الحسام في الرياضيات

الصف الثاني الثانوي

توجيهي علمي

أ. حسام الكوفحي

الوحدة الأولى

النهايات والاتصال

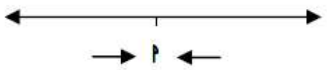
إعداد : أ. حسام الكوفحي

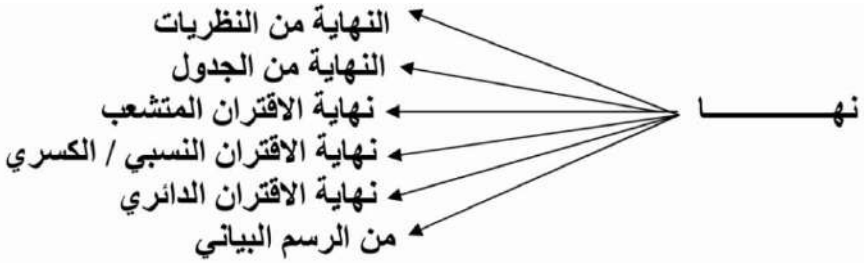
النهايات

النهايات : ومفردها نهاية ويرمز لها بالرمز $\lim_{س \to ا} ق(س) = ل$

تقرأ : نهاية ق(س) عندما س تؤول إلى (1) تساوي ل.

تعني:
أنه كلما اقتربت س من ا فإن قيمة الاقتران ق(س) تقترب من ل.





الاقتراب من (ا) يكون من جهتين:

١) جهة اليمين: $\lim_{س \to ا^+}$ ق (س)

٢) جهة اليسار: $\lim_{س \to ا^-}$ ق (س)

أولا: النهاية من النظريات

نظرية (١) : نهاية الثابت = الثابت نفسه

$\lim_{س \to \text{أي عدد}} أ = أ$ ، حيث أ عدد ثابت

جد كلا من النهايات

١) $\lim_{س \to ٣} (٧) = ٧$

٢) $\lim_{س \to ٦} (-٢٢) = -٢٢$

٣) إذا كانت $\lim_{س \to ٢} (ك) = ٥$ فان قيمة الثابت ك

أ) ٢ ب) ٣ ج) ٥ د) ١٠

نظرية (٢) : نهاية كثير الحدود = تعويض مباشر مكان السينات

$\lim_{س \to ٢} (٥س + ٧) = ٥(٢) + ٧ = ١٠ + ٧ = ١٧$

جـــــد قيمة كلا من النهايات التالية :

١) $\lim_{س \to ٣}$ (٢س – ٤)

= ٢(٣) – ٤ = ٢

٢) $\lim_{س \to ٣}$ (٢س^{٢} – ٣)

٣) $\lim_{س \to -١}$ (س^{٢} – ٣س -٢)

٤) $\lim_{س \to -٢}$ (س^{٢} – س – ١)^{٢}

٥) $\lim_{س \to -٢}$ (س^{٢} – س) (٣ س + ٢)

٦) $\lim_{س \to ٣}$ (س^{٢} – ٤)^{٢}(١ – س)

٧) $\lim_{س \to -٢}$((س^{٢} – س)(٢س))^{٢}

فيما يلي جـــــد قيمة الثابت

أ) $\lim_{س \to ٢}$ (٣س +٢ أ) = ١٢

ب) $\lim_{س \to -٣}$(س^{٢} - أ) = ١٠

ت) $\lim_{س \to م}$(س^{٢} + ٢) = ٦

ث) $\lim_{س \to ك}$(س^{٢} +٢س) = صفر

ج) $\lim_{س \to ٢}$ (٣س +٢) = ك

ح) $\lim_{س \to -٢}$(س^{٣} - ٢ أ) = ٢

نظرية (٣) : النهاية توزع على الجمع والطرح والضرب والقسمة بشرط أن تكون موجودة

٤ اذا علمت ان $\lim_{س \to ٢}$ ق(س) = ٣ ، $\lim_{س \to ٢}$ ع(س) = ٥ فجد

١) $\lim_{س \to ٢}$ (ق(س) + ع(س)) = ٣ + ٥ = ٨

٢) $\lim_{س \to ٢}$ (ق(س) - ع(س)) = ٣ - ٥ = -٢

٣) $\lim_{س \to ٢}$ (ق(س) × ع(س)) = ٣ × ٥ = ١٥

٤) $\lim_{س \to ٢} \frac{ق(س)}{ع(س)} = \frac{٣}{٥}$

٥) $\lim_{س \to ٢}$ (ق (س) + ٢س) = ٣ + ٢(٢) = ٧

٦) $\lim_{س \to ٢}$ (س ق (س) + ع (س)) = ٢(٣) + ٥ = ١١

٧) $\lim_{س \to ٢}$ (س^{٢} ق^{٢}(س) + ٣س ع(س)) =

٨) $\lim_{س \to ٢}$ (٢س ق(س) -ع(س)) (س^{٢} +٦) =

٩) $\lim_{س \to ٢} \frac{٣ \text{ س ع}^{٢}(س) - ٢}{\text{س ق(س)} + ١}$

---

٥ إذا علمت أن $\lim_{س \to ٤}$ ق(س) = ٥ فجد $\lim_{س \to ٤}$(س^{٢}ق(س)-٢س +٤)

---

٦ اذا علمت ان $\lim_{س \to ٣}$ ق(س) = ٢ فجد $\lim_{س \to ٣}$(٣س ق^{٢}(س)- س)^{٢}

---

٧ إذا كانت $\lim_{س \to ٢}$ نه . . ا $\frac{\text{س}^{٢} + ٣\text{س}}{\text{س} - \text{ق(س)}} = -١٠$ فإن $\lim_{س \to ٢}$ نه . . ا ق(س) =

أ) ٠ ب) ١ ج) ٣ د) -٣

٨ اذا علمت ان $\lim_{س \to ٣} ق(س) = ٢$

وكان $\lim_{س \to ٣} (س\, ق(س) - ك) = ١٠$

فان قيمة الثابت ك تساوي

أ) ١٦ ب) ٤ ج) ١٤ د) -٤

٩ اذا علمت ان

$\lim_{س \to ٣} (٢ق(س) + ٢س) = ١٤$

جد $\lim_{س \to ٣} (ق(س) + س^{٢} - ٢)$

١٠ اذا علمت ان

$\lim_{س \to ٤} (س\, ق(س) + ٢) = ١٤$

جد $\lim_{س \to ٤} (س^{٢}\, ق(س) - ٢س + ٦)$

١١ اذا علمت ان

$\lim_{س \to ٥} س^{٢}\, ق(س) = ١٥٠$

جد $\lim_{س \to ٥} (٤ق(س) - [\frac{س}{٢} + ٧])$

ثانيا: النهاية من الجدول

في جدول النهاية :السـؤال من السـينات
الإجابة من الصادات / ق(س)

تكون النهاية موجودة
إذا وفقط إذا
النهاية من اليمين = النهاية من اليسار

١٦ بالاعتماد على الجدول التالي الذي يبين قيم ق (س) عندما س ← ١

جـ . د نهـ . . ـا ق(س) =
س ← ١

س	١,١	١,٠٥	١,٠٠١		٠,٩٩٩	٠,٩٥	٠,٩
ق (س)	٥,٢	٥,١	٥,٠٠٢		٣,٩٩٨	٣,٩	٣,٨

---

١٧ - بالاعتماد على الجدول التالي الذي يبين قيم ق (س) عندما س ← ٣

فان نهـ . . ـا ق(س) =
س ← ٣+

أ)-١ ب)٣

ج) ٤ د) ٢

س	٣,١	٣,٠٥	٣,٠٠١		٢,٩٩٩	٢,٩٥	٢,٩
ق (س)	٤,١	٤,٠٥	٤,٠٠١		١,٩٩٩	١,٩٥	١,٩

---

١٨ معتمدا الجدول التالى لقيم س ، ق(س) جـد ما يليه

٥

س	٥,١	٥,٠١	٥,٠٠١		٤,٩٩٩	٤,٩٩	٤,٩
ق(س)	٣,١	٣,٠١	٣,٠٠١		٣,٩٩٩	٣,٩٩	٣,٩

نهـــــا ق(س) نهـــــا ق(س) نهـــــا ق(س)
س ← ٥+ س ← ٥- س ← ٥

---

١٩ أذا كان

$$ق(س) = \frac{س^{٢} - ٤}{س - ٢}$$

باستخدام طريقة الجدول جـــد نهـــا ق(س)
س ← ٢

منهاجي
متعة التعليم الهادف

النهاية للجذور :

- فردي ← موجب عادي
- زوجي ← سالب غير موجودة
- زوجي ← صفر نفحص الإشارات

٢٠ جـــــد قيمة كلا من :

١) $\lim_{س \to ٩} \sqrt[٣]{س - ١}$

٢) $\lim_{س \to -٧} \sqrt[٣]{س - ١}$

٣) $\lim_{س \to ١} \sqrt[٥]{س - ١}$

٤) $\lim_{س \to ٥} \sqrt[٧]{٢س - ١٠}$

٥) $\lim_{س \to ٢} \sqrt{س - ٦}$

٦) $\lim_{س \to -١} \sqrt{س - ٣}$

٧) $\lim_{س \to -٢} \sqrt{٧ - س}$

٨) $\lim_{س \to ٠} \sqrt[٤]{س + ١}$

٢١ جـــــد قيمة كلا من :

١) $\lim_{س \to ٥} \sqrt{س - ٥}$

٢) $\lim_{س \to ٢} \sqrt{٢ - س}$

٣) $\lim_{س \to ١} \sqrt{(س - ١)^{٤}}$

٤) $\lim_{س \to -٢} \sqrt{٤ - س^{٢}}$

٥) $\lim_{س \to +٣} \sqrt[٤]{س^{٢} - ٩}$

٦) $\lim_{س \to ٢} \sqrt{س^{٢} + س - ٦}$

ثالثا: نهاية الاقتران النسبي

أ) حل مباشر ما لم يكن الناتج $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

ب) حل غير مباشر

وهنا نستخدم واحدة من

- التحليل وإخراج العامل المشترك
- توحيد المقامات
- الضرب بالمرافق (تربيعي ، تكعيبي)
- التوزيع المنتظم
- الاستبدال

$\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ أو صفر × غير موجودة

أو غير موجودة ± غير موجودة

الأصل في إيجاد النهاية التعويض المباشر

أ) حل مباشر :

جد قيمة كلا من النهايات الآتية : (٢٢)

١) $\lim_{س \to ٢} \frac{س^٢ + ١}{س - ١}$

$= \frac{(٢)^٢ + ١}{٢ - ١} = \frac{٥}{١} = ٥$

٢) $\lim_{س \to ٣} \frac{س + ٣}{س^٢ - ٣}$

٣) $\lim_{س \to ٢} \frac{س^٢ + ٤}{س + ١}$

٤) $\lim_{س \to ٩} \frac{س - ٩}{س + ١}$

٥) $\lim_{س \to ٢} \frac{س^٢ + ٢س - ٤}{س - ١}$

٦) $\lim_{س \to ٦} \frac{٣ - ٢س}{٢س}$

٧) $\lim_{س \to -٢} \frac{س^٢ + ٢}{س - ١}$

٨) $\lim_{س \to -٢} \frac{س^٢ + ٢}{س + ٢}$

منهاجي
متعة التعليم الهادف

ب) حل غير مباشر :

*** طريقة التحليل أو إخراج عامل مشترك**

⇦ إذا كل الحدود تحتوي على سينات نأخذ (س الأضعف) عامل مشترك

٢٣ جـــد كلا من :

