للتميز عنوان

درب الكمال
للدورات التدريبية

متخصصون في دورات الثانوية العامة الفروع الأكاديمية والمهنية

جبل عمان الدوار الثالث خلف فندق حياة عمان

0795344707 - 0795038532

الرياضيات

الأدبي والفندقي

حسب المنهاج الجديد

م3

الوحدة الأولى

النهايات والإتصال

حصريا" على شبكة

منهاجي

الأستاذ
أحمد حسن

منهاجي متعة التعليم الهادف

الرقم	الموضوع	رقم الصفحة
١.	النهاية من خلال طرق الحساب	(٣)
٢.	امثلة على التعويض المباشر وتحليل (بسيط) (ملاحظ)	(٣ - ٥)
٣.	نهاية : (قوسان)^{٢} - رقم	(٦ - ٧)
٤.	نهاية : إذا اخذ عامل مشترك	(٨ - ١١)
٥.	نهاية : فرق بين مكعبين ، مجموع مكعبين	(١٢ - ١٤)
٦.	نهاية : النسبي المزدوج مرفوع	(١٥ - ١٨)
٧.	نهاية : الجذر التربيعي	(١٨ - ٢١)
٨.	نهاية : متعدد القواعد (المتشعب)	(٢٢ - ٢٧)
٩.	ايجاد ثوابت اذا اعطي جواب النهاية	(٢٨ - ٣١)
١٠.	النهاية من الاشكال المرسومة	(٣٢ - ٣٧)
١١.	النهاية من الجداول	(٣٧ - ٤١)
١٢.	نظريات في النهايات	(٤٢ - ٤٧)
١٣.	الاتصال (النوع الاول)	(٤٨ - ٥٢)
١٤.	ايجاد ثوابت اذا اعطي لنا متصل	(٥٣ - ٥٧)
١٥.	الاتصال (النوع الثاني : نظريات الاتصال)	(٥٨ - ٦٨)
١٦.	نقاط عدم الاتصال (نقاط الانفصال)	(٦٩ - ٧١)
١٧.	دراسة الاتصال من الاشكال المرسومة	(٧١ - ٧٣) .

منهاجي متعة التعليم الهادف

النهايات والاتصال :

النهاية : سوف ندرس مفهوم النهاية من (٣) مواضيع :

① النهاية من خلال طرق الحساب .
② النهاية من الأشكال المرسومة .
③ النهاية من الجداول .

① النهاية من خلال طرق الحساب :

① نرمز لـ : نهاية الاقتران ه(س) عندما : س ← ا من العدد P بالرمز التالي :

س ← ا : تؤول / تقترب / تئول

نها ه(س) = P
س ← ا

② خطوات الحل : ① التعويض المباشر : وهو أن نعوض الرقم الموجود أمام السهم تحت النهاية بدلاً من نفس الحرف الموجود أمام النهاية .

② جميع الإجابات مقبولة الا : إجابة $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ فهي إجابة غير مقبولة

مهني بحاجة لعمليات حسابية

أنواع المسائل :
- تحليل بأنواعه
- توحيد مقامات (لبني)
- ضرب مرافقة (جذر)
- متعدد (متكرر العوامل)

امثلة : التعويض المباشر ، وتحليل تربيعي (ليس) (تمام)

احسبي النهايات التالية (إن وُجدت):

① نهـا $(٢س + ١)$ ، $س \leftarrow ٣$

الحل : التعويض المباشر : $٢ \times ٣ + ١ = ٦ + ١$

$= ٧$ معتولة .

② نهـا $\frac{س^٢ + ٥س}{\sqrt{س - ٧} - ١}$ ، $س \leftarrow ٤$

الحل : التعويض المباشر : $\frac{(٤)٥ + ٢(٤)}{\sqrt{٤ - ٧} - ١}$

$= \frac{١٦ + ٢٠}{٢ - ١} = \frac{٣٦}{١} = ٣٦$ معتولة

③ نهـا $\frac{\sqrt[٣]{س + ٣} + ٢س}{س^٢ + س - ١٠}$ ، $س \leftarrow ٥$

الحل : التعويض المباشر : $\frac{\sqrt[٣]{٥ + ٣} + ٢ \times ٥}{(٥) + ٢(٥) - ١٠}$

$\Leftarrow \frac{\sqrt[٣]{٨} + ١٠}{٢٥ + ٥ - ١٠} = \frac{٢ + ١٠}{٢٠} = \frac{٣}{٢}$

$= \frac{٣}{٥}$ معتولة

④ نهـا $\frac{ص^٣ + ص - ١}{٤ص + ١}$ ، $ص \leftarrow ٢$

الحل : التعويض المباشر : $\frac{(٢)^٣ + ٢ - ١}{٤(٢) + ١}$

$\Leftarrow \frac{٨ + ٢ - ١}{٨ + ١} = \frac{٩}{٩}$

$= ١$ معتولة .

⑤ نهـا $\frac{٢م^٢ + ٣}{٤م^٢ - ١}$ ، $م \leftarrow \frac{١}{٢}$

الحل : التعويض المباشر : $\frac{٢ \times \frac{١}{٤} + ٣}{٤ \times \frac{١}{٤} - ١}$

$= \frac{١ + ٣}{١ - ١} = \frac{٤}{٠}$ معتولة

⑥ نهـا $\frac{س^٥ + س^٤ - ٣س}{س^١٠ + س^٩ + ٥}$ ، $س \leftarrow -١$

الحل : التعويض المباشر : $\frac{(-١)^٥ + (-١)^٤ - ٣(-١)}{(-١)^١٠ + (-١)^٩ + ٥}$

$\Leftarrow \frac{-١ + ١ + ٣}{١ - ١ + ٥} = \frac{٣}{٥}$

معتولة .

قاعدة حفظ

$(-١)^{\text{فردي}} = -١$

$(-١)^{\text{زوجي}} = +١$

⑦ نهـا $\frac{س^٢ - ٢٥}{س + ٧}$ ، $س \leftarrow ٥$

الحل : التعويض المباشر : $\frac{(٥)^٢ - ٢٥}{٥ + ٧}$

$\Leftarrow \frac{صفر}{١٢} = صفر$ معتولة

قاعدة حفظ

$\frac{صفر}{عدد \neq صفر} = صفر$

⑧ نهـا $\frac{س^٢ + ١٧}{س^٢ - ٦س + ٩}$ ، $س \leftarrow ٣$

الحل : التعويض المباشر : $\frac{٣ \times ٢ + ١٧}{(٣)٦ - (٣)^٢ + ٩}$

$\Leftarrow \frac{٦ + ١٧}{٩ + ١٨ - ٩} = \frac{٢٣}{٩ + ٩ -}$

$= \frac{٢٣}{صفر}$ غير موجودة

قاعدة حفظ

$\frac{عدد \neq صفر}{صفر} =$ غير موجودة

٣

(٩) $\lim_{س \to ٤} \frac{س^{٣}-٦٤}{س-٤}$ = ١٣ ← لايجاد حرف السين

∴ يبقى نقسه = (١٣) مقبولة.

(١٠) $\lim_{س \to -٥} \frac{س^{٣}+١٢٥}{س+٥}$ = ٢٤٧ ← لايجاد حرف السين

∴ يبقى نقسه = (٢٤٧) مقبولة.

(١١) $\lim_{س \to ٢} \frac{س^{٥}-٣٢}{س-٢}$ = $\frac{١٥}{٤}$ ← لايجاد حرف السين

∴ يبقى نقسه = $\left(\frac{١٥}{٤}\right)$ مقبولة.

(١٢) $\lim_{س \to ٢} \frac{س^{٣}+٥س-١٤}{س-٢}$

الحل: [١] التعويض المباشر: $\frac{(٢)^{٣}+٥(٢)-١٤}{٢-٢}$

$= \frac{٤+١٠-١٤}{٢-٢}$ ← $\left(\frac{صفر}{صفر}\right)$ غير مقبولة

[٢] نوعه: تربيعي ← تحليل.

$= \lim_{س \to ٢} \frac{(س-٢)(س+٧)}{س-٢}$ بسين / بسين / سلام

$= (٢+٧) = ٩$ مقبولة

توضيح: $س \to ٢$ ← $س = ٢$ ← $س - ٢$

سلام: ناتج الرقم في قوس سلام هو: قيمة الثابتة $= \frac{-١٤}{-٢} = +٧$ على الرقم

(١٣) $\lim_{س \to ٤} \frac{س^{٣}-س-١٢}{س-٤}$

الحل: [١] التعويض المباشر: $\frac{(٤)^{٣}-(٤)-١٢}{٤-٤}$

$= \frac{٦٤-٤-١٢}{٤-٤}$ ← $\left(\frac{صفر}{صفر}\right)$ غير مقبولة

[٢] تربيعي ← تحليل

$= \lim_{س \to ٤} \frac{(س-٤)(س+٣)}{(س-٤)}$ بسين / بسلام

$= (٤+٣) = ٧$ مقبولة

(١٤) $\lim_{س \to ٥} \frac{س^{٣}-٦س+٥}{٥-س}$

الحل: [١] التعويض المباشر: $\frac{(٥)^{٣}-٦(٥)+٥}{٥-٥}$

$= \frac{١٢٥-٣٠+٥}{٥-٥}$ ← $\left(\frac{صفر}{صفر}\right)$ غير مقبولة.

[٢] تربيعي ← تحليل

$= \lim_{س \to ٥} \frac{(س-٥)(س-١)}{٥-س}$ بسين / بسين

$= (-١)(٥-١) = -٤ \times ١ = -٤$ مقبولة

(١٥) $\lim_{س \to ١} \frac{س^{٣}-٩س+٨}{س^{٣}-١}$

الحل: [١] التعويض المباشر: $\frac{(١)^{٣}-٩(١)+٨}{(١)^{٣}-١}$

$= \frac{١-٩+٨}{١-١}$ ← $\left(\frac{صفر}{صفر}\right)$ غير مقبولة

[٢] البسط: تربيعي ← تحليل

المقام: تربيعي ← تحليل.

$= \lim_{س \to ١} \frac{(س-١)(س-٨)}{(س-١)(س+١)}$ بسين / بسين / سلام / سلام

$= \frac{(١-٨)}{(١+١)} = \frac{-٧}{٢}$ مقبولة.

(١٦) نهـا $\frac{س^٣ - س - ٦}{س + ٢}$ ، $س \leftarrow -٢$

الحل: [١] التعويض المباشر: $\frac{(-٢)^٣ - (-٢) - ٦}{-٢ + ٢} = \frac{-٨ + ٢ - ٦}{٠} = \frac{-١٢}{٠}$ غير معقولة. (صفر/صفر)

[٢] تربيعي ← تحليل

$= \frac{(س + ٢)(س - ٣)}{س + ٢}$ ، $س \leftarrow -٢$ (بسط: سلالم، بين)

$= -٥$ (بترك س + ٢)

توضيح: $س \leftarrow -٢$ ليس $س = -٢$ ، $س \neq -٢$

$(س + ٢) \leftarrow$ الرقم الموجود في قوس سلالم هو نابع قسمة الثابتة على الرقم في قوس بين

$= -٦ \div -٢ = ٣$

(١٧) نهـا $\frac{٢س^٣ - س - ٢١}{٤س^٣ + ١٠س - ٦}$ ، $س \leftarrow -٣$

الحل: [١] التعويض المباشر: $\frac{٢(-٣)^٣ - (-٣) - ٢١}{٤(-٣)^٣ + ١٠(-٣) - ٦}$

$\Leftarrow \frac{١٨ - ٣ - ٢١}{٣٦ - ٣٠ - ٦} = \frac{٩ \times ٢ - ٣ - ٢١}{٩ \times ٤ - ٣٠ - ٦}$

$= \frac{٠}{٠}$ (صفر/صفر) غير معقولة

[٢] البسط: تربيعي ← تحليل

المقام: تربيعي ← تحليل.

لكن انتباه: يوجد امام $س^٢$ في البسط رقم (٢) ، ويوجد امام $س^٢$ في المقام رقم (٤).

نضع هذه الارقام امام $س$ في قوس سلام.

$= \frac{(س + ٢)(٢س - ٧)}{(س + ٣)(٤س - ٣)}$ ، $س \leftarrow -٣$

$= \frac{(-٣ + ٢)(-٦ - ٧)}{(-٣ + ٣)(-١٢ - ٣)} = \frac{-١ \times -١٣}{٠ \times -١٥} = \frac{١٣}{٠}$ (عدد/صفر) مقبولة.

(١٨) نهـا $\frac{س^٢ - ٢٥}{س^٣ - ٣س^٢ - ٢٠س + ٢٥}$ ، $س \leftarrow ٥$

الحل: [١] التعويض المباشر: $\frac{(٥)^٢ - ٢٥}{(٥)٣ - ٣(٥)^٢ - ٢٠(٥) + ٢٥}$

$\Leftarrow \frac{٢٥ - ٢٥}{١٢٥ + ٥ \times ٢٠ - ٢٥ \times ٣} = \frac{٢٥ - ٢٥}{١٢٥ + ١٠٠ - ٧٥}$

$= \frac{٠}{٠}$ (صفر/صفر) غير معقولة

[٢] البسط: تحليل

لذلك: نكتفه معكوس (ونفكه) $\times$ (١-) نخرج

المقام: تربيعي ← تحليل.

$= \frac{(س + ٥)(س - ٥)}{(س - ٥)(٣س - ٥)} \times$ (١-) ، $س \leftarrow ٥$ (بسط: سلالم، بين)

$= \frac{١٠}{١٠} \times$ (١-) $= \frac{(٥ + ٥)}{(٥ - (٥)٣)} \times$ (١-)

$= ١ \times$ (١-)

$=$ (١-) مقبولة.

نهاية : (قوس)^{٢} - رقم

خطواته: ① التعويض المباشر : واذا نتج الجواب $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ غير معتولة .

② (قوس)^{٢} - رقم :

له تحليل خاص به .

① نفتح قوسين .

② نضرب العدد الذي عليه تربيع مرتين .

③ نضرب خلفه مرة اشارة ⊖ ومرة اشارة ⊕ .

ونختار عددين متشابهين

④ : نبسط الارقام داخل القوسين ونختصر احدهما ونعوض بالآخر ونتج جواب معتول.

الى الامثلة :

⑲ $\lim_{س \to ١} \frac{(س+٤)^{٢} - ١٦}{س+٢}$.

الحل: ① التعويض المباشر : $\frac{(١+٤)^{٢} - ١٦}{١+٢}$.

$= \frac{(٥)^{٢} - ١٦}{٣} = \frac{٢٥ - ١٦}{٣} = \frac{٩}{٣} = ٣$ معتولة

⑳ $\lim_{س \to ٢} \frac{(س+٣)^{٢} - ٢٥}{س-٢}$.

الحل: ① التعويض المباشر : $\frac{(٢+٣)^{٢} - ٢٥}{٢-٢} = \frac{٢٥ - ٢٥}{٢-٢}$

$=$ $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ غير معتولة

② نوعه : (قوس)^{٢} : تحليل خاص

$\lim_{س \to ٢} \frac{(س+٣+٥)(س-٣+٥)}{س-٢}$

$= (٨+٢) = (٨+س)(س-٢)$ ⑩ معتولة

㉑ $\lim_{س \to ٤} \frac{(س+٢)^{٢} - ٣٦}{٤-س}$.

الحل: ① التعويض المباشر : $\frac{(٤+٢)^{٢} - ٣٦}{٤-٤}$

$= \frac{(٦)^{٢} - ٣٦}{٤-٤} = \frac{٣٦ - ٣٦}{٤-٤} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ غير معتولة

② (قوس)^{٢} : تحليل خاص

$\lim_{س \to ٤} \frac{(س+٦+٢)(س-٦+٢)}{٤-س}$

$\lim_{س \to ٤} \frac{(س+٨)(س-٤)^{-١}}{(٤-س)}$

$= (-١)(٤+٨) =$ ⑫ معتولة .

㉒ $\lim_{س \to ٦} \frac{(س+٣)^{٢} - ٨١}{٢٥ - (١-س)^{٢}}$.

الحل: ① التعويض المباشر : $\frac{(٦+٣)^{٢} - ٨١}{٢٥ - (١-٦)^{٢}}$

$= \frac{٨١ - ٨١}{٢٥ - ٢٥} = \frac{(٩)^{٢} - ٨١}{(٥)^{٢} - ٢٥}$ $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ غير معتولة

② النوع : (قوس)^{٢} تحليل خاص

المقام : (قوس)^{٢}

$\lim_{س \to ٦} \frac{(س+٣+٩)(س-٣+٩)}{(س-١+٥)(س-١-٥)}$

$\lim_{س \to ٦} \frac{(س+١٢)(س-٦)}{(س+٤)(س-٦)}$

$= \frac{(١٢+٦)}{(٤+٦)} = \frac{١٨}{١٠} = \frac{٩}{٥}$ معتولة

(٢٣) $\lim_{س \to ٤} \frac{٤٩ - (س+٣)^{٢}}{س^{٢} - س - ١٢}$

الحل: [١] التعويض المباشر: $\frac{٤٩ - (٤+٣)^{٢}}{(٤)^{٢} - ٤ - ١٢}$

$= \frac{٤٩ - ٤٩}{١٦ - ٤ - ١٢} = \frac{٤٩ - (٧)^{٢}}{١٢ - ١٢}$ (صفر/صفر)

[٢] التبسيط: (قوس)^{٢}: تحليل خاص غير مقبولة.

لكنه معكوس:

نخرج (-١) X (ونفكه)

القام: تربيعي ← تحليل

$\therefore$ اصبح: $(-١) \times \lim_{س \to ٤} \frac{٤٩ - (س+٣)^{٢}}{س^{٢} - س - ١٢}$

$(-١) \times \lim_{س \to ٤} \frac{(٧ - ٣ + س)(٧ + ٣ + س)}{(س - ٤)(س + ٣)}$

$(-١) \times \lim_{س \to ٤} \frac{(س - ٤)(١٠ + س)}{(س - ٤)(٣ + س)}$

$= (-١) \times \frac{(١٠ + ٤)}{(٣ + ٤)} = (-١) \times \frac{١٤}{٧} = (-١) \times$ (٢-)

مقبولة.

(٢٤) $\lim_{س \to ٥} \frac{(س+٢)^{٢} - ٤}{(٣ - س)^{٢} - ٩}$ صفر

الحل: [١] التعويض المباشر: $\frac{(٥+٢)^{٢} - ٤}{(٣-٥)^{٢} - ٩}$

$= \frac{(٣)^{٢} - ٤}{(-٢)^{٢} - ٩} = \frac{٤ - ٤}{٩ - ٩}$ (صفر/صفر)

غير معتولة

[٢] البسط: (قوس)^{٢}: تحليل خاص

القام:

(٢٥) $\lim_{س \to ٣} \frac{(س-٢+٣)^{٢} - ٦٤}{٩ - س^{٢}}$

الحل: [١] التعويض المباشر: $\frac{(٣-٢+٣)^{٢} - ٦٤}{٩ - (٣)^{٢}}$

$= \frac{(٨)^{٢} - ٦٤}{٩ - ٩} = \frac{٦٤ - ٦٤}{٩ - ٩}$ (صفر/صفر)

غير مقبولة.

[٢] البسط: (قوس)^{٢}: تحليل خاص

القام: تربيعي ← تحليل لكنه معكوس: نخرج (-١) (ونفكه)

$\therefore (-١) \times \lim_{س \to ٣} \frac{٦٤ - (٢+س٢)^{٢}}{٩ - س^{٢}}$

$(-١) \times \lim_{س \to ٣} \frac{(٨ + ٢س + ٢)(٨ - ٢س + ٢)}{(٣ + س)(٣ - س)}$

$(-١) \times \lim_{س \to ٣} \frac{(١٠ + ٢س)(٦ - س)}{(٣ + س)(٣ - س)}$

$(-١) \times \lim_{س \to ٣} \frac{٢(٥ + س)(٣ - س)}{(٣ + س)(٣ - س)}$

$(-١) \times \frac{٢(٥+٣)}{٣+٣} = (-١) \times \frac{١٦}{٦} =$ (٨-)

مقبولة.

(٣٣) $\lim_{س \to ٢} \frac{(س+٢)^{٣} - ٢٧}{س^{٣} - ٨}$

الحل: [١] التعويض المباشر: $\frac{(٢+٢)^{٣} - ٢٧}{(٢)^{٣} - ٨}$

$= \frac{٢٧ - ٢٧}{٨ - ٨}$ (صفر/صفر)

غير مقبولة.

[٢] البسط: (قوس)^{٣}: تحليل خاص

القام: تكعيبي ← تحليل لكنه معكوس: نخرج (-١) (ونفكه)

$\therefore (-١) \times \lim_{س \to ٢} \frac{٢٧ - (س+٢)^{٣}}{٨ - س^{٣}}$

$(-١) \times \lim_{س \to ٢} \frac{(١٩ - ٣س - س^{٢})(٥ + ٣س + س^{٢})}{(٢ - س)(٤ + ٢س + س^{٢})}$

$(-١) \times \lim_{س \to ٢} \frac{(١٩ - ٣س - س^{٢})(٥ + ٣س + س^{٢})}{(٢ - س)(٤ + ٢س + س^{٢})}$

$(-١) \times \frac{(١٩ - ٦ - ٤)(٥ + ٦ + ٤)}{(٢ - ٢)(٤ + ٤ + ٤)} = (-١) \times \frac{(٩)(١٥)}{(٠)(١٢)}$

$= (-١) \times \frac{(٩)(١٥)}{(٠)(١٢)} =$ (∞-)

مقبولة.

منهاجي متعة التعليم الهادف

نهاية إخراج عامل مشترك :

① حتى نعرف أن السؤال هو عامل مشترك يكون بالسؤال فقط عن ثابت ولا يحوي على حد ثابت لوحده .

ملاحظة : قد يكون بالسؤال حد ثابت لوحده ويكون إخراج عامل مشترك وهذا يكون فقط بالسائل التي فقط على (ـــ) واحدة وامامها معامل .

② حالات لعامل مشترك :

١) العامل المشترك لحدين يقسموا على بعض هو العدد الاصغر فيهما والذي نراه .

٢) العامل المشترك لحدين لا يقسموا على بعض هو العدد واحد .

٣) العامل المشترك لحدين متغايرين هو اي = فيها .

٤) العامل المشترك من السينات هو السين الأقل درجه .

لتوضيح : مثال تدريب :

العدد	العدد	العامل المشترك	السينات	السينات	العامل المشترك
٤	٨	٤	$س^{٥}$	$س^{٣}$	$س^{٣}$
١٢	٣	٣	س	$س^{٢}$	س
٣٦	١٤	١	$س^{١٠}$	$س^{٩٩}$	$س^{١٠}$
٢٥	١٧	١			
٥	٥	٥			

هام جداً : خطوات الحل :

① نخرج عامل مشترك من الرقم ومن السينات

② ثم نفتح قوسا ثم نقسم كل حد من حدود المسألة على العامل المشترك الذي اخرجناه ونضع الناتج داخل القوس .

مع الانتباه الى أن الاس تأخذ حالة لعملية الطرح .

الى الأمثلة :

(٢٦) نهـا $\frac{٣س^{٢}-٦س}{س-٢}$ ← $س \to ٢$

الحل : ① التعويض لباس : $\frac{٣(٢)^{٢}-٦(٢)}{٢-٢}$

$\frac{صفر}{صفر} = \frac{١٢-١٢}{٢-٢} = \frac{٤×٣-٢×٦}{٢-٢}$ ← غير مقبولة

② نخرج عامل مشترك لعدم وجود حد ثابت لوحده .

الآن :

نهـا $\frac{٣س^{٢}-٦س}{س-٢}$ = نهـا $\frac{٣س(س-٢)}{(س-٢)}$ ← $س \to ٢$

= نهـا ٣س ← $س \to ٢$

= ٣×٢ = ٦ مقبولة .

هامش

لتوضيح عملية العشرة :

$س = س^{١} = س^{٣-٢} = \frac{س^{٣}}{س^{٢}} = \frac{٣س}{٢س}$

$٢ = \frac{٦س}{٣س}$

(٢٧) $\lim_{س \to ٤} \frac{٣س^{٢}-٨س}{س-٤}$.

الحل: [١] التعويض المباشر: $\frac{٣(٤)^{٢}-٨(٤)}{٤-٤}$

$\Leftarrow \frac{٣ \times ١٦-٨ \times ٤}{٤-٤} = \frac{٤٨-٤٨}{٠} =$ صفر/صفر غير معتولة.

[٢] تخريج عامل مشترك لعدم وجود حد ثابتة لوحده

الآن: $\lim_{س \to ٤} \frac{٣س^{٢}-٨س}{س-٤} = \lim_{س \to ٤} \frac{س(٣س-٨)}{(س-٤)}$

$= \lim_{س \to ٤} ٣س - ٨ = ٣ \times ٤ - ٨$

$= ٤$ (٨) معتولة.

هامش: $س = س^{\frac{١}{١}} = س^{١-٣}$

(٢٨) $\lim_{س \to ٣} \frac{س^{٤}-٤س^{٢}}{س^{٢}+س-٦}$.

الحل: [١] التعويض المباشر: $\frac{(٣)^{٤}-٤(٣)^{٢}}{(٣)^{٢}+(٣)-٦}$

$\Leftarrow \frac{٨١-٤ \times ٩}{٩+٣-٦} = \frac{٨١-٣٦}{٦-٦} =$ صفر/صفر غير معتولة

[٢] البسط: تخريج عامل مشترك لعدم وجود حد ثابتة لوحده.

المقام: تحليل تربيعي.

الآن: $\lim_{س \to ٣} \frac{س^{٤}-٤س^{٢}}{س^{٢}+س-٦} = \lim_{س \to ٣} \frac{س^{٢}(س-٤)}{(س+٣)(س-٢)}$

$= \frac{(٣)^{٢}(٣+٢)}{(٣+٣)(٣-٢)} = \frac{٩ \times ٥}{٦ \times ١} = \frac{٤٥}{٦}$ معتولة.

(٢٩) $\lim_{س \to ١} \frac{س^{٣}+٦س-٧}{س-١}$

الحل: [١] التعويض المباشر:

$\frac{(١)^{٣}+٦(١)-٧}{١-١} = \frac{١+٦-٧}{٠} =$ صفر/صفر غير معتولة.

[٢] تخريج عامل مشترك لعدم وجود حد ثابتة لوحده

الآن: $\lim_{س \to ١} \frac{س^{٣}+٦س-٧}{س-١} = \lim_{س \to ١} \frac{(س-١)(س^{٢}+س+٧)}{(س-١)}$

$= (١)^{٢}+(١)+٧ = ١+١+٧ =$ (٩) معتولة.

هامش: $س = س^{\frac{١}{١}} = س^{١-٣}$

$س^{٦} = س^{\frac{٦}{١}} = س^{٦-٣}$

$٧ = \frac{س-٧}{س+١}$

تحليل تربيعي

$\therefore \lim_{س \to ١} \frac{س(س^{٢}+٦س-٧)}{س-١}$

$\lim_{س \to ١} \frac{س(س-١)(س+٧)}{(س-١)}$

$= (١)(١)(-١)(١+٧) = -٨$ معتولة.

(٣٠) نهـا $\frac{س^{٤}+٢س^{٣}}{١٠س+٥س^{٢}}$ ، س ← -٢

الحل: ١ التعويض المباشر: $\frac{(-٢)^{٤}+٢(-٢)^{٣}}{١٠(-٢)+٥(-٢)^{٢}}$

$= \frac{١٦-١٦}{-٢٠+٢٠} = \frac{٠}{٠}$ صفر على صفر غير معرفة

$\Leftarrow \frac{١٦+٢٨\times٨}{٤٠+٥\times٤}$

٢ البسط: نخرج عامل مشترك المقام: لعدم وجود حد ثابت لوحده

$نهـا_{س\leftarrow -٢} \frac{س(س^{٣}+٢س^{٢}+٨)}{٥س(س+٢)}$

$= \frac{-٢(٨-٨+٨)}{٥(-٢)(٠)} = \frac{-١٦}{٠}$ غير معرفة

$= \frac{-٢}{٠}$ ∴ هامش

$س^{٣}+٢س^{٢}+٨$	$س+٢$	$س^{٢}-٢س+٤$
$س^{٣}+٢س^{٢}$		
$-٢س^{٢}+٨$		
$-٢س^{٢}-٤س$		
$٤س+٨$		
$٤س+٨$		
٠		

$نهـا_{س\leftarrow -٢} \frac{(س+٢)(س^{٢}-٢س+٤)}{٥س(س+٢)}$

$= \frac{١٢}{-١٠} = -\frac{٦}{٥}$

(٣١) نهـا $\frac{٥س^{٣}+٧س^{٢}-٢س}{س^{٢}+س}$ ، س ← صفر

الحل: ١ التعويض المباشر: $\frac{٥(٠)^{٣}+٧(٠)^{٢}-٢(٠)}{(٠)^{٢}+(٠)}$

صفر على صفر غير معرفة

٢ البسط: نخرج عامل مشترك المقام: لعدم وجود حد ثابت لوحده

$نهـا_{س\leftarrow صفر} \frac{س(٥س^{٢}+٧س-٢)}{س(س+١)}$

$= \frac{-٢}{١} = -٢$

هامش: $\frac{٥س^{٢}+٧س-٢}{س+١}$

$٥س^{٢}+٧س-٢$	$س+١$	$٥س-٢$
$٥س^{٢}+٥س$		
$٢س-٢$		
$٢س+٢$		
-٤		

$نهـا_{س\leftarrow صفر} \frac{(س+١)(٥س-٢)}{س(س+١)}$

هامش: $\frac{٥س-٢}{س}$

$٥س-٢$	$س$	$-\frac{٢}{س}+٥$
$٥س$		
-٢		

$نهـا_{س\leftarrow صفر} (-\frac{٢}{س}+٥)$

$= -\infty$

هامش: $\frac{س}{هـ(س)}$ ، $س \leftarrow$ صفر

اذا كانت $س \leftarrow$ صفر فان الذي يختص هو ما خارج القوس وليس ما داخل القوس. حتى ان ما داخل القوس فقط نعوض فيه.

(٣٢) $\text{نهـا}_{س \leftarrow ٠} \frac{٦س^{٤} - ٦س^{٢}}{س^{٢} - س^{٣}}$

الحل: ١ التعويض المباشر: $\frac{٦(٠)^{٤} - ٦(٠)^{٢}}{(٠)^{٢} - (٠)^{٣}} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ غير معتولة

٢ البسط: نخرج عامل مشترك لعدم المقام وجود حد ثابت لوحده.

الآن:

$\text{نهـا}_{س \leftarrow ٠} \frac{٦س^{٤} - ٦س^{٢}}{س^{٢} - س^{٣}} = \text{نهـا}_{س \leftarrow ٠} \frac{٦س^{٢}(س^{٢} - ١)}{س^{٢}(١ - س)}$

$= \text{نهـا}_{س \leftarrow ٠} \frac{٦(س^{٢} - ١)}{(١ - س)} = \frac{٦(٠^{٢} - ١)}{(١ - ٠)} = \frac{٦(-١)}{١} = \frac{-٦}{١} = -٦$ معتولة.

هامش:

$\frac{٦س^{٤}}{٦س^{٢}} = س^{٤-٢} = س^{٢}$

$\frac{٦س^{٢}}{٦س^{٢}} = ١$

$\frac{س^{٢}}{س^{٢}} = ١$

$\frac{س^{٣}}{س^{٢}} = س^{٣-٢} = س^{١} = س$

لاحظ هنا أننا اختصرنا ما هو خارج القوس. أما ما بداخل القوس فقط نعوض فيه مباشرة ونبحث جواب معتول.

(٣٣) $\text{نهـا}_{س \leftarrow ٥} \frac{٣س - ١٠}{٧س - ٣٥}$

الحل: ١ التعويض المباشر: $\frac{٣(٥) - ١٠}{٧(٥) - ٣٥} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ غير معتولة

$\Leftarrow \frac{١٥ - ١٠}{٣٥ - ٣٥} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ غير معتولة

٢ استباه هنا:

يوجد $(س - ١٠)$ بدرجة ١ وهي واحدة لذلك نخرج العدد -١٠ والموجود أمام $س$ ونضع داخل القوس (بسبب)

$٣(س - ٥)$ بدرجة ١

أيضاً: $٧س - ٣٥$

$٧(س - ٥)$

$\therefore \text{نهـا}_{س \leftarrow ٥} \frac{٣(س - ٥)}{٧(س - ٥)} = \frac{٣}{٧}$ معتولة.

(٣٤) $\text{نهـا}_{س \leftarrow ٦} \frac{٤س - ٤س^{٢}}{١٨ - ٣س}$

الحل: ١ التعويض المباشر: $\frac{٤(٦) - ٤(٦)^{٢}}{١٨ - ٣(٦)}$

$= \frac{٢٤ - ١٤٤}{١٨ - ١٨} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ غير معتولة.

٢ نفس اسلوب مثال (٣٣)

$\text{نهـا}_{س \leftarrow ٦} \frac{(٤)س - ٤س^{٢}}{(-٣)س + ١٨}$ بدرجة ١

$\text{نهـا}_{س \leftarrow ٦} \frac{٤(س - ٦)}{-٣(س - ٦)} = \frac{٤}{-٣}$ معتولة

نهاية فرق بين مكعبين أو مجموع مكعبين

① الفرق بين مكعبين :

$س^٣ - ٨ = س^٣ - ٢^٣ = (س - ٢)(س^٢ + ٢س + ٤)$

نفكك الإشارة ونضرب بهم

$س^٣ - ٨ = (س - ٢)(س^٢ + ٢س + ٤)$

تربيع — ناتج الضرب — تربيع

لغود:

$\frac{(س - ٢)(س^٢ + ٢س + ٤)}{(س - ٢)}$ ← نهـ س ← ٢

$٤ + ٤ + ٤ = ٤ + (٢)٢ + ٢^٢(٢) =$

$= ١٢$ (مقبولة)

② المجموع مكعبين :

$س^٣ + ٨ = س^٣ + ٢^٣ = (س + ٢)(س^٢ - ٢س + ٤)$

نفكك الإشارة ونضرب بهم

$(س + ٢)(س^٢ - ٢س + ٤)$

تربيع — ناتج الضرب — تربيع

ملاحظة هامة جداً : ينتج لدينا في تحليل فرق بين مكعبين او مجموع مكعبين قوسين

احدهما حرفي وهو دائماً للإختصار

وآخر كبير (للإهرام) يبقى ولا يحلل ، فقط نعوض فيه ونبحث جواب مقبول وجوابه = مكرر الرقم الثابتة ٣ مرات

الى الأصلة :

(٣٥) $نهـ_{س \leftarrow ٢} \frac{س^٣ - ٨}{س - ٢}$

الحل : ① التعويض المباشر : $\frac{(٢)^٣ - ٨}{٢ - ٢}$

$\Leftarrow \frac{٨ - ٨}{٢ - ٢} =$ صفر / صفر غير مقبولة

② على الأصل دوّر

$س^٣ - ٨$ ← (٨)

فرق بين مكعبين

دائماً اصلة الرقم المكتوب امام $س^٣$ وهو (٢) وعليه تكعيب

$(س - ٢)(س^٢ + ٢س + ٤)$

نفكك الإشارة ونضرب بهم

تربيع — ناتج الضرب — تربيع

لغود:

$\frac{(س - ٢)(س^٢ + ٢س + ٤)}{(س - ٢)}$ ← نهـ س ← ٢

$١٢ = ٤ + (٢)٢ + ٢^٢(٢) =$

(١٢) مقبولة .

