانحراف المعياري لعلامات طلاب الصف في هذا الاختبار.

٥) أثبت أنَّ المتوسط الحسابي لجميع العلامات المعيارية لجميع قيم التوزيع يساوي صفرًا.

رابعًا التوزيع الطبيعي The Normal Distribution

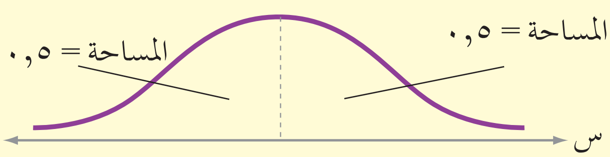
إذا كانت درجات الحرارة لماء البحر في خليج العقبة في شهر نيسان تتبع توزيعًا طبيعيًّا، متوسطه الحسابي (٢٧) سلسيوس، وانحرافه المعياري (٢) سلسيوس، وكان أكرم يفضل ألّا تقل درجة حرارة الماء عن (٢٥) سلسيوس كي يسبح في الماء، فما عدد الأيام التي تكون فيها درجة حرارة الماء مناسبة له للسباحة في هذا الشهر؟

تعلمت سابقًا أنَّ قيم مدى المتغير العشوائي المنفصل قابلة للعد، وقيم مدى المتغير العشوائي المتصل غير منتهية وتكون على شكل فترة، أو اتحاد فترتين، أو أكثر من الأعداد الحقيقية، وتعلمت أنَّ أهم التوزيعات للمتغير العشوائي المنفصل هو توزيع ذات الحدين، وفي هذا الدرس ستتعلم أحد توزيعات المتغير العشوائي المتصل وأهمها وهو (التوزيع الطبيعي).

التوزيع الطبيعي: توزيع احتمالي متصل، جرسي الشكل، ومتماثل حول المتوسط الحسابي ويمتد إلى مالا نهاية في الاتجاهين، ولكن معظم المساحة (الاحتمال) تتركز حول المتوسط الحسابي.

خصائص التوزيع الطبيعي

- المنحنى يأخذ شكل الجرس.
- متماثل حول المتوسط الحسابي μ.
- المتوسط الحسابي = الوسيط = المنوال



الشكل (٦-١٣)

- المساحة تحت منحنى التوزيع الطبيعي تساوي ١، ونظرًا للتماثل حول المتوسط فإنَّ المساحة على يمين المتوسط تساوي المساحة على يسار المتوسط وتساوي (٠,٥).

فكر وناقش

ابحث: المساحة تحت منحنى التوزيع الطبيعي تساوي ١ . لماذا؟

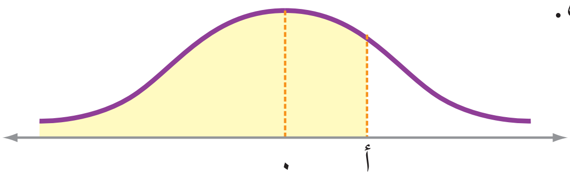
تعريف

التوزيع الطبيعي المعياري: هو التوزيع الطبيعي الذي متوسطه الحسابي (صفر)، وانحرافه المعياري (واحد)، ومتغيره العشوائي العلامة المعيارية (ز).

ويتم إيجاد احتمال وقوع المتغير العشوائي (ز) تحت قيمة ما، أو فوقها، أو محصورة بين قيمتين، من خلال جدول التوزيع الطبيعي المعياري الوارد في ملحق (٢) في نهاية الكتاب، على النحو الآتي:

١) ل(ز≥ أ)، حيث أ≤ صفر. من الجدول مباشرة.

انظر الشكل (٦ – ١٤)

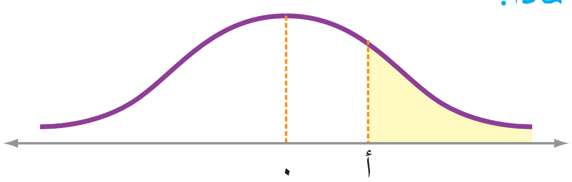


الشكل (٦–١٤)

٢) ل(ز≤ أ) = ١ – ل(ز≥ أ)

انظر الشكل (٦ – ١٥)

لماذا؟

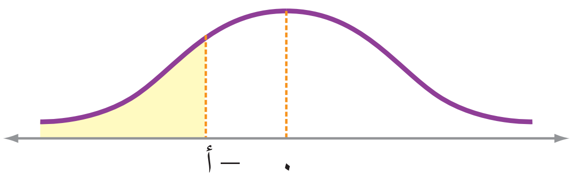


الشكل (٦–١٥)

٣) ل(ز≥ – أ) = ل(ز≤ أ) = ١ – ل(ز≥ أ)

انظر الشكل (٦ – ١٦)

لماذا؟

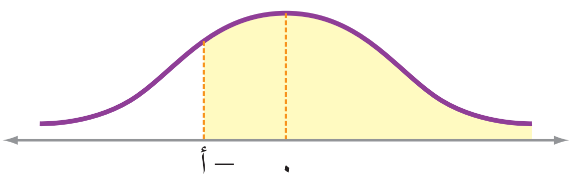


الشكل (٦–١٦)

٤) ل(ز≤ – أ) = ل(ز≥ أ)

انظر الشكل (٦ – ١٧)

لماذا؟



الشكل (٦–١٧)