١) $\text{نهـــا}_{س \leftarrow ٠} \frac{٣س^{٢} + ٥س}{٧س^{٢} - ٢س} = \frac{٠}{٠}$

$= \frac{س(٣س + ٥)}{س(٧س - ٢)}$

$= \frac{٣(٠) + ٥}{٧(٠) - ٢} = \frac{٥}{-٢}$

٢) $\text{نهـــا}_{س \leftarrow ٠} \frac{٣س - ٤س^{٣} + ٢س^{٢}}{٧س^{٢} - ٢س}$

٣) $\text{نهـــا}_{س \leftarrow ٠} \frac{٣س^{٢} + س}{٧س^{٥} - ٢س}$

٤) $\text{نهـــا}_{س \leftarrow ٠} \frac{٣س^{٢} + ٥س^{٣}}{٧س^{٢} - ٩س^{٣}}$

٦) $\text{نهـــا}_{س \leftarrow ٠} \frac{٣س^{٢} + ٥س}{س^{٣} - س^{٥}}$

٧) $\text{نهـــا}_{س \leftarrow ٤} \frac{٣س - ١٢}{س^{٢} - ٤س}$

٨) $\text{نهـــا}_{س \leftarrow ٣} \frac{٣ - س}{٧س - ٢١}$

⇦ **الفرق بين مربعين**

$س^{٢} - أ^{٢} = (س - أ)(س + أ)$

٢٤ **جـــد كلا من النهايات التالية**

١) $\text{نهـــا}_{س \leftarrow ٤} \frac{س^{٢} - ١٦}{س - ٤} = \frac{٠}{٠}$ ÷

$\text{نهـــا}_{س \leftarrow ٤} \frac{(س - ٤)(س + ٤)}{س - ٤}$

$= ٤ + ٤ = ٨$

٢) $\text{نهـــا}_{س \leftarrow ٨} \frac{س^{٢} - ٦٤}{٣س - ٢٤}$

٣) $\text{نهـــا}_{س \leftarrow ٧} \frac{س^{٢} - ٧س}{٤٩ - س^{٢}}$

٤) $\text{نهـــا}_{س \leftarrow ٢} \frac{(س + ١)^{٢} - ٩}{٩س - ١٨}$

٥) $\text{نهـــا}_{س \leftarrow ٤} \frac{س - ٤}{\sqrt{س} - ٢}$

منهاجي
متعة التعليم الهادف

الفرق أو مجموع مكعبين

$س^{٣} - أ^{٣} = (س - أ)(س^{٢} + أس + أ^{٢})$

١، ٨، ٢٧، ٦٤ ،،،،،،،،،،

$س^{٣} + أ^{٣} = (س + أ)(س^{٢} - أس + أ^{٢})$

٢٥ جـــــد كلا من النهايات التالية ::

١) $\text{نهـــا}_{س \leftarrow ٣} \dfrac{س^{٣} - ٢٧}{س^{٢} - ٩}$

٢) $\text{نهـــا}_{س \leftarrow ٢} \dfrac{س^{٣} - ٨}{٢س^{٢} - ٤س}$

٣) $\text{نهـــا}_{س \leftarrow -٢} \dfrac{٢س + ٤}{٨س^{٣} + ٦٤}$

٤) $\text{نهـــا}_{س \leftarrow ٥} \dfrac{س^{٢} - ٢٥}{س^{٣} - ١٢٥}$

٥) إذا كان ق(س) = $س^{٣}$ ، ع(س) = $س^{٢}$ فجـــد

$\text{نهـــا}_{س \leftarrow ٢} \dfrac{ق(س) - ق(٢)}{٣ع(س) - ١٢}$

٦) $\text{نهـــا}_{س \leftarrow ١} \dfrac{(٢س + ١)^{٣} - ٢٧}{٣س^{٢} - ٣}$

٧) $\text{نهـــا}_{س \leftarrow ٣} \dfrac{(س + ١)^{٢} - ١٦}{(س - ١)^{٣} - ٨}$

تحليل العبارة التربيعية: أس^{٢} ± ب س ± جـ

٢٦ جـــد كلا من :

١) $\text{نهـــا}_{س \leftarrow ١} \dfrac{س^{٢} + ٣س - ٤}{س - ١}$

٢) $\text{نهـــا}_{س \leftarrow ٢} \dfrac{س^{٢} + ٢س - ٨}{س^{٢} - ٤}$

٣) $\text{نهـــا}_{س \leftarrow ٢} \dfrac{س^{٢} + س - ٦}{س^{٢} - ٢س}$

٤) $\text{نهـــا}_{س \leftarrow ١} \dfrac{س^{٢} + س - ٢}{س^{٢} - ١}$

٥) $\text{نهـــا}_{س \leftarrow -٧} \dfrac{س^{٢} + ٣س - ٢٨}{س^{٢} - ٤٩}$

٦) $\text{نهـــا}_{س \leftarrow -٢} \dfrac{٢س^{٢} + ٣س - ٢}{٤ - س^{٢}}$

٧) $\text{نهـــا}_{س \leftarrow ٢} \dfrac{س^{٣} - س^{٢} - ٢س}{س^{٤} - ١٦}$

٨) $\text{نهـــا}_{س \leftarrow ١} \dfrac{(س^{٢} - ١)^{١٠}}{(س^{٢} - ٢س + ١)^{٥}}$

٩) $\text{نهـــا}_{س \leftarrow ٠} \dfrac{(٢س^{٢} + س)^{٥}}{س^{٥}}$

١٠) $\text{نهـــا}_{س \leftarrow ١} \left(\dfrac{س^{٢} - ١}{٤س - ٤}\right)^{٣}$

⟸ استخدام القسمة الطويلة أو التركيبية

٢٧ جد كلا من النهايات التالية :

١) $\lim_{س \to ١} \frac{س^{٣} + ٢س - ٣}{س - ١} = \frac{٠}{٠}$

$= \lim_{س \to ١} (س^{٢} + س + ٣)$

	١	٠	٢	٣-
١		+		
	١	١	٣	٠

$= (١)^{٢} + ١ + ٣$

$= ٥$

٢) $\lim_{س \to ١} \frac{س^{٣} + س - ٢}{س^{٢} + س - ٢}$

٣) $\lim_{س \to ١} \frac{س^{٦} - ١}{س^{٣} - ١}$

٤) $\lim_{س \to ٢} \frac{٢س^{٣} - ٣س - ١٠}{س^{٣} - ٨}$

٥) $\lim_{س \to -٣} \frac{س^{٣} + س^{٢} + ١٨}{٢س^{٣} - ١٠س + ٢س^{٢} + ٦}$

⟸ استخدام القسمة الطويلة أو التركيبية

٢٧ جد كلا من النهايات التالية :

١) $\lim_{س \to ١} \frac{س^{٣} + ٢س - ٣}{س - ١} = \frac{٠}{٠}$

$= \lim_{س \to ١} (س^{٢} + س + ٣)$

	١	٠	٢	٣-
١		+		
	١	١	٣	٠

$= (١)^{٢} + ١ + ٣$

$= ٥$

٢) $\lim_{س \to ١} \frac{س^{٣} + س - ٢}{س^{٢} + س - ٢}$

٣) $\lim_{س \to ١} \frac{س^{٦} - ١}{س^{٣} - ١}$

٤) $\lim_{س \to ٢} \frac{٢س^{٣} - ٣س - ١٠}{س^{٣} - ٨}$

٥) $\lim_{س \to -٣} \frac{س^{٣} + س^{٢} + ١٨}{٢س^{٣} - ١٠س + ٢س^{٢} + ٦}$

كوكتيل الاسئلة على طريقة التحليل

٢٨ جـــد كلا من النهايات التالية :

١) نهـــا $\frac{س^{٢}+٣س-١٨}{س+١}$ عندما س ← ٣ — صفر

٢) نهـــا $\frac{س^{٢}-٤س+٣}{س^{٣}-٢٧}$ عندما س ← ٣ — $\frac{٢}{٢٧}$

٣) نهـــا $\frac{(س+١)^{٣}+(س-١)^{٣}}{س^{٢}-٢س}$ عندما س ← ٠ — -٣

٤) نهـــا $\left(\frac{س^{٢}-١}{٢س-٢}\right)^{٥}$ عندما س ← ١ — ١

٥) نهـــا $\frac{(س^{٢}+س-٢)^{٥}}{(س-١)^{٤}}$ عندما س ← ١ — صفر

٦) نهـــا $\frac{٢س^{٣}-١٢٨}{س^{٢}-٣س-٤}$ عندما س ← ٤ — $\frac{٩٦}{٥}$

٧) نهـــا $\frac{٨س^{٣}-١}{س-\frac{١}{٢}}$ عندما س ← $\frac{١}{٢}$ — ٦

٨) اذا كان ق(س) = $س^{٢}-٢س+١$

$ع(س)=\frac{٧}{(س-١)^{٢}}$

فجـــد نهـــا (ق × ع) عندما س ← ١ — ٧

٩) نهـــا $\sqrt{\frac{س^{٢}-١}{س-١}}$ عندما س ← ١ — $\sqrt{٢}$

١٠) نهـــا $\sqrt{\frac{س^{٢}-٤}{س-٢}}$ عندما س ← ٢+ — ٢

١١) نهـــا $\frac{(س^{٣}-١)^{٢م}}{(س^{٢}-٢س+١)^{م}}=٨١$ عندما س ← ١

فجـــد قيمة م — ٢

١٢) نهـــا $\frac{(٢٥)^{س}-(٥)^{س}}{(٥)^{س}-١}$ عندما س ← ٠ — -١

١٣) نهـــا $\frac{(٣)^{س+١}-٣}{(٩)^{س}-١}$ عندما س ← ٠ — $\frac{٣}{٢}$

١٤) نهـــا $\frac{(٤)^{س}-١٧(٢)^{س}+١٦}{(٤)^{س}-١}$ عندما س ← ٠ — $-\frac{١٥}{٢}$

١٥) نهـــا $\frac{(٩)^{س}-٤(٣)^{س+١}+٢٧}{(٣)^{س}-٣}$ عندما س ← ٠ — -٦

منهاجي
متعة التعليم الهادف

طريقة توحيد المقامات

$$\frac{أ}{ب} \pm \frac{ج}{د} = \frac{أ \times د \pm ج \times ب}{ب \times د}$$

٢٩ جـــــد كلا من النهايات التالية

١) $\lim_{س \to ٢} \left(\frac{س^{٢}+١٢}{س^{٣}-٤} - \frac{س+٢}{س-٢} \right)$

-١

٢) $\lim_{س \to ٤} \frac{\frac{١}{س+٢} - \frac{٢}{٢س+٤}}{س-٤}$

٣) $\lim_{س \to ٠} \frac{١}{س} \left(\frac{١}{س+٣} - \frac{١}{٣-س} \right)$

$-\frac{٢}{٩}$

٤) $\lim_{س \to ١} \frac{\frac{١}{س-٢} - \frac{٧}{س^{٣}-٨}}{س-١}$

$-\frac{٤}{٧}$

٥) $\lim_{س \to ٠} \frac{\frac{٢}{س-٣} + \frac{٤}{س+٦}}{٩س}$

٦) $\lim_{س \to ١} \frac{س^{-٢} - س}{س^{-١} - س}$

$\frac{٣}{٢}$

٧) $\lim_{س \to ١} \frac{\frac{١}{س+١} - \frac{٢}{س+٣}}{س-١} = \frac{صفر}{صفر}$

$\lim_{س \to ١} \frac{س+٣-٢س^{-١}}{(س-١)(س+١)(س+٣)} = \frac{-١}{٨}$

٣٠

١) $\lim_{س \to ٢}$ $\left[\frac{١}{س+٢} - \frac{٤}{٣س+١٠}\right] \frac{١}{٢س^{٢}-٣س-٢}$

