10

الرعد

في الرياضيات

الصف العاشر
الفصل الثاني

الوحدة الأولى

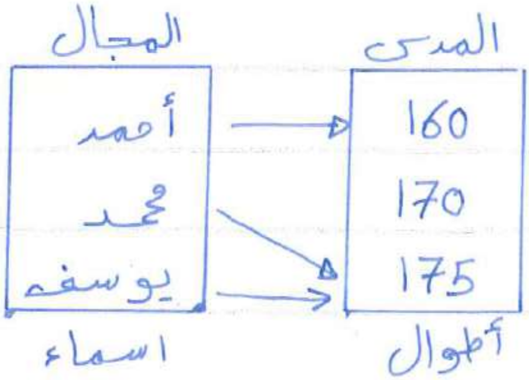
الأقترانات

0775052929

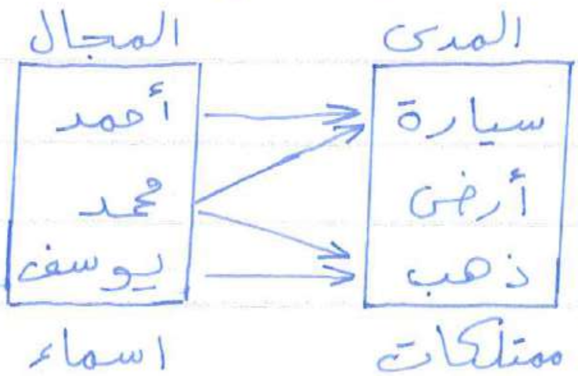
أ. رعد النخاية

الأقترانات

الأقتران : هو علاقة بين مجموعتين تسمى المجموعة الأولى بـ (المجال) = Domain ، والمجموعة الثانية تسمى (المدى) = Range ، بحيث يرتبط كل عنصر في المجال بعنصر واحد فقط في المدى.

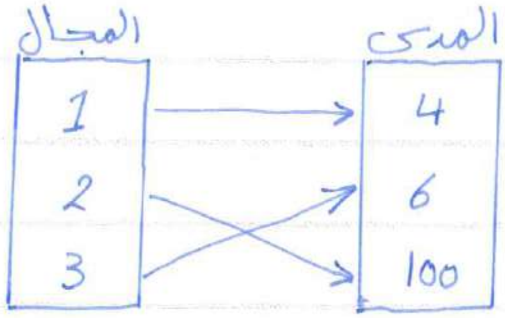


"أقتران"



"علاقة"

هذه العلاقة عبارة عن أقتران



* $\boxed{\text{الأقتران الخطي}}$ ق(س) = أ س + ب

$f(x) = a x + b$

$f(x)$ ← المدى

x ← القيم التي تعوضها في x هي المجال

a : معامل X

b : الحد الثابت

Ex : $f(x) = 2x - 3$ عبارة عن أقتران (خطي)

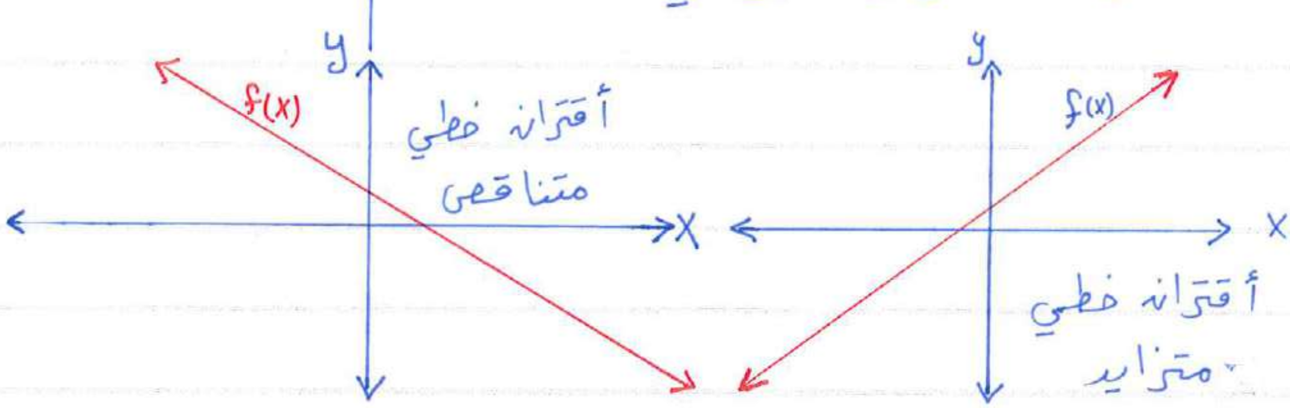
الأستاذ : رعد الخمايسة
منهاجي
متعة التعليم الهادف
الهاتف : 0775052929

⊛ التمثيل البياني للأقتران الخطي $f(x) = ax + b$

أولاً: الأقتران الخطي يأخذ شكل خط مستقيم دائماً

ثانياً: الأقتران الخطي يكون متزايد أو متناقص حسب معامل X إذا كان موجب يكون متزايد وإذا كان سالب يكون متناقص

ثالثاً: لتحديد إذا كان الأقتران متزايد أو متناقص من الرسم ننظر دائماً من جهة اليسار إلى اليمين على المستوى البياني



رابعاً: المجال للأقتران الخطي هو مجموعة الأعداد الحقيقية والمدى أيضاً هو مجموعة الأعداد الحقيقية {ح}

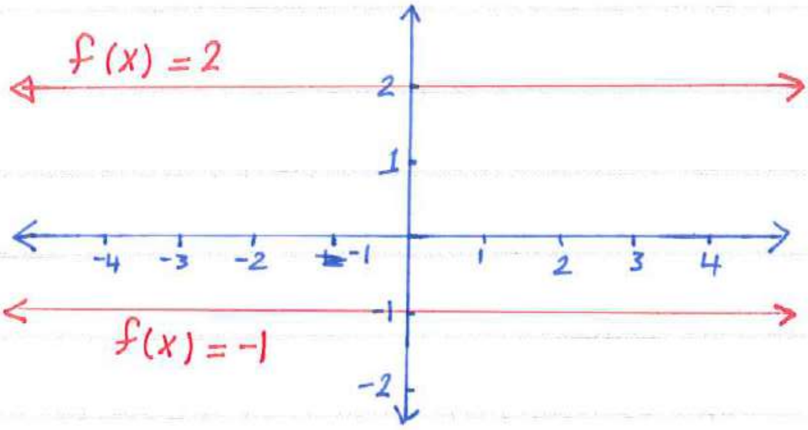
∴ المجال = ح & المدى = ح

* $\boxed{\text{الأقتران الثابت}}$ ق(س) = ب $\equiv$ $f(x) = b$

وهو حالة خاصة من الأقتران الخطي $f(x) = ax + b$ بحيث يكون معامل X يساوي صفر $a = 0$

<u>Ex</u> $f(x) = 4$ & $f(x) = -3$

* التمثيل البياني للاقتران الثابت هو خط مستقيم يوازي محور x ويقطع محور y عند النقطة b



مجال الاقتران الثابت هو ح & مدى الاقتران الثابت هو b

* **الاقتران التربيعي**

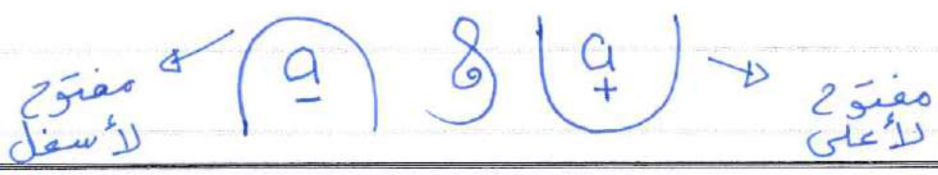
ق(س) = أ س² + ب س + ج

$f(x) = a x^2 + b x + c$

معامل x^2 ، معامل x ، الحد الثابت

Ex: $f(x) = x^2 + 2x - 3$

* التمثيل البياني للاقتران التربيعي يكون على شكل قطع مكافئ مفتوح للأعلى أو مفتوح للأسفل وشكل الاقتران يعتمد على معامل x^2 حيث إذا كانت قيمة a موجبة يكون القطع المكافئ مفتوح لأعلى وإذا كانت قيمة a سالبة يكون القطع المكافئ مفتوح لأسفل



* نقطة الرأس لمنحنى الاقتران التربيعي هي

$$\left(\frac{-b}{2a} , f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$$

* المجال للاقتران التربيعي هو مجموعة الأعداد الحقيقية

* المدى للاقتران التربيعي هو

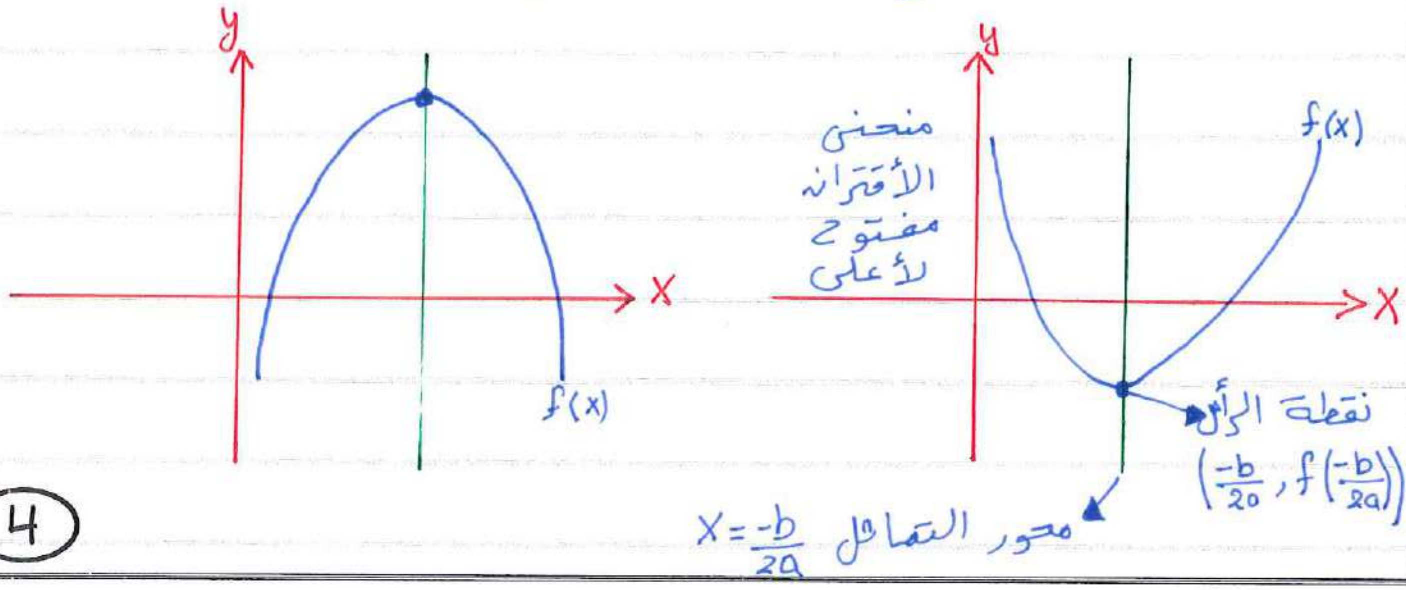
① إذا كان الاقتران مفتوح لأعلى أي أن a موجبة نعبر عنه بالمتباينة التالية

المدى: $y \geqslant f\left(\frac{-b}{2a}\right)$

② إذا كان الاقتران مفتوح للأسفل أي أن a سالبة نعبر عنه بالمتباينة التالية

المدى: $y \leqslant f\left(\frac{-b}{2a}\right)$

* محور تماثل الاقتران التربيعي هو $X = \frac{-b}{2a}$ وهو نفسه الإحداثي X لنقطة الرأس



اقترانات كثيرات الحدود

الحد الجبري : ثابت Ex : 3

ثابت و متغير X Ex : $3x^2$

3 معامل ، x^2 القسم الرمزي

الاقتران $\boxed{\text{وحيد الحد}}$ بمتغير واحد :

هو اقتران قاعدته ناتج ضرب عدد حقيقي يسمى المعامل في متغير أسه عدد صحيح غير سالب

Ex : $f(x) = 9$ الأس : صفر و المعامل 9

$f(x) = x$ الأس : 1 و المعامل 1

$f(x) = \sqrt{7}x^3$ الأس : 3 و المعامل $\sqrt{7}$

$f(x) = \frac{-1}{2}x^5$ الأس : 5 و المعامل $\frac{-1}{2}$

$f(x) = 3x^2$ الأس : 2 و المعامل 3

الاقتران $\boxed{\text{كثير الحدود}}$ هو اقتران ① يحتوي على متغير واحد ② الأسس فيه أعداد صحيحة موجبة ③ يتكون من أكثر من حد أو حد واحد على الأقل وتفصل بين حدود إشارات الجمع و الطرح

Ex : $f(x) = 2$

$f(x) = 3x - 4$

$f(x) = x^2 + 4x - 5$

$f(x) = -3x^2 + 1.5x^4 - 3$

الصورة العامة للإقتران كثير الحدود

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \dots + a_1 x^1 + a_0$$

ملاحظة : لكتابة كثير الحدود بالصورة القياسية نقوم بترتيب الحدود ترتيباً تنازلياً من أكبرها درجة إلى أصغرها درجة

VIN :-

① المعامل الرئيسي : هو معامل أعلى الحدود درجة

② درجة كثير الحدود : هي أكبر أس للمتغير في جميع حدود كثير الحدود

③ كثير الحدود الصفري : هو الذي جميع معاملاته 0 وليس له درجة $f(x)=0$

④ عند كتابة المعاملات يجب قبل استخراجها كتابة كثير الحدود بالصورة القياسية وعند الوصول إلى درجة غير موجودة نضع مكانها صفر في سلّم المعاملات

Ex $f(x) = 2x^2 - 4x^3 + 1$

$f(x) = -4x^3 + 2x^2 + 1$ (قمنا هنا بكتابة الصورة القياسية)

سلّم المعاملات $-4 , 2 , 0 , 1$

معامل لـ X الغير مذكورة

المعامل الرئيسي هو -4 ودرجة الاقتران 3

Ex $g(x) = -2x^3 + x^4 + 2$

الصورة القياسية $g(x) = x^4 - 2x^3 + 2$

سلّم المعاملات $1 , -2 , 0 , 0 , 2$

المعامل الرئيسي $= 1$ درجة الاقتران $= 4$

VIN : للتمييز بين كثير الحدود عن غيره من الاقترانات :

