رياضيات المستوى الثالث

الفرع الأدبي

الوحدة الأولى

النهايات والاتصال

اعداد المعلمة ميسون الحسين

٠٧٩٨٩٥٩٠٧١

الوحدة الأولى
النهايات والاتصال

مفهوم النهاية

نهاية الاقتران عند نقطة :

مثال ١: لاحظ سلوك الاقتران

ق(س) = ٢س + ٣ عندما تقترب س من العدد ١ .

الحل : نكون جدول نحدد فيه قيماً للمتغير س قريبة من ١ (بعضها أكبر من (١) وبعضها أصغر من (١)) ونحسب قيم ق(س) المناظرة لها كما يلي

س	١٫١	١٫٠٥	١٫٠٠١	١	٠٫٩٩٩	٠٫٩٩	٠٫٩
ق(س)	٥٫٢	٥٫١	٥٫٠٠٢	٥	٤٫٩٩٨	٤٫٩٨	٤٫٨

نلاحظ من الجدول انه كلما اقتربت س من (١) من جهة اليمين فان ق(س) تقترب من (٥) وبالرموز فان

$\underset{س \leftarrow ١^{+}}{\text{نها}}$ ق(س) = ٥ .

وكلما اقتربت س من (١) من جهة اليسار فان ق(س) تقترب من (٥) وبالرموز $\underset{س \leftarrow ١^{-}}{\text{نها}}$ ق(س) = ٥ .

لذلك تكون $\underset{س \leftarrow ١}{\text{نها}}$ ق(س) = ٥ .

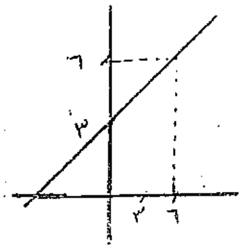
لأن النهاية من اليمين تساوي النهاية من اليسار

نتيجة : نقول ان النهاية غير موجودة عندما تكون النهاية من اليمين ≠ النهاية من اليسار

ملاحظة : يدل الرمز س ← أ على ان س ≠ أ ولكنها تقترب من أ من اليمين ومن اليسار

* كيفية حساب النهاية من الرسم

①



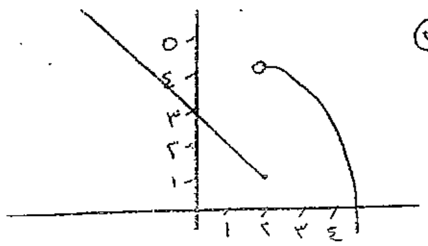
ق(٦) =

$\underset{س \leftarrow ٦^{+}}{\text{نها}}$ ق(س) =

$\underset{س \leftarrow ٦^{-}}{\text{نها}}$ ق(س) =

$\underset{س \leftarrow ٦}{\text{نها}}$ ق(س) =

②



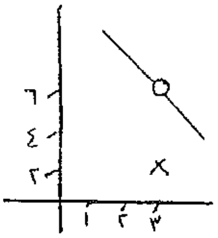
ق(٢) =

$\underset{س \leftarrow ٢^{+}}{\text{نها}}$ ق(س) =

$\underset{س \leftarrow ٢^{-}}{\text{نها}}$ ق(س) =

$\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نها}}$ ق(س) =

③



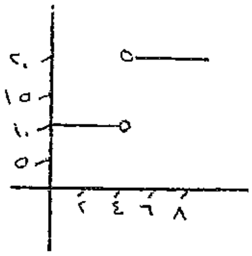
ق(٣) =

$\underset{س \leftarrow ٣^{+}}{\text{نها}}$ ق(س) =

$\underset{س \leftarrow ٣^{-}}{\text{نها}}$ ق(س) =

$\underset{س \leftarrow ٣}{\text{نها}}$ ق(س) =

④



ق(٤) =

$\underset{س \leftarrow ٤^{+}}{\text{نها}}$ ق(س) =

$\underset{س \leftarrow ٤^{-}}{\text{نها}}$ ق(س) =

$\underset{س \leftarrow ٤}{\text{نها}}$ ق(س) =

نظرية : اذا كانت

نها ق(س) = نها ق(س) = ل
س←أ+ س←أ-

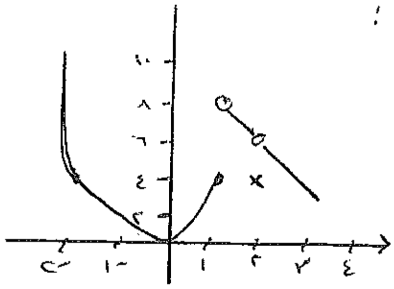
فإن نها ق(س) موجودة وتساوي ل .
س←أ

وأيضاً :