(٣٦) $نهـ_{س \leftarrow ٣} \frac{س^٣ - ٢٧}{س - ٣}$

الحل : ① التعويض المباشر : $\frac{(٣)^٣ - ٢٧}{٣ - ٣}$

$\Leftarrow \frac{٢٧ - ٢٧}{٣ - ٣} =$ صفر / صفر غير مقبولة

② على الأصل دوّر

$س^٣ - ٢٧$ ← (٢٧)

فرق بين مكعبين

دائماً اصلة الرقم المكتوب امام $س^٣$ وهو (٣) وعليه تكعيب

$(س - ٣)(س^٢ + ٣س + ٩)$

نفكك الإشارة ونضرب بهم

تربيع — ناتج الضرب — تربيع

لغود:

$\frac{(س - ٣)(س^٢ + ٣س + ٩)}{(س - ٣)}$ ← نهـ س ← ٣

$٢٧ = ٩ + ٩ + ٩ = ٩ + (٣)٣ + ٢^٢(٣) =$

(٢٧) مقبولة .

(٣٧) $\lim_{س \to -٤} \frac{س^٣ + ٦٤}{س + ٤}$.

الحل: [١] التعويض المباشر: $\frac{(-٤)^٣ + ٦٤}{-٤ + ٤} = \frac{-٦٤ + ٦٤}{٤ - ٤}$ = صفر/صفر غير مقبولة.

[٢] البسط: $س^٣ + ٦٤$ على الاصل دور واصلة الرقم الموجود امام س (٤) وعليه تكعيب

$= س^٣ + ٤^٣ = (س + ٤)(س^٢ - ٤س + ١٦)$ نعوض بهم

ثم نعوض بهم

نعود: $\lim_{س \to -٤} \frac{(س + ٤)(س^٢ - ٤س + ١٦)}{(س + ٤)}$ مختصر

$= (-٤)^٢ - ٤(-٤) + ١٦$

$= ١٦ + ١٦ + ١٦ =$ ٤٨ مقبولة.

(٣٨) $\lim_{س \to ٥} \frac{س^٣ + ١٢٥}{س^٢ - ١٠ + ٢٥}$

الحل: [١] التعويض المباشر: $\frac{(٥)^٣ + ١٢٥}{(٥)^٢ - ١٠ + ٢٥}$

$= \frac{١٢٥ + ١٢٥}{٢٥ - ١٠ + ٢٥}$ = صفر/صفر غير مقبولة.

[٢] البسط: تخرج عامل مشترك $(س + ٥)$

المقام: $س^٢ - ١٠س + ٢٥$ مجموع مكعبين

$= س^٣ + ٥^٣ = (س + ٥)(س^٢ - ٥س + ٢٥)$ فكي نفرد على الاصل دور

ثم نعوض بهم

نعود: $\lim_{س \to -٥} \frac{(س + ٥)(س^٢ - ٥س + ٢٥)}{(س + ٥)^٢}$ نقوص بقوة

$= \frac{(-٥)^٢ - ٥(-٥) + ٢٥}{(-٥ + ٥)^٢} = \frac{٢٥ + ٢٥ + ٢٥}{٠}$

$= \frac{٧٥}{٠}$ مقبولة.

(٣٩) $\lim_{س \to ١} \frac{س^٤ - س}{(س + ٢)^٢ - ٩}$

الحل: [١] التعويض المباشر: $\frac{(١)^٤ - ١}{(١ + ٢)^٢ - ٩}$

$= \frac{١ - ١}{٩ - ٩}$ = صفر/صفر غير مقبولة.

[٢] البسط: نخرج عامل مشترك

لعدم وجود حد ثابت للبسط

المقام: $(ق \circ س)^٢$: تحليل خاص.

نعود: $\lim_{س \to ١} \frac{س(س^٣ - ١)}{(س + ٢)^٢ - ٩}$

$= \lim_{س \to ١} \frac{س(س - ١)(س^٢ + س + ١)}{(س + ٢ + ٣)(س + ٢ - ٣)}$

$= \lim_{س \to ١} \frac{س(س - ١)(س^٢ + س + ١)}{(س + ٥)(س - ١)}$

$= \frac{١(١ + ١ \times ١ + ١^٢)(١ \times ١)}{(١ + ٥)}$

$= \frac{(١ + ١ + ١)(١)}{٦}$

$= \frac{٣}{٦} = \frac{١}{٢}$ مقبولة.

هامش: $س = ١$: $س^٤ - ١ = س^٣ + س^٢ + س + ١$

$= ١ + ١ + ١ + ١ = ٤$

(٤٠) $\lim_{س \to ٤} \frac{٢س^{٣} - ١٢٨}{س - ٤}$

الحل: ١ التعويض المباشر:

$\frac{٢(٤)^{٣} - ١٢٨}{٤ - ٤} = \frac{٢ \times ٦٤ - ١٢٨}{٤ - ٤}$

$\Leftarrow \frac{١٢٨ - ١٢٨}{٤ - ٤} =$ صفر على صفر غير معرفة

٢ $٢س^{٣} - ١٢٨$: مُرَتَّبَة بين مكعبين، لكن يوجد امام $س^{٣}$ رقم ٢ لذلك: نخرجه عامل مشترك. ثم نحلل مجموع مكعبين

$٢(س^{٣} - ٦٤)$ ← على الاصل دور

واصلها الرقم (٤) لوجود ٢ امام الس^٣ وعليه نكعب

$٢(س - ٤)(س^{٢} + ٤س + ١٦)$ ← نعكس ونقربهم

نريح

نريح

المقود:

$\lim_{س \to ٤} \frac{٢(س - ٤)(س^{٢} + ٤س + ١٦)}{(س - ٤)}$

$= ٢ \times ١ - ((٤)^{٢} + ٤(٤) + ١٦)$

$= -٢ \times ٨ (١٦ + ١٦ + ١٦)$

$= -١٦ \times ٤٨ =$ (٩٦٣) مقبولة.

٣ $٤س^{٣} + ١٠٨$

هذا مجموع مكعبين، لكن يوجد امام $س^{٣}$ رقم (٤) نخرجه عامل مشترك ثم نحلل مجموع مكعبين

$٤(س^{٣} + ٢٧)$ ← على الاصل دور

$٤(س + ٣)(س^{٢} - ٣س + ٩)$ ← نعكس ونقربهم

نريح

نريح

المقود:

$\lim_{س \to -٣} \frac{٤(س + ٣)(س^{٢} - ٣س + ٩)}{(س + ٣)}$

$= ٤(-٣)^{٢} - ٣(-٣) + ٩)$

$= ٤(٩ + ٩ + ٩)$

$= ٤ \times ٢٧ =$ (١٠٨) مقبولة.

اطلبِ من الحياةِ ثلاثٍ :

رضا الله ، رضا والديك ،

ورضاكِ عن نفسكِ

(٤١) $\lim_{س \to -٣} \frac{٤س^{٣} + ١٠٨}{س + ٣}$

الحل: ١ التعويض المباشر: $\frac{٤(-٣)^{٣} + ١٠٨}{-٣ + ٣}$

$\Leftarrow \frac{٤ \times -٢٧ + ١٠٨}{-٣ + ٣} = \frac{-١٠٨ + ١٠٨}{-٣ + ٣} =$ صفر على صفر غير معرفة

نهاية المقام الذي يحوي على خطي كسر

خطوات : ① التعويض المباشر : واذا نتج الجواب $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ غير معقولة .

② نعمل توحيد مقامات : نضع (٦) اقواس على الصورة التالية : $\frac{(\quad)(\quad)\pm(\quad)(\quad)}{(\quad)(\quad)}$

③ نضع بالمقام مقلوب آلي .

④ نلغي اقواس لبسط ونبسطها وتختصر مع المقلوب الآلي ثم نعوض وننتج جواب مقبول .

الى الامثلة :

(٤٢) $\lim_{س \to ٢} \frac{\frac{٣}{٤} - \frac{س+١}{س+٢}}{س-٢}$

الحل : ① التعويض المباشر : $\frac{\frac{٣}{٤} - \frac{٢+١}{٢+٢}}{٢-٢}$

$= \frac{\frac{٣}{٤} - \frac{٣}{٤}}{٢-٢}$ ⟸ $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ غير معقولة .

② توحيد المقامات ⟸ نسبي

$= \frac{(٤)(س+١) - (٣)(س+٢)}{(٤)(س+٢)(٤)}$ ÷ $(س-٢)$ ⟸ $\lim_{س \to ٢}$

$= \frac{٤س+٤-٣س-٦}{(٤)(س+٢)(٤)(س-٢)}$ ⟸ $\lim_{س \to ٢}$

$= \frac{(س-٢)}{(٤)(س+٢)(٤)(س-٢)}$ ⟸ $\lim_{س \to ٢}$ بسط نختصرهم مقلوب آلي

$= \frac{١}{(٤)(٢+٢)} = \frac{١}{٤ \times ٤} = \frac{١}{١٦}$ مقبولة

(٤٣) $\lim_{س \to ٤} \frac{\frac{س}{٣} - \frac{٤}{٣}}{س-٤}$

الحل : ① التعويض المباشر : $\frac{\frac{٤}{٣} - \frac{٤}{٣}}{٤-٤}$

$= \frac{\frac{٤}{٣} - \frac{٤}{٣}}{٤-٤}$ ⟸ $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ غير معقولة .

② توحيد المقامات :

$= \frac{(٣)(س) - (٤)(س-١)}{(٣)(س-١)(٤-س)}$ ⟸ $\lim_{س \to ٤}$

$= \frac{٣س - ٤س + ٤}{(س-١)(٣)(٤-س)}$ ⟸ $\lim_{س \to ٤}$

$= \frac{٤-س}{(س-١)(٣)(١-س)(٤-س)}$ ⟸ $\lim_{س \to ٤}$ بسط نختصرهم مقلوب آلي

$= \frac{١}{(٣)(١-س)}$ ⟸ $\lim_{س \to ٤}$

$= \frac{١}{٣ \times ٣} = \frac{١}{٩}$ مقبولة

(٤٤) $\lim_{س \to ٥} \frac{\frac{س}{٣+س} - \frac{٥}{٨}}{٢س^{٢} - ١٠}$

الحل : ① التعويض المباشر : $\frac{\frac{٥}{٨} - \frac{٥}{٣+٥}}{٢(٥)^{٢} - ١٠}$

$= \frac{\frac{٥}{٨} - \frac{٥}{٨}}{١٠-١٠}$ ⟸ $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ غير مقبولة

② نعمل توحيد مقامات نضع

$$\text{نها}_{س\to 5}\ \frac{(8)(س-5)-(س+3)(س+3)}{(س+3)(8)(3-س-10)}$$

قفز آلي

$$\text{نها}_{س\to 5}\ \frac{8س-5س-15}{(س+3)(8)(3-س-10)}$$

بتجزئة

$$\text{نها}_{س\to 5}\ \frac{(س-3)(س-5)}{(س+3)(8)(2)(س-5)}$$

بتجزئة — بسط — تختصر هم — تقفز آلي

$$= \frac{3}{(2)(8)(3+5)} = \frac{3}{2\times 8\times 8}$$

$\frac{3}{128}$ مقبولة

(٤٤)

$$\text{نها}_{س\to 3-}\ \frac{س+3}{\frac{9}{2}-\frac{3س}{2}}$$

الحل: [1] بالتعويض لبا س:

$$\frac{3+3-}{\frac{9}{2}-\frac{3\times 3-}{1+3-}}$$

$$\frac{ص}{\frac{9}{ج}-\frac{9}{ج}} = \frac{3+3-}{\frac{9}{ج}-\frac{9-}{ج-}}$$

$\frac{ص}{ص}$ =

[2] بنبي ⟸ توحيد مقامات: غير مقبولة.

$$\text{نها}_{س\to 3-}\ \frac{س+3}{\frac{9}{2}-\frac{3س}{2}}$$

$$\text{نها}_{س\to 3-}\ \frac{س+3}{\frac{9-3س-}{2}}$$

$$\text{نها}_{س\to 3-}\ \frac{(س+3)(2)}{(س+1)(9-3س-)}$$

قفز آلي — Double لأن توحيد المقامات جاء تحت الكسر

$$\text{نها}_{س\to 3-}\ \frac{س+3}{(2)(س+1)}$$

(٤٥)

$$\text{نها}_{س\to 6}\ \frac{\frac{2}{7}+\frac{س-8}{س+1}}{30-5س}$$

الحل: [1] بالتعويض لبا س:

$$\frac{\frac{2}{7}+\frac{6-8}{1+6}}{30-(6)5}$$

$\frac{ص}{ص}$ غير مقبولة $= \frac{\frac{2}{7}+\frac{2-}{7}}{30-30}$

[2] بنبي ⟸ نعمل توحيد مقامات:

$$\text{نها}_{س\to 6}\ \frac{(7)(س-8)+(2)(س+1)}{(س+1)(7)(30-5س)}$$

قفز آلي

$$\text{نها}_{س\to 6}\ \frac{7س-56+2س+2}{(س+1)(7)(30-5س)}$$

$$\text{نها}_{س\to 6}\ \frac{9س-54}{(س+1)(7)(30-5س)}$$

$$\text{نها}_{س\to 3-}\ \frac{س+3}{\frac{9-3س-}{2}}$$

$$\text{نها}_{س\to 3-}\ \frac{(س+3)(2)}{(س+1)(9-3س-)}$$

قفز آلي — Double لأن توحيد المقامات جاء تحت الكسر

$$\text{نها}_{س\to 3-}\ \frac{س+3}{(2)(س+1)}$$

$$\text{نها}_{س\to 3-}\ \frac{س+3}{9-6س-3س}$$

$$\text{نها}_{س\to 3-}\ \frac{س+3}{(2)(س+1)}$$

$$\text{نهـا}_{س\to -٣}\ \frac{(س+٣)(س+١)(٣)}{٩-س-(٣-)}$$

بتعويض

$$\frac{(٣)(١+(٣-))(٣+(٣-))}{٣-}$$

$$\Leftarrow \frac{(٣)(١-٣)}{٣-}$$

$$\Leftarrow \frac{(٣)(٢-)}{٣-}$$

$$\Leftarrow \frac{٦-}{٣-}$$

$$\Leftarrow \frac{٤}{٣}$$

مقبولة.

$$\text{نهـا}_{س\to -٣}\ \frac{(س+٣)(س+١)(٣)}{(٣+س)٣-}$$

بتعويض

$$\frac{(٣)(١+(٣-))(٣+(٣-))}{٣-}$$

$$\Leftarrow \frac{(٣)(٢-)(٠)}{٣-}$$

$$\Leftarrow \frac{٠}{٣-}$$

$$\Leftarrow ٠$$

مقبولة.

$$\text{نهـا}_{س\to ١}\ \frac{(٥-س)(٤-س+١)(٤+س)}{(٩+س-)(٩-)}$$

بتعويض

$$\frac{(٥-١)(٤-١+١)(٤+١)}{(٩+١-)(٩-)}$$

$$\Leftarrow \frac{(٤)(٤)(٥)}{(٨)(٩-)}$$

$$\Leftarrow \frac{١٢٥}{٩-}$$

مقبولة.

$$\text{نهـا}_{س\to ١}\ \frac{٥-س-٥}{٣}$$

$$\frac{٣}{٤+س-٣+س٤}$$

بتعويض

$$\frac{٥-(١)٥}{\frac{٣}{٤+٣}-\frac{٣}{٤+١\times٤}}$$

$$\Leftarrow \frac{٠}{\frac{٣}{٥}-\frac{٣}{٥}}$$

$$\Leftarrow \frac{٠}{٠}$$

غير مقبولة.

٤٧) $$\text{نهـا}_{س\to ١}\ \frac{٥-س-٥}{\frac{٣}{٤+س}-\frac{٣}{٤+س٣-١+س٤}}$$

الحل: ١) التعويض لبا س:

$$\frac{٥-(١)٥}{\frac{٣}{٤+٣}-\frac{٣}{٤+١\times٤}}$$

$$\Leftarrow \frac{٠}{\frac{٣}{٥}-\frac{٣}{٥}}$$

$$\Leftarrow \frac{٠}{٠}$$

غير مقبولة.

٢) نبي ⇐ نحل توحيد مقامات:

$$\text{نهـا}_{س\to ١}\ \frac{٥-س-٥}{\frac{(٣)(٤+س)-(٣)(٤+س٤)}{(٤+س)(١+س-٤)}}$$

$$\text{نهـا}_{س\to ١}\ \frac{٥-س-٥}{\frac{٣س+١٢-١٢-٣س-}{(٤+س)(١+س-٤)}}$$

$$\text{نهـا}_{س\to ١}\ \frac{٥-س-٥}{\frac{-٩+س+٩-}{(٤+س)(١+س-٤)}}$$

بتعويض

$$\frac{٥-١-٥}{\frac{-٩+١+٩-}{(٤+١)(١+١-٤)}}$$

$$\Leftarrow \frac{٤-}{\frac{١-}{(٥)(٢-)}}$$

$$\Leftarrow \frac{٤-}{\frac{١-}{١٠}}$$

$$\Leftarrow \frac{٤-}{١-}\times\frac{١٠}{١-}$$

$$\Leftarrow \frac{٤٠}{١}$$

مقبولة.

٤٨) $$\text{نهـا}_{س\to ٤}\ \frac{س}{٢-س-٨}\left(\frac{س}{٤}\times\frac{٧}{س+٣}\right)$$

الحل: ١) التعويض لبا س:

$$\frac{٤}{٢-(٤)٨}\left(\frac{٤}{٤}\times\frac{٧}{٤+٣}\right)$$

$$\Leftarrow \frac{٤}{٨-٨}\left(\frac{٤}{٧}\times\frac{٧}{٧}\right)$$

$$\Leftarrow \frac{٤}{٠}\left(\frac{٤}{٧}-\frac{٤}{٧}\right)$$

$$\Leftarrow \frac{٤}{٠}\times\frac{٠}{١}$$

$$\Leftarrow \frac{صفر}{صفر}$$

غير مقبولة

٢) نبي، لكن لا يوجد فيه مقص آلي، نحل توحيد مقامات.

$$\text{نهـا}_{س\to ٤}\ \frac{س}{٢-س-٨}\left(\frac{س}{٧}\times\frac{٧}{س+٣}\right)$$

$$\text{نهـا}_{س\to ٤}\ \frac{س}{٢-س-٨}\left(\frac{س}{(٧)(س+٣)}\right)$$

$$\text{نهـا}_{س\to ٤}\ \frac{س}{(٤-س)٢}\left(\frac{(٤-س)٣}{(٧)(س+٣)}\right)$$

$$\Leftarrow \frac{٤}{٠}\left(\frac{٠}{(٧)(٧)}\right)$$

$$\Leftarrow \frac{٤}{٠}\times٠$$

$$\Leftarrow \frac{٠}{٠}$$

غير مقبولة.

$$\text{نهـا}_{س\to ٤}\ \frac{س}{(٤-س)٢}\left(\frac{(٤-س)٣}{(٧)(س+٣)}\right)$$

$$\Leftarrow \frac{٤}{٠}\left(\frac{٠}{(٧)(٧)}\right)$$

$$\Leftarrow \frac{٤}{٠}\times٠$$

$$\Leftarrow \frac{٠}{٠}$$

غير مقبولة.

$$\text{نهـا}_{س\to ٤}\ \frac{س}{٢-س-٨}\left(\frac{س}{٤-س٧}\times\frac{١٢-س٣}{(٧)(س+٣)}\right)$$

$$\text{نهـا}_{س\to ٤}\ \frac{س}{(٤-س)٢}\left(\frac{(٤-س)٣}{(٧)(س+٣)}\right)$$

$$\Leftarrow \frac{٤}{٠}\left(\frac{٠}{(٧)(٧)}\right)$$

$$\Leftarrow \frac{٤}{٠}\times٠$$

$$\Leftarrow \frac{٠}{٠}$$

غير مقبولة.

$$\text{نهـا}_{س\to ٤}\ \frac{س}{٢-س-٨}\left(\frac{س}{٤-س٧}\times\frac{١٢-س٣}{(٧)(س+٣)}\right)$$

$$\text{نهـا}_{س\to ٤}\ \frac{س}{(٤-س)٢}\left(\frac{(٤-س)٣}{(٧)(س+٣)}\right)$$

$$\Leftarrow \frac{٤}{٠}\left(\frac{٠}{(٧)(٧)}\right)$$

$$\Leftarrow \frac{٤}{٠}\times٠$$

$$\Leftarrow \frac{٠}{٠}$$

غير مقبولة.

$$\text{نهـا}_{س\to ١}\ \frac{٥-س-٥}{\frac{٩+س-٩-}{(٤+س)(١+س-٤)}}$$

بتعويض

$$\frac{٥-١-٥}{\frac{٩+١-٩-}{(٤+١)(١+١-٤)}}$$

$$\Leftarrow \frac{٤-}{\frac{٨-}{(٥)(٢-)}}$$

$$\Leftarrow \frac{٤-}{\frac{٨-}{١٠}}$$

$$\Leftarrow \frac{٤-}{١}\times\frac{١٠}{٨-}$$

$$\Leftarrow \frac{٤٠}{٨}$$

مقبولة.

قص آلي

Double لأن توحيد المقامات جاء تحت في المقام

منهاجي متعة التعليم الهادف

(٤٩) نهـا $\frac{س+٥}{س-٣}$ ← س ← ٣

الحل: ١ التعويض لمباشر: $\frac{٣+٥}{٣-٣}$ ← $\frac{٨}{٠}$ ← $\frac{\text{صف}}{\text{صفر}}$ غير معتولة.

٢ تحليل المقامات: $\frac{س+٥}{(س-٣)(س+٣)}$

نهـا ← س ← ٣

$\frac{س+٥}{(س-٣)(س+٣)} \times \frac{١}{١}$ ← $\frac{\text{صف}}{\text{صف}}$

$\frac{س+٥}{(س-٣)(س+٣)} \times \frac{٥}{٥}$

$\frac{(س+٥)(٥)}{(س-٣)(س+٣)(٥)}$

$\frac{(٥+س)(٥)}{(٩+س٢)(٥)}$

نهـا ← س ← ٣

$\frac{(٥+س)(٥)}{(٩+س٢)(٥)}$ ← $\frac{\text{صف}}{\text{صف}}$ غير معتولة.

$\frac{(٤+س)(٩)-(٩+س٢)(٤)}{(٩+س٢)(٩)}$

نهـا ← س ← ٣

$\frac{٣٦+س٩-٣٦-س٨}{(٩+س٢)(٩)}$

نهـا ← س ← ٣

$\frac{س}{(٩+س٢)(٩)}$

نهـا ← س ← ٣

$\frac{١}{(٩+٠×٢)٩}$ ← $\frac{\text{صف}}{\text{صف}}$

$\frac{١}{٨١} \times \frac{٥}{٢} = \frac{٥}{١٦٢}$ معتولة.

وتسلم عليه نفسه ،

عزيزي الطالب / الطالبة :

اليك مخطط الصف نامل افادة

١ تنزل النهاية (٤) مرات واما مها (٤) خطوط وتشره بالمرافقة.

٢ تنزل لمختلفات (٣) مرات وحولهم اقواسا.

٣ اما المتشابهات : بالمقدار والمرافقة فاننا نضع :

(الاول)^{٢} − (الثاني)^{٢}

ثم نبسط ونختصر مع بعض وثم نعوض ونتيجة جواب معتول.

الى المثلة :

نهـا ← س ← ٢ $\frac{\sqrt{س+٧}-٣}{س-٢}$

١ التعويض لمباشر: $\frac{\sqrt{٢+٧}-٣}{٢-٢}$

$\frac{٣-٣}{٢-٢} = \frac{٣-\sqrt{٩}}{٢-٢}$ ← $\frac{\text{صف}}{\text{صف}}$ غير معتولة

٢ تضرب بالمرافقة: المرافقة $\frac{٣+\sqrt{س+٧}}{٣+\sqrt{س+٧}}$

نهـا ← س ← ٢ $\frac{٣-\sqrt{س+٧}}{٢-س} \times \frac{٣+\sqrt{س+٧}}{٣+\sqrt{س+٧}}$

نهـا ← س ← ٢ $\frac{٣^{٢}-(\sqrt{س+٧})^{٢}}{(٢-س)(٣+\sqrt{س+٧})}$

نهـا ← س ← ٢ $\frac{٩-س-٧}{(٢-س)(٣+\sqrt{س+٧})}$

نهـا ← س ← ٢ $\frac{١}{٣+\sqrt{٧+٢}}$ = $\frac{١}{٣+٣}$ = $\frac{١}{٦}$ معتولة

نهاية الجذر التربيعي :

خطوات: ١ التعويض لمباشر: واذا نتج الجواب $\frac{\text{صف}}{\text{صفر}}$ غير معتولة.

٢ جذر تربيعي ← نضرب بالمرافقة

* المرافقة: هو نفس الجذر لكن نغير الاشارة خارج الجذر

(١٥) $\lim_{س \to ٤} \frac{\sqrt{٥س+١٦} - ٦}{٤ - س}$

الحل: [١] التعويض لمباشر: $\frac{\sqrt{٥(٤)+١٦} - ٦}{٤-٤}$

$\Leftarrow \frac{\sqrt{٢٠+١٦} - ٦}{٤-٤} = \frac{\sqrt{٣٦} - ٦}{٤-٤} = \frac{٦-٦}{٤-٤} =$ صفر/صفر غير معتولة

[٢] جذر تربيعي ← ضرب بالمرافق:

$\lim_{س \to ٤} \frac{\sqrt{٥س+١٦} - ٦}{٤ - س} \times \frac{\sqrt{٥س+١٦} + ٦}{\sqrt{٥س+١٦} + ٦}$

$= \lim_{س \to ٤} \frac{(\sqrt{٥س+١٦})^٢ - (٦)^٢}{(٤-س)(\sqrt{٥س+١٦}+٦)}$

$= \lim_{س \to ٤} \frac{٥س+١٦-٣٦}{(٤-س)(\sqrt{٥س+١٦}+٦)}$

$= \lim_{س \to ٤} \frac{٥س-٢٠}{(٤-س)(\sqrt{٥س+١٦}+٦)}$

$= \lim_{س \to ٤} \frac{٥(س-٤)}{(٤-س)(\sqrt{٥س+١٦}+٦)}$

$= \frac{٥}{(٦+٦)} = \frac{٥}{١٢}$ معتولة

(٥٢) $\lim_{س \to ٥} \frac{س^٢ - ٢٥}{٧ - \sqrt{س^٢+٢س+١٩}}$

الحل: [١] التعويض لمباشر:

$\frac{٥^٢ - ٢٥}{٧ - \sqrt{(٥)^٢+(٥)+١٩}} = \frac{٢٥-٢٥}{٧-\sqrt{٤٩}} = \frac{٠}{٧-٧}$ صفر/صفر غير معتولة

$\Leftarrow \frac{٥^٢ - ٢٥}{٧ - \sqrt{٥^٢+٢(٥)+١٩}} =$ صفر/صفر غير معتولة.

[٢] جذر تربيعي ← ضرب بالمرافق:

$\lim_{س \to ٥} \frac{س^٢ - ٢٥}{٧ - \sqrt{س^٢+٢س+١٩}} \times \frac{٧ + \sqrt{س^٢+٢س+١٩}}{٧ + \sqrt{س^٢+٢س+١٩}}$

$= \lim_{س \to ٥} \frac{(س^٢-٢٥)(٧+\sqrt{س^٢+٢س+١٩})}{٤٩ - (س^٢+٢س+١٩)}$

$= \lim_{س \to ٥} \frac{(س^٢-٢٥)(٧+\sqrt{س^٢+٢س+١٩})}{-س^٢-٢س+٣٠}$

$= \lim_{س \to ٥} \frac{(س-٥)(س+٥)(٧+\sqrt{س^٢+٢س+١٩})}{-(س-٥)(س+٦)}$

$= \frac{(٥+٥)(٧+\sqrt{٥^٢+٢(٥)+١٩})}{-(٥+٦)}$

$= \frac{(١٠)(٧+\sqrt{٤٩})}{-١١} = \frac{١٠(٧+٧)}{-١١} = \frac{١٤٠}{-١١}$ معتولة.

انتم سر السعاده :

لـ: أم حنون ترفع كفيها

لرب السماء ، وأب حمادق كثير الوفاء

(٥٣) $\lim_{س \to ١} \frac{س^{٣} + س - ٢}{\sqrt{٤س + ١٢}} - ٤$

الحل: ١ التعويض لباشر:

$\frac{(١)^{٣} + (١) - ٢}{\sqrt{٤(١) + ١٢}} - ٤$

$\Leftarrow \frac{١ + ١ - ٢}{\sqrt{١٦} - ٤}$

$= \frac{٢ - ٢}{٤ - ٤} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ غير معتولة

٢ جذر تربيعي ⟸ نضرب بالمرافق: غير معتولة

المرافق

$\lim_{س \to ١} \frac{س^{٣} + س - ٢}{\sqrt{٤س + ١٢} - ٤} \times \frac{\sqrt{٤س + ١٢} + ٤}{\sqrt{٤س + ١٢} + ٤}$

$\lim_{س \to ١} \frac{(س^{٣} + س - ٢)(\sqrt{٤س + ١٢} + ٤)}{(\sqrt{٤س + ١٢})^{٢} - (٤)^{٢}}$

$\lim_{س \to ١} \frac{(س^{٣} + س - ٢)(\sqrt{٤س + ١٢} + ٤)}{٤س + ١٢ - ١٦}$

$\lim_{س \to ١} \frac{(س^{٣} + س - ٢)(\sqrt{٤س + ١٢} + ٤)}{٤س - ٤}$

$\lim_{س \to ١} \frac{(س - ١)(س^{٢} + س + ٢)(\sqrt{٤س + ١٢} + ٤)}{٤(س - ١)}$

بقسمة البسط والمقام على $(س - ١)$

$\Leftarrow \frac{(١ + ١ + ٢)(\sqrt{٤(١) + ١٢} + ٤)}{٤}$

$= \frac{(٤)(٨)}{٤} = \frac{٣٢}{٤} = ٨$ معتولة

الحل: ١ التعويض لباشر:

$\frac{\sqrt{(٣)^{٢} + ١٣ + ٣} - \sqrt{١٠ + ٥(٣)}}{(٣)^{٣} - ٣(٣)}$

$\Leftarrow \frac{\sqrt{٩ + ٣ + ١٣} - \sqrt{١٠ + ١٥}}{٩ - ٩} = \frac{\sqrt{٢٥} - \sqrt{٢٥}}{٩ - ٩}$

$\Leftarrow = \frac{٥ - ٥}{٩ - ٩}$ $\left(\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}\right)$ غير معتولة

٢ جذر تربيعي ⟸ نضرب بالمرافق: المرافق

$\lim_{س \to ٣} \frac{\sqrt{س^{٢} + ٥س + ١٣} - \sqrt{١٠ + ٥س}}{س^{٢} - ٣س} \times \frac{\sqrt{س^{٢} + ٥س + ١٣} + \sqrt{١٠ + ٥س}}{\sqrt{س^{٢} + ٥س + ١٣} + \sqrt{١٠ + ٥س}}$

$\lim_{س \to ٣} \frac{(\sqrt{س^{٢} + ٥س + ١٣})^{٢} - (\sqrt{١٠ + ٥س})^{٢}}{(س^{٢} - ٣س)(\sqrt{س^{٢} + ٥س + ١٣} + \sqrt{١٠ + ٥س})}$

$\lim_{س \to ٣} \frac{(س^{٢} + ٥س + ١٣) - (١٠ + ٥س)}{(س^{٢} - ٣س)(\sqrt{س^{٢} + ٥س + ١٣} + \sqrt{١٠ + ٥س})}$

$\lim_{س \to ٣} \frac{س^{٢} + ٥س + ١٣ - ١٠ - ٥س}{(س^{٢} - ٣س)(\sqrt{س^{٢} + ٥س + ١٣} + \sqrt{١٠ + ٥س})}$

$\lim_{س \to ٣} \frac{س^{٢} + ٣}{س(س - ٣)(\sqrt{س^{٢} + ٥س + ١٣} + \sqrt{١٠ + ٥س})}$

بقسمة البسط والمقام على $(س - ٣)$

$\Leftarrow \frac{٣ + ٣}{٣(\sqrt{٩ + ١٥ + ١٣} + \sqrt{١٠ + ١٥})}$

$= \frac{٦}{٣(\sqrt{٣٧} + \sqrt{٢٥})} = \frac{٦}{٣(٦ + ٥)}$

$= \frac{٦}{٣(١١)} = \frac{٦}{٣٣}$ معتولة

(٥٤) $\lim_{س \to ٣} \frac{\sqrt{س^{٢} + ٥س + ١٣} - \sqrt{٤س + ١٠}}{س^{٢} - ٣س}$

الحل: ١ التعويض لباشر:

$\frac{\sqrt{(٣)^{٢} + ٥(٣) + ١٣} - \sqrt{٤(٣) + ١٠}}{(٣)^{٢} - ٣(٣)}$

$\Leftarrow \frac{\sqrt{٩ + ١٥ + ١٣} - \sqrt{١٢ + ١٠}}{٩ - ٩} = \frac{\sqrt{٣٧} - \sqrt{٢٢}}{٩ - ٩}$

$\Leftarrow = \frac{٦ - ٦}{٩ - ٩}$ $\left(\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}\right)$ غير معتولة

٢ جذر تربيعي ⟸ نضرب بالمرافق: المرافق

$\lim_{س \to ٣} \frac{\sqrt{س^{٢} + ٥س + ١٣} - \sqrt{٤س + ١٠}}{س^{٢} - ٣س} \times \frac{\sqrt{س^{٢} + ٥س + ١٣} + \sqrt{٤س + ١٠}}{\sqrt{س^{٢} + ٥س + ١٣} + \sqrt{٤س + ١٠}}$

$\lim_{س \to ٣} \frac{(\sqrt{س^{٢} + ٥س + ١٣})^{٢} - (\sqrt{٤س + ١٠})^{٢}}{(س^{٢} - ٣س)(\sqrt{س^{٢} + ٥س + ١٣} + \sqrt{٤س + ١٠})}$

$\lim_{س \to ٣} \frac{(س^{٢} + ٥س + ١٣) - (٤س + ١٠)}{(س^{٢} - ٣س)(\sqrt{س^{٢} + ٥س + ١٣} + \sqrt{٤س + ١٠})}$