① يجب أن يكون أس المتغيرات موجب وليس سالب وأن يكون عدد صحيح

② الحدود يفصل بينها إشارات جمع وطرح وعند وجود ضرب أو قسمة يجب التبسيط

③ المتغيرات دائماً موجودة في البسط وغير موجودة في المقام

Ex $\boxed{1}$ $f(x) = \frac{x^2}{3} - \sqrt{3}\,x + 2$	كثير حدود من الدرجة (2)
$\boxed{2}$ $L(x) = \frac{x+1}{5} + 7x^2$ $= \frac{x}{5} + \frac{1}{5} + 7x^2$ $= 7x^2 + \frac{1}{5}x + \frac{1}{5}$	كثير حدود لمعرفة درجته نقوم بكتابته على الصورة القياسية ∴ من الدرجة (2)
$\boxed{3}$ $h(x) = x + \frac{1}{x^3}$ $= x + x^{-3}$ أس سالب	ليس كثير حدود لوجود متغير في المقام
$\boxed{4}$ $K(x) = \frac{x^4}{x^2} + 7x$ $= x^2 + 7x$	كثير حدود من الدرجة الثانية
$\boxed{5}$ $g(x) = \sqrt[3]{x} + 5$ $= x^{\frac{1}{3}} + 5$	ليس كثير حدود لوجود أس غير صحيح

Ex : $r(x) = \frac{x+1}{x^{-2}} + 7x$

$= (x+1)x^2 + 7x$

$= x^3 + x^2 + 7x$ ∴ كثير حدود من الدرجة (3)

أتحقق من فهمي ص9

أحدد إذا كان كل مما يأتي كثير حدود أم لا . وفي حال كان كثير حدود أكتبه بالصورة القياسية ثم حدد المعامل الرئيس والدرجة والحد الثابت

a) $h(x) = 9 - 5x + \sqrt{2}\,x^5$

كثير حدود الصورة القياسية ← $h(x) = \sqrt{2}\,x^5 - 5x + 9$

درجة الاقتران (5) المعامل الرئيس $(\sqrt{2})$ الحد الثابت (9)

b) $f(x) = \frac{3x+5}{x^2+2} + 2x$ ليس كثير حدود لوجود متغير في المقام ولا يمكن تبسيطه

c) $g(x) = 2x(3-x)^3$

$= 2x(27 - 27x + 9x^2 - x^3)$

$= 54x - 54x^2 + 18x^3 - 2x^4$

كثير حدود من الدرجة الرابعة الصورة القياسية له

$-2x^4 + 18x^3 - 54x^2 + 54x$

والمعامل الرئيسي هو (-2)

الحد الثابت هو (0)

تذكر بعض قواعد فك القوس

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$\boxed{d}$ $\frac{x^3}{6} - 7x^5 + 2\pi$

كثير حدود من الدرجة الخامسة

الصورة القياسية $-7x^5 + \frac{1}{6}x^3 + 2\pi$

المعامل الرئيس هو $\boxed{-7}$ & الحد الثابت هو $\boxed{2\pi}$

تعريف : $\boxed{\text{المجال}}$ هو مجموعة القيم التي يأخذها المتغير x

$\boxed{\text{المدى}}$ هو مجموعة القيم التي يأخذها المتغير y

التمثيل البياني

الأقتران الخطي	الأقتران الثابت	الأقتران التربيعي	الأقتران التكعيبي
$f(x) = ax + b$	$f(x) = b$	$f(x) = ax^2 + bx + c$	

الاستاذ : رعد الخمايسة | | الهاتف : 0775052929

1 الأقتران الخطي

$$f(x) = \boxed{a}x + b$$

b : هي عبارة عن الأحداثي الصادي الذي يقطع عنده منحنى الأقتران محور y

يكون الأقتران الخطي متناقص إذا كانت إشارة a سالبة

يكون الأقتران الخطي متزايد إذا كانت إشارة a موجبة

أصفار الأقتران الخطي هي عبارة عن نقطة تقاطع منحنى الأقتران مع محور X ☺

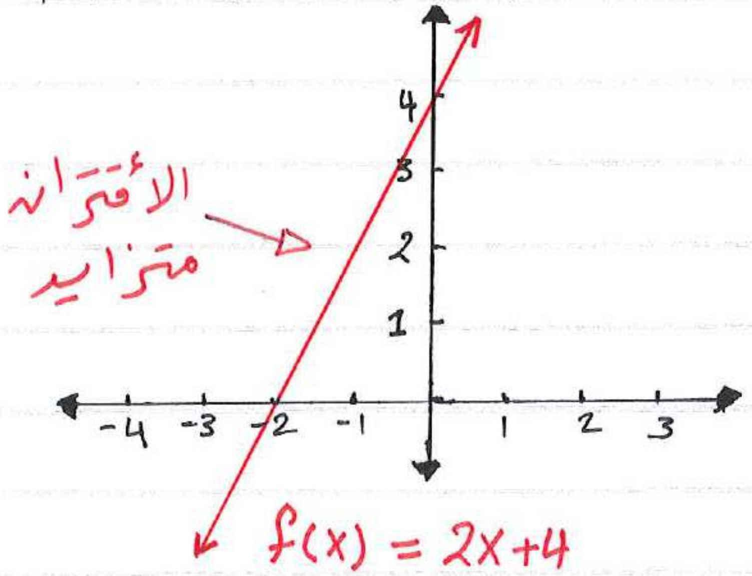
Ex : أرسم منحنى الأقتران

1) $f(x) = 2x + 4$

∴ يقطع منحنى الأقتران محور y عند $y = 4$

الآن نجد أصفار الأقتران لإيجاد نقطة التقاطع مع محور X

$2x + 4 = 0 \rightarrow 2x = -4 \rightarrow \boxed{x = -2}$



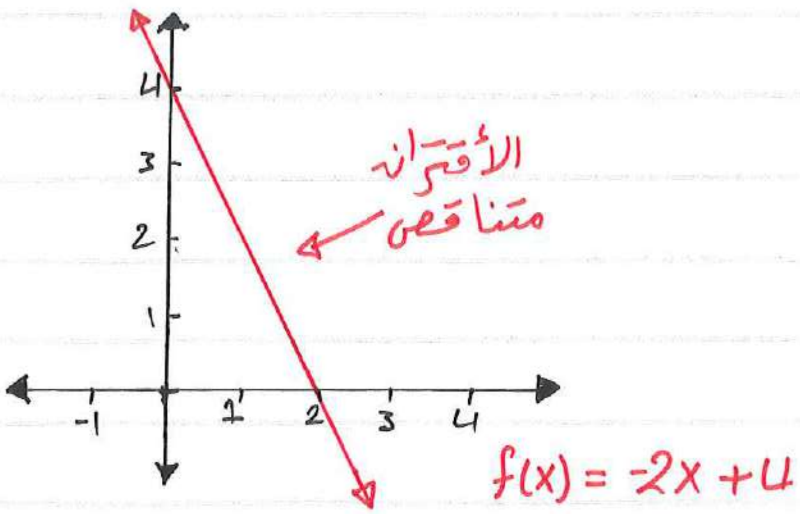
$\boxed{2}$ $f(x) = -2x + 4$

يمر بالنقطة $(0,4)$

ويمر بالنقطة $(2,0)$

$-2x + 4 = 0$

$\boxed{x = 2}$

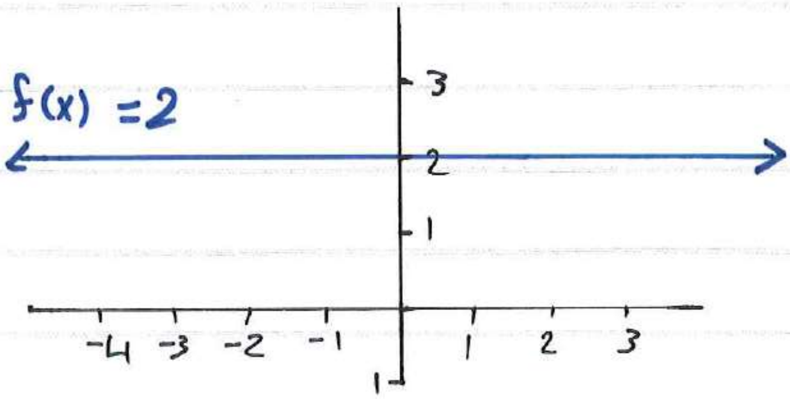


$\boxed{2}$ الأقتران الثابت $f(x) = b$

نقطة تقاطع منحنى الأقتران مع محور y

يكون عبارة عن خط مستقيم يوازي محور x ويقطع محور y عند $y = b$

Ex ارسم منحنى الأقتران $f(x) = 2$



3 الأقتران التربيعي

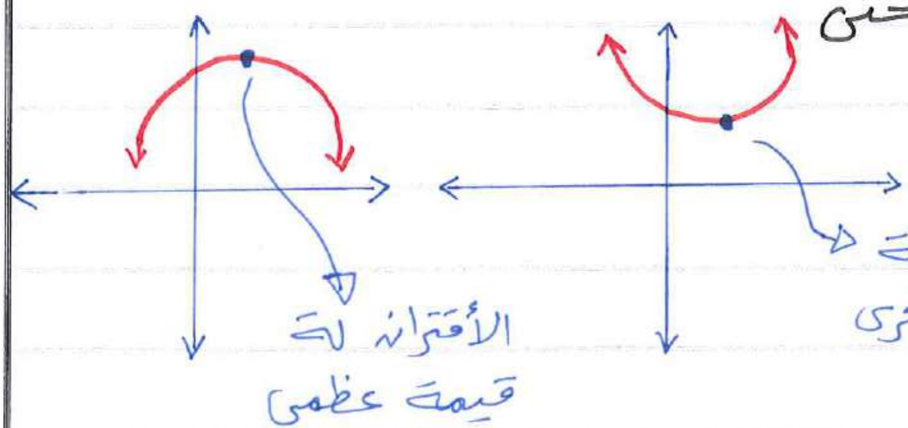
$$f(x) = a x^2 + bx + c$$

$-$ مفتوح لأسفل

$+$ مفتوح لأعلى

إحداثيات رأس المنحنى

$$\left(\frac{-b}{a \cdot 2} , f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$$



ملاحظات :- ① القيمة العظمى والصغرى للأقتران هي الإحداثي الصادي لنقطة الرأس أي $f\left(\frac{-b}{2a}\right)$

② نقطة تقاطع منحنى الأقتران مع محور y هي c ويمكن أستخراجها من العلاقة المعطاة

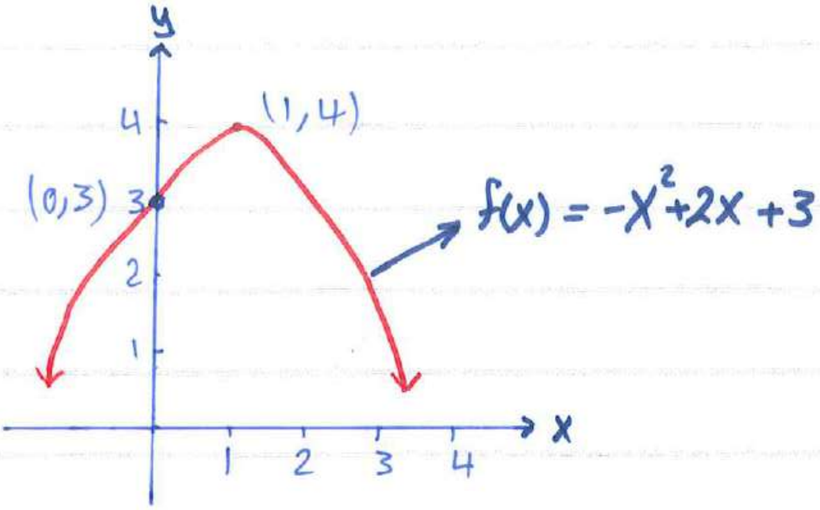
Ex مثل الأقتران $f(x) = -X^2 + 2X + 3$

الأقتران مفتوح لأسفل

نقطة تقاطع محور الأقتران مع محور y

نقطة الرأس $\left(\frac{-b}{2a} , f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right) = (1, f(1)) = (1,4)$

∴ رأس المنحنى هو $(1,4)$



الأقتران مفتوح للأسفل
يقطع محور y عند 3
نقطة الرأس (1,4)

أتحقق من فهمي ص

أمثل بيانياً كل أقتران مما يأتي، محدداً مجاله ومداه:

(b) $f(x) = -0.5x^2 + 3x + 3.5$

الأقتران مفتوح ~~للأعلى~~ للأسفل

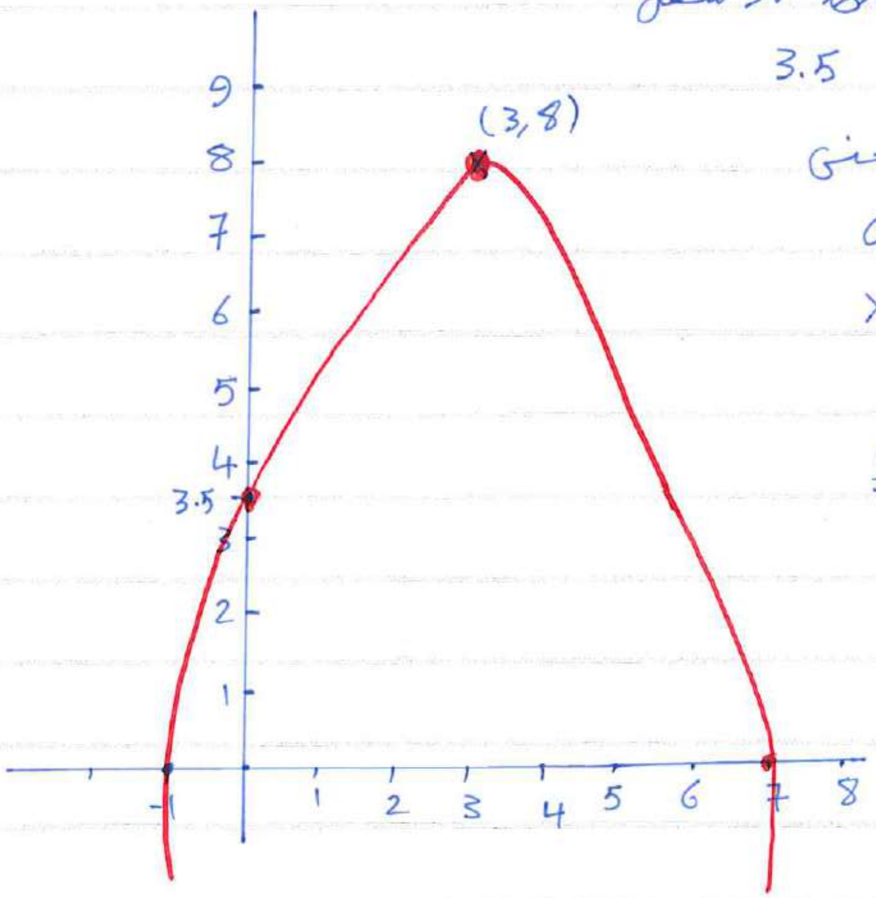
المقطع الصادي 3.5

احداثيات رأس المنحنى

$a = -0.5 \qquad b = 3$

$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-3}{2 \times -0.5} = 3$

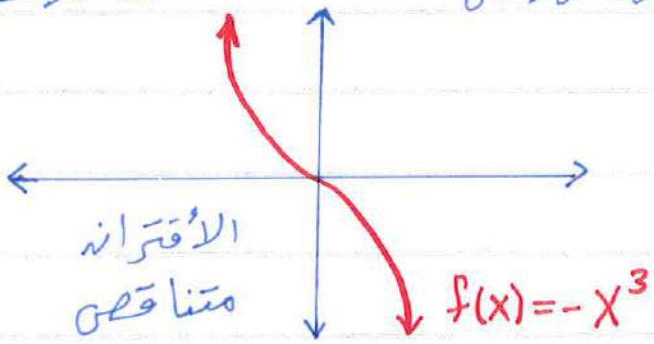
$f(3) = 8$

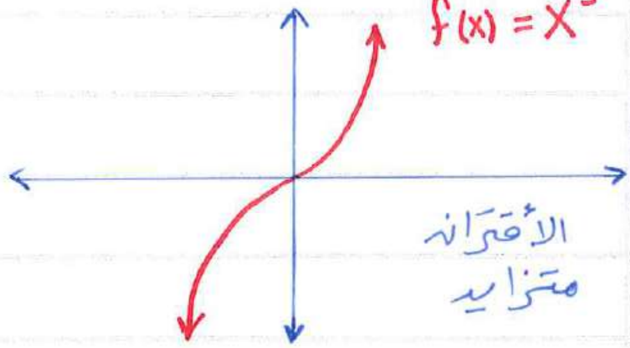


4 الأقتران التكعيبي

$$f(x) = a x^3 + b x^2 + cx + d$$

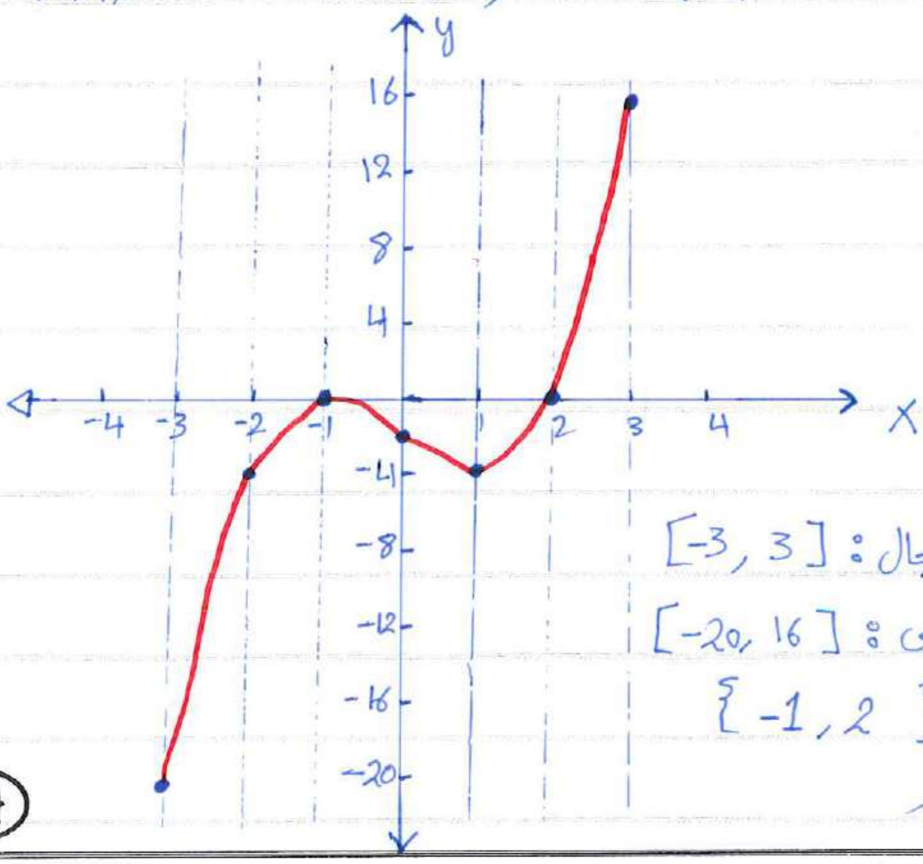
$-$	$+$
المنحنى للأسفل	المنحنى للأعلى
اول انحناء له للأسفل	أول انحناء له للأعلى





Ex: أمثل بيانياً الأقتران التالي محدداً مجاله ومداه

$f(x) = x^3 - 3x - 2 \quad , \quad -3 \leq x \leq 3$



y	x
-20	-3
-4	-2
0	-1
-2	0
-4	1
0	2
16	3

المجال : $[-3, 3]$

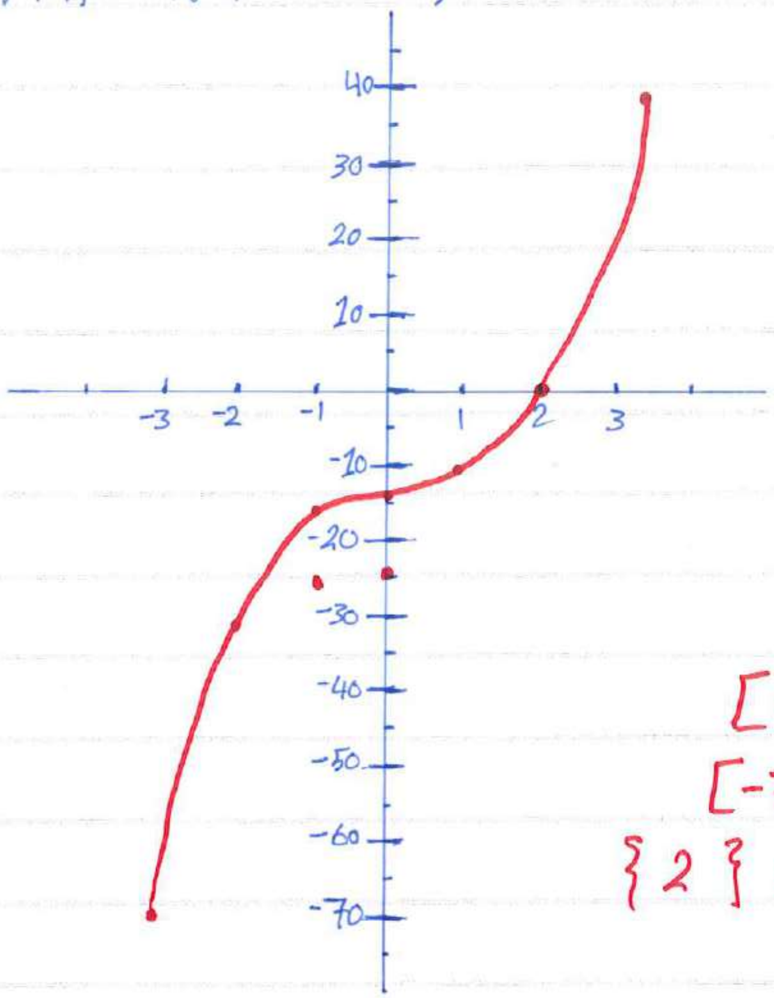
المدى : $[-20, 16]$

أصفار الأقتران : $\{-1, 2\}$

الأقتران متزايد

أتحقق من فهمي ص ١١

a) $f(x) = 2x^3 - 16 \quad , -3 \leq x \leq 3$



y	x
-70	-3
-32	-2
-18	-1
-16	0
-14	1
0	2
38	3

المجال : $[-3 , 3]$

المدى : $[-70 , 38]$

اصفار الاقتران : $\{2\}$

❀ ثلاثية التفوق الدراسي ❀

← " التركيز - التلخيص - التحضير "

جمع كثيرات الحدود

لجمع كثيرات الحدود ، أجمع الحدود المتشابهة التي لها الدرجة نفسها ، وأجمع معاملاتها .

Ex : إذا كان $g(x) = 7x^3 + 6x + 4$ ، $f(x) = 2x^2 - 5x^3 + 4x - 9$

فأجد $f(x) + g(x)$

الحل :- $f(x) + g(x) = -5x^3 + 2x^2 + 4x - 9 + 7x^3 + 6x + 4$

$= 2x^3 + 2x^2 + 10x - 5$

طريقة أخرى :

$$\begin{array}{lrrrr} f: & -5x^3 & +2x^2 & +4x & -9 \\ \boxed{+}\ g: & 7x^3 & & +6x & +4 \\ \hline & 2x^3 & +2x^2 & +10x & -5 \end{array}$$

أتحقق من فهمي

إذا كان $g(x) = -4x^3 + 6x^2 - 5$ ، $f(x) = 3x^2 + 8x^3 + 2x + 13$

فأجد $f(x) + g(x)$

$f(x) + g(x) = 8x^3 + 3x^2 + 2x + 13 - 4x^3 + 6x^2 - 5$

$= 4x^3 + 9x^2 + 2x + 8$

Ex : إذا كان $g(x) = 6x - 7x^2 - 8$ ، $f(x) = 2x^2 - 5x - 3$ فأجد

$f(x) - g(x)$ ؟

$f(x) - g(x) = 2x^2 - 5x - 3 - (-7x^2 + 6x - 8)$

$= 2x^2 - 5x - 3 + 7x^2 - 6x + 8$

$= 9x^2 - 11x + 5$

أتحقق من فهمي

إذا كان $g(x) = x^3 + 6x^2 - 14$ ، $f(x) = 5x^3 - 12x^2 + 3x + 20$

فأجد $g(x) - f(x)$

$$g(x) - f(x) = x^3 + 6x^2 - 14 - 5x^3 + 12x^2 - 3x - 20$$
$$= -4x^3 + 18x^2 - 3x - 34$$

ضرب كثيرات الحدود

لضرب كثيرات الحدود أستعمل خاصية توزيع الضرب على الجمع

Ex : أجد ناتج ضرب $f(x) \cdot g(x)$ في كل مما يأتي

① $f(x) = 3x^3$, $g(x) = 2x^2 - 5x - 4$

$$f(x) \cdot g(x) = 3x^3 \cdot (2x^2 - 5x - 4)$$
$$= (3x^3) \cdot (2x^2) + (3x^3) \cdot (-5x) + (3x^3) \cdot (-4)$$
$$= 6x^5 - 15x^4 - 12x^3$$

ملاحظة : ← في الجمع و الطرح نحافظ على القسم الرمزي ونجمع المعاملات

← في الضرب نضرب المعاملات ونجمع الأسس

② $f(x) = 3x^4 - 5x^2 + x - 5$, $g(x) = 4x^2 - 7$

$f(x) \cdot g(x)$

$$= 4x^2 - 7\ (3x^4 - 5x^2 + x - 5)$$
$$= 12x^6 - 20x^4 + 4x^3 - 20x^2 - 21x^4 - 35x^2 - 7x + 35$$
$$= 12x^6 - 41x^4 + 4x^3 + 15x^2 - 7x + 35$$

أتحقق من فهمي

أجد ناتج ضرب $f(x) \cdot g(x)$ في كل مما يأتي

a) $f(x) = 5x^2 + 4 \quad , \quad g(x) = 7x + 6$

$f(x) \cdot g(x) = (5x^2+4) * (7x+6)$

$(f.g)(x) = 35x^3 + 30x^2 + 28x + 24$

b) $f(x) = 2x^3 + x - 8 \quad , \quad g(x) = 5x^2 + 4x$

$(f.g)(x) = (2x^3+x-8)(5x^2+4x)$

$= 10x^5 + 8x^4 + 5x^3 + 4x^2 - 40x^2 - 32x$

$= 10x^5 + 8x^4 + 5x^2 - 36x^2 - 32x$

VIN

ملاحظة ① عملية الضرب عملية تبديلية أي أن

$f * g = g * f$

② عند ضرب كثير حدود من الدرجة (n) بكثير حدود من الدرجة (m) فإن درجة كثير الحدود الناتج هي $(n+m)$

Ex : ما هي درجة كثير الحدود الناتج من ضرب كثيري الحدود $f(x) \cdot g(x)$ فيما يأتي

$f(x) = 2x^3 - 5x^4 - 3$

$g(x) = -7x^2 + \sqrt{8}\,x^5 + 1$

درجة كثير الحدود الناتج من الضرب = درجة الأول + درجة الثاني

$= 5 + 4$

$= 9$

خطوات ضرب كثيرات الحدود

① أضرب الإشارات

② أضرب المعاملات

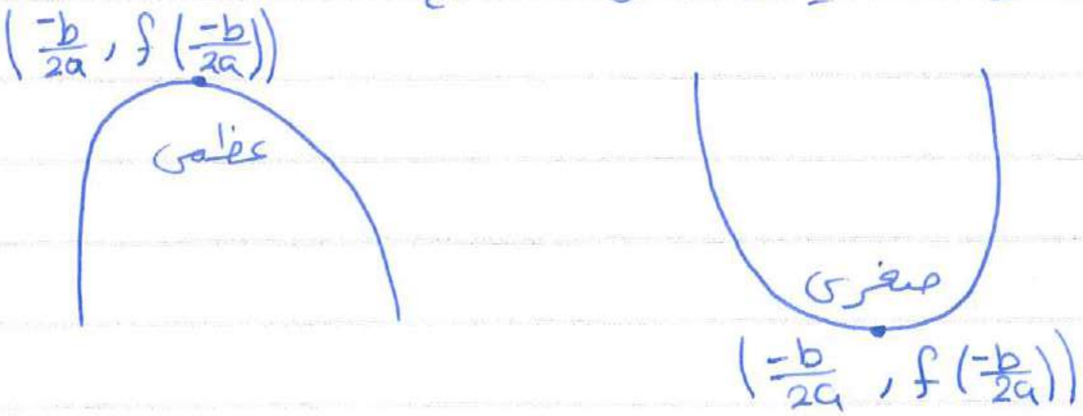
③ أضرب القسم الرمزي "حافظ على الأساس واجمع الأسس"