اذا كانت نها ق(س) ≠ نها ق(س) فإن
س←أ+ س←أ-

نها ق(س) غير موجودة .
س←أ

سؤال ١: الشكل المجاور يمثل منحنى الاقتران ق(س) جد ما يلي :



١) ق(١) =

٢) ق(٢)

٣) نها ق(س) =
س←١+

٤) نها ق(س) =
س←١-

٥) نها ق(س) =
س←١

٦) ق(٠) =

٧) نها ق(س) =
س←٠

٨) نها ق(س) =
س←٢-

٩) ق(٢-) =

سؤال ٣ : اعتماداً على الجدول التالي احسب

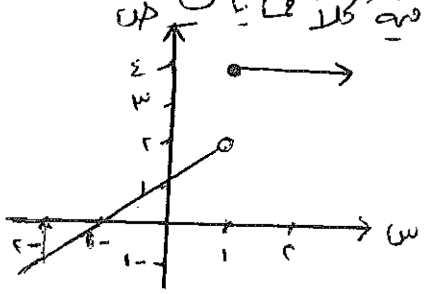
١) نها ق(س) =
س←٣+

٢) نها ق(س) =
س←٣-

٣) نها ق(س) =
س←٣

س	٣٫١	٣٫٠٥	٣٫٠٠١	٣	٢٫٩٩٩	٢٫٩٥	٢٫٩
ق(س)	٤٫١	٤٫٠٥	٤٫٠٠١	٢-	١٫٩٩٩	١٫٩٥	١٫٩

مثال ٢ : بالاعتماد على الشكل التالي الذي يمثل منحنى الاقتران ق جد قيمة كلاً مما يأتي



١) قيمة الثابت أ حيث نها ق(س) = ١-
س←أ-

الحل: عندما تكون ق(س) ← ١- فإن قيمة س تكون قد اقتربت من العدد ٢- ⇐ أ = ٢-

٢) قيمة الثابت ب حيث نها ق(س) = صفر .
س←ب

الحل: ق(س) ← ب ، عندما س ← ١-

⇐ ب = ١-

٣) قيمة الثابت جـ ، حيث نها ق(س) غير موجودة .
س←جـ

الحل: نها ق(س) غير موجودة ⇐ نها ق(س) ≠ نها ق(س)
س←جـ س←جـ+ س←جـ-

وهذا يتحقق عندما س ← ١

⇐ جـ = ١

الوحدة الأولى

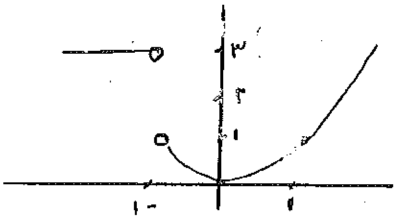
النهايات والاتصال

مفهوم النهاية

سؤال ٣: بالاعتماد على الشكل التالي الذي يمثل منحنى ق(س) حيث

ق(س) = { ٣ ، س < -١

س^٢ ، س > -١



احسب :

١) نها ق(س) =
س←١+

٢) نها ق(س) =
س←-١

٣) نها ق(س)
س←١

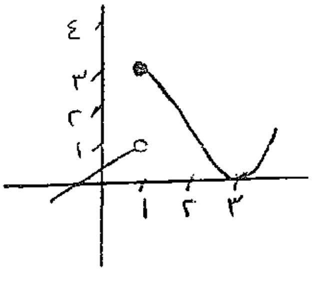
أسئلة وزارية :

① ١٩٩٨

احسب

أ- ق(١)

ب- نها ق(س)
س←١

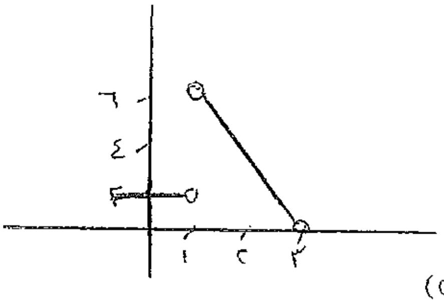


② ٢٠٠٣

احسب

أ- ق(١)