٢) $\lim_{س \to ٠}$ $\frac{س}{\frac{١}{س-٣} + \frac{١}{س+٣}}$

٣) $\lim_{س \to ٤}$ $\frac{\frac{س}{س-٢} - \frac{س+٢}{س-١}}{س-٤}$

٤) $\lim_{س \to ٢}$ $\left[\frac{١}{٣} - \frac{١}{س+١}\right]\left[\frac{١}{س-٢}\right]$

٥) $\lim_{س \to ٢}$ $\frac{٢س-٤}{\frac{١}{س^{٢}} - \frac{١}{٤}}$

٨-

٦) $\lim_{س \to ٢}$ $\frac{\frac{١}{س+٢} - \frac{س}{٢س+٤}}{س-٢}$

طريقة الضرب بالمرافق التربيعي حيث الجذر احد حدين في البسط او المقام مقدمة:

المقدار	المرافق	حاصل ضربهم
$\sqrt{س + أ} - ب$	$\sqrt{س + أ} + ب$	مربع الاول – مربع الثاني $س + أ - ب^{٢}$
$\sqrt{س - أ} - ب$	$\sqrt{س - أ} + ب$	$س - أ - ب^{٢}$
$ب - \sqrt{س + أ}$	$ب + \sqrt{س + أ}$	$ب^{٢} - (س + أ)$

(٣١) جـــد قيمة كلا من :

١) $\lim_{س \to ٩} \frac{\sqrt{س} - ٣}{س - ٩} = \frac{٠}{٠}$

$= \lim_{س \to ٩} \frac{\sqrt{س} - ٣}{س - ٩} \times \frac{\sqrt{س} + ٣}{\sqrt{س} + ٣}$

$= \lim_{س \to ٩} \frac{س - ٩}{(س - ٩)(\sqrt{س} + ٣)} = \frac{١}{٦}$

٢) $\lim_{س \to ١} \frac{س - ١}{\sqrt{س + ١٥} - ٤}$

٣) $\lim_{س \to ٣} \frac{\sqrt{س + ١} - ٢}{\sqrt{س^{٢} + ٧} - ٤}$

٤) $\lim_{س \to ٠} \frac{٥ س^{٣}}{\sqrt{س^{٣} + ٤} - ٢}$

٥) $\lim_{س \to ٥} \frac{\sqrt{٣س + ١} - ٤}{س^{٢} - ٣س - ١٠}$

٦) $\lim_{س \to -٢} \frac{\sqrt{٢ - س} - ٢}{س^{٢} - ٤}$

٣٢ جـــــد قيمة كلا من النهايات التالية :

١) $\lim_{س \to ١} \frac{\sqrt{س^{٢}+٣س-٢}}{س^{٣}-١}$

٢) $\lim_{س \to ٠} \left(\frac{١}{\sqrt{س+١}}-١\right)\left(\frac{١}{س}\right)$

٣) $\lim_{س \to ٤} \left(\frac{١}{\sqrt{س^{٢}-٣س}}-\frac{١}{٢}\right)\left(\frac{٢}{س^{٢}-١٦}\right)$

٤) $\lim_{س \to ١} \frac{\sqrt{٥س+٤}-\sqrt{١١-٢س}}{س-١}$

٥) $\lim_{س \to ٠^{+}} \frac{\sqrt{س}}{\sqrt{٤+س}-٢}$

٦) $\lim_{س \to ١} \frac{\sqrt{س^{٢}+٨}-٣}{س^{٢}+٧س-٨}$

٧) $\lim_{س \to ١} \frac{٥س-\sqrt{س}-٤}{\sqrt{س}-١}$

طريقة الضرب بالمرافق التكعيبي

مقدمة:

المقدار	المرافق	حاصل ضربهم
$\sqrt[3]{س - ب}$	الاول^2(عكس) الأول×الثاني +الثاني^2	مكعب الأول (نفس)مكعب الثاني
$\sqrt[3]{س - أ} + ب$		
$ب - \sqrt[3]{س + أ}$		

٣٣

١) $\lim_{س \to ٩} \frac{\sqrt[3]{س-١} - ٢}{س - ٩}$

٢) $\lim_{س \to ٢} \frac{س^2 - ٤}{\sqrt[3]{س+٦} - ٢}$

٣) $\lim_{س \to -٨} \frac{\sqrt{١ - س} - ٣}{٢ + \sqrt[3]{س}}$

٤) $\lim_{س \to ١٢٤} \frac{س - ١٢٤}{\sqrt[3]{س+١} - ٥}$

٥) $\lim_{س \to -١} \frac{١}{س+١} \left(\frac{١}{\sqrt[3]{٢س+١}} + ١ \right)$

٦) $\lim_{س \to ٨} \frac{س - ٨}{\sqrt{٢ + \sqrt[3]{س}} - ٢}$

طريقة التوزيع المنتظم :

٣٤ جـــد قيمة كلا من النهايات التالية :

١) $\lim_{س \to ٤} \frac{س^{٢} + \sqrt{س} - ١٨}{س - ٤}$

٢) $\lim_{س \to ٤} \frac{س^{٢} \sqrt{س} - ٣٢}{س - ٤}$

٣) $\lim_{س \to ٢} \frac{\sqrt{س+٢} - \sqrt[٣]{س+٦}}{س - ٢}$

٤) $\lim_{س \to ١} \frac{\sqrt{س} + \sqrt[٣]{س} + س^{٢} - ٣}{س - ١}$

٥) $\lim_{س \to ٢} \frac{س^{٢} \sqrt{س+٢} - ٨}{س - ٢}$

منهاجي
متعة التعليم الهادف

طريقة الاستبدال :

٣٥ جـــد قيمة كلا من النهايات التالية :

١) $\lim_{س \to ١} \frac{\sqrt[٥]{س} - ١}{س - ١}$

٢) $\lim_{س \to ١} \frac{\sqrt[٤]{س + ١٥} - ٢}{س - ١}$

٣) $\lim_{س \to ٣} \frac{\sqrt[٤]{س - ٢} - ١}{س - ٣}$

٤) $\lim_{س \to ١} \frac{(س + ١)^{٥} - ٣٢}{س - ١}$

---

٦) اذا علمت ان

$\lim_{س \to ١}$ ق(٢س+١) = ٨ ، ق(٣)=٦

فان $\lim_{س \to ٣}$ (ق^{٢}(س) +٢س -٧)=

أ) ٦٥ ب) ٦٤ ج) ٦٣ د) ٤٠

---

٧) اذا علمت ان

$\lim_{س \to ١}$ ق(٢س+١) = ٥ ، ق(٣)=٦

فان $\lim_{س \to ٣}$ (٣ق^{٢}(س) -٢س +١)=

أ) ٧٠ ب) ٥٠ ج) ٣٠ د) ٤٠

الثوابت في الاقتران النسبي

اذا كانت النهاية موجودة

وكان التعويض في المقام يساوي صفر

فان التعويض في البسط يساوي صفر

واذا النهاية غ م فان $\frac{\text{عدد}}{\text{صفر}}$ ومقلوبها $\frac{\text{صفر}}{\text{عدد}}$ = صفر

٣٦ جـــد قيمة الثابت في كلا من :

١) $\text{نهـــا}_{س \leftarrow ٢} \frac{س^{٢} - أ}{س - ٢} = ١٠$

٢) $\text{نهـــا}_{س \leftarrow ٢} \frac{س^{٢} + ب س + ٥}{س^{٢} - ٢س} = ٦$

٣) $\text{نهـــا}_{س \leftarrow ٣} \frac{س^{٣} - م}{س - ١} = ٢٠$ ، ٧-

٤) $\text{نهـــا}_{س \leftarrow ١} \frac{س^{٢} + ب س - ٧}{س - ١} =$ جـ

٥) $\text{نهـــا}_{س \leftarrow -٣} \frac{س^{٢} - (٣-٢جـ)س - ٦جـ}{س + ٣} = ١١$

٦) $\text{نهـــا}_{س \leftarrow ٢} \frac{ق(س) - ٣}{س - ٢} = ٥$

فجـــــد $\text{نهـــا}_{س \leftarrow ٢} \frac{س^{٢} ق(س) - ١٢}{س - ٢}$ ٣٢

٧) $\text{نهـــا}_{س \leftarrow م} \frac{س - ٣}{س^{٢} - س - ٦}$ غير موجوده جد م ، ٢-

منهاجي
متعة التعليم الهادف

اسئلة مختلفة على نهاية النسبي

١) $\lim_{س \to ٥} \left[\frac{٣}{س} - \frac{٣}{٥}\right]\left[\frac{١}{س^{٢} - ٢٥}\right]$

٢) $\lim_{س \to ٣} \left[س + \frac{١}{س - ٣}\right]\left[\sqrt{س + ١} - ٢\right]$

٣) $\lim_{س \to ٠} س \times \sqrt[٣]{١ - \frac{١}{س^{٣}}}$

٤) $\lim_{س \to ٠} س \times \sqrt{\frac{١}{س^{٢}} + ١}$

٥) $\lim_{س \to ١} \frac{\sqrt[٥]{س^{٢}} - ١}{\sqrt[٥]{س^{٣}} - ١}$

٦) $\lim_{س \to ٤} \frac{\sqrt{س^{٢} + ٩} + \sqrt[٣]{٢س} - ٧}{س - ٤}$

٧) $\lim_{س \to ٣} \frac{س^{٢} - س - ٦}{س^{٢} - \sqrt{س + ١} - ٧}$

٨) $\lim_{س \to ١} \frac{(س + ١)^{٣} \sqrt{س} - ٨}{س - ١}$

٩) $\lim_{س \to ١} \frac{م^{٢} س - ١}{م \sqrt{س} - ١} = ٦$ جد م

١٠) $\lim_{س \to ٣} \left[\frac{أ}{س - ٣} + \frac{ب}{س^{٢} - ٩}\right] = \frac{١}{٦}$

جد قيمة أ ، ب

١١) $\lim_{س \to ٣} \frac{س^{٣} + أ س^{٢} - ٣٦}{س - ٣}$ موجودة

جد قيمة أ

١٢) $\lim_{س \to ٣} \frac{س - ٣}{س^{٢} + أ س + ب}$ غير موجودة

جد قيمة أ ، ب

١٣) $\lim_{س \to ٤} \frac{ق(س) - ٥}{س - ٤} = ٨$

حيث ق(س) كثير حدود فجد

$\lim_{س \to ٤} (٦ ق(س) + س^{٢})$

١٤) $\lim_{س \to ٣} \frac{ق(س) - ٩}{س - ٣} = ٤$

جد

$\lim_{س \to ٣} \frac{ق(س) - س^{٢}}{س - ٣}$

١٥) $\lim_{س \to ٥} \frac{ق(س) - ٧}{س - ٥} = ٨$

جد

$\lim_{س \to ٥} \frac{س^{٢} - ٢س - ١٥}{ق(س) - ٧}$

عزيزي الطالب الإجابات بعد الحل يجب أن تكون كما يلي

١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠	١١	١٢	١٣	١٤	١٥			
$-\frac{٣}{٢٥٠}$	$\frac{١}{٤}$	-١	غ م	$\frac{٢}{٣}$	$\frac{٢٩}{٣٠}$	$\frac{٢٠}{٢٣}$	١٦	٥	أ=١ ب=-٦	١	ا=-٦ ب=٩	٤٦	-٢	١			