④ أكتبه بأبسط صورة "جمّع الحدود المتشابهة"

* عدد مرات الضرب = عدد حدود الأول × عدد حدود الثاني

* تطبيقات القيم القصوى *
باستخدام الاقتران التربيعي

* إذا طلب السؤال أكبر قيمة ممكنة ، أو أصغر قيمة ممكنة
تذكر أحداثيات رأس القطع



قسمة كثيرات الحدود & الاقترانات النسبية

* خوارزمية القسمة
① أقسم
② أضرب
③ أطرح
④ انزل منزلة
⑤ نقوم بإعادة الخطوات حتى نستخدم جميع المنازل

خارج القسمة (الناتج)

$$\begin{array}{r|l} & 77 \\ \hline 3 & 231 \\ & -21 \\ \hline & 21 \\ & -21 \\ \hline & 00 \end{array}$$

المقسوم عليه ← 3
المقسوم ← 231
الباقي ← 00

نعبر عن عملية القسمة بالشكل التالي $\frac{231}{3} = 77$

ولو كان هناك باقي تكتب بالشكل التالي $\frac{\text{الباقي}}{\text{المقسوم عليه}}$ + الناتج

* خطوات أستخدام القسمة الطويلة لقسمة كثيرات الحدود
① أقسم أعلى درجة على أعلى درجة
② أضرب بجميع حدود المقسوم علية
③ اعكس الإشارات ثم أجمع
④ كرر الخطوات حتى تصبح درجة الباقي أقل من درجة المقسوم عليه

نكتب الجواب على الشكل ← $\frac{\text{الباقي}}{\text{المقسوم علية}}$ + الناتج

Ex : أجد ناتج قسمة $f(x) = 2x^3 + 24x - 15$ على $g(x) = x + 5$ وباقيها

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2x^2 - 10x + 74 \\ \hline
x + 5 & 2x^3 + 24x - 15 \\
\boxed{+} & -2x^3 - 10x^2 \\ \hline
 & -10x^2 + 24x \\
\boxed{+} & +10x^2 + 50x \\ \hline
 & 74x - 15 \\
\boxed{+} & -74x - 370 \\ \hline
 & -385
\end{array}
$$

∴ الناتج : $2x^2 - 10x + 74$

الباقي : -385

$$\underbrace{\boxed{2x^2 - 10x + 74}}_{\text{الناتج}} + \frac{-385 \rightarrow \text{الباقي}}{x + 5 \rightarrow \text{المقسوم عليه}}$$

ملاحظات :

1 درجة كثير الحدود في المقسوم يجب أن تكون اكبر من أو تساوي درجة كثير الحدود في المقسوم عليه

2 $\frac{\text{المقسوم}}{\text{المقسوم عليه}} = \text{الناتج} + \frac{\text{الباقي}}{\text{المقسوم عليه}}$

3 للتحقق

الناتج × المقسوم عليه + الباقي = يجب أن يساوي المقسوم

أتحقق من فهمي ص18

أجد ناتج قسمة $f(x) = 4x^4 - 7x^3 + 12x - 25$ على $h(x) = x - 4$

الناتج : $4x^3 + 9x^3 + 36x + 156$

الباقي : 599

$$
\begin{array}{r|l}
 & 4x^3 + 9x^3 + 36x + 156 \\
\hline
x - 4 & 4x^4 - 7x^3 + 12x - 25 \\
 & \underline{-4x^4 + 16x^3} \\
 & 9x^3 + 12x - 25 \\
 & \underline{-9x^3 + 36x^2} \\
 & 36x^2 + 12x - 25 \\
 & \underline{-36x^2 + 144x} \\
 & 156x - 25 \\
 & \underline{-156x + 624} \\
 & 599
\end{array}
$$

VIN : إذا كان باقي القسمة يساوي صفراً فإن المقسوم يقبل القسمة على المقسوم عليه بدون باقي ويسمى المقسوم عليه عامل من عوامل المقسوم

∴ يمكن استعمال خوارزمية القسمة للتأكد أن كثير الحدود $h(x)$ هو أحد عوامل كثير حدود آخر $f(x)$ أم لا

$$
\begin{array}{r|l}
h(x) & f(x) \\
\hline
 & \\
\hline
\end{array}
$$

$h(x)$ ← يكون عامل من عوامل كثير الحدود $f(x)$ لأنه الباقي $= 0$

الباقي صفر

Ex : أثبت أن $(2x^2+x+7)$ هو أحد عوامل الاقتران

$$f(x)=6x^4-7x^3+10x^2-38x-21$$

الحل : بما أن $(2x^3+x+7)$ هو أحد عوامل $f(x)$ فإنه

باقي قسمة $\frac{f(x)}{2x^3+x+7}$ يجب أن يساوي صفر

$$\begin{array}{r|l} & 3x^2-5x-3 \\ \hline 2x^2+x+7 & 6x^4-7x^3+10x^2-38x-21 \\ & -6x^4-3x^3-21x^2 \\ \hline & -10x^3-11x^2-38x-21 \\ & +10x^3+5x^2+35x \\ \hline & -6x^2-3x-21 \\ & +6x^2+3x+21 \\ \hline & 0 \end{array}$$

∴ بما أنه باقي قسمة $f(x)$ على هذا المقدار يساوي صفر

فإنه أحد عوامل $f(x)$ #

أتحقق من فهمي

أثبت أن $h(x)$ هو أحد عوامل $f(x)$ في كل مما يأتي :

a) $f(x)=2x^3+9x^2-12x-55$, $h(x)=2x+5$

b) $f(x)=5x^3+12x^2-14x+3$, $h(x)=x^2+3x-1$

الحل :

a) $f(x) = 2x^3 + 9x^2 - 12x - 55$, $h(x) = 2x + 5$

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2 + 2x - 11 \\
\hline
2x + 5 & 2x^3 + 9x^2 - 12x - 55 \\
 & -2x^3 - 5x^2 \\
\hline
 & 4x^2 - 12x - 55 \\
 & -4x^2 - 10x \\
\hline
 & -22x - 55 \\
 & +22x + 55 \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

∴ بما أنه باقي قسمة $\frac{f(x)}{h(x)}$ يساوي صفر فإن $h(x)$ أحد عوامل $f(x)$.

b) $f(x) = 5x^3 + 12x^2 - 14x + 3$, $h(x) = x^2 + 3x - 1$

$$
\begin{array}{r|l}
 & 5x - 3 \\
\hline
x^2 + 3x - 1 & 5x^3 + 12x^2 - 14x + 3 \\
 & -5x^3 - 15x^2 + 5x \\
\hline
 & -3x^2 - 9x + 3 \\
 & +3x^2 + 9x - 3 \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

∴ بما أنه باقي قسمة $\frac{f(x)}{h(x)}$ يساوي صفر فإن $h(x)$ أحد عوامل $f(x)$ #

* استنتاج: عند قسمة كثير الحدود $f(x)$ من الدرجة n على كثير الحدود $g(x)$ من الدرجة m فإن درجة كثير الحدود الناتج تساوي $n-m$ #

Ex: إذا كان $f(x) = x^7 - 6x + 3$ ، $g(x) = x^3 + 4x - 7$
وكان $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ فإن درجة كثير الحدود $h(x)$ تساوي؟

الحل: درجة h = درجة f - درجة g
$= 7 - 3$
$= 4$

الاقترانات النسبية

هي اقترانات يمكن كتابتها بصورة نسبية؛ أي نسبة بين كثيري حدود $\frac{f(x)}{g(x)}$ ؛ بشرط أن $g(x) \neq 0$

ومن الأمثلة عليها

① $y = \frac{x+4}{2x^3 - 5x^2 - 3x}$

② $h(x) = \frac{x+2}{x^2 - 9}$

③ $f(x) = \frac{1}{x}$

الاستاذ : رعد الخمايسة | منهاجي متعة التعليم الهادف | الهاتف : 0775052929

مفهوم أساسي

الاقتران النسبي : اقتران تكون قاعدته (معادلته) بصورة $q(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ ، حيث أن $g(x) \neq 0$ ، و $g(x)$ و $f(x)$ كثيرا حدود

مجال الاقتران النسبي : مجموعة الأعداد الحقيقية باستثناء الأعداد التي تجعل المقام يساوي صفر

المجال باختصار $\mathbb{R} - \{$أصفار المقام$\}$

Ex : اجد مجال كل اقتران نسبي في ما يأتي

① $q(x) = \frac{x+2}{x^2-9}$

خطوات الحل :

① صفّر المقام وأوجد أصفاره

② استثني الأصفار من المجال

الحل : المجال $q(x)$ هو $\mathbb{R} - \{$أصفار المقام$\}$

$x^2 - 9 = 0$

طريقة ②

$x^2 - 9 = 0$

تحليل فرق بين مربعين

$(x+3)(x-3) = 0$

$x = -3 \; , \; x = 3$

مجال $q(x)$ هو $\mathbb{R} - \{-3, 3\}$

طريقة ①

$\sqrt{x^2} = \sqrt{9}$

$x = \pm\sqrt{9}$

$x = 3 , -3$

أصفار المقام هي $x = \{-3, 3\}$

مجال الاقتران هو $\mathbb{R} - \{-3, 3\}$

$\{x \mid x \neq -3 , x \neq 3\}$

② $y = \dfrac{x+4}{2x^3-5x^2-3x}$

الحل:

مجال الاقتران $\mathbb{R} - \{$ أصفار المقام $\}$

$2x^3-5x^2-3x=0 \longrightarrow$ باستخدام إخراج عامل مشترك

$x(2x^2-5x-3)=0$

$x(2x+1)(x-3)=0$

$x=0$

$2x+1=0 \longrightarrow x=\frac{-1}{2}$

$x-3=0 \longrightarrow x=3$

* أصفار المقام هي $x=\{\frac{-1}{2}, 0, 3\}$

* مجال الاقتران النسبي y هو ← $\mathbb{R}-\{\frac{-1}{2}, 0, 3\}$

فكر: هل مجال الاقتران $f(x)=\dfrac{x^2-9}{x+3}$ يساوي مجال الاقتران $g(x)=x-3$ ؟

$f(x)=\dfrac{x^2-9}{x+3}$

$g(x)=x-3$

كثير حدود مجاله $\mathbb{R}$

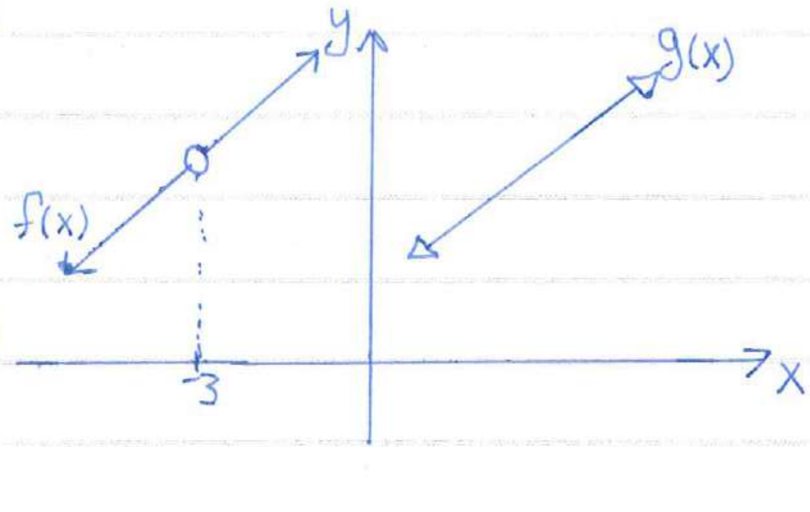
$x+3=0$

$x=-3$

مجاله $\mathbb{R}-\{-3\}$

$\boxed{\text{مجال } f(x) \neq \text{مجال } g(x)}$

$f(x)=\dfrac{(x-3)\cancel{(x+3)}}{\cancel{(x-3)}}$



انتبه: لا يجوز تحديد المجال بعد الاختصار

أتحقق من فهمي

أجد مجال كل مما يأتي

a) $h(x) = \frac{x^3 + 8}{x^2 - 5x + 6}$

الحل :-

تذكر: عندما يصعب تحليل العبارة التربيعية الجأ للقانون العام

$x^2 - 5x + 6 = 0$

$(x-2)(x-3) = 0$

$x - 2 = 0 \rightarrow x = 2$

$x - 3 = 0 \rightarrow x = 3$

∴ المجال هو $\mathbb{R} - \{2,3\}$

$\{x \mid x \neq 2 , x \neq 3\}$

b) $y = \frac{x^2 - 4}{6x - 3x^2}$

$6x - 3x^2 = 0$

$3x(2 - x) = 0$

$3x = 0 \rightarrow x = 0$

$2 - x = 0 \rightarrow x = 2$

∴ المجال هو $\mathbb{R} - \{0,2\}$

$\{x \mid x \neq 0 , x \neq 2\}$

حل خاطئ :