مثال ١

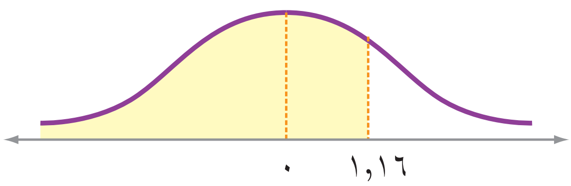
إذا كان (ز) متغيرًا عشوائيًّا طبيعيًّا معياريًّا. فجد قيمة كل مما يأتي، باستخدام جدول التوزيع الطبيعي المعياري:

١) ل(ز ≤ ١,١٦)

٢) ل(ز ≥ ٢,٥)

٣) ل(ز ≤ – ١,٣)

٤) ل(–٢ ≤ ز ≤ ١)



الشكل (٦–١٨)

الحل

١) ل(ز ≤ ١,١٦) = ٠,٨٧٧٠ كما في الشكل(٦–١٨)

من الجدول مباشرة.

وهي القيمة الواقعة عند تقاطع صف العدد(١,١) مع عمود الأجزاء من مئة (٠,٠٦)، كما في الجدول الآتي الذي يمثل جزءًا من جدول التوزيع الطبيعي المعياري.

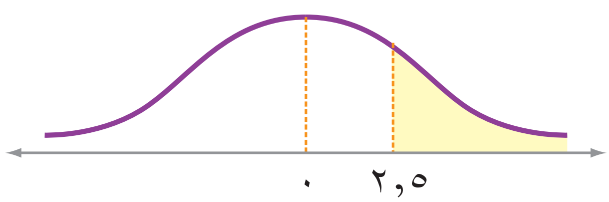
أ	٠,٠٠	٠,٠١	٠,٠٢	٠,٠٣	٠,٠٤	٠,٠٥	٠,٠٦	٠,٠٧	٠,٠٨	٠,٠٩
٠,٠	٠,٥٠٠٠	٠,٥٠٤٠	٠,٥٠٨٠	٠,٥١٢٠	٠,٥١٦٠	٠,٥١٩٩	٠,٥٢٣٩	٠,٥٢٧٩	٠,٥٣١٩	٠,٥٣٥٩
٠,١	٠,٥٣٩٨	٠,٥٤٣٨	٠,٥٤٧٨	٠,٥٥١٧	٠,٥٥٥٧	٠,٥٥٩٦	٠,٥٦٣٦	٠,٥٦٧٥	٠,٥٧١٤	٠,٥٧٥٣
٠,٢	٠,٥٧٩٣	٠,٥٨٣٢	٠,٥٨٧١	٠,٥٩١٠	٠,٥٩٤٨	٠,٥٩٨٧	٠,٦٠٢٦	٠,٦٠٦٤	٠,٦١٠٣	٠,٦١٤١
٠,٣	٠,٦١٧٩	٠,٦٢١٧	٠,٦٢٥٥	٠,٦٢٩٣	٠,٦٣٣١	٠,٦٣٦٨	٠,٦٤٠٦	٠,٦٤٤٣	٠,٦٤٨٠	٠,٦٥١٧
٠,٤	٠,٦٥٥٤	٠,٦٥٩١	٠,٦٦٢٨	٠,٦٦٦٤	٠,٦٧٠٠	٠,٦٧٣٦	٠,٦٧٧٢	٠,٦٨٠٨	٠,٦٨٤٤	٠,٦٨٧٩
٠,٥	٠,٦٩١٥	٠,٦٩٥٠	٠,٦٩٨٥	٠,٧٠١٩	٠,٧٠٥٤	٠,٧٠٨٨	٠,٧١٢٣	٠,٧١٥٧	٠,٧١٩٠	٠,٧٢٢٤
٠,٦	٠,٧٢٥٧	٠,٧٢٩١	٠,٧٣٢٤	٠,٧٣٥٧	٠,٧٣٨٩	٠,٧٤٢٢	٠,٧٤٥٤	٠,٧٤٨٦	٠,٧٥١٧	٠,٧٥٤٩
٠,٧	٠,٧٥٨٠	٠,٧٦١١	٠,٧٦٤٢	٠,٧٦٧٣	٠,٧٧٠٤	٠,٧٧٣٤	٠,٧٧٦٤	٠,٧٧٩٤	٠,٧٨٢٣	٠,٧٨٥٢
٠,٨	٠,٧٨٨١	٠,٧٩١٠	٠,٧٩٣٩	٠,٧٩٦٧	٠,٧٩٩٥	٠,٨٠٢٣	٠,٨٠٥١	٠,٨٠٧٨	٠,٨١٠٦	٠,٨١٣٣
٠,٩	٠,٨١٥٩	٠,٨١٨٦	٠,٨٢١٢	٠,٨٢٣٨	٠,٨٢٦٤	٠,٨٢٨٩	٠,٨٣١٥	٠,٨٣٤٠	٠,٨٣٦٥	٠,٨٣٨٩
١,٠	٠,٨٤١٣	٠,٨٤٣٨	٠,٨٤٦١	٠,٨٤٨٥	٠,٨٥٠٨	٠,٨٥٣١	٠,٨٥٥٤	٠,٨٥٧٧	٠,٨٥٩٩	٠,٨٦٢١
١,١	٠,٨٦٤٣	٠,٨٦٦٥	٠,٨٦٨٦	٠,٨٧٠٨	٠,٨٧٢٩	٠,٨٧٤٩	٠,٨٧٧٠	٠,٨٧٩٠	٠,٨٨١٠	٠,٨٨٣٠
١,٢	٠,٨٨٤٩	٠,٨٨٦٩	٠,٨٨٨٨	٠,٨٩٠٧	٠,٨٩٢٥	٠,٨٩٤٤	٠,٨٩٦٢	٠,٨٩٨٠	٠,٨٩٩٧	٠,٩٠١٥

