منهاجي
متعة التعليم الهادف

ODROS
ادرس

امتحانات وأوراق عمل | اجابات التمارين | اجابات الامثلة

الرياضيات العلمي

المستوى الثالث / الفصل الأول

الوحدة الأولى

التفاضل

إعداد

أ. عبدالله ملحم - أ. عبدالله السلوادي

الأستاذ عبدالله السلوادي • الأستاذ عبدالله ملحم

طلابنا الأعزاء

- تعلمنا في الأول الثانوي الاشتقاق عند نقطة باستخدام التعريف وقواعد بسيطة للاشتقاق حيث كانت المشتقة تمثل (ميل المماس).....

- في هذه الوحدة سوف نتعلم اشتقاق جميع الاقترانات .

- سنتعلم قابلية الاشتقاق ومتى يكون الاقتران قابلاً للاشتقاق .

- سنتعلم اشتقاق القواعد أكثر من مرة (المشتقات العليا) .

- سنتعلم تفسير المشتقة (حياتياً , هندسياً , فيزيائياً) .

منهاجي
متعة التعليم الهادف

الفهـــــــرس

الاشتقاق

قواعد الاشتقاق

قاعـــــــدة رقم 1

$f(x) = a \longrightarrow f'(x) = 0$

مثـــال : جد المشتقة الأولى لكل من التالية

1. $f(x) = 5$
2. $f(x) = -7$
3. $f(x) = \frac{1}{2}$
4. $f(x) = \sqrt{8}$
5. $f(x) = \pi$
6. $f(x) = e$
7. $f(x) = Ln2$
8. $f(x) = Sin\frac{\pi}{2}$
9. $f(x) = e^3$

قاعـــــــدة رقم 2

$f(x) = x^n \longrightarrow f'(x) = nx^{n-1}$

مثـــال : جد المشتقة الأولى لكل من التالية

1. $f(x) = x^5$
2. $f(x) = x^{-5}$
3. $f(x) = x^{\frac{5}{3}}$
4. $f(x) = x^{\frac{-7}{2}}$
5. $f(x) = \frac{1}{x^8}$

---

6. $f(x) = \sqrt[5]{x^2}$ ....

---

7. $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^4}}$ ....

---

8. $f(x) = \frac{1}{\sqrt[5]{x}}$ ....

---

9. $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ $x = 8$

قاعـــــــدة رقم 3

$f(x) = ag(x) \longrightarrow f'(x) = ag'(x)$

(ثابت x اقتران)′ = الثابت كما هو x مشتقة الاقتران

مثـــال : جد المشتقة الأولى لكل من التالية

1. $f(x) = 3x^5$
2. $f(x) = 7x^4$
3. $f(x) = 2x^{-5}$
4. $f(x) = -3x^{-8}$
5. $f(x) = \frac{1}{2}x^8$
6. $f(x) = 3\sqrt[3]{x}$
7. $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x}}$
8. $f(x) = 5x$

تعميـم $f(x) = ax \longrightarrow f'(x) = a$

9. $f(x) = 3x$
10. $f(x) = 10x$

قاعـــــــدة رقم 4

$f(x) = g(x) \pm h(x)$

$f'(x) = g'(x) \pm h'(x)$

مشتقـــة كــــل قاعـــدة لوحدهـــا

مثـــال : جد المشتقة الأولى لكل من التالية

1. $f(x) = x^5 + 4x^3 + 2x^2 + 1$

2. $f(x) = 5x^4 - 3x^2 - 4x + 7$

3. $f(x) = \frac{1}{2}x^8 - \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 5$

4. $f(x) = x^4 + \frac{1}{x^5} + \sqrt{x} + 2$

5. $f(x) = 2x^3 + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} + \frac{1}{x^4} + 1$

قاعـــــــدة رقم 5

مشتقة القوس مرفوع القوة

$$f(x) = (g(x))^n$$

$$f'(x) = n(g(x))^{n-1} * g'(x)$$

خطـوات حـل مشتقــة القوس مرفوع القوة :-

1. نزل القوة .
2. نقص من القوة (1) .
3. ضرب مشتقة ما داخل القوى .

مثـــال : جد المشتقة الأولى لكل من التالية

1. $f(x) = (x^2 + 1)^5$

2. $f(x) = (3x^2 + 1)^7$

3. $f(x) = (4x^3 + 2x)^{-8}$

4. $f(x) = (3x^3 + 1)^{\frac{5}{3}}$

5. $f(x) = (2x^3 + 1)^{\frac{-8}{3}}$

6. $f(x) = \sqrt[3]{x^2 + 2}$

7. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[4]{2x^3 + 5}}$

8. $f(x) = \sqrt[3]{x^2 + 4}$ $\quad x = 2$

9. $f(x) = \sqrt[5]{3x^2 + 5}$ $\quad x = 3$

قاعـــــــدة رقم 6

$$f(x) = \sqrt{g(x)} \rightarrow f'(x) = \frac{g'(x)}{2 * \sqrt{g(x)}}$$

بالكلمات : $\dfrac{\text{مشتقة ما داخل الجذر}}{2 * \text{الجذر نفسه}}$

مثـــــال : جد المشتقة الأولى لكل من التالية

1) $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 1}$

2) $f(x) = \sqrt{x^3 + 1}$ $\quad x = 2$

3) $f(x) = \sqrt{3x^2 + 1}$ $\quad x = 1$

4) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + 5x + 3}}$ $\quad x = 1$

قاعـــــدة رقم 7

مشتقـــــة الدائـــــري

- $f(x) = \sin g(x) \longrightarrow f'(x) = \cos g(x) * (g'(x))$
- $f(x) = \cos g(x) \longrightarrow f'(x) = -\sin g(x) * (g'(x))$
- $f(x) = \tan g(x) \longrightarrow f'(x) = \sec^2 g(x) * (g'(x))$
- $f(x) = \cot g(x) \longrightarrow f'(x) = -\csc^2 g(x) * (g'(x))$
- $f(x) = \sec g(x) \longrightarrow f'(x) = \sec g(x) \tan g(x) * (g'(x))$
- $f(x) = \csc g(x) \longrightarrow f'(x) = -\csc g(x) \cot g(x) * (g'(x))$

مثـــال : جد المشتقة الأولى لكل من التالية

1. $f(x) = \sin(3x^2 + 1)$

2. $f(x) = \cos(2x^4 + 5)$

3. $f(x) = \sin(\sqrt{3x^2 + 1})$

4. $f(x) = \cos(3x^2 + 1)^5$

5. $f(x) = \tan(3x^2 + 1)$

6. $f(x) = \tan\sqrt{3x^2 + 5}$

7. $f(x) = \cot(4x^2 + 1)$

8. $f(x) = \cot(2x^{-3} + 5)$

9. $f(x) = \sec(3x^5 + 2)$

10. $f(x) = \sec\left(\sqrt{x^2 + 1}\right)$

11. $f(x) = \csc(3x^2 + 1)$

12. $f(x) = \csc(5x^{-4} + 2)$

13. $f(x) = \cos(2x)$ $\quad x = \dfrac{\pi}{2}$

14. $f(x) = \sin 2x + \tan x$ $\quad x = \dfrac{\pi}{4}$

15. $f(x) = (\sin x + \cos x)^3$ $\quad x = \dfrac{\pi}{2}$

16. $f(x) = \sqrt{\tan x + \cos 2x}$ $\quad x = \dfrac{\pi}{4}$

17. $f(x) = \dfrac{\pi}{\sec x}$ $\quad x = \dfrac{\pi}{6}$

18. $f(x) = \dfrac{\pi}{\sin x}$ $\quad x = \dfrac{\pi}{4}$

ملاحظـــــــة

دائري مرفوع لقوة

خطوات الحل :

1- ارفع القوة

2- اشتق قوس مرفوع القوة

19 $f(x) = \sin^5 (3x)$

20 $f(x) = \cos^{-3} (2x + 1)$

21 $f(x) = \sec^7 (5x^2 + 1)$

22 $f(x) = \tan^8 (3x + 4)$

23 $f(x) = \cot^9 (4x - 5)$

24 $f(x) = \dfrac{1}{\sec^5 (2x + 1)}$

25 $f(x) = \dfrac{1}{\sin^6 (3x + 1)}$

منهاجي
متعة التعليم الهادف

مراجعة عامة

1 اللوغارتمات : هي صورة أخرى للأسس

مثـــــال :

- a $Log_2 32 = 5 \longleftrightarrow 2^5 = 32$
- b $Log_3 81 = 4 \longleftrightarrow 3^4 = 81$
- c $Log_5 125 = 3 \longleftrightarrow 5^3 = 125$

---

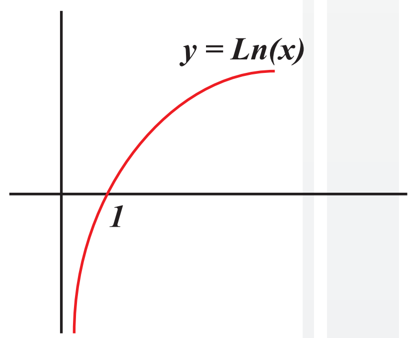
2 اللوغارتمات الطبيعية :

يسمى اللوغاريتم الذي اساسه e حيث $(e \cong 2,7)$ باللوغاريتم الطبيعي ويرمز له بالرمز (Ln)

---

3 معلومات هامة :

رسمته :



1. $Lne = 1$
2. $Ln(1) = 0$
3. $Ln(0) =$ غير معروف
4. $Ln($سالب$) =$ غير معروف

---

4 قوانين اللوغارتمات :

1. $Ln(xy) = Ln\, x + Lny$
2. $Ln\left(\frac{x}{y}\right) = Lnx - Lny$
3. $Ln(x)^n = nLn(x)$

قاعـــــــــدة رقم 8

مستند اللوغاريتم الطبيعي

$$f(x) = Ln\, g(x) \longrightarrow f'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}$$

بالكلمات $\dfrac{\text{مشتقة الحشوة}}{\text{ثبت الحشوة}}$

مثـــــال : جد المشتقة الأولى لكل من التالية

1. $f(x) = Ln\,(x^3 + 2)$

2. $f(x) = Ln\,(5x^4 + 3x^2 + 1)$

3. $f(x) = Ln\,(4x^3 + 2x)$ $\quad x = 1$

4. $f(x) = Ln\sqrt{x^2 + 1}$ $\quad x = 2$

5. $f(x) = Ln\,\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{5x^3 + 1}}\right)$

6. $f(x) = Ln\,\left((x^2 + 1)^5\,(x^3 + 1)^4\right)$

7. $f(x) = Ln\,\left(\dfrac{(x^3 + 1)^5}{\sqrt[3]{x^2 + 1}}\right)$

8. $f(x) = Ln\,\left(\dfrac{\sqrt[3]{x^2 + 4}}{\sqrt[5]{x^3 + 1}}\right)$

9. $f(x) = Ln\,\left(\dfrac{\sin 3x}{\cos 2x}\right)$

قاعـــــــــدة رقم 9

مستند الإقتران اللوغارتمي

$$f(x) = Log_a g(x) \longrightarrow f'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)\ Lna}$$

مثــــال : جد المشتقة الأولى لكل من التالية

1. $f(x) = Log_3\,(3x^2 + 1)$

....