$6x - 3x^2 = 0$

$\frac{6\cancel{x}}{\cancel{x}} = \frac{3x^{\cancel{2}}}{\cancel{x}}$

أحذر أن تقسم على المتغير (المجهول) عند حل المعادلة لأنك ستلغي أحد الحلول

$6 = 3x$

$\boxed{x = 2}$

$\therefore \mathbb{R} - \{2\}$ X حل خطأ

تذكر :- في الكسور كلما زادت قيمة المقام } كقيمة مطلقة
← كلما قلت قيمة الكسر

وكلما قلت قيمة المقام } كقيمة مطلقة
← كلما زادت قيمة الكسر

$\frac{1}{0.1} = 10$

$\frac{1}{0.01} = 100$

$\frac{1}{0.001} = 1000$

الأستنتاج

$f(x) = \frac{1}{x}$

$x \longrightarrow 0$

$f(x) \longrightarrow \infty$

$\frac{1}{10} = 0.1$

$\frac{1}{100} = 0.01$

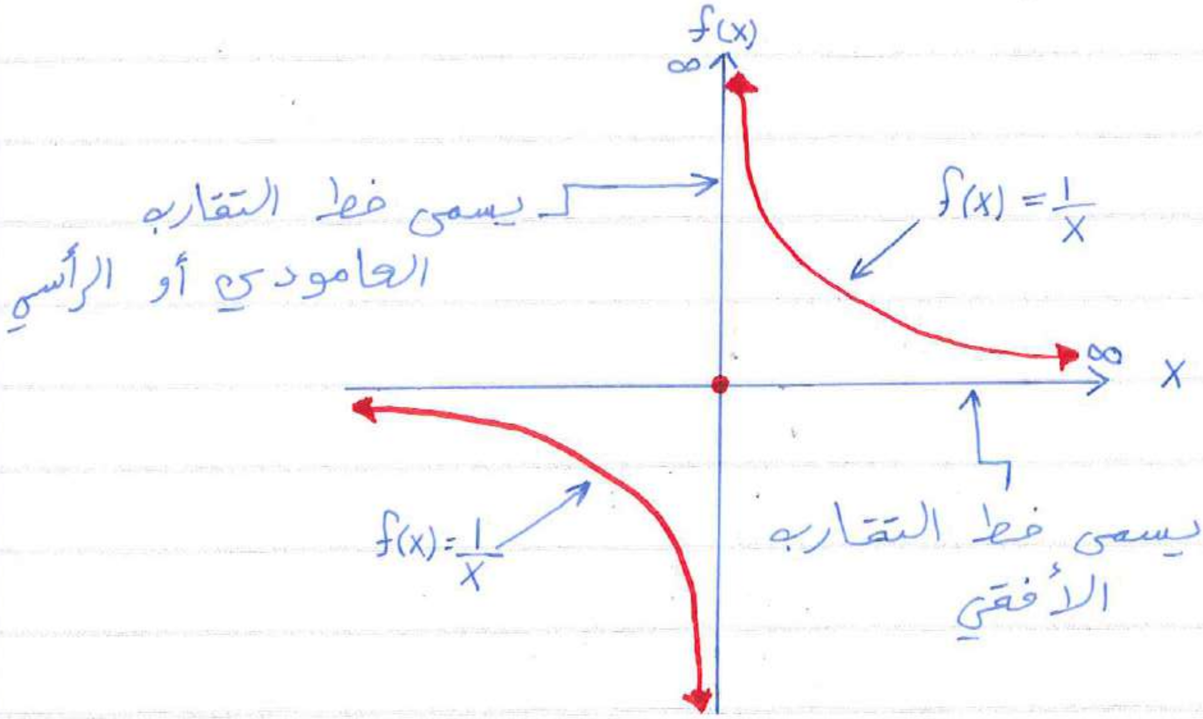
$\frac{1}{1000} = 0.001$

الأستنتاج

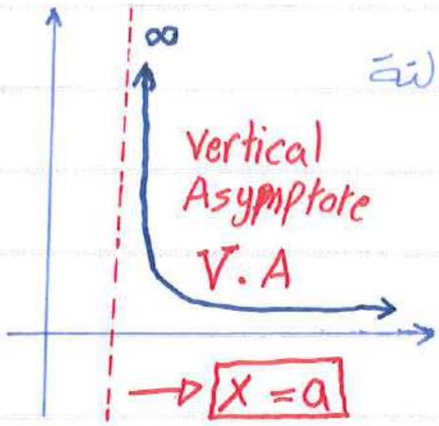
$f(x) = \frac{1}{x}$

$x \longrightarrow \infty$

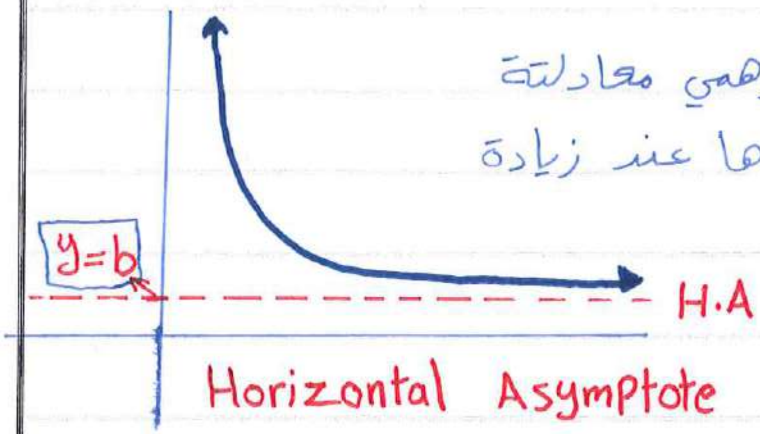
$f(x) \longrightarrow 0$



* خطوط التقارب الرأسي وخطوط التقارب الأفقي في الأقتران النسبي



* خط التقارب الرأسي: هو خط وهمي معادلته $X=a$ حيث (a) هي أصفار المقام بعد الإختصار إن وجد. ويحدث عندما $y \to \infty$



* خط التقارب الأفقي: هو خط وهمي معادلته $y=b$ حيث (b) يمكن ايجادها عند زيادة القيمة المطلقة لـ $|x|$ ويحدث عندما $x \to \infty$

* كيف نجد معادلة خط التقارب الأفقي ؟؟

① إذا كانت درجة البسط أقل من درجة المقام

$$f(x) = \frac{a x^n + \cdots}{b x^m + \cdots} + c \quad , a < b$$

فإن خط التقارب الأفقي يكون عند الحد الثابت c

$$\boxed{y=c}$$

② إذا كانت درجة البسط تساوي درجة المقام

$$f(x) = \frac{a x^n + \cdots}{b x^m + \cdots} + c$$

فإنه خط التقارب الأفقي يكون عند :

$y = \dfrac{\text{المعامل الرئيس في البسط}}{\text{المعامل الرئيس في المقام}} + $ الحد الثابت

$$\boxed{y = \frac{a}{b} + C}$$

Ex $f(x) = \dfrac{4x^3+3}{2x^3-5}$

③ إذا كانت درجة البسط أكبر من درجة المقام فإنه لا يوجد خطوط تقارب أفقي

Ex $f(x) = \dfrac{x^2-3}{x+1}$

Ex : حدد معادلة كل من خطوط التقارب الرأسي والأفقي في كل من الاقترانات الآتية إن وجدت

1) $f(x) = \dfrac{1}{x}$

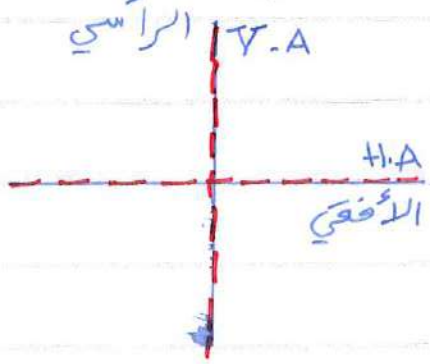
الحل :

خط التقارب الرأسي ← $\boxed{x=0}$

خط التقارب الأفقي ← $\boxed{x \to \infty}$

$\downarrow$

$y = \dfrac{1}{\infty} \longrightarrow \boxed{y=0}$



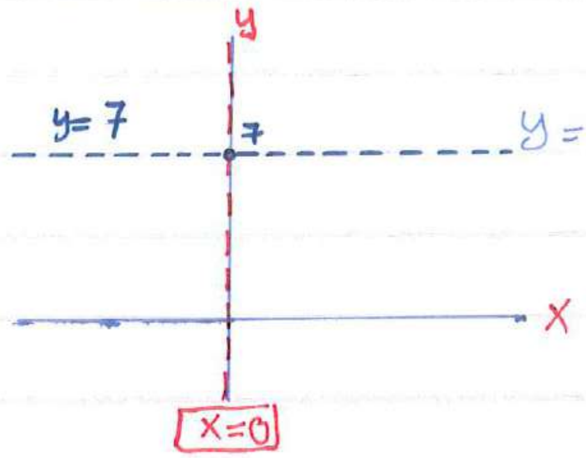
2) $f(x) = \dfrac{-3}{x^2} + 7$

الحل :

خط التقارب الرأسي = أصفار المقام

$\to \sqrt{x^2} = \sqrt{0}$

$\to \boxed{x = 0}$



خط التقارب الأفقي : $X \to \infty$

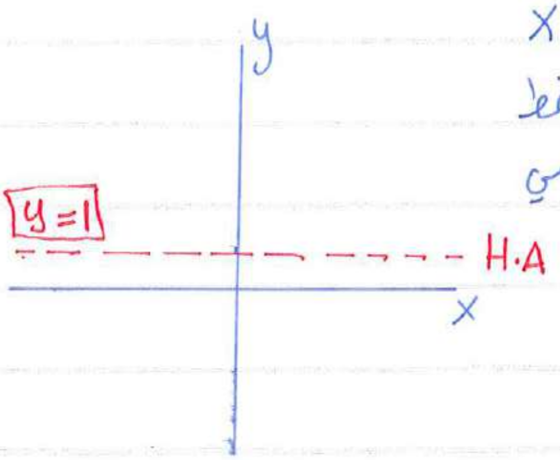
$$y = \frac{-3}{\infty^2} + 7 \to \boxed{y = 7}$$

$\boxed{3}$ $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 3}$

التقارب الرأسي : أصفار المقام

$x^3 + 3 = 0 \to x^2 = -3$

$\sqrt{x^2} = \sqrt{-3}$ ∴ لا يوجد خط تقارب رأسي



التقارب الأفقي : $X \to \infty$

$$y = \frac{1}{1} \to \boxed{y = 1}$$

الإثبات :

$$\begin{array}{r|l} & \quad 1 \\ \hline x^2+3 & x^2 - 1 \\ & \underline{-x^2 - 3} \\ & \quad -4 \end{array}$$

$$\Rightarrow y = 1 - \frac{4}{x^2+3}$$

$$\to y = 1 - \frac{4}{\infty^2}$$

$$\boxed{y = 1}$$

4) $f(x) = \frac{x^3+3}{x-5} = \frac{\infty^3}{\infty} = \infty$

الحل :

التقارب الرأسي : أصفار المقام

$x-5=0 \rightarrow \boxed{x=5}$

التقارب الأفقي : $x \rightarrow \infty$

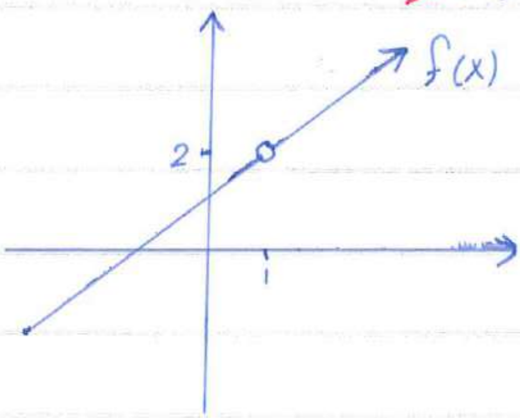
بما أنه درجة البسط > درجة المقام

فإنه لا يوجد خط تقارب أفقي

5) $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$

الحل : أنتبه درجة البسط > درجة المقام

$\frac{x^2-1}{x-1} = \frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{(x-1)}} = \boxed{x+1}$



التقارب الرأسي : أصفار المقام

لا يوجد خط تقارب رأسي لأنه

لا يوجد x في المقام بعد التبسيط

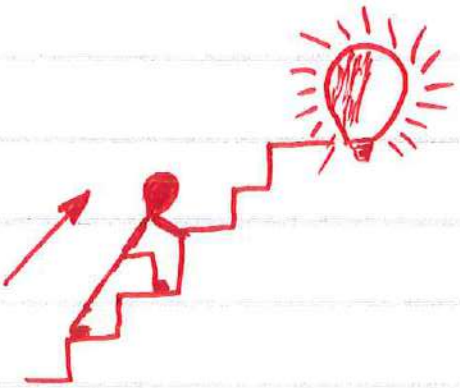
التقارب الأفقي : $x \rightarrow \infty$

لا يوجد خط تقارب أفقي

بالطبع ستتعب ....

لو كان النجاح سهلاً

لوصل إليه الجميع !



