أسئلة وزارية

الوحدة الرابعة: التكامل

أسئلة وزارية على المساحة

الثاني عشر العلمي

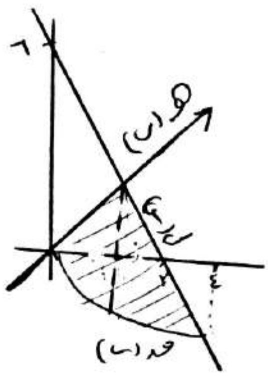
إعداد المعلمة: ميسون الحسين
0798959071

شبكة منهاجي التعليمية

س: جد مساحة المنطقة المظللة في الشكل التالي

حيث $ق(س) = -\sqrt{س}$

$هـ(س) = س$ ، $ل(س) = ٦ - ٢س$



الحل: نجد نقطة تقاطع منحنى هـ مع منحنى ل .

$٦ - ٢س = س \Leftarrow$

$٣س = ٦ \Leftarrow \boxed{س = ٢}$

نقطة منحنى ل مع منحنى ق من الشكل هي $\boxed{س = ٤}$

يتقاطع منحنى ق مع هـ عند $\boxed{س = ٠}$

مساحة المنطقة المظللة = $م_١ + م_٢$

$م_١ = \int_{٠}^{٢} هـ - ق \, .دس$

$= \int_{٠}^{٢} (س + \sqrt{س}) \, .دس$

$= \left[\frac{س^٢}{٢} + \frac{٢}{٣} س^{\frac{٣}{٢}} \right]_{٠}^{٢} = ٢ + \frac{٢}{٣} \times ٢\sqrt{٢} - ٠$

$= ٢ + \frac{٤\sqrt{٢}}{٣}$.

$م_٢ = \int_{٢}^{٤} (ل - ق) \, .دس$

$= \int_{٢}^{٤} (٦ - ٢س + \sqrt{س}) \, .دس$

$= \left[٦س - س^٢ + \frac{٢}{٣} س^{\frac{٣}{٢}} \right]_{٢}^{٤}$

$= (٢٤ - ١٦ + \frac{٢}{٣} \times ٨) - (١٢ - ٤ + \frac{٢}{٣} \times ٢\sqrt{٢})$

$= ٨ + \frac{١٦}{٣} - ٨ - \frac{٤\sqrt{٢}}{٣}$

$م = ٢ + \cancel{\frac{٤\sqrt{٢}}{٣}} + \cancel{٨} + \frac{١٦}{٣} - \cancel{٨} - \cancel{\frac{٤\sqrt{٢}}{٣}}$

$= ٢ + ٥\frac{١}{٣}$

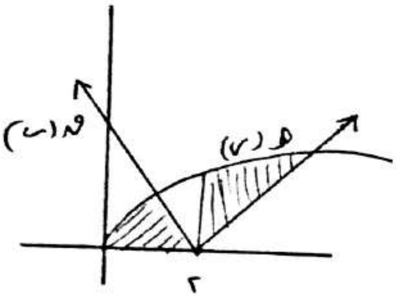
$= ٧\frac{١}{٣}$

$= \frac{٢٢}{٣}$ وحدة مساحة

س: جد مساحة المنطقة المظللة في الشكل المجاور

حيث $ق(س) = |س - ٢|$

$هـ(س) = \sqrt{س}$.



الحل: نعيد تعريف الاقتران ق(س)

$ق = \begin{cases} س - ٢ ، & س \geq ٢ \\ ٢ - س ، & س < ٢ \end{cases}$

نجد نقاط تقاطع ق مع هـ

عندما $س \geq ٢$ ، $س - ٢ = \sqrt{س}$ نربع الطرفين

$س^٢ - ٥س + ٤ = ٠ \Leftarrow (س - ٤)(س - ١) = ٠ \Leftarrow س = ٤$ ، $س = ١$ مرفوض

عندما $س < ٢$ ، $٢ - س = \sqrt{س} \Leftarrow س^٢ - ٥س + ٤ = ٠$.

$\Leftarrow س = ٤$ (مرفوض) ، $س = ١$

$م_١ = \int_{٠}^{١} \sqrt{س} \, .دس + \int_{١}^{٢} ٢ - س \, .دس$

$= \left. \frac{٢}{٣} س^{\frac{٣}{٢}} \right]_{٠}^{١} + \left. ٢س - \frac{س^٢}{٢} \right]_{١}^{٢} = \frac{٧}{٦}$ وحدة مساحة

$م_٢ = \int_{٢}^{٤} \sqrt{س} - (س - ٢) \, .دس$

$= \left. \frac{٢}{٣} س^{\frac{٣}{٢}} - \frac{١}{٢} س^٢ + ٢س \right]_{٢}^{٤}$

$= (\frac{١٦}{٣} - ٨ + ٨) - (\frac{٤}{٣}\sqrt{٢} - ٢ + ٤)$

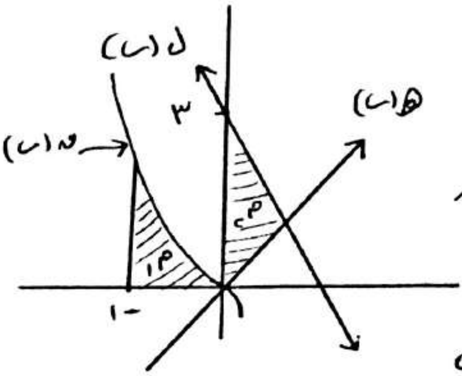
$= \frac{١٦ - ٤\sqrt{٢}}{٣} - ٢$ وحدة مربعة .

المساحة المطلوبة = $م_١ + م_٢$

$= \frac{٧}{٦} + \frac{١٦ - ٤\sqrt{٢}}{٣} - ٢$

$= \frac{٢٧ - ٨\sqrt{٢}}{٦}$ وحدة مربعة .

س٣ جد مجموع مساحتي المنطقتين م١ ، م٢ المظللتين في الشكل المجاور حيث أن $\text{ق}(\text{س}) = -\text{س}^3$ ، $\text{هـ}(\text{س}) = \text{س}$
$\text{ل}(\text{س}) = ٣ - ٢\text{س}$.



الحل: نجد نقطة تقاطع ل(س) ، هـ(س) .

$٣ - ٢\text{س} = \text{س} \Leftarrow \boxed{\text{س} = ١}$

$\text{م}_١ = \int_{-١}^{٠} -\text{س}^3 \, . \, \text{دس} = -\frac{١}{٤}\text{س}^4 \Big]_{-١}^{٠}$

$= -\frac{١}{٤}(٠ - ١) = \frac{١}{٤}$ وحدة مربعة

$\text{م}_٢ = \int_{٠}^{١} \text{ل} - \text{هـ} \, . \, \text{دس} = \int_{٠}^{١} (٣ - ٢\text{س} - \text{س}) \, . \, \text{دس}$

$= \int_{٠}^{١} (٣ - ٣\text{س}) \, . \, \text{دس} = ٣\text{س} - \frac{٣}{٢}\text{س}^2 \Big]_{٠}^{١}$

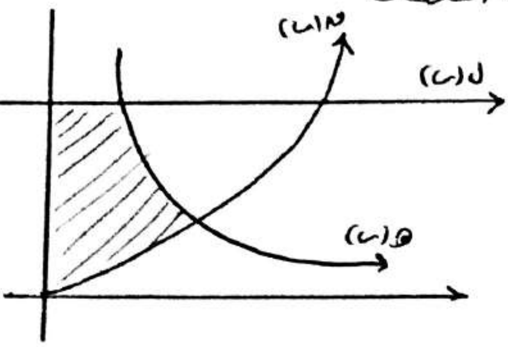
$= ٣ - \frac{٣}{٢} = \frac{٣}{٢}$ وحدة مربعة

المساحة الكلية = $\text{م}_١ + \text{م}_٢$

$\text{م} = \frac{١}{٤} + \frac{٣}{٢}$

$= \frac{٧}{٤}$ وحدة مربعة .

