بسم الله الرحمن الرحيم

المملكة الأردنية الهاشمية
وزارة التربية والتعليم
إدارة الامتحانات والاختبارات
قسم الامتحانات العامة

١	٢	—
٢٠١٧		

امتحان شهادة الدراسة الثانوية العامة لعام ٢٠١٣ / الدورة الشتوية

(وثيقة محمية/محدود)

المبحث : الرياضيات / المستوى الرابع
الفـــرع : العلمـــي

مدة الامتحـان : ٢ $\frac{\text{د}}{\text{س}}$ ٠٠
اليوم والتاريخ : السبت ٢٠١٣/١/١٢

ملحوظة : أجب عن الأسئلة الآتية جميعها وعددها (٥)، علماً بأن عدد الصفحات (٣).

السـؤال الأول : (٢٢ علامة)

جـد التكاملات الآتية :

أ) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$ جـا ٢ س جتـا س د س (٦ علامات)

ب) $\int$ س^{٥} هـ$^{\text{س}^{٢}}$ د س (٨ علامات)

ج) $\int \frac{\text{س}^{٢}}{\text{س}^{٢} - ٤}$ د س (٨ علامات)

السـؤال الثاني : (١٨ علامة)

أ) إذا كان ميل المماس لمنحنى العلاقة ص عند النقطة (س ، ص) يساوي $\frac{١}{\text{س} \sqrt{٣ + \text{لـو}_{\text{هـ}} \text{س}}}$ ، س > ٠ ، فجـد قاعـدة العلاقـة ص علمـاً بأن منحنـاها يمـر بالنقطة (هـ ، ٤) ، هـ العدد النيبيري. (٩ علامات)

ب) جـد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيات الاقترانات الثلاث الآتية :

ق (س) = س^{٢} – ١ ، هـ (س) = ١ – س ، ل (س) = ٣ (٩ علامات)

السـؤال الثالث : (١٨ علامة)

أ) إذا كان ص = ٤$^{\text{ق (س)}}$ وكان ق (س) قابل للاشتقاق، فأثبت أن :

$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ = ٤$^{\text{ق (س)}}$ × لـو$_{\text{هـ}}$ ٤ × قَ (س) (٦ علامات)

يتبع الصفحة الثانية ...

ب) جـد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه ب١ (٣ ، ٢) ، ب٢ (٩ ، ٢) وطول محوره الأكبر = ١٢ وحدة (٧ علامات)

ج) جـد معادلة الدائرة التي يقع مركزها في الربع الأول وتمس كل من المستقيمات الآتية :
س = ٣ ، ص = ٢ ، س = ٩ (٥ علامات)

السـؤال الرابع : (١٨ علامة)

أ) جـد معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته النقطة (٢ ، ٢) ومعادلة دليله س = −٥ (٦ علامات)

ب) جـد معادلة القطع المخروطي الذي رأساه هما النقطتان (٤ ، −٦) ، (٤ ، ٦) ، واختلافه المركزي يساوي $\frac{٥}{٣}$ (٦ علامات)

ج) تتحرك النقطة و(س ، ص) في المستوى بحيث س = ٣ + ٢ جـا هـ ، ص = ٤ + ٢ جتـا هـ حيث هـ زاوية متغيرة. جـد معادلة المحل الهندسي للنقطة و(س ، ص) وبيّن نوعه. (٦ علامات)

السـؤال الخامس : (٢٤ علامة)

يتكون هذا السؤال من (١٢) فقرة من نوع الإختيار من متعدد، يلي كل فقرة أربعة بدائل، واحد منها فقط صحيح.
انقل إلى دفتر إجابتك رقم الفقرة ورمز الإجابة الصحيحة لها :

١) إذا كان م (س) اقتران بدائي لـ ق (س) بحيث م (س) = ظتـا س + ١ ، فإن ق $(\frac{\pi}{٤})$ يساوي:

أ) −٤ ب) −٢ ج) ٢ د) ٤

٢) إذا كان ق اقتراناً قابلاً للتكامل في الفترة [٠ ، ٢] ، وكان ق (س) ≤ ٢ لكل س ∈ [٠ ، ٢] ، فإن أصغر قيمة ممكنة للمقدار : $\int_{٠}^{٢}$ (٣ ق (س) − ١) د س هي :

أ) ٤ ب) ٥ ج) ٦ د) ١٠

٣) إذا كان $\int_{-٢}^{١}$ (ق (س) + ١) د س = ٩ ، $\int_{٣}^{١}$ ق (س) د س = −٤ ، فإن $\int_{-٢}^{٣}$ ق (س) د س =

أ) ٥ ب) ٦ ج) ١٠ د) ١٣

٤) قيمة $\int_{٠}^{١} \frac{هـ^{س}}{هـ^{س} + ١}$ د س =

أ) ١ ب) لـو$_{هـ}$ (هـ + ١) ج) لـو$_{هـ}$ $(\frac{هـ + ١}{٢})$ د) لـو$_{هـ}$ (٢ هـ + ٢)

يتبع الصفحة الثالثة ...