نهاية الاقتران المتشعب

عند نقطة التشعب

تكون النهاية موجودة
إذا وفقط إذا
النهاية من اليمين = النهاية من اليسار

لإيجاد النهاية للاقتران المتشعب عند نقطة التشعب نجـــد
اليمين : من قاعدة الأكبر (المفتوحة إلى س)
اليسار: من قاعدة الأصغر (المفتوحة إلى العدد)
ثم نقارن

(٣٧) إذا كـــان ق(س) = { س^{٢} + ٥ ، س > ٣ ; ٢س – ٣ ، س ≤ ٣ }

جـــد نهـــــا ق(س) (س ← ٣)

الحل

نهـــــا ٢ س -٣ (س ← ٣+) = ٢(٣) – ٣ = ٣

نهـــــا س^{٢} +٥ (س ← ٣-) = ٩ + ٥ = ١٤

نهـــــا ق(س) غير موجودة لان
نهـــــا ق(س) (س ← ٣+) ≠ نهـــــا ق(س) (س ← ٣-)

---

(٣٨) إذا كـــان ق(س) = { س + ٥ ، س ≤ ٢ ; ٢س +س^{٢}-١ ، س > ٢ }

جـــد نهـــــا ق(س) (س ← ٢)

الحل

نهـــــا (س +٥) (س ← ٢+) = ٢+٥ = ٧

نهـــــا (٢س+ س^{٢} -١) (س ← ٢-) = ٤ +٤- ١ = ٧

نهـــــا ق(س) (س ← ٢+) = نهـــــا ق(س) (س ← ٢-) = ٧

نهـــــا ق(س) = ٧ (س ← ٢)

---

(٤٠) ق(س) = { $\frac{س^{٣} + ١}{٦س + ٦}$ ، س ≠ -١ ; ٢ ، س = -١ }

فجد ١) نهـــــا ق(س) (س ← -١)

٢)نهـــــا ق(س) (س ← -٣)

٤١

$$ق(س) = \begin{cases} س^{٢} + ٥ & ، \ س < -١ \\ س - ٣ & ، \ س \leq -١ \end{cases}$$

جد $\lim_{س \to -١}$ ق(س)

٤٢

$$ق(س) = \begin{cases} \dfrac{س^{٢}+١١س-١٢}{\sqrt{س} - ١} & ، \ س > ١ \\ \sqrt{س - ١} & ، \ س < ١ \end{cases}$$

جد $\lim_{س \to ١}$ ق(س)

٤٣

$$ق(س) = \begin{cases} ٣ - ٢س^{٢} & ، \ س < -٢ \\ ٢س - ١ & ، \ س \leq -٢ \end{cases}$$

جد $\lim_{س \to -٢}$ ق(س)

٤٤

$$ق(س) = \begin{cases} ٢س+٣ & ، \ ٠ \leq س \leq ٢ \\ س^{٢} + ١ & ، \ ٢ < س \leq ٤ \end{cases}$$

فجد كلا من النهايات التالية :

١) $\lim_{س \to ٢}$ ق(س) ٢) $\lim_{س \to ١}$ ق(س)

٣) $\lim_{س \to ٣}$ ق(س)

٤٥ ق(س) = { $\sqrt{س^{٢} + ٥}$ ، س < ٢ ؛ ٣س + ك ، س ≤ ٢ }

جـــد قيمة الثابت ك علما بان

نهـــا ق(س) موجودة

س ← ٢

٤٦ ق(س) = { $س^{٢} + م$ ، س < ٢ ؛ ٣ ، س = ٢ ؛ م س + ك ، س > ٢ }

جـــد قيمة ك ، م علما بان

نهـــا ق(س) = ١٢

س ← ٢

٤٧ ق(س) = { س - ك ، س < ٤ ؛ ٢س + ٢ك ، س ≤ ٤ }

جـــد قيمة الثابت ك علما بان

نهـــا ق(س) موجودة

س ← ٤

٤٨ ق(س) = { $س^{٢} + س$ ، س < أ ؛ ٣س + ١٥ ، س ≤ أ }

جـــد قيمة الثابت أ علما بان

نهـــا ق(س) موجودة

س ← أ

٤٩ ق(س) = { $أ س^{٢} + ب$ ، س < ٢ ؛ ٣أ س + ١ ، س > ٢ }

جـــد قيمة أ ، ب علما بان

نهـــا ق(س) = ١٦

س ← ٢

نهاية القيمة المطلقة

تذكير في المطلق ☹ خواص:

- $|\ أ\ |$ = القيمة الموجبة للعدد أ
- $|\ ق(س)\ |$ = ق(س) اذا ق(س) $\geq$ ٠
- $\sqrt{ق(س)^{٢}}$ = $|\ ق(س)\ |$
- اذا كان $|\ س\ | = أ$ حيث أ > ٠ فان

  س = أ أو س = ـ أ

  مثلا $|\ س\ | = ٢$ ⟵ س = ٢ ، س = ـ٢
- اذا كان $|\ س\ | < أ$ حيث أ > ٠

  فان ـ أ < س < أ

  مثلا $|\ س\ | < ٢$ فان ـ ٢ < س < ٢
- اذا $|\ س\ | > أ$ حيث أ > ٠

  فان س > أ او س < ـأ

  مثلا $|\ س\ | > ٢$ ⟵ س > ٢ او س < ـ٢

.....

ولإيجاد النهاية لاقتران القيمة المطلقة أو اقتران يشتمل على قيمة مطلقة

نعيد تعريف الاقتران أو

نعوض مباشره داخل المطلق فإذا كان ناتج التعويض :

١) موجب : نهمل القيمة المطلقة

٢) سالب : نعكس إشارات كل الحدود داخل المطلق ونهملها

٣) صفر : نعيد التعريف لإيجاد اليمين واليسار

(٥٠) جـــد

١) $\lim_{س \to ٣} |\ ٥س - ٧\ |$ = ١٥ ـ ٧ = ٨

موجب نهمل المطلق

٢) $\lim_{س \to ٣} |\ ٧ - ٥س\ |$ سالب نعكس اشارة كل حد

= ـ٧ + ١٥ = ٨

٣) $\lim_{س \to ٥} |\ س - ٥\ |$ = صفر لان

$\lim_{س \to ٥^{+}} |\ س - ٥\ |$ = ٠

$\lim_{س \to ٥^{-}} |\ -س + ٥\ |$ = ٠

٤) $\lim_{س \to ٢} |\ ٢س - ٤\ |$

٤) اذا كان ق(س) = $|\ ٦ - ٣س\ |$ فجـــد

$\lim_{س \to ٣}$ ق(س)

$\lim_{س \to -٣}$ ق(س)

٥١

$$ق(س) = \begin{cases} |س| + ١ & ، س > ٠ \\ |س - ١| & ، س \leq ٠ \end{cases}$$

جد

$$\text{نهـــا}_{س \to ٠} \; ق(س)$$

٥٢

$$ق(س) = \begin{cases} \frac{|س|}{س^{٣}} & ، س \neq ٠ \\ & ، س = ٠ \end{cases}$$

جد

$$\text{نهـــا}_{س \to ٠} \; ق(س)$$

٥٣

جـــــد

١) $\text{نهـــا}_{س \to ٣} \frac{س^{٢} - |٣س|}{س - ٣}$

٢) $\text{نهـــا}_{س \to ٢} \frac{|س^{٢} - ١|}{س - ١}$

٣) $\text{نهـــا}_{س \to ٢} \frac{|٥س - ١| - ٩}{س - ٢}$

٤) $\text{نهـــا}_{س \to ٢} \frac{|س - ٦| - ٤}{س - ٢}$

٥) $\text{نهـــا}_{س \to ١} \frac{|س^{٢} + ٣س - ٤|}{|س - ١|}$

٦) $\text{نهـــا}_{س \to ١^{+}} \frac{\sqrt{س^{٢} - ٢س - ١}}{س - ١}$

منهاجي
متعة التعليم الهادف

٥٤

$$ق(س) = \begin{cases} ٢س^{٢} & ، |س| < ٢ \\ س^{٣} & ، |س| \geq ٢ \end{cases}$$

جد

١) $\lim_{س \to ٢} ق(س)$

٢) $\lim_{س \to -٢} ق(س)$

٣) $\lim_{س \to ٢} \frac{|س^{٢} - ٤|}{س - ٢}$

٤) $\lim_{س \to ٣} \frac{|س^{٢} - ٦| - س}{س - ٣}$

٥) $\lim_{س \to ١} \frac{|٣س + ١| - |س + ٣|}{س - ١}$

٦) $\lim_{س \to ٠} \frac{|س - ٣| - |٢س - ٣|}{س}$

٧) $\lim_{س \to ١} \frac{\left|\frac{١}{س + ٣}\right| - \frac{١}{٤}}{|٢س - ١| - |س|}$

٥٥

جـــــد

١) $\lim_{س \to ٢} \frac{|س| - س}{س - ٢}$

٢) $\lim_{س \to ٠} \frac{\sqrt{س^{٢} - ٩س^{٣}}}{س}$

نهاية اكبر عدد صحيح [ ]

تذكير :

[٣] = ٣ ،، [ـ ٣] = ـ ٣

[٢,٨] = ٢ ،،، [ـ ٢,٨] = ـ ٣

ولإيجاد النهاية في اكبر عدد صحيح فانه

نهـــا [س] = أ
س ← أ+ أ ، صحيح

نهـــا [س] = أ ـ ١
س ← أ ـ

* أذا كان معامل س داخل اكبر عدد صحيح سالب نقلب اليمين إلى يسار واليسار إلى يمين

* أذا كان ناتج التعويض داخل اكبر عدد صحيح كسر تكون النهاية من اليمين واليسار متساوية والنهاية موجودة .

٥٦ جـــــد

١) نهـــا [س + ٣] غير موجودة لان
س ← ٥

نهـــا [س + ٣] = [٨]$^{+}$ = ٨
س ← ٥+

نهـــا [س + ٣] = [٨]$^{-}$ = ٧
س ← ٥ـ

٢) نهـــا [٦ – س] غير موجودة لان
س ← ١

نهـــا [٦ – س] = [٥]$^{-}$ = ٤
س ← ١+

نهـــا [٦ – س] = [٥]$^{+}$ = ٥
س ← ١ـ

٣) نهـــا $\left[\frac{س}{٢} + \frac{١}{٢}\right]$
س ← ٦

٤) نهـــا [س + ٠,٩]
س ← ٠,١

١) نهـــا $\frac{س^{٢} - [س]}{س - ١}$
س ← ١+

نهـــا $\frac{س^{٢} - ١}{س - ١} = \frac{٠}{٠}$
س ← ١+

نهـــا $\frac{(س - ١)(س + ١)}{س - ١} = ٢$
س ← ١+

٥٧

$$ق(س) = \begin{cases} \left[\frac{١}{س}\right] + ١ & ، س \geq ١ \\ [س^{٢} + ١] & ، س < ١ \end{cases}$$

جد

$$\lim_{س \to ١} ق(س)$$

٥٨

$$ق(س) = \begin{cases} |س - ١| & ، س \geq ٣ \\ [س - ١] & ، س < ٣ \end{cases}$$

جد

$$\lim_{س \to ٣} ق(س)$$

٥٩ جـــــد

١) $$\lim_{س \to ٣^{+}} \frac{س^{٢} - [س + ٦]}{س - ٣}$$

$$= \lim_{س \to ٣^{+}} \frac{س^{٢} - ٩}{س - ٣} = \frac{(س - ٣)(س + ٣)}{س - ٣} = ٦$$