....

....

....

2. $f(x) = Log_2\,(5x^4 + 2x^3)$

....

....

....

....

....

3. $f(x) = Log_4\,(sin2x + secx)$

....

....

....

....

4. $f(x) = Log_4\,(sin2x\ secx)$

....

....

....

....

5. $f(x) = Log_3\,(\frac{x^3}{\sqrt[3]{x^2 + sinx}})$

....

....

....

....

....

....

6. $f(x) = Log_3\,(\frac{1}{cot^4x})$

....

....

....

....

....

7. $f(x) = Log\,(\frac{x\sqrt{x-1}}{2})$

....

....

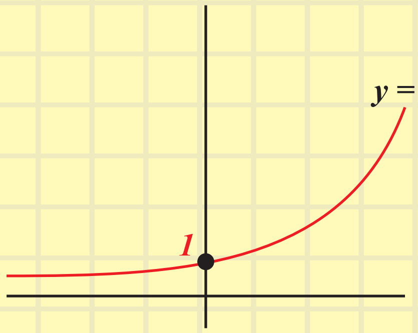
....

مراجعة الإقتران الأسي

- يسمى الإقتران المعرف بالصورة : $y = a^{g(x)}$ اقتران أُسي
- يسمى الإقتران المعرف بالصورة : $y = e^{g(x)}$ اقتران أُسي طبيعي

معلومات هامة :

رسمه : $y = e^x$



1. $e^0 = 1$
2. $e^n * e^m = e^{n+m}$
3. $\frac{e^n}{e^m} = e^{n-m}$
4. $(e^n)^m = e^{n*m}$
5. $e^{Lng(x)} = g(x)$
6. $Ln\, e^{g(x)} = g(x)$

منهاجي
متعة التعليم الهادف

قاعـــــــدة رقم 10

مشتقة الأسي الطبيعي

$$f(x) = e^{g(x)} \longrightarrow f'(x) = e^{g(x)} \ast g'(x)$$

بالكلمات : نفسه ⁎ مشتقة قوته

مثـــال : جد المشتقة الأولى لكل من التالية

1. $f(x) = e^{x^2+1}$

2. $f(x) = e^{3x^4+5}$

3. $f(x) = e^{\sqrt{3x^2+1}}$

4. $f(x) = e^{\sin(2x)}$

5. $f(x) = e^{\sec(x^2+1)}$

6. $f(x) = (e^{2x+1})^3$

7. $f(x) = e^{Ln(x^3+1)}$

8. $f(x) = e^{2Ln(x^5+6x)}$

9. $f(x) = e^3$

10. $f(x) = \pi^3$

11. $f(x) = 3^5$

12. $f(x) = e^{5+Ln(x^3+1)}$

13. $f(x) = e^{4+5\,Ln(x^2+1)}$

قاعـــــــدة رقم 11

مشتقة الاقتران الاسي :

$$f(x) = a^{g(x)} \longrightarrow f'(x) = a^{g(x)} * g'(x) * Lna$$

مثـــــال : جد المشتقة الأولى لكل من التالية

1. $f(x) = 5^{x^3+1}$

2. $f(x) = 3^{x^2+3x^2+1}$

3. $f(x) = 4^{\sin(2x)}$

4. $f(x) = 2^{\cos(4x)}$

5. $f(x) = 5^{\sqrt{x^2+1}}$

6. $f(x) = (3^{2x+1})^5$

7. $f(x) = \dfrac{3^{x^2+2x}}{3^{5x+1}}$

8. $f(x) = \dfrac{2^{3x+1}+1}{2^{x+4}}$

تمارين على دمج القواعد (11)

1 $f(x) = \sqrt{\sin x^3 + e^{3x}}$

2 $f(x) = (x^3 + Log\ 3x)^4$

3 $f(x) = \sin(2^{x^2} + Ln3x)$

4 $f(x) = e^{\sin x + \sqrt{x^2+1}}$

5 $f(x)\ Log_2\,(x^3 + \sin 5x)$

6 $f(x) = Ln\,(3x + \sec(x^2 + 1))$

7 $f(x) = 3^{\cos 2x} + (3x + 1)^5$

8 $f(x) = e^{\sin 2x} + \sin e^{2x}$

9 $f(x) = Log_3\,(4x\ Lnx)$

10 $f(x) = \tan^4(\sec(\cos x))$

قاعـــــــدة رقم 12

مشتقة الضرب :

$f(x) = g(x) * h(x)$

$f'(x) = g(x) * h'(x) + h(x) * g'(x)$

بالكلمات: اول * مشتقة الثاني+الثاني * مشتقة الأول

مثـــــال : جد المشتقة الأولى لكل من التالية

1. $f(x) = (x^2+1)(x^3 + 2)$

2. $f(x) = (3x+1)(x^5+2)$ $x = 1$

3. $f(x) = (x+1)(x-1)(x^3+4x)$

4. $f(x) = (x^2+4)\sin(3x^2+1)$

5. $f(x) = \sin 2x \tan x$ $x = \frac{\pi}{4}$

6. $f(x) = x\, e^{x^2+1}$

7 $f(x) = x^2\, 2^{(3x+1)}$

8 $f(x) = x^5\, Ln2x$

9 $f(x) = 3^{3x}\, Log_2(x+1)$

10 $f(x) = 2^{-x} \quad \cos \pi x$

11 $f(x) = 3^{3x+1}\, Log_2(3x-2)$

12 $y = e^x \sin(\cos x)$

قاعـــــــدة رقم 13

مشتقة القسمة:

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$$

$$f'(x) = \frac{h(g)\, g'(x) - g(x)\, h'(x)}{(h(x))^2}$$

بالكلمات: (المقام)(مشتقة البسط) - (البسط)(مشتقة المقام) / (المقام)^2

مثـــــال : جد المشتقة الأولى لكل من التالية

1) $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^3 + 2}$

2) $f(x) = \frac{3x^2+1}{2x+5}$ $\quad x = 1$

3) $f(x) = \frac{\sin(2x+1)}{(x^2+4)}$

4) $f(x) = \frac{x^4+x^2+1}{Ln(2x+3)}$

5) $f(x) = \frac{5^{3x+1}}{x^3+2}$

6) $f(x) = \frac{x^2 + 4}{Log_2(3x + 1)}$

7) $f(x) = \frac{\cos(4x+1)}{3^{2x+1}}$

8) $f(x) = \frac{3^{5x}}{Ln(3x-1)}$

قاعـــــــدة رقم 14

مشتقة $\left(\frac{\text{ثابت}}{\text{اقتران}}\right)$

$$f(x) = \frac{a}{g(x)} \longrightarrow f'(x) = \frac{-a * g'(x)}{(g(x))^2}$$

$\left(\frac{\text{ثابت}}{\text{اقتران}}\right)' = \frac{\text{(-الثابت)×(مشتقة المقام)}}{\text{(المقام)}^2}$

مثـــــال : جد المشتقة الأولى لكل من التالية

1) $f(x) = \frac{3}{x^2+1}$

....

....

2) $f(x) = \frac{-5}{2x+4}$

....

....

3) $f(x) = \frac{8}{x^2+1}$ $x = 1$

....

....

....

....

....

4) $f(x) = \frac{3}{x^2 + \sin(2x)}$

....

....

....

....

5) $f(x) = \frac{2}{x^3 + 2^{3x}}$

....

....

....

....

....

....

....

6) $f(x) = \frac{4}{2x + Log_3(4x)}$

....

....

....

....

....

....

7) $f(x) = \frac{5}{\sin 2x + Ln3x}$

....

....

....

....

....

....

....

....

قاعـــــــدة رقم 15

مشتقة ($\frac{\text{اقتران}}{\text{ثابت}}$)

$$f(x) = \frac{g(x)}{a} \longrightarrow f'(x) = \frac{g'(x)}{a}$$

بالكلمات : $\frac{\text{(مشتقة البسط)}}{\text{الثابت كما هو}}$

مثـــــال : جد المشتقة الأولى لكل من التالية

1) $f(x) = \dfrac{x^4 + x^2 + 3x + 1}{5}$

2) $f(x) = \dfrac{3x^3+4x+3}{3}$ $x=1$

3) $f(x) = \dfrac{5\sin 2x + 3^{2x+1}}{4}$

4) $f(x) = \dfrac{\sec 3x + Ln4x}{5}$

5) $f(x) = \dfrac{Log_3 2x + 2^{4x+1}}{7}$

تمارين متنوعة على الضرب والقسمة

مثـــال : إذا كان لدينا

$g(3) = 1 \ / \ g'(3) = -1 \ / \ f(3) = 5 \ / \ f'(3) = 2$

احسب ما يلي :-

1. $h(x) = g(x)\,f(x)$ فجـــد $h'(3)$

2. $h(x) = \dfrac{g(x)}{f(x)}$ فجـــد $h'(3)$

3. $h(x) = \dfrac{3}{g(x)}$ فجـــد $h'(3)$

4. $h(x) = \dfrac{f(x)}{2}$ فجـــد $h'(3)$

5. $h(x) = 3g(x) + \dfrac{2}{f(x)}$ فجـــد $h'(3)$

6. $h(x) = x^2 g(x) + f(x)$ فجـــد $h'(3)$

7. $h(x) = \sqrt{4g(x) + f(x)}$ فجـــد $h'(3)$

8. $h(x) = (2\,g(x) - x)^3$ فجـــد $h'(3)$

9. $h(x) = \sin(\pi\, g(x))$ فجـــد $h'(3)$

10. $(f * g)'(3)$

11 $\left(\frac{f}{g}\right)'(3) =$

12 $\left(\frac{f(3)}{g(3)}\right)' =$

13 $\left(\frac{f(3)}{g}\right)'(3) =$

14 $\left(\frac{g}{f(3)}\right)'(3)$

15 $\frac{d}{dx}\left(f(x) - 3g(x) + x^3\right)$ $\quad x = 3$

16 $\frac{d}{dx}\left(f(x)\, g(x)\right)$ $\quad x = 3$

17 $\frac{d}{dx}\left(\frac{3}{x^2 + f(x)}\right)$ $\quad x = 3$

18 $\frac{d}{dx}\left(e^{g(x)}\right)$ $\quad x = 3$

19 $\frac{d}{dx}\left(\ln x^2\ g(x)\right)$ $\quad x = 3$

20 $\frac{d}{dx}\left(\log_3\left(\frac{2}{\sqrt{f(x)}}\right)\right)$ $\quad x = 3$

21 $\frac{d}{dx}\left(3^{5f(x) - 3g(x)}\right)$

قاعـــــــدة رقم 16

مشتقة التركيب:

$(fog)'(x) = f'(g(x))\, g'(x)$

مثـــــال (1) : اذا كان

$f(x) = \frac{x^3+1}{2}$ ، $g(x) = \sqrt{x^2+1}$ جد $(fog)'(1)$

مثـــــال (2) : اذا كان

$f(x) = (x^2 - 8)^3$ ، $g(x) = \frac{9}{x^2+2}$ جد $(fog)'(1)$

مثـــــال (3) : اذا كان

$f(x) = \tan^3 x$ ، $g(x) = \frac{5}{3x-2}$ جد $(gof)'(\frac{\pi}{4})$

مثـــــال (4) : اذا كان

$f(x) = \frac{x^2+1}{x}$ ، $g(x) = \sqrt{x^2+3}$ جد $(fog)'(1)$

مثـــال (5) : اذا كان

$f(2) = 5 \qquad g(1) = 2$

$f'(2) = 3 \qquad g'(1) = -1$

احسب التالية

1. $(f \circ g)'(1)$

2. $\frac{d}{dx}\left(x^2 + (f \circ g)(x)\right) \quad , \quad x = 1$

3. $\frac{d}{dx}\left(\frac{2}{2x + (f \circ g)(x)}\right) \quad , \quad x = 1$

قاعـــــــــدة رقم 17

مشتقة السلسلة:

إذا كان $y \longrightarrow u \longrightarrow x$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$$

تسمى هذه القاعدة قاعدة السلسلة

مثـــــال (1) : اذا كان

$y = u^2 + 2u \qquad u = x^3 + 2x$

جـــد $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1}$

....