الصفحة الثالثة

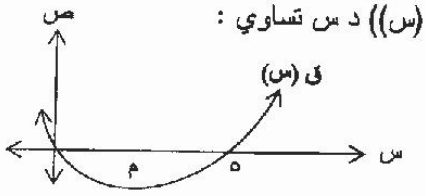
٥) إذا كان ق (س) = هـ$^{\text{جا}^{٢}\frac{\pi}{٢}}$ + لـو$_{هـ}$ (١ − جتا^{٢} س) ، فإن ق$'$ ($\frac{\pi}{٤}$) =

أ) $\sqrt{٢}$ ب) ٢ ج) $\sqrt{هـ}$ د) $\sqrt{هـ}$ + ٢

٦) قيمة $\int_{٠}^{٢}$ [٣ − $\frac{١}{٢}$ س] د س =

أ) −٢ ب) −١ ج) ٢ د) ٤

٧) في الشكل المجاور الذي يُمثّل منحنى الاقتران ق ، إذا كانت المساحة (م) المحصورة بين منحنى ق ومحور السينات تساوي (٨) وحدات مربعة، فإن $\int_{٠}^{٥}$ (١ − ق (س)) د س تساوي :



أ) −٣ ب) ٣

ج) −١٣ د) ١٣

٨) إذا كانت معادلة محور القطع المكافئ هي ص = −٢ ، ومعادلة دليله س = −١ ويمر منحناه بالنقطة (٤ ، ٥) ، فإن منحناه يتجه نحو :

أ) اليمين ب) اليسار ج) الأعلى د) الأسفل

٩) إذا كانت $\frac{(س − ٣)^{٢}}{م^{٢} − ٢}$ + $\frac{(ص − ٥)^{٢}}{٢م + ٦}$ = ١ تُمثّل معادلة دائرة ، فإن مجموعة قيم م هي :

أ) {−٤ ، −٢} ب) {٢ ، ٤} ج) {−٤ ، ٢} د) {−٢ ، ٤}

١٠) مساحة القطع الناقص الذي معادلته ٤ س^{٢} + ٩ ص^{٢} = ٣٦ بالوحدات المربعة تساوي :

أ) $\frac{١}{٦\pi}$ ب) ٦ π ج) ٣٦ π د) ١٣ π

١١) قطع مخروطي معادلته ٥ (س + ١)^{٢} − ٤ (ص − ٢)^{٢} = −٢٠ . ما اختلافه المركزي؟

أ) $\frac{٣}{٢}$ ب) $\frac{٢}{٣}$ ج) $\frac{٣}{\sqrt{٥}}$ د) $\frac{\sqrt{٥}}{٣}$

١٢) المعادلة ٩ س^{٢} + ١٨ س = −٩ ص^{٢} + ٣٦ ص − ٤ تُمثّل معادلة :

أ) دائرة ب) قطع مكافئ ج) قطع ناقص د) قطع زائد

(انتهت الأسئلة)

بسم الله الرحمن الرحيم

امتحان شهادة الدراسة الثانوية العامة لعام ٢٠١٣ (الدورة الشتوية)

صفحة رقم (١)

وزارة التربية والتعليم
إدارة الامتحانات والاختبارات
قسم الامتحانات العامة

المبحث : الرياضيات م / ع
الفرع : العلمي

مدة الامتحان : د / س
التاريخ : ٢٠١٣/١/١٢

رقم الصفحة في الكتاب	الإجابة النموذجية :

السؤال الأول : (٢٢ علامة)

(أ) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 s \cos^2 s \, ds = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin s \cos s)^2 \, ds$

$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2}\sin 2s\right)^2 \, ds = \frac{1}{4}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2s \, ds$

$= \frac{1}{4}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 4s}{2} \, ds = \frac{1}{8}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos 4s) \, ds$

$= \frac{1}{8}\left[s - \frac{1}{4}\sin 4s\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{8}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{4}\sin 2\pi\right) - \frac{1}{8}\left(\frac{\pi}{6} - \frac{1}{4}\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