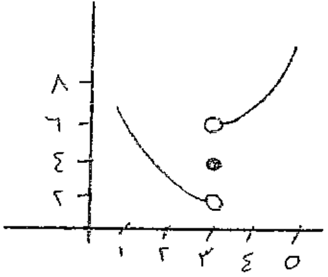
ب- نها ق(س)
س←١



③ ٢٠٠٣

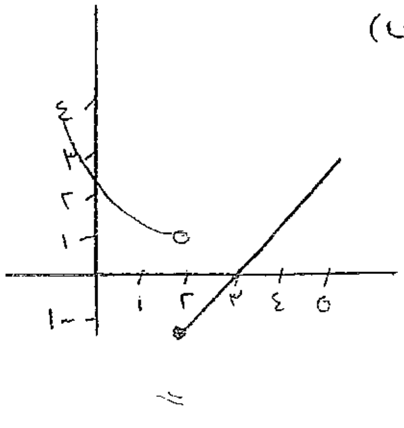
أ- ق(٣)

ب- نها ق(س)
س←٣



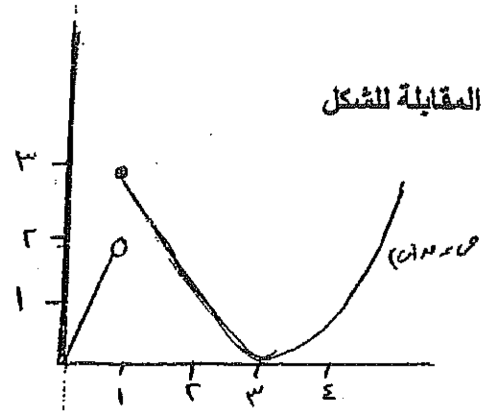
④ ٢٠٠٥ يمثل الشكل المجاور منحنى الاقتران ل(س)