س٤ جد مساحة المنطقة المظللة بالشكل المجاور حيث
$\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^2$
$\text{هـ}(\text{س}) = \frac{١}{\text{س}^2}$
$\text{ل}(\text{س}) = ٤$.



الحل: نجد نقاط التقاطع $\text{س}^2 = \frac{١}{\text{س}^2} \Leftarrow \text{س}^4 = ١$
$\Leftarrow \text{س} = \mp ١$ السالب نهمل

$\frac{١}{\text{س}^2} = ٤ \Leftarrow \text{س}^2 = \frac{١}{٤}$
$\text{س} = \mp\frac{١}{٢}$ نهمل السالب

$\text{م} = \int_{٠}^{\frac{١}{٢}} (٤ - \text{س}^2) \, \text{دس} + \int_{\frac{١}{٢}}^{١} \frac{١}{\text{س}^2} - \text{س}^2 \, . \, \text{دس}$.

$= ٤\text{س} - \frac{\text{س}^3}{٣} \Big]_{٠}^{\frac{١}{٢}} + -\frac{١}{\text{س}} - \frac{١}{٣}\text{س}^3 \Big]_{\frac{١}{٢}}^{١}$

$= ٢ - \frac{١}{٢٤} - (٠) + (-١ - \frac{١}{٣}) - (-٢ - \frac{١}{٢٤})$

$= ٢ - \frac{١}{٢٤} - \frac{٤}{٣} + ٢ + \frac{١}{٢٤}$

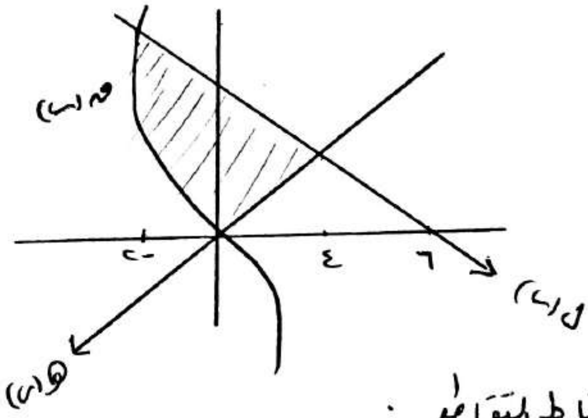
$= ٤ - \frac{٤}{٣}$

$= \frac{٨}{٣}$ وحدة مربعة .

س٥ جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيات الاقترانات الثلاثة: $ق(س) = -س^{٣}$

$هـ(س) = \frac{١}{٢}س$ ، $ل(س) = ٦ - س$.

الحل:



نجد نقاط التقاطع .

ق = هـ	ق = ل	ل = هـ
$-س^{٣} = \frac{١}{٢}س$	$-س^{٣} = ٦ - س$	$٦ - س = \frac{١}{٢}س$
$س^{٣} + \frac{١}{٢}س = ٠$	$س^{٣} - س + ٦ = ٠$	$\frac{٣}{٢}س = ٦ \Leftarrow$
$س(س^{٢} + \frac{١}{٢}) = ٠$	$(س+٢)(س^{٢} - ٢س + ٣) = ٠$	$\boxed{س = ٤}$
$\boxed{س = ٠}$	$\boxed{س = -٢}$	

$م_{١} = \int_{-٢}^{٠} ل - ق \cdot دس = \int_{-٢}^{٠} ٦ - س + س^{٣} \cdot دس$

$= [٦س - \frac{١}{٢}س^{٢} + \frac{١}{٤}س^{٤}]_{-٢}^{٠}$

$= ٠ - (-١٢ - ٢ + ٤) = ١٠$

$م_{٢} = \int_{٠}^{٤} (٦ - س - \frac{١}{٢}س) \cdot دس = \int_{٠}^{٤} ٦ - \frac{٣}{٢}س \; دس$

$٦س - \frac{٣}{٤}س^{٢}]_{٠}^{٤} = ٢٤ - ١٢ = ١٢$ وحدة مربعة .

$م = م_{١} + م_{٢}$

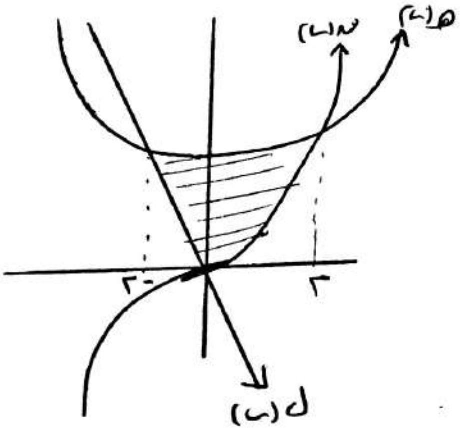
$= ١٠ + ١٢$

$= ٢٢$ وحدة مربعة .

س٦ جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيات الاقترانات الثلاثة:

$ق(س) = س^{٣}$ ، $هـ(س) = س^{٢} + ٤$ ، $ل(س) = -٤س$.

الحل:



نجد نقاط التقاطع

ق = هـ	ق = ل	هـ = ل
$س^{٣} = س^{٢} + ٤$	$س^{٣} = -٤س$	$س^{٢} + ٤ = -٤س$
$س^{٣} - س^{٢} - ٤ = ٠$	$س^{٣} + ٤س = ٠$	$س^{٢} + ٤س + ٤ = ٠$
$(س-٢)(س^{٢} + س + ٢) = ٠$	$س(س^{٢} + ٤) = ٠$	$(س+٢)^{٢} = ٠$
$\boxed{س = ٢}$	$\boxed{س = ٠}$	$\boxed{س = -٢}$

$م = \int_{-٢}^{٠} (س^{٢} + ٤ + ٤س) \cdot دس + \int_{٠}^{٢} (س^{٢} + ٤ - س^{٣}) \cdot دس$

$= [\frac{س^{٣}}{٣} + ٢س^{٢} + ٤س]_{-٢}^{٠} + [\frac{س^{٣}}{٣} + ٤س - \frac{س^{٤}}{٤}]_{٠}^{٢}$

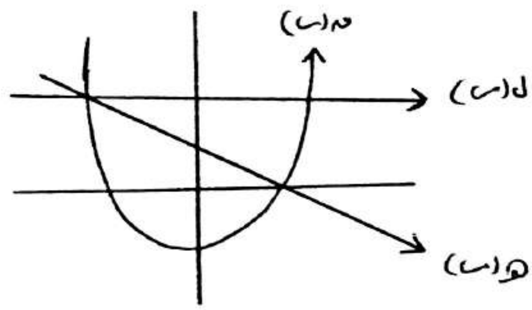
$= ٠ - (-\frac{٨}{٣} + ٨ - ٨) + (\frac{٨}{٣} + ٨ - ٤) - ٠$

$= \frac{٢٨}{٣}$ وحدة مربعة .

