س١ جد كلاً من التكاملين التاليين

١) $\int_{\text{هـ}} (\text{جتا}^3 س \text{ جتا} س - \text{جتا}^3 س) \, د س$

٢) $\int_{1}^{\sqrt{8}} \frac{٣ \, د س}{\sqrt{س^4 + ٤ س + ٣ \sqrt{س^3}}}$

الحل: ١) $\int_{\text{هـ}} (\text{جتا}^3 س + \text{جتا}^3 س - \text{جتا}^3 س) \, د س$

$\int_{\text{هـ}} \text{جتا}^3 س \, د س$

$ع = \text{هـ}^{س} \leftarrow ع د = \text{هـ}^{س} د س .$

$ك = \text{جتا}^3 س \leftarrow ل = \frac{1}{4} \text{جا} ٤ س .$

$\int_{\text{هـ}} \text{جتا}^3 س \, د س = \frac{1}{4} \text{هـ}^{س} \text{جا} ٤ س - \int \frac{1}{4} \text{هـ}^{س} \text{جا} ٤ س \, د س$

نجد $\int_{\text{هـ}} \text{جا} ٤ س \, د س$

$ع = \text{هـ}^{س} \leftarrow ع د = \text{هـ}^{س} د س .$

$ك = \text{جا} ٤ س \leftarrow ل = -\frac{1}{4} \text{جتا} ٤ س .$

$\int_{\text{هـ}} \text{جا} ٤ س \, د س = -\frac{1}{4} \text{هـ}^{س} \text{جتا} ٤ س + \frac{1}{4} \int_{\text{هـ}} \text{هـ}^{س} \text{جتا} ٤ س \, د س$

$\int_{\text{هـ}} \text{جا} ٤ س \, د س = \frac{1}{4} \text{هـ}^{س} \text{جا} ٤ س +$

$\frac{1}{16} \text{هـ}^{س} \text{جتا} ٤ س - \frac{1}{16} \int_{\text{هـ}} \text{هـ}^{س} \text{جتا} ٤ س \, د س$

٢) نفرض أن $ص = \sqrt{س^3} \leftarrow \frac{د ص}{د س} = \frac{1}{2} س^{-\frac{1}{2}}$

$\frac{د ص}{د س} = \frac{1}{3\sqrt{س^2}} \leftarrow د س = ٣ ص^2 \, د ص .$

$\int_{1}^{\sqrt{8}} \frac{٦ ص^2 \, د ص}{ص^4 + ٤ ص^3 + ٣ ص^2} = \int_{1}^{\sqrt{8}} \frac{٦ \, د ص}{ص^2 + ٤ ص + ٣}$

$\frac{٦}{(ص+٣)(ص+١)} = \frac{م}{ص+٣} + \frac{ن}{ص+١}$

$م (ص+١) + ن (ص+٣) = ٦$

عند $ص = -١ \leftarrow ٢ن = ٦ \leftarrow ن = ٣$

$ص = -٣ \leftarrow -٢م = ٦ \leftarrow م = -٣$

$\int_{1}^{\sqrt{8}} \frac{٦ \, د ص}{(ص+٣)(ص+١)} = \int_{1}^{\sqrt{8}} \frac{-٣ \, د ص}{ص+٣} + \int_{1}^{\sqrt{8}} \frac{٣ \, د ص}{ص+١}$

$-٣ \left[\text{لو}_{\text{هـ}} |ص+٣| \right]_{1}^{\sqrt{8}} + ٣ \left[\text{لو}_{\text{هـ}} |ص+١| \right]_{1}^{\sqrt{8}}$

$-٣ (\text{لو}_{\text{هـ}} ٥ - \text{لو}_{\text{هـ}} ٤) + ٣ (\text{لو}_{\text{هـ}} ٣ - \text{لو}_{\text{هـ}} ٢)$

$٣ (\text{لو}_{\text{هـ}} ٣ - \text{لو}_{\text{هـ}} ٢ - \text{لو}_{\text{هـ}} ٥ + \text{لو}_{\text{هـ}} ٤)$

$٣ (\text{لو}_{\text{هـ}} \frac{١٢}{١٠}) = ٣ \text{لو}_{\text{هـ}} ١٫٢ .$

منهاجي
متعة التعليم الهادف

أسئلة وزارية على التكامل

س٢ إذا كان ميل المماس لمنحنى علاقة عند النقطة $(س، ص)$ يساوي $\frac{-ص(س^{-٤}-١)}{س^{٤}}$ فجد قاعدة هذه العلاقة إذا علمت أن منحناها يمر بالنقطة $(١، ١-)$.

الحل: ميل المماس $= \frac{د ص}{د س}$

$$\frac{د ص}{د س} = \frac{-ص(س^{-٤}-١)}{س^{٤}}$$

$$\frac{د ص}{ص} = \frac{(١-س^{-٤})}{س^{٤}}\, د س$$

$$\int \frac{د ص}{ص} = \int (س^{-٤}-١).د س$$

$$\text{لو}_{هـ}|ص| = \frac{س^{-٣}}{-٣} - س + ج$$

$$\text{لو}_{هـ}|ص| = \frac{-١}{٣س^{٣}} - س + ج$$

من العلاقة يمر بالنقطة $(١، ١-)$

$$\text{لو}_{هـ}|-١| = \frac{-١}{١} - ١ + ج$$

$$صفر = -٢ + ج \leftarrow هـ = ٢$$

∴ قاعدة العلاقة

$$\text{لو}_{هـ}|ص| = \frac{-١}{٣س^{٣}} - س + ٢ .$$

س٣ إذا كانت $ص = هـ^{\text{م جتاس}} + \text{لو}_{هـ}\text{جاس} + ؟$ $\frac{د س}{٢+\text{جاس}}$ وكان $\left|\frac{د ص}{د س}\right|_{س=\frac{\pi}{٢}} = -٢$

فجد قيمة الثابت م ؟

الحل:

$$ص = هـ^{\text{م جتاس}} + \text{لو}_{هـ}\text{جاس} + \int^{\pi} \frac{د س}{٢+\text{جاس}}$$

$$\frac{د ص}{د س} = هـ^{\text{م جتاس}}.(-م\,\text{جاس}) + \frac{\text{م جتاس}}{\text{جاس}} + صفر$$

$$\left|\frac{د ص}{د س}\right|_{س=\frac{\pi}{٢}} = هـ^{\text{م جتا}\frac{\pi}{٢}}.(-م\,\text{جا}\frac{\pi}{٢}) + \frac{\text{جتا}\frac{\pi}{٢}}{\text{جا}\frac{\pi}{٢}} = -٢$$

$$-م \times ١ \times ١ + صفر = -٢$$

$$-م = -٢ \Leftarrow \boxed{م = ٢}$$

س٤ إذا كان $هـ$ اقتراناً متصلاً على مجاله وكان $\int (\text{جا}\frac{\pi}{٣}) هـ(س)\, د س = ١ + س^{٤}$ فإن $هـ(س)$

أ) $٤س$ ب) $١+س^{٤}$ ج) $-٤س$ د) $١-س^{٤}$

الحل: نشتق الطرفين بالنسبة لـ س

$$(\text{جا}\frac{\pi}{٣}) هـ(س) = ٤س^{٣}$$

$$\frac{١}{٢} \times هـ(س) = ٤س^{٣}$$

$$هـ(س) = ٨س^{٣}$$

لا توجد

منهاجي
متعة التعليم الهادف

س٥ جد قيمة التكاملات التالية:

١) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{دس}{1-جتاس}$.

٢) $\int \frac{دس}{ظاس\,(1+ظاس)^4}$

٣) $\int_{و}$ لو (س٤ - ١) . دس .

الحل: ١) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1+جتاس)\,دس}{(1-جتاس)(1+جتاس)} =$

$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+جتاس}{1-جتاس^2}\,.دس = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+جتاس}{جا^2س}\,.دس$

$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{جا^2س} + \frac{جتاس}{جا^2س}\,.دس$

$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (قتا^2س + ظتاس . قتاس)\,.دس$

$-ظتاس - قتاس\,]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$.

$(-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{2}{\sqrt{3}}) - (-1-\sqrt{2})$

$1+\sqrt{2}-\sqrt{3}$.

---

٢) نفرض أن ظاس = ص ← دص = $\frac{1}{جتا^2س}$ دس

← دس = جتا^2س دص ← دس = $\frac{دص}{1+ص^2}$.

$\int \frac{ص^2 . دص}{ص(1+ص^2)^4} = \int \frac{ص}{(1+ص^2)^4}\,.دص$

$\int (1+ص^2)^{-4} . دص = -\frac{1}{3}(1+ص^2)^{-3} + جـ$

$\frac{-2}{3(1+ظاس)^3} + جـ$

---

٣) نفرض أن ص = لو$_{و}$(س٤ - ١) ← دص = $\frac{4س^3}{س^4-1}$

ع = دس ← س = ع .

$\int$ لو$_{و}$(س٤ - ١) دس = س لو$_{و}$(س٤ - ١) - $\int \frac{4ع^4}{ع^4-1}$. دع

$= س$ لو$_{و}$(س٤ - ١) - $2\int 1 + \frac{1}{ع^4-1}$. دع

$= س$ لو$_{و}$(س٤ - ١) - $2ع - \int \frac{ك}{ع-1}$. دع

$\frac{2}{ع^4-1} = \frac{م}{ع-1} + \frac{ب}{ع+1}$

$2 = م(ع+1) + ب(ع-1)$

ع = ١ ⟸ م = ١

ع = -١ ⟸ ب = -١

$\int \frac{ك}{ع^4-1}$. دع = $\int \frac{1}{ع-1}$. دع + $\int \frac{-1}{ع+1}$. دع

$=$ لو$_{و}$(ع-١) - لو$_{و}$(ع+١) + جـ

←

منهاجي
متعة التعليم الهادف

تابع س٥

$\int_{هـ} (لو_{هـ}(س-1))\,دس$ =

$= س\,لو_{هـ}(س-1) - \int س \cdot \frac{1}{س-1}\,دس$

$= س\,لو_{هـ}(س-1) - \int \frac{س-1+1}{س-1}\,دس$

$= س\,لو_{هـ}(س-1) - \int 1\,دس - \int \frac{1}{س-1}\,دس$

$= س\,لو_{هـ}(س-1) - س - لو_{هـ}|س-1| + جـ$

س٦ حل المعادلة التفاضلية

$جا^2 س\,دص + ص\,دس = دص$.

الحل: $جا^2 س\,دص - دص = -ص\,دس$

$دص\,(جا^2 س - 1) = -ص\,دس$

$\frac{دص}{ص} = \frac{دس}{1-جا^2 س}$

$\int \frac{دص}{ص} = \int \frac{دس}{جتا^2 س}$

$\int \frac{دص}{ص} = \int قا^2 س \cdot دس$

$لو_{هـ}|ص| = ظا س + جـ$

$|ص| = هـ^{ظا س + جـ}$

$ص = \pm هـ^{ظا س} \times هـ^{جـ}$

$ص = هـ^{ظا س} \times هـ$ حيث $جـ = هـ$

س٧ اذا كان $م'(س) = هـ^{\frac{1}{س}} + ب\,لو_{هـ} س$

وكان $م'(1) = هـ$ أوجد قيمة الثابت ب .

الحل: $م(س) = \int هـ^{\frac{1}{س}} + ب\,لو_{هـ} س$

$م(س) = \int \frac{1}{س^2} \cdot هـ^{\frac{1}{س}} + ب \times \frac{\frac{1}{س}}{\frac{1}{س}}$

$= -\frac{1}{س^2} \cdot هـ^{\frac{1}{س}} + \frac{ب}{س}$

$م'(1) = -1 \times هـ^1 + \frac{ب}{1}$

$هـ = -هـ + ب \Leftarrow ب = 2هـ$

$\Leftarrow ب = 2هـ$.

س٨ اثبت أن $\int \frac{ظتا\,(لو_{هـ} س)}{س}\,دس = لو_{هـ}|جا\,(لو_{هـ} س)| + جـ$

الحل: نفرض أن $ص = لو_{هـ} س \Leftarrow دص = \frac{1}{س}\,دس$

$\int \frac{ظتا\,(لو_{هـ} س)}{س} \cdot دس = \int ظتا\,ص \cdot دص$

$= \int \frac{جتا\,ص}{جا\,ص} \cdot دص = لو_{هـ}|جا\,ص| + جـ$

$= لو_{هـ}|جا\,(لو_{هـ} س)| + جـ$

منهاجي
متعة التعليم الهادف

س٩ جد التكاملات التالية:

١) $\int (2س - 1)\, جا س \cdot دس$

٢) $\int_{1}^{4} \frac{|1 - س|}{س^2 - 5س + 6} \cdot دس$

الحل: ١) $ع = 2س - 1 \Leftarrow دع = 2\, دس$

$دهـ = جا س \cdot دس \Leftarrow هـ = -جتا س$

$\int ع \cdot دهـ =$

$-(2س - 1) جتا س + \int جتا س \cdot دس$

$-(2س - 1) جتا س + جا س + جـ$

---

٢) $\frac{|1 - س|}{س^2 - 5س + 6} = \frac{س - 1}{س^2 - 5س + 6}$ في الفترة $[1, 4]$

$\frac{س - 1}{(س - 2)(س - 3)} = \frac{أ}{س - 2} + \frac{ب}{س - 3}$

$أ(س - 3) + ب(س - 2) = س - 1$

عندما $س = 3 \Leftarrow ب = 2$

عندما $س = 2 \Leftarrow أ = -1$

$\int_{1}^{4} \left(\frac{-1}{س - 2} + \frac{2}{س - 3}\right) \cdot دس$

$-[لو|س - 2|]_{1}^{4} + 2[لو|س - 3|]_{1}^{4}$

$-(لو_هـ 2 - لو_هـ 1) + 2(لو_هـ 1 - لو_هـ 2)$

$-لو_هـ 2 - 2لو_هـ 2 = -3لو_هـ 2$

س١٠ اذا كان $ق(س)$ اقتران كثير حدود وكان

$ق(1) = 5$ و $ق'(س) = 4$

$\int_{1}^{2} ق(س) \cdot دس = 2$ فجد قاعدة الاقتران $ق(س)$.

الحل: $ق'(س) = \int 4 \cdot دس = 4س + جـ$

$\int_{1}^{2} (4س + جـ) \cdot دس = 3$

$[2س^2 + جـس]_{1}^{2} = 3$

$2 + جـ = 3 \Leftarrow جـ = 1$

$\therefore ق'(س) = 4س + 1$

$ق(س) = \int (4س + 1) \cdot دس$

$= 2س^2 + س + جـ$

$ق(1) = 5 \Leftarrow جـ = 2$

$\boxed{جـ = 2}$

$ق(س) = 2س^2 + س + 2$

س١١ جد التكاملات التالية:

أ) $\int قا^2 س \cdot دس$

ب) $\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} جا^2 س \, جتا^2 س \cdot دس$

جـ) $\int \frac{4\, دس}{س^3 + س}$ ، $س > 0$

منهاجي
متعة التعليم الهادف

أسئلة وزارية على التكامل.

حل (السؤال ٩)

$\int \tan^2 x \, dx$

$u = \tan x \Leftarrow du = \sec^2 x \, dx$

$\int \tan^2 x \, dx = \int u \, du$

$= \int u \, du$

$= u \ln u - \int \ln u \, du$

$= u \ln u - \int \frac{\sin u}{\cos u} \, du$

$= u \ln u + \ln \cos u + c$

$= \tan x \ln \tan x + \ln \cos x + c$

ب) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \sin^2 x \cos x \, dx =$

$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} (\sin x \cos x)^2 \, dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{1}{4} \sin^2 2x \, dx$

$= \frac{1}{4} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{1}{2}(1 - \cos 4x) \, dx$

$= \frac{1}{8} \left[x - \frac{1}{4} \sin 4x \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{0}$

$= \frac{1}{8} \left(0 - \left(-\frac{\pi}{2} - \frac{1}{4} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right)$

$= \frac{1}{8} \left(\frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{\pi}{2} \right)$

جـ) $\int \frac{4}{s^3 + s} \, ds = \int \frac{4}{s(s^2+1)} \, ds$

نفرض أن $s = \tan\theta \Leftarrow ds = \sec^2\theta \, d\theta$

$\therefore d\theta = \frac{ds}{s^2+1}$

$\int \frac{4}{s(s^2+1)} \times \frac{ds}{s^2+1} = \int \frac{4}{s^2(s^2+1)} \, ds$

$\int \frac{2}{\theta(\theta+1)} \, d\theta$

$\frac{2}{\theta(\theta+1)} = \frac{A}{\theta} + \frac{B}{\theta+1}$

$A(\theta+1) + B\theta = 2$

عندما $\theta = -1 \Leftarrow -B = 2 \Leftarrow B = -2$

عندما $\theta = 0 \Leftarrow A = 2$

$\int \frac{2}{\theta(\theta+1)} \, d\theta = \int \frac{2}{\theta} \, d\theta + \int \frac{-2}{\theta+1} \, d\theta$

$= 2 \ln|\theta| - 2 \ln|\theta+1| + c$

$= 2 \ln|s^2| - 2 \ln|s^2+1| + c$

$= 4 \ln|s| - 2 \ln(s^2+1) + c$

منهاجي
متعة التعليم الهادف

١٢س إذا كان ميل المماس لمنحنى العلاقة ص عند النقطة (س، ص) يساوي $\frac{\text{ظا ص}}{\text{١ - جتا س}}$

فجد قاعدة العلاقة ص علماً بأن منحناها يمر بالنقطة $(\frac{\pi}{٤}, ٠)$.

الحل: $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \frac{\text{ظا ص}}{\text{١ - جتا س}}$

$\Leftarrow \frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \frac{\text{هـ}^{\frac{١}{٢}\text{ص}}}{\text{جا س}}$

$\frac{\text{د ص}}{\text{هـ}^{\frac{١}{٢}\text{ص}}} = \frac{\text{د س}}{\text{جا س}}$

$\int \text{هـ}^{-\frac{١}{٢}\text{ص}} \cdot \text{د ص} = \int \text{قتا س} \cdot \text{د س}$

$-٢\text{هـ}^{-\frac{١}{٢}\text{ص}} = -\text{ظتا س} + \text{ج}$

$\text{هـ}^{-\frac{١}{٢}\text{ص}} = \frac{١}{٢}\text{ظتا س} + \text{ج}$ حيث ج $= -\frac{١}{٢}$ ج١

المنحنى يمر بالنقطة $(\frac{\pi}{٤}, ٠)$

$١ = \frac{١}{٢} \times ١ + \text{ج} \Leftarrow \text{ج} = \frac{١}{٢}$

$\text{هـ}^{-\frac{١}{٢}\text{ص}} = \frac{١}{٢}\text{ظتا س} + \frac{١}{٢}$

$\text{هـ}^{-\frac{١}{٢}\text{ص}} = \frac{١}{٢}(\text{ظتا س} + ١)$

$-\frac{١}{٢}\text{ص} = \log_{\text{هـ}} \frac{١}{٢}(\text{ظتا س} + ١)$

$\text{ص} = -٢ \log_{\text{هـ}} \frac{١}{٢}(\text{ظتا س} + ١)$

١٣س $\int_{\frac{١}{٢}}^{١} \frac{(١+\text{س})^{٥}}{\text{س}^{٧}} \cdot \text{د س} =$

$\int_{\frac{١}{٢}}^{١} \frac{١}{\text{س}^{٥}} \times \frac{(١+\text{س})^{٥}}{\text{س}^{٥}} \cdot \text{د س} = \int_{\frac{١}{٢}}^{١} \frac{١}{\text{س}^{٥}} \left(\frac{١+\text{س}}{\text{س}}\right)^{٥} \cdot \text{د س}$

$\int_{\frac{١}{٢}}^{١} \frac{١}{\text{س}^{٥}} (\frac{١}{\text{س}} + ١)^{٥} \cdot \text{د س}$

ص $= \frac{١}{\text{س}} + ١$

$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = -\frac{١}{\text{س}^{٢}}$

$\int_{٣}^{٢} -\text{ص}^{٥} \cdot \text{د ص}$

$\frac{\text{ص}^{٦}}{٦} = \frac{-\text{د ص}}{\text{س}^{٢}} = \text{د ص}$

$\left[-\frac{\text{ص}^{٦}}{٦}\right]_{٣}^{٢}$

س $= \frac{١}{٢} \Rightarrow$ ص $= ٣$

س $= ١ \Rightarrow$ ص $= ٢$

$-\frac{١}{٦}(٢^{٦} - ٣^{٦}) = \frac{٦٦٥}{٦}$.

١٤س $\int \frac{\text{س ظتا س}}{\text{جا}^{٢}\text{س}} \cdot \text{د س} =$

$\int \text{س} \times \frac{١}{\text{جا س}} \times \frac{\text{ظتا س}}{\text{جا س}} \text{ د س}$

$\int \text{س} \cdot \text{قتا س} \cdot \text{ظتا س} \cdot \text{د س} =$

ع $= \text{س} \Rightarrow \text{د ع} = \text{د س}$

د هـ $= \text{قتا س ظتا س} \Rightarrow \text{هـ} = -\text{قتا س}$

$\int \text{س قتا س} \cdot \text{ظتا س} \cdot \text{د س} =$

$-\text{س قتا س} + \int \text{قتا س} \cdot \text{د س}$

$-\text{س قتا س} + \int (\text{قتا}^{٢}\text{س} - ١) \cdot \text{د س}$

$-\text{س قتا س} + \int (-\text{ظتا س} - \text{س}) + \text{ج}$

منهاجي
متعة التعليم الهادف

١٥) $\int \frac{س^٣ - ١}{س^٤ + ٢س} \, د س$ بالقسمة

$= \int \left((س - ٢) + \frac{٤س - ١}{س^٤ + ٢س} \right) د س$

$\frac{٤س - ١}{س^٤ + ٢س} = \frac{٤س - ١}{س(س+٢)}$

$= \frac{أ}{س} + \frac{ب}{س+٢}$

$أ(س+٢) + ب س = ٤س - ١$

عندما $س = -٢ \Leftarrow -٢ب = -٩ \Leftarrow ب = \frac{٩}{٢}$

عندما $س = ٠ \Leftarrow ٢أ = -١ \Leftarrow أ = -\frac{١}{٢}$

$\int (س - ٢ + \frac{٤س - ١}{س^٤ + ٢س}) \, د س =$

$\int (س - ٢ + \frac{-\frac{١}{٢}}{س} + \frac{\frac{٩}{٢}}{س+٢}) \, د س$

$\frac{١}{٢} س^٢ - ٢س - \frac{١}{٢} لو|س| + \frac{٩}{٢} لو|س+٢| + ج$

١٦) سقط جسم كتلته $ك$ سقوطاً حراً من السكون فإذا كانت مقاومة الهواء لحركة الجسم تتناسب طردياً مع مربع سرعة الجسم، وكان ثابت التناسب $٠,٠٨ ك$ فجد سرعة الجسم بعد ٣ ثوان من بدء الحركة.