احسب نها ل(س)
س←٢+



بالاعتماد على الاشكال المرسومة اجيبي عن الاسئلة المعطاه المقابلة للشكل

-٢٠٠٨-
صيفي

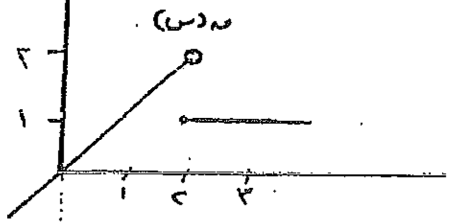


١) نهـا ه(س) =
س ← ١+

نهـا ه(س) =
س ← ١−

نهـا ه(س) =
س ← ١

-٢٠٠٩-
صيفي

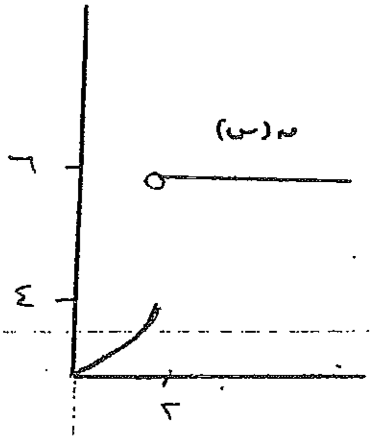


٢) نهـا ه(س) =
س ← ٢

ه(٢) =

نهـا ه(س) =
س ← ٣

-٢٠١٠-
صيفي



٣) نهـا ه(س) =
س ← ٢+

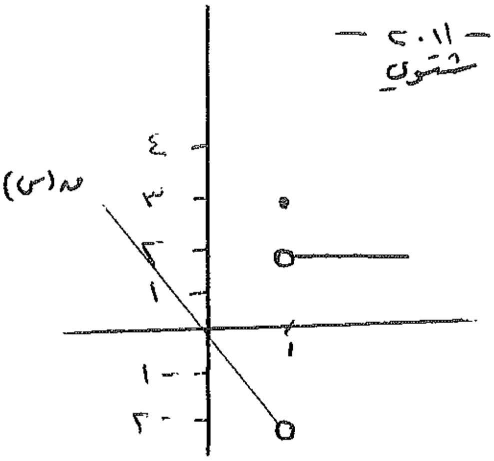
نهـا ه(س) =
س ← ٢−

نهـا ه(س) =
س ← ٢

ه(٢) =

٤) نهـا د(س) =
س ← ١

د(١) =

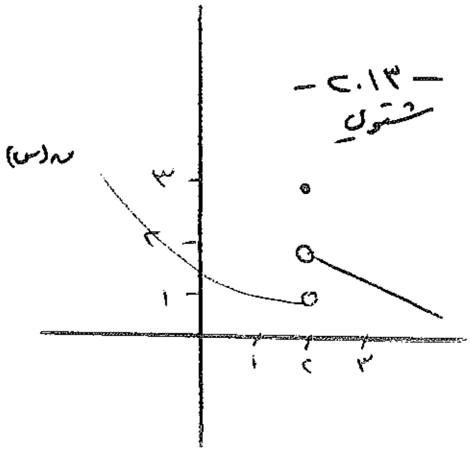


٥) نهـا د(س) =
س ← ٢+

نهـا د(س) =
س ← ٢-

نهـا د(س) =
س ← ٢

د(٢) =



تدريب ١ : اعتماداً على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى الاقتران $ق(س) = \frac{س^{٢} - ٩}{س - ٣}$.

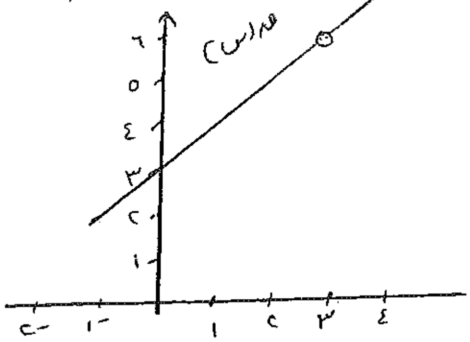
جد قيمة كل مما يأتي (إن وجدت)

١) $ق(٣)$

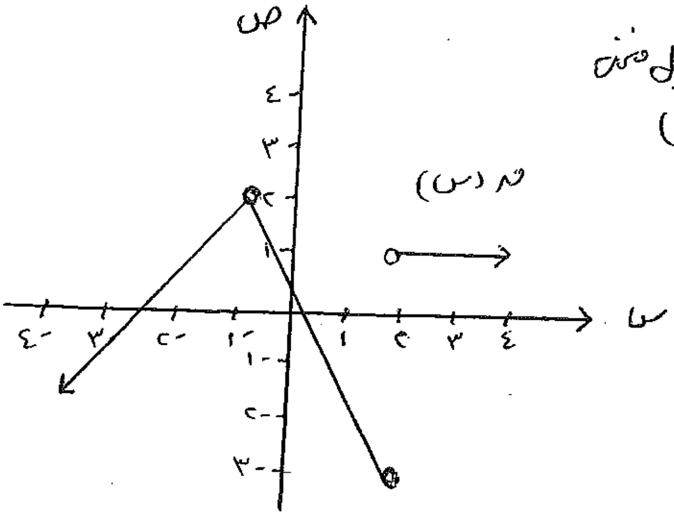
٢) $\underset{س \to ٣^{-}}{\text{نها}}\ ق(س)$

٣) $\underset{س \to ٣^{+}}{\text{نها}}\ ق(س)$

٤) $\underset{س \to ٣}{\text{نها}}\ ق(س)$



تدريب ٢ : اعتماداً على الشكل التالي الذي يمثل منحنى الاقتران ق جد قيمة كل مما يأتي (إن وجدت)