س٧ جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيات الاقترانات الثلاثة الآتية :

ق(س) = س² − ١ ، هـ(س) = ١ − س ، ل(س) = ٣

الحل:



نجد نقاط التقاطع

ق = هـ	هـ = ل	ق = ل
س² − ١ = ١ − س	١ − س = ٣	س² − ١ = ٣
س² + س − ٢ = ٠	س = −٢	س² = ٤
(س + ٢)(س − ١) = ٠		س = ±٢
س = −٢ ، ١		

م = م١ + م٢

$= \int_{-٢}^{١} ٣ - (١ - س)\, دس + \int_{١}^{٢} ٣ - (س^٢ - ١)\, دس$

$= \int_{-٢}^{١} ٢ + س\, دس + \int_{١}^{٢} ٤ - س^٢\, دس$.

$= \left[٢س + \frac{س^٢}{٢} \right]_{-٢}^{١} + \left[٤س - \frac{س^٣}{٣} \right]_{١}^{٢}$

$= (٢ + \frac{١}{٢}) - (-٤ + \frac{٤}{٢}) + \left((٨ - \frac{٨}{٣}) - (٤ - \frac{١}{٣}) \right)$

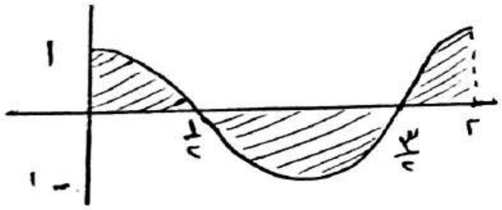
$= \frac{٩}{٢} + ٤ - \frac{٧}{٣}$

$= \frac{١٧}{٢} - \frac{٧}{٣}$

$= \frac{٥١ - ١٤}{٦} = \frac{٣٧}{٦}$ وحدة مربعة .

س٨ جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) = جتا (πس) ومحور السينات بالفترة [٠ ، ٢]

الحل:



نقاط التقاطع

جتا πس = ٠ ⟸ πس = $\frac{π}{٢}$ ⟸ س = $\frac{١}{٢}$

أو πس = $\frac{٣}{٢}π$ ⟸ س = $\frac{٣}{٢}$.

$م = \int_{٠}^{\frac{١}{٢}} جتا πس\, دس + \int_{\frac{١}{٢}}^{\frac{٣}{٢}} - جتا πس\, دس + \int_{\frac{٣}{٢}}^{٢} جتا πس\, دس$

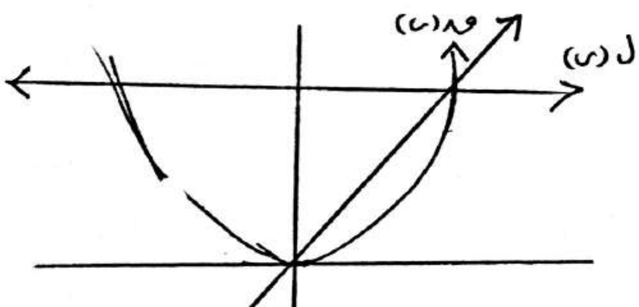
$م = \left[\frac{جا πس}{π} \right]_{٠}^{\frac{١}{٢}} - \left[\frac{جا πس}{π} \right]_{\frac{١}{٢}}^{\frac{٣}{٢}} + \left[\frac{جا πس}{π} \right]_{\frac{٣}{٢}}^{٢}$

$م = \left(\frac{١ - ٠}{π} \right) - \left(\frac{-١ - ١}{π} \right) + \left(\frac{٠ - -١}{π} \right) = \frac{٤}{π}$

س٩ جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيات الاقترانات التالية :

ق(س) = س² ، هـ(س) = ٤س ، ل(س) = ١٦

الحل:



ق = هـ	ق = ل	هـ = ل
س² = ٤س	س² = ١٦	٤س = ١٦
س² − ٤س = ٠	س = ±٤	س = ٤
س(س − ٤) = ٠		
س = ٠		
س = ٤		

←

تابع س٩

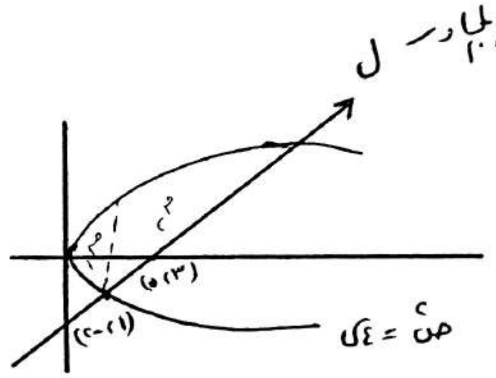
$$م = \int_{-4}^{0} (16 - س^2)\, دس + \int_{0}^{4} (16 - 4س)\, دس$$

$$= 16س - \frac{س^3}{3} \Big]_{-4}^{0} + 16س - 2س^2 \Big]_{0}^{4}$$

$$= 64 - \frac{64}{3} + 64 - 32$$

$$= 96 - \frac{64}{3} = \frac{224}{3}$$ وحدة مساحة.

س: جد مساحة المنطقة المظللة المحصورة بين منحنى العلاقة $ص^2 = 4س$ والمستقيم ل. انظر الشكل المجاور.



الحل: $ص^2 = 4س \Leftarrow ص = \pm 2\sqrt{س}$

معادلة المستقيم ل: $\frac{ص - -2}{س - 1} = \frac{0 - -2}{3 - 1}$

$\frac{ص + 2}{س - 1} = \frac{2}{2} = 1 \Leftarrow \boxed{ص = س - 3}$

$\therefore$ نقطة التقاطع $ص^2 = (س - 3)^2$

$= س^2 - 6س + 9$

$س^2 - 6س + 9 = 4س \Leftarrow س^2 - 10س + 9 = 0$

$(س - 9)(س - 1) = 0 \Leftarrow س = 9 ، س = 1$

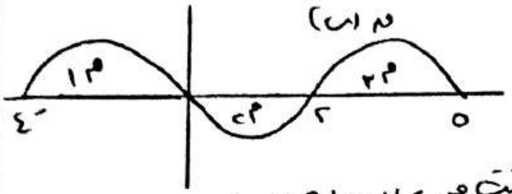
$م = م_1 + م_2$

$$م = \int_{0}^{1} (2\sqrt{س} - -2\sqrt{س})\, دس + \int_{1}^{9} 2\sqrt{س} - (س - 3)\, دس$$

$$= \int_{0}^{1} 4\sqrt{س}\, دس + \int_{1}^{9} 2\sqrt{س} - س + 3 \,.\, دس$$

$$= \frac{64}{3}$$ وحدة مساحة.