مثـــــال (2) : اذا كان

$y = 5u^2 - 2 \quad , \quad u = \sqrt{\sin x - \cos x}$

جد $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=\pi}$

....

مثـــــال (3) : اذا كان

$y = Ln\,(z+1) \qquad z = \sqrt{x^2 + 3}$

جـــد $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1}$

....

مثـــــال (4) : اذا كان

$y = \frac{8}{z^2+1} \qquad \frac{dz}{dx} = 2x+1$

جد $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1}$

....

قاعـــــــدة رقم 18

مشتقة المعادلة الوسيطية

إذا كان $y = g(t) \quad , \quad x = h(t)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dg}{dt}}{\frac{dh}{dt}}$$

مثـــال (1) :

جد $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=1}$ $\quad y = t^3 + 2t \quad , \quad x = t^2 + 1$

مثـــال (2) :

جد $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=1}$ $\quad y = \frac{t^3 + 3t}{5} \quad , \quad x = \sqrt{t^2 + 3}$

مثـــال (3) :

جد $\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}$ $\quad y = \sec^2 t - 1 \quad , \quad x = \tan t$

مثـــال (4) :

جد $\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=1}$ $\quad y = Ln(t^3 + 3) \quad , \quad x = (t^2 + 1)^3$

قاعـــــدة رقم 19 مشتقة الضمني

يسمى هذا النوع في الاشتقاق بالاشتقاق الصريح

1. $(x^3)'$ ....

2. $\frac{d}{dx}(x^3)$ ....

3. $\frac{d}{dy}(y^3)$ ....

4. $\frac{d}{dz}(z^3)$ ....

5. $\frac{d}{dm}(m^3)$ ....

6. $\frac{d}{dn}(n^3)$ ....

يسمى هذا النوع في الاشتقاق بالاشتقاق الضمني

1. $\frac{d}{dx}(y^3)$

2. $\frac{d}{dx}(z^3)$

3. $\frac{d}{dx}(m^3)$

4. $\frac{d}{dx}(n^3)$

مثـــال :

1. $\frac{d}{dx}(x^3+y^3+z^3)$

....

....

2. $\frac{d}{dy}(x^3+y^3+Z^3)$

....

....

3. $\frac{d}{dZ}(x^3+y^3+Z^3)$

....

....

ملاحظـــــــة

يستخدم الاشتقاق الضمني عندما لا يمكن ان نجعل (y) موضوع القانون:

مثـــال :جد $\frac{dy}{dx}$ لكل من التالية:

1. $\sqrt{y+x}=2x$

....

....

....

2. $\frac{1}{y+2}=x^2+2$

....

....

....

أمثـــــلة : جد $\frac{dy}{dx}$ لكل من التالية :

1 $y^3 + 2y^2 = x^3 + 5x + 2$

2 $y^3 + 3x^4 = x^2 y^4 + 5$

3 $y^3 x^2 - y^2 x^3 = 5$

4 $\sin x + \cos y = 2x - 2y$

5 $\sin(x+y) = y^3 \cos x$

6 $xy + e^y = e$

7 $2y^3 + 4xy = 6x^2 + 18$ عند $(1,2)$

8 $x^4 + 2x^2 y^3 = 17$ عند $x = 1$

9 $x + y = \ln(x^2 + y^2)$ عند $(1,0)$

تمارين

جد $\frac{dy}{dx}$ لكل من التالية:

1 $2xy - y^3 = 1$

2 $2x + 5y^2 = \sin y$

3 $\tan(x - y) = 2xy^2 + 1$

4 $(\sin \pi x + \cos \pi y)^2 = 2$

5 $x^2 + y^2 = \ln(x + y)^2$

6 $x + y = \cos(xy)$

7 $x = \sec \frac{1}{y}$

8 $\sin x \cos y = x^2 - 5y$

9 $(x^2 + y^2)^2 = 50(x^2 - y^2)$

10 $2y^2 + 2xy - 1 = 0 \quad , \quad x = \frac{1}{2}$

11 $2xy + \pi \sin y = 3\pi \quad , \quad y = \frac{\pi}{2}$

ملاحظــــــــة

عند اشتقاق الضمني تخلص من الكسور

1 جد $\frac{dy}{dx}$ $\quad \frac{y+1}{x}+\frac{x+1}{y}=1$

2 جد $\frac{dy}{dx}$ $\quad \frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=\frac{1}{10}$

تمارين

3 $\quad \frac{x}{y^2}+\frac{y^2}{x}=5$

ملاحظة : مشتقة $y = x^{g(x)}$

خطوات الحل : 1) ركب ln

2) اشتق ضمني

5 $y = x^x$

6 $y = x^{\sqrt{x}}$

7 $y = (x^2 + 3)^x$

8 $y = x^{\sin x}$

تمارين

2 $y = x^{\ln x}$

ملاحظة

يمكن استخدام اللوغارتمات لتبسيط القاعدة ثم إجراء الأشتقاقة

1 $y = \frac{(x-1)^2}{\sqrt{x^2+y}}$

2 $y = \frac{(x^4+1)\sqrt{x+2}}{2x^2+2x+1}$

3 $y = \sqrt{x^2(x+1)(x+2)}$

4 $y = \sqrt{\frac{x-1}{x^4+1}}$

تمارين

1 $y = \frac{(x+1)(x-2)}{(x-1)(x+2)}$

قاعـــــــدة رقم 20

المتشعب والمطلق

* نظرية: إذا كان $f(x)$ قابلاً للإشتقاق عند $(x = a)$
فإن $f(x)$ متصل عند $(x = a)$

* عكس النظرية : إذا كان $f(x)$ غير متصل عند $(x = a)$ فإن $f(x)$ غير قابلاً لاشتقاق عند $(x = a)$

في المشتق هنالك 3 أنواع من النقاط

- طرف: (المشتقة غ.م)
- عادية: (نشتق ثم نعوض)
- تحول: اتصال | اشتقاق

مثـــــال (1) : اذا كان

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + x & , -1 \leqslant x < 1 \\ 3x^2 - x & , 1 \leqslant x < 3 \\ 2x^2 + 5x - 9 & , 3 \leqslant x \leqslant 5 \end{cases}$$

جد كل في التالية:

1 $f'(2) =$

2 $f'(4)$

3 $f'(0)$

4 $f'(-1)$

5 $f'(5)$

6 $f'(1)$

7 $f'(3)$

مثـــال (2) : اذا كان

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & , \quad x \le 1 \\ x^2 - 2x & , \quad x > 1 \end{cases}$$

جد $f'(1)$

مثـــال (3) : اذا كان

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 3x & , \quad x \le 2 \\ 5x + 4 & , \quad x > 2 \end{cases}$$

جد $f'(2)$

مثـــال (4) : اذا كان

$$f(x) = \begin{cases} 2x^3 - 3 & , \quad x < -1 \\ 4x - x^2 & , \quad x \ge -1 \end{cases}$$

جد $f'(-1)$

مثـــال (5) : اذا كان

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & , x = 4 \\ 3 & , x \ne 4 \end{cases}$$

جد $f'(4)$

منهاجي
متعة التعليم الهادف

ملاحظة : المطلق

نعيد تعريف المطلق إلى صورة المتشعب ثم نتعامل مع النقطة حسب نوعها

مثـــــال (1) : اذا كان $f(x) = |3x - 6|$

جد $f'(2) , \ f'(3) , \ f'(1)$

مثـــــال (2) : اذا كان $f(x) = |x^2 - 4|$

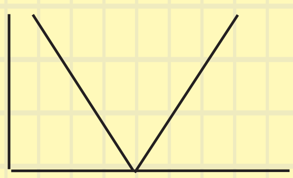
جـــد $f'(2) , \ f'(1)$

مثـــــال : $f(x) = x\,|x|$ **جد** $f'(0)$,

إنتبـــــه

عند اصفار المطلق **لوحده** (المشتقة غ.م)

(رأس حاد ، مدبب)



2

$f(x) = |x - 2|$

قابلية الاشتقاق

بعد ما تعلمنا المشتقة لجميع القواعد ، يجـــب الإنتباه إلى أن هناك بعد النقاط تكون المشتقة عندها غير موجودة وهي :

1. الأطراف المغلقة.
2. النسبي : أصفار المقام
3. الجذر الفردي : اصفار المقام للمشتقة
4. المتشعب ← عدم اتصال ← $f'_{+}(a) \neq f'_{-}(g)$
5. المطلق : 1) أصفار المطلق (لوحده)
   2) اذا كان هناك ضيوف نعيد تعريف ونبحث عند نقاط التحول

مثـــال : جد الإحداثي x لنقاط التي يكون عندها المشتقة غير موجودة لكل من التالية:

1) $f(x) = x^3 + 2x^2 + 1 \qquad x \in [1, 3]$

2) $f(x) = \dfrac{x+5}{x^2 - 4x}$

3) $f(x) = \dfrac{3x + -5}{x^3 - 9x}$

4) $f(x) = \dfrac{x+2}{(2x+1)^2 - 25}$

5) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & , x < 1 \\ x^3 + 2 & , x \geq 1 \end{cases}$