٢) $$\lim_{س \to ٥^{+}} \frac{س^{٢} - س[س]}{س - ٥}$$

٣) $$\lim_{س \to ٢^{-}} \frac{س^{٢} - [٦ - س]}{س - ٢}$$

٤) $$\lim_{س \to ٤} \frac{س^{٢} - [س + ١٢,٧]}{س - ٤}$$

٥) $$\lim_{س \to ١} \frac{س^{٢} - [س + ٠,١]س}{س - ١}$$

٦) $$\lim_{س \to ٣} س^{٢}[١ - س]$$

٦٠ $$ق(س) = \begin{cases} [س + ١] & ، س < أ \\ ١٠ - [س] & ، س > أ \end{cases}$$

جـد أ ،، أ ينتمي إلى ص
وان $\lim_{س \to أ}$ ق(س) موجودة

٦١ $$ق(س) = \begin{cases} [س] & ، س < أ \\ ٦ - [س] & ، س > أ \end{cases}$$

جـد أ ،، أ لا ينتمي إلى ص
وان $\lim_{س \to أ}$ ق(س) موجودة

٦٢ جـــــد

١) $\lim_{س \to أ}$ [٢س] = ٣ جـد مجموعة قيم أ

٢) $\lim_{س \to ٢}$ ([س+٥] - [س + ٢])

٣) $\lim_{س \to \frac{٥}{٢}+}$ $\frac{٢س - [٢س]}{٤س^{٢} - ٢٥}$

٤) $\lim_{س \to ٢}$ $\frac{س^{٢} - س - [س]}{س - ٢}$

٥) $\lim_{س \to -٣}$ $\frac{س^{٢} - |س - ٢| + [س + ٢]}{س^{٢} - ٩}$

٦) $\lim_{س \to ٣+}$ $\frac{[س - ٣]}{|س - ٣|}$

٧) $\lim_{س \to ٣}$ $\frac{|س^{٢} - ٦| - س}{س - ٣}$ = $\lim_{س \to أ}$ $\frac{س^{٢} - أ^{٢}}{س - أ}$

جـــــد أ

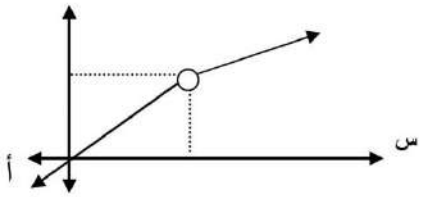
٨) $\lim_{س \to ٠}$ $(س^{٢} + ١)^{[س]}$

النهاية من الرسم البياني

السـؤال من محور السينات

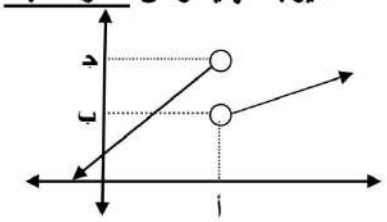
الإجابـة من محور الصادات

الحلقة لا تمنع وجود النهاية



$\lim_{س \to أ} ق(س) = ب$

القفزة عندها لا يوجد نهاية ولكن احذر الاتجاه

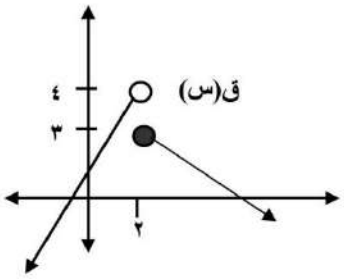


$\lim_{س \to أ} ق(س) =$ غير موجودة

$\lim_{س \to أ^+} ق(س) = ب$

$\lim_{س \to أ^-} ق(س) = جـ$

٦٣ معتمدا الشكل لمنحنى ق(س) جد ما يليه:

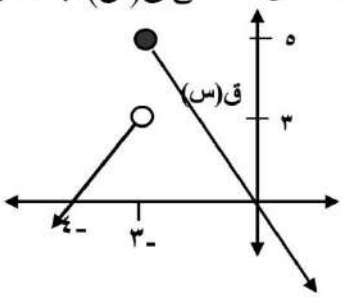


$\lim_{س \to ٢^+} ق(س) =$

$\lim_{س \to ٢^-} ق(س) =$

$\lim_{س \to ٢} ق(س) =$

٦٤ معتمدا الشكل لمنحنى ق(س) جد ما يليه:

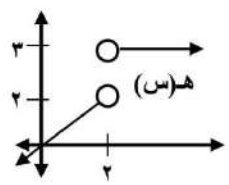


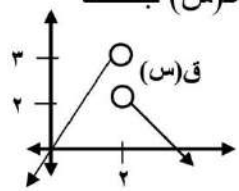
$\lim_{س \to -٣^+} ق(س) =$

$\lim_{س \to -٣^-} ق(س) =$

$\lim_{س \to -٣} ق(س) =$

٦٥ معتمد الأشكال ألمجاوره للاقترانات ق(س) ، هـ(س) جـــد





$\lim_{س \to ٢^+} (ق(س) + هـ(س)) =$

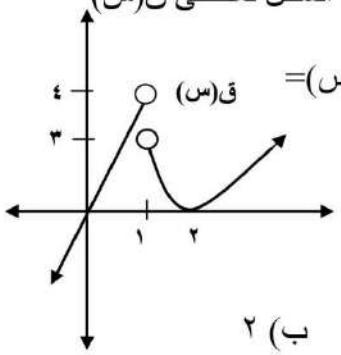
$\lim_{س \to ٢^-} (ق(س) + هـ(س)) =$

$\lim_{س \to ٢} (ق(س) + هـ(س)) =$

$\lim_{س \to ٢^+} (٢س\ ق(س) + س^٢ هـ(س)) =$ ،، $\lim_{س \to ٢^-} (٢\ ق(س) + س\ هـ(س)) =$

منهاجي
متعة التعليم الهادف

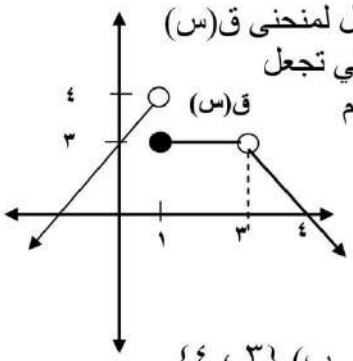
٦٦ معتمدا الشكل لمنحنى ق(س)
فان
نهـــــــاق(س)=
س ← ١+



أ) غ . م　　ب) ٢

جـ) ٣　　د) ٤

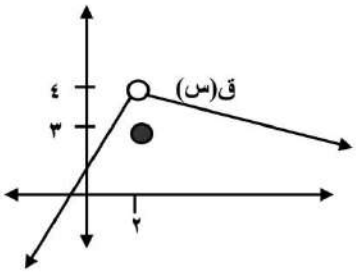
٦٩ معتمدا الشكل لمنحنى ق(س)
فان قيم م التي تجعل
نهـــــــاق(س) غ.م
س ← م



أ) {١ ، ٣}　　ب) {٣ ، ٤}

جـ) {١ ، ٤}　　د) {١}

٦٧ معتمدا الشكل لمنحنى ق(س) جد ما يليه:

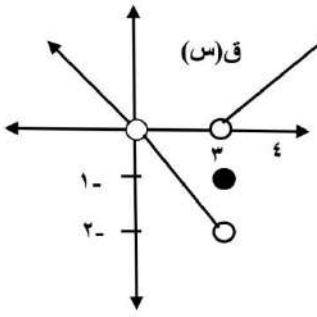


نهـــــــا ق(س) =
س ← ٢+

نهـــــــا ق(س) =
س ← ٢-

نهـــــــا ق(س) =
س ← ٢

٦٨ معتمدا الشكل لمنحنى ق(س) جـــــد:



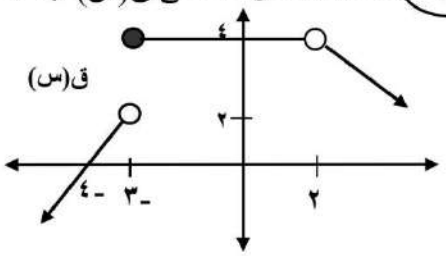
نهـــــــا ق(س) =
س ← ٣+

نهـــــــا ق(س) =
س ← ٣-

نهـــــــا ق(س) =
س ← ٣

نهـــــــا ق(س) =　　ق(٣) =
س ← ٠

٧٠ معتمدا الشكل لمنحنى ق(س) جد ما يليه:



١) نهـــــــا ق(س) =
س ← ٣-+

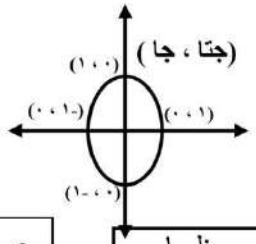
٢) نهـــــــا ق(س) =
س ← ٣-

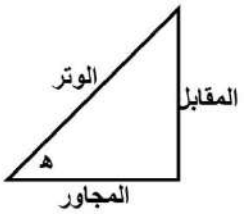
٣) نهـــــــا ق(س) =
س ← ٢

٤) اذا كانت نهـــــــاق(س) = ٤
س ← أ

فجـــــد قيم أ

نهاية الاقترانات الدائرية :





مراجعة وتذكير :

الزاوية سيني	تقديرها الدائري	جـا	جتـا	ظـا
٠	٠	٠	١	٠
٣٠	$\frac{\pi}{٦}$	$\frac{١}{٢}$	$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$	$\frac{١}{\sqrt{٣}}$
٤٥	$\frac{\pi}{٤}$	$\frac{١}{\sqrt{٢}}$	$\frac{١}{\sqrt{٢}}$	١
٦٠	$\frac{\pi}{٣}$	$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$	$\frac{١}{٢}$	$\sqrt{٣}$
٩٠	$\frac{\pi}{٢}$	١	٠	
١٨٠	π	٠	-١	٠
٢٧٠	$\frac{\pi ٣}{٢}$	-١	٠	-
٣٦٠	$\pi ٢$	٠	١	٠

جـا هـ = $\frac{\text{القابل}}{\text{الوتر}}$

جتـا هـ = $\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$

ظـا هـ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{\text{جـا}}{\text{جتـا}}$

ظتـا = $\frac{١}{\text{ظـا}} = \frac{\text{جتـا}}{\text{جـا}}$

قـا = $\frac{١}{\text{جتـا}}$ ، قتـا = $\frac{١}{\text{جـا}}$

متطابقات مثلثية :

- جا^{٢} س + جتا^{٢}س = ١

  جتا^{٢}س = ١ - جا^{٢} س

  جا^{٢} س = ١ - جتا^{٢}س

- قا^{٢}س ـ ظا^{٢}س = ١

  قا^{٢}س = ١ + ظا^{٢}س

- قتا^{٢}س ـ ظتا^{٢}س = ١

  قتا^{٢}س = ١ + ظتا^{٢}س

- جا ٢س = ٢جاس جتاس
- جتا٢س = جتا^{٢}س ـ جا^{٢}س

  = ١ ـ ٢جا^{٢}س

  =٢جتا^{٢}س - ١

- ظا٢س = $\frac{\text{٢ظا س}}{\text{١ ـ ظا}^{٢}\text{س}}$

- جتا أ ـ جتا ب = -٢جا $\frac{\text{أ + ب}}{٢}$ جا $\frac{\text{أ - ب}}{٢}$
- جا أ - جا ب = ٢جتا $\frac{\text{أ + ب}}{٢}$ جا $\frac{\text{أ - ب}}{٢}$
- جا(أ + ب) = جا أ جتا ب + جتا أ جا ب
- جا(أ - ب) = جا أ جتا ب - جتا أ جا ب
- ظا (أ + ب) = $\frac{\text{ظا أ + ظا ب}}{\text{١ - ظا أ ظا ب}}$
- ظا (أ - ب) = $\frac{\text{ظا أ - ظا ب}}{\text{١ + ظا أ ظا ب}}$
- جا^{٢}س = $\frac{١}{٢}$(١ ـ جتا ٢س)
- جتا^{٢}س = $\frac{١}{٢}$ (١ + جتا ٢س)