س: بالاعتماد على الشكل المجاور والذي يمثل منحنى الاقتران ق إذا كانت $م_1 = 7$ وحدات مربعة، $م_2 = 4$ وحدات، $م_3 = 5$ وحدات مربعة جد ما يأتي.



١) $\int_{2}^{-4} \frac{ق(س)}{2}\, دس$

٢) المساحة المحصورة بين منحنى الاقتران ق ومحور السينات في الفترة [-٤، ٥].

الحل: $\int_{-4}^{0} ق(س)\, دس = 7$

١) $\int_{0}^{2} ق(س)\, دس = -4$

$\int_{-4}^{2} ق(س)\, دس = 7 + -4 = 3$

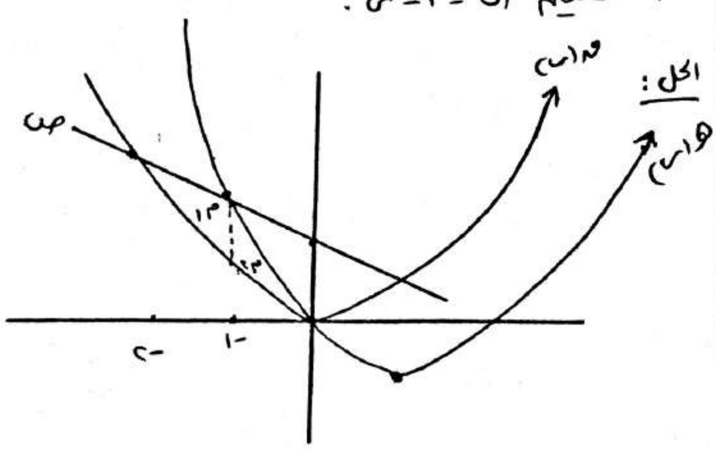
$\int_{2}^{-4} \frac{ق(س)}{2}\, دس = \frac{1}{2} \times -3 = \frac{-3}{2}$.

٢) $م = م_1 + م_2 + م_3$

$= 7 + 4 + 5 = 16$.

س: جد مساحة المنطقة الواقعة في الربع الثاني والمحصورة بين منحنيي الاقترانين $ق(س) = س^2$ ، $هـ(س) = س^2 - 2س$ والمستقيم $ص = 2 - س$.

الحل:



تابع س١٢: نجد نقاط التقاطع

ق = هـ	ق = ص	ص = هـ
$س^2 = س^2 - ٢س$	$س^2 = ٢ - س$	$س^2 - ٢س = ٢ - س$
$-٢س = ٠$	$س^2 + س - ٢ = ٠$	$س^2 - س - ٢ = ٠$
$\boxed{س = ٠}$	$(س + ٢)(س - ١)$	$(س - ٢)(س + ١) = ٠$
	$س = -٢ ، ١$	$س = ٢ ، -١$

المطلوب المنطقة في الربع الثاني فقط.

$$م_1 = \int_{-٢}^{-١} (٢ - س - س^2) \cdot دس$$

$$= \left[٢س - \frac{س^2}{٢} - \frac{س^3}{٣} \right]_{-٢}^{-١} =$$

$$= (-٢ - \frac{١}{٢} + \frac{١}{٣}) - (-٤ - ٢ + \frac{٨}{٣})$$

$$٤ - \frac{١}{٢} - \frac{٧}{٣} = \frac{٧}{٢} - \frac{٧}{٣}$$

$$\frac{٢١}{٦} - \frac{١٤}{٦} = \frac{٧}{٦} \text{ وحدة مربعة}$$

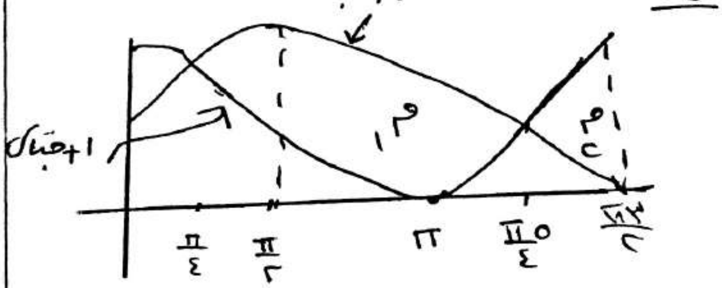
$$م_2 = \int_{-١}^{٠} س^2 - ٢س - س^2 \cdot دس = \int_{-١}^{٠} -٢س \cdot دس$$

$$-س^2 \Big]_{-١}^{٠} = -(٠ - ١) = ١ \text{ وحدة مربعة}$$

$$م = \frac{٧}{٦} + ١ = \frac{١٣}{٦} \text{ وحدة مربعة}.$$

س١٣ جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقترانين ق(س) = ١ + جاس ، هـ(س) = ١ + جتاس في الفترة $[\frac{\pi}{٢} ، \frac{٣\pi}{٢}]$.

الحل:



نجد نقاط التقاطع

$$١ + جاس = ١ + جتاس$$

$$جاس = جتاس$$

$$س = \frac{٥\pi}{٤} ، \frac{\pi}{٤} \quad س \in [\frac{\pi}{٢} ، \frac{٣\pi}{٢}]$$

$$م = م_1 + م_2 .$$

$$م = \int_{\frac{\pi}{٢}}^{\frac{٥\pi}{٤}} (١ + جاس - ١ - جتاس) دس + \int_{\frac{٥\pi}{٤}}^{\frac{٣\pi}{٢}} (١ + جتاس - ١ - جاس) دس$$

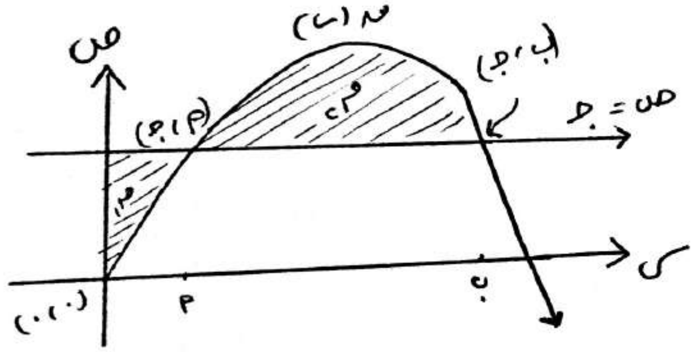
$$= \int_{\frac{\pi}{٢}}^{\frac{٥\pi}{٤}} (جاس - جتاس) \cdot دس + \int_{\frac{٥\pi}{٤}}^{\frac{٣\pi}{٢}} (جتاس - جاس) \cdot دس$$

$$= -جتاس - جاس \Big]_{\frac{\pi}{٢}}^{\frac{٥\pi}{٤}} + جاس + جتاس \Big]_{\frac{٥\pi}{٤}}^{\frac{٣\pi}{٢}}$$

$$= (\frac{١}{\sqrt{٢}} + \frac{١}{\sqrt{٢}}) - (٠ - ١) + (-١ + ٠) - (-\frac{١}{\sqrt{٢}} - \frac{١}{\sqrt{٢}})$$

$$= \frac{٢}{\sqrt{٢}} + ١ - ١ + \frac{٢}{\sqrt{٢}} = \frac{٤}{\sqrt{٢}} = ٢\sqrt{٢} .$$

س١٤



رسم المستقيم ص = جـ فقطع منحنى الاقتران ق(س) = ٣س² - س³ في النقطتين (أ،جـ)، (ب،جـ) حيث أ، ب، جـ أعداد حقيقية موجبة، وكونا المنطقتين م١، م٢ كما في الشكل السابق. جد قيمة جـ التي تجعل مساحتي المنطقتين م١، م٢ متساويتين.