$\lim_{س \to ٣} \frac{س^{٢} + ٥س + ١٣ - ٤س - ١٠}{(س^{٢} - ٣س)(\sqrt{س^{٢} + ٥س + ١٣} + \sqrt{٤س + ١٠})}$

$\lim_{س \to ٣} \frac{س^{٢} + س + ٣}{س(س - ٣)(\sqrt{س^{٢} + ٥س + ١٣} + \sqrt{٤س + ١٠})}$

بقسمة البسط والمقام على $(س - ٣)$

$\Leftarrow \frac{٣ + ٣ + ٣}{٣(\sqrt{٩ + ١٥ + ١٣} + \sqrt{١٢ + ١٠})}$

$= \frac{٩}{٣(\sqrt{٣٧} + \sqrt{٢٢})} = \frac{٣}{٦ + ٥}$

$= \frac{٣}{١١}$ معتولة

(٥٥) $\lim_{س \to ٣} \frac{\sqrt{س^{٢} + ٥س + ١٣} - \sqrt{٤س + ١٠}}{س^{٢} - ٣س}$

الحل: ١ التعويض لباشر:

$\frac{\sqrt{(٣)^{٢} + ٥(٣) + ١٣} - \sqrt{٤(٣) + ١٠}}{(٣)^{٢} - ٣(٣)}$

$\Leftarrow \frac{\sqrt{٩ + ١٥ + ١٣} - \sqrt{١٢ + ١٠}}{٩ - ٩} = \frac{\sqrt{٣٧} - \sqrt{٢٢}}{٩ - ٩}$

$\Leftarrow = \frac{٦ - ٦}{٩ - ٩}$ $\left(\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}\right)$ غير معتولة

٢ جذر تربيعي ⟸ نضرب بالمرافق: المرافق

$\lim_{س \to ٣} \frac{\sqrt{س^{٢} + ٥س + ١٣} - \sqrt{٤س + ١٠}}{س^{٢} - ٣س} \times \frac{\sqrt{س^{٢} + ٥س + ١٣} + \sqrt{٤س + ١٠}}{\sqrt{س^{٢} + ٥س + ١٣} + \sqrt{٤س + ١٠}}$

$\lim_{س \to ٣} \frac{(\sqrt{س^{٢} + ٥س + ١٣})^{٢} - (\sqrt{٤س + ١٠})^{٢}}{(س^{٢} - ٣س)(\sqrt{س^{٢} + ٥س + ١٣} + \sqrt{٤س + ١٠})}$

$\lim_{س \to ٣} \frac{(س^{٢} + ٥س + ١٣) - (٤س + ١٠)}{(س^{٢} - ٣س)(\sqrt{س^{٢} + ٥س + ١٣} + \sqrt{٤س + ١٠})}$

$\lim_{س \to ٣} \frac{س^{٢} + ٥س + ١٣ - ٤س - ١٠}{(س^{٢} - ٣س)(\sqrt{س^{٢} + ٥س + ١٣} + \sqrt{٤س + ١٠})}$

$\lim_{س \to ٣} \frac{س^{٢} + س + ٣}{س(س - ٣)(\sqrt{س^{٢} + ٥س + ١٣} + \sqrt{٤س + ١٠})}$

بقسمة البسط والمقام على $(س - ٣)$

$\Leftarrow \frac{٣ + ٣ + ٣}{٣(\sqrt{٩ + ١٥ + ١٣} + \sqrt{١٢ + ١٠})}$

$= \frac{٩}{٣(\sqrt{٣٧} + \sqrt{٢٢})} = \frac{٣}{٦ + ٥}$

$= \frac{٣}{١١}$ معتولة

(٥٥) $\lim_{س \to ٦} \frac{٥ - \sqrt{٧ - س^{٤} - ١١}}{(س+١)^{٢} - ٤٩}$

الحل: [١] للتعويض لباشر: $\frac{٥ - \sqrt{٧ - (٦)^{٤} - ١١}}{(٦+١)^{٢} - ٤٩}$

$\Leftarrow \frac{٥ - \sqrt{٧ - ١٢٩٦ - ١١}}{(٧)^{٢} - ٤٩} = \frac{٥ - ٥}{٤٩ - ٤٩} = \frac{٠}{٠}$ صيغة صورة / صورة غير معتولة

[٢] جذر تربيعي ⟸ نضرب بالمرافق

لكن انتبه هنا السؤال معكوس لذلك:

نضرع (-١) X (ونكمله) ثم نضربه بالمرافق

∴ اصبح السؤال على الصورة التالية: المرافق

$\lim_{س \to ٦} (-١) \times \frac{٥ - \sqrt{٧ - س^{٤} - ١١}}{(س+١)^{٢} - ٤٩} \times \frac{٥ + \sqrt{٧ - س^{٤} - ١١}}{٥ + \sqrt{٧ - س^{٤} - ١١}}$

$\lim_{س \to ٦} (-١) \times \frac{٥^{٢} - (\sqrt{٧ - س^{٤} - ١١})^{٢}}{(س^{٢} + ٢س + ١ - ٤٩)(٥ + \sqrt{٧ - س^{٤} - ١١})}$

$\lim_{س \to ٦} (-١) \times \frac{٢٥ - ٧ + س^{٤} + ١١}{(س^{٢} + ٢س - ٤٨)(٥ + \sqrt{٧ - س^{٤} - ١١})}$

$\lim_{س \to ٦} (-١) \times \frac{س^{٤} - ١١ + ٢٥}{(س^{٢} + ٢س - ٤٨)(٥ + \sqrt{٧ - س^{٤} - ١١})}$

$\lim_{س \to ٦} (-١) \times \frac{س^{٤} - ٣٦}{(س^{٢} + ٢س - ٤٨)(٥ + \sqrt{٧ - س^{٤} - ١١})}$

$\lim_{س \to ٦} (-١) \times \frac{(س-٦)(س+٦)}{(س-٦)(س+٨)(٥ + \sqrt{٧ - س^{٤} - ١١})}$

$\lim_{س \to ٦} (-١) \times \frac{(س+٦)}{(س+٨)(٥ + \sqrt{٧ - س^{٤} - ١١})}$

$\Leftarrow \frac{(-١) \times (٦+٦)}{(٦+٨)(٥ + \sqrt{٧ - (٦)^{٤} - ١١})} = \frac{(-١) \times ١٢}{(١٤)(٥ + \sqrt{٢٥٧})}$ صيغة بسط / مقام غير معتولة

$= \frac{-١٢}{١٠ \times ١٤} = \frac{-٦}{٧٠}$ معتولة

(٥٦) $\lim_{س \to ٠} \frac{٧ - \sqrt{٧ + س^{٣} - ٧}}{س^{٣} + س^{٤}}$

الحل: [١] للتعويض لباشر: $\frac{٧ - \sqrt{٧ + (٠)^{٣} - ٧}}{(٠)^{٣} + (٠)^{٤}}$

$\Leftarrow \frac{٧ - \sqrt{٧ - ٧}}{٠} = \frac{٧ - ٧}{٠}$ صيغة بسط / مقام غير معتولة.

[٢] جذر تربيعي ⟸ مرافقة

نفس اسلوب مثال (٥٥):

$(-١) \times \lim_{س \to ٠} \frac{٧ - \sqrt{٧ + س^{٣} - ٧}}{س^{٣} + س^{٤}}$ المرافقة

$(-١) \times \lim_{س \to ٠} \frac{٧ - ٧ + س^{٣}}{(س^{٣} + س^{٤})(٧ + \sqrt{٧ + س^{٣} - ٧})}$

$(-١) \times \lim_{س \to ٠} \frac{س^{٣}}{(س^{٣} + س^{٤})(٧ + \sqrt{٧ + س^{٣} - ٧})}$ تخرج عامل مشترك

$(-١) \times \lim_{س \to ٠} \frac{١ / س^{٣}}{س^{٣}(١+س)(٧ + \sqrt{٧ + س^{٣} - ٧})}$

$(-١) \times \frac{١}{(١+٠)(٧ + \sqrt{٧ + (٠)^{٣} - ٧})}$

$\Leftarrow \frac{-١}{(١)(٧ + \sqrt{٧})}$

$\frac{-١}{١٤} = \frac{-١}{٧ \times ٢}$ مقبولة

نهاية الاقتران متعدد القواعد (طـ شعب)

① يكون على الصورة التالية :

$$\text{نها}(س) = \begin{cases} \text{مدى} & ، \text{مجال} \\ \text{مدى} & ، \text{مجال} \end{cases}$$

② خطوات الحل :

① نبحث عن الرقم المطلوب حساب النهاية عنده وجود امام الرقم ، بعد المماثلة ولدينا حالتين :

قد لا نراه ابداً .
لكن نرفض ان يقع بعد المماثلة في احدى المجالات .
ولحساب النهاية فقط نعوض ذلك الرقم في القاعدة المقابلة له مباشرة .

قد نراه مرتين .
مرة امامه $س < P$
ومرة امامه $س > P$
لذلك تسمى نقطة تحول (تشعب)
ولحساب النهاية نحسب يسار (P) ويمين P

يسار (P): $س < P$ ⟵ نها $\text{ق}(س)$ ⟵ P^-
يمين P: $س > P$ ⟵ نها $\text{ق}(س)$ ⟵ P^+

ولدينا حالتين :

اذا نتج اليمين = اليسار = رقم ∴ النهاية موجودة = ذلك الرقم

اذا نتج : اليمين ≠ اليسار ∴ النهاية غير موجودة

هام جداً : النهاية تحسب من عند : $<$ ، $>$ ، $\neq$ ، $\leq$ ، $\geq$

ولا تحسب النهاية من عند المساواة ابداً .

أمثلة على نهاية متعدد القواعد (المتعقب)

(٥٧) إذا كان :

$$\text{قا}(س) = \begin{cases} ٢س+١ ، & ٠ \leq س < ٣ \\ س+٤ ، & ٣ \leq س \leq ٩ \end{cases}$$

أوجد : (أ) $\lim_{س \to ١}$ قا(س) (ب) $\lim_{س \to ٥}$ قا(س) (جـ) $\lim_{س \to ٣}$ قا(س)

الحل : (أ) $\lim_{س \to ١}$ قا(س) ← ① نأخذ بدلالة $(٢س+١)$ ← نبحث عنه بعد لقاصلة ① يقع بين $٠ \leq س < ٣$

$\therefore$ $\lim_{س \to ١}(٢س+١) = ٢ \times ١ + ١ = ٣$ ③

(ب) $\lim_{س \to ٥}$ قا(س) ← ⑤ نأخذ بدلالة $(س+٤)$ ← نبحث عنه بعد لقاصلة ⑤ يقع بين $٣ \leq س \leq ٩$

$\therefore$ $\lim_{س \to ٥}(س+٤) = ٥ + ٤ = ٩$ ⑨

(جـ) $\lim_{س \to ٣}$ قا(س) ← ③ نراه مرتين (نحوّل ليصبح)

يمين (٣) ← $س \to ٣^+$ ← $\lim_{س \to ٣^+}(س+٤) = ٣ + ٤ = ٧$

يسار (٣) ← $س \to ٣^-$ ← $\lim_{س \to ٣^-}(٢س+١) = ٢ \times ٣ + ١ = ٧$

$\therefore$ $\lim_{س \to ٣}$ قا(س) = ٧ ⑦

(٥٨) إذا كان :

$$\text{قا}(س) = \begin{cases} \frac{س^٢ - ١٦}{س - ٤} ، & ١ < س < ٤ \\ ٢س ، & ٤ \leq س < ٧ \\ \frac{٢س^٢ - ١٤س}{س - ٧} ، & ٧ < س \leq ١٢ \end{cases}$$

أوجد : (أ) $\lim_{س \to ٣}$ قا(س) (ب) $\lim_{س \to ٦}$ قا(س) (جـ) $\lim_{س \to ١٠}$ قا(س) (د) $\lim_{س \to ٤}$ قا(س) (هـ) $\lim_{س \to ٧}$ قا(س)

الحل : (أ) $\lim_{س \to ٣}$ قا(س) ← ③ تقع بين $١ < س < ٤$ ← نأخذ بدلالة $\frac{س^٢ - ١٦}{س - ٤}$

$\therefore$ $\lim_{س \to ٣} \frac{س^٢ - ١٦}{س - ٤} = \frac{(٣)^٢ - ١٦}{٣ - ٤} = \frac{٩ - ١٦}{-١}$

(ب) $\lim_{س \to ٦}$ قا(س) ← ⑥ تقع بين $٤ \leq س < ٧$ ← نأخذ بدلالة $٢س$

$\therefore$ $\lim_{س \to ٦} ٢س = ٢ \times ٦ = ١٢$

(جـ) $\lim_{س \to ١٠}$ قا(س) ← ⑩ تقع بين $٧ < س \leq ١٢$ ← نأخذ بدلالة $\frac{٢س^٢ - ١٤س}{س - ٧}$

$\therefore$ $\lim_{س \to ١٠} \frac{٢س^٢ - ١٤س}{س - ٧} = \frac{٢(١٠)^٢ - ١٤(١٠)}{١٠ - ٧}$

$= \frac{٦}{٣} = \frac{١٤ - ٤}{٣}$

(د) $\lim_{س \to ٤}$ قا(س) ← ④ تقع بين $١ < س < ٤$ ← نأخذ بدلالة $\frac{س^٢ - ١٦}{س - ٤}$

$\therefore$ $\lim_{س \to ٤} \frac{س^٢ - ١٦}{س - ٤} = \frac{٨ - ١٦}{٤ - ٤}$ ⑧

(هـ) $\lim_{س \to ٧}$ قا(س) ← ⑦ تقع بين $٤ \leq س < ٧$ ← نأخذ بدلالة $(٢س)$

$\therefore$ $\lim_{س \to ٧}(٢س) = ٢ \times ٧ = ١٤$ ⑭

(٥٩) إذا كان :

$$\text{قا}(س) = \begin{cases} ٢س+١ ، & ٠ \leq س < ٣ \\ س+٤ ، & ٣ \leq س \leq ٩ \end{cases}$$

أوجد : (أ) $\lim_{س \to ١}$ قا(س) (ب) $\lim_{س \to ٥}$ قا(س) (جـ) $\lim_{س \to ٣}$ قا(س)

الحل : (أ) $\lim_{س \to ١}$ قا(س) ← ① نأخذ بدلالة $(٢س+١)$ ← نبحث عنه بعد لقاصلة ① يقع بين $٠ \leq س < ٣$

$\therefore$ $\lim_{س \to ١}(٢س+١) = ٢ \times ١ + ١ = ٣$ ③

(ب) $\lim_{س \to ٥}$ قا(س) ← ⑤ نأخذ بدلالة $(س+٤)$ ← نبحث عنه بعد لقاصلة ⑤ يقع بين $٣ \leq س \leq ٩$

$\therefore$ $\lim_{س \to ٥}(س+٤) = ٥ + ٤ = ٩$ ⑨

(جـ) $\lim_{س \to ٣}$ قا(س) ← ③ نراه مرتين (نحوّل ليصبح)

يمين (٣) ← $س \to ٣^+$ ← $\lim_{س \to ٣^+}(س+٤) = ٣ + ٤ = ٧$

يسار (٣) ← $س \to ٣^-$ ← $\lim_{س \to ٣^-}(٢س+١) = ٢ \times ٣ + ١ = ٧$

$\therefore$ $\lim_{س \to ٣}$ قا(س) = ٧ ⑦

(٦٠) إذا كان :

$$\text{قا}(س) = \begin{cases} س^٢ + ١ ، & ٠ \leq س < ٥ \\ ٢س ، & ٥ \leq س \leq ٩ \end{cases}$$

أوجد : (أ) $\lim_{س \to ٥}$ قا(س) (ب) $\lim_{س \to ٣}$ قا(س) (جـ) $\lim_{س \to ٦}$ قا(س)

الحل : (أ) $\lim_{س \to ٥}$ قا(س) ← ⑤ نأخذ بدلالة $(س^٢ + ١)$ ← نبحث عنه بعد لقاصلة ⑤ يقع بين $٠ \leq س < ٥$

$\therefore$ $\lim_{س \to ٥}(س^٢ + ١) = (٥)^٢ + ١ = ٢٥ + ١ = ٢٦$ ⑳

(ب) $\lim_{س \to ٣}$ قا(س) ← ③ نراه مرتين (نحوّل ليصبح)

يمين (٣) ← $س \to ٣^+$ ← $\lim_{س \to ٣^+}(٢س) = ٢ \times ٣ = ٦$

يسار (٣) ← $س \to ٣^-$ ← $\lim_{س \to ٣^-}(س^٢ + ١) = (٣)^٢ + ١ = ٩ + ١ = ١٠$

$\therefore$ $\lim_{س \to ٣}$ قا(س) غير موجودة ⑤

(جـ) $\lim_{س \to ٦}$ قا(س) ← ⑥ نأخذ بدلالة $(٢س)$ ← نبحث عنه بعد لقاصلة ⑥ يقع بين $٥ < س \leq ٩$

$\therefore$ $\lim_{س \to ٦}(٢س) = ٢ \times ٦ = ١٢$ ⑫

① نهـا $\to$ $هـ(س)$

$س \to 4$ ← نراها من يمين ويسار (نحو 4)

يمين (4): $س > 4$

يسار (4): $س < 4$

نهـا $\to$ 4^+ $(س^2 - 2س)$

4×2

⑧

نهـا $\to$ 4^- $\frac{س^2 - 16}{س - 4}$

$\frac{16-16}{4-4} = \frac{(4)^2 - 16}{4-4}$

$\frac{صفر}{صفر}$ = غير معرفة

نحلل: نهـا $\to$ 4^- $\frac{(س-4)(س+4)}{س-4}$

$= 4+4 = ⑧$

⑧ = ⑧

∴ نهـا $\to$ 4 $هـ(س)$ موجودة وتساوي ⑧

⑤ نهـا $\to$ $هـ(س)$

$س \to 7$ ← نراها من يمين ويسار (نحو 7)

يمين (7): $س > 7$

يسار (7): $س < 7$

نهـا $\to$ 7^+ $\frac{س^2 - 14}{س - 7}$

نهـا $\to$ 7^- $(2س - 4)$

$2 \times 7 - 4$

$14 - 4$

10

$\frac{صفر}{صفر}$ = غير معرفة

نحلل: نهـا $\to$ 7^+ $\frac{2(س-7)}{(س-7)}$

$= 2$

∴ نهـا $\to$ 7 $هـ(س)$ غير موجودة

⑨ إذا كان:

$هـ(س) = \begin{cases} 10 + س^3 & ، س < 2 \\ 14 + س^2 & ، س > 2 \\ 9 & ، س = 2 \end{cases}$

لإستخدام نهايات البدا بإستخدام صورة

أوجد: ⓐ نهـا $\to$ $هـ(س)$ ⓑ نهـا $\to$ $هـ(س)$

$س \to 3$ $س \to 0$

ⓒ نهـا $\to$ $هـ(س)$

$س \to 2$

الحل: ⓐ نهـا $\to$ $هـ(س)$ ← ناخذ بدلالة الصغيرة $(10 + س^3)$

③ تقع $س > 2$

نهـا $\to$ 3 $(10 + س^3)$

$= 10 + (3)^3 = 10 + 27$

$= 37$ ③

ⓑ نهـا $\to$ $هـ(س)$ ← ناخذ بدلالة الصغيرة $(14 + س^2)$

⓪ يقع يمين $س < 2$

نهـا $\to$ 0 $(14 + س^2)$

$= 14 + (0)^2 = 14$ ⑫

ⓒ نهـا $\to$ $هـ(س)$

$س \to 2$ ← نراها من يمين ويسار (نحو 2)

يمين (2): $س > 2$

يسار (2): $س < 2$

نهـا $\to$ 2^+ $(10 + س^3)$

$10 + (2)^3$

⑱ $= 10 + 8$

نهـا $\to$ 2^- $(14 + س^2)$

$14 + (2)^2$

$14 + 4$

⑱ =

∴ نهـا $\to$ 2 $هـ(س)$ موجودة وتساوي ⑱

(٦٠) إذا كان :

$$\text{حا}(س) = \begin{cases} \frac{س^٢ + ك س - ١٢}{س - ٣} & ، س > ٣ \\ ٢س - ١ & ، س < ٣ \end{cases}$$

لا تستخدم في الحالة

بل تستخدم صورة

$$٥ \quad \text{حا}(٣) = ٥$$

أوجدي : (أ) $\lim_{س \to ٣} \text{حا}(س)$ (ب) $\lim_{س \to ٤} \text{حا}(س)$ (ج) $\lim_{س \to ٠} \text{حا}(س)$

الحل : (أ) $\lim_{س \to ٣} \text{حا}(س)$

نأخذ بدلاً منه $\frac{س^٢ + ك س - ١٢}{س - ٣}$

$س \to ٣$ يقع في $س > ٣$ ← ٥

$$\therefore \lim_{س \to ٣} \frac{س^٢ + ك س - ١٢}{س - ٣} = \frac{(٣)^٢ + ك(٣) - ١٢}{٣ - ٣}$$

$$\Leftarrow \frac{٣ك - ٣}{٠} \neq$$

(ب) $\lim_{س \to ٤} \text{حا}(س)$

نأخذ بدلاً منه $٢س - ١$

$س \to ٤$ يقع في $س < ٣$ ← ٤

$$\therefore \lim_{س \to ٤} (٢س - ١) = ٢ \times ٤ - ١$$

$$= ٨ - ١ = ٧$$

(ج) $\lim_{س \to ٣} \text{حا}(س)$

نأخذ بدلاً منه $\frac{س^٢ + ك س - ١٢}{س - ٣}$

$س \to ٣$ يقع في $س > ٣$ ← ٣

$$\therefore \lim_{س \to ٣} \frac{س^٢ + ك س - ١٢}{س - ٣} = \frac{(٣)^٢ + ك(٣) - ١٢}{٣ - ٣}$$

$$\Leftarrow \frac{٣ك - ٣}{٠} \neq$$

(٦١) اذا كان :

$$\text{حا}(س) = \begin{cases} ٢س + ٢ & ، س < ٥ \\ ١٢س - ٥ & ، س > ٥ \\ \frac{(١+ك)^٢ - ٣٦}{س - ٥} & ، س = ٥ \end{cases}$$

أوجدي : (أ) $\lim_{س \to ٥} \text{حا}(س)$ (ب) $\lim_{س \to ١} \text{حا}(س)$ (ج) $\lim_{س \to ٨} \text{حا}(س)$

الحل : (أ) $\lim_{س \to ٥} \text{حا}(س)$

نأخذ بدلاً منه $\frac{(١+ك)^٢ - ٣٦}{س - ٥}$

$س \to ٥$ يقع في $س = ٥$ ← ٨

$$\therefore \lim_{س \to ٥} \frac{(١+ك)^٢ - ٣٦}{س - ٥} = \frac{(١+ك)^٢ - ٣٦}{٥ - ٥}$$

$$\Leftarrow \frac{٣٦ - ٣٦}{٠} \neq$$

(ب) $\lim_{س \to ١} \text{حا}(س)$

نأخذ بدلاً منه $٢س + ٢$

$س \to ١$ يقع في $س < ٥$ ← ١

$$\therefore \lim_{س \to ١} (٢س + ٢) = ٢ \times ١ + ٢$$

$$= ٢ + ٢ = ٤$$

(ج) $\lim_{س \to ٨} \text{حا}(س)$

نأخذ بدلاً منه $\frac{(١+ك)^٢ - ٣٦}{س - ٥}$

$س \to ٨$ يقع في $س > ٥$ ← ٥

$$\therefore \lim_{س \to ٨} \frac{(١+ك)^٢ - ٣٦}{س - ٥} = \frac{(١+ك)^٢ - ٣٦}{٥ - ٥}$$

$$\Leftarrow \frac{٣٦ - ٣٦}{٠} \neq$$

(٦٢) إذا كان :

$$\text{حا}(س) = \begin{cases} ٢س + ٢ & ، س < ٥ \\ ١٢س - ٥ & ، س > ٥ \\ \frac{(١+ك)^٢ - ٣٦}{س - ٥} & ، س = ٥ \end{cases}$$

أوجدي : (أ) $\lim_{س \to ٥} \text{حا}(س)$ (ب) $\lim_{س \to ١} \text{حا}(س)$ (ج) $\lim_{س \to ٨} \text{حا}(س)$

الحل : (أ) $\lim_{س \to ٥} \text{حا}(س)$

نأخذ بدلاً منه $\frac{(١+ك)^٢ - ٣٦}{س - ٥}$

$س \to ٥$ يقع في $س = ٥$ ← ٨

$$\therefore \lim_{س \to ٥} \frac{(١+ك)^٢ - ٣٦}{س - ٥} = \frac{(١+ك)^٢ - ٣٦}{٥ - ٥}$$

$$\Leftarrow \frac{٣٦ - ٣٦}{٠} \neq$$

(ب) $\lim_{س \to ١} \text{حا}(س)$

نأخذ بدلاً منه $٢س + ٢$

$س \to ١$ يقع في $س < ٥$ ← ١

$$\therefore \lim_{س \to ١} (٢س + ٢) = ٢ \times ١ + ٢$$

$$= ٢ + ٢ = ٤$$

(ج) $\lim_{س \to ٨} \text{حا}(س)$

نأخذ بدلاً منه $\frac{(١+ك)^٢ - ٣٦}{س - ٥}$

$س \to ٨$ يقع في $س > ٥$ ← ٥

$$\therefore \lim_{س \to ٨} \frac{(١+ك)^٢ - ٣٦}{س - ٥} = \frac{(١+ك)^٢ - ٣٦}{٥ - ٥}$$

$$\Leftarrow \frac{٣٦ - ٣٦}{٠} \neq$$

(٦٣) إذا كان :

$$\text{حا}(س) = \begin{cases} \frac{س^٢ + ك س - ١٢}{س - ٣} & ، س > ٣ \\ ٢س - ١ & ، س < ٣ \end{cases}$$

$$٥ \quad \text{حا}(٣) = ٥$$

أوجدي : (أ) $\lim_{س \to ٣} \text{حا}(س)$ (ب) $\lim_{س \to ٤} \text{حا}(س)$ (ج) $\lim_{س \to ٠} \text{حا}(س)$

الحل : (أ) $\lim_{س \to ٣} \text{حا}(س)$

نأخذ بدلاً منه $\frac{س^٢ + ك س - ١٢}{س - ٣}$

$س \to ٣$ يقع في $س > ٣$ ← ٥

$$\therefore \lim_{س \to ٣} \frac{س^٢ + ك س - ١٢}{س - ٣} = \frac{(٣)^٢ + ك(٣) - ١٢}{٣ - ٣}$$

$$\Leftarrow \frac{٣ك - ٣}{٠} \neq$$

(ب) $\lim_{س \to ٤} \text{حا}(س)$

نأخذ بدلاً منه $٢س - ١$

$س \to ٤$ يقع في $س < ٣$ ← ٤

$$\therefore \lim_{س \to ٤} (٢س - ١) = ٢ \times ٤ - ١$$

$$= ٨ - ١ = ٧$$

(ج) $\lim_{س \to ٣} \text{حا}(س)$

نأخذ بدلاً منه $\frac{س^٢ + ك س - ١٢}{س - ٣}$

$س \to ٣$ يقع في $س > ٣$ ← ٣

$$\therefore \lim_{س \to ٣} \frac{س^٢ + ك س - ١٢}{س - ٣} = \frac{(٣)^٢ + ك(٣) - ١٢}{٣ - ٣}$$

$$\Leftarrow \frac{٣ك - ٣}{٠} \neq$$

(٦٤) إذا كان :

$$\text{حا}(س) = \begin{cases} \frac{س^٢ + ك س - ١٢}{س - ٣} & ، س > ٣ \\ ٢س - ١ & ، س < ٣ \end{cases}$$

$$٥ \quad \text{حا}(٣) = ٥$$

أوجدي : (أ) $\lim_{س \to ٣} \text{حا}(س)$ (ب) $\lim_{س \to ٤} \text{حا}(س)$ (ج) $\lim_{س \to ٠} \text{حا}(س)$

الحل : (أ) $\lim_{س \to ٣} \text{حا}(س)$

نأخذ بدلاً منه $\frac{س^٢ + ك س - ١٢}{س - ٣}$

$س \to ٣$ يقع في $س > ٣$ ← ٥

$$\therefore \lim_{س \to ٣} \frac{س^٢ + ك س - ١٢}{س - ٣} = \frac{(٣)^٢ + ك(٣) - ١٢}{٣ - ٣}$$

$$\Leftarrow \frac{٣ك - ٣}{٠} \neq$$

(ب) $\lim_{س \to ٤} \text{حا}(س)$

نأخذ بدلاً منه $٢س - ١$

$س \to ٤$ يقع في $س < ٣$ ← ٤

$$\therefore \lim_{س \to ٤} (٢س - ١) = ٢ \times ٤ - ١$$

$$= ٨ - ١ = ٧$$

(ج) $\lim_{س \to ٣} \text{حا}(س)$

نأخذ بدلاً منه $\frac{س^٢ + ك س - ١٢}{س - ٣}$

$س \to ٣$ يقع في $س > ٣$ ← ٣

$$\therefore \lim_{س \to ٣} \frac{س^٢ + ك س - ١٢}{س - ٣} = \frac{(٣)^٢ + ك(٣) - ١٢}{٣ - ٣}$$

$$\Leftarrow \frac{٣ك - ٣}{٠} \neq$$

(٦٥) إذا كان :

$$\text{حا}(س) = \begin{cases} ٢س + ٢ & ، س < ٥ \\ ١٢س - ٥ & ، س > ٥ \\ \frac{(١+ك)^٢ - ٣٦}{س - ٥} & ، س = ٥ \end{cases}$$

أوجدي : (أ) $\lim_{س \to ٥} \text{حا}(س)$ (ب) $\lim_{س \to ١} \text{حا}(س)$ (ج) $\lim_{س \to ٨} \text{حا}(س)$

الحل : (أ) $\lim_{س \to ٥} \text{حا}(س)$

نأخذ بدلاً منه $\frac{(١+ك)^٢ - ٣٦}{س - ٥}$

$س \to ٥$ يقع في $س = ٥$ ← ٨

$$\therefore \lim_{س \to ٥} \frac{(١+ك)^٢ - ٣٦}{س - ٥} = \frac{(١+ك)^٢ - ٣٦}{٥ - ٥}$$

$$\Leftarrow \frac{٣٦ - ٣٦}{٠} \neq$$

(ب) $\lim_{س \to ١} \text{حا}(س)$

نأخذ بدلاً منه $٢س + ٢$

$س \to ١$ يقع في $س < ٥$ ← ١

$$\therefore \lim_{س \to ١} (٢س + ٢) = ٢ \times ١ + ٢$$

$$= ٢ + ٢ = ٤$$

(ج) $\lim_{س \to ٨} \text{حا}(س)$

نأخذ بدلاً منه $\frac{(١+ك)^٢ - ٣٦}{س - ٥}$

$س \to ٨$ يقع في $س > ٥$ ← ٥

$$\therefore \lim_{س \to ٨} \frac{(١+ك)^٢ - ٣٦}{س - ٥} = \frac{(١+ك)^٢ - ٣٦}{٥ - ٥}$$

$$\Leftarrow \frac{٣٦ - ٣٦}{٠} \neq$$

(٦٦) إذا كان :

$$\text{حا}(س) = \begin{cases} \frac{س^٢ + ك س - ١٢}{س - ٣} & ، س > ٣ \\ ٢س - ١ & ، س < ٣ \end{cases}$$

$$٥ \quad \text{حا}(٣) = ٥$$

أوجدي : (أ) $\lim_{س \to ٣} \text{حا}(س)$ (ب) $\lim_{س \to ٤} \text{حا}(س)$ (ج) $\lim_{س \to ٠} \text{حا}(س)$

الحل : (أ) $\lim_{س \to ٣} \text{حا}(س)$

نأخذ بدلاً منه $\frac{س^٢ + ك س - ١٢}{س - ٣}$

$س \to ٣$ يقع في $س > ٣$ ← ٥

$$\therefore \lim_{س \to ٣} \frac{س^٢ + ك س - ١٢}{س - ٣} = \frac{(٣)^٢ + ك(٣) - ١٢}{٣ - ٣}$$

$$\Leftarrow \frac{٣ك - ٣}{٠} \neq$$

(ب) $\lim_{س \to ٤} \text{حا}(س)$

نأخذ بدلاً منه $٢س - ١$

$س \to ٤$ يقع في $س < ٣$ ← ٤

$$\therefore \lim_{س \to ٤} (٢س - ١) = ٢ \times ٤ - ١$$

$$= ٨ - ١ = ٧$$

(ج) $\lim_{س \to ٣} \text{حا}(س)$

نأخذ بدلاً منه $\frac{س^٢ + ك س - ١٢}{س - ٣}$

$س \to ٣$ يقع في $س > ٣$ ← ٣

$$\therefore \lim_{س \to ٣} \frac{س^٢ + ك س - ١٢}{س - ٣} = \frac{(٣)^٢ + ك(٣) - ١٢}{٣ - ٣}$$

$$\Leftarrow \frac{٣ك - ٣}{٠} \neq$$

(٦٧) إذا كان :

$$\text{حا}(س) = \begin{cases} ٢س + ٢ & ، س < ٥ \\ ١٢س - ٥ & ، س > ٥ \\ \frac{(١+ك)^٢ - ٣٦}{س - ٥} & ، س = ٥ \end{cases}$$

أوجدي : (أ) $\lim_{س \to ٥} \text{حا}(س)$ (ب) $\lim_{س \to ١} \text{حا}(س)$ (ج) $\lim_{س \to ٨} \text{حا}(س)$

الحل : (أ) $\lim_{س \to ٥} \text{حا}(س)$

نأخذ بدلاً منه $\frac{(١+ك)^٢ - ٣٦}{س - ٥}$

$س \to ٥$ يقع في $س = ٥$ ← ٨

$$\therefore \lim_{س \to ٥} \frac{(١+ك)^٢ - ٣٦}{س - ٥} = \frac{(١+ك)^٢ - ٣٦}{٥ - ٥}$$

$$\Leftarrow \frac{٣٦ - ٣٦}{٠} \neq$$

(ب) $\lim_{س \to ١} \text{حا}(س)$

نأخذ بدلاً منه $٢س + ٢$

$س \to ١$ يقع في $س < ٥$ ← ١

$$\therefore \lim_{س \to ١} (٢س + ٢) = ٢ \times ١ + ٢$$

$$= ٢ + ٢ = ٤$$

(ج) $\lim_{س \to ٨} \text{حا}(س)$

نأخذ بدلاً منه $\frac{(١+ك)^٢ - ٣٦}{س - ٥}$

$س \to ٨$ يقع في $س > ٥$ ← ٥

$$\therefore \lim_{س \to ٨} \frac{(١+ك)^٢ - ٣٦}{س - ٥} = \frac{(١+ك)^٢ - ٣٦}{٥ - ٥}$$

$$\Leftarrow \frac{٣٦ - ٣٦}{٠} \neq$$

(٦٨) إذا كان :

$$\text{حا}(س) = \begin{cases} \frac{س^٢ + ك س - ١٢}{س - ٣} & ، س > ٣ \\ ٢س - ١ & ، س < ٣ \end{cases}$$

$$٥ \quad \text{حا}(٣) = ٥$$

أوجدي : (أ) $\lim_{س \to ٣} \text{حا}(س)$ (ب) $\lim_{س \to ٤} \text{حا}(س)$ (ج) $\lim_{س \to ٠} \text{حا}(س)$