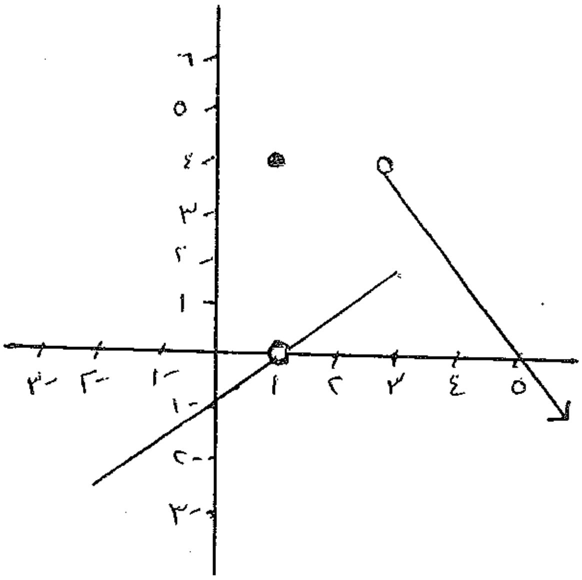


١) $\underset{س \to ١-}{\text{نها}}\ ق(س) =$

٢) $\underset{س \to ٢}{\text{نها}}\ ق(س) =$

٣) $\underset{س \to ٣}{\text{نها}}\ ق(س) =$

تدريب ٣ : اعتماداً على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى الاقتران ق ، جد قيمة كل مما يأتي (إن وجدت)



١) $\underset{س \to ٢}{\text{نها}}\ ق(س)$

٢) الثابت أ ، حيث $\underset{س \to أ}{\text{نها}}\ ق(س) =$ صفر

٣) الثابت ب ، حيث $\underset{س \to ب}{\text{نها}}\ ق(س)$ غير موجودة .

تدريب ١ :

١) ق(٣) = غير معرف

٢) نهـا ق(س) = ٦
س ← ٣^-

٣) نهـا ق(س) = ٦
س ← ٣^+

٤) نهـا ق(س) = ٦ .
س ← ٢

تدريب ٢ :

١) نهـا ق(س) = ٢
س ← -١

٢) نهـا ق(س) = ١
س ← ٢^+

نهـا ق(س) = -٣
س ← ٢^-

⇐ نهـا ق(س) غير موجودة
س ← ٢

٣) نهـا ق(س) = ١
س ← ٣

تدريب ٣ :

١) نهـا ق(س) = ١
س ← ٢

٢) قيم أ = { ١ ، ٥ }

٣) ب = { ٣ } .

الأسئلة

١) اعتمادًا على الشكل (١–٩) الذي يمثل منحنى الاقتران ق(س) = $\frac{س^{٢} - ٤}{س - ٢}$ ،

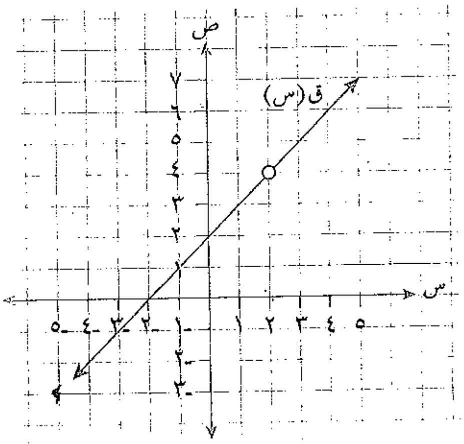
جد قيمة كل مما يأتي (إن وجدت):

أ) ق(٢)

ب) $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهــــا}}$ ق(س)

جـ) ق(٣)

د) $\underset{س \leftarrow ٣}{\text{نهــــا}}$ ق(س)



الشكل (١–٩).

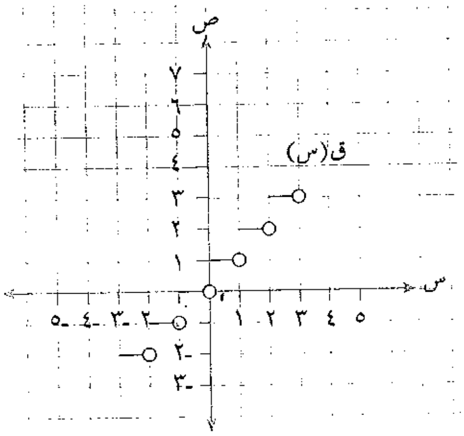
٢) اعتمادًا على الشكل (١–١٠) الذي يمثل منحنى الاقتران ق، جد قيمة كل مما يأتي (إن وجدت):

أ) $\underset{س \leftarrow ٠{,}٥}{\text{نهــــا}}$ ق(س)

ب) $\underset{س \leftarrow ٢^{+}}{\text{نهــــا}}$ ق(س)

جـ) $\underset{س \leftarrow ٢^{-}}{\text{نهــــا}}$ ق(س)

د) $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهــــا}}$ ق(س)



الشكل (١–١٠).