الحل:

$$\int_{٠}^{أ} (جـ - ق(س)) دس = \int_{أ}^{ب} (ق(س) - جـ) \cdot دس$$

$$\int_{أ}^{ب} (ق(س) - جـ) \cdot دس = -\int_{٠}^{أ} (ق(س) - جـ) \cdot دس$$

$$\Leftarrow \int_{أ}^{ب} (ق(س) - جـ) \cdot دس + \int_{٠}^{أ} (ق(س) - جـ) \cdot دس = صفر$$

←

تابع س١٤

$\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} (\text{ق}(\text{س}) - \text{جـ})\,.\,\text{دس} + \int_{\text{ب}}^{\text{أ}} (\text{ق}(\text{س}) - \text{جـ})\,.\,\text{دس} = \text{صفر}$

$\Leftarrow \int_{٠}^{\text{ب}} (\text{ق}(\text{س}) - \text{جـ})\,.\,\text{دس} = \text{صفر}$

$\int_{٠}^{\text{ب}} (٢\text{س} - ٣\text{س}^{٣} - \text{جـ})\,\text{دس} = \text{صفر}$

$\left[\text{س}^{٢} - \frac{٣}{٤}\text{س}^{٤} - \text{جـ س}\right]_{٠}^{\text{ب}} = \text{صفر}$

$\text{ب}^{٢} - \frac{٣}{٤}\text{ب}^{٤} - \text{جـ ب} = \text{صفر} \quad ---- (١)$

لكن النقطة (ب ، جـ) تقع على منحنى ق ⇐

$\text{ق}(\text{ب}) = \text{جـ} \Leftarrow \boxed{٢\text{ب} - ٣\text{ب}^{٣} = \text{جـ}}$

نعوض بقيمة جـ في معادلة (١)

$\text{ب}^{٢} - \frac{٣}{٤}\text{ب}^{٤} - (٢\text{ب} - ٣\text{ب}^{٣})\,\text{ب} = \text{صفر}$

$\text{ب}^{٢} - \frac{٣}{٤}\text{ب}^{٤} - ٢\text{ب}^{٢} + ٣\text{ب}^{٤} = \text{صفر}$

$\frac{٩}{٤}\text{ب}^{٤} - \text{ب}^{٢} = \text{صفر}$

$\text{ب}^{٢}\left(\frac{٩}{٤}\text{ب}^{٢} - ١\right) = \text{صفر}$

ب = صفر ونرفضه

أو $\frac{٩}{٤}\text{ب}^{٢} = ١ \Leftarrow \text{ب}^{٢} = \frac{٤}{٩} \Leftarrow \text{ب} = \frac{٢}{٣}$

$\text{ب} = \frac{-٢}{٣}$ نرفض

$\text{جـ} = ٢\text{ب} - ٣\text{ب}^{٣}$

$\text{جـ} = ٢\left(\frac{٢}{٣}\right) - ٣\left(\frac{٢}{٣}\right)^{٣}$

$= \frac{٤}{٣} - \frac{٣ \times ٨}{٢٧}$

$= \frac{٤}{٣} - \frac{٨}{٩}$

$= \frac{٤}{٩}\,.$

س١٥ جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيات الاقترانات التالية:

$\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{٢}$ ، $\text{هـ}(\text{س}) = \sqrt{٨\text{س}}$ ، $\text{ل}(\text{س}) = \text{س} + ٦$

ومحور الصادات.

ق = هـ

$\text{س}^{٢} = \sqrt{٨\text{س}}$

$\text{س}^{٤} = ٨\text{س}$

$\text{س}^{٤} - ٨\text{س} = ٠$

$\text{س}(\text{س}^{٣} - ٨) = ٠$

$\text{س} = ٠ \text{ ، } ٢$

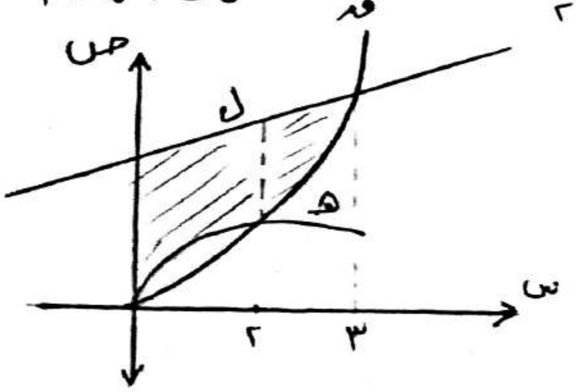
ق = ل

$\text{س}^{٢} = \text{س} + ٦$

$\text{س}^{٢} - \text{س} - ٦ = ٠$

$(\text{س} - ٣)(\text{س} + ٢) = ٠$

$\text{س} = ٣ \text{ ، } -٢$



$\text{م} = \int_{٠}^{٢} (\text{س} + ٦ - \sqrt{٨\text{س}})\,\text{دس} + \int_{٢}^{٣} (\text{س} + ٦ - \text{س}^{٢})\,\text{دس}$

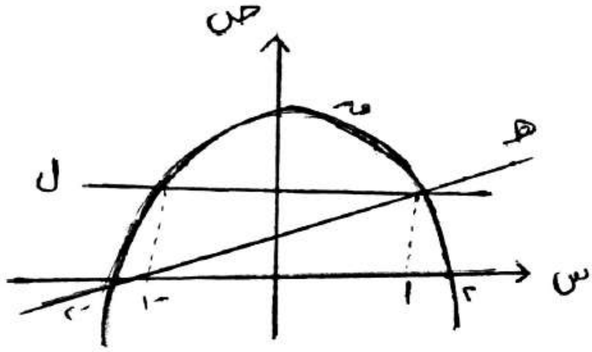
$= \left[\frac{\text{س}^{٢}}{٢} + ٦\text{س} - \frac{٢(٨\text{س})^{\frac{٣}{٢}}}{٨ \times ٣}\right]_{٠}^{٢} + \left[\frac{\text{س}^{٢}}{٢} + ٦\text{س} - \frac{\text{س}^{٣}}{٣}\right]_{٢}^{٣}$

$= ٢ + ١٢ - \frac{١}{١٢}(١٦)^{\frac{٣}{٢}} - ٠ + \left(\frac{٩}{٢} + ١٨ - ٩\right) - \left(٢ + ١٢ - \frac{٨}{٣}\right)\,.$

$= \cancel{١٤} - \frac{٦٤}{١٢} + \frac{٩}{٢} + ٩ - \cancel{١٤} + \frac{٨}{٣}$

$= \frac{٦٥}{٦}\,.$

س١٦ استخدم التكامل في ايجاد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيات الاقترانات
ق(س) = ٤ − س² ، هـ(س) = س + ٢ ،
ل(س) = ٣ .