$= \frac{1}{8}\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) - \frac{1}{8}\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{8}\right) = \frac{\pi}{16} - \frac{\pi}{48} + \frac{\sqrt{3}}{64} = \frac{\pi}{24} + \frac{\sqrt{3}}{64}$

(ب) $\int_{0}^{\ln 2} s^3 e^{3s} \, ds$

نفرض أن $u = s^3 \Rightarrow du = 3s^2 ds$

$dv = e^{3s} ds \Rightarrow v = \frac{1}{3}e^{3s}$

$= \frac{1}{3}s^3 e^{3s}\Big]_0^{\ln 2} - \int_0^{\ln 2} s^2 e^{3s} \, ds$

نفرض أن $u = s^2 \Rightarrow du = 2s ds$

$dv = e^{3s} ds \Rightarrow v = \frac{1}{3}e^{3s}$

$= \frac{1}{3}(\ln 2)^3 \cdot 2 - \frac{1}{3}\left[s^2 e^{3s}\Big]_0^{\ln 2} - \frac{2}{3}\int_0^{\ln 2} s e^{3s} \, ds\right)$

نفرض أن $u = s \Rightarrow du = ds$

$dv = e^{3s} ds \Rightarrow v = \frac{1}{3}e^{3s}$

$= \frac{2}{3}(\ln 2)^3 - \frac{1}{3}(\ln 2)^2 \cdot 2 + \frac{2}{3}\left[s e^{3s}\Big]_0^{\ln 2} - \frac{1}{3}\int_0^{\ln 2} e^{3s} \, ds\right)$

$= \frac{2}{3}(\ln 2)^3 - \frac{2}{3}(\ln 2)^2 + \frac{2}{3}\left(\ln 2 \cdot 2 - \frac{1}{3}e^{3s}\Big]_0^{\ln 2}\right) + c$

$= \frac{2}{3}(\ln 2)^3 - \frac{2}{3}(\ln 2)^2 + \frac{2}{3}\left(2\ln 2 - \frac{1}{3}(2-1)\right) + c$

(ج) $\int \frac{s^4}{s^2-4} \, ds = \int \left(s^2 + 4 + \frac{16}{s^2-4}\right) ds$

$= \frac{s^3}{3} + 4s + \int \frac{16}{(s+2)(s-2)} \, ds$

$\frac{16}{(s+2)(s-2)} = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s-2} = \frac{A(s-2)+B(s+2)}{(s+2)(s-2)}$

$16 = A(s-2) + B(s+2)$

عندما $s = 2 \Rightarrow 16 = 4B \Rightarrow B = 4$

عندما $s = -2 \Rightarrow 16 = -4A \Rightarrow A = -4$

$= \frac{s^3}{3} + 4s - 4\ln|s+2| + 4\ln|s-2| + c$

رقم الصفحة في الكتاب

السؤال الثاني: (١٨ علامة)

٣٠٤

أ) $\frac{dص}{dس} = س \ بـ ٣ + لو_{هـ} س$ ① $\Leftarrow dص = \frac{1}{س \ بـ ٣ + لو_{هـ} س} . dس$ ①

$ص = \int \frac{1}{س \ بـ ٣ + لو_{هـ} س} . dس$ ① $ص = ٣ + لو_{هـ} س$ ①

$\frac{dص}{dس} = \frac{1}{س}$

$ص = \int \frac{1}{ص - ٣} . dص = \int \frac{1}{ص} . dص = لو_{هـ} ص + جـ$ ①

$ص = ٣ \ بـ ٣ + لو_{هـ} س + جـ$ ① $\Leftarrow ٤ = ٣ \ بـ ٣ + لو_{هـ} ٣ + جـ$ ①

$٤ = ٣ + جـ \Leftarrow جـ = ١$ ①

$ص = ٣ \ بـ ٣ + لو_{هـ} س + ١$ ①

ب) $ق(س) = س^٢ - ١$ ، $ل(س) = ١ - س$ ① $م = ٣$

نجد نقاط التقاطع:

$ق(س) = ل(س)$	$ل(س) = ل(س)$
$س^٢ - ١ = ١ - س$	$١ - س = ٣$
$س^٢ + س - ٢ = ٠$	$س = -٢$
$(س + ٢)(س - ١) = ٠$	$ق(س) = ل(س)$
$س = -٢$ ، $س = ١$ ①	$س^٢ - ١ = ٣ \Leftarrow س^٢ = ٤ \Leftarrow س = -٢$ ، ٢ ①