الحل : (أ) $\lim_{س \to ٣} \text{حا}(س)$

نأخذ بدلاً منه $\frac{س^٢ + ك س - ١٢}{س - ٣}$

$س \to ٣$ يقع في $س > ٣$ ← ٥

$$\therefore \lim_{س \to ٣} \frac{س^٢ + ك س - ١٢}{س - ٣} = \frac{(٣)^٢ + ك(٣) - ١٢}{٣ - ٣}$$

$$\Leftarrow \frac{٣ك - ٣}{٠} \neq$$

(ب) $\lim_{س \to ٤} \text{حا}(س)$

نأخذ بدلاً منه $٢س - ١$

$س \to ٤$ يقع في $س < ٣$ ← ٤

$$\therefore \lim_{س \to ٤} (٢س - ١) = ٢ \times ٤ - ١$$

$$= ٨ - ١ = ٧$$

(ج) $\lim_{س \to ٣} \text{حا}(س)$

نأخذ بدلاً منه $\frac{س^٢ + ك س - ١٢}{س - ٣}$

$س \to ٣$ يقع في $س > ٣$ ← ٣

$$\therefore \lim_{س \to ٣} \frac{س^٢ + ك س - ١٢}{س - ٣} = \frac{(٣)^٢ + ك(٣) - ١٢}{٣ - ٣}$$

$$\Leftarrow \frac{٣ك - ٣}{٠} \neq$$

(٦٩) إذا كان :

$$\text{حا}(س) = \begin{cases} ٢س + ٢ & ، س < ٥ \\ ١٢س - ٥ & ، س > ٥ \\ \frac{(١+ك)^٢ - ٣٦}{س - ٥} & ، س = ٥ \end{cases}$$

أوجدي : (أ) $\lim_{س \to ٥} \text{حا}(س)$ (ب) $\lim_{س \to ١} \text{حا}(س)$ (ج) $\lim_{س \to ٨} \text{حا}(س)$

الحل : (أ) $\lim_{س \to ٥} \text{حا}(س)$

نأخذ بدلاً منه $\frac{(١+ك)^٢ - ٣٦}{س - ٥}$

$س \to ٥$ يقع في $س = ٥$ ← ٨

$$\therefore \lim_{س \to ٥} \frac{(١+ك)^٢ - ٣٦}{س - ٥} = \frac{(١+ك)^٢ - ٣٦}{٥ - ٥}$$

$$\Leftarrow \frac{٣٦ - ٣٦}{٠} \neq$$

(ب) $\lim_{س \to ١} \text{حا}(س)$

نأخذ بدلاً منه $٢س + ٢$

$س \to ١$ يقع في $س < ٥$ ← ١

$$\therefore \lim_{س \to ١} (٢س + ٢) = ٢ \times ١ + ٢$$

$$= ٢ + ٢ = ٤$$

(ج) $\lim_{س \to ٨} \text{حا}(س)$

نأخذ بدلاً منه $\frac{(١+ك)^٢ - ٣٦}{س - ٥}$

$س \to ٨$ يقع في $س > ٥$ ← ٥

$$\therefore \lim_{س \to ٨} \frac{(١+ك)^٢ - ٣٦}{س - ٥} = \frac{(١+ك)^٢ - ٣٦}{٥ - ٥}$$

$$\Leftarrow \frac{٣٦ - ٣٦}{٠} \neq$$

(٦٢) إذا كان :

$$\text{قا}(س) = \begin{cases} \dfrac{س^{3}-٦٤}{س-٤} & ، س \neq ٤ \\ ٢٥ & ، س = ٤ \end{cases}$$

لا تستخدم في الحل بل صورة

أوجد :

(أ) $\lim_{س \to ٣} \text{قا}(س)$

$$\lim_{س \to ٣} \frac{س^{3}-٦٤}{س-٤} = \frac{(٣)^{3}-٦٤}{٣-٤} = \frac{-٢٧-٦٤}{-١} = ٣٧$$

(ب) $\lim_{س \to ٠} \text{قا}(س)$

$$\lim_{س \to ٠} \frac{س^{3}-٦٤}{س-٤} = \frac{(٠)^{3}-٦٤}{٤-(٠)} = \frac{-٦٤}{٤} = -١٦$$

(ج) $\lim_{س \to ٤} \text{قا}(س)$

$$\lim_{س \to ٤} \frac{س^{3}-٦٤}{س-٤} = \frac{(٤)^{3}-٦٤}{٤-٤} = \frac{٦٤-٦٤}{٠} = \frac{٠}{٠}$$

نأخذ $\frac{س^{3}-٦٤}{س-٤}$

$$\lim_{س \to ٤} \frac{(س-٤)(س^{2}+٤س+١٦)}{(س-٤)} = (٤)^{2}+٤(٤)+١٦ = ١٦+١٦+١٦ = ٤٨$$

أيضاً لأي هذه المناطق $س \to ٤$ ، $س > ٤$ لذلك من عدم المساواة حتى لو كان الدور الأصل

(د) $\lim_{س \to ٤} \text{قا}(س)$

$$\lim_{س \to ٤} \frac{س^{3}-٦٤}{س-٤} = \frac{(٤)^{3}-٦٤}{٤-٤} = \frac{٦٤-٦٤}{٠} = \frac{٠}{٠}$$

نأخذ $\frac{س^{3}-٦٤}{س-٤}$

$$\lim_{س \to ٤} \frac{(س-٤)(س^{2}+٤س+١٦)}{(س-٤)} = (٤)^{2}+٤(٤)+١٦ = ١٦+١٦+١٦ = ٤٨$$

(٦٣) إذا كان :

$$\text{قا}(س) = \begin{cases} \dfrac{س^{3}-١}{س-١} & ، س \neq ١ \\ ١٠ & ، س = ١ \end{cases}$$

لا تستخدم في الحل بل صورة

أوجد :

(أ) $\lim_{س \to ١} \text{قا}(س)$

$$\lim_{س \to ١} \frac{س^{3}-١}{س-١} = \frac{(٢)^{3}-١}{٢-١} = \frac{٨-١}{١} = ٧$$

(ب) $\lim_{س \to ٠} \text{قا}(س)$

$$\lim_{س \to ٠} \frac{س^{3}-١}{س-١} = \frac{(-١)^{3}-١}{-١-١} = \frac{-١-١}{-٢} = \frac{-٢}{-٢} = ١$$

(ج) $\lim_{س \to ١} \text{قا}(س)$

$$\lim_{س \to ١} \frac{س^{3}-١}{س-١} = \frac{(١)^{3}-١}{١-١} = \frac{٠}{٠}$$

نأخذ $\frac{س^{3}-١}{س-١}$

$$\lim_{س \to ١} \frac{(س-١)(س^{2}+س+١)}{(س-١)} = (١)^{2}+(١)+١ = ٣$$

(د) $\lim_{س \to ١} \text{قا}(س)$

$$\lim_{س \to ١} \frac{س^{3}-١}{س-١} = \frac{(١)^{3}-١}{١-١} = \frac{٠}{٠}$$

نأخذ $\frac{س^{3}-١}{س-١}$

$$\lim_{س \to ١} \frac{(س-١)(س^{2}+س+١)}{(س-١)} = (١)^{2}+(١)+١ = ٣$$

نحلل : $س^{3}-١$ على الأصل دور واصلة

نقسم على تقريبهم هو الرقم الموجود اصلاً $(١)^{3}-١$ على الكعب

$$س^{3}-١ = (س-١)(س^{2}+س+١)$$

نزيح

$$\therefore \lim_{س \to ١} \frac{(س-١)(س^{2}+س+١)}{(س-١)}$$

نزيح

$$= (١)^{2}+(١)+١ = ٣$$

(٦٤) إذا كان :

$$\text{قا}(س) = \begin{cases} \dfrac{س^{3}-٦٤}{س-٤} & ، س \neq ٤ \\ ٢٥ & ، س = ٤ \end{cases}$$

لا تستخدم في الحل بل صورة

أوجد :

(أ) $\lim_{س \to ٣} \text{قا}(س)$

$$\lim_{س \to ٣} \frac{س^{3}-٦٤}{س-٤} = \frac{(٣)^{3}-٦٤}{٣-٤} = \frac{-٢٧-٦٤}{-١} = ٣٧$$

(ب) $\lim_{س \to ٠} \text{قا}(س)$

$$\lim_{س \to ٠} \frac{س^{3}-٦٤}{س-٤} = \frac{(٠)^{3}-٦٤}{٤-(٠)} = \frac{-٦٤}{٤} = -١٦$$

(ج) $\lim_{س \to ٤} \text{قا}(س)$

$$\lim_{س \to ٤} \frac{س^{3}-٦٤}{س-٤} = \frac{(٤)^{3}-٦٤}{٤-٤} = \frac{٦٤-٦٤}{٠} = \frac{٠}{٠}$$

نأخذ $\frac{س^{3}-٦٤}{س-٤}$

$$\lim_{س \to ٤} \frac{(س-٤)(س^{2}+٤س+١٦)}{(س-٤)} = (٤)^{2}+٤(٤)+١٦ = ١٦+١٦+١٦ = ٤٨$$

(د) $\lim_{س \to ٤} \text{قا}(س)$

$$\lim_{س \to ٤} \frac{س^{3}-٦٤}{س-٤} = \frac{(٤)^{3}-٦٤}{٤-٤} = \frac{٦٤-٦٤}{٠} = \frac{٠}{٠}$$

نأخذ $\frac{س^{3}-٦٤}{س-٤}$

$$\lim_{س \to ٤} \frac{(س-٤)(س^{2}+٤س+١٦)}{(س-٤)} = (٤)^{2}+٤(٤)+١٦ = ١٦+١٦+١٦ = ٤٨$$

أيضاً لأي هذه المناطق $س \to ٤$ ، $س > ٤$ لذلك من عدم المساواة حتى لو كان الدور الأصل

(٦٤) إذا كان: $و(س) = \begin{cases} \frac{س-٢}{س^٢-٥س+٦} & ، س \neq ٢ ، س \neq ٣ \\ ٧ & ، س = ٢ ، س = ٣ \end{cases}$

هل $و(س)$ لها نهاية عند $س = ٢$ ؟ بل صور

أوجد: (أ) $\lim_{س \to ٥} و(س)$

الحل: (أ) $\lim_{س \to ٥} و(س) = \lim_{س \to ٥} \frac{س-٢}{س^٢-٥س+٦}$

$= \frac{٥-٢}{(٥)^٢-٥(٥)+٦} = \frac{٣}{٦+٢٥-٢٥} = \frac{١}{٢}$

(ب) $\lim_{س \to ٢} و(س)$

(جـ) $\lim_{س \to ٣} و(س)$

(ب) $\lim_{س \to ٢} و(س)$

نأخذ $\frac{س-٢}{س^٢-٥س+٦}$

الحل: (ب) $\lim_{س \to ٢} و(س)$ (لا توجد)

تعلل: $س \to ٢$ من $س \neq ٢$ ، $س \neq ٣$

$\therefore \lim_{س \to ٢} \frac{س-٢}{س^٢-٥س+٦} = \frac{٢-٢}{(٢)^٢-٥(٢)+٦} = \frac{صفر}{صفر}$ غير معتول

خلل: $\lim_{س \to ٢} \frac{(س-٢)}{(س-٣)(س-٢)} = \frac{١}{٣-٢} = ١$ معتولة

(جـ) $\lim_{س \to ٣} و(س)$

نأخذ $\frac{س-٢}{س^٢-٥س+٦}$

تعلل: $س \to ٣$ من $س \neq ٢$ ، $س \neq ٣$

$\therefore \lim_{س \to ٣} \frac{س-٢}{س^٢-٥س+٦} = \frac{٣-٢}{(٣)^٢-٥(٣)+٦} = \frac{١}{٩-١٥+٦}$

$\frac{١}{صفر}$ غير معتولة

(٦٥) إذا كان: $و(س) = \begin{cases} ٢س-١ & ، س \in ص \\ ٤-س+٣ & ، س \notin ص \end{cases}$

أوجد: (أ) $\lim_{س \to ٥} و(س)$

(ب) $\lim_{س \to ٢} و(س)$

(جـ) $\lim_{س \to ٣,٥} و(س)$

معنى الاعلاه الصحيحة

الحل: عبارة $س \in ص$ معناها العبارة الاعلاه الصحيحة

$س \notin ص$ معناها

دائماً نأخذ النهاية من عند $س \notin ص$

(أ) $\lim_{س \to ٥} و(س)$

معنى النهاية معناها اقتراب يمين ويسار

٤,٩ ، ٥,١

لذلك نعوض في $س \notin ص$

$\therefore$ نهـا $(٤-س+٣) = ٤ \times ٢ + ٣ = ٨ + ٣ = ١١$

(ب) $\lim_{س \to ٢} و(س)$

نقف الاسلوب

يسار ٤,٩ ، يمين ٥,١

$\therefore$ نعوض في $س \notin ص$

$\therefore$ نهـا $(٤-س+٣) = ٤ \times ٥ + ٣ = ٢٣$

(جـ) $\lim_{س \to ٣,٥} و(س)$

نقف الاسلوب

يسار ٣,٤ ، يمين ٣,٦

نعوض في $س \notin ص$

$\therefore$ نهـا $(٤-س+٣) = ٤ \times ٣,٥ + ٣ = ١٥$

إيجاد ثوابت إذا أعطي لنا جواب النهاية

خطوات الحل: ① نحسب النهاية

② نساوي جواب النهاية الذي وجدناه بالجواب المعطى لنا

(٢١) إذا كانت:

$$\text{نهـا}_{س \to ٢} \left(س^{٢} + م س - ٦\right) = ١٠$$

فما قيمة الثابت م ؟

الحل: ① نحسب النهاية بالتعويض المباشر:

$$(٢)^{٢} + م(٢) - ٦$$

$$\Leftarrow ٤ + ٢م - ٦ \Leftarrow ٢م - ٢$$

هذا الجواب نساويه بالجواب المعطى لنا وهو ١٠

② نساوي:

$$٢م - ٢ = ١٠$$

$$\Leftarrow ٢م = ١٢ \Leftarrow \frac{٢م}{٢} = \frac{١٢}{٢}$$

$$\therefore م = ٦$$

(٢٧) إذا كانت

$$\text{نهـا}_{س \to ٣} \frac{م(س-١)^{٢} + ٢م - س}{٢ س - ١} = ٤$$

فما قيمة الثابت م ؟

الحل: ① نحسب النهاية بالتعويض المباشر:

$$\frac{م(٣-١)^{٢} + ٢م(٣) - ٣}{٢(٣) - ١}$$

$$\Leftarrow \frac{٤م + ٢م(٣)}{٥} \Leftarrow \frac{٤م + ٣م}{٥}$$

هذا الجواب نساويه بالجواب المعطى لنا

② نساوي $\frac{٧م}{٥} = \frac{٤}{١}$

بالضرب المتبادلي:

$$٧م = ٢٠$$

$$\Leftarrow \frac{٧م}{٧} = \frac{٢٠}{٧}$$

$$\therefore م = \frac{٢٠}{٧}$$

(٢٨) إذا كانت:

$$\text{نهـا}_{س \to م} \left(س^{٢} - ٤ س\right) = -٣$$

فما قيمة الثابت م ، حيث م > ١ ؟

الحل: ① نحسب النهاية بالتعويض المباشر:

$$(م)^{٢} - ٤م \Leftarrow م^{٢} - ٤م$$

هذا الجواب نساويه بالجواب المعطى لنا

② نساويه: $م^{٢} - ٤م = -٣$

$$م^{٢} - ٤م + ٣ = صفر$$

$$(م - ٣)(م - ١) = صفر$$

إما: $م - ٣ = صفر$ أو: $م - ١ = صفر$

$$م = ٣ \qquad م = ١$$

مقبولة — تهمل لأن الطلب م > ١

كوني على امتداد الساحل جيلاً ، وكوني انت دولتك الأخرى حين تسقط خلفاء كل الدول

(٦٩) إذا كان :

$$\text{قا}(س) = \begin{cases} ٢س^{٢} - ٦س + ٩ & ، س < ٢ \\ ٤س + ٨ & ، س \geq ٢ \end{cases}$$

وكانت : نهـا قا (س) موجودة ، فما قيمة الثابت م ؟

س ← ٢

الحل : بما أن : نهـا قا (س) موجودة

س ← ٢

نهـا قا (س) نراها من جهتين (نحو ٢)

س ← ٢

يسار (٢) : $س < ٢$ ، نهـا $(٤س + ٨)$ ، $س \to ٢$

$٤(٢) + ٨$

$٨ + ٨$

١٦

يمين (٢) : $س \geq ٢$ ، نهـا $(م س^{٢} - ٦س)$ ، $س \to ٢^{+}$

$م(٢)^{٢} - ٦(٢)$

$٤م - ١٢$

اجباري متساويان

$\therefore ٤م - ١٢ = ١٦$

$+١٢ \quad +١٢$

$٤م = ٢٨$

$\frac{٤م}{٤} = \frac{٢٨}{٤}$

$م = ٧$

(٧٠) إذا كان :

$$\text{قا}(س) = \begin{cases} ٢م س^{٢} - ب & ، س < ٣ \\ ٢س + م & ، س \geq ٣ \end{cases}$$

قا (س) موجودة و متصلة (٨)

وكانت : نهـا قا (س) موجودة

س ← ٣

ما قيمة الثوابت (م ، ب) ؟

الحل : بما أن : نهـا قا (س) موجودة و متصلة (٨)

س ← ٣

نهـا قا (س) نراها من جهتين (نحو ٣)

س ← ٣

يسار (٣) : $س < ٣$ ، نهـا $(٢م س^{٢} - ب)$ ، $س \to ٣^{-}$

$٢م(٣)^{٢} - ب$

$١٨م - ب$

يمين (٣) : $س \geq ٣$ ، نهـا $(م + ٢س)$ ، $س \to ٣^{+}$

$م + ٢(٣)$

$م + ٦$

اجباري متساويان

$\therefore ١٨م - ب = م + ٦$

$-م \quad -٦$

$١٧م - ب = ٦$

$٣ \times$ ..... $٥١م - ٣ب = ١٨$

$-٢ \times$ ..... $-٣٤م + ٣ب = -١٦$

$-١٧م = ٢$

$\frac{-١٧م}{-١٧} = \frac{٢}{-١٧}$

$م = -\frac{٢}{١٧}$

$١٧(-\frac{٢}{١٧}) - ب = ٦$

$-٢ - ب = ٦$

$+٢ \quad +٢$

$-ب = ٨$

$ب = -٨$

$\therefore (م ، ب) = (-\frac{٢}{١٧} ، -٨)$

(٧١) إذا كان :

$$\text{قا}(س) = \begin{cases} م(س-٤)^{٢} - ٦ & ، س < ٥ \\ ب س^{٢} - ٣س & ، س > ٥ \\ ٧ & ، س = ٥ \end{cases}$$

لا تستخدم في الحالات الخاصة بل صورة

وكانت : نهـا قا (س) موجودة وتساوي (١٠)

س ← ٥

ما قيمة الثوابت (م ، ب) ؟

الحل : بما أن : نهـا قا (س) موجودة وتساوي (١٠)

س ← ٥

نهـا قا (س) نراها من جهتين (نحو ٥)

س ← ٥

يسار (٥) : $س < ٥$ ، نهـا $(م(س-٤)^{٢} - ٦)$ ، $س \to ٥^{-}$

$م(١)^{٢} - ٦$

$م - ٦$

يمين (٥) : $س \geq ٥$ ، نهـا $(ب س^{٢} - ٣س)$ ، $س \to ٥^{+}$

$ب(٥)^{٢} - ٣(٥)$

$٢٥ب - ١٥$

اجباري

$م - ٦ = ٢٥ب - ١٥$

$-٢٥ب \quad +٦ \quad +٦$

$م - ٢٥ب = -٩$

$-م \quad -م$

$-٢٥ب = -م - ٩$

$\frac{-٢٥ب}{-٢٥} = \frac{-م - ٩}{-٢٥}$

$ب = \frac{م + ٩}{٢٥}$

٩ - ٢ب = ١٠ ... ①

٢٥ب - ٢ = ١٠ ... ②

② × ٢٥ : ٢٥ب = ٢٥٠

① × ٢ : ٢ب = ٢٠

٢٥ب - ٢ب = ٢٥٠ - ٢٠

٢٣ب = ٢٣٠

ب = ١٠

٩ - ٢(١٠) = ٩ - ٢٠ = ١٦

∴ (٩ ، ب) = (١٦ ، ١٠)

---

(٧٢) إذا كان :

$$\text{هـ}(س) = \begin{cases} ٩ - س^{٣} - ٢ب س^{٢} & ، س \leq ١ \\ ٩ - س^{٢} + ب س & ، ١ < س < ١٤ \\ ١ & ، س = ١٤ \end{cases}$$

لا تتكامل في النهايات بل صورة

وكانت : نهـا هـ(س) موجودة وتساوي (٤)

س ← ١

ما قيمة الثوابت (٩ ، ب) ؟

الحل : بما أن : نهـا هـ(س) موجودة وتساوي (٤)

س ← ١

نهـا ① ← نهـا مرتين (نحو ١)

س ← ١ — يسار (١) — يمين (١)

س < ١ — س > ١

نهـا (٩ - س^٣ - ٢ب س^٢) — نهـا (٩ - س^٢ + ب س)

س ← ١+ — س ← ١-

٩ - (١)^٣ - ٢ب(١)^٢ — ٩ - (١)^٢ + ب(١)

٩ - ٢ب — ٩ + ب

إجبارك تناديهم

٩ - ٢ب = ٩ + ب

وتساوي ④

ولأن كل معادلة تحوي على مرتين

∴ نضع المعادلتين فوق بعض

ونحلهم بالحذف او التعويض او الطرح

---

(٧٣) إذا كان :

$$\text{هـ}(س) = \begin{cases} ٩ س^{٢} + ب س & ، س \leq ٢ \\ ٩ س^{٣} - ٣ ب س & ، س > ٢ \end{cases}$$

وكانت : نهـا هـ(س) موجودة وتساوي (٥)

س ← ٢

ما قيمة الثوابت (٩ ، ب) ؟

الحل : بما أن : نهـا هـ(س) موجودة وتساوي (٥)

س ← ٢

نهـا ① ← نهـا مرتين (نحو ٢)

س ← ٢ — يسار (٢) — يمين (٢)

س < ٢ — س ≥ ٢

نهـا (٩ س^٢ + ب س) — نهـا (٩ س^٣ - ٣ ب س)

س ← ٢- — س ← ٢+

٩ (٢)^٢ + ب(٢) — ٩ (٢)^٣ - ٣ ب(٢)

٤ ٩ + ٢ ب — ٢٨ - ٦ ب

إجبارك

٤ ٩ + ٢ ب = ٢٨ - ٦ ب

وتساوي ⑤

$٢أ + ٤ب = ٥$ ④ ← ①

$٦ب - أ = ٥$ ① ← ③

نضرب ③ × ٤ ، ① × ١

بالطرح يزول طرف الاول

$-أ - ٤ب = -٥$ ③

$أ + ٤ب = ٥$ ①

$٥ب = ٠$

$ب = ٠$

نعوض في ① او ③ والافضل التي تحوي على ⊕ .

$٢أ + ٤ب = ٥$

$٢أ + ٤(٠) = ٥$

$٢أ = ٥$

$أ = \frac{٥}{٢}$

$\therefore (أ ، ب) = (\frac{٥}{٢} ، ٠)$

$٢أ + ٤ب = ٤٠$ ③

$٣أ - ٤ب = ٢٠$ ④

بالجمع

$٥أ = ٦٠$

$أ = ١٢$

نعوض في ③

$٢(١٢) + ٤ب = ٤٠$

$٢٤ + ٤ب = ٤٠$

$٤ب = ١٦$

$ب = ٤$

$\therefore (أ ، ب) = (١٢ ، ٤)$

$٣أ + ٢ب = ٠$

$٣(\frac{-٢}{٣}ب) + ٢ب = ٠$

$-٢ب + ٢ب = ٠$

$٠ = ٠$

$\therefore$ عدد الحلول ∞

$٣أ + ٢ب = ٥$

$٣(\frac{-٢}{٣}ب + ٥) + ٢ب = ٠$

$-٢ب + ١٥ + ٢ب = ٠$

$١٥ = ٠$

$\therefore$ عدد الحلول $= ٠$

② النهاية من الأشكال المرسومة :

خطوات الحل : ① نقترب من العدد المطلوب حساب النهاية عنده والموجود على محور السينات .

من اليمين
- اكبر قدر ممكن (الرجاء ترك مسافة بسيطة عن الرقم)
- لا نصطدم بالرقم ابدا
- تنزل ونصعد بخط مستقيم

ولدينا حالتين :

قد نصطدم مرة واحدة . وعندها نتمكن على محور الصادات ، فيكون هو الجواب المطلوب .

قد لا نصطدم ولا مرة وعندها الجواب غير موجود

من اليسار
نفس السلوك من اليمين .

هام جداً : النهاية نصطدم بكل شيء : مستقيم ، منحنى ، حلقة مفتوحة ، حلقة مغلقة ، ....

اما : الصورة عند (رقم) = فهي فقط نصطدم باللون القائم

مهما كان نوعه : حلقة قائمة ، مستقيم قائم ، منحنى قائم .

ولإيجاد الصورة فابتدأ على الرقم مباشرة وفقط نصطدم باللون القائم .

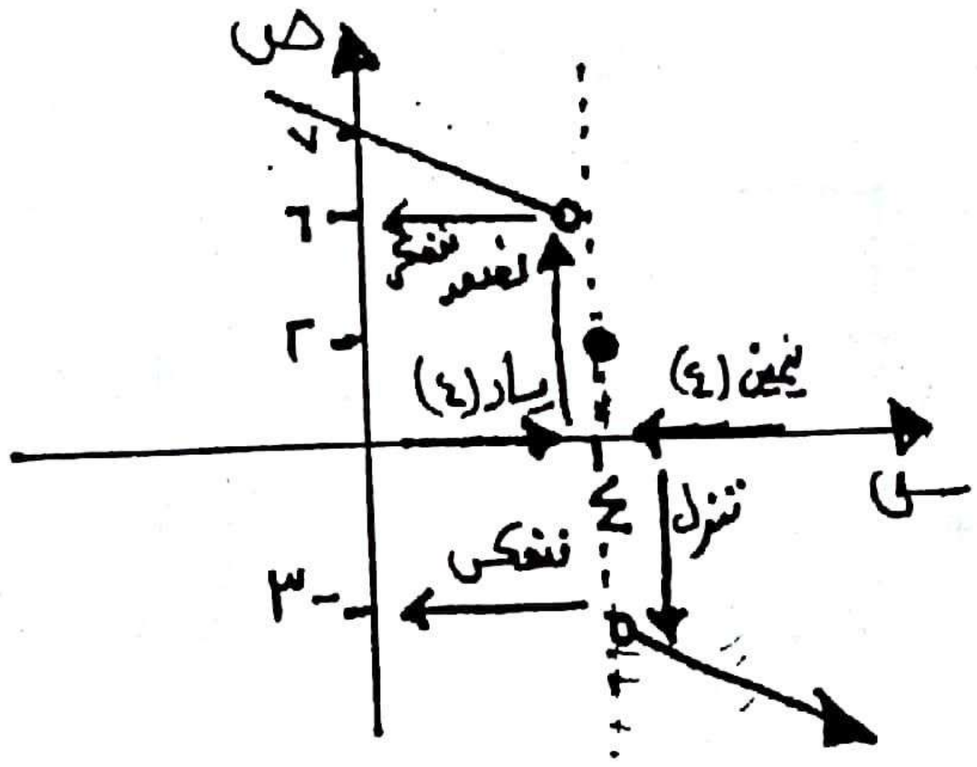
(٧٦) مخ الشكل المجاور ، أوجد:

أ) $\lim_{س \to -٤^+} ه(س)$

ب) $\lim_{س \to -٤^-} ه(س)$

ج) $\lim_{س \to ٤} ه(س)$

د) $ه(٤)$



الحل: أ) $\lim_{س \to -٤^+} ه(س) = -٣$

ب) $\lim_{س \to -٤^-} ه(س) = ٦$

ج) $\lim_{س \to ٤} ه(س)$ بدون اتجاه (بتمثيله تحوّل)

يسار (٤) | يمين (٤)

نجد: $\lim_{س \to ٤^+} ه(س) = -٣$ * ونجد: $\lim_{س \to ٤^-} ه(س) = ٦$

$\therefore \lim_{س \to ٤} ه(س)$ غير موجودة

د) $ه(٤)$ = صورة ، تذهب للرسم لتشعه صورة ، ونرى عليه مباشرة وفقط ونختار المضطلع باللون القاتم = ٣

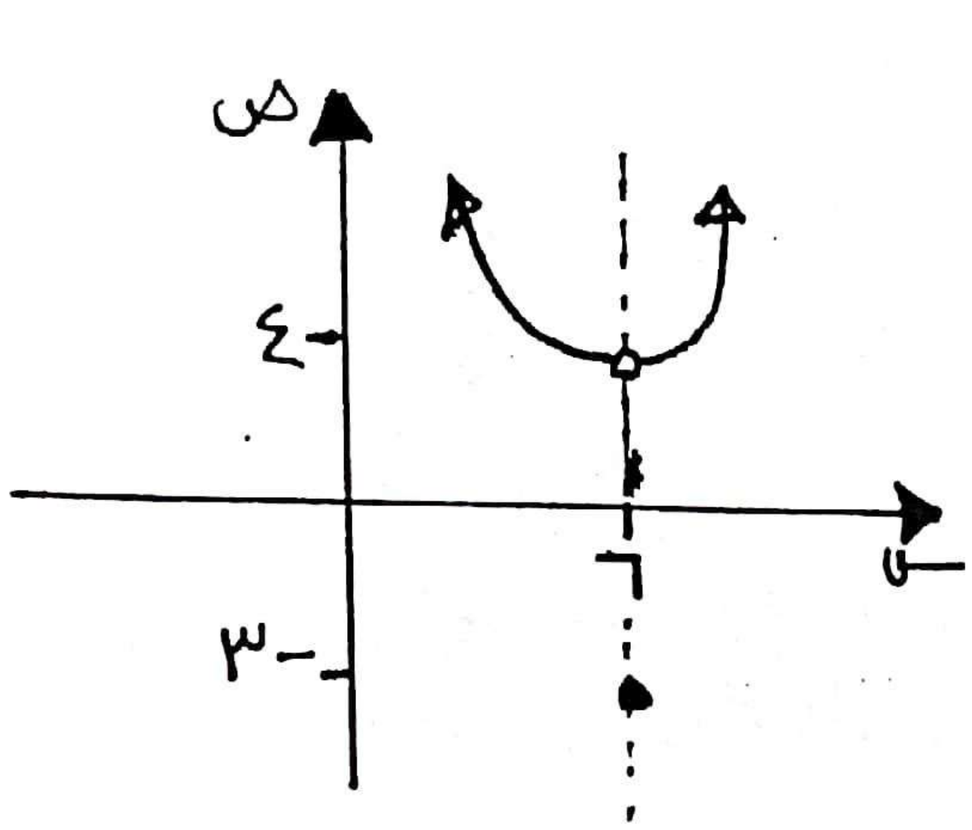
(٧٧) مخ الشكل المجاور ، أوجد:

أ) $\lim_{س \to ٦^+} ه(س)$

ب) $\lim_{س \to ٦^-} ه(س)$

ج) $\lim_{س \to ٦} ه(س)$

د) $ه(٦)$



الحل: أ) $\lim_{س \to ٦^+} ه(س) = ٤$

ب) $\lim_{س \to ٦^-} ه(س) = ٤$

ج) $\lim_{س \to ٦} ه(س)$ بدون اتجاه (بتمثيله تحوّل)

يسار (٦) | يمين (٦)

نجد: $\lim_{س \to ٦^+} ه(س) = ٤$ = $\lim_{س \to ٦^-} ه(س) = ٤$

$\therefore \lim_{س \to ٦} ه(س)$ موجودة وتساوي ٤

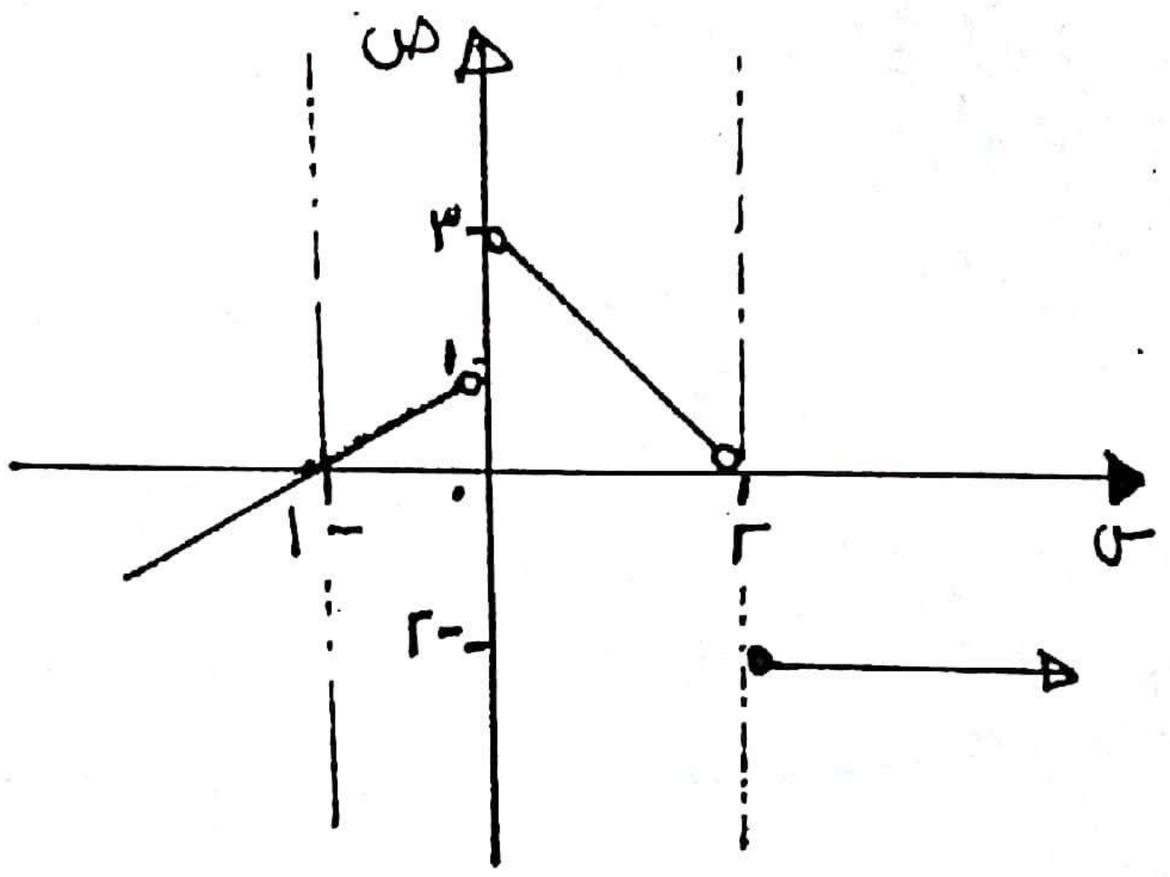
د) $ه(٦)$ = صورة ، نشير على الرسم مباشرة وفقط نضطلع باللون القاتم = -٣