الاستاذ : رعد الخمايسة | منهاجي متعة التعليم الهادف | الهاتف : 0775052929

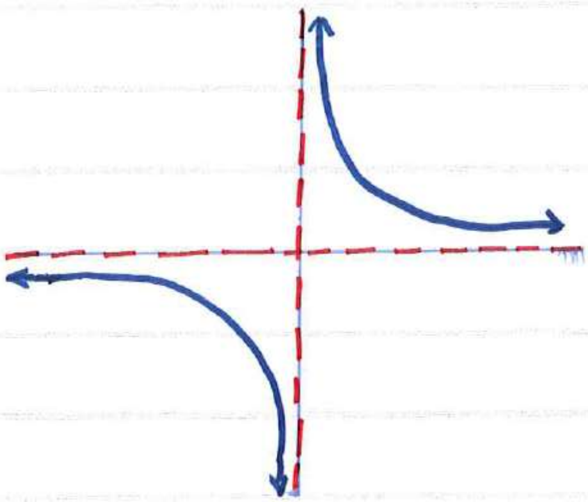
تمثيل الاقتران النسبي بيانياً

الخطوات

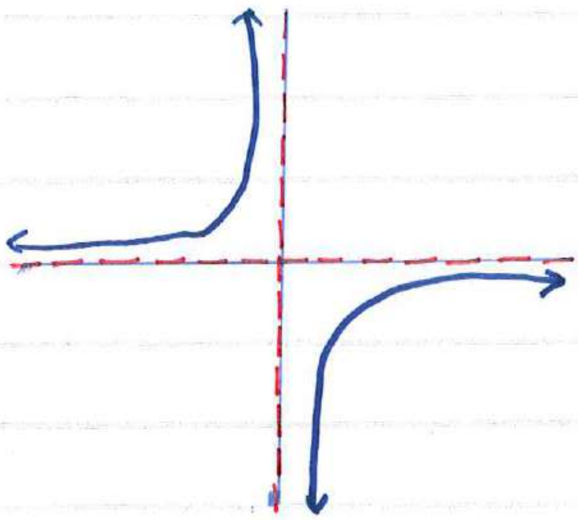
1) حدد مجال الاقتران
2) اختصر إن وجدت اختصاراً
3) حدد خطوط التقارب الرأسي والأفقي
4) اختر عدد كبير من النقاط لتعويضها في الاقتران وتمثيلها بيانياً

Ex : مثل بيانياً

① $f(x) = \frac{1}{x}$



② $f(x) = \frac{-1}{x}$



تعلم

① إذا كانت إشارة الاقتران موجبة نرسم الاقتران في الربع الأول و الثالث

② إذا كانت إشارة الاقتران سالبة نرسم الاقتران في الربع الثاني و الرابع

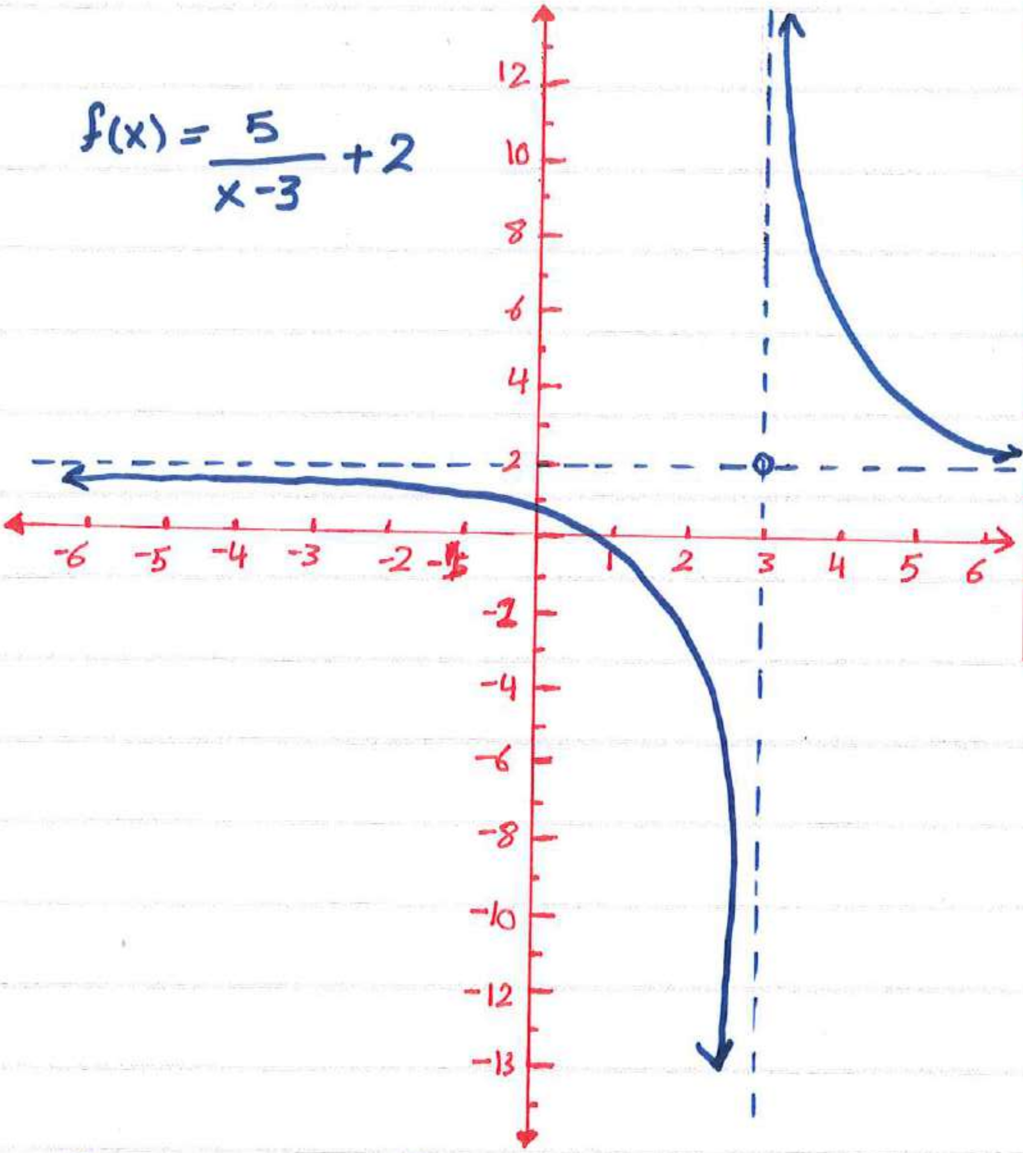
Ex : أوجد خطوط التقارب للاقتران $f(x)=\frac{5}{x-3}+2$ وأمثلة بيانياً وأوجد مجالة ومداة

الحل : المجال هو $\mathbb{R}$ - { أصفار المقام }

$x-3=0 \rightarrow x=3 \qquad \therefore \mathbb{R}-\{3\}$

التقارب الرأسي (أصفار المقام) $\Leftarrow x=3$

التقارب الأفقي $(x\rightarrow\infty)$ $\Leftarrow y=2$



x	y
0	$\frac{1}{3}$
1	$\frac{-1}{2}$
2	-3
3	$\times$
4	7
5	$\frac{9}{2}$
6	$\frac{11}{3}$

المجال $\leftarrow$ $\mathbb{R}-\{3\} = \{x \mid x\neq 3\}$

المدى $\leftarrow$ $\mathbb{R}-\{2\} = \{y \mid y\neq 2\}$

تركيب الاقترانات

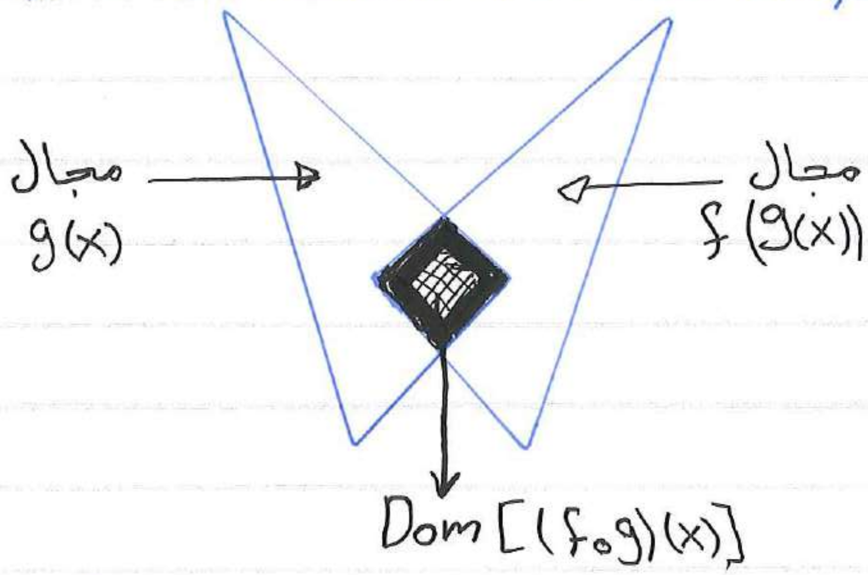
مفهوم أساسي

إذا كان $f(x)$ و $g(x)$ اقترانين، فإن الاقتران الناتج من تركيب g ، f هو $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ ويقرأ: f بعد g .

يكون مجال الاقتران المركب $(f \circ g)$ هو مجموعة قيم x من مجال g التي تكون مخرجاتها $g(x)$ في مجال f .

مجال الاقتران المركب = مجموعة جزئية من مجال الاقتران الداخلي

$$Dom[(f \circ g)(x)] = Dom[g(x)] \cap Dom[f(g(x))]$$



Ex: إذا كان $g(x) = x+4$ و $f(x) = x^2$ فأجد

① $(g \circ f)(3) = g(f(3))$

$\boxed{f(3) = 3^2 = 9}$

$= g(9)$

$= 9 + 4 = 13$

هنا عوضنا ب f فقط

$\therefore (g \circ f)(3) = 13$

Ex : إذا كان $g(x) = x + 4$ ، $f(x) = x^2$ ، فأجد

② $(g \circ f)(-2) = g(f(-2))$ $\qquad f(-2) = (-2)^2 = 4$

$= g(4)$

$= 4 + 4 = 8$

$\therefore (g \circ f)(-2) = 8$

③ $(f \circ g)(5) = f(g(5))$ $\qquad g(5) = 5 + 4 = 9$

$= f(9)$

$= 9^2 = 81$

$\therefore (f \circ g)(5) = 81$

أتحقق من فهمي

إذا كان $j(x) = 2x + 1$ ، $h(x) = \sqrt{x}$ فأجد كلاً مما يلي

① $(h \circ j)(4) = h(j(4))$ $\qquad j(4) = 2 * 4 + 1$

$= h(9)$ $\qquad = 9$

$(h \circ j)(4) = \sqrt{9} = 3$ #

② $(j \circ h)(4) = j(h(4))$ $\qquad h(4) = \sqrt{4} = 2$

$= j(2)$

$(j \circ h)(4) = 2 * 2 + 1 = 5$ #

③ $(h \circ h)(\cancel{x}) \xrightarrow{} 16$ $= h(h(16))$ $\qquad h(16) = \sqrt{16}$

$= h(4)$ $\qquad = 4$

$= \sqrt{4} = 2$

$\therefore (h \circ h)(16) = 2$ #

 ④ $(j \circ j)(-8) \longrightarrow$ **H.W**

أفكر إذا كان $j(x) = 2x+1$, $h(x) = \sqrt{x}$

هل توجد أي قيم للمتغير x لا يمكن حساب $(h\circ j)(x)$ عندها ؟

الحل :
$$(h\circ j)(x) = h(j(x)) = h(2x+1)$$
$$= \sqrt{2x+1}$$

∴ يجب تعويض قيم x بحيث تجعل ما تحت الجذر موجب القيمة

* يمكن إيجاد قاعدة الاقتران المركب بدلالة المتغير x ثم حساب قيمة الاقتران المركب عند أي قيمة عددية معطاة

Ex : إذا كان $g(x) = 2x^2-6$ & $f(x) = 3x+5$ فأجد قاعدة كل من $(f\circ g)(x)$ و $(g\circ f)(x)$ ثم أجد $(f\circ g)(-2)$ و $(g\circ f)(0)$

الحل :

① $$(f\circ g)(x) = f(g(x))$$
$$= f(2x^2-6)$$
$$= 3(2x^2-6)+5$$
$$= 6x^2-18+5$$
$$\therefore (f\circ g)(x) = 6x^2-13$$

② $$(g\circ f)(x) = g(f(x))$$
$$= g(3x+5)$$
$$= 2(3x+5)^2-6$$
$$= 2(9x^2+30x+25)-6$$
$$= 18x^2+60x+50-6$$
$$\therefore (g\circ f)(x) = 18x^2+60x+44$$

③ $$f\circ g(-2) = 6(-2)^2-13$$
$$= 6*4-13$$
$$= 24-13$$
$$= 11$$

④ $$(g\circ f)(0) = 18*0+60*0+44$$
$$= 0+0+44$$
$$= 44$$

* نستنتج أن تركيب الأقترانات ليست عملية تبديلية حيث :

$$(f\circ g)(x) \neq (g\circ f)(x)$$

أتحقق من فهمي

إذا كان $g(x)=2-3x$ و $f(x)=x^2+4x$ فأجد قاعدة كل من $(f\circ g)(x)$ و $(g\circ f)(x)$ ثم اجد $(f\circ g)(3)$ و $(g\circ f)(-1)$

sol :- $(f\circ g)(x) = f(g(x))$

$= f(2-3x) = (2-3x)^2 + 4(2-3x)$

$= (2)^2 - 2(2)(3x) + (3x)^2 + 8 - 12x$

$= 4 - 12x + 9x^2 + 8 - 12x$

$= 4 - 12x + 9x^2 + 8 - 12x$

$\therefore (f\circ g)(x) = 9x^2 - 24 + 12$

$(g\circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2+4x)$

$= 2 - 3(x^2+4x)$

$= 2 - 3x^2 - 12x$

$(g\circ f)(x) = -3x^2 - 12x + 2$

$(f\circ g)(3) = 9(3)^2 - 24(3) + 12$

$= 81 - 72 + 12$

$= 9 + 12$

$= 21$

$(g\circ f)(-1) =$

$-3(-1)^2 - 12(-1) + 2$

$= -3 + 14$

$= 11$

تفكيك الاقترانات المركبة

لو أعتبرنا الأقتران $f(x)=\sqrt{4x^2+9}$ أقترانا "مركبا"

داخلي $h(x) = 4x^2+9$

خارجي $g(x) = \sqrt{x}$

لو أعدنا تركيب الأقتران

$$(g\circ h)(x) = g(h(x)) = g(4x^2+9)$$
$$= \sqrt{4x^2+9}$$

وهكذا نعود للأقتران $f(x)$

Ex : أجد الأقترانين $f(x)$ & $g(x)$ ، بحيث يمكن التعبير عن كل من الاقترانين الآتيين بالصورة $h(x) = f(g(x))$

① $h(x) = \dfrac{1}{x+3}$

$g(x) = x+3$ & $f(x) = \dfrac{1}{x}$

خطوات تفكيك الأقتران المركب

① حدد الأقتران الداخلي بحيث يجب أن يحتوي على المتغير x

② استبدل ما فرضته للأقتران الداخلي ب x وشكّل الأقتران الخارجي

ملاحظات

① يمكن أن يكون هناك عدة حلول صحيحة

② يجب أن يكون مجال الأقتران المركب مجموعة جزئية من الأقتران الداخلي

② $h(x) = (2+x^2)^{10}$

$g(x) = 2+x^2$

$f(x) = x^{10}$

أتحقق من فهمي

أجد الاقترانين $f(x)$ و $g(x)$ بحيث يمكن التعبير عن كلٍّ من الاقترانين الآتيين بالصورة $h(x) = f(g(x))$

a) $h(x) = 4x^2 - 1$

$h(x) = (2x)^2 - 1$

$g(x) = 2x$ و $f(x) = x^2 - 1$

b) $h(x) = \dfrac{2}{(x+2)^2} + 5$

عند تشكيل الاقتران احرص على أن تكون x ضمن الاقتران الداخلي

$g(x) = x+2$ و $f(x) = \dfrac{2}{x^2} + 5$

... إذا أردت النجاح و التفوق فعليك بالإجتهاد و المذاكرة فما خاب من ذاكر دروسه ..