- جا (π - س) = جا س
- جا (π +س) = - جا س
- جا (π٢ - س) =- جا س
- جتا (π - س) =- جتا س
- جتا (π+س) = - جتا س
- جا (- س) = - جا س
- جتا (- س) = جتا س
- ظا (- س) = - ظا س
- جا ($\frac{\pi}{٢}$ - س) = جتا س
- جا ($\frac{\pi}{٢}$ + س) = جتا س
- جتا ($\frac{\pi}{٢}$ + س) = - جا س
- جتا ($\frac{\pi}{٢}$ - س) =جا س

---

(٧١) جـــــد ؟؟ مباشر

١) $\lim_{س \to ٠} \frac{جا س}{س + جتا س}$

٢) $\lim_{س \to ٠} \frac{٣ + ظا س}{س^{٢} + ٤}$

٣) $\lim_{س \to \frac{\pi}{٦}} \frac{جتا ٢س}{١ - جاس}$

نظرية :

$\lim_{س \to ٠} \frac{جا س}{س} = ١$

ومن النظرية

- $\lim_{س \to ٠} \frac{س}{جا س} = ١$
- $\lim_{س \to ٠} \frac{ظا س}{س} = ١$
- $\lim_{س \to ٠} \frac{س}{ظا س} = ١$

---

(٧٣) جـــــد

١) $\lim_{س \to ٠} \frac{جا٥س}{٨ س}$

٢) $\lim_{س \to ٠} \frac{ظا ٦س}{جا ٥س}$

٣) $\lim_{س \to ٩} \frac{جا (س -٩)}{(س - ٩)}$

٤) $\lim_{س \to ٥} \frac{جا (س -٥)}{ظا (س - ٥)}$

منهاجي
متعة التعليم الهادف

٧٤ جـــــــد

١) $\lim_{س \to 0} \frac{جا^{٢} ٥س}{٣س^{٢}}$

٢) $\lim_{س \to ١} \frac{جا (س - ١)}{س^{٢} - ١}$

٣) $\lim_{س \to \pi} \frac{\pi^{٢} - س^{٢}}{جا (\pi - س)}$

٤) $\lim_{س \to ٩} \frac{جا (\sqrt{س} - ٣)}{س - ٩}$

٥) $\lim_{س \to 0} \frac{جا ٥س + ظا ٧س}{٣س + جا ١٢س}$

٦) $\lim_{س \to 0} \frac{جا^{٢} ٥س}{س^{٣} - ٣س^{٢}}$

٧) $\lim_{س \to 0} \frac{٥س + ظا ٥س + جا^{٢}س}{جا ٦س}$

٨) $\lim_{س \to 0} \frac{س جا س - ظا^{٢}س}{جا^{٣}س - ٥س}$

٩) $\lim_{س \to 0} \frac{جا^{٢} ٢س + س جا^{٣}س}{ظا^{٢} س + ٣س^{٢}}$

٧٥ جـــــد

١) $\lim_{س \to 0} \frac{١ - جتا^{٢} ٣س}{٥س^{٢}}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{جا^{٢} ٣س}{٥س^{٢}} = \lim_{س \to 0} \frac{جا٣س \times جا٣س}{٥س \times س}$

$= \frac{٣}{٥} \times ٣ = \frac{٩}{٥}$

٢) $\lim_{س \to 0} \frac{قا^{٢} س - ١}{س^{٢}}$

٣) $\lim_{س \to 0} \frac{١ - جتا^{٢} ٥س}{قا^{٢} ٣س - ١}$

٤) $\lim_{س \to \pi} \frac{ظا^{٢} س}{قا س + ١}$

٥) $\lim_{س \to 0} \frac{١ + جا٥س ظا ٢س - جتا^{٢} ٩س}{س^{٢}}$

٦) $\lim_{س \to 0} \frac{٥س ظا ٢س}{جتا^{٢} ٢س - ١}$

٧) $\lim_{س \to 0} \frac{٥س ظا ٣س}{١ - قا^{٢} ٤س}$

٨) $\lim_{س \to 0} \frac{١ - جتا^{٢} س}{١ - جتا س}$

٩) $\lim_{س \to 0} \frac{١ - جتا^{٣} س}{١ - جتا س}$

١٠) $\lim_{س \to \frac{\pi}{٤}} \frac{جا^{٢} س - جتا^{٢} س}{جاس - جتا س}$

منهاجي
متعة التعليم الهادف

٧٦ جـــــــد

١) $\lim_{س \to \frac{\pi}{٦}} \frac{٢ جاس - ١}{٤ جتا^{٢} س - ٣}$

٢) $\lim_{س \to \frac{\pi}{٢}} \frac{١ + جتا ٢س}{١ - جا س}$

٣) $\lim_{س \to ٠} \frac{١ - جتا ٦س}{٧س^{٢}}$

٤) $\lim_{س \to ٠} \frac{١ - جتا ٧س}{٥س ظا ٣س}$

٥) $\lim_{س \to ٠} \frac{جتا٣س - جتا ٥س}{س^{٢}}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{-٢ جا\left(\frac{٣س + ٥س}{٢}\right) جا\left(\frac{٣س - ٥س}{٢}\right)}{س^{٢}}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{-٢جا٤س \times جا - س}{س \times س} = -٢ \times ٤ \times -١ = ٨$

٦) $\lim_{س \to ٠} \frac{جتا٦س - جتا ٢س}{٥س^{٢}}$

٧) $\lim_{س \to أ} \frac{جتا٢س - جتا ٢أ}{س - أ}$

٨) $\lim_{س \to أ} \frac{جاس - جا أ}{س - أ}$

٧٧ جـــــــد

١) $\lim_{س \to \pi} \frac{جا\ س}{س - \pi}$

$= \lim_{س \to \pi} \frac{جا(\pi - س)}{س - \pi} =$

٢) $\lim_{س \to \frac{\pi}{٢}} \frac{جتا\ س}{\frac{\pi}{٢} - س}$

٣) $\lim_{س \to ٠} \frac{جا(س + \pi)}{س}$

٣) $\lim_{س \to ٠} \frac{جا(س + ٢\pi)}{س}$

٤) $\lim_{س \to ٢} \frac{جتا\ \frac{\pi}{٢} س}{س - ٢}$

٥) $\lim_{س \to ١} \frac{جا\ \frac{\pi}{٢} س}{س - ١}$

اسئلة مختلفة على الدائري

١) $\lim_{س \to \frac{\pi}{٢}} \frac{جا\ س}{س}$

٢) $\lim_{س \to \pi} \frac{جا\ س}{س}$

٣) $\lim_{س \to ٠} \frac{١ - قا\ س}{ظا\ س}$

٤) $\lim_{س \to ٠} \frac{\sqrt{١ - جتا\ ٦س}}{س^{٢}}$

٥) $\lim_{س \to ٠} \frac{س^{٢} - ٣س\ جا\ ٥س}{٢جا٣س\ ظا٧س - س\ جاس}$

٦) $\lim_{س \to ٠+} \frac{\sqrt{قا^{٢}\ س - ١}}{س}$

٧) $\lim_{س \to \pi^{٣}} \frac{جا\ س}{\frac{\pi - س}{\pi}}$

٨) $\lim_{س \to ٠} \frac{١ - \sqrt{جتا\ س}}{س\ جا\ س}$

٩) $\lim_{س \to ٠} \frac{(\sqrt{س + ١} - ١)\ جا\ س}{س^{٢}}$

١٠) $\lim_{س \to \frac{\pi}{٤}} \frac{جاس - جتا\ س}{\frac{\pi}{٤} - س}$

١١) $\lim_{س \to \frac{\pi}{٤}} \frac{١ - \sqrt{٢}\ جا\ س}{١ - \sqrt{٢}\ جا\ س}$

١٢) $\lim_{س \to \frac{\pi}{٤}} \frac{١ - جا\ ٢س}{جاس - جتا\ س}$

١٣) $\lim_{س \to \frac{\pi}{٣}} \frac{٢\ جا\ س - \sqrt{٣}}{٢جتا\ س - ١}$

١٤) $\lim_{س \to ٠} \frac{١ - جا\ ٢س - جتا^{٢}س}{٤\ س}$

١٥) $\lim_{س \to \frac{\pi}{٢}} \frac{١ - جا\ س}{(\pi - ٢س)^{٢}}$

١٦) $\lim_{س \to ٠} \frac{٦ - ٦جتا^{٢}\ ٤س}{٥س^{٢}}$

١٧) $\lim_{س \to ٠} \frac{٥س\ ظا\ ٣س}{١ - قا^{٢}\ ٤س}$

١٨) $\lim_{س \to ٠} \frac{١}{جا^{٢}\ ٢س} - \frac{١}{٤جا^{٢}\ س}$

١٩) $\lim_{س \to ٠} \frac{جا\ (س^{٢} - ٦٤)}{س - ٨}$

٢٠) $\lim_{س \to ٠} \frac{س - ١}{جا\ (س^{٣} - ١)}$

٢١) $\lim_{س \to ٠} \frac{(س^{٢} - ٤)جا(س-٢)}{س^{٢} - ٤\ س + ٤}$

٢٢) $\lim_{س \to ٠} \frac{قا\ ٢س - ١}{س^{٢}}$

٢٣) $\lim_{س \to ٠} \frac{١ - جتا\ ٥س}{١ - جتا\ ٧س}$

٢٤) $\lim_{س \to أ} \frac{جا\ ٧س - جا\ ٧أ}{س - أ}$

٢٥) $\lim_{س \to ٠} \frac{٢ - \sqrt{٣س^{٢} + ٤}}{جتا\ ٣س - جتا\ س}$

يكون الاقتران ق(س) متصلا عند س = أ إذا وفقط إذا

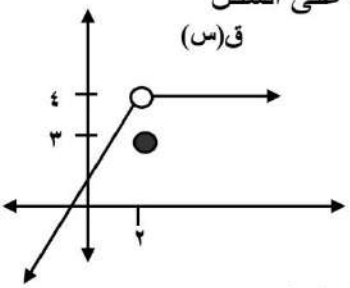
١) نهـــــــا ق(س) موجودة
س ← أ

٢) ق(أ) معرف

٣) نهـــــــا ق(س) = ق(أ)
س ← أ

الاتصال من الرسم البياني :

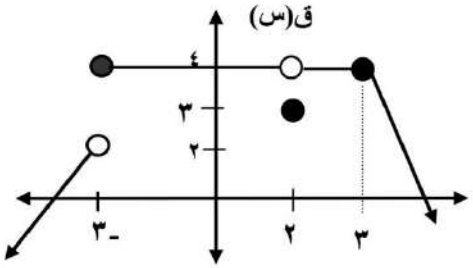
٧٨ بالاعتماد على الشكل



الاقتران متصلا لجميع قيم س عدا عند س = ٢ لان

ق(٢) ≠ نهـــــا ق(س)
س ← ٢

٧٩ بالاعتماد على الشكل



ق (س) غير متصلا عند س = -٣ لان :

نهـــــــا ق(س) غير موجودة
س ← -٣

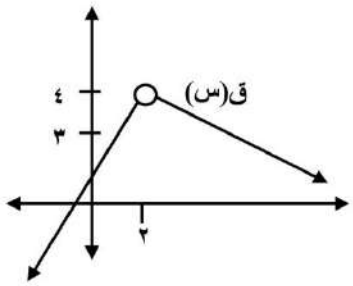
ق (س) غير متصلا عند س = ٢ لان :