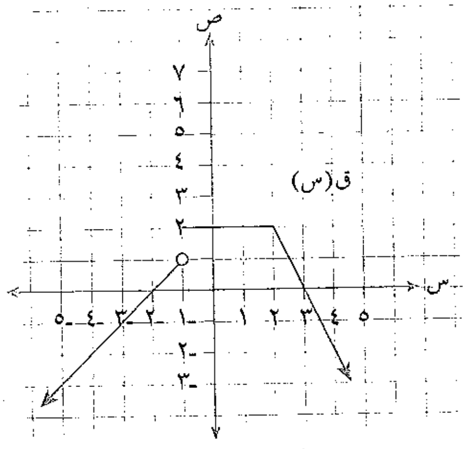
٣) اعتمادًا على الشكل (١–١١) الذي يمثل منحنى الاقتران ق، جد قيمة كل مما يأتي (إن وجدت):

أ) $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهــــا}}$ ق(س)

ب) $\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهــــا}}$ ق(س)

جـ) قيمة أ، حيث $\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهــــا}}$ ق(س) غير موجودة.

د) قيم ب، حيث $\underset{س \leftarrow ب}{\text{نهــــا}}$ ق(س) = صفرًا.



الشكل (١–١١).

س١ أ) ق(٢) = غير معرف

ب) نهـا ق(س) = ٤
س ← ٢

جـ) ق(٣) = ٥

د) نهـا ق(س) = ٥
س ← ٣

س٢ أ) نهـا ق(س) = ١
س ← ٠٫٥

ب) نهـا ق(س) = ٣
س ← ٢⁺

جـ) نهـا ق(س) = ٢
س ← ٢⁻

د) نهـا ق(س) = غير موجودة .
س ← ٢

س٣

أ) نهـا ق(س) = ٢
س ← ٢

ب) نهـا ق(س) = ٢
س ← ١

جـ) قيم أ ، حيث نهـا ق(س) غير موجودة
س ← أ

النهاية غير موجودة عند القفزات

أ = {-١} .

د) قيم ب ، حيث نهـا ق(س) = صفر
س ← ب

قيم ب = {-٢ ، ٣} .

الوحدة الأولى

النهايات والاتصال

نظريات النهايات

نظريات على النهايات :

1 اذا كان أ ، جـ عددين حقيقين فإن

أ) نهـا جـ = جـ .
س ← أ

ب) نهـا س = أ .
س ← أ

نهاية الثابت = الثابت نفسه

2 اذا كانت أ ، ل ، كـ ، جـ اعداداً حقيقية
وكانت نهـا ق(س) = ل ، نهـا هـ(س) = كـ
س ← أ
فإن :

1) نهـا (ق(س) + هـ(س)) = نهـا ق(س) + نهـا هـ(س)
س ← أ
= ل + كـ

2) نهـا (ق(س) ـ هـ(س)) = نهـا ق(س) ـ نهـا هـ(س)
س ← أ
= ل ـ كـ .

3) نهـا (ق(س) × هـ(س)) = نهـا ق(س) × نهـا هـ(س)
س ← أ
= ل × كـ .

4) نهـا (جـ × ق(س)) = جـ × نهـا ق(س)
س ← أ
= جـ × ل .

5) نهـا $\sqrt[ن]{\text{ق(س)}}$ = $\sqrt[ن]{\text{نهـا ق(س)}}$
س ← أ

= $\sqrt[ن]{\text{ل}}$

(ل > صفر اذا كان ن عدداً زوجياً)

ويمكن التعبير عن هذه النظرية بالكلمات كما يأتي

1) نهاية مجموع اقترانين تساوي مجموع نهايتيهما.

2) نهاية الفرق بين اقترانين تساوي الفرق بين نهايتيهما.

3) نهاية حاصل ضرب اقترانين تساوي حاصل ضرب نهايتيهما.

4) نهاية حاصل ضرب اقتران بعدد ثابت تساوي حاصل ضرب العدد الثابت بنهاية الاقتران.

5) نهاية الجذر النوني للاقتران تساوي الجذر النوني لنهاية الاقتران بشرط ان تكون نهاية الاقتران موجبة عندما تكون (ن) عدداً زوجياً.