$م = \int_{-٢}^{١} [ل(س) - ق(س)] . dس + \int_{١}^{٢} [ق(س) - ل(س)] . dس$ ① ① ①

$= \int_{-٢}^{١} [٣ - (١ - س)] . dس + \int_{١}^{٢} [٣ - (س^٢ - ١)] . dس$

$= \int_{-٢}^{١} [٢ + س] . dس + \int_{١}^{٢} [٤ - س^٢] . dس$ ① ① ①

$= [٢س + \frac{س^٢}{٢}]_{-٢}^{١} + [٤س - \frac{س^٣}{٣}]_{١}^{٢}$ ① ①

$= ((٢ + \frac{١}{٢}) - (-٤ + \frac{٤}{٢})) + ((٨ - \frac{٨}{٣}) - (٤ - \frac{١}{٣}))$ ①

$= \frac{٩}{٢} + ٤ - \frac{٧}{٣} = \frac{٢٧}{٦} - \frac{١٤}{٦} = \frac{١٣}{٦}$ وحدة مربعة ٧٦

رقم الصفحة في الكتاب

السؤال الثالث : (١٨ علامة)

٣٠٤

أ) $ص = ع^{ه(س)} \Leftarrow \log_ع ص = ه(س)$ ①

ب) $\log_ع ص = ه(س) \log_ع ع \Leftarrow \frac{ص'}{ص} = ه'(س) \log_ع ع$ ①

$ص' = ص \cdot ه'(س) \cdot \log_ع ع \Leftarrow ص' = ع^{ه(س)} \cdot ه'(س) \cdot \log_ع ع$ ①

٣٤٥

ب) القطع الناقص الذي بؤرتاه $P(٢\sqrt{٣}، ٧)$ ، $(٢\sqrt{٩}، ٧)$

أ) $ج^٢ = ٩ - ٣ = ٦ \Leftarrow ج = ٣$ ①

$٢P = ١٢ \Leftarrow P = ٦$ ①

$ه = \frac{P}{ج} = \frac{٦}{٣} = ٢$ ①

$ب^٢ = P^٢ - ج^٢ \Leftarrow ب^٢ = ٣٦ - ٩ \Leftarrow ب^٢ = ٢٧$ ①

المركز $(\frac{٣+٩}{٢}، ٧) = (٦، ٧)$ ①

قطع ناقص محوره الأكبر يوازي محور السينات

$\frac{(س-٦)^٢}{P^٢} + \frac{(ص-٧)^٢}{ب^٢} = ١ \Leftarrow \frac{(س-٦)^٢}{٣٦} + \frac{(ص-٧)^٢}{٢٧} = ١$ ①