ق = هـ
$٤ - س^2 = س + ٢$
$س^2 + س - ٢ = ٠$
$(س+٢)(س-١) = ٠$
$س = -٢ ، ١$

ق = ل
$٤ - س^2 = ٣$
$س^2 = ١$
$س = \mp ١$

هـ = ل
$س + ٢ = ٣$
$س = ١$

$$م = \int_{-٢}^{-١} \left((٤ - س^2) - (س+٢)\right) دس + \int_{-١}^{١} \left(٣ - (س+٢)\right) دس$$

$$= \int_{-٢}^{-١} (٢ - س^2 - س)\, دس + \int_{-١}^{١} (١ - س)\, دس$$

$$= \left[٢س - \frac{س^3}{٣} - \frac{س^2}{٢}\right]_{-٢}^{-١} + \left[س - \frac{س^2}{٢}\right]_{-١}^{١}$$

$$= \left(-٢ + \frac{١}{٣} - \frac{١}{٢}\right) - \left(-٤ + \frac{٨}{٣} - ٢\right) + \left(١ - \frac{١}{٢}\right) - \left(-١ - \frac{١}{٢}\right)$$

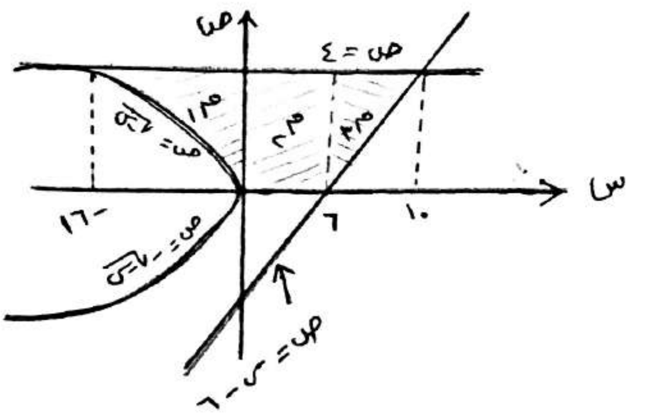
$$= \cancel{-٢} + \frac{١}{٣} - \frac{١}{٢} + ٤ - \frac{٨}{٣} + \cancel{٢} + ١ - \cancel{\frac{١}{٢}} + ١ + \cancel{\frac{١}{٢}}$$

$$= ٦ + \frac{١}{٣} - \frac{١}{٢} - \frac{٨}{٣}$$

$$= ٦ - \frac{٧}{٣} - \frac{١}{٢}$$

$$= \frac{١٩}{٦} .$$

س١٧ جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى العلاقة
ص² = −س والمستقيمات ص = س − ٦ ،
ص = ٤ ، ص = ٠ .
$ص^2 = -س \leftarrow ص = \mp\sqrt{-س}$.



$\sqrt{-س} = ٤$
$-س = ١٦$
$س = -١٦$

$س - ٦ = ٠$
$س = ٦$

$س - ٦ = ٤$
$س = ١٠$

$$م = \int_{-١٦}^{٠} (٤ - \sqrt{-س})\, دس + \int_{٠}^{٦} ٤\, دس + \int_{٦}^{١٠} (٤ - (س - ٦))\, دس$$

$$= \left[٤س + \frac{٢}{٣}(-س)^{\frac{٣}{٢}}\right]_{-١٦}^{٠} + ٤(٦ - ٠) + \left[١٠س - \frac{س^2}{٢}\right]_{٦}^{١٠}$$

$$= ٠ - \left(-٦٤ + \frac{٢}{٣}(١٦)^{\frac{٣}{٢}}\right) + ٢٤ + ١٠٠ - ٥٠ - (٦٠ - ١٨)$$

$$= ٦٤ + \frac{٢ \times ٦٤}{٣} + ٧٤ - ٤٢$$

$$= ٦٤ - \frac{١٢٨}{٣} + ٣٢$$

$$= ٩٦ - \frac{١٢٨}{٣}$$

$$= \frac{٢٨٨}{٣} - \frac{١٢٨}{٣}$$

$$= \frac{١٦٠}{٣}$$

س١٨ جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين

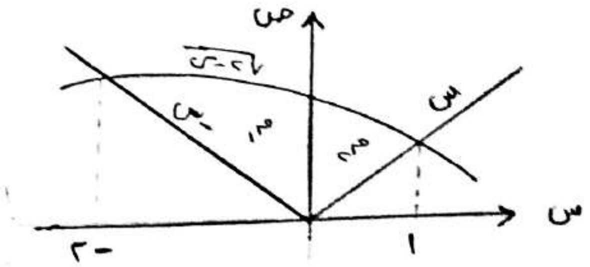
$ق(س) = \sqrt{٢ - س}$ ، $هـ(س) = |س|$

الحل: $\sqrt{٢ - س} = |س|$ نربع الطرفين

$٢ - س = س^٢ \leftarrow$

$س^٢ + س - ٢ = ٠ \leftarrow (س + ٢)(س - ١) = ٠$

$\Leftarrow س = -٢ ، ١$.



$$م = \int_{-٢}^{٠} \left(\sqrt{٢ - س} - (-س)\right) دس + \int_{٠}^{١} \sqrt{٢ - س} - س \, دس$$

$$= \left[\frac{-٢}{٣}(٢ - س)^{\frac{٣}{٢}} + \frac{س^٢}{٢}\right]_{-٢}^{٠} + \left[\frac{-٢}{٣}(٢ - س)^{\frac{٣}{٢}} - \frac{س^٢}{٢}\right]_{٠}^{١}$$

$$= \frac{-٢}{٣}(٢)^{\frac{٣}{٢}} + ٠ + \frac{٢}{٣}(٤)^{\frac{٣}{٢}} - ٢ - \frac{٢}{٣}(١)^{\frac{٣}{٢}} - \frac{١}{٢}$$

$$- \left(\frac{-٢}{٣}(٢)^{\frac{٣}{٢}} - ٠\right)$$

$$= \frac{-٢}{٣}(٢)^{\frac{٣}{٢}} + \frac{٢}{٣} \times ٨ - ٢ - \frac{٢}{٣} - \frac{١}{٢} + \frac{٢}{٣}(٢)^{\frac{٣}{٢}}$$

$$= \frac{١٦}{٣} - \frac{٢}{٣} + \frac{-٥}{٢}$$

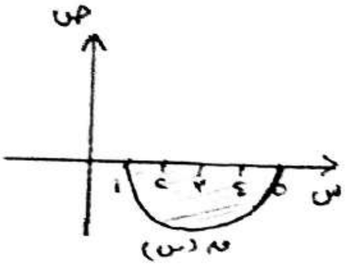
$$= \frac{١٤}{٣} + \frac{-٥}{٢}$$

$$= \frac{٢٨ - ١٥}{٦} = \frac{١٣}{٦}$$

س١٩ الشكل المجاور يمثل منحنى الاقتران $ق(س)$ في الفترة $[١ ، ٥]$ ، فإذا كانت مساحة المنطقة (م) تساوي (٨) وحدات مربعة فإن قيمة $\left|\int_{١}^{٥} (ق(س) - ٤) \, دس\right|$ تساوي