(٧٨) في الشكل المجاور ، أوجد :

(أ) $\lim_{س \to ١} ه(س)$ (ب) $ه(-١)$

(ج) $\lim_{س \to ٠} ه(س)$ (د) $ه(٠)$

(هـ) $\lim_{س \to ٢} ه(س)$ (و) $ه(٢)$



الحل: (أ) $\lim_{س \to ١} ه(س)$ (نعتبره نقطة)

بدون إتجاه (نعتبره تحوّل)

يسار (١) | يمين (١)

$\lim_{س \to ١} ه(س) = ص_{١}$ $\lim_{س \to ١^-} ه(س) = ص_{١}$

$\lim_{س \to ١^+} ه(س) = ص_{١}$

$\therefore \lim_{س \to ١} ه(س) = ص_{١}$ موجودة وتساوي $ص_{١}$

(ب) $ه(-١)$ = صورة ، نسير على الرقم مباشرة ونصطدم نقطة باللون القائم هنا يوجد خط قائم فوقه $\therefore$ الجواب $ص_{١}$

(ج) $\lim_{س \to ٠} ه(س)$ (نعتبره نقطة)

بدون إتجاه (نعتبره تحوّل)

يسار (٠) | يمين (٠)

$\lim_{س \to ٠} ه(س) = ١$ $\lim_{س \to ٠^-} ه(س) = ٣$ $\lim_{س \to ٠^+} ه(س) = ٠$

$\therefore \lim_{س \to ٠} ه(س)$ غير موجودة

(د) $ه(٠)$ = صورة ، نسير على الرقم مباشرة ونصطدم باللون القائم ، لكن لا يوجد لون قائم على نفس الخط العدد (٠) ، لذلك

الجواب غير معرفة

(هـ) $\lim_{س \to ٢} ه(س)$ (نعتبره نقطة)

بدون إتجاه (نعتبره تحوّل)

يسار (٢) | يمين (٢)

$\lim_{س \to ٢} ه(س) = ٣$ $\lim_{س \to ٢^-} ه(س) = ١$ $\lim_{س \to ٢^+} ه(س) = ص_{٢}$

$\therefore \lim_{س \to ٢} ه(س)$ غير موجودة

(و) $ه(٢)$ = صورة ، نسير على الرقم (٢) مباشرة ونصطدم باللون القائم ، لكن لا يوجد لون قائم على نفس الخط العدد (٢) ، لذلك

الجواب غير معرفة

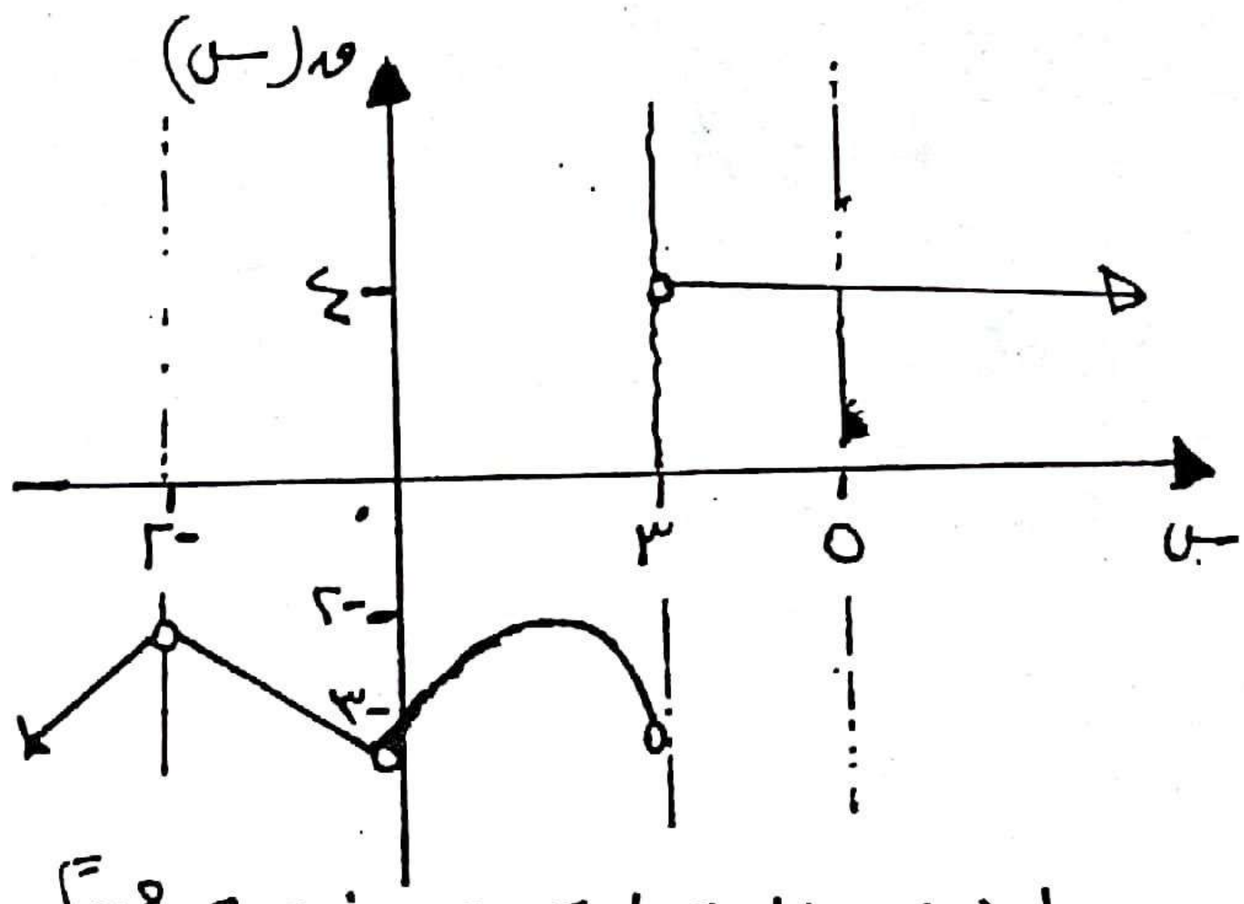
وارجو الانتباه أن اللون القائم الموجود تحت العدد (٢) ليس على نفس الخط العدد (٢) بل على يمين الخط لذلك لا نعتبره $ه(٢)$

$\therefore$ جواب $ه(٢)$ غير معرفة

(٧٩) في الشكل المجاور أوجد متى

$\exists p \in \{-٢، ٠، ٣، ٥\}$

والتي تجعل : نهـا $_{س \leftarrow p}$ $د(س)$ غير موجودة



الحل : لدينا (٤) حالات لقيم p : ندرسهم جميعاً وكل واحدة من اليمين واليسار.

الحالة (١) : $p = -٢$: نهـا $_{س \leftarrow -٢}$ $د(س)$ تحوّل

يمين (-٢) ، يسار (-٢)

نهـا $_{س \leftarrow -٢^+}$ $د(س) = ②$ = نهـا $_{س \leftarrow -٢^-}$ $د(س) = ②$

$\therefore$ نهـا $_{س \leftarrow -٢}$ $د(س)$ موجودة وتساوي ②

$\therefore p = -٢$ موضعه ، لأننا نريد النهاية جوابها غير موجودة

الحالة (٢) : $p = ③$: نهـا $_{س \leftarrow ③}$ $د(س)$ تحوّل

يمين (٣) ، يسار (٣)

نهـا $_{س \leftarrow ③^+}$ $د(س) = ④$ ≠ نهـا $_{س \leftarrow ③^-}$ $د(س) = ③$

$\therefore$ نهـا $_{س \leftarrow ③}$ $د(س)$ غير موجودة

$\therefore p = ③$ مقبولة لأن جواب النهاية تبع غير موجودة وهو المطلوب.

الحالة (٣) : $p = ⑤$: نهـا $_{س \leftarrow ⑤}$ $د(س)$ تحوّل

يمين (٥) ، يسار (٥)

نهـا $_{س \leftarrow ⑤^+}$ $د(س) = ④$ = نهـا $_{س \leftarrow ⑤^-}$ $د(س) = ④$

$\therefore$ نهـا $_{س \leftarrow ⑤}$ $د(س)$ موجودة وتساوي ④

$\therefore p = ⑤$ مرفوضة

لأننا نريد النهاية جواب غير موجودة

الحالة (٤) : $p = ٣$: نهـا $_{س \leftarrow ٣}$ $د(س)$ تحوّل

يمين (٣) ، يسار (٣)

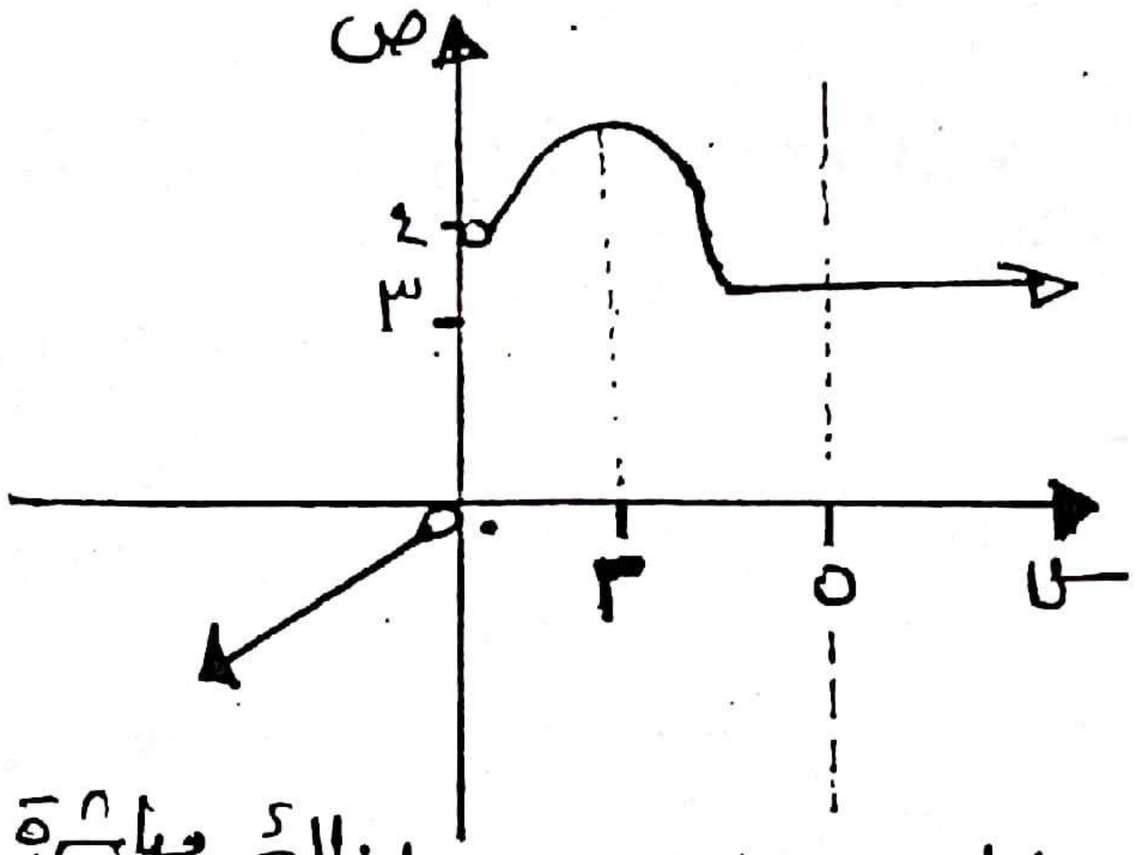
نهـا $_{س \leftarrow ٣^+}$ $د(س) = ③$ = نهـا $_{س \leftarrow ٣^-}$ $د(س) = ③$

$\therefore$ نهـا $_{س \leftarrow ٣}$ $د(س)$ موجودة وتساوي ③

$\therefore p = ③$ مرفوضة ، لأننا نريد جواب النهاية غير موجودة

الجواب النهائي : $p \in \{٣\}$

(٨٠) في الشكل المجاور ، أوجد $\lim_{س \to ب}$ الذي يجعل : $\lim_{س \to ب} د(س) = ٣$



الحل : هنا لم نحدد $\lim_{س \to ب}$ لذلك مباشرة لوجود على كور $\lim_{س \to ب}$ تكون هي السنات

$\lim_{س \to ب} = \{٠، ٣، ٥\}$

لذلك لدينا (٣) $\lim_{س \to ب}$ هي $\{٠، ٣، ٥\}$

لذلك ندرس كل قيمة على حده :

① $ب = صفر$: $\lim_{س \to صفر^+} د(س) = ٤$

$\lim_{س \to صفر^-} د(س) =$ صفر

$\lim_{س \to ٠} د(س)$ غير موجودة $\neq ٣$

$\therefore$ $ب = صفر$ مرفوضة

② $ب = ٣$: $\lim_{س \to ٣^+} د(س) = ٤$

$\lim_{س \to ٣^-} د(س) = ٤$

$\therefore \lim_{س \to ٣} د(س)$ موجودة $= ٤ \neq ٣$

$\therefore$ $ب = ٣$ مرفوضة

③ $ب = ٥$: $\lim_{س \to ٥^+} د(س) = ٣$

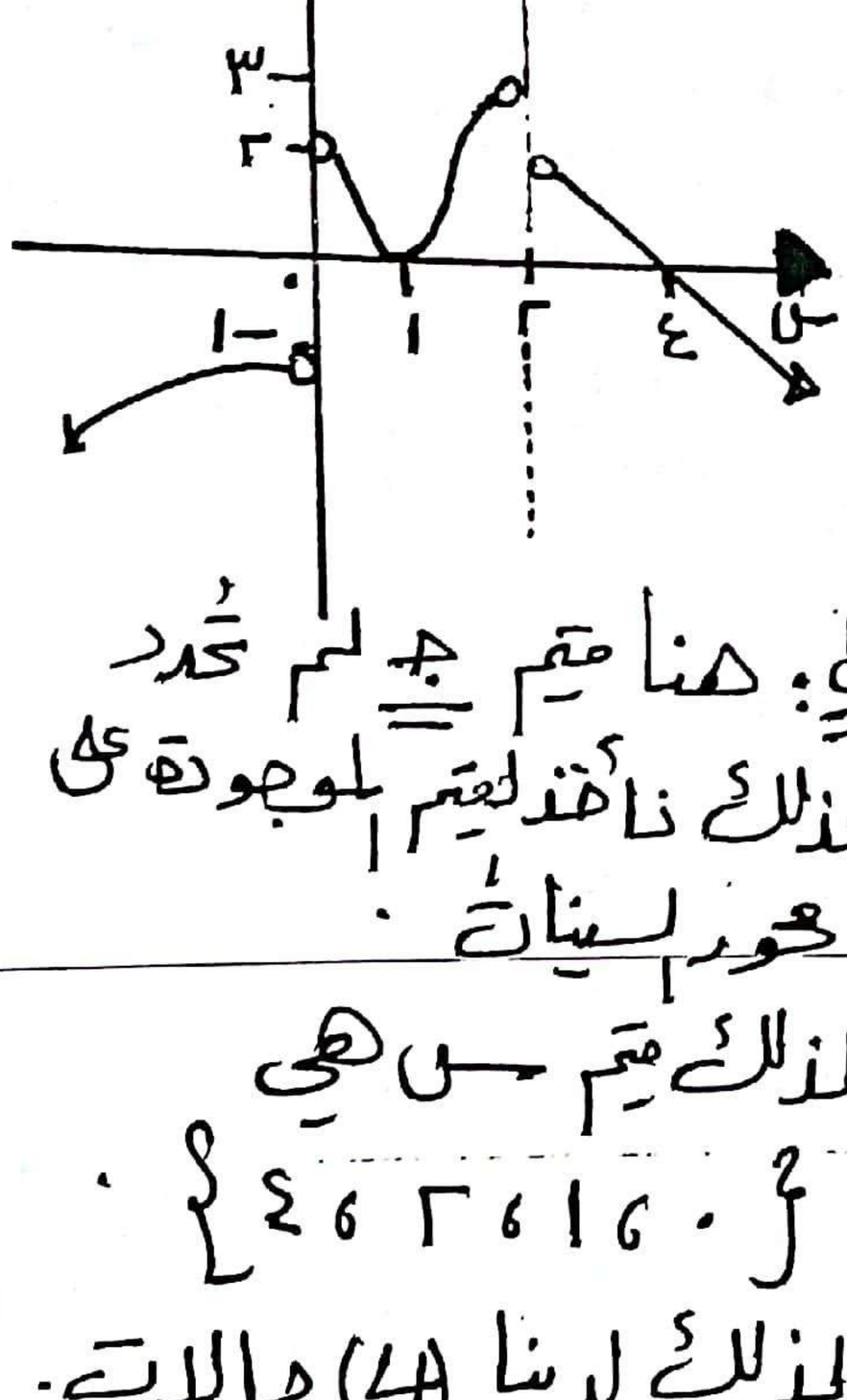
$\lim_{س \to ٥^-} د(س) = ٣$

$\therefore \lim_{س \to ٥} د(س) = ٣$

$\therefore$ $ب = ٥$ مقبولة

$\therefore ب \in \{٥\}$

(٨١) في الشكل المجاور ، أوجد $\lim_{س \to ب}$ الذي يجعل : $\lim_{س \to ب} د(س) =$ صفر



الحل : هنا $\lim_{س \to ب}$ لم تحدد لذلك ناخذ $\lim_{س \to ب}$ الموجودة على محور السينات

لذلك $\lim_{س \to ب}$ هي $\{١-، ١، ٢، ٤\}$

لذلك لدينا (4) حالات.

منهاجي
متعة التعليم الهادف

① $د = \{صفر\}$: $\lim_{س \to 0^+} د(س) = ②$ ✕

$\lim_{س \to 0^-} د(س) = ①$

$\lim_{س \to 0} د(س)$ موجودة $\Leftarrow$ غير موجودة $\Leftarrow$ $\{صفر\}$

$\therefore$ $د = \{صفر\}$ مرفوضة

② $د = \{١\}$: $\lim_{س \to ١^+} د(س) = صفر$

$\lim_{س \to ١^-} د(س) = صفر$

$\therefore \lim_{س \to ١} د(س) = صفر$

$\therefore$ $د = \{١\}$ مقبولة

③ $د = \{٢\}$: $\lim_{س \to ٢^+} د(س) = ③$

$\lim_{س \to ٢^-} د(س) = ②$

$\therefore \lim_{س \to ٢} د(س)$ غير موجودة $\Leftarrow$ $\{صفر\}$

$\therefore$ $د = \{٢\}$ مرفوضة

④ $د = \{٤\}$: $\lim_{س \to ٤^+} د(س) = \{صفر\}$

$\lim_{س \to ٤^-} د(س) = \{١\}$

$\therefore \lim_{س \to ٤} د(س)$ موجودة $\Leftarrow$ $\{صفر\}$

$\therefore$ $د = \{٤\}$ مقبولة

$\therefore د = \{١ ، ٤\}$

③ النهاية من الجداول

لدينا نوعين من الجداول :

① قد يأتي الجدول جاهز

② او قد نحن نكوّن الجدول

① الجدول الجاهز

ملاحظة : ① نحدد مفتاح الحل وهو الرقم الموجود أمام $\lim$

② نحدد أول يمين : وهو أول رقم يقع بجانب مفتاح الحل ويكون الأبعد منه

③ نحدد أول يسار : وهو أول رقم يقع بجانب مفتاح الحل ويكون الأقرب منه

③ الجواب يكون تحت أول يمين وتحت أول يسار ثم نقربه.

ملاحظة : إذا طلب السؤال $\lim$ (رقم) = جوابه تحته مباشرة .

الى الامثلة على الجداول الجاهزة ⟸

منهاجي
متعة التعليم الهادف

(٨٢) الجدول التالي تمثل سلوك الاقتران

$هـ(س)$ عندما $س \leftarrow ٤$

أوجدي : (أ) $\lim_{س \to ٤} هـ(س)$ (ب) $\lim_{س \to ٤} هـ(س)$

(ج) $هـ(٤)$ (د)

س	$\lim_{س \to ٤^-}$	$\lim_{س \to ٤^+}$	$\lim_{س \to ٤}$	$هـ(س)$
٤,٠٠٠١	٣,٩٩٩٩	٤,٠٠٠٢	٤	٧,٠٠٠٤
٤,٠٠٠٢	٣,٩٩٩٩	٤,٠٠٠٣	٤	٧,٠٠٠٦
٤,٠٠٠٣	٣,٩٩٩٩	٤,٠٠٠٤	٤	٧,٠٠٠٨
٤,٠٠٠٤	٣,٩٩٩٩	٤,٠٠٠٥	٤	٧,٠٠١٠

الحل: (أ) $\lim_{س \to ٤} هـ(س)$

نذهب لأول يمين $(٤,٠٠٠١)$ ← $(٤+)$ ← $س \to ٤$

جوابه كتة : $(٧,٠٠١٠)$

نقربه ← (٧) الجواب

(ب) $\lim_{س \to ٤^-} هـ(س)$

نذهب لأول يسار $(٣,٩٩٩٩)$ ← $(٤-)$ ← $س \to ٤$

جواب كتة : $(٧,٠٠٠٨)$

نقربه ← (٣) الجواب

(ج) $\lim_{س \to ٤} هـ(س)$ (نعتبرها تحول بدون اخذ)

نجد : $\lim_{س \to ٤^+} هـ(س) = (٧)$ * نجد : $\lim_{س \to ٤^-} هـ(س) = (٣)$

$\lim_{س \to ٤} هـ(س)$ غير موجودة

$\because \lim_{س \to ٤}$ ← ٤ ← $س$

(د) $هـ(٤)$ = صورة جوابها تحتها مباشرة

الجواب (٦)

(٨٣) الجدول التالي تمثل سلوك

الاقتران $هـ(س)$ عندما $س \to ٢$

أوجدي : (أ) $\lim_{س \to ٢} هـ(س)$ (ب) $\lim_{س \to ٢} هـ(س)$

(ج) $هـ(٢)$ (د)

س	$\lim_{س \to ٢^-}$	$\lim_{س \to ٢^+}$	$\lim_{س \to ٢}$	$هـ(س)$
١,٩٩٩٧	١,٩٩٩٨	٢,٠٠٠١	٢	٥,٠٠٠٢
١,٩٩٩٨	١,٩٩٩٨	٢,٠٠٠٢	٢	٥,٠٠٠٤
١,٩٩٩٩	١,٩٩٩٨	٢,٠٠٠٣	٢	٥,٠٠٠٦
٢,٠٠٠٤	١,٩٩٩٨	٢,٠٠٠٤	٢	٥,٠٠٠٨

الحل: (أ) $\lim_{س \to ٢} هـ(س)$

نذهب لأول يمين $(٢,٠٠٠١)$ ← $(٢+)$ ← $س \to ٢$

جوابه كتة : $(٥,٠٠٠١)$

نقربه ← (٥) الجواب

(ب) $\lim_{س \to ٢^-} هـ(س)$

نذهب لأول يسار $(١,٩٩٩٩)$ ← $(٢-)$ ← $س \to ٢$

جواب كتة $(٤,٩٩٩٩)$

نقربه ← (٥) الجواب

(ج) $\lim_{س \to ٢} هـ(س)$ (نعتبرها تحول بدون اخذ)

نجد : $\lim_{س \to ٢^+} هـ(س) = (٥)$ = ونجد : $\lim_{س \to ٢^-} هـ(س) = (٥)$

$\therefore \lim_{س \to ٢}$ موجودة وتساوي (٥)

(د) $هـ(٢)$ = صورة، جوابه تحته مباشرة = (٨)

منهاجي متعة التعليم الهادف

(٨٤) الجدول التالي يمثل سلوك الاقتران
حد(س) عندما س ← ٦

أوجد: (أ) نهـا حد(س) ، (ب) حد(٦)
س ← ٦
اوجد يسار مقتاح كل اوجد يمين

س	٥,٩٩٩٧	٥,٩٩٩٨	٦	٦,٠٠٠١	٦,٠٠٠٢	٦,٠٠٠٣
حد(س)	٧,٩٩٩٧	٧,٩٩٩٨		٨,٠٠٠١	٨,٠٠٠٢	٨,٠٠٠٣

الحل: (أ) نهـا حد(س)
س ← ٦
بدون اتجاه (تحوّل)

نجد: نهـا حد(س)
س ← ٦
(+) تذهب للأول يمين (٦,٠٠٠١)
جوابه تقريبه : (٨,٠٠٠١)
تقريبه ≃ (٨)

ونجد: نهـا حد(س)
س ← ٦
(−) تذهب للأول يسار
جوابه (٥,٩٩٩٩)
تخته : (٧,٩٩٩٩)
تقريبه ≃ (٨)

∴ نهـا حد(س) موجودة
س ← ٦
وتساوي (٨)

(ب) حد(٦) = صورة ، جوابها تخها
لكن لا يوجد تخها د م
∴ الجواب غير معرفة

(٢) تكوين الجدول .

خطوات:

① نحدد الاقترانات

الاقتران: حد(س) = ...

الموجود امام الرقم

② نأخذ عدة قيم:

عندما س = ٠,١+ ، ٠,١+
عندما س = ٠,١- ، ٠,١-
عندما س = ∆ مقتاح الحل
عندما س = ∆
عندما س = ∆
عندما س = ∆

③ نعوض في الجدول.

امثلة:

(٨٥) اذا كان: حد(س) = ٢س + ٣
كون جدولاً لقيم س ، حد(س)
الحل: نهـا حد(س)
س ← ٤

الحل: الاقترانات

حد(س) = ٢س + ٣

عندما س = ٤,٠١ : ص = ٢×٤,٠١ + ٣ = ٨,٠٢ + ٣ = ١١,٠٢

عندما س = ٤,١ : ص = ٢×٤,١ + ٣ = ٨,٢ + ٣ = ١١,٢

عندما س = ٤ : ص = ٢×٤ + ٣ = ٨ + ٣ = ١١

عندما س = ٣,٩ : ص = ٢×٣,٩ + ٣ = ٧,٨ + ٣ = ١٠,٨

عندما س = ٣,٨ : ص = ٢×٣,٨ + ٣ = ٧,٦ + ٣ = ١٠,٦

منهاجي متعة التعليم الهادف

س	٢,٤	٤,١	٤	٣,٩	٣,٨	
ق(س)	١١,٤	١١,٢	؟	١٠,٨	١٠,٦	

∴ نهـا ق(س) = ؟
س ← ٤

نهـا ق(س) = ق(٤)
س ← ٤

نهـا ق(س) = ق(٤) = ١١
س ← ٤

∴ نهـا ق(س) موجودة وتساوي ١١
س ← ٤

(٨) إذا كان : $ق(س) = \frac{س^{٣} - ٦س + ٥}{س - ٥}$ ، س ≠ ٥

أوجد نهـا ق(س) إن أمكن :
س ← ٥

الحل :

نهـا ق(س) = نهـا $\frac{س^{٣} - ٦س + ٥}{س - ٥}$
س ← ٥ س ← ٥

= نهـا $\frac{(س - ١)(س - ٥)}{(س - ٥)}$
س ← ٥

= نهـا (س - ١)
س ← ٥

= ٥ - ١

= ٤

∴ نهـا ق(س) = ٤
س ← ٥

الآن :

عندما س = ٠,٢ : ص = ١ - س

= ١ - ٠,٢

= ٠,٨

عندما س = ٠,١ : ص = ١ - س

= ١ - ٠,٥

= ٠,٤ (مقابل الزاوية)

عندما س = ٠,٥ : ص = ١ - س

= ١ - ٠,٥

= ٠,٥

عندما س = ٠,٤٩ : ص = ١ - س

= ١ - ٠,٤٩

= ٠,٥١

عندما س = ٠,٤٨ : ص = ١ - س

= ١ - ٠,٤٨

= ٠,٥٢

الى الجدول :

س	٠,٢	٠,٤	٠,٥	٠,٥١	٠,٥٢	
ق(س)	٠,٨	٠,٤	؟	٠,٥	٠,٥	

∴ نهـا ق(س) موجودة
س ← ٠,٥ وتساوي ٠,٥

بدون انجاد (تحليل)

نجد : نهـا ق(س)
س ← ٠,٥ +

نذهب لأول يمين (٠,٥١)

جوابه تقريبا = ٠,٥

نجد : نهـا ق(س)
س ← ٠,٥ -

نذهب لأول يسار (٠,٤٩)

جوابه تقريبا = ٠,٥

∴ نهـا ق(س) موجودة
س ← ٠,٥ وتساوي ٠,٥

(٨٧) إذا كان :

$$هـ(س) = \begin{cases} ٥ - س ، & س < ٢ \\ ٦ - س ، & ٢ > س \\ ١٧ ، & س = ٢ \end{cases}$$

كوني جدولاً لقيم س ، هـ(س)

الحل : نهـا هـ(س)

س ← ٢

الحل :

$$هـ(س) = \begin{cases} ٥ - س ، & س < ٢ \\ ٦ - س ، & ٢ > س \\ ١٧ ، & س = ٢ \end{cases}$$

الآن :

(١) عندما س = ٢,١ : ص = ٥ - س

= ٥ - ٢,١

= ٢,٨

(٢) عندما س = ٢,١ : ص = ٥ - س

= ٥ - ٢,١

= ٢,٩

(٣) عندما س = مقابل

(٤) عندما س = ١,٩ : ص = ٦ - س

= ٦ - ١,٩

= ١١,٤

(٥) عندما س = ١,٨ : ص = ٦ - س

= ٦ - ١,٨

= ١٠,٨

الى الجدول :

س	٢,٢	٢,١		١,٩	١,٨
هـ(س)	٢,٨	٢,٩	S	١١,٤	١٠,٨
		جوابه		جوابه	

نهـا هـ(س)

س ← ٢

(+٢) نذهب لليمين

(-٢) نذهب لليسار

نذهب لليمين (٢,١)

جوابه كتله (٢,٩)

تقريبا (٣)

جوابه كتله (١١,٤)

تقريبا (١١)

∴ نهـا هـ(س) غير موجودة

س ← ٢

مستقبل ماضي و حاضر

لا تحزن على ماضٍ ، و لا تقلق على مستقبل لم يأتِ ، فالحاضر الجميل ذهب ، فأنت أنتِ صاحبه . فأنت صاحب القرار .

نظريات في النهايات :

اذا كانت : $\lim_{س \to م} هـ(س) = ص$

$\lim_{س \to م} هـ(س) = ن \neq صفر$

فإن : النهاية توزع على جميع العمليات الحسابية بشرط ان تكون النهاية موجودة .