٣٠٥

جـ) $ه = \frac{٩-٣}{٢} = ٣$ ①

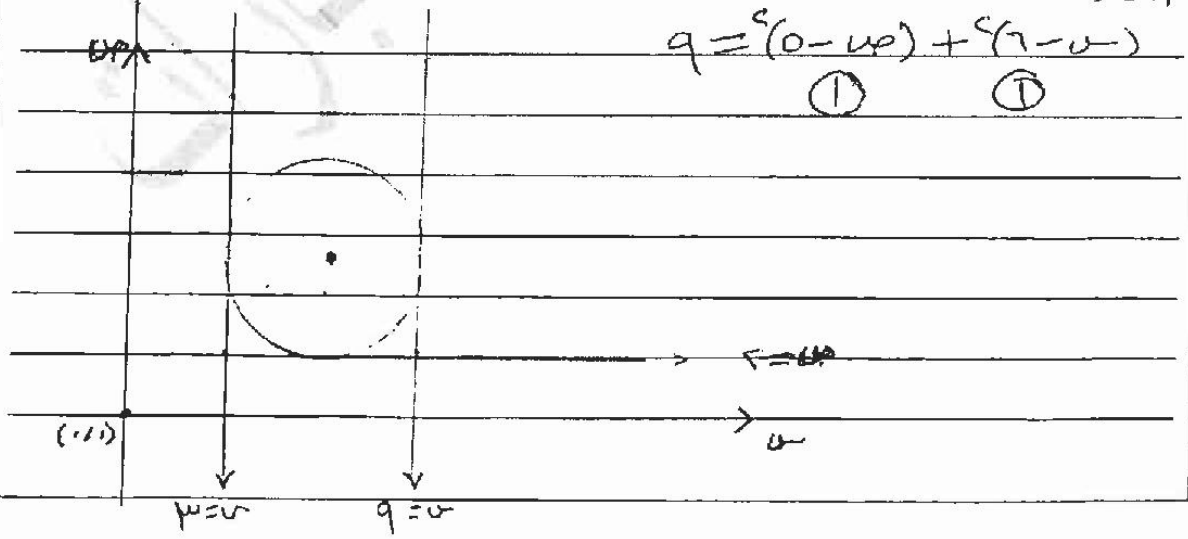
المركز $(ه+٣، ٧، ه+٢)$ ①

$(٦، ٧، ٥)$

المعادلة

$(س-٦)^٢ + (ص-٧)^٢ = ٩$

① ①



رقم الصفحة في الكتاب	
	السؤال الرابع : (١٨ علامة)
٣٤٧	أ) نقطة تقاطع المحور مع الدليل للقطع (٢، -٥) ①
	الرأس $\left(\frac{-٣}{٢}، \frac{٢+٥-}{٢}\right) = \left(\frac{-٣}{٢}، ٢\right)$ ①
	بعد البؤرة عن الرأس $= \frac{٤}{٢} = ٢$ ①
	القطع مكافئ يفتح لليمين ①
	$(ص - ٥)^٢ = ٤ \times ٢ (س - ٢)$ ①
	$(ص - ٥)^٢ = ١٤ (س + \frac{٣}{٢})$ ①
٣٤٧	ب) رأساه $(٤، -٦)$ ، $(٤، ٦)$
	$\frac{ه}{٣} = \frac{٥}{٣} > ١$ ∴ قطع زائد ①
	$ب^٢ = ١٢ \Leftarrow ٢ب = ٢٤$ ①
	$ه = \frac{ح}{ب} \Leftarrow \frac{٥}{٣} = \frac{ح}{٦} \Leftarrow ح = ١٠$ ①
	$ح^٢ = ب^٢ + د^٢ \Leftarrow ١٠٠ = ٣٦ + د^٢ \Leftarrow د = ٦٤$ ①
	مركز القطع الزائد $\left(\frac{٤+٤}{٢}، \frac{-٦+٦}{٢}\right) = (٤، ٠)$ ①
	قطع زائد محوره القاطع يوازي محور الصادات
	$\frac{(ص - ٠)^٢}{٣٦} - \frac{(س - ٤)^٢}{٦٤} = ١ \Leftarrow \frac{(ص - ك)^٢}{ب^٢} - \frac{(س - ه)^٢}{د^٢} = ١$ ①
٣٤٧	ج) $س = ٣ + ٢ جا ه$ ، $ص = ٤ + ٢ جتا ه$
	$س = ٩ + ١٢ جا ه + ٤ جا^٢ ه$ ① ، $ص = ١٦ + ١٦ جتا ه + ٤ جتا^٢ ه$ ①
	$س^٤ + ص^٤ = ٥٢ + ٤ (جا^٢ ه + جتا^٢ ه) + ١٢ جا ه + ١٦ جتا ه$
	$س^٤ + ص^٤ = ٥٢ + ٤ + ١٢ جا ه + ١٦ جتا ه$
	$س^٤ + ص^٤ = ٥٩ + ٦ (٢ جا ه) + ٨ (٢ جتا ه)$
	$س^٤ + ص^٤ = ٥٩ + ٦ (س - ٣) + ٨ (ص - ٤)$
	$س^٤ + ص^٤ = ٥٩ + ٦ س - ١٨ + ٨ ص - ٣٢$
	$س^٤ + ص^٤ - ٦ س - ٨ ص + ١٢ = ٠$
	∴ معادلة دائرة ①

رقم الصفحة في الكتاب

السؤال الخامس : (٤ علامات)

الرقم	الرمز	الإجابة
١	ب	-٢
٢	ك	١٠
٣	ج	١٠
٤	ج	$\frac{1}{2}$(ن+١)
٥	ب	٢
٦	ك	٤
٧	ك	١٣
٨	م	اليمين
٩	ك	{-٢، ٢، ٤}
١٠	ب	٦
١١	ج	$\frac{3}{5}$
١٢	م	دائرة

حل آخر للسؤال الرابع فرع ج

$س = ٣ + ٢ جتاه$ ، $ص = ٤ + ٢ جاه$

$٢ جتاه = س - ٣$ ①، $٢ جاه = ص - ٤$ ①

$جتاه = \frac{س-٣}{٢}$، $جاه = \frac{ص-٤}{٢}$

$جا^٢ه + جتا^٢ه = \frac{(س-٣)^٢}{٤} + \frac{(ص-٤)^٢}{٤}$ ①، ① $جا^٢ه = \frac{(ص-٤)^٢}{٤}$ ①، $جتا^٢ه = \frac{(س-٣)^٢}{٤}$ ①