٢) ل(ز ≥ ٢,٥) = ١ – ل(ز ≤ ٢,٥)،

كما في الشكل(٦–١٩)

= ١ – ٠,٩٩٣٨

= ٠,٠٠٦٢

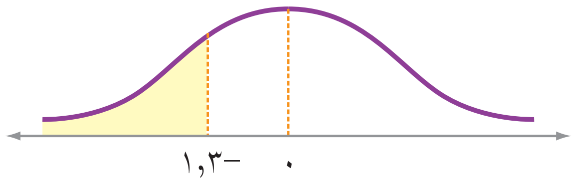


الشكل (٦–١٩)

٣) ل(ز ≤ −١,٣) = ١ − ل(ز ≤ ١,٣)، كما في الشكل(٦−٢٠)

= ١ − ٠,٩٠٣٢

= ٠,٠٩٦٨



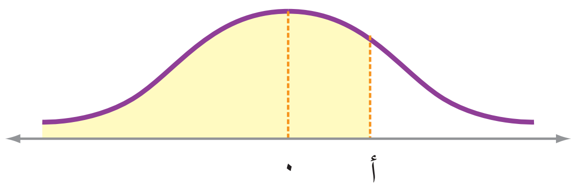
الشكل (٦−٢٠)

٤) ل(−٢ ≤ ز ≤ ١) = ل(ز ≤ ١) − ل(ز ≤ −٢)

= ٠,٨٤١٣ − (١ − ٠,٩٧٧٢)

= ٠,٨١٨٥

كما في الشكل (٦−٢١)



الشكل (٦−٢١)

تدريب ١

إذا كان (ز) متغيرًا عشوائيًّا طبيعيًّا معياريًّا. فجد قيمة كل مما يأتي، باستخدام جدول التوزيع الطبيعي المعياري:

١) ل(ز ≤ ١,٣٦)

٢) ل(ز ≥ ١,٢٣)

٣) ل(ز ≤ −٠,٩٥)

٤) ل(٠,٠٣ ≤ ز ≤ ٣,١)

٥) ل(−٠,٨ ≤ ز ≤ صفر)

٦) هل تختلف قيمة ل(ز ≤ ١,١٦) عن قيمة (١ − ل(ز > ١,١٦))؟ برر إجابتك.

مثال ٢

إذا كان (ز) متغيرًا عشوائيًّا طبيعيًّا معياريًّا، فاستعمل جدول التوزيع الطبيعي المعياري لإيجاد قيمة (أ) في كلٍّ من الحالات الآتية:

١) ل(ز ≤ أ) = ٠,٨٧٢٩

٢) ل(ز ≥ أ) = ٠,٠٠٤٥

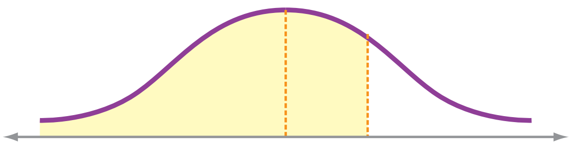
الحل

١) ل(ز ≤ أ) = ٠,٨٧٢٩

لاحظ الشكل(٦–٢٢) ومن الجدول نجد أنَّ

قيمة (ز) المناظرة للاحتمال٠,٨٧٢٩ هي ١,١٤،

إذن أ = ١,١٤



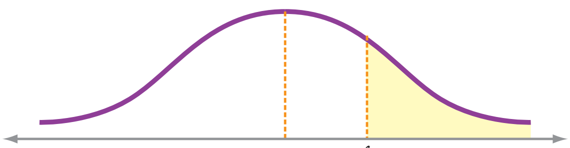
الشكل (٦–٢٢)

٢) ل(ز ≥ أ) = ٠,٠٠٤٥

لاحظ الشكل(٢–٢٣) نجد أنَّ

ل(ز ≤ أ) = ١ – ٠,٠٠٤٥ = ٠,٩٩٥٥

إذن أ = ٢,٦١



الشكل (٦–٢٣)

تدريب ٢

إذا كان (ز) متغيرًا عشوائيًا طبيعيًّا معياريًّا، فاستعمل جدول التوزيع الطبيعي المعياري لإيجاد قيمة (أ) في كلٍّ من الحالات الآتية:

١) ل(ز ≤ أ) = ٠,٥٣١٩

٢) ل(ز ≥ أ) = ٠,٦٨٠٨

والآن ستتعرف كيفية إيجاد احتمالات أي توزيع طبيعي من خلال التحويل إلى التوزيع الطبيعي المعياري، وذلك من خلال تحويل العلامة الخام (س) إلى العلامة المعيارية (ز):

إذا كان (س) متغيرًا عشوائيًّا طبيعيًّا متوسطه الحسابي (μ)، وانحرافه المعياري (σ)، فإنَّ:

العلامة المعيارية (ز) للمتغير العشوائي (س) هي:

$$ز = \frac{س - \mu}{\sigma}$$

فكر وناقش

ابحث: ما العلاقة بين التوزيع الطبيعي والتوزيع الطبيعي المعياري؟

مثال ٣

إذا كان (س) متغيرًا عشوائيًّا يتبع التوزيع الطبيعي الذي متوسطه الحسابي (٧٠)، وانحرافه المعياري (٨)، فجد:

١) ل (س ≥ ٧٢)

٢) ل (س ≤ ٥٦)

الحل

بما أن (س) يتبع توزيعًا طبيعيًّا، فيمكن تحويل المشاهدة الخام (س)، إلى علامة معيارية (ز).