نهـــــــا ق(س) ≠ ق(٢)
س ← ٢

*** ق(س) متصلا لجميع قيم س عدا عند س= { -٣ ، ٢ }

*********ق (س) متصلا عند س = ٣

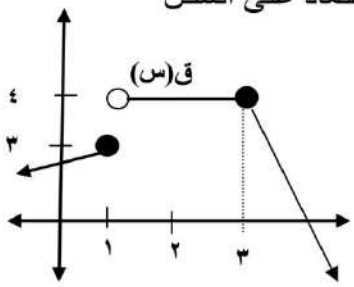
٨٠ بالاعتماد على الشكل



الاقتران متصلا لجميع قيم س عدا عند س = ٢ لان

ق(٢) = غير معرف

٨١ بالاعتماد على الشكل



ق (س) غير متصلا عند س = ١ لان :

نهـــــــا ق(س) غير موجودة
س ← ١

*** ق(س) متصلا لجميع قيم س عدا عند س= { ١ }

ق (س) متصلا عند س = ٢

ق (س) متصلا عند س = ٣

اتصال الاقتران كثير الحدود :

الاقتران كثير الحدود متصلا على مجاله لأنه كثير حدود

أي اقتران كثير حدود يكون متصلا على مجاله لانه كثير حدود فلا داعي للبحث فيه

ق(س) = ٢ س + ١ متصل على ح

ق(س) = ٢ س متصل على ح

ق(س) = ٢ متصل على ح

ق(س) = س^{٢} + ٥س - ٢ متصل على ح

ق(س) = (س + ١)(س +٤) متصل على ح

ق(س) = س متصل على ح

الاقترنات السابقة جميعها كثيرات حدود وجميعها متصلة على ح فلا يوجد لها نقاط انقطاع (انفصال)

اتصال الاقتران النسبي :

الاقتران النسبي متصلا على مجاله عدا أصفار المقام

مثال توضيحي

ق(س) = $\frac{٢س - س^{٢} + ٩}{٢س - ١٠}$

اصفار المقام ٢س -١٠ = ٠

٢س = ١٠

س =٥

* ق (س) متصل على مجاله عدا س=٥

٨٢ نقط عدم اتصال الاقتران

ق(س) = $\frac{٢س + ٨}{س - ١}$ هي

أ) { ٤} ب) { -١}

جـ) { ١، ٤} د) { ١}

٨٣ اختر رمز الإجابة الصحيحة لكلا مما يلي

١)نقط عدم اتصال الاقتران

ق(س) = $\frac{س + ٨}{س^{٢} - ٤}$ هي

أ) { -٨} ب) { -٢}

جـ) { -٢، ٢} د) { ٢}

٢)نقط عدم اتصال الاقتران

ق(س) = $\frac{س - ٢}{س^{٢} - ٤س}$ هي

أ) { ٠} ب) { ٢}

جـ) { ٠، ٤} د) { ٠، ٤،٢}

٣)نقط انقطاع الاقتران

ق(س) = $\frac{س^{٢} - ٩}{س^{٢} - ١}$ هي

أ) { -٣ ، ٣} ب) { -١، ١}

جـ) { ١، ٣} د) { ١}

٤)نقط انفصال الاقتران

ق(س) = $\frac{س + ٢}{س^{٢} + ٣س - ٤}$ هي

أ) { -٢} ب) { ١، -٤}

جـ) { ٤،-١} د) { ٢ ،-٢}

٥)قيم س التي تجعل الاقتران

ق(س) = $\frac{س - ٤}{(س - ١)(س+٢)}$ غير متصلا هي

أ) { ١} ب) { -٢}

جـ) { ١، -٢} د) { ٤}

٦)قيم س التي تجعل الاقتران

ق(س) = $\frac{س - ٣}{س (س^{٢} - ١٦)}$ غير متصلا هي

أ) { ٠} ب) { ٠، ٤، -٤}

جـ) { ٣، ٤} د) { ٠ ، ٤}

٧)نقط عدم اتصال الاقتران

ق(س) = $\frac{س}{س+١}$ - $\frac{٢س+١}{س}$ هي

أ) { -١} ب) { ٠}

جـ) { -١، ٠} د) { ١}

٨)نقط عدم اتصال الاقتران

ق(س) = (س-٣)(٢س +٤) هي

اتصال الجذور :

- **الجذر الفردي** متصل على مجاله ، ولكن احذر وجود النسبي تحت الفردي
- **الجذر الزوجي** متصل على الفترة الموجبة فقط

امثله :

١) ق(س) = $\sqrt[٣]{٧س + س^{٣} - ٤}$

ق : متصلا على ح

٢) ق(س) = $\sqrt[٥]{٣ - س}$

ق: متصلا على ح

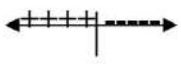
٣) ق(س) = $\sqrt[٣]{\frac{٣ - س}{س^{٢} - ٦٤}}$

ق : متصلا على مجاله عدا اصفار المقام

عدا س= ٨، -٨

٤) ق(س) = $\sqrt{٣ - س}$ جد اكبر فترة اتصال

كبرة فترة اتصال

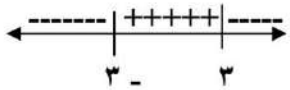


٣

[٣ ، ∞-)

٥) ق(س) = $\sqrt{٩ - س^{٢}}$ جد اكبر فترة اتصال

ق متصلا على



٣ - ٣

[-٣ ، ٣]

٦) ق(س) = $س^{٢}$ - ٩ جد اكبر فترة اتصال

ق متصلا على

٣- ٣

(-∞ ، -٣]

[٣ ، ∞)

اقترانات الجا والجتا والمطلق متصله عندما يكون ما بداخلها متصل ***

امثله :

١) ق(س) = جا ٣س

ق متصلا على مجاله

٢) ق(س) = جتا س + |س + ٧|

ق : متصلا على مجاله

٨٤

١) جد اكبر فترة اتصال للاقتران

ق(س) = $\sqrt{\frac{س - ١}{س - ٥}}$

٢) جد اكبر فترة اتصال للاقتران

ق(س) = $\sqrt{\pi - س}$

٣) ق(س) = $\frac{٣ - س}{س^{٢} + ب س + ١}$

جد قيمة ب التي تجعل ق متصلا على ح

٣) ق(س) = $\frac{٣ - س}{ب س^{٢} - ٤ س + ٥}$

جد قيمة ب التي تجعل ق متصلا على ح

اتصال الاقتران المتشعب عند نقطة :

يكون الاقتران ق(س) متصلا عند س = أ إذا وفقط إذا

١) $\lim_{س \to أ}$ ق(س) موجودة

٢) ق(أ) معرف

٣) $\lim_{س \to أ}$ ق(س) = ق(أ)

٨٥ إذا كان ق(س) = $\begin{cases} س^{٢} + ٥ & ، س > ٣ \\ ٢س + ٣ & ، س \leq ٣ \end{cases}$

ابحث في اتصال ق (س) عند س=٣

الحل:

صورة

ق(٣) = ٢(٣) +٣

= ٩

يمين

$\lim_{س \to ٣^+}$ ٢ س +٣

= ٢(٣) + ٣

= ٩

يسار

$\lim_{س \to ٣^-}$ س^{٢} +٥

= ٩ +٥

= ١٤

ق(س) **غير متصلا** عند س = ٣ لان

$\lim_{س \to ٣}$ ق(س) غير موجودة

---

٨٦ إذا كان ق(س) = $\begin{cases} س + ٥ & ، س < ٢ \\ ٧ & ، س = ٢ \\ ٢س + س^{٢} - ١ & ، س > ٢ \end{cases}$

ابحث في اتصال الاقتران ق(س) عند س =٢

الحل:

صورة

ق(٢) = ٧

يمين

$\lim_{س \to ٢^+}$ ٢س +س^{٢} -١

= ٢(٢) +(٢)^{٢} -١

= ٧

يسار

$\lim_{س \to ٢^-}$ س +٥

= ٢ +٥

= ٧

ق(س) **متصلا** عند س = ٢ لان

$\lim_{س \to ٢}$ ق(س) = ق(٢)

٨٧ ق (س) = { س^{٢} + ٢ ، س < ٣ ; ٣ س + ٢ ، س ≤ ٣ }

ابحث في اتصال الاقتران ق(س) عند س =٣

٨٨ ق (س) = { س^{٢} + ٦ ، س < -٢ ; ٨ ، س = -٢ ; ٣ س – س^{٢} ، س > -٢ }

ابحث في اتصال الاقتران ق(س) عند س =-٢

٨٩ ق(س) = { س^{٢} + ٥ ، س ≠ ٢ ; ٧ ، س = ٢ }

ابحث في اتصال الاقتران ق(س) عند س =٢

٩٠ ق(س) = { |س + ٢| ، س ≠ -٢ ; ٠ ، س = -٢ }

ابحث في اتصال الاقتران ق(س) عند س =-٢

٩١ ق(س) = { $\frac{س^{٢}-٣س-٤}{س+١}$ ، س ≠ -١ ; -٥ ، س = -١ }

ابحث في اتصال الاقتران ق(س) عند س =-١

٩٢ $ق(س) = \begin{cases} |٢س - س^{٢}| & ، س \geq ٢ \\ \sqrt{س - ٢} & ، س > ٢ \end{cases}$

جـــد قيمة الثابت م التي تجعل الاقتران متصلا عند =٢

٩٣ $ق(س) = س[س + ١]$

ابحث في اتصال ق عند س = ٠

٩٤ $ق(س) = \begin{cases} \frac{|ظا س|}{س} & ، س < ٠ \\ ١ - ٢جتا س & ، س \leq ٠ \end{cases}$

ابحث في اتصال ق عند س = ٠

٩٥ $ق(س) = \begin{cases} \frac{|س|}{س} & ، س < ٠ \\ [س + ١] & ، س \leq ٠ \end{cases}$

ابحث في اتصال ق عند س = ٠

(٩٦) $ق(س) = \begin{cases} س^{٢} + م & ، س < ٢ \\ ١٠ & ، س = ٢ \\ س + ك & ، س > ٢ \end{cases}$

جـــد قيمة م ، ك علما بان الاقتران متصلا عند =٢

(٩٧) $ق(س) = \begin{cases} ك - س^{٢} + م & ، س < ٤ \\ ٢٠ & ، س = ٤ \\ ٣س + ك & ، س > ٤ \end{cases}$

جـــد قيمة م، ك التي تجعل الاقتران متصلا

(٩٨) $ق(س) = \begin{cases} [س + م] & ، س \leq ٣ \\ س^{٢} + ٢ & ، س > ٣ \end{cases}$

جـــد قيمة الثابت م التي تجعل الاقتران متصلا عند =٣

(٩٩) $ق(س) = \begin{cases} [س + ٥] & ، س < م \\ |٢ - س| & ، س \geq م \end{cases}$

جـــد قيمة الثابت م التي تجعل الاقتران متصلا

(١٠٠) $ق(س) = \begin{cases} \frac{جا^{٢}(ب س) - س^{٢}}{س \, جا \, ٢س} & ، -\frac{\pi}{٤} < س < ٠ \\ ٢ & ، س = ٠ \\ \frac{س^{٢} + (١ - أ) س}{أ س} & ، ٠ < س \leq ٢ \end{cases}$

جـــد قيمة الثابت أ ،ب التي تجعل الاقتران متصلا عند س = ٠

اتصال الاقتران المتشعب على فترة :

صيغ الســـــــــؤال :