$١ = \frac{(س-٣)^٢}{٤} + \frac{(ص-٤)^٢}{٤}$ ①

$٤ = (س-٣)^٢ + (ص-٤)^٢$

∴ معادلة دائرة ①

$$\text{جا}(\text{أ}+\text{ب}) = \text{جا}\,\text{أ}\,\text{جتا}\,\text{ب} + \text{جتا}\,\text{أ}\,\text{جا}\,\text{ب}$$

$$\text{جا}(\text{أ}-\text{ب}) = \text{جا}\,\text{أ}\,\text{جتا}\,\text{ب} - \text{جتا}\,\text{أ}\,\text{جا}\,\text{ب}$$

بالطرح $\quad \text{جا}(\text{أ}+\text{ب}) - \text{جا}(\text{أ}-\text{ب}) = 2\,\text{جتا}\,\text{أ}\,\text{جا}\,\text{ب}$

$$\frac{1}{2}\left(\text{جا}(\text{أ}+\text{ب}) - \text{جا}(\text{أ}-\text{ب})\right) = \text{جتا}\,\text{أ}\,\text{جا}\,\text{ب}$$

$$\frac{1}{2}\left(\text{جا}\,\text{س} - \text{جا}(\text{س}-2\text{ص})\right) = \text{جتا}(\text{س}-\text{ص})\,\text{جا}\,\text{ص}$$

$\text{أ} = \text{س}$، $\text{ب} = 2\text{ص}$

$$\frac{1}{2}\left(\text{جا}\,\text{س} - \text{جا}(\text{س}-2\text{ص})\right) = \text{جتا}(\text{س}-\text{ص})\,\text{جا}\,\text{ص}$$

$$\frac{1}{2}\left(\text{جا}\,\text{س} + \text{جا}\,\text{ص}\right) = \text{جتا}\,\text{س}\,\text{جا}\,\text{ص}$$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \text{جا}\,2\text{س}\,\text{جتا}\,\text{س}\,\text{د}\text{س} = \frac{1}{2}\left[\frac{-\text{جتا}\,3\text{س}}{3} + \text{جا}\,\text{س}\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$

بالتعويض في (1) بالحد الأعلى، وبالتعويض في (1) بالحد الأدنى

$$= \frac{1}{2}\left(\left(\text{جا}\,\frac{\pi}{2} - \frac{\text{جتا}\,3\frac{\pi}{2}}{3}\right) - \left(\text{جا}\,\frac{\pi}{4} - \frac{\text{جتا}\,3\frac{\pi}{4}}{3}\right)\right)$$

بالتعويض في (1)

س ١٠ ب / نفرض $ص = هـ^{س^3}$ ⟸ $س^3 = لو_{هـ} ص$ ⟸ ١

$\frac{د ص}{د س} = ٣ س^2 هـ^{س^3}$ ← $د س = \frac{د ص}{٣ س^2 هـ^{س^3}}$

$\int س^2 . ص . \frac{د ص}{٣ س^2 . ص}$ ١

$= \frac{١}{٣} \int \frac{س^3 . ص . د ص}{ص}$ ١ $\int لو_{هـ} ص . د ص$

أجزاء. $ع = لو_{هـ} ص$ $د ع = \frac{١}{ص} د ص$

$د ص = د هـ$ $هـ = ص$ ١

$\frac{١}{٣} (ص لو_{هـ} ص - \int ص \times \frac{١}{ص} . د ص)$ ١

$= \frac{١}{٣} (ص لو_{هـ} ص - ص) + د$ ١

$= \frac{١}{٣} (س^3 لو_{هـ} س^3 - س^3) + د$ ١

س ١ ب) اذا لم يقسم الطالب قسمة طويلة ولم يكتبها

$$\int \left(1 + \frac{٤}{س^{٢} - ٤}\right) د س$$

وهذا = $\frac{س^{٢}}{س^{٢} - ٤} = \frac{ب}{س - ٢} + \frac{ا}{س + ٢}$

خاتمة السؤال الرئيسي

= ٦

(ب)

$\int_{0}^{1} \int_{s^3}^{s^2} e^{\frac{y}{x}} \, dy \, dx$ ⟵ $x^3 = y^2$ ⟵ $y = x^{\frac{3}{2}}$

$dy = 3x^{\frac{1}{2}} dx \Rightarrow dx = \frac{dy}{3x^{\frac{1}{2}}}$

$\int_{0}^{1} \int_{x^3}^{x^2} e^{\frac{y}{x}} \, dy \, dx = \int_{0}^{1} x \times y \times \frac{dy}{2x^{\frac{1}{2}} e^{\frac{y}{x}}}$