نتيجة (1)

اذا كان ق(س) كثير حدود فإن
نهـا ق(س) = ق(أ)
س ← أ

نتيجة (2)

نهـا $(\text{ق(س)})^{ن}$ = $(\text{نهـا ق(س)})^{ن}$
س ← أ
حيث ن عدد طبيعي

(و) نهـا $\text{س}^{ن}$ = $(\text{نهـا س})^{ن}$ = $\text{أ}^{ن}$
س ← أ

الوحدة الأولى

النهايات والاتصال

نظريات النهايات

(٢)

مثال ١ : اذا كانت $\underset{س \leftarrow ١}{\text{نها}}\ \text{د(س)} = ٢$ ، $\underset{س \leftarrow ١}{\text{نها}}\ \text{هـ(س)} = -٣$ فجد قيمة مايلي :

(أ) $\underset{س \leftarrow ١}{\text{نها}}\left(\text{د(س)} + \text{هـ(س)}\right) =$

$\underset{س \leftarrow ١}{\text{نها}}\ \text{د(س)} + \underset{س \leftarrow ١}{\text{نها}}\ \text{هـ(س)} = ٢ + {}^{-}٣ = -١$

(ب) $\underset{س \leftarrow ١}{\text{نها}}\left(٢\,\text{د(س)} - ٣\,\text{هـ(س)}\right) =$

$\underset{س \leftarrow ١}{\text{نها}}\ ٢\,\text{د(س)} - \underset{س \leftarrow ١}{\text{نها}}\ ٣\,\text{هـ(س)} =$

$٢\underset{س \leftarrow ١}{\text{نها}}\ \text{د(س)} - ٣\underset{س \leftarrow ١}{\text{نها}}\ \text{هـ(س)} = ٢ \times ٢ - ٣ \times -٣$

$= ٤ + ٩ = ١٣$

(هـ) $\underset{س \leftarrow ١}{\text{نها}}\left(\text{س}^{٢}\,\text{د(س)} + ١٥\right) =$

$\underset{س \leftarrow ١}{\text{نها}}\ \text{س}^{٢}\,\text{د(س)} + \underset{س \leftarrow ١}{\text{نها}}\ ١٥ = \underset{س \leftarrow ١}{\text{نها}}\ \text{س}^{٢} \times \underset{س \leftarrow ١}{\text{نها}}\ \text{د(س)} + ١٥$

$= ١^{٢} \times ٢ + ١٥ = ٢ + ١٥ = ١٧$.

مثال ٢ : احسب قيمة النهايات التالية :

① $\underset{س \leftarrow -٤}{\text{نها}}\left(٣\text{س}^{٢} - ٦\right) = ٣(-٤)^{٢} - ٦ = ٤٢$

② $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نها}}\left(\text{س}^{٣} + ٤\text{س}^{٢} - ٥\text{س} + ٤\right) =$

$٢^{٣} + ٤(٢)^{٢} - ٥(٢) + ٤ = ١٨$

③ $\underset{س \leftarrow ٣}{\text{نها}}\left(\text{س}^{٢} - ٤\right)^{٣} = \left(\underset{س \leftarrow ٣}{\text{نها}}\left(\text{س}^{٢} - ٤\right)\right)^{٣}$

$= \left(٣^{٢} - ٤\right)^{٣} = ٥^{٣} = ١٢٥$

سؤال ١ : احسب قيمة النهايات التالية

① $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نها}}\ ٧$

② $\underset{س \leftarrow -٢}{\text{نها}}\left(٢\text{س}^{٣} - ١٥\text{س}\right)$

③ $\underset{س \leftarrow ١}{\text{نها}}\left(٣\text{س} + ٥\right)\left(\text{س}^{٢} - ٢\text{س} + ٣\right)$

④ $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نها}}\sqrt{\text{س}^{٣} + ١٧}$

سؤال ٢ : اذا كانت $\underset{س \leftarrow ٥}{\text{نها}}\ \text{د(س)} = ٦$ ، $\underset{س \leftarrow ٥}{\text{نها}}\ \text{هـ(س)} = -٢$ فما قيمة

$\underset{س \leftarrow ٥}{\text{نها}}\left(\text{د(س)} \times \left(\text{هـ(س)}\right)^{٢}\right)$.