6) $f(x) = \begin{cases} 2x + 5 & , x \neq 1 \\ x^2 + 1 & , x = 1 \end{cases}$

تمارين

1 $f(x)=\sqrt[5]{x^2-2x}$

2 $f(x)=|x^2-2x+1|$

3 $f(x)=\sqrt{3x-6}+5$

4 $f(x)=\dfrac{x-8}{x^2-4x-5}$

5 $f(x)=\begin{cases} 2x^2+x & , x\neq 1 \\ 3x^2-1 & , x=1 \end{cases}$

6 $f(x)=|x^2-9|$

7 $f(x)=|x^2-2x|$

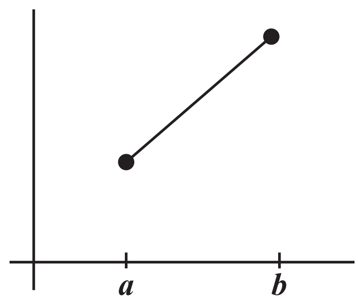
8 $f(x)=|x^2-3x+2|$

9 $f(x)=\sqrt[3]{x-3}$

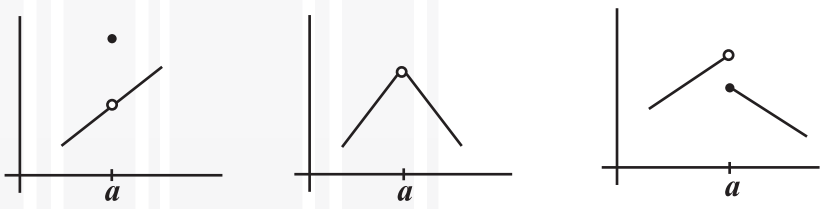
ملاحـــظـــــة

تكون (المشتقة غير موجودة) في الرسم في الأماكن التالية

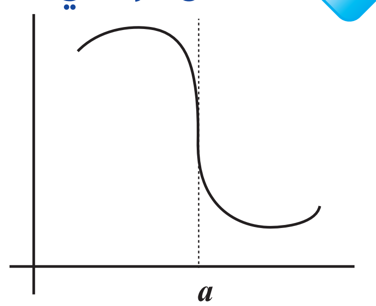
1 الأطراف المغلقة :



2 نقاط عدم الإتصال :

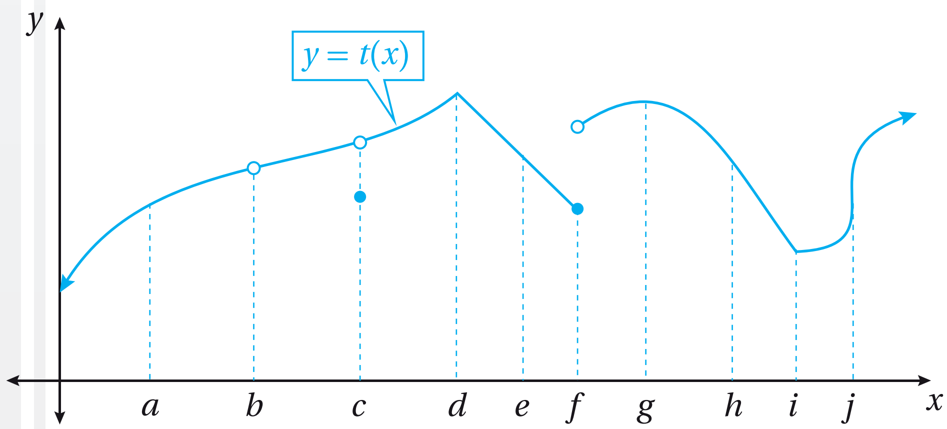


3 المماس الرأسي :

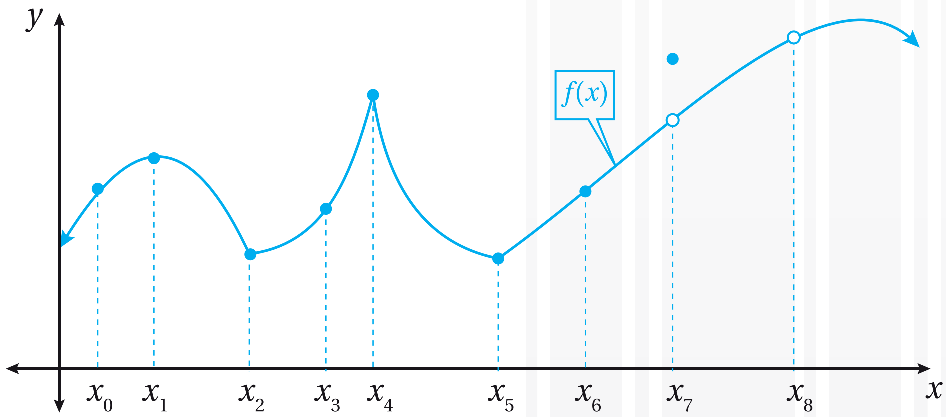


4 الرأس الحاد (المدبب) :

1 يُبيِّن الشكل الآتي منحنى الاقتران $t(x)$. أُحدِّد قِيَم x للنقاط التي لا يكون عندها الاقتران $t(x)$ قابلًا للاشتقاق، مُبرِّرًا إجابتي.

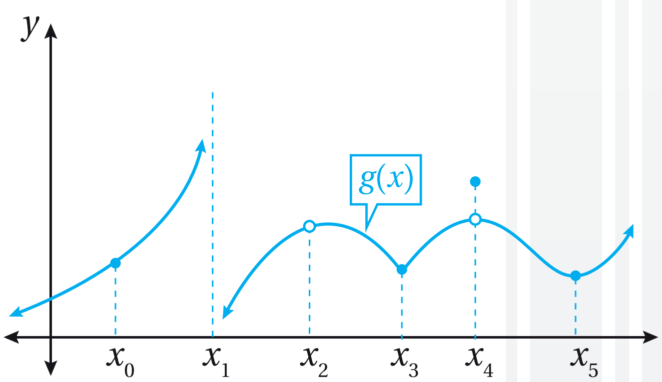


2 يُبيِّن الشكل الآتي منحنى الاقتران $f(x)$. أُحدِّد قِيَم x للنقاط التي **لا** يكون عندها الاقتران $f(x)$ قابلًا للاشتقاق، مُبرِّرًا إجابتي.

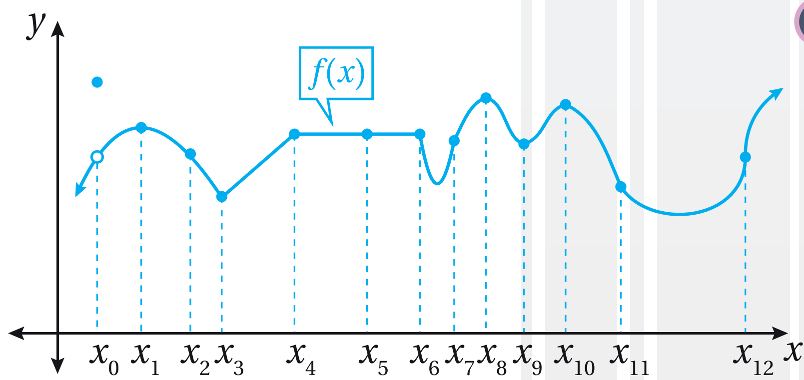


3 أُحدِّد قِيَم x للنقاط التي **لا** يكون عندها كل اقتران ممّا يأتي قابلًا للاشتقاق، مُبرِّرًا إجابتي:

a



b



المشتقات العليا

* تسمى عملية اشتقاق الإقتران أكثر من مرة بالمشتقات العليا
* ويرمز لها بالرمز

	المشتقة الأولى	المشتقة الثانية	المشتقة الثالثة	المشتقة الرابعة	...	المشتقة النونية
1	$f'(x)$	$f''(x)$	$f'''(x)$	$f^{(4)}(x)$	...	$f^{(n)}(x)$
2	$\frac{dy}{dx}$	$\frac{d^2y}{dx^2}$	$\frac{d^3y}{dx^3}$	$\frac{d^4y}{dx^4}$	...	$\frac{d^ny}{dx^n}$

أمثـــلة :

1. $f(x) = 3x^4 - x^{-1} + 5$ جد $f'''(x)$

2. $f(x) = \sin 2x$ جد $f'''(x)$

3. $f(x) = \cos(5x)$ جد $f'''(x)$

4. $f(x) = \tan x$ جد $f''(x)$

5. $f(x) = \sec x$ جد $f''(x)$

6. $f(x) = \cos x^2$ جد $f''(x)$

تمارين

1. جد $f'''(x)$ $\quad f(x) = \sin \pi x$

2. جد $f''(x)$ $\quad f(x) = \cot 3x$

3. جد $f''(x)$ $\quad f(x) = \csc 2x$

---

7. جد $f'''(x)$ $\quad f(x) = e^{3x}$

---

8. جد $f''(x)$ $\quad f(x) = e^{x^2}$

---

9. جد $f''(x)$ $\quad f(x) = 3^{2x}$

---

10. جد $f''(1)$ $\quad f(x) = Ln\,(x^2 + 1)$

تمارين

جد $f''(x)$ $\quad f(x) = x^7 \ln x$

---

11. جد $f''(x)$ $\quad f(x) = Log_3\,(x + 1)$

ملاحظـــــــــــة

في المشتقات العليا، نحاول دائماً الترتيب قبل الإشتقاق قدر المستطاع مثل (الجذور ، الكسور)

12 $f(x) = x^3 + \frac{1}{x}$ جد $f'''(x)$

13 $f(x) = \frac{x^4 + 2}{x^2}$ جد $f'''(x)$

14 $f(x) = \sqrt{3x+1}$ جد $f'''(x)$

15 $f(x) = \frac{1+x}{1+\sqrt[3]{x}}$ جد $f''(8)$

16 $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 + 4}$ جد $f''(-2)$

17 $f(x) = \dfrac{1}{1+\sqrt{x}}$ جد $f''(4)$

تمارين

1 $f(x) = \dfrac{x}{1+\sqrt{x}}$ جد $f''(x)$

2 $f(x) = \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$ جد $f''(x)$

18 $2x^3 - 3y^2 = 8$ جد $\dfrac{d^2y}{dx^2}$

19 $xy + y^2 = 2x$ جد $\dfrac{d^2y}{dx^2}$

تمارين

جد $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ لكل مما يأتي :

1 $x + y = \sin y$

2 $4y^3 = 6x^2 + 1$

3 $xy + e^y = e$

المشتقة الثانية للمعادلة الوسطية

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}}$$

20 $x = t^3 + 3t^2 \quad , \quad y = t^4 - 8t^2$ جد $\frac{d^2y}{dx^2}$ عند $(t = 1)$

21 $x = 3t^2 + 1 \quad , \quad y = t^3 - 2t^2$ جد $\frac{d^2y}{dx^2}$ عند $(t = 2)$

1 $x = \sin t \quad , \quad y = \cos t$

جد $\frac{d^2y}{dx^2}$ عند $t = \frac{\pi}{4}$

تدريبات

2 $x = e^{-t} \quad , \quad y = t^3 + t$

جد $\frac{d^2y}{dx^2}$ عندما $t = 0$

اسئلة الإثباتات

1 إذا كان $f(x) = \ln k\, x$

حيث $k)$: عدد حقيقي موجب) , $x > 0$

إثبت أن $f'(x) = \dfrac{1}{x}$

2 إذا كان $f(x) = 9 \ln x + \dfrac{1}{2x^2}$

إثبت أن $f'(x) = \dfrac{(3x-1)(3x+1)}{x^3}$

3 إذا كان $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

إثبت أن $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$

4 إذا كان $y = e^x \sin x$ إثبت أن $y'' = 2y' - 2y$

5 إذا كان $\sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} = 10 \quad (x \neq y \neq 0)$

إثبت أن $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$

6 إذا كان $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$

a إثبت ان $f''(x) = \frac{6\ln x - 5}{x^4}$

b أوجد قيمة $x^4 f''(x) + 4x^3 f'(x) + 2x^2 f(x) + 1$

7 إذا كان $y = \frac{x+1}{x-1}$

a جد $\frac{dy}{dx}$

b اعد كتابة المعادلة بالنسبة x (اجعل x موضوع القانون) ثم جد $\frac{dx}{dy}$

c أبيّن أن $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$

8 إذا كان $x^2 - y^2 = 1$

a جد $\frac{dy}{dx}$

b يمكن التعبير عن منحنى العلاقة $x^2 - y^2 = 1$ بالمعادلة الوسطية

حيث $0 \le t \le 2\pi \quad x = \sec t \quad , \quad y = \tan t$

استعمل هذه الحقيقة لإيجاد $\frac{dy}{dx}$ بدلالة t

c اثبت ان المقدارين الناتجين في الفرعين السابقين متكافئان .