$= \frac{1}{2} \int_{0}^{1} \frac{x^2 y \, dy}{e^{\frac{y}{x}}}$

$= \frac{1}{2} \int_{0}^{1} x^2 dy = \frac{1}{2} \int_{0}^{1} y \ln y \, dy$

$u = \ln y \leftarrow du = \frac{1}{y} dy$

$dv = dy \leftarrow v = y$

$\therefore \frac{1}{2} \int_{0}^{1} y \ln y \, dy = \frac{1}{2} (y \ln y - \int y \times \frac{1}{y} dy)$

$= \frac{1}{2} (y \ln y - y + c)$

$= \frac{1}{2} (e^{\frac{y}{x}} \times x^2 - e^{\frac{y}{x}} + c)$

مثال ۴

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} \cos^3 x \sin x \, dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} (\cos^2 x \sin x)(\cos x \, dx)$$

$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} (-\sin x)(-\cos^2 x)(\cos x \, dx)$$

$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} (-\sin x)(1-\sin^2 x)(\cos x \, dx)$$

$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} (-\sin x + \sin^3 x)(\cos x \, dx)$$

$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} (-\sin x \cos x + \sin^3 x \cos x) \, dx$$

$$= \left[-\frac{1}{2}\sin^2 x + \frac{1}{4}\sin^4 x \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}}$$

$$= \left(-\frac{1}{2}\sin^2 \frac{3\pi}{4} + \frac{1}{4}\sin^4 \frac{3\pi}{4} \right) - \left(-\frac{1}{2}\sin^2 \frac{\pi}{2} + \frac{1}{4}\sin^4 \frac{\pi}{2} \right)$$

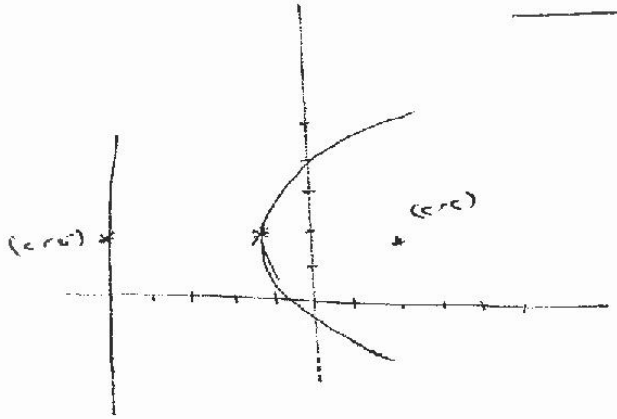
$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4 - \left(-\frac{1}{2}(1)^2 + \frac{1}{4}(1)^4\right)$$

$$= -\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}$$

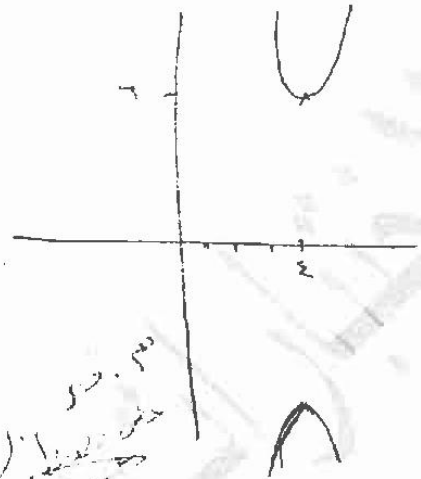
$$= \frac{5}{16}$$

ملاحظات السؤال الرابع

أ) * اذا كتب المعادلة المجموع فقط يأخذ ٣ علامات
* اذا سم بدون تحديد يأخذ علامتين
* اذا سم مع التحديد يأخذ ثلاث علامات



ب) إذا سم بدون تحديد النقاط يأخذ علامتين
اذا كتبت المعادلة المجموع فقط يأخذ ٣ علامات



ج) من آخر

$س - ٣ = ٢ جتا هـ \leftarrow$ جتا هـ $= \frac{س-٣}{٢}$ — ①

$ص - ٤ = ٢ جا هـ \leftarrow$ جا هـ $= \frac{ص-٤}{٢}$ ← ①

جا^{٢} هـ $= \left(\frac{س-٣}{٢}\right)^{٢}$ جتا^{٢} هـ $= \left(\frac{ص-٤}{٢}\right)^{٢}$ ← ①

جا^{٢} هـ + جتا^{٢} هـ $= \left(\frac{س-٣}{٢}\right)^{٢} + \left(\frac{ص-٤}{٢}\right)^{٢}$

① ①

$١ = \frac{(س-٣)^{٢}}{٤} + \frac{(ص-٤)^{٢}}{٤} \leftarrow ٤ = (س-٣)^{٢} + (ص-٤)^{٢}$