الحل: $ت = ك ع^{\frac{١}{٣}}$

$\frac{د ع}{د ن} = ك ع^{\frac{١}{٣}}$

$ع^{-\frac{١}{٣}} \cdot د ع = ك \, د ن$

$\int ع^{-\frac{١}{٣}} \cdot د ع = \int ك \, د ن$

$\frac{٣}{٢} ع^{\frac{٢}{٣}} = ك ن + ج$

عندما $ن = ٠$ ، $ع = ٠ \Leftarrow ج = ٠$

$\Leftarrow \frac{٣}{٢} ع^{\frac{٢}{٣}} = ك ن$ عندما $ن = ٣$

$ع = ٨$

$\frac{٣}{٢} (٨)^{\frac{٢}{٣}} = ٣ك$

$٢ك = ٨^{\frac{٢}{٣}} \Leftarrow ٢ك = ٤ \Leftarrow ك = ٢$

١٧) $\int \frac{س}{جتا ٢س + ١} \, د س =$

$\int \frac{س}{٢جتا^٢س - ١ + ١} \, د س = \int \frac{س}{٢جتا^٢س} \, د س$

$\frac{١}{٢} \int س \, قا^٢س \, د س$

$ف = س \rightarrow ف = د س$

$د هـ = قا^٢س \, د س \rightarrow هـ = ظا س$

$\frac{١}{٢} \int س \, قا^٢س \, د س = \frac{١}{٢} س ظا س - \frac{١}{٢} \int ظا س \, د س$

$= \frac{١}{٢} س ظا س - \frac{١}{٢} \int \frac{جا س}{جتا س} \, د س$

$= \frac{١}{٢} س ظا س + \frac{١}{٢} لو|جتا س| + ج$

منهاجي
متعة التعليم الهادف

س١٨ $\int_{-1}^{4} \frac{س}{\sqrt{٥+س}}$ د س .

ص = $\sqrt{٥+س}$ ⇐ س = ص^{٢} − ٥

د س = ٢ ص د ص

عندما س = −١ ⇐ ص = ٢

س = ٤ ⇐ ص = ٣

$\int_{-1}^{4} \frac{س}{\sqrt{٥+س}}$ د س = $\int_{٢}^{٣} \frac{٢ ص (ص^{٢}-٥)}{ص}$. د ص

$٢\int_{٢}^{٣} (ص^{٢}-٥)$ د ص = $٢\left[\left(\frac{ص^{٣}}{٣} - ٥ ص\right)\right]_{٢}^{٣}$

$٢\left(\left(٩ - ١٥\right) - \left(\frac{٨}{٣} - ١٠\right)\right) = \frac{٨}{٣}$.

س١٩ $\int \frac{هـ^{س}}{هـ^{٢س}-٤}$ د س .

ص = $هـ^{س}$ ⇐ د ص = $هـ^{س}$ د س

$\int \frac{د ص}{ص^{٢}-٤} = \int \frac{د ص}{(ص-٢)(ص+٢)}$

$\frac{١}{(ص-٢)(ص+٢)} = \frac{أ}{ص-٢} + \frac{ب}{ص+٢}$

أ (ص+٢) + ب (ص−٢) = ١

ص = ٢ ⇐ ٤أ = ١ ⇐ أ = $\frac{١}{٤}$.

ص = −٢ ⇐ −٤ب = ١ ⇐ ب = $-\frac{١}{٤}$.

$\int \frac{د ص}{(ص-٢)(ص+٢)} = \int \frac{\frac{١}{٤}}{ص-٢}$ د ص + $\int \frac{-\frac{١}{٤}}{ص+٢}$ د ص

$\frac{١}{٤}$ لو$_{هـ}$ |ص−٢| − $\frac{١}{٤}$ لو$_{هـ}$ |ص+٢| + ﺟـ

$\frac{١}{٤}$ لو$_{هـ}$ |$هـ^{س}$−٢| − $\frac{١}{٤}$ لو$_{هـ}$ |$هـ^{س}$+٢| + ﺟـ

س ؟ اذا كان ميل المماس لمنحنى علاقة عند النقطة (س، ص) يساوي ٢ س ص ، فجد قيمة (قيم) ص عندما س = ٣ علماً بأن منحنى العلاقة يمر بالنقطة (٣، ١٦) .

الحل: $\frac{د ص}{د س}$ = ٢ س ص ⇐ $\frac{د ص}{ص}$ = ٢ س د س

لو$_{هـ}$ |ص| = س^{٢} + ﺟـ

المنحنى يمر بالنقطة (٣، ١٦) ⇐

لو$_{هـ}$ ١٦ = ٩ + ﺟـ ⇐ ﺟـ = −٩

اذن لو$_{هـ}$ |ص| = س^{٢} − ٩

عندما س = ٣ ⇐ لو$_{هـ}$ |ص| = ٩ − ٩ = ٠

لو$_{هـ}$ |ص| = ٠ ⇐ |ص| = $هـ^{٠}$.

|ص| = $هـ^{٠}$ ومنه ص = $هـ^{٠}$.

س١٧ $\int_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{\pi}{٢}}$ جا^{٣}س جتا س . د س .

$\int_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{\pi}{٢}}$ جا^{٣}س جتا س . د س = $\int_{\frac{\sqrt{٢}}{٢}}^{١}$ ص^{٣} د ص

$\int$ جا^{ن}س جتا س . د س

لنفرض أن
ص = جا س
$\frac{د ص}{د س}$ = جتا س
د ص = جتا س . د س

$\int$ ص^{ن} د ص = $\frac{ص^{ن+١}}{ن+١}$ + ﺟـ .

$\int_{\frac{\sqrt{٢}}{٢}}^{١}$ ص^{٣} د ص = $\left[\frac{ص^{٤}}{٤}\right]_{\frac{\sqrt{٢}}{٢}}^{١}$ = $-\frac{١}{٤}\left(٠ - \frac{١}{٤}\right)$

= $-\frac{١}{٤} \times -\frac{١}{٤}$ = $\frac{١}{١٦}$.

س٢٢) $\int_{0}^{\ln 2} e^{3x}\,dx$

$= \int_{0}^{\ln 2} e^{3x}\,\frac{dx}{3e^{3x}}$

$= \int_{0}^{\ln 2} \frac{dx}{3}$

$= \frac{1}{3}\int_{0}^{\ln 2} dx$

$= \frac{1}{3}\int_{0}^{\ln 2} dx$

$= \frac{1}{3}(x)_{0}^{\ln 2}$

$= \frac{1}{3}(\ln 2 - 0)$

$= \frac{1}{3}\ln 2$

$y = e^{3x}$
$\frac{dy}{dx} = 3e^{3x}$

$u = x \Rightarrow du = dx$
$dv = e^{3x}dx \Rightarrow v = \frac{1}{3}e^{3x}$

س٢٣) $\int_{0}^{\sqrt{3}} \frac{x^2}{x^4-4}\,dx$

$= \int_{0}^{\sqrt{3}} \frac{x^2}{(x^2-2)(x^2+2)}\,dx$

$= \int_{0}^{\sqrt{3}} \left(\frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2}\right)dx$

$\frac{x^2}{x^4-4} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2}$

$A(x+2) + B(x-2) = x^2$

عندما $x = -2 \Rightarrow -4B = 4 \Rightarrow B = -1$

عندما $x = 2 \Rightarrow 4A = 4 \Rightarrow A = 1$

$= \int_{0}^{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2}\right)dx$

$= \int_{0}^{\sqrt{3}} \frac{1}{x-2}\,dx - \int_{0}^{\sqrt{3}} \frac{1}{x+2}\,dx$

$= \ln|x-2| - \ln|x+2| + c$

$\frac{1}{x^2-4} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2}$

$\frac{1}{x^2-4} = \frac{-\frac{1}{4}}{x-2} + \frac{\frac{1}{4}}{x+2}$

س٢٤) إذا كان معدل الطارئ لتغير العلاقة ص عند النقطة $(s, f(s))$ يساوي $\frac{1}{\sqrt{s^3+1}}$ ، $s > 0$.

فجد قاعدة العلاقة ص علماً بأن منحناها يمر بالنقطة $(\ln 4, 1)$ ، ln العدد النيبري.

الحل: $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x^3+1}} \Leftarrow$

$y = \int \frac{dx}{\sqrt{x^3+1}}$

$y = \int \frac{1}{\sqrt{x^3+1}} \cdot dx$

$y = \int (x^3+1)^{-\frac{1}{2}}\,dx$

$y = 2(x^3+1)^{\frac{1}{2}} + c$

$y = 2\sqrt{x^3+1} + c$

$4 = 2\sqrt{e^3+1} + c$

$4 = 2\sqrt{e^3+1} + c \Rightarrow \boxed{c = 0}$

$y = 2\sqrt{x^3+1}$.

$h = e^3+1$
$\frac{dh}{dx} = 3x^2$

س٢٥ إذا كان ص = ٤^{ه(س)} وكانت ه(س) قابلة للاشتقاق فأثبت أن

$\frac{د ص}{د س} = ٤^{ه(س)} \times \log_{هـ} ٤ \times ه'(س)$

الحل: ص = ٤^{ه(س)}

$\log_{هـ} ص = \log_{هـ} ٤^{ه(س)}$

$\log_{هـ} ص = ه(س) \log_{هـ} ٤$

$\frac{ص'}{ص} = ه'(س) \log_{هـ} ٤$

$ص' = ص \cdot ه'(س) \log_{هـ} ٤$

$ص' = ٤^{ه(س)} \cdot ه'(س) \log_{هـ} ٤$

منهاجي
متعة التعليم الهادف

س٢٦ قذفت كرة معدنية برج ارتفاعه (٤٥)م عن سطح الأرض إلى أعلى بسرعة ابتدائية مقدارها (٤٠) م/ث وبتسارع مقداره (-١٠) م/ث². جد الزمن الذي استغرقته الكرة لتعود إلى سطح الأرض.

الحل: $ن = \frac{د ع}{د ن} = -١٠$

$د ع = \int -١٠ \, د ن$

$ع = -١٠ن + جـ_١$ ، $ع(٠) = ٤٠ \Leftarrow جـ_١ = ٤٠$

$ع = -١٠ن + ٤٠$

$ع = \frac{د ف}{د ن} = -١٠ن + ٤٠$

$د ف = \int (-١٠ن + ٤٠) \, د ن$

$ف = -٥ن^٢ + ٤٠ن + جـ_٢$ ، $ف(٠) = ٤٥ \Leftarrow جـ_٢ = ٤٥$

$ف(ن) = -٥ن^٢ + ٤٠ن + ٤٥$

$ن \to ٠$ ، $ف = ٠ \Leftarrow -٥ن^٢ + ٤٠ن + ٤٥ = ٠$ ÷ -٥

$ن^٢ - ٨ن - ٩ = ٠$

$(ن - ٩)(ن + ١) = ٠ \Leftarrow ن = ٩$ ، $ن = -١$ مرفوض

س٢٧ إذا كان ص = $\sqrt{١ + هـ^{س}}$ فجد $\frac{د ص}{د س}$ عندما س = صفر.

(م)

الحل: $\frac{د ص}{د س} = \frac{هـ^{س}}{٢\sqrt{١ + هـ^{س}}}$

$\left.\frac{د ص}{د س}\right|_{س=٠} = \frac{هـ^{٠}}{٢\sqrt{١ + هـ^{٠}}} = \frac{١}{٢\sqrt{٢}}$

(ن) إذا كانت ه كثير حدود من الدرجة الثانية وكان ه(٠) = ه(١) = صفر، $\int_{٠}^{١} ه(س) \, د س = ١$ فجد قاعدة الاقتران.

الحل: $ه(س) = م س^٢ + ب س + جـ$

$ه(٠) = ٠ \Leftarrow جـ = ٠$ ، $ه(س) = م س^٢ + ب س$

$ه(١) = ٠ \Leftarrow م + ب = ٠ \Leftarrow \boxed{م = -ب}$

$\therefore ه(س) = -ب س^٢ + ب س$

$\int_{٠}^{١} ه(س) \, د س = ١ \Leftarrow \int_{٠}^{١} (-ب س^٢ + ب س) \, د س = ١$

$\left[-\frac{ب}{٣} س^٣ + \frac{ب}{٢} س^٢\right]_{٠}^{١} = ١$

$-\frac{ب}{٣} + \frac{ب}{٢} - صفر = ١ \Leftarrow \frac{ب}{٢} - \frac{ب}{٣} = ١$

$\frac{٣ب - ٢ب}{٦} = ١ \Leftarrow \frac{ب}{٦} = ١ \Leftarrow \boxed{ب = ٦}$

$\boxed{م = -٦}$ $\therefore ه(س) = -٦س^٢ + ٦س$.

س٢٨ اذا كان $\int_{-1}^{2}(3x^2 - k)\,dx = -20$ فجد قيم الثابت ج .

الحل: الداخل اولاً : $\left[\frac{3x^3}{3}\right]_{-1}^{2} \leftarrow \left[x^3\right]_{-1}^{2} = 9 - (-1) = 10$

$\int_{-1}^{3}(3x^2 - 2kx)\,dx = -20$

$\int_{-1}^{2}(3x^2 - 3k^2)\,dx = -20$

$\left[x^3 - 2k^2 x\right]_{-1}^{2} = -20$

$-6 - 9k^2 - (-1 + 3k^2) = -20$

$-28 - 12k^2 = -20 \Leftarrow 12k^2 = 48$

$\Leftarrow k^2 = 4 \Leftarrow k = \pm 2$.

س٢٩ جد التكاملات التالية:

(أ) $\int \text{قا}^4(2x)\,\text{ظا}^3(2x)\,dx$

الحل: $u = \text{ظا}\,3x \leftarrow dx = \frac{du}{3\,\text{قا}^2(3x)}$

$\int \text{قا}^4(3x)\cdot u^3 \cdot \frac{du}{3\,\text{قا}^2 3x} =$

$\frac{1}{3}\int \text{قا}^2(3x)\cdot u^3\,du$ ($\text{قا}^2 3x = \text{ظا}^2 3x + 1 = u^2 + 1$)

$\frac{1}{3}\int (u^2+1)\,u^3\,du = \frac{1}{3}\int u^5 + u^3\,du$

$\frac{1}{3}\left(\frac{u^6}{6} + \frac{u^4}{4}\right) + ج$

$\frac{1}{3}\left(\frac{\text{ظا}^6 2x}{6} + \frac{\text{ظا}^4 2x}{4}\right) + ج$

(ب) $\int x^2 \log_{هـ} x\,dx$

الحل: $u = \log_{هـ} x \leftarrow du = \frac{1}{x}\,dx$

$dv = x^2\,dx \leftarrow v = \frac{x^3}{3}$.

$\int x^2 \log_{هـ} x\,dx =$

$\frac{x^3}{3}\log_{هـ} x - \int \frac{x^3}{3}\cdot\frac{1}{x}\,dx$

$\frac{x^3}{3}\log_{هـ} x - \frac{1}{3}\int x^2\,dx$

$\frac{x^3}{3}\log_{هـ} x - \frac{x^3}{9} + ج$.

(جـ) $\int \frac{x^5 + 2}{x^4 - 1}\,dx$ قسمة

$\int \left(x^3 + x + \frac{x+2}{x^4-1}\right)dx$

$\frac{x+2}{x^4-1} = \frac{أ}{x-1} + \frac{ب}{x+1}$

$أ(x+1) + ب(x-1) = x + 2$

عند $x = 1 \Leftarrow 2أ = 3 \Leftarrow أ = \frac{3}{2}$

عند $x = -1 \Leftarrow -2ب = 1 \Leftarrow ب = -\frac{1}{2}$.

$\int \left(x^3 + x + \frac{\frac{3}{2}}{x-1} + \frac{-\frac{1}{2}}{x+1}\right)dx$

$\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} + \frac{3}{2}\log_{هـ}(x-1) - \frac{1}{2}\log_{هـ}(x+1) + ج$

$\int \log_{هـ} x\,dx$ ، $\int \frac{x^5 + 2}{x^4 - 1}\,dx$

$\frac{x^5}{5}\log_{هـ} x - \int \frac{x^5}{5}\cdot\frac{1}{x}\,dx$

$\frac{x^5}{5}\log_{هـ} x - \frac{1}{5}\int x^4\,dx$

$\frac{x^5}{5}\log_{هـ} x - \frac{x^5}{25} + ج$

س٣٠ اذا كان $\text{دَ}(x) = \text{جا}\,x$ ، $\text{دَ}(\frac{\pi}{2}) = -1$

$\text{د}(\frac{\pi}{2}) = \text{صفر}$ فجد قاعدة الاقتران $\text{د}(x)$.

الحل: $\text{دَ}(x) = \int \text{دَ}(x)\,dx = \int \text{جا}\,x\,dx$

$\text{دَ}(x) = -\text{جتا}\,x + ج_1 \Leftarrow \text{دَ}(\frac{\pi}{2}) = -\text{جتا}\frac{\pi}{2} + ج_1$

$1 + ج_1 = -1 \Leftarrow ج_1 = -2 \Leftarrow \text{دَ}(x) = -\text{جتا}\,x - 2$

$\text{د}(x) = \int \text{دَ}(x)\,dx = \int (-\text{جتا}\,x - 2)\,dx$

$\text{د}(x) = -\text{جا}\,x - 2x + ج_2$

$\text{د}(\frac{\pi}{2}) = -\text{جا}\frac{\pi}{2} - 2\cdot\frac{\pi}{2} + ج_2 = \text{صفر}$

$-1 - \pi + ج_2 = 0 \Leftarrow ج_2 = \pi + 1$

$\therefore \text{د}(x) = -\text{جا}\,x - 2x + \pi + 1$.

س٣١ جد التكاملات التالية

(١) ∫ (ظا س + قا س)² . دس

الحل: ∫ (ظا²س + ٢ ظا س قا س + قا²س) . دس

∫ (قا²س - ١ + ٢ ظا س قا س + قا²س) . دس

∫ (٢ قا س ظا س + ٢ قا²س - ١) . دس

٢ قا س + ٢ ظا س - س + جـ

(٢) ∫ دس / (س² - ٥س + ٦)

الحل: ١ / (س² - ٥س + ٦) = ١ / ((س - ٢)(س - ٣))

م / (س - ٣) + ن / (س - ٢) ⟸

م (س - ٢) + ن (س - ٣) = ١

عند س = ٢ ⟸ -ن = ١ ⟸ ن = -١

عند س = ٣ ⟸ م = ١

∫ دس / (س² - ٥س + ٦) = ∫ ١ / (س - ٣) + ∫ -١ / (س - ٢) . دس

= لو|س - ٣| - لو|س - ٢| + جـ

= لو | (س - ٣) / (س - ٢) | + جـ

منهاجي
متعة التعليم الهادف

س٣٢ تحركت كرة من السكون على خط مستقيم بتسارع مقداره (٢/ن + ن) م/ث² حيث ن الزمن بالثواني فاذا علمت أن سرعة الكرة (٥٠) م/ث عندما ن = ٩ ثانية وأن الكرة قطعت في ذلك المدار (٢٢) مترًا بعد (٤) ثواني من بدء الحركة. جد المسافة التي قطعتها الكرة بعد (٩) ثواني من بدء حركتها.

الحل: ت (ن) = ∫ ٢ / √ن + ن

ع / دن = ∫ ٢ / √ن + ن

ع = ∫ (٢ ن^(-١/٢) + ن) . دن

ع (ن) = ٤ ن^(١/٢) + ١/٢ ن² + جـ١

لكن ع (٩) = ٥٠

٥٠ = ٤ √٩ + ١/٢ × ٩² + جـ١ ⟸ جـ١ = -٥/٢

∴ ع (ن) = ٤ ن^(١/٢) + ١/٢ ن² - ٥/٢

ف / دن = ع (ن)

ف = ∫ ع (ن) . دن

ف = ∫ (٤ ن^(١/٢) + ١/٢ ن² - ٥/٢) . دن

= ٨/٣ ن^(٣/٢) + ١/٦ ن³ - ٥/٢ ن + جـ٢

لكن ف (٤) = ٢٢

٢٢ = ٨/٣ √٤³ + ١/٦ × ٤³ - ٥/٢ × ٤ + جـ٢

٢٢ = ٦٤/٣ + ٦٤/٦ - ١٠ + جـ٢ ⟸ جـ٢ = صفر

ف (ن) = ٨/٣ ن^(٣/٢) + ١/٦ ن³ - ٥/٢ ن

ف (٩) = ٨/٣ √٩³ + ١/٦ × ٩³ - ٥/٢ × ٩

= ٨/٣ × ٢٧ + ٧٢٩/٦ - ٤٥/٢

= ٧٢ + ١٩٢/٢ = ٧٢ + ٩٦

= ١٦٨ م

س٣٣ جد التكاملات التالية:

(أ) $\int \frac{1}{1+هـ^{س}}$ د س (حيث هـ: العدد النيبري)

الحل: اضافة وطرح $هـ^{س}$ للبسط

$$\int \frac{1+هـ^{س}-هـ^{س}}{1+هـ^{س}}\,د س =$$

$$\int \left(\frac{1+هـ^{س}}{1+هـ^{س}} - \frac{هـ^{س}}{1+هـ^{س}}\right) د س$$

$$س - لو_{هـ}|1+هـ^{س}| + ح$$

أو حل آخر

$ص = هـ^{س} \leftarrow$ د ص $= هـ^{س}$ د س

$$د س = \frac{د ص}{ص}$$

$$\int \frac{1}{1+هـ^{س}}\,د س = \int \frac{1}{1+ص} \cdot \frac{1}{ص}\,د ص$$

$$= \int \frac{1}{ص(1+ص)}\,د ص$$

$$\int \frac{أ}{ص} + \frac{ب}{1+ص}\,د ص$$

$$1 = أ(1+ص) + ب ص$$

$أ = 1$ ، $ب = -1$

السؤال $= \int \frac{1}{ص} + \frac{-1}{1+ص}\,د ص$

$$= لو_{هـ}|ص| - لو_{هـ}|1+ص| + ح$$

$$لو_{هـ}\frac{ص}{1+ص} + ح$$

$$س - لو_{هـ}|1+هـ^{س}| + ح$$

(ب) $\int$ (س − |س − 1|) د س

الحل: $|س-1| = \begin{cases} س-1 & ، س \geq 1 \\ 1-س & ، س < 1 \end{cases}$

$$= \int_{0}^{1} س - (1-س)\,د س + \int_{1}^{2} س - (س-1)\,د س$$

$$\int_{0}^{1} س + س - 1\,د س + \int_{1}^{2} س - س + 1\,د س$$

$$\left[\frac{س^2}{2} + \frac{س^2}{2} - س\right]_{0}^{1} + \left[\frac{س^2}{2} - \frac{س^2}{2} + س\right]_{1}^{2}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 1 - 0 + (2 - 2 + 2) - (\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 1)$$

$$= 1 - 1 = 0$$

س٣٤ أثبت أن لو$_{هـ}$ (جا س) د س حيث هـ العدد النيبري

الحل: $ص =$ لو$_{هـ}$ جا س $\Leftarrow$

$$\frac{د ص}{د س} = \frac{جتا س}{جا س} = ظتا س$$

$$\int ظتا س \times د ص = \int ص \cdot د ص$$

$$= \frac{ص^2}{2} + ح = \frac{1}{2}(لو_{هـ} جا س)^2 + ح$$

س٣٥ $\int$ س جتا $\sqrt{س^2+1}$ د س

الحل: $ص = \sqrt{س^2+1} \Leftarrow ص^2 = س^2 + 1 \Leftarrow$

$$2ص\,د ص = 2س\,د س \Leftarrow د س = \frac{ص}{س}\,د ص$$

$$\int س جتا ص \times \frac{ص}{س}\,د ص = \int ص\,جتا ص\,د ص$$

$$= ص \times جا ص - \int جا ص \cdot د ص$$

$$= ص\,جا ص + جتا ص + ح$$

$$= \sqrt{س^2+1}\,جا(\sqrt{س^2+1}) + جتا(\sqrt{س^2+1}) + ح$$

منهاجي
متعة التعليم الهادف

أسئلة وزارية على التكامل

س٣٦ جد التكاملات التالية:

١) $\int \frac{هـ^{س}}{هـ^{س}+هـ^{-س}} \, د س$ حيث هـ: لوغاريتم نيبري

الحل: $ص = هـ^{س} \Leftarrow د ص = هـ^{س} د س \Leftarrow$

$د س = \frac{د ص}{هـ^{س}} \Leftarrow د س = \frac{د ص}{ص}$.