١. **ابحث في اتصال الاقتران على مجاله**
٢. **ابحث في اتصال الاقتران على الفترة [أ ، ب]**
٣. **ابحث في اتصال الاقتران لجميع قيم س الحقيقية**
٤. **جد نقط عدم الاتصال (اقتران متشعب)**

نبحث
عند كل قيم س في المجال
وعند القواعـــــد

١٠١

$$ق(س) = \begin{cases} ٢س + ٣ & ، \ ٠ \leq س \leq ٢ \\ س^{٢} + ٢ & ، \ ٢ < س \leq ٤ \end{cases}$$

ابحث في اتصال الاقتران ق(س) على الفترة [٠ ، ٤]

*** عند س=٠**

الصورة
ق(٠) = ٢(٠) + ٣
= ٣

يمين
نهـــــا ٢ س +٣
س ← +٣
= ٢(٠) + ٣
= ٣

يســـــار
بداية فترة
بدون يسار

ق(س) متصلا عند س = ٠ لان نهـــــا ق(س) = ق(٠)
س ← +٠

*** عند س=٢**

الصورة
ق(٢) = ٢(٢)+٣
= ٧

يمين
نهـــــا س^{٢}+٣
س ← +٢
= ٢(٢)+٣
= ٧

يســـــار
نهـــــا ٢س +٢
س ← -٢
= ٢(٢) +٢
= ٦

ق(س) غير متصلا عند س = ٢ لان
نهـــــا ق(س) غير موجودة
س ← ٢

*** عند س=٤ الصورة**
ق(٤) = (٤)^{٢}+٢
= ١٨

يمين
نهاية فترة
بدون يمين

يســـــار
نهـــــا س^{٢} +٢
س ← -٢
= ١٨

ق(س) متصلا عند س = ٤ لان
نهـــــا ق(س) = **ق(٤)**
س ← -٤

*** عند القواعد**

٢س+ ٣ ، ٠ < س < ٢ متصل لانه كثير حدود

س^{٢} + ٢ ، ٢ < س < ٤ متصل لانه كثير حدود

* ق(س) متصلا على مجاله عدا عند س= ٢

١٠٢ ق(س) = { ٢س+ ١ ، -١ ≤ س < ٢ ; [س +٣] ، س = ٢ }

ابحث في اتصال الاقتران ق(س) على الفترة [-١ ، ٢]

---

١٠٣ ق(س) = { (٢س+ س^{٢})/س ، -٢ ≤ س < ٠ ; [س + ٢]/٢ ، ٠ < س ≤ ١ ; ، س = ٠ }

ابحث في اتصال الاقتران ق(س) على الفترة [-٢ ، ١]

١٠٤ ق(س) =
٢ ، س = ٣
(س + ١) / (س - ١) ، ٣ < س < ٥
٤ ، س = ٥

ابحث في اتصال الاقتران ق(س) على مجاله

---

١٠٥ ق(س) =
[س - ٢] ، ١ ≤ س < ٣
س^{٣} + ١ ، [س] = ٣

ابحث في اتصال ق(س) على الفترة [١ ، ٤)

١٠٦ ق(س) = { |٢س + ٢| ، -١ < س < ١ ؛ [½ س + ١] ، ١ < س < ٣ }

ابحث في اتصال الاقتران ق(س) على مجاله

---

١٠٧ ق(س) = { ٢س ، ٠ < س ≤ ١ ؛ س^{٢} + ٢ ، س > ١، س ≥ ٠ }

جد نقط عدم اتصال الاقتران

١٠٨

$$ق(س) = \begin{cases} أس^{٣} - ب س + ١ & ، س > ١ \\ س^{٢} - (أ + ب)س + ٢ & ، س < ١ \\ ٥ & ، س = ١ \end{cases}$$

جـــد قيمة أ ، ب التي تجعل ق متصلا على ح

١٠٩

$$ق(س) = \begin{cases} \frac{٢س^{٢} - أ}{س - ٢} & ، س > ٢ \\ ب س + جـ & ، ٢ \geq س > ٤ \\ ٦س & ، س \leq ٤ \end{cases}$$

جـــد قيمة أ ، ب ، جـ التي تجعل ق متصلا على ح

١١٠

$$ق(س) = \begin{cases} \frac{جا أ س}{٥س} & ، -٢ \leq س < ١ \\ ب(٢ + س) & ، ٠ < س \geq ٢ \\ ٤ & ، س = ٠ \end{cases}$$

جـــد قيمة أ ، ب التي تجعل ق متصلا على ح

نظرية في الاتصال :

إن (جمع أو طرح أو ضرب أو قسمة) اقترانات متصلة عند عدد يكون الناتج متصلا

بشرط أن لا يكون العدد صفر مقام في القسمة

١١١ إذا علمت إن

$$ق(س) = \begin{cases} س + ٣ & ، س \leq -١ \\ ٢س^{٢} & ، س > -١ \end{cases} \quad ، \quad ع(س) = س^{٢} + ٤$$

وكان ل(س) = ق(س) + ع(س) ابحث في اتصال الاقتران ل(س) عند س = -١

الحل * ق(س)

الصورة	يمين	يسار
ق(-١) = -١ +٣ = ٢	نهـــا س +٣ = ٢ (س ← -١+)	نهـــا ٢س^{٢} = ٢(-١)^{٢} = ٢ (س ← -١-)

ق(س) متصلا عند س = -١ لان

نهـــا ق(س) = ق(-١) (س ← -١)

* ع(س) : متصلا عند س = -١ لأنه كثير حدود

* ل(س) : متصلا عند س = -١ حسب نظرية جمع اقترانيين متصلين

---

١١٢ إذا علمت إن

$$ق(س) = \begin{cases} ٢س + ٣ & ، س \leq ٢ \\ ٣س^{٢} - ٥ & ، س > ٢ \end{cases} \quad ، \quad ل(س) = \sqrt{س - ١}$$

وكان ع(س) = ق(س) - ل(س) ابحث في اتصال الاقتران ع(س) عند س = ٢

منهاجي
متعة التعليم الهادف

١١٣ إذا علمت إن

$$ق(س) = \begin{cases} ٢س + ١ & ، س < ٥ \\ ١١ & ، س = ٥ \\ س + ٦ & ، س > ٥ \end{cases}$$

ع(س) = جا ٣س

وكان ل(س) = ق(س) × ع(س)

ابحث في اتصال الاقتران ل(س) عند س = ٥

١١٤ إذا علمت إن

$$ق(س) = \begin{cases} س + ١ & ، س \leq ٣ \\ س^{٢} - ٥ & ، س > ٣ \end{cases}$$

ع(س) = ٢ - س

وكان ل(س) = ق(س) + ع(س)

ابحث في اتصال الاقتران ل(س) عند س = ٣

١١٥

$$ق(س) = \begin{cases} س^{٣} + ٤ & ، س \leq -١ \\ ٢س^{٢} + ١ & ، س > -١ \end{cases}$$

$$، ع(س) = \begin{cases} س + ٥ & ، س \neq -١ \\ ٤ & ، س = -١ \end{cases}$$

وكان ل(س) = ق(س) - ع(س) ابحث في اتصال الاقتران ل(س) عند س = -١

تابع النظرية:

إن (جمع أو طرح أو ضرب أو قسمة) اقترانات غير متصلة عند عدد
قـــــــد يكون الناتج متصلا عند تلك العدد

١١٦ إذا علمت إن

$$ق(س) = \begin{cases} س + ٣ & ، س \leq ٢ \\ ٣س - ٥ & ، س > ٢ \end{cases} \quad ، \quad ل(س) = س - ٢$$

وكان ع(س) = ق(س) × ل(س) ابحث في اتصال الاقتران ع(س) عند س = ٢

الحل * ق(س)

الصورة	يمين	يسار
ق(٢) = ٢ +٣	نهـــــا س +٣	نهـــــا ٣ س -٥
= ٥	س ← ٢+ = ٥	س ← ٢- = ٣(٢) -٥
		= ١

ق(س) غير متصلا عند س = -١ لان

نهـــــا ق(س) غير موجودة
س ← ٢

* ل(س) : متصلا عند س = ٢لأنه كثير حدود | ل(٢) = ٢ – ٢ = ٠ صورة ويمين ويسار

****** ع(س) = ق(س) × ل(س)

صورة = ٥ × ٠ = ٠
يمين = ٥ × ٠ = ٠
يسار = ١ × ٠ = ٠

*ل(س) متصلا عند س =٥ لان ل(٢) = نهـــــا ل(س)
س ← ٢

---

١١٧ إذا علمت إن

$$ق(س) = \begin{cases} س - ١ & ، س > ٥ \\ ١٠ & ، س = ٥ \\ ٢ س & ، س < ٥ \end{cases} \quad ، \quad ل(س) = س^{٢} - ٢٥$$

وكان ع(س) = ق(س) × ل(س) ابحث في اتصال الاقتران ع(س) عند س = ٥

١١٨

اذا كان ق(س) = س^{٢} − ٩

ع(س) = [س + ٢]

ابحث في اتصال ق(س) × ع(س) عندس=٣

١١٩ إذا علمت إن

$$\text{ق(س)} = \begin{cases} \text{س} + ١ & ، \text{س} < ٢ \\ ٧ & ، \text{س} = ٢ \\ ٢\text{س} & ، \text{س} > ٢ \end{cases}$$

ع(س) = ٢ - س

وكان ل(س) = ق(س) + ع(س)

ابحث في اتصال الاقتران ل(س) عند س = ٢

١٢٠

$$\text{ق(س)} = \begin{cases} \text{س}^{٢} + ٢ & ، \text{س} \leq ٢ \\ ٣\text{س} & ، \text{س} > ٢ \end{cases}$$

$$\text{ع(س)} = \begin{cases} \text{س}^{٢} + ١ & ، \text{س} \geq ٢ \\ ٥ & ، \text{س} = ٢ \end{cases}$$

وكان هـ(س) = ق(س) - ع(س) ابحث في اتصال الاقتران هـ(س) عند س = ٢

منهاجي
متعة التعليم الهادف

١٢١ إذا علمت إن

$$ق(س) = \begin{cases} س^{٢} + ١ & ، س \leq ٣ \\ س + ٥ & ، س > ٣ \end{cases}$$

هـ(س) = ٦ ـ ٢س

وكان ع(س) = ق(س) × هـ(س)

ابحث في اتصال الاقتران ع(س) عند س = ٣

١٢٢ إذا علمت إن

$$ق(س) = \begin{cases} س^{٢} + ١ & ، س \leq ٣ \\ ٢س + ٤ & ، س > ٣ \end{cases}$$

$$هـ(س) = \frac{٦ ـ س}{٢س - ١٠}$$

وكان ع(س) = ق(س) × هـ(س)

ابحث في اتصال الاقتران ع(س) عند س = ٣

١٢٣ ناقش صحة العبارة التالية :

اذا كان ق + هـ متصلا عند س = أ

فان كل من ق ، هـ يجب ان يكون متصلا عند س = أ

١٢٤ إذا علمت إن

$$هـ(س) = \frac{س + ٥}{٢س - ٤} \quad ، ق(س) = س + ١$$

وكان ع(س) = ق(س) × هـ(س)

ابحث في اتصال الاقتران ع(س) عند س = ١

١٢٥ إذا كان ق ، هـ اقترانيين متصلين عند س = ٢ وكان ق(٢) = ٦ ،

وكانت $\lim_{س \to ٢}$ (ق(س) + هـ (س)) = ٢٠ فإن هـ (٢) تساوي :

أ) ٦ ب) ١٤ ج) ١٦ د) ٢٦

منهاجي
متعة التعليم الهادف