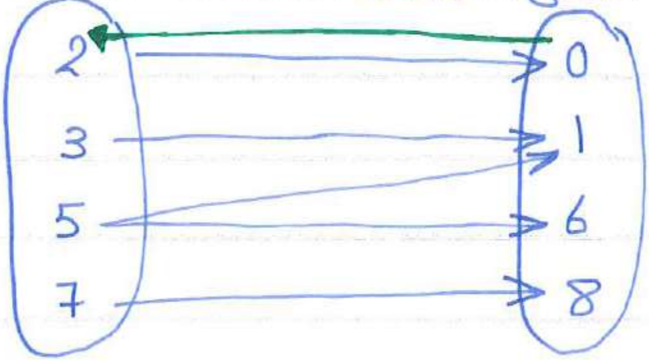
واجتهد ♡

الأقتران العكسي

* العلاقة و العلاقة العكسية لها *

* العلاقة تربط بين مجموعتين من العناصر أحداهما تسمى المجال والأخرى تسمى المدى

المجال (A)



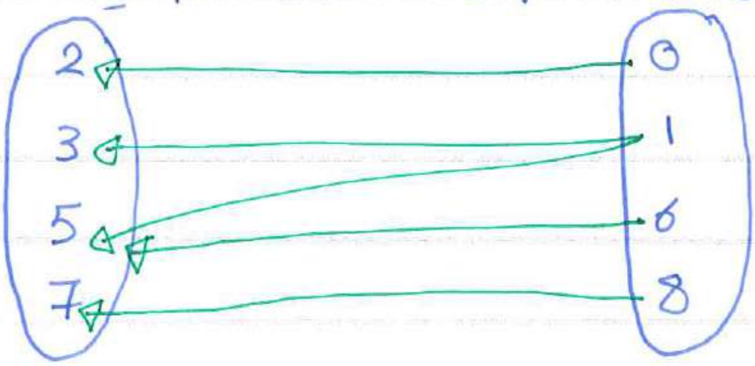
المدى (B)

يمكن ايجاد علاقة عكسية للعلاقة السابقة بعكس المجموعات

حيث يصبح المجال ← مدى العلاقة الجديدة

و المدى ← مجال العلاقة الجديدة

المدى (A)

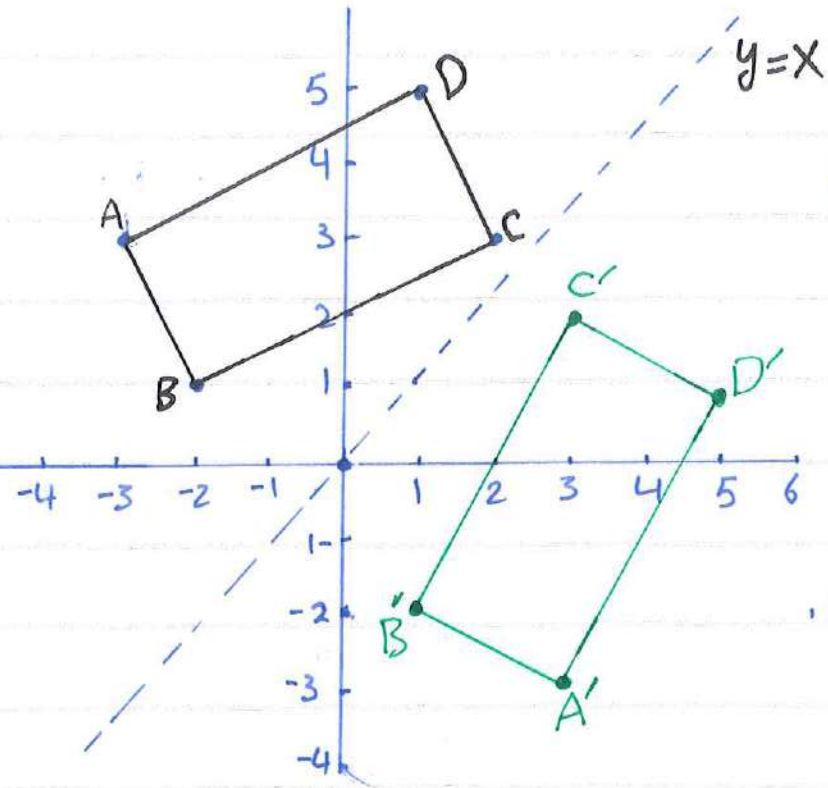


المجال (B)

* وعلى المستوى الأحداثي عند عكس العلاقة يتم التبديل بين المساقط (x)، (y) على النحو الآتي

$$\underset{x\ \ \ y}{(a, b)} \longrightarrow \underset{y\ ,\ x}{(b, a)}$$

Ex : تمثل الأزواج المرتبة للعلاقة $\{(-3,3)(-2,1),(2,3),(1,5)\}$ احداثيات رؤوس المستطيل ABCD . أجد العلاقة العكسية ، ثم أمثل بيانياً العلاقة والعلاقة العكسية على المستوى الإحداثي نفسه .

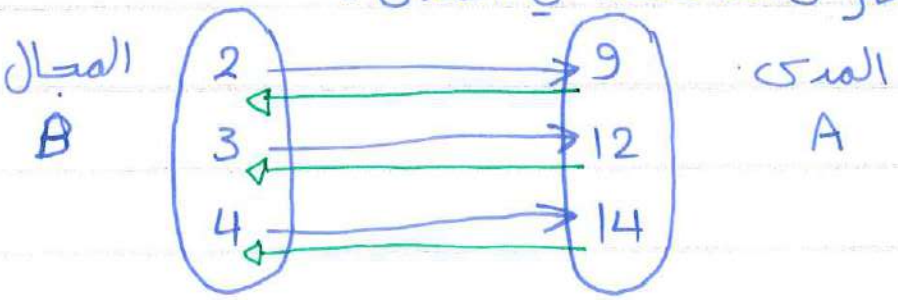


العلاقة العكسية

$\{(3,-3),(1,-2),(3,2)(5,1)\}$

* الأقتران & الأقتران العكسي *

* الأقتران : نوع خاص من العلاقات حيث انه علاقة تربط كل عنصر في المجال بعنصر واحد فقط في المدى .



* عند عكس الأقتران ستنتج علاقة عكسية له ، فإذا كانت هذه العلاقة العكسية تحقق شرط الأقتران تسمى بالأقتران العكسي .

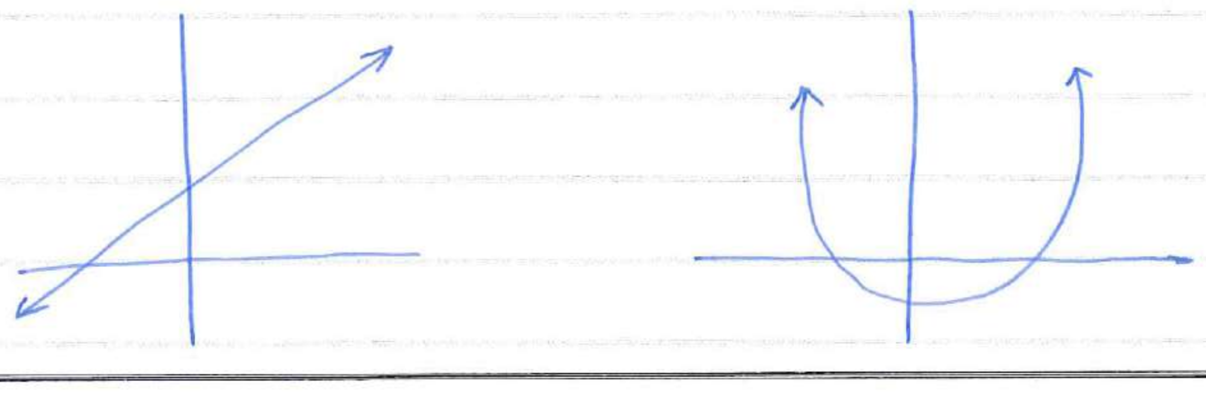
* يرمز للأقتران العكسي للأقتران f(x) بالرمز : $\boxed{f^{-1}(x)}$

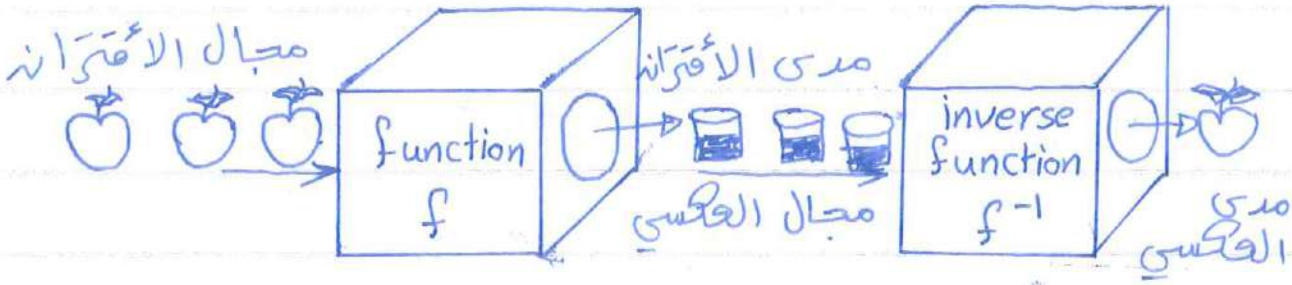
* يُسمى الأقتران الذي تكون علاقته العكسية أقترانًا" أيضًا" بأسم "أقتران واحد لواحد" لأن كل عنصر في المجال يرتبط بعنصر واحد فقط في المدى وكل عنصر في المدى يرتبط بعنصر واحد فقط في المجال

* سؤال أي من الأقترانات الآتية هو أقتران واحد لواحد

$2 \rightarrow 5$	$2 \rightarrow 7$
$0 \rightarrow 7$	$3 \rightarrow 5$
$1 \rightarrow 7$	$6 \rightarrow 1$
$3 \rightarrow 8$	$8 \rightarrow 6$
أقتران ليس واحد لواحد لأنه يوجد عنصر في المدى أرتبط بعنصرين في المجال	أقتران واحد لواحد

* يمكن معرفة إذا ما كان الأقتران يمثل أقتران واحد لواحد أم لا يمثل من الرسم البياني عن طريق أختبار الخط الأفقي فإذا قطع الخط الأفقي منحنى الأقتران في نقطة واحدة فقط فإنه أقتران واحد لواحد ، و إذا قطعه في أكثر من نقطة فإنه لا يمثل أقتران واحد لواحد





* بناءً على كل مما سبقه نستنتج أنه :

← مدى الاقتران $f(x)$ هو مجال الاقتران العكسي له $f^{-1}(x)$

لذلك كثيراً ما نستخدم الاقتران العكسي في تحديد مدى بعض الاقترانات مثل الاقتران النسبي .

Ex : أجد الاقتران العكسي $f^{-1}(x)$ لكل اقتران مما يأتي

① $f(x) = 4(x-5)$

sol: $x = 4(y-5)$

$$\frac{x}{4} = y - 5$$

$$\frac{x}{4} + 5 = y$$

$$f^{-1}(x) = \frac{x}{4} + 5$$

الخطوات

① استبدل

$f(x) \to x$

$x \to y$

② اجعل y موضوعاً للقانون

③ أستبدل

$y \to f^{-1}(x)$

② $f(x) = 3x^2 - 4 \ , \ x \geq 0$

sol: $x = 3y^2 - 4$

$$3y^2 = x + 4$$

$$y^2 = \frac{x+4}{3} \to y = \sqrt{\frac{x+4}{3}} \to f^{-1}(x) = \sqrt{\frac{x+4}{3}}$$

أتحقق من فهمي

أجد الاقتران العكسي لكل من الاقترانين الآتيين :

a) $h(x) = 7x + 5$

sol: $x = 7y + 5 \rightarrow 7y = x - 5$

$\rightarrow y = \dfrac{x-5}{7} \rightarrow h^{-1}(x) = \dfrac{x-5}{7}$

b) $g(x) = x^2 + 2 , \ x \geq 0$

sol: $x = y^2 + 2 \rightarrow y^2 = x - 2$

$\rightarrow y = \sqrt{x-2} \rightarrow g^{-1}(x) = \sqrt{x-2}$

* من خصائص أي اقترانين متعاكسين أن كلاً منهما يعكس أثر الآخر ، لذا ينتج من تركيبهما الاقتران الذي يبقي كل عنصر في مجالهما على حالة ، وهو الاقتران المحايد الذي يربط كل عنصر بنفسة و قاعدتة هي $f(x) = x$

* يكون $f^{-1}(x)$ الاقتران العكسي للاقتران $f(x)$ ، إذا وفقط إذا كان :

$(f \circ f^{-1})(x) = x$ لجميع قيم x في المجال $f^{-1}(x)$ و

$(f^{-1} \circ f)(x) = x$ لجميع قيم x في المجال $f(x)$.

$$5 \longrightarrow \boxed{f(x)} \xrightarrow{7} \boxed{f^{-1}(x)} \xrightarrow{5}$$

$$5 \longrightarrow \boxed{f(f^{-1}(x))} \xrightarrow{5}$$

الاستاذ : رعد الخمايسة

الهاتف : 0775052929

* إذا أعطى السؤال أقترانين $f(x)$ ، $g(x)$ وطلب إثبات أن كل منهما هو أقتران عكسي للآخر نستخدم قاعدة التركيب لتكوين $(g \circ f)(x)$ ، $(f \circ g)(x)$

حيث يجب أنه ينتج في كل من الحالتين $\boxed{x}$

لأن : $(f \circ f^{-1})(x) = x$ & $(f^{-1} \circ f)(x) = x$

* تذكر : الأقتران المحايد هو $f(x) = x$

Ex : أثبت أن كلاً من الأقترانين $f(x) = \frac{x+5}{3}$ وَ $g(x) = 3x-5$ هو أقتران عكسي للآخر بإيجاد