$= \int \frac{ص}{ص + \frac{1}{ص}} \times \frac{د ص}{ص} = \int \frac{1}{ص^{2}+1} \, د ص$

$= \int \frac{ص}{ص^{2}+1} \cdot د ص = \frac{1}{2} \int \frac{2 ص}{ص^{2}+1} \, د ص$

$\frac{1}{2}$ لو$_{هـ}$ $|ص^{2}+1| + ج$

$\frac{1}{2}$ لو$_{هـ}$ $|هـ^{2س}+1| + ج$

٢) $\int \frac{س - ١٣}{س^{3} - ٧س + ٣} \, د س$

$\frac{س - ١٣}{س^{3} - ٧س + ٣} = \frac{س - ١٣}{(س - ٣)(س^{2} - 1)}$

$= \frac{ب}{س - ٣} + \frac{ا}{س - 1}$

$ا(س - ٣) + ب(س - 1) = س - ١٣$

عندما $س = ٣ \Leftarrow ٥ ب = -١٠ \Leftarrow ب = -٢$

عندما $س = 1 \Leftarrow -٥ ا = -١٢ \Leftarrow ا = ٥$.

$ت = \int \frac{٥}{س - 1} + \frac{-٢}{س - ٣} \, د س$

٥ لو$_{هـ}$ $|س - 1| - ٢$ لو$_{هـ}$ $|س - ١٣| + ج$

س٣٧ إذا كان $\int (ق(س) - س) \cdot د س =$

لو$_{هـ}$ $|قتاس + ظاس| - ٢$ فأثبت أن

$ق(س) = س - قتاس$.

الحل: نشتق الطرفين

$ق(س) - س = \frac{-قتاس ظاس - قتا^{2}س}{قتاس + ظاس}$

$= \frac{-قتاس (ظاس + قتاس)}{قتاس + ظاس}$

$ق(س) - س = -قتاس \Leftarrow$

$ق(س) = س - قتاس$.

س٣٨ $\int \frac{-س}{(س+1) - \sqrt{س+1}} \, د س$

الحل: $ص = س + 1 \leftarrow س = ص - 1 \leftarrow -س = 1 - ص$

$د ص = د س$

عندما $س = ٠ \Leftarrow ص = 1$

عندما $س = 1 \Leftarrow ص = ٢$

$= \int_{1}^{٢} \frac{1 - ص}{ص - \sqrt{ص}} \, د ص = \int_{1}^{٢} \frac{1 - ص}{\sqrt{ص}(\sqrt{ص} - 1)} \, د ص$

$= \int_{1}^{٢} \frac{(1 - \sqrt{ص})(1 + \sqrt{ص})}{\sqrt{ص}(\sqrt{ص} - 1)} \cdot د ص = -\int_{1}^{٢} \frac{1 + \sqrt{ص}}{\sqrt{ص}} \, د ص$

$= -\int_{1}^{٢} (ص^{-\frac{1}{2}} + 1) \, د ص = -[2 ص^{\frac{1}{2}} - ص]_{1}^{٢}$

$(-2\sqrt{٢} - ٢) - (-2\sqrt{1} - 1)$

$-2\sqrt{٢} - ٢ + 2 + 1 = 1 - 2\sqrt{٢}$.

منهاجي
متعة التعليم الهادف

أسئلة وزارية على التكامل

س٣٩ $\int \frac{س + جاس}{1 + جتاس}$ دس

الحل: $\int \left(\frac{س}{1+جتاس} + \frac{جاس}{1+جتاس} \right)$ دس

$= \int \frac{س}{2جتا^2 \frac{س}{2}}$ دس $+ \int \frac{2جا\frac{س}{2}جتا\frac{س}{2}}{2جتا^2\frac{س}{2}}$ دس

$\frac{1}{2}\int س \, قا^2 \frac{س}{2}$ دس $+ \int ظا \frac{س}{2}$ دس

$ه = س \Rightarrow$ دهـ $= \frac{1}{2}$ دس

دهـ $= قا^2 \frac{س}{2}$ دس $\Rightarrow$ هـ $= 2$ ظا $\frac{س}{2}$

ت $= \frac{1}{2}س \times 2$ ظا $\frac{س}{2} - \frac{1}{2} \times 2 \int$ ظا $\frac{س}{2}$ دس $+$

$\int$ ظا $\frac{س}{2}$ دس $+ د$

$=$ س ظا $\frac{س}{2} + د$

س٤٠ يتحرك جسم على خط مستقيم وفق العلاقة

ف $= أ ع$ ، ع > 0 ، ن $>$ ، ت : الزمن

ع : السرعة.

فاذا علمت أن السرعة الابتدائية للجسم ٩ م/ث

وتقطع مسافة (٨٠) م في (٤) ثواني فجد المسافة

التي قطعها بعد ثانيتين من بدء حركته.

الحل: ت $= \frac{دع}{دن} = أ \Rightarrow$ دع $= ع$ دن

$\int ع^{\frac{1}{2}}$ دع $= \int$ دن

$2ع^{\frac{1}{2}} = ن + د$

عندما ن $= 0$ ، ع $= 9$

$2 \times 9^{\frac{1}{2}} = د \Rightarrow د = 6$

$\therefore 2ع^{\frac{1}{2}} = ن + 6$

$ع^{\frac{1}{2}} = \frac{ن}{2} + 3$

$ع = (\frac{1}{2}ن + 3)^2$

$ع^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}ن + 3 \Rightarrow ع = (\frac{1}{2}ن + 3)^2$

$\frac{دف}{دن} = (\frac{1}{2}ن + 3)^2$

دف $= (\frac{1}{2}ن + 3)^2$ دن

ف $= \int (\frac{1}{2}ن + 3)^2$ دن

ف $= \frac{(\frac{1}{2}ن + 3)^3}{\frac{1}{2} \times 3} + د$

عندما ن $= 4$ ، ف $= 80$

$80 = \frac{2}{3}(16) + د$

$80 = \frac{32}{3} + د \Rightarrow د = 80 - \frac{32}{3} = \frac{208}{3}$

$\therefore$ ف (ن) $= \frac{2}{3}(\frac{1}{2}ن + 3)^3 - \frac{208}{3}$

ف (٢) $= \frac{2}{3}(64) - \frac{208}{3}$

$= \frac{128}{3} - \frac{208}{3} = \frac{-80}{3}$

س٤١ اذا كان $\int_{ب}^{6} [\frac{1}{2}س + 3]$ دس $= 24$ ، ب > 2

فجد قيمة الثابت ب.

$[\frac{1}{2}س + 3] = \begin{cases} 4 & ، 2 \leq س < 4 \\ 5 & ، 4 \leq س < 6 \\ 6 & ، 6 \leq س < 8 \end{cases}$

$\int_{2}^{4}$ 4 دس $+ \int_{4}^{6}$ 5 دس $+ \int_{ب}^{6}$ 6 دس $= 24$

$8 + 10 + 6(6 - ب) = 24$

$18 + 36 - 6ب = 24$

$6ب = 30$

$\boxed{ب = 5}$

منهاجي
متعة التعليم الهادف

س٤٢ إذا كان $\frac{d}{dس}(س) = جتاس + هـ$.
وكان $ق(٠) = \frac{١}{٤}$ ، $ق'(٠) = \frac{١}{٢}$.
فجد قاعدة الاقتران $ق(س)$.

الحل: $ق'(س) = \int (جتاس + هـ^{س}) \, دس$
$= -جاس + \frac{١}{٢} هـ^{٢س} + جـ١$
$ق'(٠) = -جا٠ + \frac{١}{٢} هـ^{٢×٠} + جـ١ = \frac{١}{٢}$
$جـ١ = ١$
$ق'(س) = -جاس + \frac{١}{٢} هـ^{٢س} + ١$
$ق(س) = \int (-جاس + \frac{١}{٢} هـ^{٢س} + ١) \, دس$
$ق(س) = جتاس + \frac{١}{٤} هـ^{٢س} + س + جـ٢$
$ق(٠) = جتا٠ + \frac{١}{٤} هـ^{٠} + ٠ + جـ٢$
$\frac{١}{٤} = \frac{١}{٤} + جـ٢ \Leftarrow جـ٢ = صفر$
$ق(س) = جتاس + \frac{١}{٤} هـ^{٢س} + س$.

$\int_{\frac{\pi}{٣}}^{\frac{\pi}{٢}} \frac{١}{جتا^{٢}س} \, دس = \frac{٥}{٦} \int_{\frac{\pi}{٣}}^{\frac{\pi}{٢}} قا^{٢}س \, دس$
$= \frac{٥}{٦} ظاس + جـ$

٢) $\int \frac{(٢-س)^{٣}}{٢س} \, دس$

الحل: $ص = ٢-س \leftarrow س = ٢-ص$
$دس = -دص$
$\frac{١}{٢} \int \frac{ص^{٣}}{٢-ص} \times -دص = \frac{١}{٢} \int \frac{ص^{٣}}{ص-٢} \, دص$

$\frac{١}{٢} \int ص^{٢} + ٢ص + ٤ + \frac{٨}{ص-٢} \, دص$

$\frac{١}{٢} (\frac{ص^{٣}}{٣} + ص^{٢} + ٤ص + ٨ لو_{هـ} |ص-٢| + جـ)$

$\frac{١}{٢} (\frac{(٢-س)^{٣}}{٣} + (٢-س)^{٢} + ٤(٢-س) + ٨ لو_{هـ} |٢-س| + جـ)$

س٤٣ جد التكاملات التالية:

١) $\int \frac{٥ جاس + ٥ جتاس}{٣ + ٣ جتاس} \, دس =$

$\frac{٥}{٣} \int \frac{جاس + جتاس}{١ + جتاس} \, دس =$

$\frac{٥}{٣} \int \frac{١}{١ + جتاس - جاس} \, دس$

$\frac{٥}{٣} \int \frac{١}{١ - جاس + جتاس} \, دس$

$\frac{٥}{٣} \int \frac{١}{جتاس + جتاس} \, دس$

س٤٤ إذا كان $\int_{٩}^{ء} (٢ ق(س) + ٣) \, دس = -١٧$ ،
$\int_{٥}^{ء} \frac{ق(س)}{٣} = -٢$ فجد $\int_{٥}^{٩} (٤ ق(س) - ١) \, دس$

الحل: $\int_{٩}^{ء} ٢ ق(س) \, دس + \int_{٩}^{ء} ٣ \, دس = -١٧$
$\int_{٩}^{ء} ٢ ق(س) \, دس + ٣(ء - ٩) = -١٧$
$\int_{٩}^{ء} ق(س) \, دس - ٢١ = -١٧$
$\int_{٩}^{ء} ق(س) \, دس = ٤ \Leftarrow \int_{٩}^{ء} ق(س) \, دس = ٢$
$\Leftarrow \int_{ء}^{٩} ق(س) \, دس = -٢$

منهاجي
متعة التعليم الهادف

←

تابع س٤٤

$$\int_0^c \frac{ق(س)}{3}\,دس = -2 \Rightarrow \int_c^0 ق(س)\,دس = -6$$

$$\int_0^9 ق(س)\,دس = \int_0^2 ق(س)\,دس + \int_2^9 ق(س)\,دس$$

$$= -2 + 6 = 4$$

$$\int_0^9 (\frac{1}{4}ق(س) - 1)\,دس = \frac{1}{4}\times 4 - 1\,(9-0)$$

$$= 16 - 4 = 12$$

س٤٦ اذا كان $\int (ق(س) + س^2)\,دس =$

$س^3 + جـ س^2 + 2$ وكان $ق(1) = 4$

$ق(2) = 6$ فجد $ق(-1)$.

الحل: نشتق الطرفين

$$ق(س) + س^2 = 6س^2 + 2جـ س$$

$$ق(1) + 1^2 = 6(1)^2 + 2جـ(1)$$

$$4 + 1 = 6 + 2جـ \Rightarrow جـ = -\frac{1}{2}$$

س٤٥ اذا كان $هـ^{س ص} = س - ص$ فاثبت

أن $\frac{دص}{دس} = \frac{ص^2 - س ص + 1}{س^2 - س ص + 1}$

الحل: نشتق الطرفين

$$هـ^{س ص}(1\times ص + \frac{دص}{دس} س) = 1 - \frac{دص}{دس}$$

$$ص هـ^{س ص} + س هـ^{س ص}\frac{دص}{دس} = 1 - \frac{دص}{دس}$$

$$س هـ^{س ص}\frac{دص}{دس} + \frac{دص}{دس} = 1 - ص هـ^{س ص}$$

$$\frac{دص}{دس}(س هـ^{س ص} + 1) = 1 - ص هـ^{س ص}$$

$$\frac{دص}{دس}(س(س-ص)+1) = 1 - ص(س-ص)$$

$$\frac{دص}{دس}(س^2 - س ص + 1) = 1 - ص س + ص^2$$

$$\frac{دص}{دس} = \frac{1 - ص س + ص^2}{س^2 - س ص + 1}$$

س٤٧ حل المعادلة التفاضلية:

$$\frac{دص}{دس} = \sqrt[3]{\frac{ص}{س}}$$

الحل: $\frac{دص}{دس} = \frac{ص^{\frac{1}{3}}}{س^{\frac{1}{3}}}$

$$\int ص^{-\frac{1}{3}}\,دص = \int س^{-\frac{1}{3}}\,دس$$

$$\frac{3}{2}ص^{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}س^{\frac{2}{3}} + جـ$$

س٤٨ جد $\int \frac{-2 - 3س^2}{9 - ص^2}\,دس$

$ص = س^{\frac{3}{2}}$
$ص^3 = س^2$
$3ص^2\,دص = دس$

$$\int \frac{-2 - ص}{9 - ص^2}\times 3ص^2\,دص$$

$$\int \frac{6ص^2 - 3ص^3}{9 - ص^2}\,دص = \int \frac{3ص^2 - 6ص^2}{9 - ص^2}\,دص$$

بالقسمة

$$\int 3ص - 6\,دص + \int \frac{27ص - 54}{(ص-3)(ص+3)}\,دص$$

$$\int 3ص - 6\,دص + \int \frac{7}{ص+3} + \frac{20}{ص-3}\,دص$$

منهاجي
متعة التعليم الهادف

تابع س٤٨

$$\frac{ص-٢}{(ص-٣)(ص+٢)} = \frac{أ}{ص-٣} + \frac{ب}{ص+٣}$$

$$أ(ص+٣) + ب(ص-٣) = ص-٢$$

$$أ = \frac{١}{٦} \quad ، \quad ب = \frac{٥}{٦}$$

$$= \frac{ص^٣}{٣} - ٦ص + \frac{٧}{٦} \log_هـ |ص-٣| + \frac{١٣٥}{٦} \log_هـ |ص+٣| + جـ$$

$$= \frac{١}{٣} ظا^٣ س - ٦ ظا س + \frac{٧}{٦} \log_هـ |ظا س - ٣| + \frac{٣٥}{٦} \log_هـ |ظا س + ٣| + جـ$$

س٤٩ $\int_{٢}^{٥} \frac{هـ^{\sqrt{ص-١}}}{\sqrt{ص-١}} \, دص$

$$= \int_{٢}^{٥} هـ^{\sqrt{ص-١}} \cdot \frac{١}{\sqrt{ص-١}} \, دص$$

$$= \int_{١}^{٢} هـ^{ع} \cdot ٢ \, دع$$

$$= ٢ \left[هـ^{ع} \right]_{١}^{٢}$$

$$= ٢ \left[هـ^{٢} - هـ \right]$$

$$= ٢هـ \left(هـ - ١ \right)$$

ع = $\sqrt{ص-١}$

ع^٢ = ص − ١

ص = ع^٢ + ١

$\frac{دص}{دع}$ = ٢ع

دص = ٢ع دع

ع = ٢ ← ص = ٥

ع = ١ ← ص = ٢

س٥٠ $\int_{هـ}^{هـ^٢} \frac{س}{\log_هـ (س+٢)} \, دس$ عند $ق''(٠)$

الحل: نستعمل الطرفين

$$ق'(س) = \frac{س}{\log_هـ (س+٢)}$$

$$ق'(س) = \frac{س}{\log_هـ (س+٢)^{\frac{١}{٢}}} = \frac{س}{\frac{١}{٢} \log_هـ (س+٢)}$$

$$ق'(س) = \frac{٢س}{\log_هـ (س+٢)} \cdot$$

$$ق''(س) = \frac{\log_هـ (س+٢) \times ٢هـ^{س} - ٢هـ^{س} \times \frac{١}{س+٢}}{(\log_هـ (س+٢))^٢}$$

$$ق''(٠) = \frac{\log_هـ ٢ \times ٢هـ^{٠} - ٢هـ^{٠} \times \frac{١}{٢}}{(\log_هـ ٢)^٢}$$

$$= \frac{٢ (\log_هـ ٢ - \frac{١}{٢})}{(\log_هـ ٢)^٢}$$

س٥١ $\int_{٠}^{٩} \frac{س^٣}{\sqrt{(س+٩)^٣}} \, دس$

ص = س + ٩

$\frac{دص}{دس}$ = ١

دس = دص

س = ٠ ← ص = ٩

س = ٩ ← ص = ١٨

$$= \int_{٩}^{١٨} \frac{(ص-٩)^٣}{\sqrt{ص^٣}} \, دص$$

$$= \int_{٩}^{١٨} \frac{ص^٣ - ٢٧ص^٢ + ٢٤٣ص - ٧٢٩}{ص^{\frac{٣}{٢}}} \, دص$$

$$= \int_{٩}^{١٨} ص^{\frac{٣}{٢}} - ٢٧ص^{\frac{١}{٢}} + ٢٤٣ص^{-\frac{١}{٢}} - ٧٢٩ص^{-\frac{٣}{٢}} \, دص$$

$$= \left[\frac{٢}{٥} ص^{\frac{٥}{٢}} - ١٨ص^{\frac{٣}{٢}} + ٤٨٦ص^{\frac{١}{٢}} + ١٤٥٨ص^{-\frac{١}{٢}} \right]_{٩}^{١٨}$$

$$= \left[\frac{٢}{٥} (١٨)^{\frac{٥}{٢}} - ١٨(١٨)^{\frac{٣}{٢}} + ٤٨٦(١٨)^{\frac{١}{٢}} + ١٤٥٨(١٨)^{-\frac{١}{٢}} \right] - \left[\frac{٢}{٥} (٩)^{\frac{٥}{٢}} - ١٨(٩)^{\frac{٣}{٢}} + ٤٨٦(٩)^{\frac{١}{٢}} + ١٤٥٨(٩)^{-\frac{١}{٢}} \right]$$

$$= \left[\frac{٢}{٥} (٣)^{٥} (٢)^{\frac{٥}{٢}} - ١٨(٣)^{٣} (٢)^{\frac{٣}{٢}} + ٤٨٦(٣)^{٢} (٢)^{\frac{١}{٢}} + ١٤٥٨(٣)^{-٢} (٢)^{-\frac{١}{٢}} \right] - \left[\frac{٢}{٥} (٣)^{٥} - ١٨(٣)^{٣} + ٤٨٦(٣)^{٢} + ١٤٥٨(٣)^{-٢} \right]$$

$$= \left[\frac{٤٨٦}{٥} \sqrt{٢} - ٤٨٦ \sqrt{٢} + ٤٣٧٤ \sqrt{٢} + \frac{٧٢٩}{٩} \sqrt{٢} \right] - \left[\frac{٤٨٦}{٥} - ٤٨٦ + ٤٣٧٤ + \frac{٧٢٩}{٩} \right]$$

$$= \frac{٤٨٦}{٥} \sqrt{٢} - ٤٨٦ \sqrt{٢} + ٤٣٧٤ \sqrt{٢} + ٨١ \sqrt{٢} - \frac{٤٨٦}{٥} + ٤٨٦ - ٤٣٧٤ - ٨١$$

$$= \frac{٤٨٦}{٥} \sqrt{٢} + ٤٣٧٤ \sqrt{٢} - \frac{٤٨٦}{٥} - ٤٠٦٩$$

$$= \frac{٤٨٦}{٥} (\sqrt{٢} - ١) + ٤٣٧٤ \sqrt{٢} - ٤٠٦٩$$

$$= \frac{٤٨٦}{٥} (\sqrt{٢} - ١) + ٤٣٧٤ (\sqrt{٢} - ١) + ٣٠٥$$

$$= (\sqrt{٢} - ١) \left(\frac{٤٨٦}{٥} + ٤٣٧٤ \right) + ٣٠٥$$

$$= (\sqrt{٢} - ١) \left(\frac{٢٢٠٧٦}{٥} \right) + ٣٠٥$$

$$= \frac{٢٢٠٧٦}{٥} \sqrt{٢} - \frac{٢٢٠٧٦}{٥} + ٣٠٥$$

$$= \frac{٢٢٠٧٦}{٥} \sqrt{٢} - \frac{٢١٥٢٦}{٥}$$

$$= \frac{١}{٥} (٢٢٠٧٦ \sqrt{٢} - ٢١٥٢٦)$$

$$= \frac{١}{٥} (٢ص^{\frac{٣}{٢}} - ٩ص^{\frac{١}{٢}})_{٩}^{٢٥}$$

←

أسئلة وزارية على التكامل

تابع س٥١

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{ص}} \times 9 + \sqrt{ص}\right)\Big|_{9}^{٢٥}$$

$$\left(\frac{9}{\sqrt{٩}} + \sqrt{٩}\right) - \frac{9}{\sqrt{٢٥}} + \sqrt{٢٥}$$

$$٥ + \frac{9}{٥} - ٣ - ٣ = \frac{٤}{٥} .$$

س٥٢ $\int \frac{\text{جتا}٢س}{\text{جتا}س} \, .د ك$

الحل: $\int \frac{\text{جتا}(ك + ك)}{\text{جتا}س} \, .د ك =$

$$\int \frac{\text{جتا}ك \, \text{جتا}س - \text{جا}ك \, \text{جا}س}{\text{جتا}س} \, .د ك$$

$$\int \frac{\text{جتا}^{٢}س \, \text{جتا}س - \text{جا}^{٢}س \, \text{جتا}س}{\text{جتا}س} \, .د س$$

$$\int \cancel{\text{جتا}س}\,(\text{جتا}^{٢}س - \text{جا}^{٢}س) \, .د س$$

$$\int \text{جتا}^{٢}س - (١ - \text{جتا}^{٢}س) \, .د س$$

$$\int \text{جتا}^{٢}س + \text{جتا}^{٢}س - ١ \, .د س$$

$$\int ٢\,\text{جتا}^{٢}س - ١ \, .د س$$

$$\frac{٢\,\text{جا}س\,\text{جتا}س}{٢} - س + ج$$

$$\text{جا}س\,\text{جتا}س - س + ج$$

س٥٣ يزداد عدد سكان مدينة حسب العلاقة

$\frac{د ع}{د ن} = (٠.٠٢٥)\,ع$ حيث ع: عدد السكان

ن: الزمن بالسنوات، إذا علمت ان عدد سكان المدينة عام (٢٠١٥) بلغ (٢٠٠٠٠٠) نسمة فجد عدد سكانها بعد (٤٠) عاماً.