تمارين

1 إذا كان $f(x) = 3\sin x - \sin^3 x$

فإثبت ان $f'(x) = 3\cos^3 x$

2 إذا كان $y = e^{2x} + e^{-2x}$

فإثبت ان $f''(x) = 4 f(x)$

3 إذا كان $f(x) = x \sec x$

فأثبت ان $f'(x) = \sec x\,(1 + x\tan x)$

4 إذا كان $f(x) = \sin 4x + \cos 4x$

إثبت ان $f''(x) + 16 f(x) = 0$

منهاجي
متعة التعليم الهادف

تطبيقات حياتيه

* معدل تغير أي متغير بالنسبة إلى متغير آخر تمثل (مشتقة)

تدريب :

1. معدل تغير y بالنسبة إلى x تمثل $\frac{dy}{dx}$
2. معدل تغير R بالنسبة إلى t تمثل $\frac{dy}{dt}$
3. معدل تغير Θ بالنسبة إلى t تمثل $\frac{d\Theta}{dt}$

---

1. وجد باحثون زراعيون أنه يمكن التعبير عن ارتفاع نبته مهجنة من نبات تباع الشمس (h) بالأمتار ، بإستعمال الإقتران $h(t) = \frac{3t^2}{4+t^2}$ حيث (الزمن بالأشهر: t)

جد معدل تغير ارتفاع النبته بالنسبة إلى الزمن:-

....

1. تعطى درجة حرارة مريض في اثناء مرضة بالإقتران $T(t)=\frac{4t}{1+t^2}+98.6$

حيث t : الزمن بالساعات بعد ظهور أعراض المرض،و T درجة الحرارة بالفهرنهايت

a. أوجد معدل تغير درجة الحرارة بالنسبة إلى الزمن

b. أوجد معدل تغير درجة الحرارة عندما $t = 2$

....

3 يمكن نمذجة انتشار الإنفلونزا في إحدى المدارس بإستعمال الإقتران $P(t)=\dfrac{100}{1+e^{3-t}}$

حيث، p : العدد التقريبي للطلبة المصابين بعد(t)يوم من ملاحظة الإنفلونزا أول مرة في المدرسة ، جد سرعة انتشار الإنفلونزا في المدرسة بعد (3 إيام)

4 يمثل الإقتران $A(t)=Ne^{0.1t}$ عدد الخلايا البكتيريا بعد (t) ساعة في مجتمع بكتيري:-

a جد معدل نمو المجتمع بعد (3ساعات) بدلالة الثابت N.

b إذا كان معدل نمو المجتموع بعد K هو (0.2) خليه لكل ساعة فما قيمة K بدلال الثابت N.

تمارين

1 قيمة بدل خدمة لأحد المنتجعات تحسب بالدينار بإستعمال الإقتران ، $U(x) = 80\sqrt{\frac{2x+1}{3x+4}}$ حيث X عدد القطع المبيعة من المنتجع.

a جد معدل تغير قيمة بدل الخدمة بالنسبة إلى عدد القطع المبيعة

b جد $U'(20)$ مفسراً معنى الناتج.

---

2 طرحت احدى الشركات منتجاً جديداً بالاسواق ثم رصدت عدد القطع المبيعة منذ طرحه اذا مثل الاقتران $N(t) = \frac{250000t^2}{(2t+1)^2}$ عدد القطع المبيعة منذ طرحه حيث (t) الزمن بالأسابيع

أجب عما يلي :

a أجد معدل تغير عدد القطع بالنسبة الى الزمن .

b أجد $N'(52)$ مفسراً معنى الناتج .

---

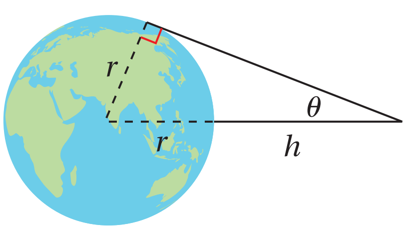
3 يمكن نمذجه الكمية R (بالغرام) المتبقية من عينة كتلتها $(200g)$ من عنصر مشع بعد t يوماً بإستعمال الإقتران $R(t)=200(0.9)^t$ ، جد $\frac{dR}{dL}$ عندما $t=2$

---

4 يعطي طول مستطيل بالمقدار $(6t+5)$ ويعطي عرضه بالمقدار $(\sqrt{t})$ ، حيث t الزمن بالثواني ، والأبعاد بالسنتيمتر. جد معدل تغير مساحة المستطيل بالنسبة إلى الزمن.

---

5 أقمار صناعية: عندما ترصدُ الأقمارُ الصناعيةُ الأرضَ، فإنَّه يُمكِنها مسح جزء فقط من سطح الأرض. وبعض الأقمار الصناعية تحوي مُستشعِرات لقياس الزاوية θ (بالراديان) المُبيَّنة في الشكل المجاور.



إذا كان h يُمثِّل المسافة بين القمر الصناعي وسطح الأرض بالكيلومتر، و r يُمثِّل نصف قُطْر الأرض بالكيلومتر، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

a أُثبِت أنَّ $h = r(\csc\theta - 1)$.

b أجد مُعدَّل تغيُّر h بالنسبة إلى θ عندما $\theta = \frac{\pi}{6}$ (أفترض أنَّ $r = 6371$ km).

تطبيقات هندسية على المشتقة

* من التطبيقات على المشتقة هي ايجاد معادلة المماس المنحنى اقتران عند نقطة.

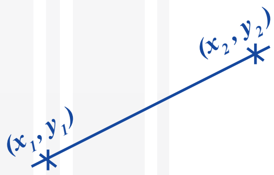
* المماس: هو مستقيم يلمس المنحنى في نقطة واحده 

* معادلة المماس = معادلة مستقيم: $y - y_1 = m\,(x - x_1)$

نقطة المماس (x_1 , y_1) ميل المماس (m)

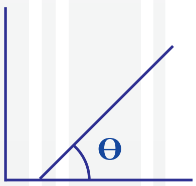
طرق إيجاد ميل المماس

1 إذا علم على المماس نقطتين ⟵ $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

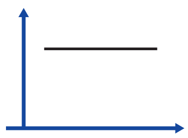


2 إذا علمت الزاوية التي يصنعها المماس مع محور السينات الموجب $m = tan\ \theta$

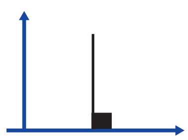
مع محور السينات الموجب



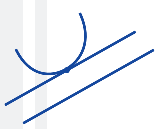
3 مماس أفقي $(m = 0)$



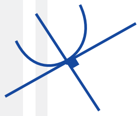
4 مماس عمودي على محور السينات $(m =$ غ.م$)$



5 مماس // مستقيم ⟵ $m_{\text{المماس}} = m_{\text{المستقيم}}$



6 مماس ⊥ مستقيم ⟵ $m_{\text{المماس}} = \dfrac{-1}{m_{\text{المستقيم}}}$



7 الإقتران خطي $(\ y = ax + b\ )$ ⟵ $m = a$ (بعد الترتيب)

8 إذا علم الإقتران ونقطة التماس : $m = f'(a)$

نقطة التماس

أمثلة على إيجاد ميل المماس

أوجد ميل المماس لمنحنى الإقتران لكل من التالية عند النقطة المذكور عندها :-

1. $f(x) = x^3 + 2x^2 + 1$ $\qquad x = 1$

2. $f(x) = \dfrac{x^2}{2x+1}$ $\qquad x = 2$

3. $f(x) = (2x - 1)^4$ $\qquad x = 1$

4. $f(x) = x\sqrt{3x+1}$ $\qquad x = 1$

5. $f(x) = \ln(x^2+5)$ $\qquad x = 3$

6. $f(x) = \cos 2x$ $\qquad x = \dfrac{\pi}{4}$

7. $f(x) = e^{2x^2 - 4x}$ $\qquad x = 2$

8. $f(x) = e^{-0.2x} \sin 4x$ $\qquad x = \dfrac{\pi}{8}$

9 $f(x) = \dfrac{\cos^2 x}{e^{2x}}$ $\qquad x = \dfrac{\pi}{2}$

10 $e^{\sin x} + e^{\cos y} = e + 1$ $\qquad \left(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$

11 $e^{2x} \ln y = x + y - 2$ $\qquad (1,1)$

12 $y = e^{1-x}$ $\qquad x = 2$

13 $x^2 + y^2 = 25$ $\qquad x = 3$

14 $(y-3)^2 = 4(x-5)$ $\qquad x = 6$

15 $x^2 y = 4(2-y)$ $\qquad (2, 1)$

16 $y = t^3 + 2t \quad , \quad x = 2t^2 + 1$ $\qquad t = 1$

17 $x = 2\sin(2t) \quad , \quad y = 3\cos t \qquad 0 \le t \le 2\pi$

عند نقطة الأصل.

تمارين

1 $f(x) = (2x+1)^5 (x^3 - x + 1) \qquad x = -1$

2 $y = e^{\sin x} \qquad x = 0$

3 $y^2 = \ln x \qquad (e, 1)$

4 $y^2 - x^2 = 1 \qquad (1, \sqrt{2})$

5 $x = 2(t - \sin t) \quad , \quad y = 2(t - \cos t)$

إثبت أن ميل المماس والعمودي على المماس لمنحنى العلاقة عند $t = \frac{\pi}{4}$ هما $(1 - \sqrt{2}) , (1 + \sqrt{2})$ على الترتيب

6 $x = \sin t \quad , \quad y = \sin 3t$

أوجد ميل المماس عند نقطة الأصل

إيجاد معادلة المماس

مخطط الحل:

معادلة المماس
$y - y_1 = m(x - x_1)$

$y = f(x) = \boxed{}$

$m = f'(x) = \boxed{}$

$x = a$
$y = f(a)$
$m = f'(a)$

علمت نقطة التماس: مباشرة، تقاطع

علم ميل المماس: مباشر، أفقي $m = 0$، زاوية $m = \tan\theta$، يوازي $m = m_{المستقيم}$، يعامد $m = \frac{-1}{m_{المستقيم}}$

علمت نقطة خارجية

1. $tm_1 = f'(x)$
2. $m_2 = \frac{\Delta y}{\Delta x}$
3. $m_1 = m_2$
4. عوض الأصل

أولاً : علمت نقطة التماس

a بشكل مباشر

1 أوجد معادلة المماس والعمودي لمنحنى

$f(x) = x^2 + 3x + 1 \qquad x = 1$

....