① $\lim_{س \to م} (هـ(س) + هـ(س))$

$= \lim_{س \to م} هـ(س) + \lim_{س \to م} هـ(س)$

$= م + ن$

② $\lim_{س \to م} (هـ(س) - هـ(س))$

$\Leftarrow \lim_{س \to م} هـ(س) - \lim_{س \to م} هـ(س)$

$\Leftarrow م - ن$

③ $\lim_{س \to م} (هـ(س) \times هـ(س))$

$\Leftarrow \lim_{س \to م} هـ(س) \times \lim_{س \to م} هـ(س)$

$\Leftarrow م \times ن$

④ $\lim_{س \to م} \left(\frac{هـ(س)}{هـ(س)}\right)$

$\Leftarrow \frac{\lim_{س \to م} هـ(س)}{\lim_{س \to م} هـ(س)}$

$\frac{م}{ن}$

امثلة :

(م) اذا كانت :

$\lim_{س \to ٣} هـ(س) = ٥$

$\lim_{س \to ٣} هـ(س) = ٦$

فجد قيمة :

(أ) $\lim_{س \to ٣} (هـ(س) + هـ(س))$

(ب) $\lim_{س \to ٣} (هـ(س) - هـ(س))$

(ج) $\lim_{س \to ٣} (هـ(س) \times هـ(س))$

(د) $\lim_{س \to ٣} \left(\frac{هـ(س)}{هـ(س)}\right)$

الحل : المعطيات هنا جاهزة :

$\lim_{س \to ٣} هـ(س) = ٥$ جاهزة

$\lim_{س \to ٣} هـ(س) = ٦$ جاهزة

الى الفروع : وزعي النهاية :

(أ) $\lim_{س \to ٣} هـ(س) + \lim_{س \to ٣} هـ(س)$

$= ٥ + ٦ = ١١$

(ب) $\lim_{س \to ٣} هـ(س) - \lim_{س \to ٣} هـ(س)$

$= ٥ - ٦ = -١$

(ج) $\lim_{س \to ٣} هـ(س) \times \lim_{س \to ٣} هـ(س)$

$= ٥ \times ٦ = ٣٠$

(د) $\frac{\lim_{س \to ٣} هـ(س)}{\lim_{س \to ٣} هـ(س)} = \frac{٥}{٦}$

(١٩) إذا كانت : نهـ٢ ٤ هـ(س) = ٢٤

نهـ٢ ٧ هـ(س) = ٢١

أوجد : (أ) نهـ٢ (هـ(س) - هـ(س))

(ب) نهـ٢ √(هـ(س) + هـ(س) - ٥)

الحل : أولاً : تجهز المعطيات (تنظيف)

نهـ٢ ٤ هـ(س) = ٢٤

نهـ٢ هـ(س) = ٦

نهـ٢ ٧ هـ(س) = ٢١

نهـ٢ هـ(س) = ٣

ثانياً : نذهب الآن الى الفروع : وزعي النهاية :

(أ) نهـ٢ (هـ(س) - هـ(س))٢

= (٣ - ٦)٢ = (-٣)٢ = ٩

(ب) نهـ٢ √(هـ(س) + هـ(س) - ٥)

= √(٣ + ٦ - ٥) = √٤ = ٢

(٢٠) إذا كانت :

نهـ٥ ٢ هـ(س) + ٤ - س = ٢٨

نهـ٥ ٣ هـ(س) - ٧ = ٢٠

أوجد : نهـ٥ (هـ(س) + ٢ هـ(س)) / (س٢ - هـ(س))

الحل : أولاً : تجهز المعطيات (تنظيف)

نهـ٥ ٢ هـ(س) + ٤ - س = ٢٨

لوجود ⊕ او ⊖ الرجاء توزيع النهاية (وضع النهاية امام كل حد)

نهـ٥ ٢ هـ(س) + نهـ٥ ٤ - نهـ٥ س = ٢٨

نهـ٥ ٢ هـ(س) + ٤ - ٥ = ٢٨

نهـ٥ ٢ هـ(س) + ٢٠ - ٥ = ٢٨

نهـ٥ ٢ هـ(س) = ٨

نهـ٥ هـ(س) = ٤ جاهزة

نهـ٥ ٣ هـ(س) = ٢ - ٧

نهـ٥ هـ(س) = ٣ جاهزة

أيضاً : نهـ٥ ٣ هـ(س) = ٧ - ٢

لوجود ⊕ او ⊖ الرجاء توزيع النهاية

نهـ٥ ٣ هـ(س) = نهـ٥ ٧ - نهـ٥ ٢

نهـ٥ ٣ هـ(س) = ٧ - ٢

نهـ٥ ٣ هـ(س) = ٥

نهـ٥ هـ(س) = ٣/٣ = ١ جاهزة

ثانياً : نذهب الآن الى الفروع : وزعي النهاية :

(أ) نهـ٥ √(هـ(س) + ٤ هـ(س))

= √(١ + ٤) = √٥

(ب) نهـ٥ (هـ(س) - ٤ هـ(س))٢

= (١ - ٤)٢ = (-٣)٢ = ٩

ثانياً : نذهب إلى المطلوب ونرجاء توزيع النهاية :

$$\therefore \lim_{س \to ٥} هـ(س) = \lim_{س \to ٥} ٢س + \lim_{س \to ٥} (س - د)$$

$$\lim_{س \to ٥} هـ(س) = \lim_{س \to ٥} س^٢ - \lim_{س \to ٥} هـ(س)$$

$$\Leftarrow \frac{٣ \times ٤ + ٤}{٤ - ٢٥} = \frac{٤ + ٦}{٤ - ٢٥}$$

$$= \frac{١٠}{٢١}$$

---

(٩١) إذا كانت :

$$\lim_{س \to ٤} \frac{٣}{٢} هـ(س) = ٩$$

$$\lim_{س \to ٤} ٢ هـ(س) + ٣س - ١ = ١٧$$

$$\lim_{س \to ٤} ٣ هـ(س) + هـ(س) = ؟$$

الحل : أولاً : نجزئ المعطيات (تنظيف)

$$\lim_{س \to ٤} \frac{٣}{٢} هـ(س) = ٩$$

$$\lim_{س \to ٤} هـ(س) = \frac{٣}{٢} \times ٩ = ٦$$

نضرب بالمقلوب

جاهزة

$$\Leftarrow هـ(٤) = ٦$$

أيضاً : $\lim_{س \to ٤} ٢ هـ(س) + ٣س - ١ = ١٧$

الوجود ⊕ اذن نوزع النهاية

$$\lim_{س \to ٤} ٢ هـ(س) + \lim_{س \to ٤} ٣س - \lim_{س \to ٤} ١ = ١٧$$

$$\lim_{س \to ٤} ٢ هـ(س) + ١٢ - ١ = ١٧$$

$$\lim_{س \to ٤} ٢ هـ(س) = ١٧ - ١١ = ٦$$

$$\lim_{س \to ٤} هـ(س) = \frac{٦}{٢} = ٣$$

جاهزة

$$\therefore \lim_{س \to ٤} هـ(س) = ٣$$

ثانياً : نذهب للمطلوب ونوزع النهاية أمام كل عليه ضيف.

$$\lim_{س \to ٤} ٣ هـ(س) + هـ(س)$$

$$\lim_{س \to ٤} ٣ هـ(س) + \lim_{س \to ٤} هـ(س)$$

$$\Leftarrow \frac{٣ \times ٣ + ٦}{٤^٢ - ٦} = \frac{٦ + ٩}{٦ - ١٦}$$

$$= \frac{١٥}{١٠}$$ محتوى له.

---

(٩٢) إذا كان :

هـ(س) كثير حدود فيه :

هـ(٣) = ٨ .

المطلوب : $\lim_{س \to ٣} ٥ هـ(س) - ٠,٢س + ٢$

الحل : حفظ عبارة :

هـ(س) كثير حدود ← معناها :

نهاية = صورة

$\lim_{س \to ٣} هـ(س) = هـ(٣)$

$\therefore$ $\lim_{س \to ٣} ق(س) = ق(٣)$

عند نقطة س

بسيطة

(٨)

$\therefore$ إجابة : جوابها (٨)

إلى الطلاب : وذكي النهاية :

$\lim_{س \to ٣} ٥ ق(س) - \lim_{س \to ٣} ١٠ + \lim_{س \to ٣} ٢$

$\Leftarrow ٥ \times \lim_{س \to ٣} ق(س) - ١٠ \times ٣ + ٢$

$\Leftarrow ٥ \times \lim_{س \to ٣} ق(س) - ٣٠ + ٢$

$\Leftarrow ٥ \times ٨ - ٣٠ + ٢$

$\Leftarrow ٤٠ - ٣٠ + ٢ = ١٠ + ٢ =$ (١٢)

---

(٩٣) : إذا كانت :

$ق(س)$ كثير حدود ، $هـ(س)$ كثير حدود

فيه : $هـ(٣) = ٩$

وكانت : $\lim_{س \to ٢} (٦ ق(س) + هـ(س) - ٢س) = ٢٤$

أوجد : $ق(٣)$ ؟

الحل :

ملخص $ق(س)$:

$ق(س)$ كثير حدود

له معناها :

نهايته = صورته

$\lim_{س \to ٢} ق(س) = ق(٢)$

بطريقة مجهولة

ملخص $هـ(س)$:

$هـ(س)$ كثير حدود

له معناها :

نهايته = صورته

$\lim_{س \to ٤} هـ(س) = هـ(٤)$

بطريقة معلومة

(٩)

$\therefore$ جوابها (٩)

الآن وذكي النهاية :

$\lim_{س \to ٢} ٦ ق(س) + \lim_{س \to ٢} هـ(س) - \lim_{س \to ٢} ٤س = ٢٤$

$\lim_{س \to ٢} ٦ \times \lim_{س \to ٢} ق(س) + \lim_{س \to ٢} هـ(س) - ٤ \times ٢ = ٢٤$

$\lim_{س \to ٢} ٦ \times \lim_{س \to ٢} ق(س) + ٩ - ٨ = ٢٤$

$\lim_{س \to ٢} ٦ \times \lim_{س \to ٢} ق(س) + ١ = ٢٤$

$\lim_{س \to ٢} ٦ \times \lim_{س \to ٢} ق(س) = ٢٤ - ١ = ٢٣$

$\lim_{س \to ٢} ق(س) = \frac{٢٣}{٦} = ٤$

$\therefore \lim_{س \to ٢} ق(س) = ٤$

ولكي نفرق لكي $ق(٢) = ٤$

لأنه كثير حدود .

---

(٩٤) إذا كانت :

$\lim_{س \to ٤} (ق^{٣}(س) + س^{٢}) = ٢٤$

$\lim_{س \to ٤} (س \; هـ(س) - ق(س)) = ١٠$

$\lim_{س \to ٤} \frac{هـ(س) - ٣}{\sqrt[٣]{ق(س) - ١}}$ = ؟

الحل : أولاً : تجهز المعطيات (تنظيف)

$\lim_{س \to ٤} (ق^{٣}(س) + س^{٢}) = ٢٤$

$\Leftarrow$ لوجود $\oplus$ أو $\ominus$ نوزع النهاية .

$\lim_{س \to ٤} ق^{٣}(س) + \lim_{س \to ٤} س^{٢} = ٢٤$

$\lim_{س \to ٤} ق^{٣}(س) + (٤)^{٢} = ٢٤$

$\lim_{س \to ٤} ق^{٣}(س) + ١٦ = ٢٤$

$\lim_{س \to ٤} ق^{٣}(س) = ٨ \Leftarrow$ $\lim_{س \to ٤} ق(س) = ٢$

خذ $\sqrt[٣]{\;}$ للطرفين :

منهاجي
متعة التعليم الهادف

توضيح: $\lim_{س \to ٤} ٨ = \lim_{س \to ٤} (س)^{\frac{٣}{٢}}$

$\lim_{س \to ٤} د(س) = ٢$

أيضاً: $\lim_{س \to ٤} (س هـ(س) - د(س)) = ١٠$

$\lim_{س \to ٤} س \times \lim_{س \to ٤} هـ(س) - \lim_{س \to ٤} د(س) = ١٠$

$٤ \times \lim_{س \to ٤} هـ(س) - ٢ = ١٠$

$\lim_{س \to ٤} هـ(س) = \frac{١٠ + ٢}{٤} = \frac{١٢}{٤} = ٣$

$\lim_{س \to ٤} هـ(س) = ٣$

$\therefore هـ(٤) = ٣$

ثانياً: إلى الطلوبة:

$\sqrt[٣]{\lim_{س \to ٤} د(س) - \lim_{س \to ٤} ١}$

$= \frac{(٣)^{٢} - ٣}{\sqrt[٣]{١٢}} = \frac{٩ - ٣}{\sqrt[٣]{١٢}}$

$= \frac{٦}{\sqrt[٣]{١٢}} = \frac{٦}{١}$

(٩٥) إذا كانت:

$\lim_{س \to ١} \frac{(س+٣)\, د(س)}{٢س^{٢} + ٢س - ٩} = ١$

$\lim_{س \to ١} د(س) = ٢$

$٩ \quad ٩$

حل المعادلة الثانية

المعطيات جاهزة وهي:

أولاً: الكل: $\lim_{س \to ١} د(س) = ٢$ جاهزة

ثانياً: وزني النهاية: $\lim_{س \to ١} (س+٣) \times \lim_{س \to ١} د(س)$ جاهزة

$= ١$

$\frac{\lim_{س \to ١} (٩س^{٢} + ٢س)}{}$

$= \frac{٢ \times (١+٣)}{٩(١)^{٢} + ٢(١)} = ١$

$= \frac{٢ \times ٤}{٢ + ٩} = ١$

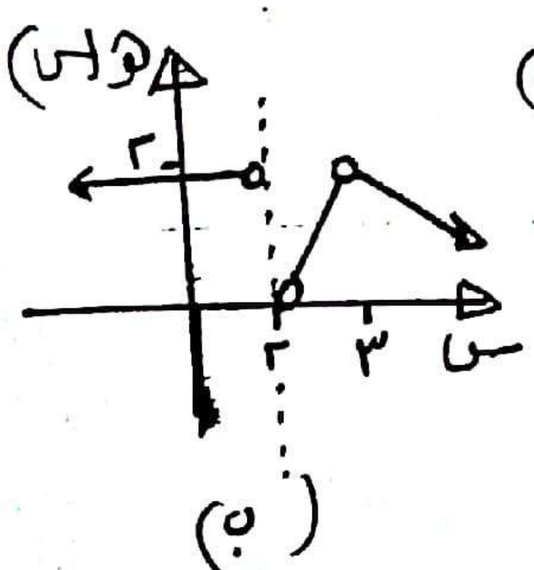
$\frac{١}{١} \not= \frac{٨}{٢+٩}$

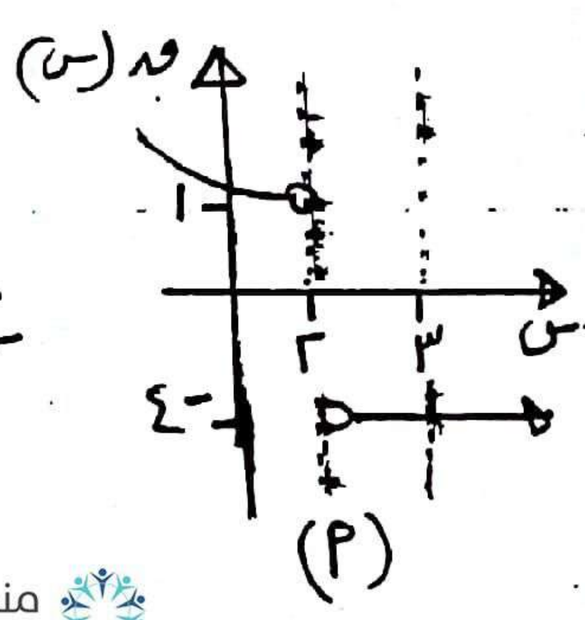
$٢ + ٩ = ٨$

$٩ = ٦$

(٩٦) الشكل (٩) يمثل $د(س)$

والشكل (ب) يمثل $هـ(س)$





غ/ قيمة: $\lim_{س \to ٣} \left(\frac{هـ(س) + ٢}{س - ٣} \right)^{٣} - \left(\frac{هـ(س) - ٥}{س^{٢} + ك - ١٢} \right)^{٢}$

الحل: انتبه هنا عزيزي الطالب/ الطالبة: الى العدد الموجود امام السالب وهو العدد (٣)

لذلك نذهب لـ: $\lim_{س \to ٣} هـ(س)$

شكل (P) ونجد: $س \to ٣$ ← تحوّل ← (٣)

لـ $هـ(س)$ يمين (٣) | يسار (٣)

$\lim_{س \to ٣^{+}} هـ(س) = ٤ = \lim_{س \to ٣^{-}} هـ(س) = ٤$

$\therefore \lim_{س \to ٣} هـ(س) = -٤$

ثم نذهب لـ: $\lim_{س \to ٣} هـ(س)$

شكل (ب): $س \to ٣$ ← تحوّل ← (٣)

لـ $هـ(س)$ يمين (٣) | يسار (٣)

$\lim_{س \to ٣^{+}} هـ(س) = ٢ = \lim_{س \to ٣^{-}} هـ(س) = ٢$

$\therefore \lim_{س \to ٣} هـ(س) = ٢$

الآن: نذهب للطلوب ونعوض بتوزيع النهاية:

$$\lim_{س \to ٣} \left(\frac{هـ(س) + ٢}{س - ٣} \right)^{٣} - \left(\frac{هـ(س) - ٥}{س^{٢} + ك - ١٢} \right)^{٢}$$

$$\frac{(٣)^{٢} + (٣) ك - ١٢}{٣ - ٣} + ٢ - (٥ - ٢)^{٣} - (-٤ + ٢)^{٣}$$

صيغة غير معتولة، نخلل

$$\lim_{س \to ٣} \frac{(س - ٣)(س + ٤)}{(س - ٣)} = ٣ + ٤ = ٧$$

$$-٨ - ٩ + ٧ \Leftarrow$$

$$-٨ - ٩ + ٧ = -١٧ + ٧ = -١٠$$

سُئل أحدهم (وهو عالم فذ في الرياضيات) ماذا نلت من الرياضيات؟ فأجاب بتواضع العظماء ما زلت طفلاً أحبو على شواطئها.

لا تحزن إن لم تجد شخصاً مهماً في حياتك، فقد تكون انت الشخص المهم في حياة الكثيرين وانت لا تدري.

منهاجي
متعة التعليم الهادف

الاتصال :

لنقسم الى نوعين :

النوع الاول : الاتصال عند نقطة .

النوع الثاني : نظريات في الاتصال (تعميم) للنوع الاول

النوع الاول : الاتصال عند نقطة

نقول أن $هـ(س)$ متصل عند $س = أ$

اذا حققت (٣) شروط :

① الصورة : $هـ(أ)$ = رقم معرف .

وجواب الصورة للايجاد النهاية موجودة .

② النهاية : $\lim_{س \to أ} هـ(س)$ = رقم موجودة

③ نفحص هل : $\lim_{س \to أ} هـ(س) \overset{؟}{=} هـ(أ)$

ملاحظة : إذا إختل أي شرط من الشروط السابقة نقول أن : $هـ(س)$ غير متصل عند $س = أ$

او : $هـ(س)$ منفصل عند $س = أ$

امثلة : ⑯ إذا كان :

$هـ(س) = س^٥ + ٢س - ١$

إبحثي في إتصال $هـ(س)$ عند $س = ١$ ؟ الأب / الإبن

الحل :

① الصورة : $هـ(١) = (١)^٥ + ٢(١) - ١ = ١ + ٢ - ١ =$ ② صرف

② النهاية : $\lim_{س \to ١} (س^٥ + ٢س - ١)$ موجودة

$= (١)^٥ + ٢(١) - ١ =$ ②

③ نفحص هل : $\lim_{س \to ١} هـ(س) \overset{؟}{=} هـ(١)$

② = ② هل

س = ١ متصل هـ(س) متصل

أو إجابة ثانية :

$هـ(س) = س^٥ + ٢س - ١$ كثير حدود

لأن درجته عددية وموجبة .

∴ هو متصل عند $س = ١$.

⑰ إذا كان :

$هـ(س) = (٣س - ٢)^٣ + ٥س$

إبحثي في إتصال $هـ(س)$ عند $س = ٢$ ؟ الأب / الإبن

الحل :

① الصورة : $هـ(٢) = (٤ - ٢)^٣ + ٥ \times ٢ =$

$= (٤ - ٤)^٣ + ١٠ =$

$= ٨ + ١٠ =$ ⑱ موجودة

② النهاية : $\lim_{س \to ٢} (٣س - ٢)^٣ + ٥س$

$= (٦ - ٢)^٣ + ١٠ = ٥ \times ٢ + ١٠ =$

$= ٨ + ١٠ =$ ⑱ موجودة

٣ نفحص هل: نهـا_{س→٢} هـ(س) = هـ(٢)

١٨ = ١٨

∴ هـ(س) كثير حدود (لأن درجته صحيحة وموجبة).

∴ هـ متصل عند س = ٢

أو إجابة ثانية:

(١٠٨) إذا كان:

هـ(س) = (س^٣ + ٨ + ٥س) / (س^٢ + ١) + ٢س - ٥ .

البحث في الاتصال: هـ(س) عند س = صفر

(صفر: ابن، س: أب)

الحل: ١ الصورة: هـ(٠) = (٠^٣ + ٨ + ٥(٠)) / (١ + ٠^٢) + ٢(٠) - ٥

= ٨ / ١ + ٠ - ٥ = ٨ - ٥ = ٣ (موجودة)

٢ النهاية: نهـا_{س→٠} (س^٣ + ٨ + ٥س) / (١ + س^٢) + ٢س - ٥

⟸ (٠^٣ + ٨ + ٥(٠)) / (١ + ٠^٢) + ٢(٠) - ٥

= ٨ / ١ + ٠ - ٥ = ٨ - ٥ = ٣ (موجودة) ⟸

٣ نفحص هل: نهـا_{س→٠} هـ(س) = هـ(٠)

٣ = ٣

∴ هـ(س) كثير حدود متصل عند س = ٠

(١٠٩) إذا كان:

هـ(س) = (س^٦ + ١) / (س - ١) .

البحث في الاتصال: هـ(س) عند س = ١

(١ : ابن، س : أب)

الحل: ١ الصورة: هـ(١) = (١^٦ + ١) / (١ - ١)

= ٢ / صفر ⟸ (٢/صفر غير معرفة)

٢ النهاية: نهـا_{س→١} (س^٦ + ١) / (س - ١) ⟸ (١^٦ + ١) / (١ - ١)

= ٢ / صفر ⟸ (٢/صفر غير معرفة)

٣ نفحص هل: نهـا_{س→١} هـ(س) = هـ(١)

(٢/صفر غير معرفة) ≠ (غير موجودة)

∴ هـ(س) كثير حدود غير متصل عند س = ١

(١١٠) إذا كان:

هـ(س) = (√(س^٢ + ٥) - ١) / (∛(س^٣ + ١٠) - ٢)

البحث في الاتصال: هـ(س) عند س = ٢

(٢ : ابن، س : أب)

الحل: ١ الصورة: هـ(٢) = (√(٢^٢ + ٥) - ١) / (∛(٢^٣ + ١٠) - ٢)

= (√٩ - ١) / (∛١٨ - ٢) ⟸ (√٩ - ١) / (∛١٨ - ٢)

= ٢ / ٠ ⟸ (٢/صفر غير معرفة)

٢ النهاية: نهـا_{س→٢} (√(س^٢ + ٥) - ١) / (∛(س^٣ + ١٠) - ٢)

= ٢ / ٠ ⟸ (٢/صفر غير معرفة)

٣ نفحص هل: نهـا_{س→٢} هـ(س) = هـ(٢)

(٢/صفر غير معرفة) ≠ (غير موجودة)

∴ هـ(س) كثير حدود غير متصل عند س = ١

٢ النهاية : $\lim_{س \to -٢} \frac{\sqrt{س^٢ + ٥} - ١}{\sqrt[٣]{س + ١٠} - ٢}$

$= \frac{\sqrt{(-٢)^٢ + ٥} - ١}{\sqrt[٣]{-٢ + ١٠} - ٢} = \frac{\sqrt{٩} - ١}{\sqrt[٣]{٨} - ٢}$

$= \frac{٣ - ١}{٢ - ٢} =$ صفر ← غير موجودة

٣ نفحص هل : $\lim_{س \to -٢} هـ(س) \stackrel{؟}{=} هـ(-٢)$

غير موجودة ≠ غير معرفة

∴ هـ(س) غير متصل عند س = -٢

(١١١) إذا كان :

$هـ(س) = \frac{س^٣ - ٢س^٢ + ٢س - ١٢}{س - ٢}$

إبحث في الاتصال : هـ(س) عند س = ٢

الابن ← س = ٢ ، الأب ← هـ(س)

الحل : ١ الصورة : $هـ(٢) = \frac{٢(٢)^٣ + ٢(٢)^٢ - ١٢}{٢ - ٢}$

$= \frac{٨ + ٤ - ١٢}{٢ - ٢} =$ صفر/صفر

انتباه : الصورة هكذا جوابها ← غير معرفة

٢ النهاية : $\lim_{س \to ٢} \frac{س^٣ + ٢س^٢ - ١٢س - ١٢}{س - ٢} = \frac{٢(٢)^٣ + ٢(٢)^٢ - ١٢}{٢ - ٢}$

$\Leftarrow \frac{٨ + ٤ - ١٢}{٢ - ٢} =$ صفر/صفر غير معتولة

نحلله .

$= \lim_{س \to ٢} \frac{(س - ٢)(س^٢ + ٦س + ٦)}{(س - ٢)} = (٢)^٢ + ٦(٢) + ٦ = ١٠$ موجودة

٣ نفحص هل : $\lim_{س \to ٢} هـ(س) \stackrel{؟}{=} هـ(٢)$

١٠ ≠ غير معرفة

∴ هـ(س) غير متصل عند س = ٢

(١١٢) إذا كان :

$هـ(س) = \begin{cases} س^٢ + ١ & ، س < ٣ \\ ٣س + ١ & ، س > ٣ \\ ١٠ & ، س = ٣ \end{cases}$

لا نستخدم في النهايات بل صورة فقط

إبحث في الاتصال : هـ(س) عند س = ٣

الابن ← س = ٣ ، الأب ← هـ(س)

الحل : ١ الصورة : هـ(٣) = ١٠ (من عند الدالة)

٢ النهاية : $\lim_{س \to ٣} هـ(س)$ نهاها من يمين ومن يسار (تحول)

يسار (٣) ← س < ٣ ، يمين (٣) ← س > ٣

$\lim_{س \to ٣^-} (س^٢ + ١) = ١ + (٣)^٢ = ١٠$

$\lim_{س \to ٣^+} (٣س + ١) = ١ + ٣(٣) = ١٠$

∴ $\lim_{س \to ٣} هـ(س)$ موجودة = ١٠

٣ نفحص هل : $\lim_{س \to ٣} هـ(س) \stackrel{؟}{=} هـ(٣)$

١٠ = ١٠

هـ(س) ، متصل ، س = ٣

إذا أردت أن تعرف ماذا تعني أنت ؟

أنت الأمل الجميل ، وطيف الروائع ،

وراحم الأب مه على

من هم ربياني صغيرا .

(١١٣) إذا كان :

$$\text{ه}(س) = \begin{cases} \frac{س^{٣}-٢٥}{س-٥} & ، س < ٥ \\ -٢س & ، س > ٥ \\ ١٠ & ، س = ٥ \end{cases}$$

لا نستخدم في النهايات بل صورة

إبحثي في اتصال : ه(س) عند س = ٥

الإبن ← س = ٥ ← الأب

الحل : ١ الصورة : ه(٥) = ١٠ (من عند المساواة)

٢ النهاية : $\lim_{س \to ٥} ه(س)$

نهـ ← ٥ من اليمين ($س > ٥$) : $\frac{س^{٣}-٢٥}{س-٥} = \frac{(٥)^{٢}-٢٥}{٥-٥} = \frac{٠}{٠}$ صيغة غير معينة

نهـ ← ٥ من اليسار ($س < ٥$) : $-٢س = -٢(٥) = -١٠$

$\therefore$ نهـ ← ٥ ه(س) غير موجودة

$\therefore$ ه(س) غير متصل عند س = ٥

٣ نتحقق هل : نهـ ← ٥ ه(س) = ه(٥) ؟

$-١٠ \neq ١٠$

خلل : صيغة غير معينة $\frac{٠}{٠}$

$= \frac{(س-٥)(س+٥)}{(س-٥)} = س+٥$

نهـ ← ٥ $= ٥+٥ = ١٠$

$\therefore$ نهـ ← ٥ ه(س) غير موجودة

$\therefore$ ه(س) غير متصل عند س = ٥

---

(١١٤) إذا كان :

$$\text{ه}(س) = \begin{cases} \frac{(س+١)^{٢}-١٦}{س-٣} & ، س < ٣ \\ ٣س-٣+٢ & ، س \geq ٣ \end{cases}$$

إبحثي في اتصال : ه(س) عند س = ٣

الإبن ← س = ٣ ← الأب

الحل : ١ الصورة : ه(٣) = ٨ (من عند المساواة) مرفوض

$= ٣ \times ٢ + ٢ = ٦ + ٢ = ٨$

٢ النهاية : $\lim_{س \to ٣} ه(س)$

نهـ ← ٣ من اليمين ($س > ٣$) : $٣س-٣+٢ = ٣(٣)-٣+٢ = ٨$

نهـ ← ٣ من اليسار ($س < ٣$) : $\frac{(س+١)^{٢}-١٦}{س-٣} = \frac{(٣+١)^{٢}-١٦}{٣-٣} = \frac{٠}{٠}$ صيغة غير معينة

خلل : صيغة غير معينة $\frac{٠}{٠}$

$= \frac{(س+١+٤)(س+١-٤)}{س-٣}$

نهـ ← ٣ $= \frac{(س+٥)(س-٣)}{(س-٣)}$

نهـ ← ٣ $= (٣+٥) = ٨$

$\therefore$ نهـ ← ٣ ه(س) موجودة $= ٨$

٣ نتحقق هل : نهـ ← ٣ ه(س) = ه(٣) ؟

$٨ = ٨$

$\therefore$ ه(س) متصل عند س = ٣

(١١٤) إذا كان :

$$\text{هـ}(س) = \begin{cases} \frac{س^٣ + س - ٤٢}{٦ - س} & ، س < ٦ \\ ٢س + ١ & ، س > ٦ \end{cases}$$

البحث في اتصال : هـ(س) عند س = ٦ ؟

هـ(س) عند س = ٦ : الأب

س = ٦ : الابن

الحل : ① الصورة : هـ(٦) = من عند الأداة (لكن لا يوجد أداة) ∴ غير معرفة

② النهاية : $\lim_{س \to ٦}$ هـ(س) ← نراها من يمين (تحول)

$\lim_{س \to ٦^+}$ (٢س + ١) ← $\lim_{س \to ٦^+}$ (٢ × ٦ + ١)

$\lim_{س \to ٦^+} = ١٣$

$\lim_{س \to ٦^-}$ $\frac{س^٣ + س - ٤٢}{٦ - س}$ ← $\lim_{س \to ٦^-}$ $\frac{(٦)^٣ + (٦) - ٤٢}{٦ - ٦}$

$= \frac{٢١٦ + ٦ - ٤٢}{٠} = \frac{١٨٠}{٠}$ = صف / صفر ← غير معرفة

$\lim_{س \to ٦^-} = \frac{(س - ٦)(س + ٧)}{٦ - س}$ ← $\lim_{س \to ٦^-} = -(٦ + ٧) = -١٣$

∴ $\lim_{س \to ٦}$ هـ(س) غير موجودة = ⑬

③ نفحص هل : $\lim_{س \to ٦}$ هـ(س) = هـ(٦)

⑬ ≠ ⑬ غير صحيحة

∴ هـ(س) غير متصل عند س = ٦

(١١٥) إذا كان :

$$\text{هـ}(س) = \begin{cases} \frac{س^٣ - ٣س^٢}{٦ - س^٢} & ، س \neq ٣ \\ \frac{٣}{٢} & ، س = ٣ \end{cases}$$

صورة فقط

البحث في اتصال : هـ(س) عند س = ٣ ؟

الحل : ① الصورة : هـ(٣) = $\frac{٣}{٢}$ من عند الأداة

② النهاية : $\lim_{س \to ٣}$ هـ(س) ← من عند س ≠ ٣

∴ $\lim_{س \to ٣}$ $\frac{س^٣ - ٣س^٢}{٦ - س^٢}$ ← $\lim_{س \to ٣}$ $\frac{(٣)^٣ - ٣(٣)^٢}{٦ - (٣)^٢}$

$= \frac{٩ - ٩}{٦ - ٦} = \frac{٠}{٠}$ = صف / صفر ← غير معرفة

الحل : لابد تحليل البسط والمقام لإيجاد عامل مشترك

$\lim_{س \to ٣}$ $\frac{س^٢ - ٣س}{٦ - س^٢}$ ← $\lim_{س \to ٣}$ $\frac{س(س - ٣)}{(٣ - س)(٣ + س)}$ ← $\lim_{س \to ٣}$ $\frac{س}{-(٣ + س)}$

$= \frac{٣}{-٦} = -\frac{١}{٢}$

③ نفحص هل : $\lim_{س \to ٣}$ هـ(س) = هـ(٣)

$-\frac{١}{٢} = \frac{٣}{٢}$ ← س ← ٣

∴ هـ(س) غير متصل عند س = ٣

ايجاد ثوابت إذا أُعطي لنا أن $هـ(س)$ متصل

(١١٦) إذا كان :

$$هـ(س) = \begin{cases} ٢س + ٣أ ، & س < ٢ \\ ب س - ١٠ ، & ٢ < س < ٣ \\ ٦ ، & س = ٣ \end{cases}$$

صورة منقطة ← الأب

متصل عند $س = ٢$ ، $س = ٣$ ← الأبن ، لماذا تم اختيار الثوابت $(أ ، ب)$

الحل : بما أن : $هـ(س)$ متصل عند $س = ٢$ ← الأب ← الأبن

∴ الصورة = النهاية

① الصورة : $هـ(٢) = ٦$ معرّف

② النهاية : نهـا $_{س \to ٢}$ $هـ(س)$ ← نراها من يمين ويسار

$س > ٢$ ، $س < ٢$

نهـا $_{س \to ٢^+}$ $(ب س - ١٠)$ = نهـا $_{س \to ٢^-}$ $(٢أ + ٣)$

$ب \times ٢ - ١٠$ = $٢ \times ٢أ + ٣$

$٢ب - ١٠$ = $٤أ + ٣$ ← اجابة

③ الفحص : نهـا $_{س \to ٢}$ $هـ(س)$ = $هـ(٢)$

نهـا $_{س \to ٢}$ $(٢ب - ١٠)$ = $(٤أ + ٣)$ ← ج

$٦ = ٤أ + ٣$

$٤أ = ٣$

$أ = \frac{٣}{٤}$

$٢ب - ١٠ = ٦$

$٢ب = ١٦$

$ب = ٨$

∴ $(أ ، ب) = (\frac{٣}{٤} ، ٨)$

(١١٧) إذا كان :

$$هـ(س) = \begin{cases} أ(س - ٣)^٢ - ب ، & س < ٥ \\ ٤ - س + أ ، & ٥ < س < ٧ \\ ٢٣ ، & س = ٥ \end{cases}$$

صورة منقطة ← الأب

متصل عند $س = ٥$ ← الأبن ، لماذا تم اختيار الثوابت $(أ ، ب)$

الحل : بما أن $هـ(س)$ متصل عند $س = ٥$ ← الأب ← الأبن

∴ الصورة = النهاية

① الصورة : $هـ(٥) = ٢٣$ معرّف

② النهاية : نهـا $_{س \to ٥}$ $هـ(س)$ ← نراها من يمين ويسار

$س > ٥$ ، $س < ٥$

نهـا $_{س \to ٥^+}$ $(٤ - س + أ)$ = نهـا $_{س \to ٥^-}$ $أ(س - ٣)^٢ - ب$

$٤ \times ٥ + أ$ = $أ(٥ - ٣)^٢ - ب$

$٢٠ + أ$ = $٤أ - ب$ ← اجابة

③ الفحص : نهـا $_{س \to ٥}$ $هـ(س)$ = $هـ(٥)$

نهـا $_{س \to ٥}$ $(٤أ - ب)$ = $(٢٠ + أ)$ = ٢٣

$٣أ = ٣$

$أ = ١$

$٢٠ + أ = ٢٣$

$ب = ٤أ - ٢٣$

$ب = ٤ - ٢٣$

$ب = -١٩$

∴ $(أ ، ب) = (١ ، -١٩)$

(١١٨) إذا كان :

$$\text{قا}(س) = \begin{cases} ٩ & ، س = ٣ \\ ٢س^{٢} - ٣س + ٦ & ، س > ٣ \\ ٢س^{٢} - ب س & ، س < ٣ \end{cases}$$

صورة فقط

متصل عند $س = ٣$ ، فجد قيمة الثابت $(أ ، ب)$.

الحل : بما أن $\text{قا}(س)$ متصل عند $س = ٣$ (الابن) (الأب)

∴ الصورة = النهاية

① الصورة : $\text{قا}(٣) = ٩$ معرف

② النهاية : $\lim_{س \to ٣} \text{قا}(س)$ نهايتان مختلفتان

$س \to ٣^{+}$: $(٢س^{٢} - ٣س + ٦)$

$= ٢(٣)^{٢} - ٣(٣) + ٦$

$= ١٨ - ٩ + ٦$

$= ١٥$

$س \to ٣^{-}$: $(أ س^{٢} - ب س)$

$= أ(٣)^{٢} - ب(٣)$

$= ٩أ - ٣ب$

③ الفحص : $\lim_{س \to ٣} \text{قا}(س) = \text{قا}(٣)$

$٩أ - ٣ب = ٩ \Leftarrow ٩أ - ٣ب = ٩$

$٩ - ٩ = ٣ب - ٩أ$

$٠ = ٣ب - ٩أ$

$\frac{٠}{-٣} = \frac{٣ب - ٩أ}{-٣}$

$ب = ٣أ \Leftarrow ب = ص ، أ = ص$

$ب = ص$

(١١٩) إذا كان :

$$\text{قا}(س) = \begin{cases} ٢س^{٢} - ٦ & ، س < ٤ \\ ٢أ & ، س = ٤ \\ أ س - ٢ & ، س > ٤ \end{cases}$$

صورة فقط

متصل عند $س = ٤$ ، فجد قيمة الثابت $(أ ، ب)$.