① $(f \circ g)(x)$ ② $(g \circ f)(x)$

sol ① $(f \circ g)(x) = f(g(x))$

$= f(3x-5)$

$= \frac{\cancel{3}x - \cancel{5} + \cancel{5}}{\cancel{3}} = x$

أقتران محايد

② $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

$= g\left(\frac{x+5}{3}\right)$

$= 3\left(\frac{x+5}{3}\right) - 5$

$= x + 5 - 5 = x$

* بما أن $(g \circ f)(x) = (f \circ g)(x) = x$ فإن $f(x)$ & $g(x)$ كل منهما عبارة عن أقتران عكسي للآخر

* الأقتران الجذري *

$\sqrt[n]{}$

إذا كان دليل الجذر زوجي $\sqrt{}$ ، $\sqrt[4]{}$ يكون مجاله

ما تحت الجذر ≥ 0

لأنه لا يوجد جذر زوجي

للأعداد السالبة كعدد حقيقي

ويكون مداه : $y \geq 0$

لأنه ناتج الجذر الزوجي

بناءً على المجال دائماً

موجب أو صفر

إذا كان دليل الجذر فردي $\sqrt[5]{}$ ، $\sqrt[3]{}$

يكون المجال $\mathbb{R}$

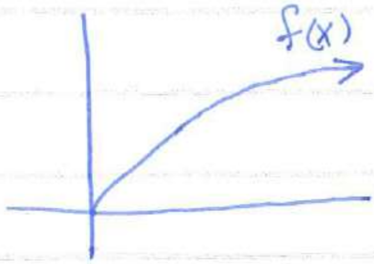
المدى $\mathbb{R}$

$+ \quad - \quad 0$

* تمثيل الأقتران $f(x) = \sqrt{x}$ بيانياً

المجال : $x \geq 0$

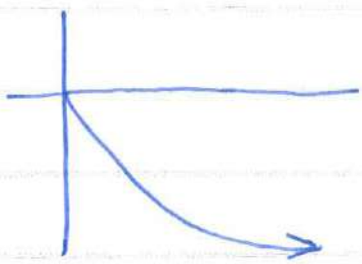
المدى : $y \geq 0$



* تمثيل الأقتران $f(x) = -\sqrt{x}$ بيانياً

المجال : $x \geq 0$

المدى : $y \leq 0$



Ex : أجد مجال الأقتران $f(x) = \sqrt{2x-6}$ ومداه ، ثم أجد الأقتران العكسي له

الحل : المجال : ما تحت الجذر ≥ 0

$2x - 6 \geq 0$

$2x \geq 6$

$x \geq 3$ $\{x \mid x \geq 3\}$ أو $x \in [3, \infty)$

∴ المدى $\{y \mid y \geq 0\}$ أو $y \in [0, \infty)$

الأقتران العكسي $f(x) = \sqrt{2x-6}$

$x = \sqrt{2y-6}$

$x^2 = 2y - 6 \rightarrow 2y = x^2 + 6$

$\rightarrow y = \dfrac{x^2+6}{2}$ $\boxed{\therefore f^{-1}(x) = \dfrac{x^2+6}{2}}$

أتحقق من فهمي

أجد مجال $g(x) = \sqrt{3x+12} - 2$ ومداه ، ثم أجد الأقتران العكسي له

الحل :- ما تحت الجذر ≥ 0

$3x + 12 \geq 0$

$3x \geq -12$

$x \geq -4$ المجال ← $\{x \mid x \geq -4\} = [-4, \infty)$

المدى : $y \geq 0 - 2$

$\{y \mid y \geq -2\} = [-2, \infty) \leftarrow y \geq -2$

الأقتران العكسي

$x = \sqrt{3y+12} - 2$

$x + 2 = \sqrt{3y+12}$

$(x+2)^2 = 3y + 12 \rightarrow \dfrac{(x+2)^2 - 12}{3} = y$

* سؤال : إذا كان الأقتران $f(x)$ مجالة هو $\{x \mid x \neq 2\}$ ومداة هو $\{y \mid y \geq 1\}$ جد كل من مجال ومدى الأقتران العكسي لـ $f(x)$ ؟

الحل : مجال $f^{-1}(x)$ = مدى $f(x) = [1, \infty)$

مدى $f^{-1}(x)$ = مجال $f(x) = \mathbb{R}-\{2\}$

* سؤال تميز

مجال الأقتران $f(x) = \sqrt{x^2 + 5x + 6}$

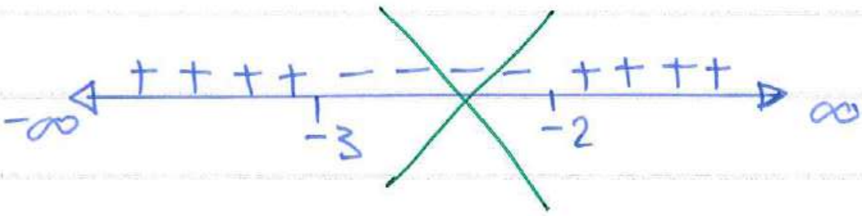
الحل :

$$x^2 + 5x + 6 = 0$$

$$(x+3)(x+2) = 0$$

$$x + 3 = 0 \longrightarrow \boxed{x = -3}$$

$$x + 2 = 0 \longrightarrow \boxed{x = -2}$$



المجال :

$$(-\infty, -3] , [-2, \infty)$$

المتتاليات

تعريف : المتتالية هي مجموعة من الأعداد تتبع ترتيب معيناً ، ويسمى كل عدد فيها الحد

* تعد المتتالية اقتراناً مجاله مجموعة الأعداد الطبيعية أو مجموعة جزئية منها ، ومداه مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية .

رتبة الحد ← 1   2   3   4   5 ----- n

حدود المتتالية ← 1   3   5   7   9 ...... $T(n)$

$1 \xrightarrow{+2} 3 \xrightarrow{+2} 5 \xrightarrow{+2} 7 \xrightarrow{+2} 9$

$$\text{المجال} \longrightarrow \boxed{T(n)} \longrightarrow \text{المدى}$$

أعداد طبيعية ← المجال ، المدى ← أعداد حقيقية

Ex : أجد الحدود الثلاثة التالية لكل متتالية مما يأتي

① $2 \xrightarrow{+3} 5 \xrightarrow{+3} 8 \xrightarrow{+3} 11$, $\boxed{14}$, $\boxed{17}$, $\boxed{20}$

② $3 \xrightarrow{\times 2} 6 \xrightarrow{\times 2} 12 \xrightarrow{\times 2} 24$, $\boxed{48}$, $\boxed{96}$, $\boxed{192}$

③ $80 \xrightarrow{-7} 73 \xrightarrow{-7} 66 \xrightarrow{-7} 59$, $\boxed{52}$, $\boxed{45}$, $\boxed{38}$

④ $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \boxed{\frac{1}{243}}, \boxed{\frac{1}{729}}, \boxed{\frac{1}{2187}}$

$\times\frac{1}{3}$ $\times\frac{1}{3}$ $\times\frac{1}{3}$

أتحقق من فهمي

أجد الحدود الثلاثة التالية لكل متتالية مما يأتي :

a) $\frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \frac{9}{2}, \frac{11}{2}, \ldots, \boxed{\frac{13}{2}}, \boxed{\frac{15}{2}}, \boxed{\frac{17}{2}}$

$+\frac{2}{2}$ $+\frac{2}{2}$ $+\frac{2}{2}$

b) $5, 10, 20, 40, \boxed{80}, \boxed{160}, \boxed{320}$

$\times 2$ $\times 2$ $\times 2$

c) $150, 141, 132, 123, \boxed{114}, \boxed{105}, \boxed{96}$

-9 -9 -9

d) $400, 200, 100, 50, \boxed{25}, \boxed{12.5}, \boxed{6.25}$

$\div 2$ $\div 2$ $\div 2$

* الحد العام لمتتالية هو الذي يمثل العلاقة بين أي حد ورتبته ويرمز له بالرمز $T(n)$

يسهل الحد العام إيجاد أي حد في المتتالية باستعمال رتبته .

الحد الهام

أعداد طبيعية $\longrightarrow \boxed{T(n)} \longrightarrow$ أعداد حقيقية

$$T(n) = 5n+1$$

$n: \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \;, \ldots\ldots, \; 1000$

$6 \quad 11 \quad 16 \quad 21 \;, \ldots\ldots, \; \boxed{}$

$+5 \quad +5 \quad +5$

$$T(1000) = 5(1000) + 1 = 5001$$

Ex: أبين إذا كان المقدار الجبري المعطى بجانب كل متتالية مما يأتي يمثل حداً "عاماً" لها أم لا ، ثم أصنف المتتاليات إلى خطية أو تربيعية أو تكعيبية أو أسية ثم أجد الحد الخامس والسبعين في كل منها

① $4, 7, 10, 13, \ldots\ldots, 3n+1$

$n=1 \longrightarrow T(1) = 3(1)+1 = 4$ ✓ نعم الحد الهام

$n=2 \longrightarrow T(2) = 3(2)+1 = 7$ ✓ لهذه المتتالية

$n=3 \longrightarrow T(3) = 3(3)+1 = 10$ ✓ هو المعطى $3n+1$

$n=4 \longrightarrow T(4) = 3(4)+1 = 13$ ✓ وتصنف متتالية

$n=75 \longrightarrow T(75) = 3(75)+1 = 226$ خطية

② $4, 7, 12, 19, \ldots\ldots, n^2+3$ نعم الحد الهام لهذه

$n=1 \longrightarrow T(1) = (1)^2+3 = 4$ ✓ المتتالية هو المعطى n^2+3

$n=2 \longrightarrow T(2) = (2)^2+3 = 7$ ✓ وتصنف متتالية تربيعية

$\vdots \quad n=75 \quad T(75) = (75)^2+3 = 5628$

③ $2, 9, 28, 65, \ldots, n^3+1$ متتالية تكعيبية

$n=1 \rightarrow T(1)=(1)^3+1 = 2$ ✓ ∴ نعم الحد العام لهذه

$n=2 \rightarrow T(2)=(2)^3+1 = 9$ ✓ المتتالية هو المعطى

$n=3 \rightarrow T(3)=(3)^3+1 = 28$ ✓ (n^3+1)

$n=4 \rightarrow T(4)=(4)^3+1 = 65$ ✓

$n=75 \rightarrow T(75)=(75)^3+1 = 421876$

④ $2, 4, 8, 16, \ldots, 2^n$ متتالية أسية

$n=1 \rightarrow T(1) = 2^1 = 2$ ✓

$n=2 \rightarrow T(2) = 2^2 = 4$ ✓ ∴ نعم الحد العام لهذه

$n=3 \rightarrow T(3) = 2^3 = 8$ ✓ المتتالية هو المعطى (2^n)

$n=4 \rightarrow T(4) = 2^4 = 16$ ✓

$n=75 \rightarrow T(75) = 2^{75} = 3.78 * 10^{22}$

* أكتشاف الحد العام للمتتاليات .

بصورة عامة يتم إيجاد الحد العام للمتتالية بالتجريب والاختبار لكن هذه بعض الملاحظات للمساعدة :

1) رقم حدود المتتالية أولاً

2) ادرس حدود المتتالية على الترتيب الآتي

← هل مقدار الزيادة أو النقصان بين كل حدين متتاليين ثابتة ؟

إذا كانت الإجابة نعم ، فإن المتتالية خطية وقاعدتها

$$T(n) = \text{الحد الأول} \pm (\text{مقدار الزيادة})(n-1)$$

Ex : أوجد الحد العام للمتتالية

$n: 1, 2, 3, 4$

$12, 15, 18, 21, \ldots$

$+3 \quad +3 \quad +3$

$$T(n) = 12 + 3(n-1)$$

$$= 12 + 3n - 3 = 9 + 3n$$

← إذا كان مقدار الزيادة أو النقصان غير ثابتة، لكن مقدار الزيادة أو النقصان التي تليها ثابتة فإن المتتالية تربيعية ويتم أستنتاجها بالتجريب والاختبار

Ex أوجد الحد العام للمتتالية

$n: 1, 2, 3, 4, 5$

$0, 3, 8, 15, 24, \ldots$

$+3 \quad +5 \quad +7 \quad +9$

$+2 \quad +2 \quad +2$

$$T(n) = n^2 - 1$$

← إذا كانت النسبة بين كل حدّين متتاليين ثابتة فإن المتتالية أسية وصورتها بشكل عام :

$$T(n) = a(b)^n$$

حيث (b) هو مقدار النسبة الثابتة .

ويتم إيجاد (a) من خلال تعويض أحد الحدود في المتتالية ويفضل أن يكون الأول حيث $\boxed{n=1}$

Ex

النسبة ثابتة

∴ متتالية أسية

n: 1 2 3 4

$16 \xrightarrow{\times 2} 32 \xrightarrow{\times 2} 64 \xrightarrow{\times 2} 128, \ldots$

$T(n) = a(b)^n$

$16 = a(2)^1 \Longrightarrow \boxed{a = 8}$

$\therefore T(n) = 8(2)^n$

← ما غير ذلك لا بد من التجريب والاختبار مع وجود بعض الملاحظات المساعدة خلال حل الأمثلة

Ex : أوجد الحد العام لكل متتالية مما يأتي

1 2 3 4 5

① $5 \xrightarrow{+7} 12 \xrightarrow{+7} 19 \xrightarrow{+7} 26 \xrightarrow{+7} 33, \ldots$

$\therefore T(n) = 5 + 7(n-1)$

$T(n) = 7n - 2$

1 2 3 4 5

② $5, 8, 13, 20, 29, \ldots$

$3 \quad 5 \quad 7 \quad 9$

$2 \quad 2 \quad 2 \longrightarrow$ متتالية تربيعية

$T(n) = n^2 + 4$

1 2 3 4 5

③ $0, 7, 26, 63, 124, \ldots$

$T(n) = n^3 - 1$

(4) $11 \;,\; 12.1 \;,\; 13.31 \;,\; 14.641 \;,\; \dots$

$\times 1.1 \quad \times 1.1 \quad \times 1.1$

النسبة ثابتة ← متتالية أسية

$b = 1.1$

$T(n) = a\,b^n$

$T(n) = a\,(1.1)^n$

$\frac{11}{1.1} = \frac{a\,(1.1)}{1.1} \Rightarrow \boxed{a = 10} \qquad T(n) = 10\,(1.1)^n$

نهاية الوحدة الأولى