المعادلة دائرة ①

السؤال الثاني

نوع ①

$$\frac{dp}{ds} = \frac{1}{s\sqrt{2 + \log_e s}}$$

$$dp = \frac{ds}{s\sqrt{2 + \log_e s}}$$

$$p = \int \frac{ds}{s\sqrt{2 + \log_e s}} + c$$

تغيير المتغير

$$p = \sqrt{3 + \log_e s}$$

$$p^2 = 3 + \log_e s$$

$$2p\,dp = \frac{ds}{s}$$

$$p = \int \frac{2s\,dp\,dp}{s} + c$$

$$= \int 2\,dp + c$$

$$= 2p + c$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{2+\log_3 x}}$$

$$dy = \frac{1}{\sqrt{2+\log_3 x}}\, dx$$

$$\int dy = \int \frac{1}{\sqrt{2+\log_3 x}}\, dx$$

$$y = \int \frac{1}{\sqrt{(2+\log_3 x)}}\, dx$$

$$\log_3 x = l$$

$$\frac{dl}{dx} = \frac{1}{x}$$

$$= x\, dl$$

$$y = \int (2+l)^{-\frac{1}{2}}\, dl$$

$$= \frac{1}{-\frac{1}{2}+1}(2+l)^{-\frac{1}{2}+1} + c$$

$$= 2(2+\log_3 x)^{\frac{1}{2}} + c$$

$$= 2\sqrt{2+\log_3 x} + c$$

$$(3,2) \Rightarrow 2 = 2\sqrt{2+\log_3 3} + c$$

$$2 = 2\times 2 + c$$

$$c = 0$$

$$y = 2\sqrt{2+\log_3 x} + 0$$

$$y = 2\sqrt{2+\log_3 x}$$

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cos^2 x \, dx$$

$$= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cdot \cos^2 x \cdot \sin x \, dx$$

$$= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2 x) \cos^2 x \sin x \, dx$$

$$= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 x - \cos^4 x) \sin x \, dx$$

$$= -\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 x - \cos^4 x)(-\sin x) \, dx$$

$$= -\left[\frac{\cos^3 x}{3} - \frac{\cos^5 x}{5} \right]_{0}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= -\left(0 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \right)$$

$$= \frac{2}{15}$$

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cos^2 x \, dx$$

$$= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cdot \cos^2 x \cdot \sin x \, dx$$

$$= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2 x) \cos^2 x \sin x \, dx$$

$$= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 x - \cos^4 x) \sin x \, dx$$

$$= -\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 x - \cos^4 x)(-\sin x) \, dx$$

$$= -\left[\frac{\cos^3 x}{3} - \frac{\cos^5 x}{5} \right]_{0}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= -\left(0 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \right)$$

$$= \frac{2}{15}$$

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \text{جا}^2 س \text{ جتا}^2 س \, د س = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (\text{جا} س \text{ جتا} س)^2 \, د س \quad (1)$$

$$= \frac{1}{4} \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \text{جا}^2 2س \, د س$$

$$= \frac{1}{4} \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \text{جا} 2س (1 - \text{جتا} 2س) \, د س$$

$$= \frac{1}{4} \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (\text{جا} 2س - \text{جا} 2س \text{ جتا} 2س) \, د س$$

$$= \frac{1}{4} \left[\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \text{جا} 2س \, د س - \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \text{جا} 2س \text{ جتا} 2س \, د س \right]$$

بتعويض (1) علاقة

$$= \frac{1}{4} \left[\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \text{جا} 2س \, د س - \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \text{جا} 2س \text{ جتا} 2س \, د س \right]$$

نفرض

$$\text{جا} 2س = ص$$

$$\frac{1}{2} \text{جتا} 2س \, د س = د ص$$

$$\text{جتا} 2س \, د س = 2 \, د ص$$

$$= \frac{1}{4} \left[\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \text{جا} 2س \, د س - \int_{0}^{0} ص (2 \, د ص) \right]$$

$$= \frac{1}{4} \left[\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \text{جا} 2س \, د س - 0 \right]$$

$$= \frac{1}{4} \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \text{جا} 2س \, د س$$

$$= \frac{1}{4} \left[-\frac{1}{2} \text{جتا} 2س \right]_{0}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= -\frac{1}{8} [\text{جتا} \pi - \text{جتا} 0]$$

$$= -\frac{1}{8} [-1 - 1]$$

$$= \frac{1}{4}$$

علاقة بالتوليف

$$\text{جتا} 2س = 2 \text{جتا}^2 س - 1$$

$$\text{جتا}^2 س = \frac{\text{جتا} 2س + 1}{2}$$