١) ل (س ≥ ٧٢) = ل (ز ≥ $\frac{٧٢ - ٧٠}{٨}$) = ل (ز ≥ ٠,٢٥) = ٠,٥٩٨٧

٢) ل (س ≤ ٥٦) = ل (ز ≤ $\frac{٥٦ - ٧٠}{٨}$) = ل (ز ≤ −١,٧٥) = ل (ز ≥ ١,٧٥)= ٠,٩٥٩٥

تدريب ٣

إذا كان (س) متغيرًا عشوائيًّا يتبع التوزيع الطبيعي الذي متوسطه الحسابي (١١٠)، وانحرافه المعياري (١٠)، فجد:

١) ل (س ≥ ٩٥)

٢) ل (س ≤ ١٠٥)

٣) ل (٩٠ ≥ س ≥ ١٣٠)

مثال ٤

إذا كانت كتل أكياس الطحين في أحد المخازن وعددها (١٠٠٠) كيس تتبع التوزيع الطبيعي، وكان المتوسط الحسابي للكتل (٥٠) كغ، والانحراف المعياري لها (١,٢٥) كغ. إذا اختير أحد الأكياس عشوائيًّا، فأجب عن كلٍّ مما يأتي:

١) ما احتمال أن تقل كتلة الكيس عن (٤٧) كغ؟

٢) ما احتمال أن تزيد كتلة الكيس عن (٥١) كغ؟

٣) ما عدد الأكياس التي تنحصر كتلتها بين (٤٨) كغ، و(٥٢) كغ ؟

الحل

ليَكن (س) كتلة كيس الطحين، ويتبع توزيعًا طبيعيًّا متوسطه μ = ٥٠، وانحرافه المعياري σ = ١,٢٥ وبالتالي:

١) احتمال أن تقل كتلة الكيس عن (٤٧) كغ يساوي:

ل(س ≤ ٤٧) = ل(ز ≤ (٤٧ − ٥٠)/١,٢٥) = ل(ز ≤ −٢,٤) = ١ − ل(ز ≤ ٢,٤)

= ١ − ٠,٩٩١٨ = ٠,٠٠٨٢

٢) احتمال أن تزيد كتلة الكيس عن (٥١) كغ يساوي:

ل(س ≥ ٥١) = ل(ز ≥ (٥١ − ٥٠)/١,٢٥) = ل(ز ≥ ٠,٨) = ١ − ل(ز ≤ ٠,٨)

= ١ − ٠,٧٨٨١ = ٠,٢١١٩

٣) احتمال أن تنحصر الكُتل بين (٤٨) كغ، و(٥٢) كغ يساوي:

ل(٤٨ ≤ س ≤ ٥٢) = ل((٤٨ − ٥٠)/١,٢٥ ≤ ز ≤ (٥٢ − ٥٠)/١,٢٥) = ل(−١,٦ ≤ ز ≤ ١,٦)

= ل(ز ≤ ١,٦) − ل(ز ≤ −١,٦) = ل(ز ≤ ١,٦) − (١ − ل(ز ≤ ١,٦)) لماذا؟

= ٢ ل(ز ≤ ١,٦) − ١ لماذا؟

= ٢ × ٠,٩٤٥٢ − ١ = ٠,٨٩٠٤

إذن، عدد الأكياس التي تنحصر كتلها بين (٤٨) كغ، و(٥٢) كغ يساوي:

العدد الكلي × الاحتمال = ١٠٠٠٠ × ٠,٨٩٠٤ = ٨٩٠٤ أكياس.

تدريب ٤

حُلَّ المسألة الواردة في بداية الدرس.

١) إذا كان (ز) متغيرًا عشوائيًّا طبيعيًّا معياريًّا. فجد قيمة كلٍّ مما يأتي، باستعمال جدول التوزيع الطبيعي المعياري:

أ) ل(ز ≥ ٣,٠٦)

ب) ل(ز ≤ −١)

جـ) ل (ز ≤ ١,٨)

د) ل(ز ≥ −٠,٠٧)

هـ) ل(صفر ≥ ز ≥ ٠,٥)

و) ل(−١,٥٣ ≥ ز ≥ −٠,١٢)

ز) ل(|ز| ≥ ٠,٨)

ح) ل(−١,٧ ≥ ز ≥ صفر)

٢) إذا كان (ز) متغيرًا عشوائيًّا طبيعيًّا معياريًّا، فاستعمل جدول التوزيع الطبيعي المعياري لإيجاد قيمة (أ) في كلٍّ من الحالات الآتية:

أ) ل(ز≥ أ) = ٠,٣٩٢١

ب) ل(أ≥ ز ≥ ٢) = ٠,١٥٦

٣) تقدم (٢٠٠٠) معلم لامتحان الرخصة الدولية لقيادة الحاسوب (ICDL)، فإذا كان توزيع علاماتهم يتبع التوزيع الطبيعي، بمتوسط حسابي (٧٠)، وانحراف معياري (٨)، فأجب عن كلٍّ مما يأتي:

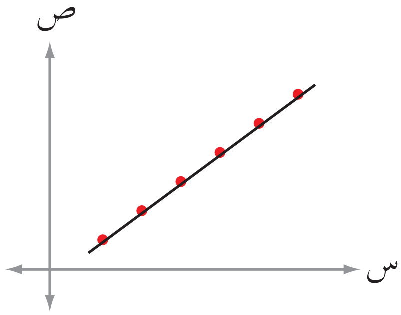
أ) ما عدد المعلمين الذين تزيد علاماتهم عن (٨٢)؟

ب) إذا كانت علامة النجاح في الامتحان (٨٠)، فما نسبة النجاح؟

٤) إذا كانت علامات (١٠٠٠٠) طالبٍ تتبع توزيعًا طبيعيًّا، وكان متوسطه الحسابي (٦٠)، وانحرافه المعياري (٥)، وكان عدد الناجحين (٧٥٨٠) طالباً، فما علامة النجاح؟

٥) إذا كانت كتل (١٠٠٠) صندوق برتقال تتبع توزيعًا طبيعيًّا، متوسطه الحسابي (٥)كغ، وانحرافه المعياري (٠,٤)كغ، فجد نسبة الصناديق التي تقل كتلها عن (٤,٨) كغ؟

١) يمثل الشكل (٦–٢٤) شكل الانتشار للمتغيرين س، ص.
حدِّد نوع العلاقة بينهما، وجد قيمة معامل الارتباط.



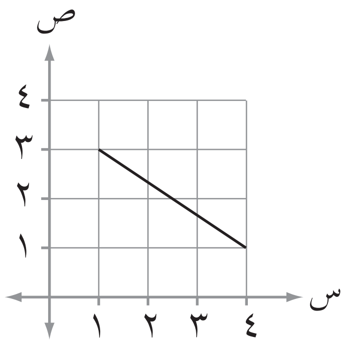
الشكل (٦–٢٤)

٢) يبين الجدول الآتي علامات ستة طلاب في مبحثَي التاريخ (س) والتربية الوطنية (ص) في امتحان قصير، نهايته العظمى (١٠)، أجب عما يليه:

رقم الطالب	١	٢	٣	٤	٥	٦
مبحث التاريخ (س)	٢	٣	٥	٦	٤	١٠
مبحث التربية الوطنية (ص)	٥	٣	٦	٧	٩	٦

أ) احسب معامل ارتباط بيرسون الخطي بين س، ص.
ب) جد معادلة خط الانحدار بين المتغيرين س، ص.
جـ) قدِّر علامة التاريخ لطالب إذا كانت علامته في التربية الوطنية (٧).
د) جد الخطأ في التنبؤ في علامة طالب في التربية الوطنية، إذا كانت علامته في التاريخ (٥).

٣) معتمدًا على الشكل (٦–٢٥) الذي يمثل شكل الانتشار للمتغيرين س، ص أجب عما يأتي:
أ) ما قيمة معامل ارتباط بيرسون؟
ب) اكتب معادلة خط الانحدار.



الشكل (٦–٢٥)

٤) إذا كانت كل نقط شكل الانتشار بين المتغيرين س، ص، تقع على المستقيم الذي معادلته: ص = ٣ – ٢س، فجد معامل الارتباط.

٥) صندوق يحتوي ٨ بطاقات مرقمة من ٣ إلى ١٠، سُحِبَتْ ثلاث بطاقات دفعة واحدة، إذا دل المتغير العشوائي ق على الرقم الأصغر في البطاقات الثلاث المسحوبة، فاكتب القيم

الممكنة للمتغير العشوائي ق.

٦) إذا كان ق متغيرًا عشوائيًّا مداه س = ٠، ١، ٢ وكان ل(س) = $\binom{ن}{س}(أ)^{س}(٠,٦)^{ن-س}$ اقتران الكثافة الاحتمالية للمتغير ق، فأجب عن كلٍّ مما يأتي:

أ) ما نوع المتغير العشوائي ق؟

ب) جد قيم أ، ن.

جـ) جد ل(س=٢).

٧) إذا كان ل يمثل اقتران الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي ق، الذي مداه ٢، ٣، ٤، وكان ل(٢) = ٣ل(٣) = ل(٤)، فجد قيمة ل(٣).

٨) في تجربة إلقاء حجر نرد منتظم ست مرات، جد كلًّا مما يأتي:

أ) احتمال ظهور العدد ٦ مرتين.

ب) احتمال ظهور العدد ٦ ثلاث مرات على الأكثر.

٩) أشار استطلاع للرأي في إحدى الجامعات أن ٠,٩٥ من طلبة الدراسات العليا يتواصلون إلكترونيًّا مع أساتذتهم الجامعيين، إذا اختيرت عينة عشوائية من ٢٠ طالبًا، فما احتمال أن يكون واحد منهم على الأقل لا يتواصل إلكترونيًّا مع أستاذه الجامعي؟

١٠) في تجربة سحب كرة (دون إرجاع) من صندوق يحتوي على ٤ كرات بيضاء، و٧ كرات حمراء، إذا دل المتغير العشوائي ق على رقم السحب التي يظهر فيه أول كرة حمراء ، فجد احتمال أن تظهر أول كرة حمراء في السحب الثالث.