الحل: $\frac{د ع}{د ن} = ٠.٠٢٥\,ع$

$$\left.\begin{array}{l}\frac{د ع}{ع} = ٠.٠٢٥\,د ن\end{array}\right\}$$

$$\text{لو}_{هـ} ع = ٠.٠٢٥\,ن + ج$$

$$ع = هـ^{٠.٠٢٥\,ن + ج}$$

$$ع = هـ^{ج} \times هـ^{٠.٠٢٥\,ن}$$

$$ع = ب \times هـ^{٠.٠٢٥\,ن}$$

عندما ن = ٠ (عام ٢٠١٥) ← ع = ٢٠٠٠٠٠

$$ب = ٢٠٠٠٠٠ \Leftarrow ب \times هـ^{٠} = ٢٠٠٠٠٠$$

$$ع = ٢٠٠٠٠٠ \times هـ^{٠.٠٢٥\,ن}$$

$$ع = ٢٠٠٠٠٠\,هـ^{٠.٠٢٥\,ن}$$

$$ع_{٤٠} = ٢٠٠٠٠٠\,هـ^{٠.٠٢٥ \times ٤٠}$$

$$= ٢٠٠٠٠٠\,هـ^{ن=٤٠}$$

$$= ب\,هـ^{١} \times ٢٠٠٠٠٠$$

$$= ٢,٧١٨ \times ٢٠٠٠٠٠$$

$$= ٥٤٣٦٠٠ \text{ نسمة} .$$

منهاجي
متعة التعليم الهادف

س٥٤ بدون حساب التكامل

$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{1}{3+2\sin x}\,dx$ بين أن

$\frac{\pi}{5} \le \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{1}{3+2\sin x}\,dx \le \frac{\pi}{2}$.

الحل: $-1 \le \sin x \le 1$ على $[\frac{\pi}{2}, \pi]$

$0 \le \sin x \le 1$

$0 \le 2\sin x \le 2$

$3 \le 3+2\sin x \le 5$

$\frac{1}{5} \le \frac{1}{3+2\sin x} \le \frac{1}{3}$.

$\frac{1}{5} \le \frac{1}{3+2\sin x} \le \frac{1}{3}$

$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{1}{5}\,dx \le \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{1}{3+2\sin x}\,dx \le \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{1}{3}\,dx$

$\frac{\pi}{5} \le \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{1}{3+2\sin x}\,dx \le \frac{\pi}{2}$.

س٥٥ اذا كان م(س) ، هـ(س) اقترانين بدائيين للاقتران د(س) وكان $\int_1^3 (م(س) - هـ(س))\,dx = 12$

جد $\int_4^4 م(س)\,dx + \int_4^4 هـ(س)\,dx$.

الحل: $\int_1^3 جـ\,dس = 12$ لأنهما بدائيان

$3جـ = 12 \Leftarrow$ $\boxed{جـ = 4}$

←

$\int_4^4 م(س)\,dx + \int_4^4 هـ(س)\,dx =$

$\int_4^4 م(س)\,dx - \int_4^4 هـ(س)\,dx$.

$= \int_4^4 (م(س) - هـ(س))\,dx$.

$= \int_4^4 (م(س) - هـ(س))\,dx$.

$= \int_4^4 جـ\,dx$. لكن $جـ = 4$

$= [4س]_4^4 = 4(4) - 4(1)$

$= 16 - 4 = 12$.

س٥٦ جد $\int \frac{3+\tan x}{\cos^2 x}\,dx$

$\int \frac{\sec^2 x + 3\tan x}{\tan x}\,dx$

$\int \frac{\sec^2 x}{\tan x}\,dx + 3\int \frac{\tan x \sec^2 x}{\sec^2 x}\,dx$

$\int \frac{1}{ص}\,dص + 3\int ص\,dص$

$ص = \tan x$

$dص = \sec^2 x\,dx$

$= \ln|ص| + 3\int ص\,dص$

$= \ln|\tan x| + \frac{3}{2}ص^2 + جـ$

$= \ln|\tan x| + \frac{3}{2}\tan^2 x + جـ$

منهاجي
متعة التعليم الهادف

س٥٧ جد $\int \frac{هـ^{س}}{هـ^{2س} - 5هـ^{س} + 3} \, د س$

الحل: نفرض ان ص = $هـ^{س}$ ← $\frac{د ص}{د س} = هـ^{س}$

⇐ $د ص = هـ^{س} \, د س$.

$$\int \frac{د ص}{ص^2 - 5ص + 3} = \int \frac{1}{(ص-1)(ص-3)} \, د ص$$

$$\frac{1}{(ص-1)(ص-3)} = \frac{أ}{ص-1} + \frac{ب}{ص-3}$$

$$أ(ص-3) + ب(ص-1) = 1$$

$ب = \frac{1}{2}$ ، $أ = -\frac{1}{2}$.

$$\int \frac{1}{(ص-1)(ص-3)} \, د ص = \int \frac{-\frac{1}{2}}{ص-1} \, د ص + \int \frac{\frac{1}{2}}{ص-3} \, د ص$$

$$= -\frac{1}{2} لو_{هـ} |ص-1| + \frac{1}{2} لو_{هـ} |ص-3| + جـ$$

$$\frac{1}{2} (لو_{هـ} |ص-3| - لو_{هـ} |ص-1|) + جـ$$

$$\frac{1}{2} \left(لو_{هـ} \left| \frac{ص-3}{ص-1} \right| \right) + جـ$$

$$\frac{1}{2} لو_{هـ} \left| \frac{هـ^{س}-3}{هـ^{س}-1} \right| + جـ .$$

س٥٨ اذا كان $ه(س) = \int (هـ^{جتاس} + جا^{2}س) \, د س$

فجد $ه'(\frac{\pi}{4})$. حيث هـ : العدد النبيري

الحل: نشتق الطرفين

$ه'(س) = هـ^{جتاس} + جا^{2}س$.

$ه''(س) = -جا^{2}س \, هـ^{جتاس} + 2 جتاس \, جاس$

$ه''(\frac{\pi}{4}) = -جا^{2}\frac{\pi}{4} \, هـ^{جتا\frac{\pi}{4}} + 2 جتا\frac{\pi}{4} جا\frac{\pi}{4}$

$= -\frac{1}{2} \times هـ^{\frac{1}{2}} + 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$

$= -\frac{1}{2} هـ^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}$

س٥٩ جد $\int \frac{1}{1+هـ^{س}} \, د س$

$ص = هـ^{س}$

$\frac{د ص}{د س} = هـ^{س}$

$د س = \frac{د ص}{ص}$

$د ص = ص \, د س$

$$= \int \frac{1}{1+ص} \times \frac{د ص}{ص}$$

$$= \int \frac{1}{ص(1+ص)} \, د ص$$

$$= \int \frac{أ}{ص} \, د ص + \int \frac{ب}{1+ص} \, د ص$$

$أ = 1$ ، $ب = -1$

$$= \int \frac{1}{ص} \, د ص - \int \frac{1}{1+ص} \, د ص$$

$$لو_{هـ} |ص| - لو_{هـ} |1+ص| + جـ$$

$$لو_{هـ} |هـ^{س}| - لو_{هـ} |1+هـ^{س}| + جـ$$

$$س - لو_{هـ} |1+هـ^{س}| + جـ$$

منهاجي
متعة التعليم الهادف

س٦٠ $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} (\text{جتا}^2 س + \frac{1}{2} \text{جا}2س \text{جتا} س)\, د س$

$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} (\text{جتا}^2 س + \frac{1}{2} \times 2 \text{جا} س \text{جتا} س \text{جتا} س)^{\frac{1}{2}}\, د س$

$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} (\text{جتا}^2 س + \text{جا}^2 س \text{جتا}^2 س)^{\frac{1}{2}}\, د س$

$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} (\text{جتا}^2 س (1 + \text{جا}^2 س))^{\frac{1}{2}}\, د س$

$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} |\text{جتا} س| (1 + \text{جا}^2 س)^{\frac{1}{2}}\, د س$

نفرض أن ص = $1 + \text{جا}^2 س$

$\frac{د ص}{\text{جتا} س} = د س$

عندما $س = \frac{\pi}{4} \Leftarrow ص = 1 + \frac{1}{2}$

$س = \pi \Leftarrow ص = 1$

$س = \frac{\pi}{2} \Leftarrow ص = 2$

$|\text{جتا} س| = \begin{cases} \text{جتا} س & 0 < س < \frac{\pi}{2} \\ -\text{جتا} س & \frac{\pi}{2} < س < \pi \end{cases}$

$= \int_{1+\frac{1}{2}}^{2} \text{جتا} س \, ص^{\frac{1}{2}} \frac{د ص}{\text{جتا} س} + \int_{2}^{1} -\text{جتا} س \times ص^{\frac{1}{2}} \frac{د ص}{\text{جتا} س}$

$= \int_{1+\frac{1}{2}}^{2} ص^{\frac{1}{2}}\, د ص - \int_{2}^{1} ص^{\frac{1}{2}}\, د ص$

$= \left[\frac{2}{3} ص^{\frac{3}{2}} \right]_{1+\frac{1}{2}}^{2} + \left[\frac{2}{3} ص^{\frac{3}{2}} \right]_{2}^{1}$

$= \frac{2}{3} (٤ \sqrt{2} - (1 + \sqrt{(1+\frac{1}{2})^3})$

س٦١ اذا كان تسارع جسم يتحرك بالعلاقة
$ت(ن) = ٣ن + ٢$ وعلمت أن سرعته الابتدائية
٦ م/ث والمسافة التي يقطعها بعد ثانية واحدة
من بدء الحركة ١٢ م فما المسافة التي يقطعها بعد
٣ ثوان من بدء الحركة .

الحل: $ت = \frac{د ع}{د ن} = ٣ن + ٢$

$ع = \int (٣ن + ٢)\, د ن$

$ع = \frac{٣}{2} ن^2 + ٢ن + ج$

$ع(٠) = ٦ = ج \Leftarrow ج = ٦$

$ع(ن) = \frac{٣}{2} ن^2 + ٢ن + ٦$.

$ع(ن) = \frac{د ف}{د ن} = \frac{٣}{2} ن^2 + ٢ن + ٦$

$ف = \int (\frac{٣}{2} ن^2 + ٢ن + ٦)\, د ن$

$ف = \frac{1}{2} ن^3 + ن^2 + ٦ن + ج$

$ف(١) = \frac{1}{2} + ١ + ٦ + ج = ١٢$

$ج = \frac{9}{2}$.

$ف(ن) = \frac{1}{2} ن^3 + ن^2 + ٦ن + \frac{9}{2}$.

$ف(٣) = \frac{3^3}{2} + 3^2 + ٦ \times ٣ + \frac{9}{2}$

$= \frac{90}{2} = ٤٥$ متر .

منهاجي
متعة التعليم الهادف

س٦٤ اذا علمت ان

$م \geq \int_{1}^{3} \frac{1}{\sqrt{٤س+٧}} \cdot دس \geq ك$ فجد قيمة

كل من الثابتين م ، ك بدون حساب تكامل

التكامل للمقدار $\int_{1}^{3} \frac{1}{\sqrt{٤س+٧}} \cdot دس$

الحل: $1 \leq س \leq 3$

$1 \leq س^2 \leq 9$

$2 \leq ٢س^2 \leq 18$

$٧+8 \leq ٧+٢س^2 \leq ٧+18$

$\sqrt{9} \leq \sqrt{٤س^2+٧} \leq \sqrt{25}$

$\frac{1}{5} \leq \frac{1}{\sqrt{٤س^2+٧}} \leq \frac{1}{9}$

$\frac{1}{5} \leq \frac{1}{\sqrt{٤س^2+٧}} \leq \frac{1}{3}$

$\int_{1}^{3} \frac{1}{5} \cdot دس \leq \int_{1}^{3} \frac{1}{\sqrt{٤س^2+٧}} \cdot دس \leq \int_{1}^{3} \frac{1}{3} \cdot دس$

$\frac{1}{5}(3-1) \leq \int_{1}^{3} \frac{1}{\sqrt{٤س^2+٧}} \cdot دس \leq \frac{1}{3}(3-1)$

$\frac{2}{5} \leq \int_{1}^{3} \frac{1}{\sqrt{٤س^2+٧}} دس \leq \frac{2}{3}$

$\therefore م = \frac{2}{5}$ ، $ك = \frac{2}{3}$.

س٦٣ اذا كان $\int_{-1}^{2} (٣ م(س) + ٢س - ٤) دس = ٣$

$\int_{3}^{1} (م(س+1) - ٣س^2) دس = ٢٧$ فجد

$\int_{1}^{4} م(س) \cdot دس$.

الحل: $٣ \int_{-1}^{2} م(س) \cdot دس + [س^2 - ٤س]_{-1}^{2} = ٣$

$٣ \int_{-1}^{2} م(س) \cdot دس + ((٤-٨) - (1+٤)) = ٣$

$٣ \int_{-1}^{2} م(س) \cdot دس + (-٤ - ٥) = ٣$

$٣ \int_{-1}^{2} م(س) \cdot دس - 9 = ٣$

$٣ \int_{-1}^{2} م(س) \cdot دس = ١٢ \Leftarrow \boxed{\int_{-1}^{2} م(س) \cdot دس = ٤}$.

$* \int_{3}^{1} (م(س+1) - ٣س^2) دس = ٢٧$

$\int_{4}^{2} م(ص) \cdot دص - [س^3]_{3}^{1} = ٢٧$

$ص = س+1$
$دص = دس$
$س = 1 \leftarrow ص = 2$
$س = 3 \leftarrow ص = 4$

$\int_{4}^{2} م(ص) \cdot دص - (1 - ٢٧) = ٢٧$

$\int_{4}^{2} م(ص) \cdot دص = 1 \Leftarrow \boxed{\int_{4}^{2} م(س) \cdot دس = 1}$

$\therefore \int_{-1}^{4} م(س) \cdot دس =$

$= \int_{-1}^{2} م(س) \cdot دس + \int_{2}^{4} م(س) \cdot دس$

$٤ + -1 = ٣$.

منهاجي
متعة التعليم الهادف

س٦٤ جد التكاملات التالية:

١) $\int \frac{\sqrt{1+س} - \sqrt{1-س}}{\sqrt{1+س} + \sqrt{1-س}}\, دس$.

نضرب بالمرافق

$\int \frac{\sqrt{1+س} - \sqrt{1-س}}{\sqrt{1+س} + \sqrt{1-س}} \times \frac{\sqrt{1+س} - \sqrt{1-س}}{\sqrt{1+س} - \sqrt{1-س}}\, دس$

$\int \frac{1+س - 2\sqrt{1+س}\sqrt{1-س} + 1-س}{1+س - 1+س}\, دس$

$\int \frac{2 - 2\sqrt{1+س}\sqrt{1-س}}{2س}\, دس$.

$\int \frac{2(1 - \sqrt{(1+س)(1-س)})}{س}\, دس$

$\int \frac{1 - \sqrt{1-ع^2}}{س}\, دس$

$ص = \sqrt{1-ع^2}$

$\frac{دص}{دس} = \frac{-2س}{2\sqrt{1-ع^2}}$

$دس = \frac{2\sqrt{1-ع^2}\, دص}{-2س}$

$دس = \frac{-ص}{س}\, دص$

$\int \frac{1-ص}{س} \times \frac{-ص}{س}\, دص$

$\int \frac{-(1-ص)ص}{س^2}\, دص$

$= \int \frac{(1-ص)ص}{1-ص^2}\, دص$.

$\int \frac{-(1-ص)ص}{(1-ص)(1+ص)}\, دص = \int_{-1}^{0} \frac{ص}{ص+1}$

$= \int_{-1}^{0} \left(1 - \frac{1}{ص+1}\right) دص$ ←

$= -ص + لو_هـ |ص+1| + جـ$

$= -\sqrt{1-ع^2} + لو_هـ |\sqrt{1-ع^2}+1| + جـ$

٢) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} 2\, قتاس\, لوهـ ظاس\, دس$

الحل: نفرض أن ص = ظاس ← $\frac{دص}{قتاس^2} = دس$

س = $\frac{\pi}{2}$ ← ص = ١ ، س = $\frac{\pi}{4}$ ← ص = ٢.

$\int_{1}^{2} 2\, قتاس\, قتاس\, لوهـ ص \frac{دص}{قتاس^2}$

$\int_{1}^{2} 2(1+ظاس)\, لوهـ ص \cdot دص = 3 \int_{1}^{2} (1+ص) لوهـ ص\, دص$

$ه = لوهـ ص$ ← $ده = \frac{1}{ص} دص$

$دهـ = 1+ص^2\, دص$ ← $هـ = ص + \frac{ص^3}{3}$.

$3\left[(ص + \frac{ص^3}{3}) لوهـ ص\right]_1^2 - \int_1^2 (ص+\frac{ص^3}{3}) \frac{1}{ص} دص$

$3\left[(ص + \frac{ص^3}{3}) لوهـ ص\right]_1^2 - \int_1^2 (1+\frac{ص^2}{3})\, دص$

$3\left((2 + \frac{8}{3}) لوهـ 2 - (1+\frac{1}{3}) لوهـ 1\right) - \left[ص + \frac{ص^3}{9}\right]_1^2$

$3\left((2+\frac{8}{3}) لوهـ 2\right) - \left[2 + \frac{8}{9} - (1+\frac{1}{9})\right]$

$3\left(\frac{14}{3} لوهـ 2 - 2 - \frac{8}{3} + \frac{10}{9}\right)$

$14 لوهـ 2 - 6 - 8 + \frac{10}{3}$

$14 لوهـ 2 - 14 + \frac{10}{3}$

س٦٥ إذا كان
$\int_{1}^{2}$ دَ(س) . دس = ٢س + جاس − $\int_{1}^{2}$ جتاس دَ(س) . دس
فجد دَ(٠) .

الحل: نستعمل الطرفين
٢ دَ(س) = ٢ + جتاس − جتاس دَ(س)
٢ دَ(س) + جتاس دَ(س) = ٢ + جتاس .
دَ(س) $\frac{(٢+\text{جتاس})}{٢+\text{جتاس}}$ = $\frac{٢+\text{جتاس}}{٢+\text{جتاس}}$
دَ(س) = ١
دَ(٠) = ١

س٦٦ إذا كان
دَ(س) = { [هس − ١] ، −١ ≤ س ≤ ١ ; [٣ − س] ، ١ < س ≤ ٢ }
فجد $\int_{-1}^{2}$ دَ(س) . دس .

الحل: $\int_{-1}^{2}$ (١ − هس) دس + $\int_{-1}^{1}$ هس − ١ . دس + $\int_{1}^{2}$ ١ . دس
١ (٠ − (−١)) − [هس]$_{-1}^{1}$ + [٣س − $\frac{س^٢}{٢}$]$_{1}^{2}$ − ١ + ١
١ − (هـ − هـ$^{-1}$) + هـ − هـ$^{-1}$
١ − ١ + $\frac{١}{هـ}$ + هـ − ١
$\frac{١}{هـ}$ + هـ − ١ .

س٦٧ إذا علمت أن $\int_{1}^{هـ}$ سع لوس دس = $\frac{٤هـ^٥ + ١}{٢٥}$
فجد $\int_{1}^{هـ}$ سع (لوس)^٢ دس .

الحل: ف = (لوس)^٤ ← دف = $\frac{٤ لوس}{س}$ دس
د ل = سع دس ← ل = $\frac{س^٥}{٥}$.
$\int_{1}^{هـ}$ سع (لوس)^٤ دس =
(لوس)^٤ × $\frac{س^٥}{٥}$]$_{1}^{هـ}$ − $\int_{1}^{هـ}$ سع لوس . دس
$\frac{هـ^٥}{٥}$ (لوهـ)^٤ − $\frac{١}{٥}$ (لو١)^٤ − $\frac{٤}{٥}$ ($\frac{٤هـ^٥ + ١}{٢٥}$)
$\frac{هـ^٥}{٥}$ − $\frac{٨هـ^٥ + ٢}{١٢٥}$.

س٦٨ إذا علمت أن م ≤ $\int_{0}^{2}$ $\sqrt{س^٤ + ٩}$. دس ≤ ك
فجد قيمة كل من الثابتين م، ك دون حساب قيمة التكامل .

الحل: ٠ ≤ س ≤ ٢
٠ ≤ س^٤ ≤ ١٦
٩ ≤ س^٤ + ٩ ≤ ٢٥
٣ ≤ $\sqrt{س^٤ + ٩}$ ≤ ٥
$\int_{0}^{2}$ ٣ . دس ≤ $\int_{0}^{2}$ $\sqrt{س^٤ + ٩}$. دس ≤ $\int_{0}^{2}$ ٥ . دس
٦ ≤ $\int_{0}^{2}$ $\sqrt{س^٤ + ٩}$. دس ≤ ١٠
م = ٦ ، ك = ١٠

منهاجي
متعة التعليم الهادف

س٦٩ ابدأ جسيم الحركة من نقطة الأصل على محور السينات وفق العلاقة: $ت = -٤ ع^{\frac{3}{2}}$، $ع > ٠$ حيث ت: بالثانية، ع: بالمتر، جسم فاذا كانت سرعته عند بدء الحركة ٤ سم/ث

اثبت أن $ف = ٢ن^{٢}$ بالمتر.