2 أوجد معادلة المماس والعمودي لمنحنى

$f(x) = (x^2 - 3)^4 \qquad x = 1$

....

3 أوجد معادلة المماس لمنحنى الإقتران

$f(x) = \frac{4x^2}{x^2+1}$ $x = 1$

4 أوجد معادلة المماس لمنحنى الأقتران

$f(x) = Ln\left(\frac{x}{e}\right)$ $x = 1$

تمارين

أوجد معادلة المماس والعمودي لمنحنى الإقترانات التالية:-

1 $f(x) = x^2\sqrt{5x-1}$ $x = 1$

2 $f(x) = \frac{x^2}{1+x}$ $x = 1$

3 $f(x) = (x^2+2)^3$ $x = -1$

تمارين

أوجد معادلة المماس لمنحنى الإقترانات :-

1 $f(x) = \ln\sqrt{x}$ $(e, \frac{1}{2})$

2 $f(x) = \ln x^2$ $(\frac{\pi}{2}, 0)$

3 $f(x) = \ln(x+5)$ $x = 0$

4 $f(x) = x\ln x$ $(1, 0)$

5 إذا كان $f(x) = \ln x$

a إثبت ان المماس لمنحنى $f(x)$ عند النقطة $(e,1)$ يمر بنقطة الأصل

b إثبت ان المقطع x للعمودي على المماس لمنحنى الإقتران عند النقطة $(e, 1)$ هو $e + \frac{1}{e}$

6 أوجد معادلة العمودي على المماس لمنحنى

$f(x) = \sin x + \cos x$ $x = \pi$

7 أوجد معادلة المماس لمنحنى الإقتران

$f(x) = \dfrac{1 + \sin x}{\cos x}$ $(\pi, -1)$

تمارين

أوجد معادلة المماس لمنحنى الإقترانات :-

1. $y = 2\sin 5x - 4\cos 3x$ $\qquad x = \frac{\pi}{2}$

2. $f(x) = x^2 \cos x$ $\qquad (\frac{\pi}{2}, 0)$

3. $f(x) = \tan 3x$ $\qquad x = \frac{\pi}{4}$

4. $f(x) = \sqrt{x+1}\sin(\frac{\pi x}{2})$ $\qquad x = 3$

5. $f(x) = x + \cos 2x$ $\qquad x = 0$

6. $f(x) = \frac{x^2}{\cos x}$ $\qquad x = \frac{\pi}{4}$

7. $f(x) = \sin x + \sin 3x$ $\qquad x = \frac{\pi}{4}$

8. أوجد معادلة المماس لمنحنى الإقتران

$f(x) = 4e^{-0.5x^2}$ $\qquad x = -2$

9. أوجد معادلة المماس لمنحنى الإقتران

$f(x) = \sin x + \frac{1}{2}e^x$ $\qquad (\pi, \frac{1}{2}e^{\pi})$

تمارين

أوجد معادلة المماس لمنحنى الإقترانات التالية :-

1. $f(x) = \dfrac{1+x}{1+e^{x}}$ $\quad (0, \frac{1}{2})$

2. $y = \dfrac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}}$ $\quad (0, 0)$

3. $f(x) = e^{x}\cos x + \sin x$ $\quad (0, 1)$

4. $f(x) = 2e^{x} + x$ $\quad x = 2$

---

10. أوجد معادلة المماس لمنحنى الإقتران

$f(x) = 2^{x}$ $\quad x = 0$

11. أوجد معادلة المماس لمنحنى العلاقة

$x^2 + xy + y^2 = 13$ $\quad (-4, 3)$

---

12. أوجد معادلة المماس لمنحنى العلاقة

$x + y - 1 = \ln(x^2 + y^2)$ $\quad (1, 0)$

تمارين

أوجد معادلة المماس لمنحنى العلاقات التالية :-

1. $x^2 - xy + y^2 = 7$ $(-1, 2)$
2. $x^3 + y^3 - 3xy = 17$ $(2, 3)$
3. $y^2 = \frac{x^2}{2-x}$ $(1, -1)$
4. $x^2 e^y = 1$ $(1, 0)$
5. $4xy = 9$ $(1, \frac{9}{4})$
6. $(x + y)^3 = x^2 + y$ $(1, 0)$
7. $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{8} = 1$ $(1, 2)$
8. $x e^y + y \ln x = 2$ $(1, \ln 2)$

13. أوجد معادلة المماس لمنحنى العلاقة

$y = x(\ln x)^x$ $x = e$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

تمرين

جد معادلة المماس لمنحنى $y = x^{x^2}$ عند $x = 2$

14. أوجد معادلة المماس لمنحنى العلاقة

$x = \frac{t}{2}$, $y = t^2 - 4$ $t = -1$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

15 أوجد معادلة المماس لمنحنى العلاقة

$x = \sec^2 t - 1 \quad , \quad y = \tan t \qquad t = \frac{-\pi}{4}$

16 أوجد معادلة العمودي لمنحنى العلاقة

$x = t^2 \quad , \quad y = 2t \qquad (t^2 , 2t)$

تمارين

أوجد معادلة المماس لمنحنى العلاقات التالية :-

1. $x = t - \sin t \quad , \quad y = 1 - \cos t \qquad t = \frac{\pi}{3}$
2. $x = t + 2 \quad , \quad y = t^2 - 1 \qquad t = 1$
3. $x = 4 \cos t \quad , \quad y = 3 \sin t \qquad t = \frac{\pi}{4}$
4. $x = \sec t \quad , \quad y = \tan t \qquad t = \frac{\pi}{4}$

17 إذا كان $y = b \sin t \quad , \quad x = a \cos t$

أوجد المقطع (y) لمماس المنحنى عند $t = \frac{\pi}{4}$ بدلالة a , b $\qquad 0 \le t \le 2\pi$

b بشكل غير مباشر: التقاطع

ملاحظـــــــــة

عند التقاطع اقترانين $f(x)$, $g(x)$ عند نقطة يتحقق عند هذه النقطة

$$\left.\begin{matrix} x = x \\ y = y \end{matrix}\right\} g(x) = f(x)$$

تدريب

1. جد نقطة تقاطع $f(x) = x + 3$ مع منحنى $g(x) = x^2 + 1$

2. جد نقطة تقاطع $x + y = 1$, مع منحنى $x^2 + y^2 = 25$

3. جد نقطة تقاطع $y = x^2 - 4$, مع المحور x

4. جد نقطة تقاطع $y = Ln(x + 1) + 2e^x$ مع المحور y :-

أمثلـة

1 جد معادلة المماس لمنحنى $f(x)= x^2 -4x +1$ عند نقطة تقاطعه مع $g(x)= x^2 - 3$

2 جد معادلة المماس لمنحنى $g(x)= x^3 +1$ عند نقطة تقاطعه مع المحور x :-

3 جد معادلة المماس لمنحنى العلاقة $x = y^2 - 4y$ عند نقطة تقاطعه مع المحور y

4 جد معادلة المماس لمنحنى $(x + 2y)^3 - 4x + 6y = 29$ عند نقطة تقاطع المستقيم مع $6y = 9 - 3x$

منهاجي
متعة التعليم الهادف

5 إذا كان $x^3 + y^3 = 6xy$ ، فأوجد معادلـة المماس لمنحنى العلاقة عند نقطة تقاطع المعادلة مع منحنى $y = x$ في الربع الأول

6 إذا كان $y = Ke^x$ ، $K > 0$
وكان منحناه يقطع المحور (y) عند النقطة p
فأجب عن السؤالين التاليين

a اجد نقطة تقاطع مماس منحنى الإقتران عند النقطة p مع المحور (x)

b إذا كان العمودي على المماس عند النقطة p يقطع المحور (x) عند النقطة $(100 , 0)$ جد قيمة K

منهاجي
متعة التعليم الهادف

7 إذا كان $y = e^x - a\,x$ ، حيث a عدد ، فأوجد معادلة المماس عند النقطة تقاطع الإقتران مع المحور y ، مبرراً اجابتي

8 جد نقطة نقطتي تقاطع العلاقة $x^2 + x\,y + y^2 = 7$ ، مع المحور x ثم اثبت ان مماس منحنى العلاقة عند هاتين النقطتين متوازيان

منهاجي
متعة التعليم الهادف

ثانياً علم الميل (m)

يمكن معرفة ميل المماس بإحدى الطرق التالية:

مباشر	زاوية	افقي	يوازي	يعامد
	$m = \tan\Theta$	$m = 0$	$m = m_{\text{المستقيم}}$	$m = \frac{-1}{m_{\text{المستقيم}}}$

خطوات الحل

1. نحدد ميل المماس (m) .
2. نعوض (الميل m) في المشتقة.
3. نجد قيمة x ثم قيمة y.
4. نكتب معادلة المماس .

1 جد معادلة المماس لمنحنى $f(x) = x^2 + 3$ عند النقطة التي يكون ميل المماس عندها (4)

....

2 إذا كان لدينا الإقتران $f(x) = x \ln x$ ، $x > 0$ جد احداث النقطة التي يكون ميل المماس عندها (2)

....

تمارين

اجد احداثيات جميع النقاط على منحنى الدائرة $x^2 + y^2 = 100$ والتي يكون عندها ميل المماس $(\frac{3}{4})$

3 اثبت عدم وجود مماس ميله (2) لإقتران

$$y = 2e^x + 3x + 5x^3$$

4 إذا كان $y = Ln\,(ax + b)$ حيث a , b ثابتان موجبان ، وكان ميل المماس لمنحنى الإقتران عند النقطة p هو (1) أجب عما يلي:

a إثبت ان الاحداثي (x) لنقطة p أقل من (1)

b اجد احداثي النقطة التي يكون عندها ميل المماس $(\frac{1}{2})$ علماً أن p هي النقطة $(0 , 2)$ ثم ابرر اجابتي

5 إذا كان لدينا العلاقة $x = \sec t$, $y = \tan t$ ، $0 \le t \le 2\pi$ جد احداثيات النقطة التي يكون عندها ميل المماس = 2 .

تمارين

1 إذا كان $y = 2\cos\theta$, $x = \sin^2\theta$ حيث $0 \le \theta \le 2\pi$

a أوجد معادل المماس عندما يكون ميله (1)

b أوجد النقطة التي يكون عندها المماس موازياً لمحور y .