١١) قررت إحدى الشركات رفض أي شحنة من المواد تشتريها من مورد ما إذا تبيَّن وجود (٣) وحدات معيبة أو أكثر في عينة عشوائية مكونة من (٩) وحدات، إذا كانت نسبة المَعيب في شحنة من أحد الموردين (٠,١)، ما احتمال رفض الشركة للشحنة؟

١٢) إذا كانت العلامات المعيارية لعينة مكونة من (٦) مشاهدات كالآتي:

–١، –٠,٥ ، ٠,٥، ١,٥، –١، (ز)، فجد كلًّا مما يأتي:

أ) المتوسط الحسابي للعلامات المعيارية.

ب) الانحراف المعياري للعلامات المعيارية.

جـ) قيمة (ز).

ملحق(١)

متطابقات مثلثية

ظاس = $\frac{\text{جاس}}{\text{جتاس}}$ ، ظتاس = $\frac{\text{جتاس}}{\text{جاس}}$

قاس = $\frac{١}{\text{جتاس}}$ ، قتاس = $\frac{١}{\text{جاس}}$

جا^{٢}س + جتا^{٢}س = ١

١ + ظا^{٢}س = قا^{٢}س

١ + ظتا^{٢}س = قتا^{٢}س

جا٢س = ٢ جاس جتاس

جتا٢س = ١ − ٢ جا^{٢}س

= ٢ جتا^{٢}س − ١

= جتا^{٢}س − جا^{٢}س

جا(أ + ب) = جاأجتاب + جتاأ جاب

جا(أ − ب) = جاأجتاب − جتاأ جاب

جتا(أ + ب) = جتاأجتاب − جاأ جاب

جتا(أ − ب) = جتاأجتاب + جاأ جاب

ظا(أ + ب) = $\frac{\text{ظاأ + ظاب}}{\text{١ − ظاأ ظاب}}$

ظا(أ − ب) = $\frac{\text{ظاأ − ظاب}}{\text{١ + ظاأ ظاب}}$

جا^{٢}س = $\frac{١}{٢}$ (١ − جتا٢س)

جتا^{٢}س = $\frac{١}{٢}$ (١ + جتا٢س)

ظا٢س = $\frac{\text{٢ ظاس}}{\text{١ − ظا}^{٢}\text{س}}$

جاس جاص = $\frac{١}{٢}$ (جتا(س − ص) − جتا(س + ص))

جاس جتاص = $\frac{١}{٢}$ (جا(س + ص) + جا(س − ص))

جتاس جتاص = $\frac{١}{٢}$ (جتا(س + ص) + جتا(س − ص))

جاس − جاص = ٢ جتا $\frac{١}{٢}$(س + ص) جا $\frac{١}{٢}$(س − ص)

جاس + جاص = ٢ جا $\frac{١}{٢}$(س + ص) جتا $\frac{١}{٢}$(س − ص)

جتاس − جتاص = −٢ جا $\frac{١}{٢}$(س + ص) جا $\frac{١}{٢}$(س − ص)

جتاس + جتاص = ٢ جتا $\frac{١}{٢}$(س + ص) جتا $\frac{١}{٢}$(س − ص)

جتا($\frac{\pi}{٢}$ − س) = جاس

جا($\frac{\pi}{٢}$ − س) = جتاس

ظا($\frac{\pi}{٢}$ − س) = ظتاس

ظتا($\frac{\pi}{٢}$ − س) = ظاس

جا($\frac{\pi}{٢}$ + س) = جتاس

جتا($\frac{\pi}{٢}$ + س) = −جاس

جا(π − س) = جاس

جتا(π − س) = −جتاس

ظا(π − س) = − ظاس

جا(π + س) = − جاس

جتا(π + س) = − جتاس

ظا(π + س) = ظاس

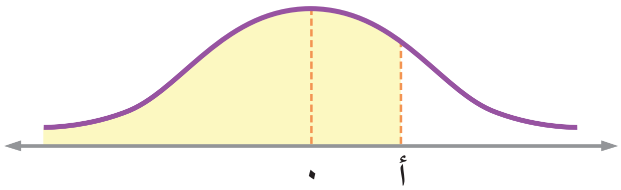
جا(− س) = − جاس

جتا(− س) = جتاس

ظا(− س) = −ظاس

ملحق(٢)