الحل: $\frac{دع}{دن} = -٤ ع^{\frac{3}{2}}$

$$\frac{دع}{ع^{\frac{3}{2}}} = -٤ دن$$

$$\int ع^{-\frac{3}{2}} . دع = \int -٤ . دن$$

$$\frac{ع^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} = -٤ن + جـ_١$$

$$\frac{-٢}{\sqrt{ع}} = -٤ن + جـ_١$$

عندما ن = ٠ ، ع = ٤

$$\frac{-٢}{\sqrt{٤}} = جـ_١ \Leftarrow \boxed{جـ_١ = -١}$$

$$\frac{-٢}{\sqrt{ع}} = -٤ن - ١$$

$$\frac{٢}{\sqrt{ع}} = ٤ن + ١ \Leftarrow \sqrt{ع} = \frac{٢}{٤ن+١}$$

$$\Leftarrow ع = \frac{٤}{(٤ن+١)^{٢}}$$

$$\frac{دف}{دن} = \frac{٤}{(٤ن+١)^{٢}}$$

$$\int دف = \int \frac{٤}{(٤ن+١)^{٢}} . دن$$

$$ف = \int ٤ (٤ن+١)^{-٢} . دن$$

$$ف = \frac{٤ (٤ن+١)^{-١}}{-١ \times ٤} + جـ_٢$$

$$ف = \frac{-١}{٤ن+١} + جـ_٢$$

$$ف(٠) = ٠ \Leftarrow \frac{-١}{٤(٠)+١} + جـ_٢ = ٠ \Leftarrow \boxed{جـ_٢ = ١}$$

$$ف = \frac{-١}{٤ن+١} + ١ = \frac{٤ن}{٤ن+١}$$

$$= ٢ن \left(\frac{٢}{٤ن+١}\right)$$

$$= ٢ن \sqrt{ع}$$

س٧٠ اذا كان $\int_{٠}^{٣} م(س) . دس = ٤$ فجد قيمة الثابت م.

$$\int_{٠}^{٣} (م(٣-س) + ٦س + ١) . دس = ٤٢$$

الحل: $\int_{٠}^{٣} م(٣-س) . دس + \int_{٠}^{٣} (٦س+١) . دس = ٤٢$

$$\int_{٠}^{٣} م(٣-س) . دس + [٣س^{٢} + س]_{٠}^{٣} = ٤٢$$

$$\int_{٠}^{٣} م(٣-س) . دس + ٣(٣)^{٢} + ٣ = ٤٢$$

$$\int_{٠}^{٣} م(٣-س) . دس = ١٢$$

$$-\int_{٣}^{٠} م(ص) . دص = \int_{٠}^{٣} م(ص) . دص$$

$$\int_{٠}^{٣} م(ص) . دص = ١٢$$

$$م \int_{٠}^{٣} م(ص) . دص = ١٢$$

$$م \times ٤ = ١٢ \Leftarrow \boxed{م = ٣}$$

ص = ٣ - س
دص = - دس
س = ٠ ← ص = ٣
س = ٣ ← ص = ٠

منهاجي
متعة التعليم الهادف

س١/ جد التكاملات التالية:

١) $\int \frac{\ln ظا س}{جا س جتا س} \, د س$

الحل: ص = ظا س ← د ص = قا² س د س

$= \int \frac{\ln ص}{جا س جتا س \times قا^2 س} \times د ص$

$= \int \frac{\ln ص}{جا س جتا س \times \frac{1}{جتا س \times جتا س}} \, د ص$

$= \frac{1}{ج} \int \frac{\ln ص}{\frac{جا س}{جتا س}} \, د ص$

$= \frac{1}{ج} \int \frac{\ln ص}{ظا س} \, د ص$

$= \frac{1}{ج} \int \frac{\ln ص}{ص} \, د ص$

ل = $\ln_هـ$ ص ⇐ د ل = $\frac{1}{ص}$ د ص

$= \frac{1}{ج} \int \ln_هـ ص \times \frac{1}{ص} \, د ص$

$= \frac{1}{ج} \int ل \, د ل = \frac{1}{ج} \frac{ل^2}{2} + ج$

$= \frac{1}{4} (\ln_هـ ص)^4 + ج$

$= \frac{1}{4} (\ln_هـ ظا س)^4 + ج$

٢) $\int \frac{د س}{س - \sqrt{س + ج}}$

$ص = \sqrt{س + ج}$

$ص^2 = س + ج$

$ص \, د ص = د س$

$ص^2 - ج = س \Leftarrow$

$\int \frac{د س}{ص^2 - ج - ص}$

$\int \frac{2 ص \, د ص}{ص^2 - ص - ج}$

$\frac{2 ص}{ص^2 - ص - ج} = \frac{2 ص}{(ص - ج)(ص + 1)} = \frac{أ}{ص - ج} + \frac{ب}{ص + 1}$

$أ (ص + 1) + ب (ص - ج) = 2 ص$

عندما ص = ج ⇐ $أ = \frac{2}{3}$

عندما ص = -1 ⇐ $ب = \frac{4}{3}$

$\int \frac{2 ص \, د ص}{ص^2 - ص - ج} = \int \frac{\frac{2}{3} \, د ص}{ص - ج} + \int \frac{\frac{4}{3} \, د ص}{ص + 1}$

$= \frac{2}{3} \ln_هـ |ص - ج| + \frac{4}{3} \ln_هـ |ص + 1| + ج$

$= \frac{2}{3} \ln_هـ |\sqrt{س + ج} - ج| + \frac{4}{3} \ln_هـ |\sqrt{س + ج} + 1| + ج$

منهاجي
متعة التعليم الهادف

س٧٢ اذا كان

$س\,ه(س) - \int_{1}^{س} ص\,ه(ص)\,د ص = \int_{2}^{س} ق'(ص)\,د ص$

وكان $ه(٢) = ٤$ فجد $ق'(٢)$.

نشتق الطرفين

$س\,ق'(س) + ه(س) \times ١ - ٣ س\,ه(س) = ق'(س)$

بوضع $س = ٢$

$٢\,ق'(٢) + ه(٢) - ٦\,ه(٢) = ق'(٢)$

$٢\,ق'(٢) + ٤ - ٦ \times ٤ = ق'(٢)$

$٢\,ق'(٢) - ٢٠ = ق'(٢)$

$٢\,ق'(٢) - ق'(٢) = ٢٠$

$ق'(٢) = ٢٠$

س٧٣ اذا كان

$$ه(س) = \begin{cases} [س-٥]\,|س-١| & ، ٠ \le س < ٢ \\ \frac{٣}{\sqrt{س+١}} & ، ٢ \le س \le ٤ \end{cases}$$

فجد $\int_{٠}^{٤} ه(س)\,د س$.

نفيد التعريف :

$$[س-٥] = \begin{cases} -٥ & ، ٠ \le س < ١ \\ -٤ & ، ١ \le س < ٢ \end{cases}$$

$س - ١ = ٠ \leftarrow س = ١$

	$س-١$	$١-س$
٠	$-$	$+$
١	$+$	$+$
٢	$+$	$-$

$$\int_{٠}^{٤} ه(س)\,د س = \int_{٠}^{١} -٥(١-س)\,د س + \int_{١}^{٢} -٤(س-١)\,د س + \int_{٢}^{٤} \frac{٣}{\sqrt{س+١}}\,د س .$$

$$= -٥\left[س - \frac{س^٢}{٢}\right]_{٠}^{١} + -٤\left[\frac{س^٢}{٢} - س\right]_{١}^{٢} + \left[٦\sqrt{س+١}\right]_{٢}^{٤}$$

$$= -٥\left(١ - \frac{١}{٢}\right) + -٤\left[\left(٢ - ٢\right) - \left(\frac{١}{٢} - ١\right)\right] + \left(٦\sqrt{٤+١} - ٦\sqrt{٢+١}\right)$$

$$= -\frac{٥}{٢} - ٢ + ٦\left(\sqrt{٥} - \sqrt{٣}\right) .$$

س٧٤ جد $\int_{هـ}^{} جا^٣س \log_{هـ}(١+جتاس)\,د س$.

نفرض ان $ص = ١ + جتاس \Rightarrow \frac{د ص}{د س} = -جاس$

$\Rightarrow \frac{د ص}{-جاس} = د س \;/\; جتاس = ص - ١ \Rightarrow$

$جتا^٢س = ص^٢ - ٢ص + ١$

$\int جا^٣س \log_{هـ}(١+جتاس)\,د س = \int جا^٣س \log_{هـ} ص \frac{د ص}{-جاس}$

$= \int -جا^٢س \log_{هـ} ص\,د ص = \int (جتا^٢س - ١) \log_{هـ} ص\,د ص$

$= \int (ص^٢ - ٢ص + ١ - ١) \log_{هـ} ص\,د ص$

$= \int (ص^٢ - ٢ص) \log_{هـ} ص\,د ص$

اجزاء :

$ق = \log_{هـ} ص \Rightarrow ق' = \frac{١}{ص}\,د ص$

$د ه = ص^٢ - ٢ص$

$ه = \frac{ص^٣}{٣} - ص^٢$

$= \left(\frac{ص^٣}{٣} - ص^٢\right) \log_{هـ} ص - \int \left(\frac{ص^٣}{٣} - ص^٢\right) \frac{١}{ص}\,د ص$

$= \left(\frac{ص^٣}{٣} - ص^٢\right) \log_{هـ} ص - \int \left(\frac{ص^٢}{٣} - ص\right) د ص$

$= \left(\frac{ص^٣}{٣} - ص^٢\right) \log_{هـ} ص - \frac{ص^٣}{٩} + \frac{ص^٢}{٢} + جـ$

نعوض عن ص بـ $١ + جتاس$.

منهاجي
متعة التعليم الهادف

س٧٥ حل المعادلة التفاضلية الآتية

$$\frac{دص}{دس} = \frac{٣س ص^{٢} - ص - ١٢س + ٤}{ص^{٣} - ١٦}$$

$$\frac{دص}{دس} = \frac{ص(٣س - ١) - ٤(٣س - ١)}{(ص - ٤)(ص + ٤)}$$

$$\frac{دص}{دس} = \frac{(٣س - ١)(ص - ٤)}{(ص - ٤)(ص + ٤)}$$

$$\frac{دص}{دس} = \frac{٣س - ١}{ص + ٤}$$

$$\int (ص + ٤)\, دص = \int (٣س - ١)\, دس$$

$$\frac{ص^{٢}}{٢} + ٤ص = \frac{٣س^{٢}}{٢} - س + جـ$$

س٧٦ اذا كان

$$ص = \int_{هـ}^{س^{٢}} \frac{١}{لو_{هـ}(ن + ١)}\, دن$$

فجد $\frac{دص}{دس}$ عندما $س = صفر$.

$$\frac{دص}{دس} = \frac{١}{لو_{هـ}(س^{٢} + ١)} \cdot ٢س$$

$$\left.\frac{دص}{دس}\right|_{س=٠} = \frac{٠}{لو_{هـ}(٠ + ١)} = \frac{٠}{٠ + ١} = صفر$$

س٧٧ جد $\int_{١}^{٢} س^{٤} \left(\frac{٢ - س}{س^{٢}}\right)^{٣}\, دس$

$$\int_{١}^{٢} س^{٤} \frac{(٢ - س)^{٣}}{س^{٦}}\, دس =$$

$$\int_{١}^{٢} س^{٤} \times \frac{١}{س^{٣}} (٢ - س)^{٣}\, دس$$

$$\int_{١}^{٢} س (٢ - س)^{٣}\, دس$$

عندما $س = ١ \leftarrow ص = ١$
عندما $س = ٢ \leftarrow ص = ٠$

$ص = ٢ - س$
$دص = - دس$

$$\int_{١}^{٠} (٢ - ص) ص^{\frac{٣}{٢}} \times - دص$$

$$\int_{١}^{٠} (ص^{\frac{٥}{٢}} - ٢ ص^{\frac{٣}{٢}})\, دص =$$

$$\left[\frac{٢}{٧} ص^{\frac{٧}{٢}} - \frac{٤}{٥} ص^{\frac{٥}{٢}}\right]_{١}^{٠} =$$

$$\left(\frac{٢}{٧} \times ٠ - \frac{٤}{٥} \times ٠\right) - \left(\frac{٢}{٧} - \frac{٤}{٥}\right) =$$

$$صفر - \left(\frac{١٠ - ٢٨}{٣٥}\right) =$$

$$صفر - \frac{-١٨}{٣٥} = \frac{١٨}{٣٥}$$

منهاجي
منصة التعليم الهادف

س٧٨ جد قيمة

$$\int \frac{\text{قتا}^2 س \, \text{ظا} س}{8 - \text{ظا}^2 س} \, د س$$

$$\int \frac{\text{قتا}^2 س \, \text{ظا} س}{8 - (\text{قتا}^2 س - 1)} \, د س$$

$$= \int \frac{\text{قتا}^2 س \, \text{ظا} س}{9 - \text{قتا}^2 س} \, د س$$

ص = قتا س ← $\frac{د ص}{د س}$ = قتا س ظا س

$$\frac{د ص}{\text{قتا} س \, \text{ظا} س} = د س$$

$$\int \frac{\text{قتا}^2 س \, \text{ظا} س}{9 - ص^2} \times \frac{د ص}{\text{قتا} س \, \text{ظا} س}$$

$$\int \frac{1}{9 - ص^2} \, د ص$$

$$\frac{1}{(3 - ص)(3 + ص)} = \frac{أ}{3 - ص} + \frac{ب}{3 + ص}$$

$$أ(3 + ص) + ب(3 - ص) = 1$$

ص = 3 ← 6أ = 1 ← أ = $\frac{1}{6}$

ص = -3 ← 6ب = 1 ← ب = $\frac{1}{6}$

$$\int \frac{1}{9 - ص^2} \, د ص =$$

$$\int \left(\frac{\frac{1}{6}}{3 - ص} + \frac{\frac{1}{6}}{3 + ص} \right) د ص$$

$$-\frac{1}{6} \text{لو}_{هـ} |3 - ص| + \frac{1}{6} \text{لو}_{هـ} |3 + ص| + جـ$$

س٧٩ اذا كان

$$\int أ \, \text{قا}(س) \, د س = \text{لو}_{هـ} |2 - 4ك| - \int 2 \, هـ^{س} \, \text{قا}(س) \, د س$$

وكان قا(٠) = ٢ ، فجد قيمة الثابت أ .

نشتق الطرفين

$$أ \, \text{قا}(س) = \frac{-4}{2 - 4ك} - 2 هـ^{س} \, \text{قا}(س)$$

نضع س = صفر

$$أ \, \text{قا}(٠) = \frac{-4}{2 - 0} - 2 هـ^{٠} \, \text{قا}(٠)$$

$$أ \times 2 = -2 - 2 \times 1 \times 2$$

$$2أ = -6 \Leftarrow أ = -3$$

س٨٠ جد $\int \frac{س^4}{س^6 + س^3} \, د س$ ، س > ٠

$$\int \frac{س^4}{س^6 + س^3} \, د س = \int \frac{س^4}{س^3 (س^3 + 1)} \, د س$$

$س^3 = ص$ ← $\frac{د ص}{3 س^2} = د س$

$$\int \frac{س^4}{ص (ص + 1)} \times \frac{د ص}{3 س^2} = \int \frac{1}{3 ص (ص + 1)} \, د ص$$

$$\frac{1}{3} \int \frac{أ}{ص} + \frac{ب}{ص + 1} \, د ص$$

$أ(ص + 1) + ب ص = 1$

ص = ٠ ← أ = 1

ص = -1 ← ب = -1

$$= \frac{1}{3} \int \frac{1}{ص} + \frac{-1}{ص + 1} \, د ص$$

$$= \frac{1}{3} (\text{لو}_{هـ} |ص| - \text{لو}_{هـ} |ص + 1|) + جـ$$

$$= \frac{1}{3} (\text{لو}_{هـ} |س^3| - \text{لو}_{هـ} |س^3 + 1|) + جـ$$

منهاجي
متعة التعليم الهادف

س٨١ جد $\int_1^3 \frac{(س^4 - 6س + 9)^{\frac{1}{2}}}{س^9}$. دس

$= \int_1^3 \frac{((س-3)^2)^{\frac{1}{2}}}{س^9}$. دس

$= \int_1^3 \frac{|س-3|^7}{س^9}$. دس

س - ٣ = ٠ ← س = ٣

	٣	
−	٠	+

$= \int_1^3 \frac{(3-س)^7}{س^2 \times س^7}$. دس

$= \int_1^3 \frac{1}{س^2} \left(\frac{3-س}{س}\right)^7$. دس

$= \int_1^3 \frac{1}{س^2} \left(\frac{3}{س} - 1\right)^7$. دس

ص = $\frac{3}{س} - 1$ ← $\frac{دص}{دس} = \frac{3}{س^2}$

$دس = \frac{س^2 \, دص}{-3}$

س = ١ ← ص = ٢

س = ٣ ← ص = ٠

$= \int_2^0 \frac{1}{س^2} ص^7 \times \frac{س^2 \, دص}{-3}$

$= -\frac{1}{3} \int_2^0 ص^7 \, دص = \left[\frac{-ص^8}{8 \times 3}\right]_2^0$

$= \frac{1}{24} (٠ - 2^8) = \frac{1}{24} \times -256$

$= \frac{32}{3}$

س٨٢ يتحرك جسم على خط مستقيم حسب العلاقة ت = ع + ١ ، ع > ٠ حيث ت : تابع الجسم ع : سرعة الجسم ، اذا تحرك الجسم من السكون فقطع مسافة مقدارها (٦) م بعد (٣) ثوان من حركته فجد المسافة التي قطعها بعد (٩) ثوان من حركته .

ت = ع + ١

$\frac{دع}{دن} = ع + 1$ ← $\frac{دع}{ع+1} = دن$

$\int \frac{دع}{ع+1} = \int دن$.

لو$_{هـ}$ (ع+١) = ن + جـ

تحرك من السكون ع = ٠ ، ن = ٠ ← جـ = ٠

لو$_{هـ}$ (ع+١) = ن ← ع + ١ = $هـ^{ن}$

ع = $هـ^{ن} - 1$ ← $\frac{دف}{دن} = هـ^{ن} - 1$

دف = $(هـ^{ن} - 1)$ دن ← $\int دف = \int (هـ^{ن} - 1)$ دن

ف = $هـ^{ن} - ن + جـ$

ف = ٦ عند ن = ٣

٦ = $هـ^{3} - 3 + جـ$ ← جـ = $9 - هـ^{3}$

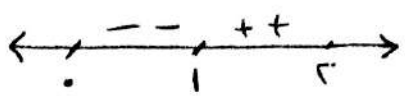
ف (ن) = $هـ^{ن} - ن + 9 - هـ^{3}$

ف (٩) = $هـ^{9} - 9 + 9 - هـ^{3}$

= $هـ^{9} - هـ^{3}$.

س٨٣ جد $\int_{1}^{2} |هـ^{ك-1} - هـ| \, دك$.

$هـ^{ك-1} - هـ = 0 \leftarrow هـ^{ك-1} = هـ^{1} \leftarrow ك-1 = 1 \leftarrow ك = 2 \leftarrow ك = 1$



$= \int_{1}^{1} (هـ - هـ^{ك-1}) \, دك + \int_{1}^{2} (هـ^{ك-1} - هـ) \, دك$

$= هـ(1-0) - \frac{1}{2} هـ^{ك-1} \Big]_{1}^{1} + \frac{1}{2} هـ^{ك-1} \Big]_{1}^{2} - هـ(2-1)$

$= هـ - \frac{1}{2}(هـ - هـ^{-1}) + \frac{1}{2}(هـ^{3} - هـ) - هـ$

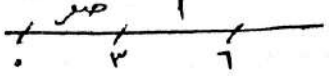
$= -\frac{1}{2} هـ + \frac{1}{2} هـ^{-1} + \frac{1}{2} هـ^{3} - \frac{1}{2} هـ$

$= \frac{1}{2} هـ^{3} + \frac{1}{2} هـ^{-1} - هـ$

س٨٤ $\int_{2}^{6} ([\frac{1}{3} س] - 2) \, دس$

نعيد تعريف $[\frac{1}{3} س]$

$ل = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3$



$= \int_{2}^{6} ([\frac{1}{3} س] - 2) \, دس$

$= \int_{2}^{3} (صفر - 2) \, دس + \int_{3}^{6} (1 - 2) \, دس$

$= \int_{2}^{3} -2 \, دس + \int_{3}^{6} -1 \, دس$

$= -2(3-2) + -1(6-3)$

$= -2 + -3 = -5$

س٨٤ اذا كان $\int_{0}^{\pi} \frac{جا س}{(س+2)^{2}} \, دس = P$ ، P ثابت

فجد بدلالة P قيمة $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{جا 2س}{س+1} \, دس$ ؟

نفرض أن $ص = 2س \leftarrow دس = \frac{دص}{2}$

$س = 0 \leftarrow ص = 0$

$س = \frac{\pi}{2} \leftarrow ص = \pi$

$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{جا 2س}{س+1} \, دس = \int_{0}^{\pi} \frac{جا ص}{\frac{ص}{2}+1} \cdot \frac{دص}{2}$

$= \int_{0}^{\pi} \frac{جا ص}{ص+2} \cdot \frac{دص}{2}$

$\int_{0}^{\pi} \frac{جا ص}{ص+2} \, دص = \int_{0}^{\pi} \frac{1}{ص+2} \cdot جا ص \, دص$

$و = \frac{1}{ص+2}$ ، $دو = \frac{-1}{(ص+2)^{2}}$

$هـ = -جتا ص$ ، $دهـ = جا ص \, دص$

$= \frac{1}{ص+2} \times -جتا ص \Big]_{0}^{\pi} - \int_{0}^{\pi} -جتا ص \times \frac{-1}{(ص+2)^{2}} \, دص$

$= \frac{-جتا ص}{ص+2} \Big]_{0}^{\pi} - \int_{0}^{\pi} \frac{جا ص}{(ص+2)^{2}} \, دص$

$= \frac{-جتا \pi}{2+\pi} - \frac{-جتا 0}{2+0} - P$

$= \frac{1}{2+\pi} + \frac{1}{2} - P$

منهاجي
متعة التعليم الهادف

اسئلة وتدريبات على التكامل

س٨٥ اذا كان ص = $\sqrt{هـ^{2س}}$ وكان

ص'' + ٤ص' + ٤ص = صفر فجد

قيمة الثابت م ؟

ص = $(هـ^{مس})^{\frac{1}{2}}$ = $هـ^{\frac{1}{2}مس}$

ص' = $\frac{1}{2}م هـ^{\frac{1}{2}مس}$

ص'' = $\frac{1}{2}م \times \frac{1}{2}م هـ^{\frac{1}{2}مس} = \frac{1}{4}م^2 هـ^{\frac{1}{2}مس}$

ص'' + ٤ص' + ٤ص = صفر

$\frac{1}{4}م^2 هـ^{\frac{1}{2}مس} + 4 \times \frac{1}{2}م هـ^{\frac{1}{2}مس} + 4هـ^{\frac{1}{2}مس} = صفر$

$\frac{1}{4}م^2 هـ^{\frac{1}{2}مس} + 2م هـ^{\frac{1}{2}مس} + 4هـ^{\frac{1}{2}مس} = صفر$

$هـ^{\frac{1}{2}مس}(\frac{1}{4}م^2 + 2م + 4) = صفر$

$هـ^{\frac{1}{2}مس} \neq صفر$

$\frac{1}{4}م^2 + 2م + 4 = صفر$) × ٤

$م^2 + ٨م + ١٦ = صفر$

$(م+4)(م+4) = صفر$

م = -٤

س٨٦ جد $\int (س-1)^{-3} \sqrt{س^2 - 2س - 4}$ دس

ص = $س^2 - 2س - 4$ ← دس = $\frac{دص}{2س-2}$

دس = $\frac{دص}{2(س-1)}$

$س^2 - 2س - 4 = ص$

$س^2 - 2س = ص + 4$

$س^2 - 2س + 1 = ص + 5$

$(س-1)^2 = ص + 5$

$\int (س-1)^{-3} \sqrt{س^2 - 2س - 4} \cdot دس$

$\int (س-1)^{-3} ص^{\frac{1}{2}} \times \frac{دص}{2(س-1)}$

$\frac{1}{2} \int (س-1)^{-2} ص^{\frac{1}{2}} دص$

$\frac{1}{2} \int (س^2 - 2س + 1) ص^{\frac{1}{2}} دص$

$\frac{1}{2} \int (ص + 5) ص^{\frac{1}{2}} دص$

$\frac{1}{2} \int (ص^{\frac{3}{2}} + 5ص^{\frac{1}{2}}) دص$

$\frac{1}{2} (\frac{2}{5}ص^{\frac{5}{2}} + \frac{5 \times 2}{3}ص^{\frac{3}{2}}) + ج$

$\frac{1}{2} (\frac{2}{5}(س^2 - 2س - 4)^{\frac{5}{2}} + \frac{10}{3}(س^2 - 2س - 4)^{\frac{3}{2}}) + ج$

منهاجي
متعة التعليم الهادف

٨٧ س جد $\int \frac{1}{هـ^{س} - هـ^{-س}}$ دس

$\int \frac{1}{\frac{1}{هـ^{س}} - هـ^{س}} \cdot$ دى $= \int \frac{1}{\frac{1 - هـ^{٢س}}{هـ^{س}}} \cdot$ دى

$\int \frac{هـ^{س}}{1 - هـ^{٢س}} \cdot$ دى

هـ^{س} = ص
دى = $\frac{دص}{هـ^{س}}$

$\int \frac{هـ^{س}}{1 - ص^{٢}} \times \frac{دص}{هـ^{س}} =$

$\int \frac{1}{1 - ص^{٢}} \cdot$ دص =

$\frac{1}{(1-ص)(1+ص)} = \frac{أ}{1-ص} + \frac{ب}{1+ص}$

$أ(1+ص) + ب(1-ص) = 1$

ص = -١ ⇐ ٢ب = ١ ⇐ ب = $\frac{1}{2}$

ص = ١ ⇐ ٢أ = ١ ⇐ أ = $\frac{1}{2}$

$\int \frac{1}{1 - ص^{٢}}$ دص = $\int (\frac{\frac{1}{2}}{1-ص} + \frac{\frac{1}{2}}{1+ص}) \cdot$ دص

$-\frac{1}{2}$ لو$_{هـ}$ |١-ص| + $\frac{1}{2}$ لو$_{هـ}$ |١+ص| + جـ

$-\frac{1}{2}$ لو$_{هـ}$ |١-هـ$^{-س}$| + $\frac{1}{2}$ لو$_{هـ}$ |١+هـ$^{-س}$| + جـ

---

٨٨ س جد $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$ جاس (س + قتا^{٣}س) دس

$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$ (س جاس + جاس قتا^{٣}س) دس =

$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$ (س جاس + جاس × $\frac{1}{\text{جاس}^{٢}}$ × قتا^{٢}س) دس =

$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$ (س جاس + قتا^{٢}س) دس =

أجزاء

ف = س ، دف = جاس دس
دد = دى ، د = -جتاس

س × -جتاس]$_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$ + $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$ جتاس دس + $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$ قتا^{٢}س دى =

-س جتاس]$_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$ + جاس]$_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$ - ظتاس]$_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$ =

-$\frac{\pi}{2}$ جتا$\frac{\pi}{2}$ - (-$\frac{\pi}{4}$ جتا$\frac{\pi}{4}$) + جا$\frac{\pi}{2}$ - جا$\frac{\pi}{4}$ - (ظتا$\frac{\pi}{2}$ - ظتا$\frac{\pi}{4}$) =

صفر + $\frac{\pi}{4} \times \frac{\sqrt{2}}{2}$ + ١ - $\frac{\sqrt{2}}{2}$ - (صفر - ١) =

$\frac{\pi\sqrt{2}}{8} + ٢ - \frac{\sqrt{2}}{2}$.