الحل : بما أن $\text{قا}(س)$ متصل عند $س = ٤$ (الابن)

∴ الصورة = النهاية

① الصورة : $\text{قا}(٤) = ٢أ$ معرف

② النهاية : $\lim_{س \to ٤} \text{قا}(س)$ نهايتان مختلفتان

$س \to ٤^{+}$: $(أ س - ٢)$

$= ٤أ - ٢$

$س \to ٤^{-}$: $(٢س^{٢} - ٦)$

$= ٢(٤)^{٢} - ٦$

$= ٣٢ - ٦$

$= ٢٦$

③ الفحص : $\lim_{س \to ٤} \text{قا}(س) = \text{قا}(٤)$

$٤أ - ٢ = ٢أ \Leftarrow ٤أ - ٢ = ٢أ$

$٤أ - ٢أ = ٢$

$٢أ = ٢$

$\frac{٢أ}{٢} = \frac{٢}{٢}$

$أ = ١$

نبدأ بحل الحرف أ

⑨ $٢أ = ٤أ - ٢ب$

$٢ = ٤ - ٢ب$

$-٢ = -٢ب$

$\frac{-٢}{-٢} = \frac{-٢ب}{-٢}$

$ب = ١$

نعوض هنا

$٢أ = ٤أ - ٢ب$

$٢ \times ١ = ٤ \times ١ - ٢ب$

$٢ = ٤ - ٢ب$

$-٢ = -٢ب$

$\frac{-٢}{-٢} = \frac{-٢ب}{-٢}$

$ب = ١$

(١٢٠) إذا كان :

$$\text{قا}(س) = \begin{cases} أ س^3 - ب س^2 & ، س < 1 \\ 3أ س^2 + 2ب س & ، س > 1 \\ 5 & ، س = 1 \end{cases}$$

صورة مفردة

متصل عند $س = 1$ ، فأوجد الثوابت $(أ، ب)$

الحل: بما أن $\text{قا}(س)$ متصل عند $س = 1$

الأب — الابن

$\therefore$ الصورة = النهاية

① الصورة : $\text{قا}(1) = 5$ معرف

② النهاية : نهـا $\text{قا}(س)$

$س \to 1$

نهـا $(أ س^3 - ب س^2)$ ← $س < 1$

نهـا $(3أ س^2 + 2ب س)$ ← $س > 1$

$س \to 1^+$ ، $س \to 1^-$

$أ(1)^3 - ب(1)^2$ ، $3أ(1)^2 + 2ب(1)$

$أ - ب$ ، $3أ + 2ب$

③ الفحص : نهـا $\text{قا}(س) = \text{قا}(1)$

$س \to 1$

$أ - ب = 3أ + 2ب = 5$

$\therefore أ - ب = 5$ ← ①

$3أ + 2ب = 5$ ← ②

لوجود $أ$ من كل معادلة نحلهم بالحذف او التعويض او الطرح.

الآن : ① ← $أ - ب = 5$

② ← $3أ + 2ب = 5$

③ = ① × ب + ② × ٢

$5أ = 15$

$\frac{5أ}{5} = \frac{15}{5}$

$أ = 3$

$3 - ب = 5$

$-ب = 5 - 3$

$-ب = 2$

$ب = -2$

$\therefore (أ، ب) = (3، -2)$

(١٢١) إذا كان :

$$\text{قا}(س) = \begin{cases} أ س^2 - ب & ، س < 1 \\ 2س + أ & ، 1 \le س < 4 \\ أ ب & ، س \ge 4 \end{cases}$$

متصل عند كل من : $س = 1$ ، $س = 4$

فأوجد الثوابت $(أ، ب)$ ؟

الحل: انتباه هنا لدينا $\text{قا}(س)$ متصل مرتين ، مرة عند $س = 1$ ، ومرة عند $س = 4$

لذلك نحله عند كل عدد لوحده

أي أن: بما أن $\text{قا}(س)$ متصل عند $س = 1$

الأب — الابن

$\therefore$ الصورة = النهاية

① الصورة : $\text{قا}(1) =$ من عند المعادلة

$= أ(1)^2 - ب$

$= أ - ب$

$= 2(1) + أ$

$= 2 + أ$

$أ - ب = 2 + أ$

$-ب = 2$

$ب = -2$

② الزهاية : نهـا حد (س)
س ← ① ← نراها من س

س < ١ | س > ١

نهـا (م س^٢ - ب) | نهـا (م + ٤ - س)

س ← ١⁻ | س ← ١⁺

م (١)^٢ - ب | (م + ٤ × ١) + ١

م - ب | م + ٣

=

③ الفحص : نهـا حد (س) = حد (١)
س ← ١

م + ٣ = م - ب = م + ٣

① | ③

م + ٣ = م - ب ③ ∴ م + ٣ = م + ٣

لا تحل ، لذلك نذهب إلى أن حد (س) متصل عند س = ٤ ونحقق (٣) شروط

أيضاً :

بما أن حد (س) متصل عند س = ٤

الأب | الابن

① الصورة : حد (٤) = من عند لا نهاية = (م ٢)

② النهاية : نهـا حد (س)
س ← ٤ ← نراها من س

س < ٤ | س > ٤

نهـا (م ٢) | نهـا (م + س - ٢)

س ← ٤⁺ | س ← ٤⁻

م ٢ | م + ٤ × ج

م + ٨

=

③ الفحص : نهـا حد (س) = حد (٤)
س ← ٤

م ٢ = م + ٨ = م ٢

∴ م + ٣ = م + ٣

لا تحل

---

⑫ إذا كان

حد (س) = { (س^٢ - ٣س - ٤) / (٦ - س - ٢) ، س ≠ ٣ ؛ ٧/٢ - ج ، س = ٣ }

متصل عند س = ٣ ، فما قيمة الثابت ج ؟

الحل : بما أن حد (س) متصل عند س = ٣

الأب | الابن

∴ الصورة = النهاية

① الصورة : حد (٣) = ٧/٢ - ج

② النهاية : نهـا حد (س)
س ← ٣ ← من عند س ≠ ٣

نهـا (س^٢ - ٣س - ٤) / (٦ - س - ٢) = (٣)^٢ - ٣(٣) - ٤ / ٦ - (٣) - ٢ = صفر / صفر (غير معرفة)

الحل : $\lim_{س \to ٣} \frac{ق(س) - ق(٣)}{(س-٣)^{٢}} = \frac{٣}{٢}$

نخرج عامل مشترك :

③ الخص : $\lim_{س \to ٣} \frac{ق(س) - ق(٣)}{س - ٣} = ق'(٣)$

$\frac{٣}{٢} = ٥ ، \frac{٧}{٢} - ٥$

$\therefore ٥ ، \frac{٣}{٢} = ٥ ، \frac{٧}{٢} + ٥$

$٥ ، \frac{٣}{٢} = ٥ ، \frac{٧}{٢} + ٥$

$٥ ، ١٠ = ٥$

$٥ = ١$

(١٢٣) إذا كان $ق(س)$ متصل عند $س = ٥$

وكانت : $ق(٥) = ٤$.

خاصة : $\lim_{س \to ٥} (٢ ق(س) + س^{٢} - ٣س + ١)$

الحل : ملخص $ق(س)$

$ق(س)$ متصل عند ٥

$\therefore$ النهاية = الصورة

$\therefore \lim_{س \to ٥} ق(س) = ق(٥)$

مفظ نقا ④

$\therefore$ جواب النهاية ④

نعود للمطلوب : فقط وزهي النهاية :

$\lim_{س \to ٥} ٢ \times \lim_{س \to ٥} ق(س) + \lim_{س \to ٥} (س^{٢} - ٣س + ١)$

$٢ \times (٤) + (٥)^{٢} - ٣(٥) + ١ \Leftarrow ٨ + ٥ - ١٥ + ١$

$\Leftarrow ٨ + ٩ = ١٧$ ⑰ جوابنا

(١٢٤) إذا كان $ق(س)$ متصل عند $س = ٢$

$ق(٢) = ٣$ ، وكانت : $ق(س) \neq ٧$ كثير حدود

$ق(٢) = ٧$

وكانت : $\lim_{س \to ٢} \frac{ق^{٣}(س) - ق(س)}{س + ٢} = ٥$

خاصة $ق(٢)$ ؟

الحل : ملخص $ق(س)$ ملخص $هـ(س)$

$ق(س)$ متصل عند ② $هـ(س)$ كثير حدود

$\therefore$ النهاية = الصورة $\therefore$ النهاية = الصورة

$\lim_{س \to ٢} ق(س) = ق(٢)$ $\lim_{س \to ٢} هـ(س) = هـ(٢)$

مجهولة مجهولة

$\therefore$ جوابنا ⑦ $\therefore$ جوابنا ⑦

الى المطلوب

نوزع النهاية :

$\lim_{س \to ٢} ق^{٣}(س) - \lim_{س \to ٢} هـ(س)$

$\frac{\lim_{س \to ٢} ق^{٣}(س) - \lim_{س \to ٢} هـ(س)}{\lim_{س \to ٢} س + ٢} = ٥$

$\frac{\lim_{س \to ٢} ق^{٣}(س) - ٧}{٢ + ٢} = ٥$

$\frac{\lim_{س \to ٢} ق^{٣}(س) - ٧}{٤} = ١ \frac{٥}{١}$

$\lim_{س \to ٢} ق^{٣}(س) - ٧ = ٢٠$

$\lim_{س \to ٢} ق^{٣}(س) = ٢٧$ خذ $\sqrt[٣]{}$ للطرفين

$\lim_{س \to ٢} ق(س) = ٣$

$\therefore ق(٢) = ٣$ ،

النوع الثاني: نظريات في الاتصال :

(تعميم للنوع الأول) .

إذا كان :

$\text{هـ}(س)$ متصل عند $س = أ$

$\text{هـ}(س)$ متصل عند $س = أ$

فإن ① $(\text{هـ} + \text{هـ})(س)$ متصل عند $س = أ$

② $(\text{هـ} - \text{هـ})(س)$ متصل عند $س = أ$

③ $(\text{هـ} \times \text{هـ})(س)$ متصل عند $س = أ$

④ $\left(\frac{\text{هـ}}{\text{هـ}}\right)(س)$ متصل عند $س = أ$

بشرط $\text{هـ}(أ) \neq$ صفر .

عزيزي الطالب / الطالبة :

لدينا ملخص :

ملخص (١) : متصل $\pm$ متصل $=$ متصل

$\times$

$\div$

وتتم على مرحلتين ثم نحكم بأنه (متصل)

ملخص (٢) : لو جاء احدهما او كلاهما غير متصل فلا نحكم مباشرة ، بل نحتاج لإجراء العملية الكلية ثم نحكم

لذلك : نهو بحاجه لـ ٣ مراحل ثم نحكم .

الى للمثلة :

(١٢م) اذا كان :

$\text{هـ}(س) = س^٣ + ٥س$

$\text{هـ}(س) = \frac{٨}{س + ١}$ ، $س \neq -١$

إلبحث في إتصال : $\text{هـ}(س) + \text{هـ}(س)$ عند $س = ١$ ؟

الحل : ⑨ ند $س$ إتصال عند $س = ١$

$\text{هـ}(س)$ عند $س = ١$

---

① الصورة : صرف

$\text{هـ}(١) = (١)^٣ + ٥(١) = ⑥$

② النهاية :

نهـا $\underset{س \to ١}{}$ $(س^٣ + ٥س) = (١)^٣ + ٥(١)$

$= ١ + ٥$

$= ⑥$ موجودة

③ نفحص هل :

نهـا $\underset{س \to ١}{}$ $\text{هـ}(س) \stackrel{؟}{=} \text{هـ}(١)$

⑥ $=$ ⑥

$\text{هـ}(س)$ ، متصل ، $س = ١$

---

⑪ الصورة : صرف

$\text{هـ}(١) = \frac{٨}{١ + ١} = \frac{٨}{٢} = ④$

② النهاية :

نهـا $\underset{س \to ١}{}$ $\frac{٨}{١ + س} = \frac{٨}{٢} = ④$ موجودة

③ نفحص هل :

نهـا $\underset{س \to ١}{}$ $\text{هـ}(س) \stackrel{؟}{=} \text{هـ}(١)$

④ $=$ ④

$\text{هـ}(س)$ ، متصل ، $س = ١$

الجواب النهائي :

$\text{هـ}(س) + \text{هـ}(س)$ متصل عند $س = ١$

$= \text{هـ}(س)$ متصل عند $س = ١$ $+$ $\text{هـ}(س)$ متصل عند $س = ١$

أو : يوجد طريقة ثانية وهي : ان ندمج الامرين مع بعض حسب العملية الموجودة ونكون امر ان واحد ثم ندرسه فقط .

(١٢٦) إذا كان :

$$\text{هـ}(س) = \begin{cases} \frac{٦}{س} + (س-٢)^{٣} & ، س \neq ٣ \\ ١٥ & ، س = ٣ \\ ٥س & ، س < ٣ \\ س^{٢}+٦ & ، س > ٣ \end{cases}$$

لا تستخدم في النهايات بل صورة

إبحثي في اتصال : $\text{هـ}(س) - \text{ه}(س)$ عند $س = ٣$ ؟

الحل : (ندرس) إتصال $\text{هـ}(س)$ عند $س = ٣$

١ الصورة : $\text{هـ}(٣) = ١٥$ (من عند ١ لـ اواة)

٢ النهاية : $\lim_{س \to ٣} \text{هـ}(س)$

نهـ $(٥س)$ $= ٣ \times ٥ = ١٥$ (٣)

$س \to ٣^{+}$

نهـ $(س^{٢}+٦)$ $= (٣)^{٢}+٦ = ١٥$ (٣)

$س \to ٣^{-}$

$\therefore$ نهـ $\text{هـ}(س)$ موجودة .

٣ نفحص هل : نهـ $\text{هـ}(س) \overset{؟}{=} \text{هـ}(٣)$

$س \to ٣$

(٣) $\overset{؟}{=}$ (١٥)

هـ(س) | منفصل | $س = ٣$

(١٢٦) الجواب النهائي : $\text{هـ}(س) - \text{ه}(س)$

$س \to ٣$ متصل عند $س = ٣$ (٣)

$س \to ٣$ متصل عند $س = ٣$ (٣)

$\Leftarrow$ متصل عند $س = ٣$.

(١٢٧) إذا كان :

$$\text{ه}(س) = \begin{cases} س^{٢}+١ & ، س \geq ٢ \\ ٢س+١ & ، س < ٢ \end{cases}$$

$$\text{هـ}(س) = \begin{cases} ٥س & ، س < ٢ \\ ١٠ & ، س = ٢ \\ س^{٢}+٦ & ، س > ٢ \end{cases}$$

إبحثي في اتصال : $\text{ه}(س) \times \text{هـ}(س)$ عند $س = ٢$ ؟

الحل : (ندرس) إتصال $\text{ه}(س)$ عند $س = ٢$

الأب | الإبن

١ الصورة : $\text{ه}(٢) =$ من عند ١ لـ اواة $= (٢)^{٢}+١ = ٤+١ = ٥$

٢ النهاية : نهـ $\text{ه}(س)$

نهاها مرتين

يمين (٢) : $س > ٢$ ، نهـ $(س^{٢}+١) = (٢)^{٢}+١ = ٥$ (٥)

يسار (٢) : $س < ٢$ ، نهـ $(٢س+١) = ٢ \times ٢+١ = ٤+١ = ٥$ (٥)

$\therefore$ نهـ $\text{ه}(س)$ موجودة ، تساوي (٥)

٣ نفحص هل : نهـ $\text{ه}(س) \overset{؟}{=} \text{ه}(٢)$

$س \to ٢$

(٥) $\overset{؟}{=}$ (٥)

ه(س) | منفصل | $س = ٢$

⑨ ندرس إتصال هـ(س) عند س=٢ :

الأب — الابن

① الصورة : هـ(٢) = ⑩ معرف

② النهاية : نهـا هـ(س)

س ← ٢

نراها من يمين ويسار (٢)

يسار (٢): س ← ٢⁻

نهـا (٥ − س) = ٥ × ٢ = ⑩

س ← ٢⁻

يمين (٢): س ← ٢⁺

نهـا (س² + ٦) = (٢)² + ٦ = ٤ + ٦ = ⑩

س ← ٢⁺

∴ نهـا هـ(س) موجودة = ⑩

س ← ٢

③ نفحص هل: نهـا هـ(س) = هـ(٢)

س ← ٢

⑩ = ⑩

هـ(س) متصل عند س=٢

الجواب النهائي: هـ(س) = ق(س) × هـ(س)

ق(س) متصل عند س=٢ — هـ(س) متصل عند س=٢

ق(٢) = ⑩ — هـ(٢) = ⑩

(١٢) إذا كان: هـ(س) = { ٥ + س³ ، س ≠ ١ ; ٦ ، س = ١ }

صورة فقط

هـ(س) = { ؟ ، س = ١ ; ٣ ، س = ٢ ; ٢ − س ، س > ١ ; ١ − س² ، س < ١ }

صورة فقط

إيجاد مجال إتصال : ل(س) = هـ(س) / ق(س)

عند س = ١ ؟

الحل: ندرس إتصال هـ(س) عند س=١

الأب — الابن

① الصورة : هـ(١) = ⑥ معرف (من عند المساواة)

② النهاية : نهـا هـ(س)

س ← ١ — من عند س ≠ ١

نهـا (٥ + س³) = ٥ + (١)³ = ٥ + ١ = ⑥ موجودة

س ← ١

③ نفحص هل: نهـا هـ(س) = هـ(١)

س ← ١

⑥ = ⑥

هـ(س) متصل عند ك=١

⑤ ندرس إتصال هـ(س) عند س=١

الأب — الابن

① الصورة: هـ(١) = ② معرف

② النهاية: نهـا هـ(س)

س ← ١

نراها من يمين ويسار (١)

يسار (١): س ← ١⁻

نهـا (س − ١)/(س² − ١) = نهـا (س − ١)/((س − ١)(س + ١))

س ← ١⁻ — س ← ١⁻

= نهـا ١/(س + ١) = ١/(١ + ١) = ١/٢

س ← ١⁻

يمين (١): س ← ١⁺

نهـا (٢ − س) = ٢ − ١ = ١

س ← ١⁺

∴ نهـا هـ(س) غير موجودة

س ← ١

③ نفحص هل: نهـا هـ(س) ≠ هـ(١)

س ← ١

② ≠ ⑥

هـ(س) غير متصل عند س=١

الجواب النهائي: ل(س) = ق(س) / هـ(س)

ق(س) متصل عند س=٢ — هـ(س) متصل عند س=٢

ق(٢) = ⑥ — هـ(٢) = ⑥

ل(س) متصل عند س=٢

∴ ل(س) = $\frac{\text{هـ}(س)}{\text{هـ}(س)}$ ← متصل عند ①

هـ(س) ≠ ٠ وأيضاً هـ(١) ≠ ٠

متصل عند ①

⟸ ∴ ل(س) متصل عند س = ١ .

(١٢٩) إذا كان :

هـ(س) = $س^{٢}$ + ٥

د(س) = { ٣س ، س < ٤ ; $س^{٢}$ ، س ≥ ٤ }

المطلوب فحص الاتصال : هـ(س) + د(س)

عند س = ٤ ؟

الحل : ندرس إتصال هـ(س) عند س = ٤

① الصورة : هـ(٤) = $٤^{٢}$ + ٥

= ١٦ + ٥

= ٢١ ✓

② النهاية : نهـا (س^{٢} + ٥)

س ← ٤

بالتعويض المباشر

= ١٦ + ٥

= ٢١ ✓

③ نفحص هل :

نهـا هـ(س) = هـ(٤)

س ← ٤

٢١ = ٢١ ✓

∴ هـ(س) متصل عند س = ٤

ندرس إتصال د(س) عند س = ٤

① الصورة : د(٤) = ٣ × ٤

= ١٢ ✓

② النهاية : نهـا د(س)

س ← ٤

يمين (٤) يسار (٤)

س > ٤ ، س < ٤

نهـا (٣س) ، نهـا ($س^{٢}$)

س ← ٤+ ، س ← ٤-

٣ × ٤ ، $٤^{٢}$

١٢ ، ١٦

١٢ ≠ ١٦

∴ نهـا د(س) غير موجودة

س ← ٤

∴ د(س) غير متصل عند س = ٤

∴ هـ(س) + د(س) غير متصل عند س = ٤

الآن : هـ(س) + د(س) + هـ(س)

متصل عند ④ + غير متصل عند ④ ← غير متصل عند ④

⟸ لا نستطيع الحكم مباشرة

بل نعمل مظوة ثالثة وهي :

① نسمي (نفرض) اقتران جديد

ل(س) = هـ(س) + د(س)

② ندرس إتصال ل(س) عند س = ٤ ؟

① الصورة : ل(٤) = هـ(٤) + د(٤)

= ٢١ + ١٦ = ٣٧ ✓

② النهاية : نهـا ل(س)

س ← ٤

يسار (٤) يمين (٤)

س < ٤ ، س > ٤

نهـا ل(س) ، نهـا ل(س)

س ← ٤- ، س ← ٤+

نهـا (هـ(س) + د(س)) ، نهـا (هـ(س) + د(س))

س ← ٤- ، س ← ٤+

٢١ + ٨ = ٢٩ ✓ ، ٢١ + ٦ = ٢٧ ✓

∴ نهـا ل(س) غير موجودة

س ← ٤

③ نفحص هل : نهـا ل(س) = ل(٤)

س ← ٤

٢٧ ≠ غير موجودة

∴ ل(س) غير متصل عند س = ٤

(١٣) إذا كان :

$$\text{قا}(س) = \begin{cases} س-١ & ، س < ٥ \\ س+٣ & ، ٥ > س \\ ٨ & ، س = ٥ \end{cases}$$

للاستخدام نهايات بل صورة

$$\text{هـ}(س) = \begin{cases} (٥-س)^{٢} & ، س < ٥ \\ ٣-س & ، ٥ > س \\ ٤ & ، س = ٥ \end{cases}$$

للاستخدام نهايات بل صورة

البحث في إتصال : قا(س) − هـ(س) عند س = ٥ ؟

الحل : نقدر س إتصال قا(س) عند س = ٥ الأب ، س = ٥ الابن

① الصورة : قا(٥) = ٨ (من عند المادة)

② النهاية : $\lim_{س \to ٥}$ قا(س)

نراها صريحتين عند س = ٥

$\lim_{س \to ٥^+}$ (س+٣) = ٨

$\lim_{س \to ٥^-}$ (١-س) = ٤

∴ نهـ قا(س) غير موجودة

③ نفحص هل : $\lim_{س \to ٥}$ قا(س) ≠ قا(٥)

٤ ≠ غير موجودة

هل س = ٥ ، غير متصل ، هـ(س)

∴

الآن : قا(س) − هـ(س)

غير متصل عند س = ٥ − غير متصل عند س = ٥

لا نحكم مباشرة بل نبحث

② النهاية : $\lim_{س \to ٥}$ هـ(س)

نراها صريحتين عند س = ٥

يسار (٥) ، س < ٥ ، $\lim_{س \to ٥^-}$ (٥-س)^٢ = (٥-٥)^٢ = ٠

يمين (٥) ، س > ٥ ، $\lim_{س \to ٥^+}$ (٣-س) = ٣-٥ = -٢

∴ نهـ هـ(س) غير موجودة

③ نفحص هل : $\lim_{س \to ٥}$ هـ(س) ≠ هـ(٥)

٤ ≠ غير موجودة

هل س = ٥ ، غير متصل ، هـ(س)

∴

الآن : قا(س) − هـ(س)

غير متصل عند س = ٥ − غير متصل عند س = ٥

لا نحكم مباشرة بل نبحث

البحث في إتصال : ق(س) − ل(س)

عند س = ٥

الحل : نقدر س إتصال ق(س) عند س = ٥ الأب ، س = ٥ الابن

① الصورة : ق(٥) = ٨ (من عند المادة)

② النهاية : $\lim_{س \to ٥}$ ق(س)

نراها صريحتين عند س = ٥

يسار (٥) ، س < ٥ ، $\lim_{س \to ٥^-}$ (س+٢) = ٥+٢ = ٧

يمين (٥) ، س > ٥ ، $\lim_{س \to ٥^+}$ (٢+٥) = ٢+٥ = ٧

∴ نهـ ق(س) موجودة = ٧

③ نفحص هل : $\lim_{س \to ٥}$ ق(س) = ق(٥)

٧ = ٨

هل س = ٥ ، متصل ، ق(س)

∴

الآن : ق(س) − ل(س)

متصل عند س = ٥ − غير متصل عند س = ٥

لا نحكم مباشرة بل نبحث

إذا كان :

$$\text{ق}(س) = \begin{cases} ٢س-١ & ، س < ٥ \\ س+٢ & ، ٥ > س \\ ٨ & ، س = ٥ \end{cases}$$

$$\text{ل}(س) = \begin{cases} (٥-س)^{٢} & ، س < ٥ \\ ٣-س & ، ٥ > س \\ ٤ & ، س = ٥ \end{cases}$$

البحث في إتصال : ق(س) − ل(س)

عند س = ٥

الحل : نقدر س إتصال ق(س) عند س = ٥ الأب ، س = ٥ الابن

① الصورة : ق(٥) = ٨ (من عند المادة)

② النهاية : $\lim_{س \to ٥}$ ق(س)

نراها صريحتين عند س = ٥

يسار (٥) ، س < ٥ ، $\lim_{س \to ٥^-}$ (٢س-١) = ٢٥-١ = ٩

يمين (٥) ، س > ٥ ، $\lim_{س \to ٥^+}$ (س+٢) = ٥+٢ = ٧

∴ نهـ ق(س) غير موجودة

③ نفحص هل : $\lim_{س \to ٥}$ ق(س) ≠ ق(٥)

٨ ≠ غير موجودة

هل س = ٥ ، غير متصل ، ق(س)

∴

الآن : ق(س) − ل(س)

غير متصل عند س = ٥ − غير متصل عند س = ٥

لا نحكم مباشرة بل نبحث

البحث في إتصال : ك(س) − ل(س)

عند س = ٥

الحل : نقدر س إتصال ك(س) عند س = ٥ الأب ، س = ٥ الابن

① الصورة : ك(٥) = ٤ (من عند المادة)

② النهاية : $\lim_{س \to ٥}$ ك(س)

نراها صريحتين عند س = ٥

يسار (٥) ، س < ٥ ، $\lim_{س \to ٥^-}$ (٢س-١) = ٢٥-١ = ٩

يمين (٥) ، س > ٥ ، $\lim_{س \to ٥^+}$ (٥+٢) = ٥+٢ = ٧

∴ نهـ ك(س) غير موجودة

③ نفحص هل : $\lim_{س \to ٥}$ ك(س) ≠ ك(٥)

٨ ≠ غير موجودة

هل س = ٥ ، غير متصل ، ك(س)

∴

الآن : ك(س) − ل(س)

غير متصل عند س = ٥ − غير متصل عند س = ٥

لا نحكم مباشرة بل نبحث

إذا كان :

$$\text{ك}(س) = \begin{cases} ٢س-١ & ، س < ٥ \\ س+٢ & ، ٥ > س \\ ٨ & ، س = ٥ \end{cases}$$

$$\text{ل}(س) = \begin{cases} (٥-س)^{٢} & ، س < ٥ \\ ٣-س & ، ٥ > س \\ ٤ & ، س = ٥ \end{cases}$$

البحث في إتصال : ك(س) − ل(س)

عند س = ٥

الحل : نقدر س إتصال ك(س) عند س = ٥ الأب ، س = ٥ الابن

① الصورة : ك(٥) = ٤ (من عند المادة)

② النهاية : $\lim_{س \to ٥}$ ك(س)

نراها صريحتين عند س = ٥

يسار (٥) ، س < ٥ ، $\lim_{س \to ٥^-}$ (٢س-١) = ٢٥-١ = ٩

يمين (٥) ، س > ٥ ، $\lim_{س \to ٥^+}$ (س

أو : يوجد طريقة ثانية للحل :

وهي نفرض ان :

ل(س) = هـ(س) − د(س)

من بداية الحل ونكوّن ل(س) ونُدرس فقط

ونجري عملية الطرح على ل(س)

ل(س) = هـ(س) − د(س)

ل(س) = { (س−١)−(س−٥)^٢ ، س < ٥ ؛ (س+٢)−(س−٤) ، س > ٥ }

لاستخدام قوانين الطرح

صورة فقط

(٨) − (٤) ، س = ٥

الآن: نُدرس إشارة ل(س) عند س = ٥ ؟

الأب ، الابن

① الصورة : ل(٥) = (٨) − (٤) = ④ صرف

② النهاية : نهـا ل(س) ← ⑤ ، س ← ٥ ، نراها من يسار ومن يمين

س < ٥ ، س > ٥

نهـا (س+٢)−(س−٤) ، نهـا (س−١)−(س−٥)^٢

س ← ٥+ ، س ← ٥−

= (٥+٢)−(٥−٤) ، = (٥−١)−(٥−٥)^٢

= (٧−٣) = ④ ، = (٤)−(٠)^٢ = ④

∴ نهـا ل(س) موجودة وتساوي ④

س ← ٥

③ نفحص هل : نهـا ل(س) = ل(٥)

س ← ٥

④ = ④

متصل ، س = ٥ ، ل(س)

∴

(١٣١) إذا كان :

هـ(س) = { س^٢ − ٩ ، س < ٣ ؛ (س−٣)^٢ ، س ≥ ٣ }

صورة فقط

الصورة فقط ← موف ، س = ٣

م(س) = { س + ٢ ، س < ٣ ؛ ٥ − س ، س > ٣ }

صورة فقط

صورة فقط ← ١٢ ، س = ٣

المطلوب في الاتصال : ع(س) = هـ(س) × م(س) عند س = ٣ ؟

الحل: نُدرس إتصال هـ(س) عند س = ٣

الأب ، الابن

① الصورة : هـ(٣) = صرف

② النهاية : نهـا هـ(س) ← ③ ، س ← ٣ ، نراها من يسار ومن يمين

س < ٣ ، س ≥ ٣

نهـا (س^٢ − ٩) ، نهـا (س−٣)^٢

س ← ٣− ، س ← ٣+

= (٣)^٢ − ٩ ، = (٣−٣)^٢

= صفر ، = صفر

∴ نهـا هـ(س) موجودة وتساوي صفر

س ← ٣

③ نفحص هل : نهـا هـ(س) = هـ(٣)

س ← ٣

صفر = صفر

متصل ، س = ٣ ، هـ(س)

∴

⑨ نُدرس إتصال م(س) عند س = ٣

الأب ، الابن

① الصورة : م(٣) = ١٢ صرف

② النهاية : نهـا م(س) ← ③ ، س ← ٣ ، نراها من يسار ومن يمين

س < ٣ ، س ≥ ٣

نهـا (س+٢) = ٣+٢ ، نهـا ١٥ − ٣س = ١٥ − ٣(٣)

س ← ٣+ ، س ← ٣−

= ٥ ، = ١٥ − ٩ = ٦

∴ نهـا م(س) غير موجودة
س←٣

③ نتحقق هل: نهـا م(س) = م(٣)
س←٣

١٢ ≠ غير موجودة

∴ م(س) غير متصل عند س=٣

الآن: ع(س) = حد(س) × م(س)

حد متصل عند ③ × م غير متصل عند ③

لا نحكم مباشرة بل نتابع لخطوة ثالثة.

① بسيطة (نفرض) امتحان جديد: وهنا جاء هنا جاهز مسمى ع(س) = حد(س) × م(س)

② ندرس اتصال ع(س) عند س=٣
الأب الابن

① الصورة: ع(٣) = حد(٣) × م(٣) = (صغ) × (١٢) = صغ

② النهاية: نهـا ع(س)
س←٣

س>٣ | س<٣

نهـا ع(س) = نهـا (حد(س) × م(س))
س←٣+ س←٣-

= نهـا (صغ) × (٥)
س←٣+

= صغ × ٥

نهـا ع(س) = نهـا (حد(س) × م(س))
س←٣- س←٣-

= نهـا (صغ) × (٥)
س←٣-

= صغ × ٥

صغ × ٥ ≠ صغ × ٥

∴ نهـا ع(س) غير موجودة
س←٣

③ نتحقق هل: نهـا ع(س) ≠ ع(٣)
س←٣

صغ ≠ صغ

∴ ع(س) غير متصل عند س=٣

(أو) يوجد طريقة ثانية للحل وهي نفرض أن:

ع(س) = حد(س) × م(س)

= ونجري عليه الضرب من بداية الحل ثم نذري ع(س)

∴ ع(س) = { (س٢-٩) × (٥س) ، س>٣ ; (س-٣)٢ × (س+٢) ، س<٣ ; (صغ) × (١٢) ، س=٣ }

الآن: ندرس إتصال ع(س) عند س=٣

① الصورة: ع(٣) = (صغ) × (١٢) = صغ

② النهاية: نهـا ع(س)
س←٣

س>٣ | س<٣

نهـا ع(س) = نهـا (س٢-٩) × (٥س)
س←٣+ س←٣+

= (٣٢-٩) × (٥×٣)

= (٩-٩) × (١٥)

= صغ × (٠)

= صغ

نهـا ع(س) = نهـا (س-٣)٢ × (س+٢)
س←٣- س←٣-

= (٣-٣)٢ × (٣+٢)

= (صغ)٢ × (٥)

= صغ

صغ = صغ

∴ نهـا ع(س) موجودة وتساوي صغ
س←٣

③ نتحقق هل: نهـا ع(س) = ع(٣)
س←٣

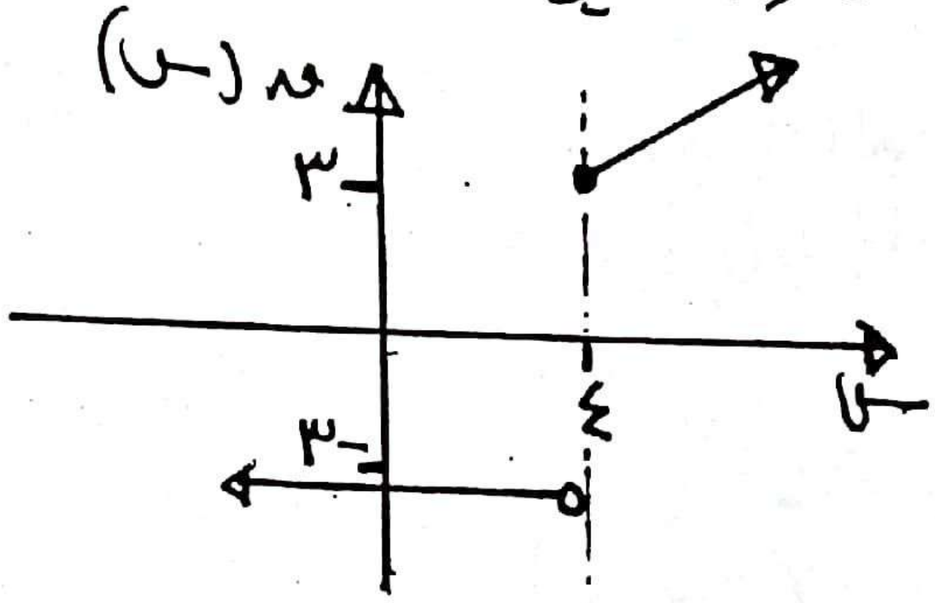
صغ = صغ

∴ ع(س) متصل عند س=٣

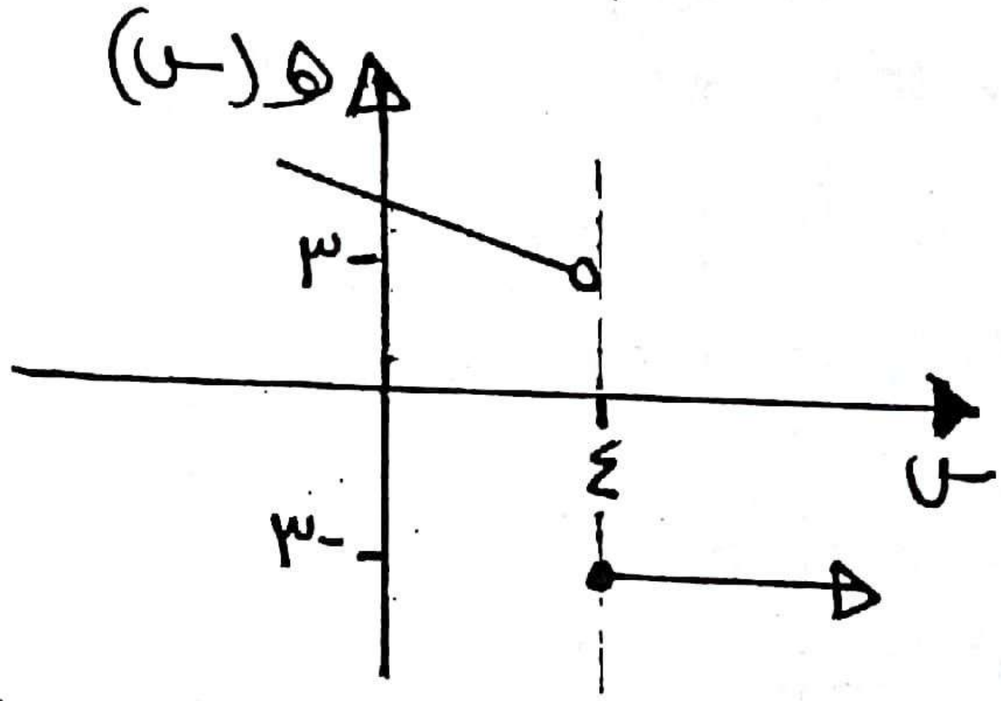
منهاجي
متعة التعليم الهادف

(١٣٢) الشكل (P) يمثل $هـ(س)$.