جدول التوزيع الطبيعي المعياري



أ	٠,٠٠	٠,٠١	٠,٠٢	٠,٠٣	٠,٠٤	٠,٠٥	٠,٠٦	٠,٠٧	٠,٠٨	٠,٠٩
٠,٠	٠,٥٠٠٠	٠,٥٠٤٠	٠,٥٠٨٠	٠,٥١٢٠	٠,٥١٦٠	٠,٥١٩٩	٠,٥٢٣٩	٠,٥٢٧٩	٠,٥٣١٩	٠,٥٣٥٩
٠,١	٠,٥٣٩٨	٠,٥٤٣٨	٠,٥٤٧٨	٠,٥٥١٧	٠,٥٥٥٧	٠,٥٥٩٦	٠,٥٦٣٦	٠,٥٦٧٥	٠,٥٧١٤	٠,٥٧٥٣
٠,٢	٠,٥٧٩٣	٠,٥٨٣٢	٠,٥٨٧١	٠,٥٩١٠	٠,٥٩٤٨	٠,٥٩٨٧	٠,٦٠٢٦	٠,٦٠٦٤	٠,٦١٠٣	٠,٦١٤١
٠,٣	٠,٦١٧٩	٠,٦٢١٧	٠,٦٢٥٥	٠,٦٢٩٣	٠,٦٣٣١	٠,٦٣٦٨	٠,٦٤٠٦	٠,٦٤٤٣	٠,٦٤٨٠	٠,٦٥١٧
٠,٤	٠,٦٥٥٤	٠,٦٥٩١	٠,٦٦٢٨	٠,٦٦٦٤	٠,٦٧٠٠	٠,٦٧٣٦	٠,٦٧٧٢	٠,٦٨٠٨	٠,٦٨٤٤	٠,٦٨٧٩
٠,٥	٠,٦٩١٥	٠,٦٩٥٠	٠,٦٩٨٥	٠,٧٠١٩	٠,٧٠٥٤	٠,٧٠٨٨	٠,٧١٢٣	٠,٧١٥٧	٠,٧١٩٠	٠,٧٢٢٤
٠,٦	٠,٧٢٥٧	٠,٧٢٩١	٠,٧٣٢٤	٠,٧٣٥٧	٠,٧٣٨٩	٠,٧٤٢٢	٠,٧٤٥٤	٠,٧٤٨٦	٠,٧٥١٧	٠,٧٥٤٩
٠,٧	٠,٧٥٨٠	٠,٧٦١١	٠,٧٦٤٢	٠,٧٦٧٣	٠,٧٧٠٤	٠,٧٧٣٤	٠,٧٧٦٤	٠,٧٧٩٤	٠,٧٨٢٣	٠,٧٨٥٢
٠,٨	٠,٧٨٨١	٠,٧٩١٠	٠,٧٩٣٥	٠,٧٩٦٧	٠,٧٩٩٥	٠,٨٠١٣	٠,٨٠٥١	٠,٨٠٧٨	٠,٨١٠٦	٠,٨١٣٣
٠,٩	٠,٨١٥٩	٠,٨١٨٦	٠,٨٢١٢	٠,٨٢٣٨	٠,٨٢٦٤	٠,٨٢٨٩	٠,٨٣١٥	٠,٨٣٤٠	٠,٨٣٦٥	٠,٨٣٨٩
١,٠	٠,٨٤١٣	٠,٨٤٣٨	٠,٨٤٦١	٠,٨٤٨٥	٠,٨٥٠٨	٠,٨٥٣١	٠,٨٥٥٤	٠,٨٥٧٧	٠,٨٥٩٩	٠,٨٦٢١
١,١	٠,٨٦٤٣	٠,٨٦٦٥	٠,٨٦٨٦	٠,٨٧٠٨	٠,٨٧٢٩	٠,٨٧٤٩	٠,٨٧٧٠	٠,٨٧٩٠	٠,٨٨١٠	٠,٨٨٣٠
١,٢	٠,٨٨٤٩	٠,٨٨٦٩	٠,٨٨٨٨	٠,٨٩٠٧	٠,٨٩٢٥	٠,٨٩٤٤	٠,٨٩٦٢	٠,٨٩٨٠	٠,٨٩٩٧	٠,٩٠١٥
١,٣	٠,٩٠٣٢	٠,٩٠٤٩	٠,٩٠٦٦	٠,٩٠٨٢	٠,٩٠٩٩	٠,٩١١٥	٠,٩١٣١	٠,٩١٤٧	٠,٩١٦٢	٠,٩١٧٧
١,٤	٠,٩١٩٢	٠,٩٢٠٧	٠,٩٢٢٢	٠,٩٢٣٦	٠,٩٢٥١	٠,٩٢٦٥	٠,٩٢٧٩	٠,٩٢٩٢	٠,٩٣٠٦	٠,٩٣١٩
١,٥	٠,٩٣٣٢	٠,٩٣٤٥	٠,٩٣٥٧	٠,٩٣٧٠	٠,٩٣٨٢	٠,٩٣٩٤	٠,٩٤٠٦	٠,٩٤١٨	٠,٩٤٢٩	٠,٩٤٤١
١,٦	٠,٩٤٥٢	٠,٩٤٦٣	٠,٩٤٧٤	٠,٩٤٨٤	٠,٩٤٩٥	٠,٩٥٠٥	٠,٩٥١٥	٠,٩٥٢٥	٠,٩٥٣٥	٠,٩٥٤٥
١,٧	٠,٩٥٥٤	٠,٩٥٦٤	٠,٩٥٧٣	٠,٩٥٨٢	٠,٩٥٩١	٠,٩٥٩٥	٠,٩٦٠٨	٠,٩٦١٦	٠,٩٦٢٥	٠,٩٦٣٣
١,٨	٠,٩٦٤١	٠,٩٦٤٩	٠,٩٦٥٦	٠,٩٦٦٤	٠,٩٦٧١	٠,٩٦٧٨	٠,٩٦٨٦	٠,٩٦٩٣	٠,٩٦٩٩	٠,٩٧٠٦
١,٩	٠,٩٧١٣	٠,٩٧١٩	٠,٩٧٢٦	٠,٩٧٣٢	٠,٩٧٣٨	٠,٩٧٤٤	٠,٩٧٥٠	٠,٩٧٥٦	٠,٩٧٦١	٠,٩٧٦٧
٢,٠	٠,٩٧٧٢	٠,٩٧٧٨	٠,٩٧٨٣	٠,٩٧٨٨	٠,٩٧٩٣	٠,٩٧٩٨	٠,٩٨٠٣	٠,٩٨٠٨	٠,٩٨١٢	٠,٩٨١٧