منهاجي
متعة التعليم الهادف

س٨٩ اذا كان
$\int (\text{قا}(س) + س)\, دس = س^{٣} + أ س + ١$
وكان ميل المماس لمنحنى الاقتران $\text{ق}(س)$ عند النقطة $(١، ٣)$ يساوي (٥) فإن قيمة الثابت $أ$ تساوي :

أ) ١ ب) ٦ جـ) ١٫٥ د) ٤٫٥

الحل: ميل المماس عند $(١، ٣)$ يساوي ٥ $\Leftarrow$
$\text{قا}'(١) = ٥$

نشتق الطرفين :
$\text{قا}''(س) + ١ = ٣س^{٢} + ٢أس$
نضع $س = ١$
$\text{قا}'(١) + ١ = ٣ + ٢أ$
$٥ + ١ = ٣ + ٢أ \Leftarrow ٦ = ٣ + ٢أ$
$\Leftarrow ٢أ = ٣ \Leftarrow أ = \frac{٣}{٢} = ١٫٥$ (ب)

س٩٠ اذا كان $\int_{١}^{٢} \text{قا}'(س)\, دس = ٣$ ، $\text{قا}(١) = ٥$
$\text{قا}(٢) = ٨$ فإن قيمة $\int_{١}^{٢} س\, \text{قا}'(س)\, دس$ تساوي

أ) ١- ب) ٤٫٥ جـ) صفر د) ٨

الحل: $\int_{١}^{٢} \underset{\text{ق}}{س}\, \underset{دهـ}{\text{قا}'(س)\, دس} =$

$\text{قا} = س$ ، $دهـ = \text{قا}'(س)\, دس$
$دق = دس$ ، $هـ = \text{قا}(س)$

$= س\, \text{قا}(س)]_{١}^{٢} - \int_{١}^{٢} \text{قا}(س)\, دس$
$= ٢\, \text{قا}(٢) - ١ \times \text{قا}(١) - ٣$
$= ٢ \times ٨ - ٥ - ٣ = ١٦ - ٨ = ٨$ (د)

س٩١ تحرك جسيم في السكون على خط مستقيم وفق العلاقة $ت(ن) = \sqrt{ع^{٣}}$ ، حيث ت: تابع الجسيم
ع: سرعة الجسيم ، بعد المسافة التي يقطعها الجسيم بعد (٦) ثواني من بدء الحركة.

الحل: $ت = \frac{دع}{دن} = ع^{\frac{١}{٢}} \leftarrow \frac{دع}{ع^{\frac{١}{٢}}} = دن$

$\int ع^{-\frac{١}{٢}}\, دع = \int دن$

$٢ ع^{\frac{١}{٢}} = ن + ج$

تحرك من السكون $\leftarrow ع(٠) = صفر$

$صفر = صفر + ج \leftarrow ج = صفر$

$٢ ع^{\frac{١}{٢}} = ن \leftarrow ع^{\frac{١}{٢}} = \frac{١}{٢} ن$

$ع = (\frac{١}{٢} ن)^{٢}$ لكن $ع = \frac{دف}{دن}$

$\frac{دف}{دن} = (\frac{١}{٢} ن)^{٢} \leftarrow دف = (\frac{١}{٢} ن)^{٢}\, دن$

$\int دف = \int (\frac{١}{٢} ن)^{٢}\, دن$

$ف = \frac{(\frac{١}{٢} ن)^{٣}}{\frac{١}{٢} \times ٣} + ج$

$ف = \frac{٨}{٦} (\frac{١}{٢} ن)^{٣} + ج$

$ف(٦) = \frac{٤}{٣} (\frac{١}{٢} \times ٦)^{٣}$

$= \frac{٤}{٣} (٢٧)$

$= \frac{٤}{٣} \times ٣^{٣} = \frac{٤}{٣} \times ٣٢$

$= \frac{٩٦}{٥}$

$ف(٠) = ٠ \Leftarrow ج = صفر$

منهاجي
متعة التعليم الهادف

س٩٣ اذا كان ميل المماس لمنحنى $ق(س)$ يساوي $(٣س^{٢}+٧)$ ، وكان منحنى $ق(س)$ يمر بالنقطة $(٢، ١٠)$ فإن قاعدة الاقتران هي :

أ) $ق(س)=س^{٣}+٧س$ ب) $ق(س)=س^{٣}+٧س+٢$

ج) $ق(س)=س^{٣}+٧س+١٠$ د) $ق(س)=س^{٣}+٧س-٨$

الحل: ميل المماس $=$ قـ$(س)=٣س^{٢}+٧$

$ق(س)=\int(٣س^{٢}+٧)\,دس$

$ق(س)=س^{٣}+٧س+ب$

$ق(٢)=٨+١٤+ب$

$١٠=٢٢+ب \Leftarrow ب=-٨$

القاعدة: $ق(س)=س^{٣}+٧س-٨$ (د)

س٩٤ اذا كان $م \geq ق(س) \geq ن$ وكان $١٦ \geq \int_{-١}^{٣}(ق(س)+٥)\,دس \geq ٢٠$ فإن قيم الثابتين م ، ن على الترتيب :

أ) $١١ ، ٧$ ب) $٠ ، -٤$

ج) $٥ ، ٤$ د) $-١ ، ٠$

الحل: $١٦ \geq \int_{-١}^{٣}(ق(س)+٥)\,دس \geq ٢٠$

$١٦ \geq \int_{-١}^{٣} ق(س)\,دس + \int_{-١}^{٣} ٥\,دس \geq ٢٠$

$١٦ \geq \int_{-١}^{٣} ق(س)\,دس + ٢٠ \geq ٢٠$

$-٢٠ \quad -٢٠ \quad -٢٠$

$-٤ \geq \int_{-١}^{٣} ق(س)\,دس \geq ٠$

ب) $-٤ ، ٠$

س٩٥ جد $\int \frac{س^{٣}+٢س-٦}{س^{٢}-٤}\,دس$

درجة البسط $>$ درجة المقام (نقسم)

$$\begin{array}{r|l} س & \\ \hline س^{٣}+٢س-٦ & س^{٢}-٤ \\ -س^{٣}\mp ٤س & \\ \hline ٦س-٦ & \end{array}$$

$$\int \frac{س^{٣}+٢س-٦}{س^{٢}-٤}\,دس=\int\left(س+\frac{٦س-٦}{س^{٢}-٤}\right)دس$$

$$\frac{٦س-٦}{س^{٢}-٤}=\frac{٦س-٦}{(س-٢)(س+٢)}=\frac{أ}{س-٢}+\frac{ب}{س+٢}$$

$٦س-٦=أ(س+٢)+ب(س-٢)$

$س=٢ \Leftarrow ١٢=٤أ \Leftarrow أ=\frac{١٢}{٤}=\frac{٣}{٢}$

$س=-٢ \Leftarrow -١٨=-٤ب \Leftarrow ب=\frac{١٨}{٤}=\frac{٩}{٢}$

$\int\left(س+\frac{\frac{٣}{٢}}{س-٢}+\frac{\frac{٩}{٢}}{س+٢}\right)دس$

$\frac{س^{٢}}{٢}+\frac{٣}{٢}$ لو$_{هـ}|س-٢|+\frac{٩}{٢}$ لو$_{هـ}|س+٢|+ج$

منهاجي
متعة التعليم الهادف

س٩٥ جد $\int_{1}^{2} \frac{س^{2} هـ^{س}}{(س+1)^{2}} \, د س$

$= \int_{1}^{2} س^{2} هـ^{س} (س+1)^{-2} \, د س$ اجزاء

$ع = س^{2} هـ^{س}$

$د ع = (س^{2} \times هـ^{س} + هـ^{س} \times 2س) \, د س$

$د هـ = (س+1)^{-2} \, د س$

$هـ = \frac{(س+1)^{-1}}{-1} = \frac{-1}{(س+1)}$

$\int_{1}^{2} \frac{س^{2} هـ^{س}}{(س+1)^{2}} \, د س =$

$(س^{2} هـ^{س} \times \frac{-1}{س+1}) \Big]_{1}^{2} - \int_{1}^{2} (س^{2} هـ^{س} + هـ^{س} \times 2س) \times \frac{-1}{س+1} \, د س$

$(\frac{-1}{2} هـ^{2} \times 4 - هـ \times 1) + \int_{1}^{2} \frac{هـ^{س}(س+1)}{س+1} \, د س$

$(-\frac{1}{2} هـ^{2} + 4هـ) + \int_{1}^{2} هـ^{س} \, د س$

$(-\frac{هـ^{2}}{2} + هـ^{س}) \Big]_{1}^{2}$

$(-\frac{هـ^{2}}{2} + هـ^{2} - هـ)$

$(\frac{-هـ^{2}}{2} + هـ - 1)$

$= (\frac{هـ^{2}}{2} - 1)$

$هـ^{2} - 2$

س٩٦ اذا كان $ه(س) = لو_{هـ} (\frac{هـ^{س}}{س})^{2}$ فإن

قيمة $ه'(1)$ تساوي

أ) صفر ب) 1 ج) 2 د) $هـ^{2}$

الحل: $ه(س) = لو_{هـ} (\frac{هـ^{س}}{س})^{2} = 2 لو_{هـ} (\frac{هـ^{س}}{س})$

$= 2 (لو_{هـ} هـ^{س} - لو_{هـ} س) = 2 (س - لو_{هـ} س)$

$ه'(س) = 2 (2 - \frac{1}{س})$

$ه'(1) = 2 (2 - \frac{1}{1}) = 2$ (ب)

س٩٧ قيمة $\int_{1}^{3} \frac{(س^{2}-2)^{2} - 4}{س^{2}} \, د س$ تساوي

أ) $\frac{2}{3}$ ب) $-\frac{2}{3}$ ج) $-\frac{4}{3}$ د) $\frac{4}{3}$

الحل: $\int_{1}^{3} \frac{(س^{2}-2)^{2} - 4}{س^{2}} \, د س =$

$\int_{1}^{3} \frac{س^{4} - 4س^{2} + 4 - 4}{س^{2}} \, د س =$

$\int_{1}^{3} \frac{س^{4} - 4س^{2}}{س^{2}} \, د س = \int_{1}^{3} \frac{س^{2}(س^{2}-4)}{س^{2}} \, د س$

$\int_{1}^{3} س^{2} - 4 \, د س = \frac{س^{3}}{3} - 4س \Big]_{1}^{3}$

$= (9 - 12) - (\frac{1}{3} - 4)$

$= -3 - \frac{1}{3} + 4 = 1 - \frac{1}{3}$

$= \frac{2}{3}$ (أ)

منهاجي
متعة التعليم الهادف

س98 حل المعادلة التفاضلية

ظا^{2}س دص = ٣ دص − دس هـ

أ) ص = $\frac{1}{3}$(ظاس + ٢س) + جـ

ب) ص = $\frac{1}{3}$ قاس + جـ

جـ) ص = $\frac{1}{3}$ ظاس + جـ

د) ص = $\frac{1}{3}$ (قاس + ٢س) + جـ

الحل: ظا^{2}س دص + دس = ٣ دص

$\int$ ٣ دص = $\int$ (ظا^{2}س + ١) دس

٣ ص = $\int$ قا^{2}س دس

٣ ص = ظاس + جـ

ص = $\frac{1}{3}$ ظاس + جـ (ب)

س99 جد قيمة $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}$ جتاس (جـ − ٢جتاس)^4 دس

الحل:

$\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}$ جتاس (جـ − ٢(١ − جا^{2}س))^4 دس

$\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}$ جتاس (جـ − ٢ + ٢جا^{2}س)^4 دس

$\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}$ جتاس (٢ جا^{2}س)^4 دس

$\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}$ ٥٦ جتاس جا^{8}س دس

ص = جاس ⟹ دص = جتاس دس

س = ٠ ⟹ ص = ٠

س = $\frac{\pi}{4}$ ⟹ ص = $\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\int_{0}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$ ٥٦ ص^8 دص

$\int_{0}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$ ٥٦ ص^8 دص = $\frac{٥٦\ ص^9}{9}$]$_{0}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$

$\frac{٥٦}{9}$ $(\frac{1}{\sqrt{2}})^9$ − صفر) = $\frac{٥٦}{9}$ × $\frac{1}{16\sqrt{2}}$

= $\frac{٦}{9\sqrt{2}}$

مثال: اذا كان ميل المماس لمنحنى العلاقة ص عند النقطة (س، ص) يساوي $\frac{1 + لو_{هـ} س}{هـ + س\ لو_{هـ} س}$ فجد قاعدة العلاقة ص علماً بأن منحناها يمر بالنقطة (٢، ١)

الحل: ميل المماس = ق′(س)

ق(س) = $\int$ $\frac{1 + لو_{هـ} س}{هـ + س\ لو_{هـ} س}$. دس

لاحظ أن مشتقة المقام موجودة في البسط

$(هـ + س\ لو_{هـ} س)'$ = ٠ + س × $\frac{1}{س}$ + $لو_{هـ}$ س × ١

= ١ + $لو_{هـ}$ س

⟹ جواب التكامل هو $لو_{هـ}$ |المقام| + جـ

⟹ ق(س) = $لو_{هـ}$ |هـ + س $لو_{هـ}$ س| + جـ

ق(١) = $لو_{هـ}$ |هـ + $لو_{هـ}$ ١| + جـ

٢ = $لو_{هـ}$ |هـ + ٠| + جـ

٢ = ١ + جـ ⟹ جـ = ١

⟹ ق(س) = $لو_{هـ}$ |هـ + س $لو_{هـ}$ س| + ١

منهاجي
متعة التعليم الهادف

س١.١ إذا كان $\int_{1}^{4} ه(س)\,د س = ه^{س} - ٢ جا س$، فإن قيمة $\frac{ه(\frac{\pi}{4})}{ه'(\frac{\pi}{4})}$ تساوي :

أ) ٣ ب) $-\frac{١}{٣}$ ج) ١ د) -٣

الحل: نشتق الطرفين

$ه(س) = - جا س - ٢ جتا س$

$ه(\frac{\pi}{4}) = -\frac{١}{\sqrt{٢}} - \frac{٢}{\sqrt{٢}} = \frac{-٣}{\sqrt{٢}}$

$ه'(س) = - جتا س + ٢ جا س$

$ه'(\frac{\pi}{4}) = -\frac{١}{\sqrt{٢}} + \frac{٢}{\sqrt{٢}} = \frac{١}{\sqrt{٢}}$

$\frac{ه(\frac{\pi}{4})}{ه'(\frac{\pi}{4})} = \frac{\frac{-٣}{\sqrt{٢}}}{\frac{١}{\sqrt{٢}}} = -٣$ (د)

س١.٢ إذا كان $\int_{1}^{٤} ه'(س)\,د س = س^{\frac{٣}{٢}}$، فإن قيمة $\int_{1}^{٤} ه(س)\,د س$ تساوي :

أ) $\frac{٣}{٢}$ ب) $-\frac{٣}{٤}$ ج) $\frac{٣}{٤}$ د) $-\frac{٣}{٢}$

الحل: $\int_{1}^{٤} ه'(س)\,د س = [ه(س)]_{1}^{٤}$

$= ه(٤) - ه(١)$.

$ه(س) = \int س^{\frac{١}{٢}} = س \times س^{\frac{١}{٢}} = س^{\frac{٣}{٢}}$

$ه'(س) = \frac{٣}{٢} س^{\frac{١}{٢}} = \frac{٣}{٢} \sqrt{س}$

$ه'(٤) = \frac{٣}{٢} \sqrt{٤} = ٣$

$ه'(١) = \frac{٣}{٢} \sqrt{١} = \frac{٣}{٢}$

$\therefore ه'(٤) - ه'(١) = ٣ - \frac{٣}{٢} = \frac{٣}{٢}$ (ج)

س١.٣ إذا كان $\int_{1}^{٣} (ك - ٢ ه(س))\,د س$ تساوي :

أ) ١٢ ب) ٣ ج) -٣ د) ١٥

الحل: $ه(س) \geq س$ في $[٠, ٣]$

$-٢ ه(س) \leq -٢ س$ (عند الضرب في سالب تنقلب إشارة المتباينة)

إضافة ك للطرفين

$ك - ٢ ه(س) \leq ك - ٢ س$ نكامل الطرفين

$\int_{1}^{٣} (ك - ٢ ه(س))\,د س \leq \int_{1}^{٣} (ك - ٢ س)\,د س$

$[ك س - س^{٢}]_{1}^{٣} \leq ٣ ك - ٩ - ك + ١$

$٢ ك - ٨ \leq ٣ ك - ٩$ ← ضف

$-٨ + ٩ \leq ٣ ك - ٢ ك$

$ك \geq ١$

$\therefore$ أكبر قيمة لـ ك = ١ (ب)

س١.٤ إذا كان ه اقترانًا معرفًا على الفترة $[٠, ٣]$ وكان $ه(س) \geq س$، فإن أكبر قيمة للمقدار $\int_{1}^{٣} (ك - ٢ ه(س))\,د س$ تساوي :

أ) ١٢ ب) ٣ ج) -٣ د) ١٥

الحل: $ه(س) \geq س$ في $[٠, ٣]$

$-٢ ه(س) \leq -٢ س$ (عند الضرب في سالب تنقلب إشارة المتباينة)

إضافة ك للطرفين

$ك - ٢ ه(س) \leq ك - ٢ س$ نكامل الطرفين

$\int_{1}^{٣} (ك - ٢ ه(س))\,د س \leq \int_{1}^{٣} (ك - ٢ س)\,د س$

$[ك س - س^{٢}]_{1}^{٣} \leq ٣ ك - ٩ - ك + ١$

$٢ ك - ٨ \leq ٣ ك - ٩$ ← ضف

$-٨ + ٩ \leq ٣ ك - ٢ ك$

$ك \geq ١$

$\therefore$ أكبر قيمة لـ ك = ١ (ب)

س١.٥ قيمة $\int_{٠}^{٢} (|س - ١| + ١)\,د س$ تساوي

أ) ١ ب) ٣ ج) ٢ د) ٤

الحل: نعيد تعريف $|س - ١|$

$س - ١ = ٠$ عند $س = ١$

	$س < ١$	$س > ١$
$س - ١$	−	+

$\int_{٠}^{١} (١ - س)\,د س + \int_{١}^{٢} (س - ١)\,د س + \int_{٠}^{٢} ١\,د س$

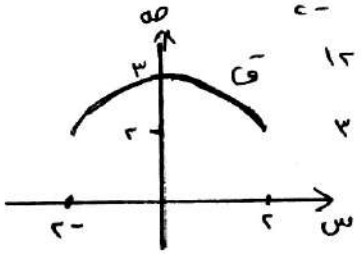
$= [س - \frac{س^{٢}}{٢}]_{٠}^{١} + [\frac{س^{٢}}{٢} - س]_{١}^{٢} + ١(٢ - ٠) =$

$(١ - \frac{١}{٢}) - ٠ + (٢ - ٢) - (\frac{١}{٢} - ١) + ٢ =$

$\frac{١}{٢} + \frac{١}{٢} + ٢ = ٣$ (ب)

منهاجي
متعة التعليم الهادف

س٨: معتمداً الشكل المجاور الذي يمثل منحنى الاقتران ق المعرف على الفترة $[-٢، ٣]$، فأي مما يلي يمثل $\int_{-٢}^{٣} ق(س)\,د س$؟



أ) ٨ ب) ١٢ ج) ٣ د) ٤

الحل: $٢ \leq ق(س) \leq ٣$

$\int_{-٢}^{٣} ٢\,د س \leq \int_{-٢}^{٣} ق(س)\,د س \leq \int_{-٢}^{٣} ٣\,د س$

$٢(٣-(-٢)) \leq \int_{-٢}^{٣} ق(س)\,د س \leq ٣(٣-(-٢))$

$١٠ \leq \int_{-٢}^{٣} ق(س)\,د س \leq ١٥$

الجواب (ب) ← أكبر قيمة

س٩: جد $\int \frac{جا^٣ س}{(١+جتا س)^٥}\,د س$

الحل: $ص = ١+جتا س \leftarrow د ص = -جا س\,د س$

$\int \frac{جا^٣ س}{ص^٥}\,\frac{د ص}{-جا س} =$

$-\int جا^٢ س\, ص^{-٥}\,د ص =$

$جا^٢ س = ١-جتا^٢ س$

$-\int (١-جتا^٢ س)\, ص^{-٥}\,د ص =$

$\int (جتا^٢ س - ١)\, ص^{-٥}\,د ص =$

$ص = ١+جتا س \Rightarrow جتا س = ص-١$

$\int ((ص-١)^٢ - ١)\, ص^{-٥}\,د ص =$

$\int (ص^{-٣} - ٢ص^{-٤} + ١ - ١)\,د ص =$

$\int (ص^{-٣} - ٢ص^{-٤})\,د ص = \int ص^{-٧} - ٢ص^{-٦}\,د ص$

$= \frac{ص^{-٦}}{-٦} - \frac{٢ص^{-٥}}{-٥} + ج$

$= \frac{-١}{٦(١+جتا س)^٦} + \frac{٢}{٥(١+جتا س)^٥} + ج$

س١٠: جد $\int_{هـ}^{} لو_{هـ}(٤س^٢ - ٩)\,د س$، هـ العدد النيبري

الحل: $ق = لو_{هـ}(٤س^٢-٩)$ ، $د ق = \frac{٨س}{٤س^٢-٩}\,د س$

$د ع = د س$ ، $ع = س$

$= س\,لو_{هـ}(٤س^٢-٩) - \int س \times \frac{٨س}{٤س^٢-٩}\,د س$

$= س\,لو_{هـ}(٤س^٢-٩) - \int \frac{٨س^٢}{٤س^٢-٩}\,د س$

$= س\,لو_{هـ}(٤س^٢-٩) - \int ٢ + \frac{١٨}{٤س^٢-٩}\,د س$

$= س\,لو_{هـ}(٤س^٢-٩) - ٢س - \int \left(\frac{أ}{٢س-٣} + \frac{ب}{٢س+٣}\right) د س$