6 اوجد نقط على منحنى الاقترانات التالية والتي يكون المماس عندها افقي

a $f(x) = (x^2 - 2x)^4$

b $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 + 1}$

تدريب

أوجد احداثيات النقط على منحنى كل في الاقترانات والتي يكون المماس عندها افقي

1. $f(x)=\dfrac{2x-1}{x^2}$

2. $x^3+y^3=6xy$ في الربع الأول

3. $f(x)=e^x-2x$

8. **اثبت عدم وجود مماس افقي لمنحنى الإقتران** $f(x)=3x+\sin x+2$

تدريب

إذا كان $y=\dfrac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}}$

اثبت عدم وجود مماس افقي لإقتران y مبرراً اجابتك

c. $f(x)=\dfrac{8(x-2)}{e^x}$

d. $3x^2+2xy+y^2=6$

e. $y=x^{\frac{1}{x}}$, $x>0$

منهاجي
متعة التعليم الهادف

9 جد معادلة المماس لمنحنى $f(x)= x^{2} -3x+5$ عند النقطة التي يكون فيها المماس موازياً المستقيم $y = 7x$

10 أوجد النقط على منحنى الإقتران $f(x) = 2x^{3} - 3x^{2} + 5x + 7$ والتي يكون المماس عندها يعامد المستقيم $x + 5y + 2 = 0$

11 جد نقط التي يكون عندها المماس لمنحنى العلاقة $9x^{2} + 16y^{2} = 52$ موازياً المستقيم $9x - 8y = 1$

12 اوجد الإحداثي (x) لمنحنى $f(x) = \ln(x^2)$ والتي يكون المماس عندها موازياً المستقيم $6x - 2y + 5 = 0$

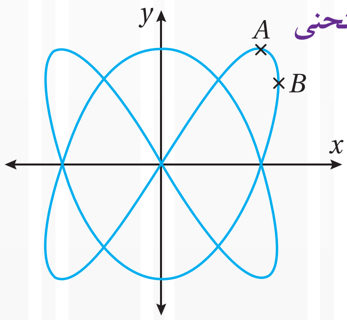
تمارين

1 اجد احداثيات نقطة على المنحنى $x + y^2 = 1$ ، بحيث يكون عندها المماس لمنحنى العلاقة موازياً المستقيم $x + 2y = 0$

2 اجد احداثيات نقطة (نقاط) على منحنى $y^3 = x^2$ ، بحيث يكون المماس عندها عمودياً على المستقيم $y + 3x - 5 = 0$

13 يُبيِّن الشكل المجاور منحنى المعادلة الوسيطية:

$$0 \le t \le 2\pi$$
$$y = \sin 3t$$
$$x = \sin 2t$$



a إذا كان مماس منحنى المعادلة أفقيًّا عند النقطة A الواقعة في الربع الأوَّل، فأجد إحداثيي A.

b إذا كان مماس المنحنى موازيًا للمحور y عند النقطة B، فأجد إحداثيي B.

c إذا مَرَّ فرعان من المنحنى بنقطة الأصل كما هو مُوضَّح في الشكل، فأجد ميل المماس لكلٍّ منهما عند هذه النقطة.

ثالثاً: النقطة الخارجية

نعرفها من

a لا تحقق الإقتران

b في كلمة مار بـ ، مار من ، مار في ......

خطوات الحل

1 نجد $m_1 = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

2 نجد $m_2 = f'(x)$

3 $m_1 = m_2$

4 عوض الأصل

مثال

1 جد معادلة المماس لمنحنى الإقتران
$f(x) = x^2 + 8x + 16$ ، عند $(1 , 25)$

2 جد معادلة المماس لمنحنى الإقتران
$f(x) = x^2 + 8x + 16$
والمار بالنقطة $(0 , 0)$

3 جد معادلة المماس لمنحنى العلاقة
$x^2 - y^2 = -8$ المرسوم من النقطة $(0 , -4)$

4 أوجد معادلة المماس لمنحنى العلاقة $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ اللذان يمران بالنقطة $(4,0)$ التي لا تقع على منحنى العلاقة

تمارين

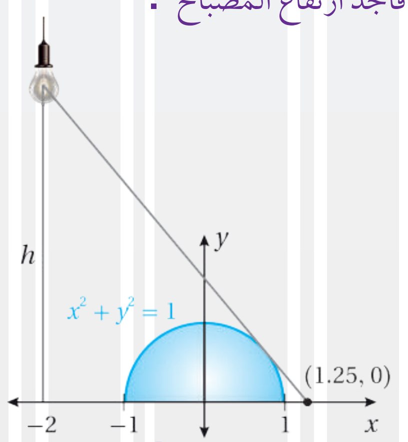
1 اكتب معادلة المماس لمنحنى العلاقة $4x^2 + y^2 = 8$ المرسوم من النقطة $(-2,0)$

2 اكتب معادلة المماس المرسوم من النقطة $(2,5)$ لمنحنى الاقتران $f(x) = 4x - x^2$

3 جد جميع قيم (x) التي يكون المماس عندها ماراً بالنقطة $(4,0)$ لمنحنى العلاقة $2x^2 - 4x + y^2 - 10 = 0$

4 بين ان لمنحنى $f(x) = 5 - x^2$ مماسين مرسومين من النقطة $(3,0)$

5 مصباح: يُبيِّن الشكل المجاور مصباحًا على ارتفاع h وحدة من المحور x. إذا وقعت النقطة $(1.25 , 0)$ في نهاية الشعاع الصادر من المصباح، الذي يمسُّ منحنى العلاقة: $x^2 + y^2 = 1$ ، فأجد ارتفاع المصباح .



ملاحظـــــــــة

من التطبيقات على ايجاد معادلة المماس (مساحة المثلث):-

1 أوجد مساحة المثلث المحصور بين محوري الاحداثيات ومماس المنحنى $y=\frac{1}{x}$ عند $x=2$

2 أوجد مساحة المثلث المتكون من المماس والعمودي على المماس عند نقطة التماس $(2,4)$ لمنحنى العلاقة $f(x)=x^2$ مع محور x

3 إذا كان $y = 2t \quad , \quad x = t^2$
أثبت ان مساحة المثلث المكون من العمودي على المماس ومحوري الإحداثيات هي $\frac{1}{2}|t|(2+t^2)^2$

3 إذا كان مماس منحنى $y = x^{\sqrt{x}}$, عنـــد النقطة $(4,16)$ يقطع المحور X في النقطة B والمحور y في النقطة C فأوجد المثلث OBC حيث O نقطة الأصل.

تمارين

1 أوجد مساحة المثلث الواقع في الربع الأول والمحصور بين المحورين ومماس المنحنى $y = \frac{5}{x} - \frac{x}{5}$ عند النقطة $(0,5)$

2 أوجد مساحة المثلث قائم الزاوية المتكون من المماس المرسوم لمنحنى $f(x) = \sqrt{x}$ عند النقطة $(4,2)$ مع محور السينات والمستقيم $X = 4$

التطبيقات الفيزيائية

سوف نتعلم في هذا الدرس التطبيقات الفيزيائية للمشتقة

أ الحركة في خط مستقيم:-

إذا تحرك جسيم في خط مستقيم فإن

* موقعه: يتحدد بعلاقة يرمز لها بالرمز $S(t)$ حيث الموقع: S ، الزمن : t
* سرعته المتجه: تتحدد بعلاقة يرمز لها بالرمز $V(t)$ حيث $V(t) = S'(t)$
* تسارعه: يتحدد بعلاقة يرمز لها بالرمز $a(t)$ حيث $a(t)=V'(t)$

اشتقاق $s \rightarrow v \rightarrow a$

مثـــــال 1 :

يتحرك جسيم في خط مستقيم حيث يتحدد موقعه بالعلاقة $S(t) = t^3 + 5t^2 + 9$

، حيث S : الموقع بالأمتار t : الزمن بالثواني،

احسب عما يلي:-

a) موقع الجسيم عندما $t=1$

b) سرعة الجسيم المتجه واتجاه حركته عندما $t=2$

c) تسارع الجسيم عندما $t=3$

d) سرعة الجسيم عندما تسارعه 34

e) تسارع الجسيم عندما سرعته المتجهة 13

f) سرعته الإبتدائية.

مثـــال 2 :

يمثل الإقتران $S(t) = 6t^2 - t^3$ **موقع جسيم يتحرك على خط مستقيم**

a **احسب سرعة الجسيم المتجه عندما يعود إلى موقعه الإبتدائي**

b **تسارع الجسيم في حالة السكون اللحظي.**

مثـــال 3 :

يتحرك جسيم على خط مستقيم حسب العلاقة $S(t) = t^3 - 3t^2 + 2$ **، جد سرعة الجسيم المتجه واتجاه حركته عندما ينعدم تسارعه.**

مثـــال 4 :

يتحرك جسيم على خط مستقيم حسب العلاقة $S(t) = \frac{1}{3}t^3 - 3t^2 + 5t$ **، جد تسارع الجسيم في حالة السكون اللحظي .**

مثـــال 5 :

يتحرك جسيم في خط مستقيم حسب العلاقة $S(t) = t^3 - 3t^2 + 2$ ، فجد

a سرعة الجسيم الإبتدائية

b تسارع الجسيم عندما يسكن الجسيم لحظياً

تمارين

1 يتحرك جسيم في خط مستقيم حسب العلاقة $S(t) = 6t^2 - t^3$ ، جد:

a تسارع الجسيم في حالة السكون اللحظي

b سرعة الجسيم المتجه واتجاه حركته عندما يعود إلى موقعه الابتدائي.

2 يتحرك جسيم على خط مستقيم حسب العلاقة $S(t) = t^3 - 4t^2 + 5t$

حيث S : الموقع بالأمتار , t : الزمن بالثواني جد :

a السرعة الإبتدائية

b تسارع الجسيم في السكون اللحظي

مثـــال 6:

يتحرك جسيم في خط مستقيم حسب العلاقة

$S(t) = e^t - 4t$

حيث S : الموقع بالأمتار , t : الزمن بالثواني

a اجد الموقع الإبتدائي للجسم

b اجد تسارع الجسيم عندما تكون سرعته المتجه صفر

تمارين

يتحرك جسيم في خط مستقيم وكانت سرعته المتجه تعطى بالعلاقة $V(t) = 15e^{-0.05t^2}$ ، جد السرعة المتجه للجسيم عندما يكون تسارعه صفر

مثـــال 7 :

يتحرك جسيم على خط مستقيم حسب العلاقة

$$S(t) = \ln (t^2 - 2t + 1.9)$$

حيث S: الموقع بالأمتار t : الزمن بالثواني

a) جد موقع الجسيم وتسارعه عندما تكون سرعته المتجه صفر.

b) متى يعود الجسم إلى موقعه الإبتدائي

منهاجي
متعة التعليم الهادف

مثـــال 8 :

يتحرك جسيم في خط مستقيم حسب العلاقة

$S(t) = (t)^{\frac{1}{t}}$ ، فجد

تسارع الجسيم عندما تكون سرعته المتجه صفر.