والشكل (ب) يمثل $هـ(س)$.



(P)



(ب)

١) البحث في إتصال $هـ(س)$ عند $س = ٤$ ؟

٢) البحث في إتصال $هـ(س)$ عند $س = ٤$ ؟

٣) البحث في إتصال $هـ(س) \times هـ(س)$ عند $س = ٤$ ؟

الحل: دائماً دراسة الإتصال من الشكل المرسوم

الشكل المرسوم يعتبر دالة

هو مجموعة القواعد (مستعب)

١) الصورة : $هـ(٤) =$ نبدأ على الرقم (٤) ، نضطر باللون القائم = ٣

٢) النهاية : $نها_{س \to ٤} هـ(س)$ نعتبره تحول

$س < ٤$ ، $س > ٤$

$نها_{س \to ٤^+} هـ(س) = ٣$ ، $نها_{س \to ٤^-} هـ(س) = ٣$

$نها_{س \to ٤} هـ(س) = ٣$

٣) نفحص هل: $نها_{س \to ٤} هـ(س) = هـ(٤)$

$٣ = ٣$

نعم متصل

١) الصورة : $هـ(٤) =$ نبدأ على الرقم (٤) ، نضطر باللون القائم = ٣

٢) النهاية : $نها_{س \to ٤} هـ(س)$ نعتبره تحول

$س < ٤$ ، $س > ٤$

$نها_{س \to ٤^+} هـ(س) = ٣$ ، $نها_{س \to ٤^-} هـ(س) = ٣$

$نها_{س \to ٤} هـ(س) = ٣$

٣) نفحص هل: $نها_{س \to ٤} هـ(س) = هـ(٤)$

$٣ = ٣$

نعم متصل

∴ نها $هـ(س)$ عند $س = ٤$ موجودة .

٣) نفحص هل: $نها_{س \to ٤} هـ(س) = هـ(٤)$

$٣ \neq -٣$

نها $هـ(س)$ غير موجودة

$هـ(س)$ غير متصل عند $س = ٤$

١) الصورة : $ل(٤) = هـ(٤) \times هـ(٤)$

$= ٣ \times -٣ = -٩$

٢) النهاية : $نها_{س \to ٤} ل(س)$

$س < ٤$ ، $س > ٤$

$نها_{س \to ٤^+} ل(س) = نها_{س \to ٤^+} هـ(س) \times هـ(س)$

$= ٣ \times -٣ = -٩$

$نها_{س \to ٤^-} ل(س) = نها_{س \to ٤^-} هـ(س) \times هـ(س)$

$= -٣ \times ٣ = -٩$

∴ نها $ل(س)$ موجودة $= -٩$

٣) نفحص هل: نها $ل(س) = ل(٤)$

$-٩ = -٩$

متصل

٣) $هـ(س) \times هـ(س)$

غير متصل عند ٤ × غير متصل عند ٤ = لا نحكم مباشرة

لا نحتاج لملاحظة الآتية :

١) نسمي (نفرض) : $ل(س) = هـ(س) \times هـ(س)$

٢) ندرس الإتصال $ل(س)$ عند $س = ٤$

الآن الآن

(١٣٣) هل إذا كان (ه + هـ)(س) متصل عند س = أ ، فمن الضروري ان يكون كلاً من ه(س) ، هـ(س) متصل عند س = أ ؟ برري إجابتك؟

الجواب: ليس بالضرورة (الرجاء معرفة المثال مع حله)

واليك المثال التالي مع حله

$$ه(س) = \begin{cases} س & ، س \geq ٥ \\ -س & ، س < ٥ \end{cases}$$

$$هـ(س) = \begin{cases} -س & ، س \geq ٥ \\ س & ، س < ٥ \end{cases}$$

الآن: نجد كامل كما في الامثلة السابقة

نجد س) إتصال ه عند س = ٥

① الصورة : ه(٥) = من المعادلة (س): ⑤ معرف

② النهاية : نهـا ه(س) ← نراه من يمين ٥ ، يسار ٥

نهـا (س) = ⑤ ✱ نهـا (-س) = -٥

س→٥+ ، س→٥-

نهـا ه(س) غير موجودة

③ نفحص هل: نهـا ه(س) ≠ ه(٥)

س→٥

⑤ ≠ غير موجودة

ه متصل عند س = ٥ ، غير متصل عند س = ٥

الآن: ه(س) + هـ(س)

غير متصل عند ⑤ + متصل عند ⑤ = لا نحكم مباشرة بل نتبع الخطوة الثالثة

④ لنفحص (نفرض): اقتران جديد:

ل(س) = ه(س) + هـ(س)

نجد س) اتصال ل(س) عند س = ٥

الأب الابن

① الصورة : ل(٥) = ه(٥) + هـ(٥)

= ٥ + -٥ = صفر

② النهاية: نهـا ل(س)

س→٥

نراها من يمين ٥ ، يسار ٥

نهـا ل(س) = نهـا (ه(س) + هـ(س)) نهـا ل(س)

س→٥+ س→٥+ س→٥-

(٥) + (-٥) = نهـا ه(س) + نهـا هـ(س)

= صفر س→٥+ س→٥-

(-٥) + (٥) =

صفر

∴ نهـا ل(س) موجودة = صفر

س→٥

③ نفحص هل: نهـا ل(س) ≠ ل(٥)

س→٥

صفر = صفر

∴ ل(س) متصل عند س = ٥

∴ نهـا ه(س) غير موجودة

س→٥

③ نفحص هل: نهـا ه(س) ≠ ه(٥)

س→٥

٥- ≠ غير موجودة

ه(س) غير متصل عند س = ٥

الآن: ه(س) + هـ(س)

متصل عند ⑤ + غير متصل عند ⑤ = لا نحكم مباشرة بل نتبع الخطوة الثالثة

① لنفرض: اقتران جديد:

ل(س) = ه(س) + هـ(س)

نجد س) اتصال ل(س) عند س = ٥

الأب الابن

① الصورة : ل(٥) = ه(٥) + هـ(٥)

= ٥ + -٥ = صفر

② النهاية: نهـا ل(س)

س→٥

نراها من يمين ٥ ، يسار ٥

نهـا ل(س) = نهـا (ه(س) + هـ(س)) نهـا ل(س)

س→٥+ س→٥+ س→٥-

(٥) + (-٥) = نهـا ه(س) + نهـا هـ(س)

= صفر س→٥+ س→٥-

(-٥) + (٥) =

صفر

∴ نهـا ل(س) موجودة = صفر

س→٥

③ نفحص هل: نهـا ل(س) ≠ ل(٥)

س→٥

صفر = صفر

∴ ل(س) متصل عند س = ٥

(١٣٤) هل إذا كان $(هـ \times د)(س)$ متصل عند $س = أ$ ، فمن الضروري أن يكون كلاً من $د(س)$ ، $هـ(س)$ متصل عند $س = أ$.

الجواب : ليس بالضرورة .

والكتب تقف لمثال سابقة
(والرجاء حفظ المثال مع حله)
وتقف لمثال سابقة لكن الخطوة
الثالثة هي التي تبدل :

هي التي تبدل :

① نسمي (نفرض) : $ل(س) = د(س) \times هـ(س)$

② $\lim_{س \to ٥}$ الصال $ل(س)$ عند $س = ٥$.
الاب الابن

① الصورة : $ل(٥) = د(٥) \times هـ(٥)$

$= ٥ \times -٥ = -٢٥$

② النهاية : $\lim_{س \to ٥} ل(س)$

$س < ٥$ ، $س > ٥$

$\lim_{س \to ٥^+} ل(س) = \lim_{س \to ٥^+} د(س) \times هـ(س)$

$= -٥ * ٥$

$= -٢٥$

$\lim_{س \to ٥^-} ل(س) = \lim_{س \to ٥^-} د(س) \times هـ(س)$

$= ٥ \times -٥$

$= -٢٥$

$\lim_{س \to ٥} ل(س)$ موجودة وتساوي -٢٥ .

③ نفحص هل : $\lim_{س \to ٥} ل(س) = ل(٥)$ ؟

$-٢٥ = -٢٥$.

$\therefore$ $ل(س)$ متصل عند $س = ٥$

(١٣٥) هل إذا كان $(\frac{د}{هـ})(س)$ متصل عند $س = أ$ ، فمن الضروري ان يكون كلاً من $د(س)$ ، $هـ(س)$ متصل عند $س = أ$.

الجواب : ليس بالضرورة .

والكتب تقف لمثال سابقة
(والرجاء حفظ المثال مع حله)
وتقف لمثال سابقة لكن الخطوة
الثالثة هي التي تبدل :

① نسمي نفرض : $ل(س) = \frac{د(س)}{هـ(س)}$

② $\lim_{س \to ٥}$ الصال $ل(س)$ عند $س = ٥$.
الاب الابن

① الصورة : $ل(٥) = \frac{د(٥)}{هـ(٥)} = \frac{٥}{٥} = -١$

② النهاية : $\lim_{س \to ٥} ل(س)$

$س < ٥$ ، $س > ٥$

$\lim_{س \to ٥^+} ل(س) = \lim_{س \to ٥^+} (\frac{د(س)}{هـ(س)})$

$= \frac{-٥}{(٥)} = -١$

$\lim_{س \to ٥^-} ل(س) = \lim_{س \to ٥^-} \frac{د(س)}{هـ(س)}$

$= \frac{(٥)}{-٥} = -١$

$\therefore \lim_{س \to ٥} ل(س)$ موجودة وتساوي -١

③ نفحص هل : $\lim_{س \to ٥} ل(س) = ل(٥)$ ؟

$-١ = -١$.

$\therefore$ $ل(س)$ متصل عند $س = ٥$

منهاجي
متعة التعليم الهادف

(٣٦) هل إذا كان : (هـ - هـ)(س) متصل عند س = ٢ ، فمن الضروري ان يكون كلاً من هـ(س) ، هـ(س) متصل عند س = ٢ ؟

الجواب : ليس بالضرورة . الرجاء الانتباه والمثال التالي مع حله (مع حله)

هـ(س) = { س ، س ≤ ٥ ؛ س + ١٢ ، س > ٥

هـ(س) = { -س ، س ≤ ٥ ؛ س + ١٢ ، س > ٥

الآن : نحله كامل كما في الامثلة السابقة:

نجد اتصال هـ(س) عند س = ٥

① الصورة : هـ(٥) = من عندنا اداة (س) : ⊙ معرف

② النهاية : نهـا هـ(س) = ⊙ ، نراها من يمين ويسار

نهـا (-س) = -٥ ، نهـا (س + ١٢) = +٥ ، ⊙ = ⊙

∴ نهـا هـ(س) غير موجودة

③ نفحص هل : نهـا هـ(س) ≠ هـ(٥) ⊙ ≠ ⊙

هـ(س) ، غير متصل ، س = ٥

∴

(٣٧) نجد اتصال هـ(س) عند س = ٥ الابن

① الصورة : ل(٥) = هـ(٥) - هـ(٥) = ٠

② النهاية : نهـا ل(س) = ٠

③ نفحص هل : نهـا ل(س) = ل(٥) = ٠

∴ ل(س) متصل عند س = ٥

الآن : هـ(س) = هـ(س) - ل(س)

غير متصل عند ⊙ = غير متصل عند ⊙ - متصل عند ⊙

لا يمكن ان يكون الناتج صحيح

(٣٨) نفرض (نفترض) : اقتران جديد ل(س) = هـ(س) - هـ(س)

نجد اتصال ل(س) عند س = ٥ الأب الابن

① الصورة : ل(٥) = هـ(٥) - هـ(٥) = ٠

② النهاية : نهـا ل(س) = ٠

③ نفحص هل : نهـا ل(س) = ل(٥) = ٠

∴ ل(س) متصل عند س = ٥

الآن : هـ(س) = هـ(س) - ل(س)

غير متصل عند ⊙ = غير متصل عند ⊙ - متصل عند ⊙

لا يمكن ان يكون الناتج صحيح

نقاط عدم الاتصال (نقاط الانفصال)

(النوع الاول)

① إذا جاء : ق(س) = ثابتة أو كثير حدود .

يكون ← دائماً متصل

← لا يوجد نقاط عدم اتصال

② إذا جاء : ق(س) = اقتران نسبي

فإن : فقط نضع المقام

لمعرفة نقاط عدم الاتصال

③ إذا جاء : ق(س) = اقتران مقداره القواعد (أو) مثلثي .

فإننا ندرس نقاط التحول .

ملاحظة : اقتران كثير الحدود تكون درجته (قوته) دائماً صحيحة وموجبة.

الى الامثلة : أوجدي نقاط عدم الاتصال (نقاط الانفصال)

ما يلي :

(١٣٧) ق(س) = ١٣

الحل : ق(س) ثابتة ∴ لا يوجد نقاط عدم اتصال

(١٣٨) ق(س) = $٢س^{٤} + ٣س^{٣} - ٥س^{٢} + ٨س + ٥$

الحل : ق(س) كثير حدود (درجته صحيحة وموجبة)

∴ لا يوجد نقاط عدم اتصال .

(١٣٩) ق(س) = $\frac{س^{٦}}{٢} - (س+١)^{٣} - ٧$

الحل : ق(س) كثير حدود (درجته صحيحة وموجبة)

∴ لا يوجد نقاط عدم اتصال .

(١٤٠) ق(س) = س(س-١)(س-٢)

الحل : ق(س) كثير حدود .

∴ لا يوجد نقاط عدم اتصال .

(١٤١) ق(س) = $\frac{٩}{س-٢}$

الحل : هذا بسط ، هذا نسبي : فقط نضع المقام

س - ٢ = صفر ⟸ س = ٢

∴ نقاط عدم الاتصال {٢} .

(١٤٢) ق(س) = $\frac{٧}{س} - \frac{س+١+٥}{س+١+٢}$

الحل : هذا نسبي ، هذا نسبي

نضع المقام ، نضع المقام

٢س + ١ + ٢ = صفر ⟸ س = ٠

٢س - ١ = صفر ⟸ ٢س = ١ ⟸ س = $\frac{١}{٢}$

∴ نقاط عدم الاتصال $\{٠ ، \frac{١}{٢}\}$.

(١٤٣) ق(س) = $\frac{١٢س}{س^{٢} - ٩}$

الحل : هذا نسبي ، نضع المقام

$س^{٢} - ٩ = صفر$ ⟸ $س^{٢} = ٩$ ⟸ تربيع ← تواتم

س = ٣ ، س = -٣

∴ نقاط عدم الاتصال {٣ ، -٣} .

(١٢٤) $هـ(س) = \frac{س^{٣}}{س^{٢}-٢ك س+١} + \frac{٥ س}{س^{٢}+٢٥}$.

الحل: هذا نبي: نضرب لمقام:

$س^{٢}-٢ك س+١ = صفر$

$(س-١)(س-١) = صفر$

اما: $س-١=٠ \Leftarrow س=١$

او: $س-١=٠ \Leftarrow س=١$

هذا نبي نضرب لمقام

$س^{٢}+٢٥=٠$

$س^{٢}=-٢٥$

$س=\sqrt{-٢٥}$

لايوجد جذر لعدد سالب

∴ لايوجد ضمن س

∴ نقاط عدم الاتصال $\{١\}$.

(١٢٥) $هـ(س) = \frac{٦س+١}{س^{٢}+٥س+٦} - \frac{٢س}{س^{٣}-٨}$

الحل: هذا نبي: نضرب لمقام

$س^{٢}+٥س+٦ = صفر$

$(س+٢)(س+٣) = صفر$

اما $س+٢=٠ \Leftarrow س=-٢$

او: $س+٣=٠ \Leftarrow س=-٣$

هذا نبي: نضرب لمقام

$س^{٣}-٨=٠$

$س^{٣}=٨$

$س=\sqrt[٣]{٨}$

$س=٢$

∴ نقاط عدم الاتصال $\{-٣، -٢، ٢\}$.

(١٢٦) $هـ(س) = \frac{٣}{س^{٢}-٢س-١٥}$

هذا نبي: نضرب لمقام:

$س^{٢}-٢س-١٥ = صفر$

$(س-٥)(س+٣) = صفر$

او: $س+٣=٠ \Leftarrow س=-٣$

اما: $س-٥=٠ \Leftarrow س=٥$

(١٢٧) $هـ(س) = \frac{س+٥}{٣س^{٢}-١٢ك س}$

الحل: هذا نبي: $٣س^{٢}-١٢ك س=٠$

نخرج عامل مشترك لوجود ك ثابتة لوجود $س^{٢}$ لعدم وجود حد ثابت

$٣س(س-٤) = صفر$

اما: $٣س=٠ \Leftarrow س=\frac{صفر}{٣}$

او: $س-٤=٠ \Leftarrow س=٤$

نقاط عدم الاتصال $\{٠، ٤\}$.

(١٢٨) $هـ(س) = \frac{س^{٢}-٥}{\sqrt{٧-س}-٣}$

الحل: هذا نبي: نضرب لمقام:

$\sqrt{٧-س}+٣ = صفر$

$\sqrt{٧-س} = -٣$

لأنه جذر نربع الطرفين فيزول الجذر

$(\sqrt{٧-س})^{٢} = (-٣)^{٢}$

$٧-س=٩$

$س=-٢$

∴ نقاط عدم الاتصال $\{-٢\}$.

(١٤٩) $هـ(س) = \begin{cases} س^٢ + ١ ، ٠ \leq س < ٢ \\ ٦ - س ، ٢ \leq س \leq ٥ \end{cases}$

الحل: لأنه مُتعدد القواعد (متشعب)

نُدرس نقاط التحوّل $س = ٢$

١ الصورة: $هـ(٢) =$ من عند الداوة مثل $= ٦ - س = ٦ - ٢ \times ١ =$ (١٢)

٢ النهاية: نهـ $هـ(س)$

$س \to ٢$ تحوّل

$س \to ٢$ ، $س \to ٢$

نهـ $(س^٢ + ١) = ٢ \times ٦ = (٦ - س)$ نهـ

$س \to ٢+$ (١٢) $= س \to ٢-$

$١ + ٢^٢ (٥)$

٣ نفحص هل: نهـ $هـ(س) \stackrel{؟}{=} هـ(٢)$

$س \to ٢$

(١٢) $\neq$ غير موجودة

∴ $هـ(س)$ غير متصل $س = ٢$

∴ نقاط عدم الاتصال $\{٢\}$.

∴ نهـ $هـ(س)$ غير موجودة

(١٥٠) $هـ(س) = \begin{cases} س^٢ + ٢ ، س < ٣ \\ ٥س - ٤ ، ٣ < س \\ ١٤ ، س = ٣ \end{cases}$ لا تستخدم في النهايات بل صورة

الحل: لأنه مُتعدد القواعد (متشعب)

نُدرس نقاط التحوّل $س = ٣$

١ الصورة: $هـ(٣) =$ (١٤) مثل

٢ النهاية: نهـ $هـ(س)$

$س \to ٣$ تحوّل

$س < ٣$ ، $س > ٣$

نهـ $(٥س - ٤) = ٥ \times ٣ - ٤$ نهـ $(س^٢ + ٢) = (٣)^٢ + ٢$

$س \to ٣-$ (١١) $= س \to ٣+$

(١١) =

∴ نهـ $هـ(س)$ موجودة $=$ (١١)

$س \to ٣$

٣ نفحص هل: نهـ $هـ(س) \stackrel{؟}{=} هـ(٣)$

$س \to ٣$

(١١) $\neq$ (١٤)

∴ $هـ(س)$ غير متصل $س = ٣$

∴ نقاط عدم الاتصال $\{٣\}$.

دراسة الاتصال من الاشكال المرسومة

هام جداً: نذهب للشكل مباشرة حيث ان الشكل المرسوم لمتغيره اكثر من متعدد القواعد (متشعب)

لذلك:

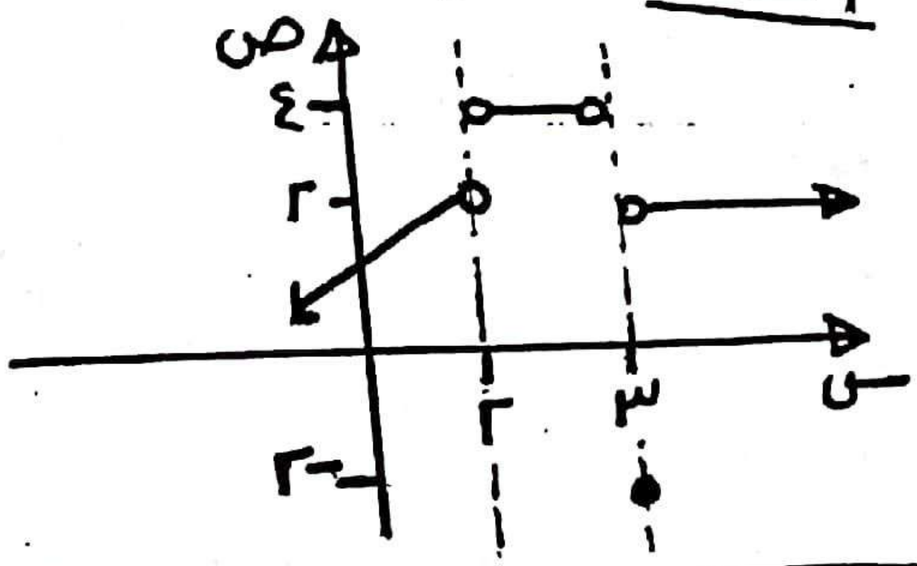
① نجد: الصورة: $هـ(رقم)$: نمشي على الرقم مباشرة ونضطر باللون الخاتم مهما كان نوعه .

② نجد: النهاية: ونذهب مباشرة لليمين للرقم ويسار الرقم .

③ نفحص هل: النهاية $=$ الصورة .

الى الأمثلة:

(١٥١) في الشكل المجاور، ابحث في الاتصال: $هـ(س)$ عند $س = ٣$ ؟



الحل : $\text{هـ}(س)$ عند $س = ٣$ (الأب: $\text{هـ}(س)$، الابن: $س = ٣$)

① الصورة : $\text{هـ}(٣) =$ نبحث على الرقم مباشرة ونصطدم بالقاعم

$= ؟$

② النهاية : $\lim_{س \to ٣} \text{هـ}(س)$ نعتبرها تتحول

يمين (٣) ← $س \to ٣$ ← يسار (٣)

$\lim_{س \to ٣^+} \text{هـ}(س) = ② \neq ④ = \lim_{س \to ٣^-} \text{هـ}(س)$

∴ $\lim_{س \to ٣} \text{هـ}(س)$ غير موجودة

③ نفحص هل : $\lim_{س \to ٣} \text{هـ}(س) \stackrel{؟}{=} \text{هـ}(٣)$

$② \neq$ غير موجودة

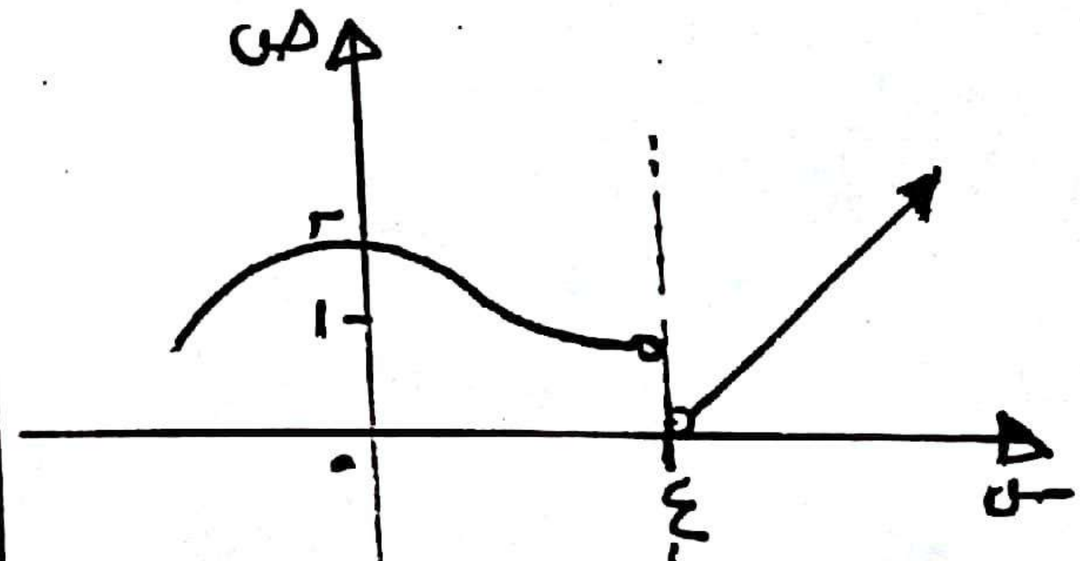
∴ $\text{هـ}(س)$ غير متصل عند $س = ٣$

---

(١٥) في الشكل المجاور ، البحث في :

المثال : أ) $\text{هـ}(س)$ عند $س = صفر$ ؟

ب) $\text{هـ}(س)$ عند $س = ٤$ ؟



الحل : ⓐ $\text{هـ}(س)$ عند $س = صفر$ ؟ (الأب: $\text{هـ}(س)$، الابن: $س = صفر$ ؟)

① الصورة : $\text{هـ}(٠) =$ من عند لحظ العاقم $= ②$ مرفوضة

② النهاية : $\lim_{س \to ٠} \text{هـ}(س)$

$س \to ٠$ ← تحول

ب) الصورة : $\text{هـ}(٤) =$ نبحث على الرقم مباشرة ونصطدم باللون القاعم ، ولكن لا يوجد لون قاعم

∴ غير معرفة

② النهاية : $\lim_{س \to ٤} \text{هـ}(س)$ تحول

يمين (٤) ← $س \to ٤$ ← يسار (٤)

$\lim_{س \to ٤^+} \text{هـ}(س) = ① \neq$ صفر $= \lim_{س \to ٤^-} \text{هـ}(س)$

∴ $\lim_{س \to ٤} \text{هـ}(س)$ غير موجودة

③ نفحص هل : $\lim_{س \to ٤} \text{هـ}(س) \stackrel{؟}{=} \text{هـ}(٤)$

غير موجودة $\neq$ غير معرفة

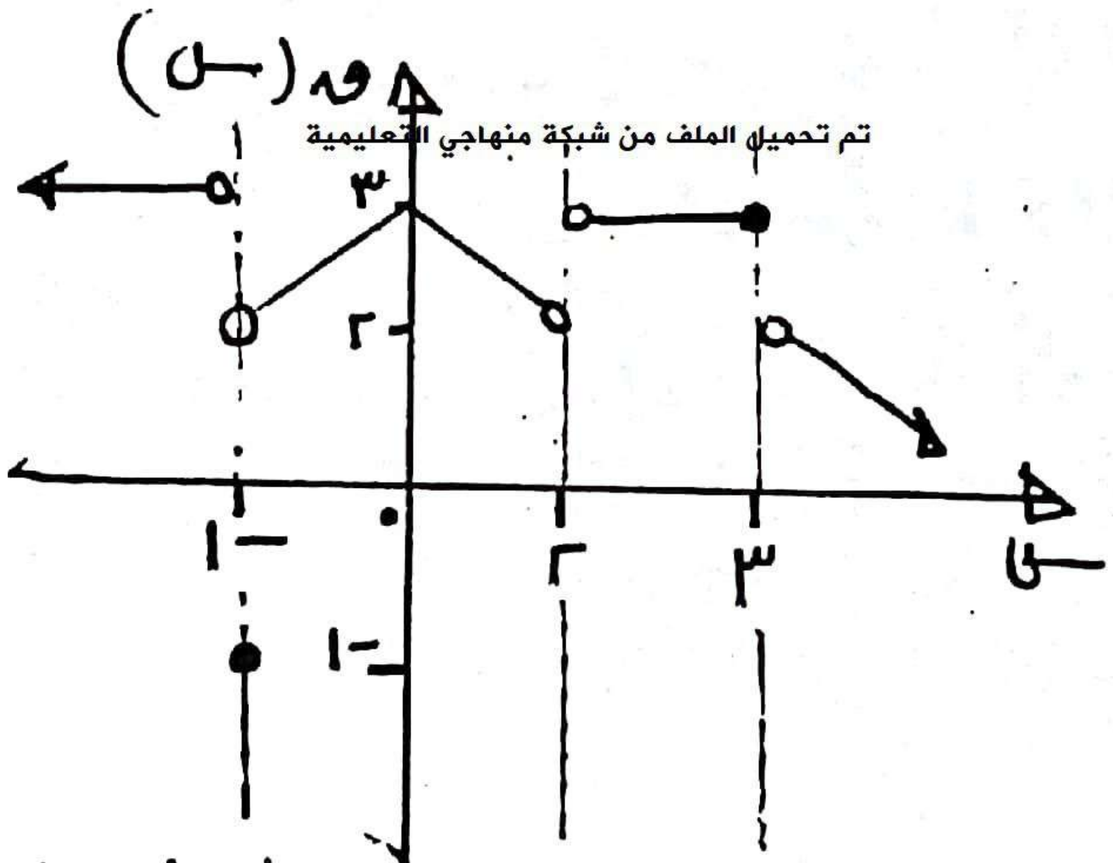
$\text{هـ}(س)$ غير متصل عند $س = ٤$

احصل على مجموعة اوراق عمل الوحدة التفاضل ، وتطبيقات على التفاضل بالإضافة نماذج مقترحة مميزة

الله يوفقكم

منهاجي
متعة التعليم الهادف

(١٥٣) في الشكل المجاور ، أوجدي نقاط عدم الاتصال .



تم تحميل الملف من شبكة منهاجي التعليمية

الحل: لمعرفة نقاط عدم الاتصال ندرس دائماً قيم س الموجودة على محور السينات

لذلك ندرس العيّم $\{-1, 0, 2, 3\}$.

① عند س = -١ : ندرس

① الصورة : هـ(-١) = من عند اللون القاتم ، نسير على الرقم مباشرة = ①

② النهاية : $\lim_{س \to -1}$ هـ(س) تحوّل

يمين (-١) ← س → يسار (-١)

$\lim_{س \to -1^+}$ هـ(س) = ① = $\lim_{س \to -1^-}$ هـ(س)

$\lim_{س \to -1}$ هـ(س) موجودة = ①

③ نفحص هل: $\lim_{س \to -1}$ هـ(س) = هـ(-١) ؟

① = ①

نقاط: هـ(س) ، متصل ، س = -١

② عند س = ٠ :

① الصورة : هـ(٠) = من عند اللون القاتم ، نسير على الرقم مباشرة = ①

② النهاية : $\lim_{س \to 0}$ هـ(س) تحوّل

يمين (٠) ← س → يسار (٠)

$\lim_{س \to 0^+}$ هـ(س) = ① = $\lim_{س \to 0^-}$ هـ(س)

$\lim_{س \to 0}$ هـ(س) موجودة = ①

③ نفحص هل: $\lim_{س \to 0}$ هـ(س) = هـ(٠) ؟

① = ①

نقاط: هـ(س) ، متصل ، س = ٠

③ عند س = ٢ : ندرس

① الصورة : هـ(٢) = غير معرفة لعدم وجود لون قاتم

② النهاية : $\lim_{س \to 2}$ هـ(س) تحوّل

يمين (٢) ← س → يسار (٢)

$\lim_{س \to 2^+}$ هـ(س) = ① * ③ = $\lim_{س \to 2^-}$ هـ(س) = ②

$\lim_{س \to 2}$ هـ(س) غير موجودة

③ نفحص هل: $\lim_{س \to 2}$ هـ(س) = هـ(٢) ؟

② ≠ ③

نقاط: هـ(س) ، غير متصل ، س = ٢

④ عند س = ٣ : ندرس

① الصورة : هـ(٣) = نصطدم باللون القاتم = ③ معرّف

② النهاية : $\lim_{س \to 3}$ هـ(س) تحوّل

يمين (٣) ← س → يسار (٢)

$\lim_{س \to 3^+}$ هـ(س) = ① * ③ = $\lim_{س \to 3^-}$ هـ(س) = ③

$\lim_{س \to 3}$ هـ(س) غير موجودة

③ نفحص هل: $\lim_{س \to 3}$ هـ(س) = هـ(٣) ؟

③ ≠ ③

نقاط: هـ(س) ، غير متصل ، س = ٣

∴ نقاط عدم الاتصال $\{-1, 2, 3\}$.