$أ(٢س+٣) + ب(٢س-٣) = ١٨$

$س = -\frac{٣}{٢} \leftarrow ب = -٣$

$س = \frac{٣}{٢} \leftarrow أ = ٣$

$= س\,لو_{هـ}(٤س^٢-٩) - ٢س - \int \left(\frac{٣}{٢س-٣} - \frac{٣}{٢س+٣}\right) د س$

$= س\,لو_{هـ}(٤س^٢-٩) - ٢س - \frac{٣}{٢}لو_{هـ}|٢س-٣| + \frac{٣}{٢}لو_{هـ}|٢س+٣| + ج$

منهاجي
متعة التعليم الهادف

س١٠٥ إذا كان

$\int_{1}^{2}(\frac{5}{2}-3م(س))دس=\int_{1}^{2}(دس+\frac{م(س)}{2})دس$

فإن قيمة $\int_{1}^{2}م(س)دس$ تساوي:

أ) -٨ ب) -١ ج) $-\frac{٧}{٣}$ د) $-\frac{٥}{٨}$

الحل:

$\int_{1}^{2}(\frac{5}{2}-3م(س))دس=\int_{1}^{2}(دس+\frac{م(س)}{2})دس$

$\frac{5}{2}-3\int_{1}^{2}م(س)دس=[س]_{1}^{2}+\frac{1}{2}\int_{1}^{2}م(س)دس$

$\frac{5}{2}-3\int_{1}^{2}م(س)دس=٢-١+\frac{1}{2}\int_{1}^{2}م(س)دس$

$\frac{5}{2}+1=\frac{1}{2}\int_{1}^{2}م(س)دس+3\int_{1}^{2}م(س)دس$

$\frac{7}{2}=\frac{1}{2}\int_{1}^{2}م(س)دس-3\int_{1}^{2}م(س)دس$

$\frac{7}{2}=-\frac{5}{2}\int_{1}^{2}م(س)دس$

$\Rightarrow \int_{1}^{2}م(س)دس=\frac{7}{2}\times\frac{2}{-5}$

$\int_{1}^{2}م(س)دس=-١$ (ب)

س١١ إذا كان م(س) معكوساً لمشتقة الاقتران ق المتصل على الفترة $[-١،٤]$ وكان $م'(-١)=٢$ ، $م'(٤)=-٣$ فإن قيمة $\int_{-1}^{4}(\frac{1}{5}-\frac{2}{5}ق'(س))دس$ تساوي:

أ) -١ ب) ٣ ج) -٦ د) ٤

الحل: $\int_{-1}^{4}(\frac{1}{5}-\frac{2}{5}ق'(س))دس=$

$\frac{1}{5}(٤-(-١))-\frac{2}{5}ق(س)\Big]_{-1}^{4}=$

$١-\frac{2}{5}(ق(٤)-ق(-١))=$

$١-\frac{2}{5}(-٣-٢)=$

$١-\frac{2}{5}\times-٥=٣$ (ب)

$م''(٤)=ق'(٤)$
$م''(-١)=ق'(-١)$

س١٠٧ قيمة $\int_{1}^{2}\frac{1}{هـ^{٤}-1}دس$ تساوي

أ) $هـ^{٢}+1$ ب) $\frac{1}{هـ^{٢}-1}$

ج) $\frac{1}{هـ^{٢}+1}$ د) $هـ^{٢}-1$

الحل: هـ ثابت

$\int_{1}^{2}\frac{1}{هـ^{٤}-1}دس=\frac{1}{هـ^{٤}-1}س\Big]_{1}^{2}$

$\frac{1}{هـ^{٤}-1}(هـ^{٢}-1)=\frac{هـ^{٢}-1}{هـ^{٤}-1}$

$=\frac{هـ^{٢}-1}{(هـ^{٢}-1)(هـ^{٢}+1)}$

$=\frac{1}{هـ^{٢}+1}$ (أ)

منهاجي
متعة التعليم الهادف

١١) تمرين $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{٣ + ٣ ظتا^٢ س}{ظتا س}$ دس تساوي

أ) $-٣ لو_{هـ} \frac{١}{٢}$ ب) $لو_{هـ} \frac{١}{٢}$

ج) $٣ لو_{هـ} \frac{١}{٢}$ د) $-لو_{هـ} \frac{١}{٢}$

الحل: $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{٣(١ + ظتا^٢ س)}{ظتا س}$ دس =

$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{٣ قتا^٢ س}{ظتا س}$ دس $= -٣ لو_{هـ} |ظتا س|$ $\Big]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}$

$= -٣ (لو_{هـ} \frac{١}{\sqrt{٣}} - لو_{هـ} \sqrt{٣})$

$= -٣ (لو_{هـ} ١ - لو_{هـ} \sqrt{٣} - لو_{هـ} \sqrt{٣})$

$= -٣ (صفر - ٢ لو_{هـ} \sqrt{٣})$

$= -٣ \times -٢ لو_{هـ} \sqrt{٣} = -٣ لو_{هـ} (\sqrt{٣})^{-٢}$

$= -٣ لو_{هـ} (\frac{١}{٣})$ (أ)

---

١٢) حل المعادلة التفاضلية:

$دص - ظا^٢ س دص = ٢ ظا س دس$.

$س \in (٠، \frac{\pi}{٤})$ هو:

أ) $ص = ٢ لو_{هـ} |ا جتا س| + جـ$ ب) $ص = ٣ لو_{هـ} |ا جتا س| + جـ$

ج) $ص = \frac{١}{٢} لو_{هـ} |ا جتا س| + جـ$ د) $ص = -\frac{١}{٢} لو_{هـ} |ا جتا س| + جـ$

الحل: $دص (١ - ظا^٢ س) = ٢ ظا س دس$

$دص = \frac{٢ ظا س}{١ - ظا^٢ س}$ دس

$دص = \frac{٢ ظا س}{\frac{١ - ظا^٢ س}{قتا^٢ س}}$ دس

$دص = \frac{٢ \frac{جا س}{جتا س}}{\frac{جتا^٢ س - جا^٢ س}{جتا^٢ س}}$ دس

$دص = \frac{٢ \frac{جا س}{جتا س} \times جتا^٢ س}{جتا^٢ س - جا^٢ س}$. دس

$دص = \frac{٢ جا س جتا س}{جتا^٢ س - جا^٢ س}$. دس

$دص = \frac{جا ٢س}{جتا ٢س}$ دس

$\int دص = \int \frac{جا ٢س}{جتا ٢س}$. دس

$ص = -\frac{١}{٢} \int \frac{-٢ جا ٢س}{جتا ٢س}$. دس

$ص = -\frac{١}{٢} لو |جتا ٢س| + جـ$

(د)

منهاجي
منصة التعليم الهادف

س١١٣ جد التكامل الآتي:

$\int 4 e^{2x} \sin e^{x} \cos e^{x} \, dx$

الحل:

$= \int 4 e^{2x} \times \frac{1}{2} \sin 2e^{x} \, dx$

$= \int 2 e^{2x} \sin 2e^{x} \, dx$

$u = 2e^{2x}$	$dv = \sin 2e^{x} \, dx$
$du = 4e^{2x} dx$	$v = -\frac{1}{2} \cos 2e^{x}$

$= 2e^{2x} \times -\frac{1}{2} \cos 2e^{x} + \int \frac{1}{2} \cos 2e^{x} \times 4e^{2x} dx$

$= -e^{2x} \cos 2e^{x} + \int 2e^{2x} \cos 2e^{x} \, dx$

$u \quad dv$

$u = 2e^{2x}$	$dv = \cos 2e^{x} dx$
$du = 4e^{2x} dx$	$v = \frac{1}{2} \sin 2e^{x}$

$= -e^{2x} \cos 2e^{x} + e^{2x} \sin 2e^{x} - \int \frac{1}{2} \sin 2e^{x} \times 4e^{2x} dx$

$= -e^{2x} \cos 2e^{x} + e^{2x} \sin 2e^{x} - \int 2e^{2x} \sin 2e^{x} dx$

↑ تكرر السؤال

نقل الى الطرف الأيمن

$2 \int 4 e^{2x} \sin 2e^{x} \cos 2e^{x} \, dx = -e^{2x} \cos 2e^{x} + e^{2x} \sin 2e^{x} + c$

س١١٤ اذا كان $h^{(x)} = \log_{h} (x+y) + h^{2}$ ،

$x > 0$ ، $y > 0$. اثبت أن

$\frac{dy}{dx} = \frac{1 - y (x+y) h^{(x)}}{x (x+y) h^{(x)} - 1}$.

الحل: $h^{(x)} = \log_{h} (x+y) + h^{2}$ نضع الطرفين

$h^{(x)} (x+y) (x+y') = 1 + y'$

$h^{(x)} (x+y) (x + y \times 1 + y' \times x) = 1 + y'$

$x (x+y) h^{(x)} y' + y (x+y) h^{(x)} = 1 + y'$

$y' (x (x+y) h^{(x)} - 1) = 1 - y (x+y) h^{(x)}$

$y' = \frac{1 - y (x+y) h^{(x)}}{x (x+y) h^{(x)} - 1}$ وهو المطلوب

منهاجي
متعة التعليم الهادف

س١١٥ جد $\int \frac{3س^2+2}{س^3-س}$ دس .

الحل:

درجة البسط = درجة المقام ⇐ نقسم

$$\begin{array}{r|l} 3 & \\ \hline 3س^2+2 & س^3-س \\ -3س^2 \mp 3س & \\ \hline 3س+2 & \end{array}$$

$$\int \frac{3س^2+2}{س^3-س}\,دس = \int \left(3 + \frac{3س+2}{س^3-س}\right)\,دس$$

$$\frac{3س+2}{س^3-س} = \frac{3س+2}{س(س-1)} = \frac{ب}{س-1} + \frac{ا}{س}$$

$$ا(س-1) + ب س = 3س+2$$

$$س = 0 \Leftarrow -ا = 2 \Leftarrow ا = -2$$

$$س = 1 \Leftarrow ب = 5$$

$$\int \frac{3س^2+2}{س^3-س}\,دس = \int 3\,دس + \int \frac{-2}{س}\,دس + \int \frac{5}{س-1}\,دس$$

$$= 3س - 2\ln|س| + 5\ln|س-1| + جـ$$

س١١٦ جد $\int قتا^4 س\ ظتا^3 س\,دس$

الحل: نفرض ص = ظتا س ⇐

$$\frac{دص}{دس} = -قتا^2 س \Leftarrow دس = \frac{دص}{-قتا^2 س}$$

$$\int قتا^4 س\ ظتا^3 س\,دس =$$

$$\int قتا^4 س\ ص^3 \frac{دص}{-قتا^2 س} =$$

$$-\int قتا^2 س\ ص^3\,دص$$

$$قتا^2 س = ظتا^2 س + 1 \Leftarrow$$

$$قتا^2 س = ص^2 + 1$$

$$-\int قتا^2 س\ ص^3\,دص = -\int (ص^2+1)\ ص^3\,دص$$

$$= -\int (ص^5 + ص^3)\,دص = -\left(\frac{1}{6}ص^6 + \frac{1}{4}ص^4\right) + جـ$$

$$= -\frac{1}{12}ص^6 - \frac{1}{8}ص^4 + جـ$$

$$= -\frac{1}{12}ظتا^6 س - \frac{1}{8}ظتا^4 س + جـ$$

س١١٧ اذا كان الاقترانان م(س) ، هـ(س) معكوسين لمشتقة الاقتران المتصل ه ، وكان

ل(س) = ٤ هـ(س) − ٧ م(س) فإن ل'(س) =

أ) ٣ه(س) ب) ٣ جـ) −٣ه(س) د) −٣

الحل: م(س) معكوس لمشتقة الاقتران ه ⇐ م'(س) = ه(س)

هـ(س) معكوس لمشتقة الاقتران ه ⇐ هـ'(س) = ه(س)

ل(س) = ٤ هـ(س) − ٧ م(س)

ل'(س) = ٤ هـ'(س) − ٧ م'(س)

ل'(س) = ٤ ه(س) − ٧ ه(س)

ل'(س) = −٣ ه(س) (جـ)

منهاجي
متعة التعليم الهادف

س١١٨ إذا كان $\int_{جـ}^{٣} ٤ \, دس = ١٦$ ، جـ ∈ ح

فإن قيمة الثابت جـ تساوي :

أ) -١ ب) -٤

جـ) ١ د) ٧

الحل: $\int_{جـ}^{٣} ٤ \, دس = ١٦$

$\frac{٤}{٤}(٣-جـ) = \frac{١٦}{٤}$

$\Leftarrow ٣-جـ = ٤ \Leftarrow جـ = ٣-٤$

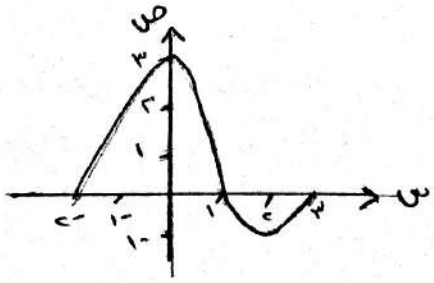
$جـ = -١$ (أ)

س١١٩ معتمداً الشكل التالي الذي يمثل منحنى الاقتران ق المعرف على الفترة $[-٣، ٣]$ فإن القيم الثابتين م، ن على الترتيب التي تحقق المتباينة :

$م \leq \int_{-٣}^{٣} (ق(س) - ١) \, دس \leq ن$

أ) -٥٦٥ ب) -١٦٣

جـ) ٣٦٠ د) -١٠٦١٠ .



الحل: $-١ \leq ق(س) \leq ٣$

$-٢ \leq ق(س) - ١ \leq ٢$

$\int_{-٣}^{٣} -٢ \, دس \leq \int_{-٣}^{٣} (ق(س)-١) \, دس \leq \int_{-٣}^{٣} ٢ \, دس$

$-(٣-(-٣)) \leq \int_{-٣}^{٣} (ق(س)-١) \, دس \leq ٢(٣-(-٣))$

$-١٠ \leq \int_{-٣}^{٣} (ق(س)-١) \, دس \leq ١٠$ (د)

س١٢٠ $\int (جا^٢س + جتا^٢س + ظا^٢س) \, دس$ يساوي

أ) ظتاس + جـ ب) ٢ قاس ظاس + جـ

جـ) س + قا^٢س + جـ د) ظاس + جـ

الحل: $\int (جا^٢س + جتا^٢س + ظا^٢س) \, دس =$

$\int (١ + ظا^٢س) \, دس$ ($جا^٢س + جتا^٢س = ١$)

$\int قا^٢س \, دس = ظاس + جـ$ (د)

س١٢١ جد $\int هـ^{جاس} جتاس \, دس$

(نفرض أن ص = $هـ^{جاس}$ ← $\frac{دص}{دس} = هـ^{جاس} جتاس$ ← $دص = جتاس \, دس$)

$\int هـ^{جاس} جتاس \, دس = \int هـ^{جاس} \frac{دص}{جتاس} =$

$\int هـ^{جاس} دص = \int ص \, دص$ (أجزاء)

(ص = ص ، دص = دص ، دص = جتاس دس ، ص = جاس)

$= -ص جتاس + \int جتاس \, دص$

$= -ص جتاس + جاس + جـ$

$= -هـ^{جاس} جتاس + جاس + جـ$

منهاجي
متعة التعليم الهادف

س١٢٤ اذا كان

$$ق(س) = \log_{هـ}\left(\frac{\sqrt{س^3 + س^2 + 2}}{س^3}\right) + هـ^{2-س^2}$$

فجد ق'(٢) .

الحل: $ق(س) = \log_{هـ}\sqrt{س^3 + س^2 + 2} - \log_{هـ} س^3 + هـ^{2-س^2}$.

$$ق'(س) = \frac{6س^2 + 1}{2\sqrt{س^3 + س^2 + 2}} - \frac{3س^2}{س^3} + (-2س)\,هـ^{2-س^2}$$

$$ق'(س) = \frac{6س^2 + 1}{2\sqrt{س^3 + س^2 + 2}} - \frac{3}{س} - 2س\,هـ^{2-س^2}$$

$$ق'(2) = \frac{6(2)^2 + 1}{2\sqrt{(2)^3 + (2)^2 + 2}} - \frac{3}{2} - 2(2)\,هـ^{2-(2)^2}$$

$$= \frac{25}{2\sqrt{16}} - \frac{3}{2} - 4\,هـ^{-1}$$

$$= \frac{25}{8} - \frac{3}{2} - \frac{4}{هـ} .$$

$$= \frac{25}{8} - \frac{12}{8} - \frac{4}{هـ}$$

$$= \frac{13}{8} - \frac{4}{هـ}$$

س١٢٥ قيمة $\int_{0}^{1} \frac{1}{(3-س)^2}\,د س$ تساوي :

أ) $\frac{2}{3}$ ب) $-\frac{4}{3}$ ج) $\frac{4}{3}$ د) $-\frac{2}{3}$

الحل: $\int_{0}^{1} (3-س)^{-2}\,د س = \left[\frac{(3-س)^{-1}}{(-1)(-1)}\right]_{0}^{1}$

$$= \left[\frac{1}{(3-س)}\right]_{0}^{1} = \frac{1}{3-2} - \frac{1}{3-0} = 1 - \frac{1}{3}$$

$$= \frac{2}{3}$$ (أ)

س١٢٦ اذا كان ميل المماس لمنحنى العلاقة ص عند النقطة (س، ص) يساوي $\frac{-2س}{2-س^2}$ وكانت النقطة (٢، -٢) تقع على منحناها فإن قاعدة العلاقة ص هي:

أ) $ص = \log_{هـ}|2-س^2| - 2$ ب) $ص = \log_{هـ}|2-س^2| + 2$

ج) $ص = \log_{هـ}|2-س^2|$ د) $ص = \log_{هـ}|1-س^2|$.

الحل: ميل المماس $= ق'(س) = \frac{-2س}{2-س^2}$.

$$ق(س) = \int ق'(س)\,د س$$

$$ق(س) = \int \frac{-2س}{2-س^2}\,د س$$

$$ق(س) = \log_{هـ}|2-س^2| + ج$$

$$ق(1) = \log_{هـ}|2-1| + ج$$

$$-2 = \log_{هـ}1 + ج \Leftarrow -2 = صفر + ج \Leftarrow ج = -2$$

$$ق(س) = \log_{هـ}|2-س^2| - 2$$ (ب)

س١٢٧ اذا كان $ص = (هـ^{س^3})^3$ فإن $\frac{د ص}{د س}$ عندما $س = 0$ يساوي

أ) 4 ب) 2 ج) 3 د) 1

الحل: $ص = هـ^{3س^3}$

$$\frac{د ص}{د س} = 3هـ^{3س^3}(3س^2)$$

$$\left.\frac{د ص}{د س}\right|_{س=0} = 3هـ^{0}(0)$$

$$= 3هـ^{0}$$

$$= 3(1)(2) = 2$$ (ب)

منهاجي
متعة التعليم الهادف

س١٢٥ إذا كان $\int_1^3 (ق(س)+1)\,دس = ٦$

فإن قيمة: $\int_1^3 ق(س)\,دس - \int_3^1 ق(س)\,دس$ تساوي:

أ) صفر ب) ٨ ج) ١٢ د) ١٠

الحل: $\int_1^3 (ق(س)+1)\,دس = ٦$

$\int_1^3 ق(س)\,دس + \int_1^3 ١\,دس = ٦$

$\int_1^3 ق(س)\,دس + ١(٣-١) = ٦$

$\int_1^3 ق(س)\,دس + ٢ = ٦$

$\int_1^3 ق(س)\,دس = ٤$

$\int_1^3 ق(س)\,دس - \int_3^1 ق(س)\,دس =$

$٤ - -٤ = ٨$ (ب)

س١٢٦ إذا كان $\int_1^٤ ق(س)\,دس = ٥$ ،

$\int_٧^٤ (ق(س)-٢)\,دس = ٨$ فإن $\int_1^٧ ق(س)\,دس$ تساوي

أ) ٣ ب) ١٤ ج) ٧ د) ٦

الحل: $\int_٧^٤ ق(س)\,دس - \int_٧^٤ ٢\,دس = ٨$

$\int_٧^٤ ق(س)\,دس - ٢(٤-٧) = ٨$

$\int_٧^٤ ق(س)\,دس + ٦ = ٨ \Leftarrow \int_٧^٤ ق(س)\,دس = ٢$

$\int_1^٧ ق(س)\,دس = \int_1^٤ ق(س)\,دس + \int_٤^٧ ق(س)\,دس$

$= ٥ + -٢ = ٣$

$\int_1^٧ ٢ق(س)\,دس = ٢ \times ٣ = ٦$ (د)

س١٢٨ إذا كان $\int ق'(س)\,دس = ٣س^{P} + ج$ وكان $ق'(١) = ٦$

فإن قيمة الثابت P تساوي :

أ) -١ ب) ٣ ج) ١ د) -٣

الحل: نشتق الطرفين

$ق'(س) = ٣P\,س^{P-١}$

$ق''(س) = ٣P(P-١)\,س^{P-٢}$

$ق''(١) = ٣P(P-١) = ٦ \Rightarrow P = ١$ (ج)

س١٢٩ حل المعادلة التفاضلية :

$دس - ٥\,دص = جا س\,دس$ هو

أ) $ص = \frac{١}{٥}(س + جتاس) + ج$ ب) $ص = \frac{١}{٥}(١ + جتاس) + ج$

ج) $ص = \frac{١}{٥}(١ - جتاس) + ج$ د) $ص = \frac{١}{٥}(س - جتاس) + ج$

الحل: $دس - جتاس\,دس = ٥\,دص$

$٥\,دص = دس(١ - جتاس)$

$\int ٥\,دص = \int (١ - جتاس)\,دس$

$٥ص = س + جتاس + ج$

$ص = \frac{١}{٥}(س + جتاس) + ج$ (أ)

منهاجي
منصة التعليم الهادف

١٢٠ جد $\int_1^{هـ^2} س \log_{هـ} س \, دس$.