٢,١	٠,٩٨٢١	٠,٩٨٢٦	٠,٩٨٣٠	٠,٩٨٣٤	٠,٩٨٣٨	٠,٩٨٤٢	٠,٩٨٤٦	٠,٩٨٥٠	٠,٩٨٥٤	٠,٩٨٥٧
٢,٢	٠,٩٨٦١	٠,٩٨٦٤	٠,٩٨٦٨	٠,٩٨٧١	٠,٩٨٧٥	٠,٩٨٧٨	٠,٩٨٨١	٠,٩٨٨٤	٠,٩٨٨٧	٠,٩٨٩٠
٢,٣	٠,٩٨٩٣	٠,٩٨٩٦	٠,٩٨٩٨	٠,٩٩٠١	٠,٩٩٠٤	٠,٩٩٠٦	٠,٩٩٠٩	٠,٩٩١١	٠,٩٩١٣	٠,٩٩١٦
٢,٤	٠,٩٩١٨	٠,٩٩٢٠	٠,٩٩٢٢	٠,٩٩٢٥	٠,٩٩٢٧	٠,٩٩٢٩	٠,٩٩٣١	٠,٩٩٣٢	٠,٩٩٣٤	٠,٩٩٣٦
٢,٥	٠,٩٩٣٨	٠,٩٩٤٠	٠,٩٩٤١	٠,٩٩٤٣	٠,٩٩٤٥	٠,٩٩٤٦	٠,٩٩٤٨	٠,٩٩٤٩	٠,٩٩٥١	٠,٩٩٥٢
٢,٦	٠,٩٩٥٣	٠,٩٩٥٥	٠,٩٩٥٦	٠,٩٩٥٧	٠,٩٩٥٩	٠,٩٩٦٠	٠,٩٩٦١	٠,٩٩٦٢	٠,٩٩٦٣	٠,٩٩٦٤
٢,٧	٠,٩٩٦٥	٠,٩٩٦٦	٠,٩٩٦٧	٠,٩٩٦٨	٠,٩٩٦٩	٠,٩٩٧٠	٠,٩٩٧١	٠,٩٩٧٢	٠,٩٩٧٣	٠,٩٩٧٤
٢,٨	٠,٩٩٧٤	٠,٩٩٧٥	٠,٩٩٧٦	٠,٩٩٧٧	٠,٩٩٧٧	٠,٩٩٧٨	٠,٩٩٧٩	٠,٩٩٧٩	٠,٩٩٨٠	٠,٩٩٨١
٢,٩	٠,٩٩٨١	٠,٩٩٨٢	٠,٩٩٨٢	٠,٩٩٨٣	٠,٩٩٨٤	٠,٩٩٨٤	٠,٩٩٨٥	٠,٩٩٨٥	٠,٩٩٨٦	٠,٩٩٨٦
٣,٠	٠,٩٩٨٧	٠,٩٩٨٧	٠,٩٩٨٧	٠,٩٩٨٨	٠,٩٩٨٨	٠,٩٩٨٩	٠,٩٩٨٩	٠,٩٩٨٩	٠,٩٩٩٠	٠,٩٩٩٠
٣,١	٠,٩٩٩٠	٠,٩٩٩١	٠,٩٩٩١	٠,٩٩٩١	٠,٩٩٩٢	٠,٩٩٩٢	٠,٩٩٩٢	٠,٩٩٩٢	٠,٩٩٩٣	٠,٩٩٩٣
٣,٢	٠,٩٩٩٣	٠,٩٩٩٣	٠,٩٩٩٤	٠,٩٩٩٤	٠,٩٩٩٤	٠,٩٩٩٤	٠,٩٩٩٤	٠,٩٩٩٥	٠,٩٩٩٥	٠,٩٩٩٥
٣,٣	٠,٩٩٩٥	٠,٩٩٩٥	٠,٩٩٩٥	٠,٩٩٩٦	٠,٩٩٩٦	٠,٩٩٩٦	٠,٩٩٩٦	٠,٩٩٩٦	٠,٩٩٩٦	٠,٩٩٩٧
٣,٤	٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٨

قائمة المراجع

أولًا: المراجع العربية

١ – منصور عوض، **مبادئ الإحصاء، عمان**: دار الصفاء للنشر، ٢٠٠٦.

٢– إدارة المناهج والكتب المدرسية (الأردن)– **الرياضيات للمرحلة الثانوية/ الفرع العلمي** (المستويان الثالث والرابع)– الطبعة الأولى، وزارة التربية والتعليم، ٢٠١٦.

ثانيًا: المراجع الأجنبية

1- Howard Anton, IRL; BIVENS, STEPHEN, DAVIS, **Calculus Early Transcendentals**, 10*th* Edition.

2- Larson, Hosteler, **Precalculus**, 7*th* Edition, Bosten.

3- Sallas, Hille, **Calcuus one and Several Variables**,10*th* Edition, 2007. John Willy and Sans.

4- Swokowski, Earal, w. , **Calculus with analiatic Geometry**, 5*th* Edition, Weber and Shmidt, Boston. Massachusetts.

تم بحمد الله