أ) ٨   ب) ١٢

ج) ١٦   د) ٢٤



الحل: $\left|\int_{١}^{٥} (ق(س) - ٤) \, دس\right| =$

$= \left|\int_{١}^{٥} ق(س) \, دس - \int_{١}^{٥} ٤ \, دس\right| =$

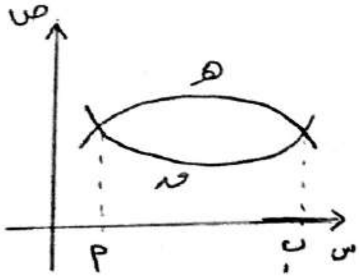
$= |-٨ - ٤(٥ - ١)| =$

$|-٨ - ١٦| = |-٢٤| = ٢٤$ (د)

س٢٠ معتمدًا الشكل المجاور الذي يمثل منحنى كل من الاقترانين ق ، هـ فإذا كانت المساحة المحصورة بين منحنيي الاقترانين ق ، هـ على الفترة $[أ ، ب]$ تساوي (٨) وحدات مربعة وكان $\int_{أ}^{ب} ق(س) \, دس = ٦$ فإن $\int_{أ}^{ب} هـ(س) \, دس$ تساوي :

أ) −٢   ب) ٢

ج) ١٤   د) −٦



الحل: $\int_{أ}^{ب} (هـ(س) - ق(س)) \, دس = ٨$

$\int_{أ}^{ب} هـ(س) \, دس - \int_{أ}^{ب} ق(س) \, دس = ٨$

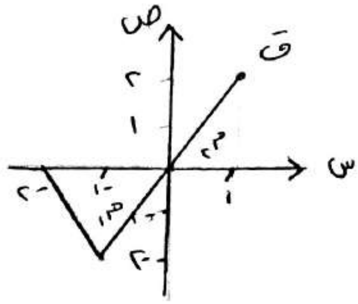
$\int_{أ}^{ب} هـ(س) \, دس - ٦ = ٨ \Leftarrow$

$\int_{أ}^{ب} هـ(س) \, دس = ١٤$ (ج)

س٢١) معتمداً الشكل المجاور الذي يمثل منحنى الاقتران ق المعرف على الفترة [-٢، ١]، ما قيمة $\int_{1}^{3}$ ق(١-س) دس ؟

أ) -١ ب) -٣

ج) ٣ د) ١



الحل: ص = ١-س ⇐ دص = -دس

س = ٠ ⇐ ص = ١

س = ٣ ⇐ ص = -٢

$\int_{1}^{3}$ ق(١-س) دس = $-\int_{1}^{-2}$ ق(ص) دص

= $\int_{-2}^{1}$ ق(ص) دص هي المساحة المحصورة بين منحنى ق ومحور السينات.

م١ = $\frac{1}{2}$ × ٢ × ٢ = ٢ ⇐

$\int_{-2}^{0}$ ق(س) دس = -٢ (لأن الشكل تحت محور السينات)

م٢ = $\frac{1}{2}$ × ١ × ٢ = ١ ⇐

$\int_{0}^{1}$ ق(س) دس = ١

$\int_{-2}^{1}$ ق(س) دس = $\int_{-2}^{0}$ ق(س) دس + $\int_{0}^{1}$ ق(س) دس

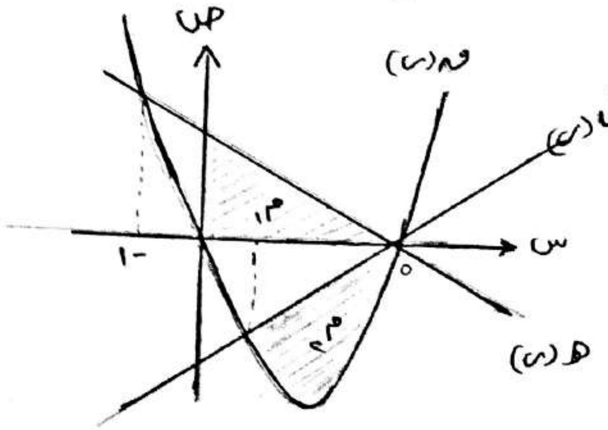
= -٢ + ١

= -١ (أ)

س٢٢) جد مساحة المنطقة المظللة في الشكل المجاور

حيث: ع(س) = س² - ٥س ، ل(س) = س - ٥

هـ(س) = ٥ - س



الحل: ل = هـ ⇐ س - ٥ = ٥ - س ⇐ ٢س = ١٠

⇐ س = ٥

ع = ل ⇐ س² - ٥س = س - ٥ ⇐ س² - ٦س + ٥ = ٠

(س - ٥)(س - ١) = ٠ ⇐ س = ٥ ، ١

ع = هـ ⇐ س² - ٥س = ٥ - س ⇐ س² - ٤س - ٥ = ٠

(س - ٥)(س + ١) = ٠ ⇐ س = ٥ ، -١

م١ = $\int^{5}$ (٥ - س) دس = ٥س - $\frac{س^2}{2}$ $]^{5}$ = ٢٥ - $\frac{25}{2}$ - صفر

= $\frac{25}{2}$ وحدة مربعة .

م٢ = $\int_{1}^{5}$ ((س - ٥) - (س² - ٥س)) دس

= $\int_{1}^{5}$ (٦س - ٥ - س²) دس = $\frac{6س^2}{2}$ - ٥س - $\frac{س^3}{3}$ $]_{1}^{5}$

= ٣(٥)² - ٢٥ - $\frac{125}{3}$ - (٣ - ٥ - $\frac{1}{3}$)

= ٧٥ - ٢٥ - $\frac{125}{3}$ + ٢ + $\frac{1}{3}$

= ٥٢ - $\frac{124}{3}$ = $\frac{156}{3}$ - $\frac{124}{3}$ = $\frac{32}{3}$

م = م١ + م٢

= $\frac{25}{2}$ + $\frac{32}{3}$ = $\frac{75}{6}$ + $\frac{64}{6}$ = $\frac{139}{6}$.

أسئلة وزارية على المساحة

س٢٣ جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيات الاقترانات الآتية:

ق(س) = ٤س − س^{٢} ، هـ(س) = ٤ − س ،
ل(س) = ٣

الحل: نجد نقاط تقاطع المنحنيات

ق = هـ ⟸ ٤س − س^{٢} = ٤ − س ⟸

س^{٢} − ٥س + ٤ = ٠ ⟸ (س − ٤)(س − ١) = ٠

$\boxed{\text{س} = ٤}$ ، $\boxed{\text{س} = ١}$

ق = ل ⟸ ٤س − س^{٢} = ٣ ⟸ س^{٢} − ٤س + ٣ = ٠

(س − ٣)(س − ١) ⟸ $\boxed{\text{س} = ٣}$ ، $\boxed{\text{س} = ١}$

هـ = ل ⟸ ٤ − س = ٣ ⟸ س = ٤ − ٣ = ١

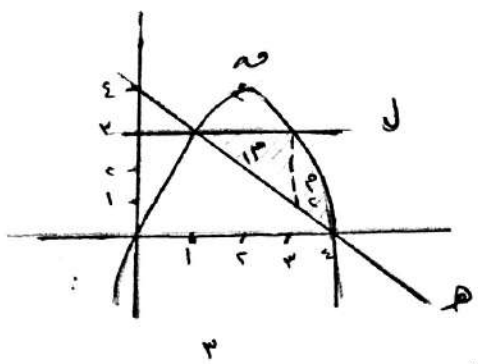
$\boxed{\text{س} = ١}$

أصفار الاقتران ق: ٤س − س^{٢} = ٠

س(٤ − س) = ٠ ⟸ س = ٠ ، ٤ .