الحل: نفرض أن $ص = س \Rightarrow \frac{دص}{س} = دس$

$س = 1 \Rightarrow ص = 1$

$س = هـ^2 \Rightarrow ص = هـ^2$

$$\int_1^{هـ^2} س \log_{هـ} س \, دس = \int_1^{هـ^2} س \log_{هـ} ص \frac{دص}{س}$$

$$\frac{1}{2} \int_1^{هـ^2} \log_{هـ} ص \, دص$$

أجزاء

$ف = \log_{هـ} ص \quad دف = \frac{1}{ص} دص$

$دف = \frac{1}{ص} دص \quad ل = ص$

$$\frac{1}{2} \int_1^{هـ^2} \log_{هـ} ص \, دص =$$

$$\frac{1}{2} \left[\log_{هـ} ص \times ص \right]_1^{هـ^2} - \int_1^{هـ^2} ص \times \frac{1}{ص} دص$$

$$\frac{1}{2} \left(\log_{هـ} هـ^2 \times هـ^2 - \log_{هـ} 1 \times 1 - \int_1^{هـ^2} 1 \, دص \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(2 هـ^2 - [ص]_1^{هـ^2} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(2 هـ^2 - (هـ^2 - 1) \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(2 هـ^2 - هـ^2 + 1 \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(هـ^2 + 1 \right)$$

$$= \frac{1}{2} هـ^2 + \frac{1}{2} .$$

طريقة أخرى للحل:

يمكن حل السؤال بطريقة الأجزاء

$$\int_1^{هـ^2} س \log_{هـ} س \, دس$$

$ف = \log_{هـ} س \quad دف = س دس$

$دف = \frac{1}{س} دس \quad هـ = \frac{س^2}{2}$

$$= \log_{هـ} س \times \frac{س^2}{2} \Big]_1^{هـ^2} - \int_1^{هـ^2} \frac{س^2}{2} \times \frac{1}{س} دس$$

$$= \frac{س^2}{2} \log_{هـ} س \Big]_1^{هـ^2} - \int_1^{هـ^2} س \, دس$$

$$= \frac{هـ^4}{2} \log_{هـ} هـ^2 - \frac{1}{2} \log_{هـ} 1 - \left[\frac{س^2}{2} \right]_1^{هـ^2}$$

$$= \frac{هـ^4}{2} \times 2 - \frac{1}{2} \times 0 - \left(\frac{هـ^4}{2} - \frac{1}{2} \right)$$

$$= هـ^4 - \frac{هـ^4}{2} + \frac{1}{2} = \frac{هـ^4}{2} + \frac{1}{2}$$

١٢١ قيمة $\int_{-1}^{0} هـ^{-س} \, دس$ تساوي

أ) $هـ^2$ ب) $\frac{هـ^2}{2}$ ج) $3 هـ^2$ د) $هـ^2$

الحل: $\int_{-1}^{0} هـ^{-س} \, دس =$

$$-هـ^{-س} \Big]_{-1}^{0} = -هـ^{0} (-1 - 1)$$

$$= 2 هـ^{0} .$$

(د)

منهاجي
متعة التعليم الهادف

١٣٢ س جد $\int \frac{\text{قا}^2 س}{4 - \text{ظا}^2 س}$ د س

الحل:

نفرض أن ص = ظا س ← $\frac{\text{د ص}}{\text{قا}^2 س}$ = د س

$= \int \frac{\text{قا}^2 س}{4 - ص^2} \times \frac{\text{د ص}}{\text{قا}^2 س}$

$\int \frac{1}{4 - ص^2}$ د ص $= \int \frac{1}{(2 - ص)(2 + ص)}$ د ص

$= \int \left(\frac{أ}{2 - ص} + \frac{ب}{2 + ص} \right)$ د ص

$أ(2 + ص) + ب(2 - ص) = 1$

ص = ٢ ⇐ $4أ = 1$ ⇐ $أ = \frac{1}{4}$

ص = -٢ ⇐ $4ب = 1$ ⇐ $ب = \frac{1}{4}$

$\int \frac{1}{(2 - ص)(2 + ص)}$ د ص $= \int \left(\frac{\frac{1}{4}}{2 - ص} + \frac{\frac{1}{4}}{2 + ص} \right)$ د ص

$-\frac{1}{4} \text{لو}_هـ |2 - ص| + \frac{1}{4} \text{لو}_هـ |2 + ص| + ج$

$-\frac{1}{4} \text{لو}_هـ |2 - \text{ظا} س| + \frac{1}{4} \text{لو}_هـ |2 + \text{ظا} س| + ج$

---

١٣٣ س إذا كان م(س) = $ص^2$ - ب ك معكوساً لاستقبالة الابتداء المتصل هـ وكان هـ(١) = ٥ فما قيمة الثابت ب تساوي:

أ) ٣ ب) -٣ ج) ٤ د) -٤

الحل: م(س) = هـ(س) = $2س^2$ - ب

هـ(١) = ٢ - ب = ٥

ب = ٢ - ٥ = -٣

(ب)

---

١٣٤ س إذا كان ق اقتراناً معرفاً على الفترة [-٥، ٥] وكان ١ ≤ هـ(س) ≤ ٤ فإن أكبر قيمة للمقدار: $\int_{-2}^{1}$ (هـ(س) - ٣) د س تساوي

أ) ٣ ب) -١ ج) -٣ د) ٦

الحل: ١ ≤ هـ(س) ≤ ٤

-١ ≤ هـ(س) - ٢ ≤ ٢

$\int_{-2}^{1} -1$ د س ≤ $\int_{-2}^{1}$ (هـ(س) - ٢) د س ≤ $\int_{-2}^{1} 2$ د س

-١(١ - (-٢)) ≤ $\int_{-2}^{1}$ (هـ(س) - ٢) د س ≤ ٢(١ - (-٢))

-٣ ≤ $\int_{-2}^{1}$ (هـ(س) - ٢) د س ≤ ٦

أكبر قيمة هي ٦ (د)

---

١٣٥ س $\int \frac{س - 4}{س^2 - 2س}$ د س تساوي

أ) $\frac{1}{2} س^2 + 2س + ج$ ب) $-\frac{1}{2} س^2 - 2س + ج$

ج) $\frac{س^2}{2} + 2س + ج$ د) $-\frac{س^2}{2} - 2س + ج$

الحل: $\int \frac{س - 4}{س^2 - 2س}$ د س $= \int \frac{(س - 2)}{(س - 2)(س + 2)}$ د س

$= \int \frac{1}{س + 2}$ د س $= \int (س + 2)^{-1}$ د س

$= \frac{(س + 2)^0}{0} + ج = \frac{س^2}{2} + 2س + ج$

(ب)

منهاجي
متعة التعليم الهادف

١٣٦ س جد $\int \frac{(س^{٣}-س)^{٥}}{س^{١٨}}$ دس.

الحل: $= \int \frac{(س^{٣}-س)^{٥}}{س^{١٠} \times س^{٣}}$ دس

$= \int \frac{(س^{٣}-س)^{٥}}{(س^{٣})^{٥} \times س^{٣}}$ دس

$= \int \frac{1}{س^{٣}} \times \left(\frac{س^{٣}-س}{س^{٣}}\right)^{٥}$ دس

$= \int \frac{1}{س^{٣}} \times \left(1-\frac{1}{س^{٢}}\right)^{٥}$ دس

$= \int (1-س^{-٢})^{٥} \times س^{-٣}$ دس

نفرض أن ص $= 1-س^{-٢} \leftarrow \frac{د ص}{د س} = -٢س^{-٣}$

$\leftarrow$ دس $= \frac{د ص}{-٢س^{-٣}}$

$= \int ص^{٥} \times س^{-٣} \times \frac{د ص}{-٢س^{-٣}}$

$= \frac{1}{-٢} \int ص^{٥}$ دص $= -\frac{1}{٢} \times \frac{ص^{٦}}{٦} + ج$

$= -\frac{1}{١٢} ص^{٦} + ج$

$= -\frac{1}{١٢} (1-س^{-٢})^{٦} + ج$

* يمكن أن نفرض أن ص $= س^{-٢}$

١٣٧ س اذا كان ص$_{ن}$ $=$ لو$_{هـ}$ $(س ص^{٣})$

اثبت أن صَ $= \frac{ص}{س(٢ص_{ن}-٣)}$.

الحل: ص$_{ن}$ $=$ لو$_{هـ}$ $(س ص^{٣})$

ص$_{ن}$ $=$ لو$_{هـ}$ س $+$ لو$_{هـ}$ ص^{٢}

ص$_{ن}$ ص صَ $= \frac{١}{س} + \frac{٢ص_{ن}}{ص^{٣}}$ صَ

ص صَ $= \frac{١}{س} + \frac{٣}{ص}$ صَ $\times$ ص س

ص صَ $-$ ص $= \frac{١}{س}$ ص س صَ

ص صَ $-$ ص $= ٢$ ص$_{ن}$ ص س صَ

ص $= ٢$ ص$_{ن}$ ص س صَ $-$ ص صَ

ص $= (٢$ ص$_{ن}$ ص $-٣)$ س صَ

صَ $= \frac{ص}{س(٢ص_{ن}-٣)}$

صَ $= \frac{ص}{س(٢ص_{ن}-٣)}$ وهو المطلوب

منهاجي
متعة التعليم الهادف

أسئلة وزارية على التكامل

س١٣٨ قيمة $\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{6}} \text{ظتا}^2 س \, د س$ تساوي

أ) $\frac{1}{3}$ ب) $-\frac{1}{2}$ ج) $-\frac{1}{3}$ د) $\frac{1}{2}$

الحل: $\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{6}} \text{ظتا}^2 س \, د س = \frac{1}{6} \text{ظا} س \Big]_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{6}}$

$= \frac{1}{6}(\text{ظا} 6 \times \frac{\pi}{6} - \text{ظا} 6 \times \frac{\pi}{12}) =$

$\frac{1}{6}(\text{ظا}\pi - \text{ظا}\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{6}(\text{صفر} - 1)$

$= \frac{1}{6} \times -1 = -\frac{1}{6}$ (ب)

س١٣٩ حل المعادلة التفاضلية:

$\text{جا}^2 س \, د ص = ص \, د س$ هو

أ) $|ص| = \text{ظا}س + ج$ ب) $|ص| = \text{ظتا}س + ج$

ج) $|ص| = \text{ظتا}س + ج$ د) $|ص| = \text{ظا}س + ج$

الحل: $\text{جا}^2 س \, د ص = ص \, د س \div (\text{جا}^2 س \times ص)$

$\frac{د ص}{ص} = \frac{د س}{\text{جا}^2 س}$

$\int \frac{1}{ص} د ص = \int \text{قتا}^2 س \, د س$

$\ln|ص| = -\text{ظتا}س + ج$

$|ص| = \text{ظتا}س + ج$

(أ)

س١٤٠ إذا كان ميل المماس لمنحنى العلاقة ص عند النقطة $(س، ص)$ يساوي $\frac{ص}{س}$ حيث $س \neq 0$ فإن قاعدة العلاقة ص هي:

أ) $ص = س + ج$ ب) $|ص| = س^2 + ج$

ج) $ص = س + ج$ د) $ص = س^2 + ج$

الحل: $\frac{د ص}{د س} = \frac{ص}{س}$

$\int \frac{1}{ص} د ص = \int \frac{1}{س} د س$

$\ln|ص| = \ln|س| + \ln|ج|$

$ص = س + ج$ (ب)

س١٤١ إذا كان $\int_{3}^{1} (2س + 1) د س = -3$ ،

$\int_{6}^{1} (2س + 1) د س = 8$ ، فإن $\int_{6}^{3} (2س + 1) د س =$

أ) ٤ ب) ٦ ج) ١٠ د) ١٢

الحل: $\int_{6}^{3} (2س + 1) د س = \int_{6}^{1} (2س + 1) د س + \int_{1}^{3} (2س + 1) د س$

$= 8 + 2$

$= 10$ (ج)

س١٤٢ إذا كان $ص = \sqrt{8 + ه^{2س}}$ فإن $\frac{د ص}{د س}$ عند $س = \text{صفر}$ تساوي:

أ) $-\frac{1}{3}$ ب) $-\frac{2}{3}$ ج) $\frac{2}{3}$ د) $\frac{1}{3}$

الحل: $\frac{د ص}{د س} = \frac{2 ه^{2س}}{2\sqrt{8 + ه^{2س}}} = \frac{ه^{2س}}{\sqrt{8 + ه^{2س}}}$

$\left|\frac{د ص}{د س}\right|_{س=0} = \frac{ه^0}{\sqrt{8 + ه^0}} = \frac{1}{\sqrt{9}} = \frac{1}{3}$ (د)

منهاجي
متعة التعليم الهادف

س١٤٣ $\int \frac{\text{س}}{\text{جتا}^2 \text{س}}$ دس تساوي:

أ) س ظا س − لو$_هـ$ |جتا س| + جـ

ب) س ظا س + لو$_هـ$ |جتا س| + جـ

جـ) س ظا ك − لو$_هـ$ |جا س| + جـ

د) س ظا ك + لو$_هـ$ |جا س| + جـ

الحل: $\int$ س × $\frac{1}{\text{جتا}^2 \text{س}}$ دس = $\int$ س قا^2 س دس

ف = س	د ف = قا^2 س دس
د د = دس	هـ = ظا ك

= س ظا ك − $\int$ ظا س دس .

= س ظا ك − $\int \frac{\text{جا س}}{\text{جتا ك}}$. دس

= س ظا ك + لو$_هـ$ |جتا ك| + جـ (ب)

س١٤٤ اذا كان الاقترانان م(س)، هـ(س) متكاملين لمنطقة الاقتران المتصل ه، وكان

$\int_{\text{ه}}$ (م(س) − هـ(س)) دس = ٦ فما قيمة

$\int_{\text{ه}}$ ٤س (م(س) − هـ(س)) دس ؟

أ) ٤٢ ب) ١٢ جـ) ٣ د) ٤٨ .

الحل: ف = ٤س | د ف = م(س) − هـ(س)

د د = ٤ دس | هـ = $\int$ (م(س) − هـ(س)) . دس

= ٤س × ٦]$^{\text{ج}}_{\text{ب}}$ − ٤ $\int_{\text{ه}}$ (م(س) − هـ(س)) دس

= ٤جـ × ٤جـ − ٠×٤ − ٤×٦

= ٤٨ − ٤جـ

= ٤جـ (أ)

س١٤٥ اذا كان الاقترانان م(س)، هـ(س) متكاملين لمنطقة الاقتران المتصل ه(س)، وكان

ل(س) = ٤ هـ(س) − ٦ م(س) فإن ل′(س) تساوي

أ) −٢ م(س) ب) −٢ جـ) ٢ د) ٢ م(س)

الحل: م′(س) = م(س) ، هـ′(س) = م(س)

ل′(س) = ٤ هـ′(س) − ٦ م′(س)

ل′(س) = ٤ م(س) − ٦ م(س)

= −٢ م(س) (أ)

س١٤٦ اذا كان $\int$ (جـ − ٤ب^2) دس = ٦٨

فإن قيمة الثابت ب تساوي:

أ) ٢ ب) ٣ جـ) −٣ د) −٢

الحل: $\int$ (جـ − ٤ب^2) دس = ٦٨

(جـ − ٤ب^2) س]$^{\text{ج}}_{\text{ب}}$ = ٦٨

جـ (جـ − ٤ب^2) = ٦٨ ⇐ جـ^2 − ٤ب^2 = ٣٤

٤ب^2 = جـ^2 − ٣٤ ⇐ ٤ب^2 = −٣٤ ⇐ ب^2 = −٨

⇐ ب = −٢ (د)

س١٤٧ اذا كان م(س) = لو$_هـ$ (٥ + ٨س)^2 فإن قيمة م′(٤) تساوي:

أ) −$\frac{1}{٨}$ ب) $\frac{1}{٤}$ جـ) −$\frac{1}{٤}$ د) $\frac{1}{٨}$

الحل: م(س) = ٢ لو$_هـ$ (٥ + ٨س)

م′(س) = ٢ × $\frac{٨}{\frac{1}{٥+٨س}}$ × $\frac{1}{٥+٨س}$

م′(٤) = $\frac{٢ \times ٨}{\frac{1}{٥+٤٢}}$ = $\frac{٣٢}{٣٧}$ = $\frac{1}{٤}$

م′(٤) = $\frac{1}{٨}$ (د)

منهاجي
متعة التعليم الهادف

س١٤٨ إذا كان ص = هـ^س + (س+١) جاس هـ .
فإن $\frac{دص}{دس}$ عند س = صفر تساوي :
أ) ١ ب) ٢ ج) ٣ د) صفر

الحل: ص = هـ^س + (س+١) جاس هـ
$\frac{دص}{دس}$ = صفر + (س+١) × جتاس × هـ^س + هـ^س × ١
$\frac{دص}{دس}|_{س=٠}$ = (٠+١) × جتا٠ × هـ^٠ + هـ^٠
= ١ × ١ × ١ + ١
= ١ + ١ = ٢ (ب)

س١٤٩ إذا كان $\int_{٢}^{٦} \left(\frac{م(س)}{٢} - ٤\right) دس = ٤$ ،
$\int_{٩}^{٦} م(س) دس = ٦$ فإن $\int_{٩}^{ج} (٣س + م(س)) دس$ يساوي
أ) ١١١ ب) ٤٣ ج) -١١١ د) -٤٣

الحل: $\int_{ج}^{٦} \left(\frac{م(س)}{٢} - ٤\right) دس = ٤ \Rightarrow \frac{١}{٢}\int_{ج}^{٦} م(س) دس - \int_{ج}^{٦} ٤ دس = ٤$
$\frac{١}{٢}\int_{ج}^{٦} م(س) دس - ٤(٦-ج) = ٤ \Rightarrow \frac{١}{٢}\int_{ج}^{٦} م(س) دس - ١٦ = ٤$
$\frac{١}{٢}\int_{ج}^{٦} م(س) دس = ٢٠ \Rightarrow \int_{ج}^{٦} م(س) دس = ٤٠$
$\int_{٩}^{ج} م(س) دس = \int_{٩}^{٦} م(س) دس + \int_{ج}^{٦} م(س) دس$
$= ٦ + -٤٠ = -٣٤$
$\therefore \int_{٩}^{ج} (٣س + م(س)) دس = \int_{٩}^{ج} ٣س دس + \int_{٩}^{ج} م(س) دس$
$= \left[\frac{٣س^٢}{٢}\right]_{٩}^{ج} + -٣٤ = ٣ج^٢ - ٢٧ - ٣٤$
$= -١١١$ (د)

س١٥٠ قيمة $\int_{١}^{هـ} \frac{لو_هـ س}{س} دس$ تساوي :
أ) هـ - ١ ب) هـ ج) هـ + ١ د) هـ + ٢

الحل: ع = لو_هـ س ، دع = $\frac{١}{س}$ دس
دف = دس ، ف = س
$\int_{١}^{هـ} لو_هـ س دس = [لو_هـ س × س]_{١}^{هـ} - \int_{١}^{هـ} س × \frac{١}{س} دس$
$= [س لو_هـ س]_{١}^{هـ} - [س]_{١}^{هـ}$
$= هـ لو_هـ هـ - ١ × لو_هـ ١ - (هـ - ١)$
$= هـ × ١ - صفر - هـ + ١$
$= ٢هـ - هـ + ١ = هـ + ١$ (د)

س١٥١ $\int \frac{٢}{س^٢ - ١} دس$ يساوي :
أ) لو_هـ |س-١| + لو_هـ |س+١| + جـ ب) لو_هـ |س-١| - لو_هـ |س+١| + جـ
ج) لو_هـ |س-٢| + لو_هـ |س+٢| + جـ د) لو_هـ |س-٢| - لو_هـ |س+٢| + جـ

الحل: $\frac{٢}{س^٢ - ١} = \frac{٢}{(س-١)(س+١)} = \frac{أ}{س-١} + \frac{ب}{س+١}$
أ(س+١) + ب(س-١) = ٢
س = ١ ⇒ ٢أ = ٢ ⇒ أ = ١
س = -١ ⇒ -٢ب = ٢ ⇒ ب = -١
$\int \frac{٢}{س^٢ - ١} دس = \int \left(\frac{١}{س-١} - \frac{١}{س+١}\right) دس$
= لو_هـ |س-١| - لو_هـ |س+١| + جـ
(ب)

منهاجي
متعة التعليم الهادف

س١٥٢ حل المعادلة التفاضلية :

$\frac{دص}{دس} - ظتا^2 س \, ص = جا س \, جتا س$ ، $س \in (0, \frac{\pi}{4})$

أ) $ص = لو_هـ |ظا س| + جـ$ ب) $ص = 2 لو_هـ |ظا س| + جـ$

جـ) $ص = - لو_هـ |ظا س| + جـ$ د) $ص = -2 لو_هـ |ظا س| + جـ$

الحل: $\frac{دص}{دس}(1 - ظتا^2 س) = جا س \, جتا س$

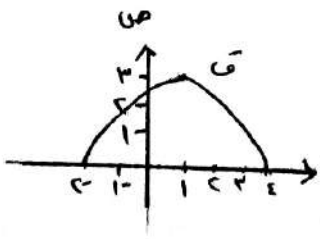
$\frac{دص}{دس} \times جا^2 س = جا س \, جتا س \, جا^2 س$

$\frac{دص}{دس} = \frac{جا س \, جتا س \, جا^2 س}{جا^2 س}$

$ص = \int \frac{جا س \, جتا س}{جا^2 س} \, دس$

$ص = 2 لو_هـ |جا س| + جـ$ (ب)

س١٥٣ معتمداً الشكل المجاور الذي يمثل منحنى الاقتران ق المعرف على الفترة $[-2, 4]$ ما الفرق بين أكبر قيمة وأصغر قيمة للمقدار : $\int_{-2}^{4} ق(س) \, دس$ ؟



أ) ١٨ ب) ٤ جـ) ٦ د) ١٤

الحل: صغ $\leq ق(س) \leq$ ٣

$\int_{-2}^{4}$ صغ $دس \leq \int_{-2}^{4} ق(س) \, دس \leq \int_{-2}^{4} 3 \, دس$

صغ $\leq \int_{-2}^{4} ق(س) \, دس \leq 3(4 - -2)$

صغ $\leq \int_{-2}^{4} ق(س) \, دس \leq 18$

أصغر قيمة ← ↑ أكبر قيمة

الفرق بين أكبر قيمة وأصغر قيمة :

$18 - صغ = 18$ (أ)

س١٥٤ $\int (2س^5 - 4س)^3 \, دس$ يساوي :

أ) $\frac{1}{2}(س^4 - 2)^4 + جـ$ ب) $(س^4 - 2)^4 + جـ$

جـ) $-(س^4 - 2)^4 + جـ$ د) $-\frac{1}{2}(س^4 - 2)^4 + جـ$

الحل: $\int (2س^5 - 4س)^3 \, دس = \int (2س(س^4 - 2))^3 \, دس$

$= \int 8 س^3 (س^4 - 2)^3 \, دس$

$ص = س^4 - 2$

$\frac{دص}{4س^3} = دس$

$\int 8 س^3 ص^3 \frac{دص}{4س^3}$ ،

$\int 2 ص^3 \, دص = \frac{2ص^4}{4} + جـ$

$= \frac{1}{2}(س^4 - 2)^4 + جـ$ (أ)

س١٥٥ $\int 2 قا^2 س \, ظتا س \, دس$ يساوي

أ) $-ظتا س + جـ$ ب) $ظتا س + جـ$

جـ) $-2 ظتا س + جـ$ د) $2 ظتا^2 س + جـ$

الحل: $\int 2 قا^2 س \, ظتا س \, دس =$

$\int 2 \frac{1}{جتا^2 س} \times \frac{جتا س}{جا س} \, دس =$

$\int 2 قتا س \, دس =$

$-2 ظتا س + جـ$ (د)

منهاجي
متعة التعليم الهادف