مثـــــال 9 :

يتحرك جسيم في خط مستقيم حسب العلاقة

$$S(t) = \frac{1}{4}t^4 - t^3 + t^2$$

جد تسارع الجسيم في حالة السكون اللحظي أول مرة بعد الحركة

مثـــــال 10 :

يتحرك جسيم على خط مستقيم حسب العلاقة

$$S(t) = 4 - \sin t$$

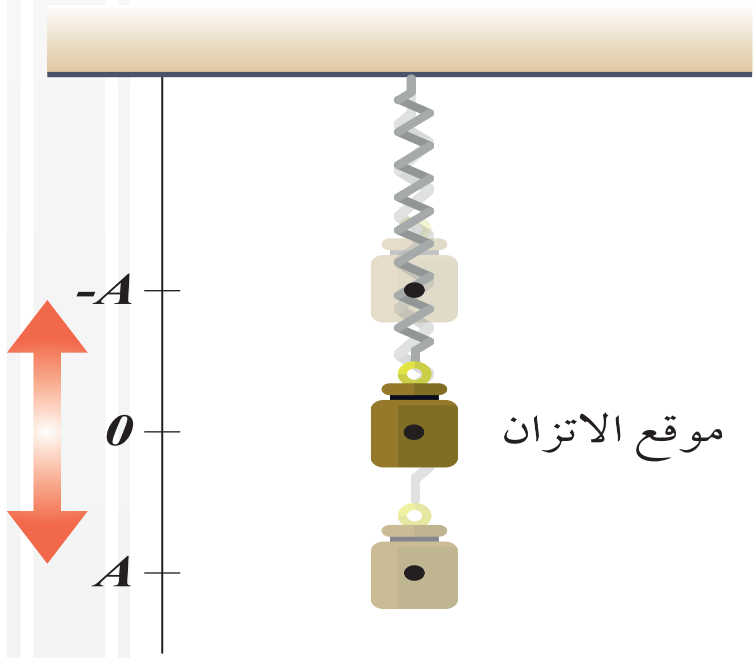
حيث S: الموقع بالأمتار، t : الزمن بالثواني فجد

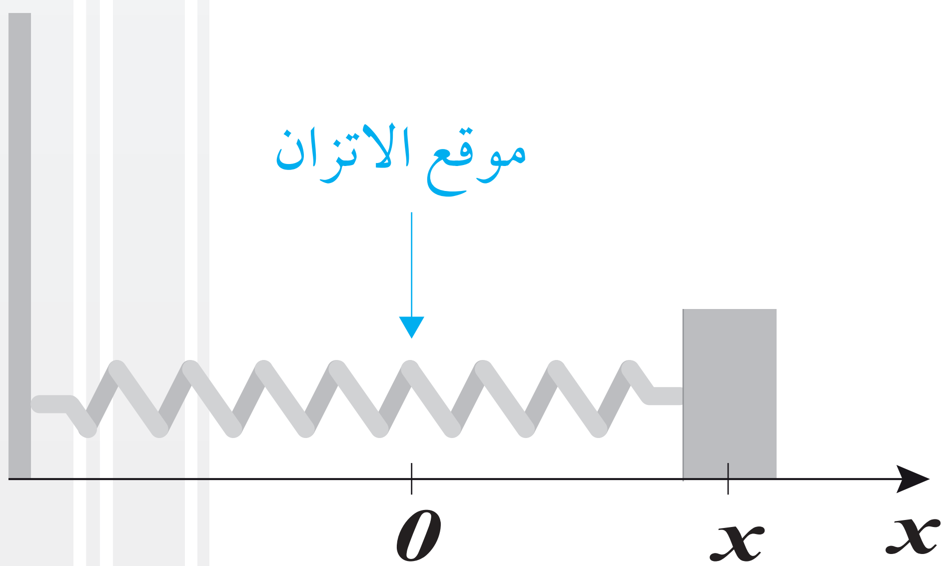
a) موقع الجسيم في حالة سكون اول مرة بعد انطلاقته

b) جد موقع الجسيم عندما يصل إلى اقصى سرعة متجه مبرراً أجباتي

الحركة التوافقية البسيطة

الموقع $S(t)$ ← السرعة $V(t)$ ← التسارع $a(t)$





مثـــــال 1 :

زنبرك: يُبيِّن الشـكل المجاور جسـمًا مُعلقا بزنبرك، شُدَّ 5 وحدات أسـفل الاتزان $(s = 0)$، ثم تُرِك عند الزمـن $t = 0$ ليتحـرَّك إلى الأعلى وإلى الأسـفل. ويُمثِّل الاقتران: $s(t) = 5\cos t$ موقع الجسـم عند أيِّ زمـن لاحق، حيث t الزمـن بالثواني، وs الموقع بالسنتيمترات:

a) أجد اقترانًا يُمثِّل سرعة الجسم المتجهة، واقترانًا آخرَ يُمثِّل تسارعه عند أيِّ لحظة.

b) أَصِف حركة الجسم.

مثـــــال 2 :

يتحرَّك جسـم مُعلَّق بزنبرك إلى الأعلى وإلى الأسفل، ويُمثِّل الاقتران: $s(t) = 7\sin t$ موقع الجسم عند أيِّ زمن لاحق حيث t الزمن بالثواني، وs الموقع بالأمتار:

a) أجد اقترانًا يُمثِّل سرعة الجسم المتجهة، واقترانًا آخرَ يُمثِّل تسارعه عند أيِّ لحظة.

b) أَصِف حركة الجسم.

زنبرك: يتحرَّك جسم مُعلَّق بزنبرك إلى الأعلى وإلى الأسفل، ويُحدِّد الاقتران: $s(t) = 4 \cos t$ موقع الجسم عند أيِّ زمن لاحق، حيث t الزمن بالثواني، وs الموقع بالأمتار:

a) أجد اقترانًا يُمثِّل سرعة الجسم المتجهة، واقترانًا آخرَ يُمثِّل تسارعه عند أيِّ لحظة.

b) أجد سرعة الجسم المتجهة وتسارعه عندما $t = \frac{\pi}{4}$.

c) أَصِف حركة الجسم.

تمارين

زنبرك: تتحرّك كرة مُعلَّقة بزنبرك إلى الأعلى وإلى الأسفل، ويُحدِّد الاقتران: $s(t) = 0.1 \sin 2.4t$، موقع الكرة عند أيِّ زمن لاحق، حيث t الزمن بالثواني، وs الموقع بالسنتيمترات:

a) أجد السرعة المتجهة للكرة عندما $t = 1$.

b) أجد موقع الكرة عندما تكون سرعتها المتجهة صفرًا.

c) أجد موقع الكرة عندما يكون تسارعها صفرًا.

أسئلـــــــــة إضافيـــــــة

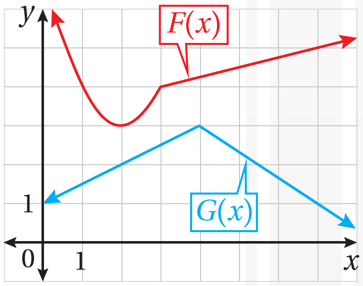
1 يُبيِّن الشكل المجاور منحنيي الاقترانين: $F(x)$، و $G(x)$.

إذا كان: $P(x) = F(x)G(x)$، وكان: $Q(x) = \frac{F(x)}{G(x)}$،

فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

a $P'(2)$

b $Q'(7)$



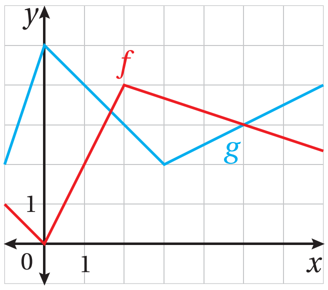
2 يُبيِّن الشكل المجاور منحنيي الاقترانين $f(x)$ و $g(x)$.

إذا كان: $h(x) = f(g(x))$، وكان: $p(x) = g(f(x))$

فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

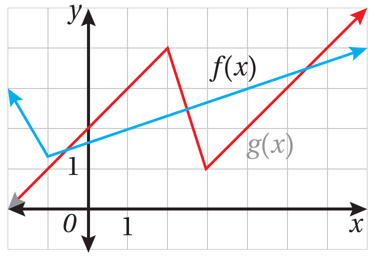
a $h'(1)$

b $p'(1)$



3 يُبيِّن الشكل المجاور منحنيي الاقترانين: $f(x)$، و $g(x)$.

إذا كان: $u(x) = f(x)g(x)$، وكان: $v(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$،



فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

a $u'(1)$

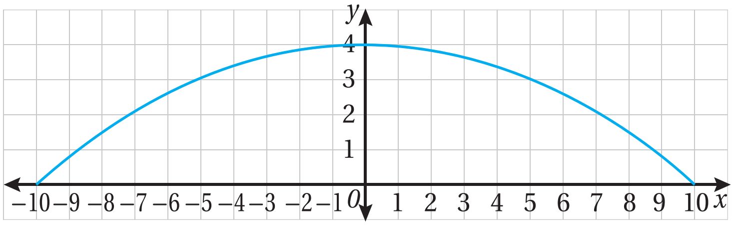
b $v'(4)$

4 إذا كان الاقتران: $y = e^{ax}$، حيث a ثابت، و $a > 0$،
فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

a أجد إحداثيي النقطة P التي تقع على منحنى الاقتران، ويكون ميل المماس عندها 1.

b أُثبِت أنَّه يُمكِن كتابة معادلة العمودي على المماس عند النقطة P في صورة: $x + y = k$، ثم أجد قيمة الثابت k.

منهاجي
متعة التعليم الهادف



5 مـرور: يُبيِّـن التمثيل البياني المجاور شـكل مَطَبٍّ سرعةٍ صُمِّم للتخفيف من سرعة السيّارات على أحـد الطرق. وفيه يُمثِّل المحور x سـطح الأرض، وتقاس جميع الأطوال بالسنتيمترات.

إذا كانت المعادلة الوسيطية التي تُمثِّل منحنى المَطَبِّ هي: $x = 10 \sin t,\ y = 2 + 2 \cos 2t$، حيث: $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

a ميل المماس لمنحنى المَطَبِّ بدلالة t.

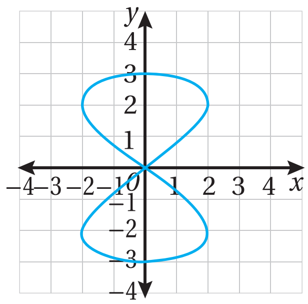
b قيمة t عند أعلى نقطة على منحنى المَطَبِّ.

6 يُبيِّن الشكل المجاور منحنى المعادلة الوسيطية:

$$0 \leq t \leq 2\pi$$

$$y = 3\cos t$$

$$x = 2\sin 2t$$



أجد ميل المماس لمنحنى المعادلة عند نقطة الأصل

التعريـــــف العام للمشتقة

قانون تعريف المشتقة

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

مثـال : جد المشتقة الأولى لكل من التالية :

1 $f(x) = x^2 + 2x + 1 \quad , \quad x = 2$

2 $f(x) = x^3 + 5x + 4 \quad , \quad x = 1$

3 $f(x) = \sqrt[3]{x} \quad , \quad x = 0$

4 $f(x) = |x| \quad , \quad x = 0$

تمارين

5 $f(x) = |x - 2| \quad , \quad x = 2$

6 $f(x) = (x+1)^{\frac{1}{5}} \quad , \quad x = -1$