نقطة الرأس س = $\frac{-ب}{٢أ}$ = $\frac{-٤}{٢\times -١}$ = ٢

(٢ ، ٤) .



م١ = $\int_{١}^{٣}$ (٣ − (٤ − س)) دس = $\int_{١}^{٣}$ (س − ١) دس

= $\left[\frac{\text{س}^{٢}}{٢} - \text{س}\right]_{١}^{٣}$ = $\frac{٩}{٢}$ − ٣ − ($\frac{١}{٢}$ − ١) = ٤ − ٢ = ٢ وحدة مربعة

م٢ = $\int_{٣}^{٤}$ (٤س − س^{٢} − (٤ − س)) دس

= $\int_{٣}^{٤}$ (٥س − س^{٢} − ٤) دس

م٢ = $\left[\frac{٥\text{س}^{٢}}{٢} - \frac{\text{س}^{٣}}{٣} - ٤\text{س}\right]_{٣}^{٤}$

= $\frac{٥\times١٦}{٢}$ − $\frac{٦٤}{٣}$ − ١٦ − ($\frac{٥\times٩}{٢}$ − ٩ − ١٢)

= ٤٠ − $\frac{٦٤}{٣}$ − ١٦ − $\frac{٤٥}{٢}$ + ٢١

= ٤٥ − $\frac{٦٤}{٣}$ − $\frac{٤٥}{٢}$ = $\frac{٢٧٠}{٦}$ − $\frac{١٢٨}{٦}$ − $\frac{١٣٥}{٦}$

= $\frac{٢٧٠ - ٢٦٣}{٦}$ = $\frac{٧}{٦}$.

م = م١ + م٢ ⟸ م = ٢ + $\frac{٧}{٦}$ = ٢ $\frac{٧}{٦}$ = $\frac{١٩}{٦}$ وحدة مربعة

س٢٤ جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيات الاقترانات الآتية: ق(س) = س^{٣} ، هـ(س) = س + ٦ ، ل(س) = $\frac{-\text{س}}{٢}$

الحل:

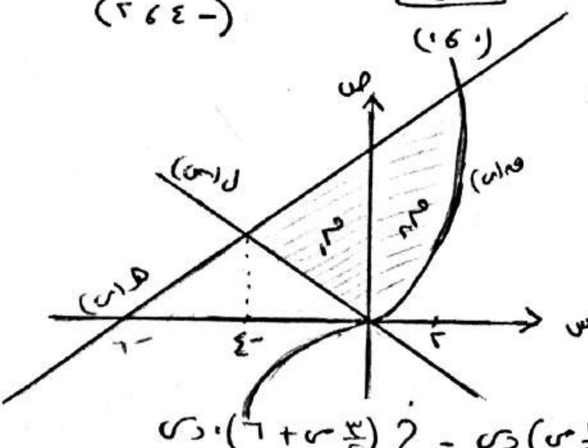
س^{٣} = س + ٦ | س^{٣} = $\frac{-\text{س}}{٢}$ | س + ٦ = $-\frac{١}{٢}$س

س^{٣} − س − ٦ = ٠ | س^{٣} + $\frac{١}{٢}$س = ٠ | $\frac{٣}{٢}$س = −٦

(س − ٢)(س^{٢} + ٢س + ٣) = ٠ | س(س^{٢} + $\frac{١}{٢}$) = ٠ | $\boxed{\text{س} = -٤}$

$\boxed{\text{س} = ٢}$ | $\boxed{\text{س} = ٠}$ | (−٤ ، ٢)

(٢ ، ٨) | (٠ ، ٠)



م١ = $\int_{-٤}^{٠}$ (س + ٦ + $\frac{١}{٢}$س) دس = $\int_{-٤}^{٠}$ ($\frac{٣}{٢}$س + ٦) دس

= $\left[\frac{٣\text{س}^{٢}}{٤} + ٦\text{س}\right]_{-٤}^{٠}$ = صفر − ($\frac{٣}{٤}$ × ١٦ − ٢٤) = −(١٢ − ٢٤)

م١ = ١٢ وحدة مساحة

م٢ = $\int_{٠}^{٢}$ (س + ٦ − س^{٣}) دس = $\left[\frac{\text{س}^{٢}}{٢} + ٦\text{س} - \frac{\text{س}^{٤}}{٤}\right]_{٠}^{٢}$

= $\frac{٤}{٢}$ + ٦ × ٢ − $\frac{٢^{٤}}{٤}$ − صفر = ٢ + ١٢ − ٤

م٢ = ١٠ وحدة مساحة

م = م١ + م٢

م = ١٢ + ١٠ = ٢٢ وحدة مربعة .

س٢٥ إذا كانت مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) = $\sqrt{٢س}$ ومحور السينات على الفترة [٠، أ] تساوي $\frac{٨}{٣}$ وحدة مربعة فإن قيمة الثابت أ تساوي:

أ) ١ ب) ٢ ج) ٤ د) $\sqrt[٣]{٤}$

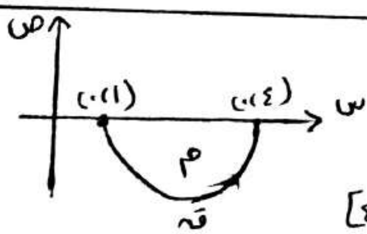
الحل: م = $\int_{٠}^{أ} (٢س)^{\frac{1}{2}}\, دس = \frac{٨}{٣}$

$$\frac{٨}{٣} = \left[\frac{(٢س)^{\frac{3}{2}}}{٢ \times \frac{3}{2}}\right]_{٠}^{أ}$$

$$\frac{(٢س)^{\frac{3}{2}}}{٣} = \frac{٨}{٣} \Leftarrow (٢س)^{\frac{3}{2}} = ٨$$

$$(٢س)^{\frac{3}{2} \times \frac{2}{3}} = ٨^{\frac{2}{3}} \Leftarrow ٢س = \sqrt[٣]{٨^{٢}}$$

$$٢س = ٤ \Leftarrow س = ٢$$ (ب)



س٢٦ بالاعتماد على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى الاقتران ق في الفترة [١،٤]

فإذا كانت مساحة المنطقة م تساوي ٥ وحدات مربعة فإن $\int_{١}^{٤} (٣ - ق(س))\, دس$ يساوي:

أ) ٢٤ ب) ٤ ج) ١٤ د) ٦

الحل: $\int_{١}^{٤} ق(س)\, دس = -٥$ (لأن الشكل تحت محور السينات)

$$= \int_{١}^{٤} ٣\, دس - \int_{١}^{٤} ق(س)\, دس =$$

$$= ٣(٤-١) - {}^{-}٥$$

$$٩ + ٥ = ١٤$$ (ج)