وزاري ١٩٩٧

اذا كانت $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نها}}\ \text{د(س)} = ٦$ ، $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نها}}\ \text{هـ(س)} = -٤$ جد

$\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نها}}\left(\text{د}^{٢}\text{(س)} - \frac{\text{هـ(س)}}{٢} - ١١\right)$

الوحدة الأولى

النهايات والاتصال

نظريات النهايات

(٣)

حساب النهايات للاقترانات المتشعبة (متعددة القواعد)

لحساب النهاية للاقترانات المتشعبة نهتم بنوع النقطة كما يلي:

١) اذا كانت النقطة نقطة تشعب نجد النهاية من اليمين ومن اليسار.

٢) اذا كانت النقطة عادية نعوض مباشرة في القاعدة المقابلة للنقطة

مثال ١: اذا كان

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} ٣\text{س}^{٢} - ٢\text{س} \text{ ، } & \text{س} < ٤ \\ ٢\text{س} + ٣ \text{ ، } & \text{س} \geq ٤ \end{cases}$$

احسب ① ق(١) ② ق(٥) ③ ق(٤)

④ $\underset{\text{س} \leftarrow ١}{\text{نهـا}}\ \text{ق}(\text{س})$ ⑤ $\underset{\text{س} \leftarrow ٤}{\text{نهـا}}\ \text{ق}(\text{س})$

الحل: ١) ق(١) = $٣(١)^{٢} - ٢(١)$ نعوض في القاعدة الأولى

= صفر . (لأنه ٠ < ٤).

٢) ق(٥) = ٢(٥) + ٣ = ١٣ (لأنه ٥ > ٤).

٣) ق(٤) = ٢(٤) + ٣ = ١١ .

٤) $\underset{\text{س} \leftarrow ١}{\text{نهـا}}\ \text{ق}(\text{س}) = \underset{\text{س} \leftarrow ١}{\text{نهـا}} (٣\text{س}^{٢} - ٢\text{س})$ (لأنه ١ < ٤)

$= ٣(١)^{٢} - ٢(١) = ١$

٥) بما ان ٤ هي نقطة تحول نجد النهاية من اليمين ومن اليسار

$\underset{\text{س} \leftarrow ٤^{-}}{\text{نهـا}} (٣\text{س}^{٢} - ٢\text{س}) = ٣(٤)^{٢} - ٢(٤) = ٤٠$

$\underset{\text{س} \leftarrow ٤^{+}}{\text{نهـا}} (٢\text{س} + ٣) = ٢ \times ٤ + ٣ = ١١$

$\underset{\text{س} \leftarrow ٤}{\text{نهـا}}\ \text{ق}(\text{س})$ غير موجوده لانه $\underset{\text{س} \leftarrow ٤^{+}}{\text{نهـا}}\ \text{ق}(\text{س}) \neq \underset{\text{س} \leftarrow ٤^{-}}{\text{نهـا}}\ \text{ق}(\text{س})$

مثال ٢: اذا كان

$$\text{هـ}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^{٢} + ٥ \text{ ، } & \text{س} < ٣ \\ ٢٠ \text{ ، } & \text{س} = ٣ \\ \text{أ}\text{س} + ٢ \text{ ، } & \text{س} > ٣ \end{cases}$$

وكانت $\underset{\text{س} \leftarrow ٣}{\text{نهـا}}\ \text{هـ}(\text{س})$ موجوده فما قيمة أ؟

الحل: بما ان $\underset{\text{س} \leftarrow ٣}{\text{نهـا}}\ \text{هـ}(\text{س})$ موجوده فان

$\underset{\text{س} \leftarrow ٣^{+}}{\text{نهـا}}\ \text{هـ}(\text{س}) = \underset{\text{س} \leftarrow ٣^{-}}{\text{نهـا}}\ \text{هـ}(\text{س})$

$\underset{\text{س} \leftarrow ٣^{+}}{\text{نهـا}} (\text{أ}\text{س} + ٢) = \underset{\text{س} \leftarrow ٣^{-}}{\text{نهـا}} (\text{س}^{٢} + ٥)$

$٣\text{أ} + ٢ = ٣^{٢} + ٥ \Leftarrow ٣\text{أ} \underset{-٢}{+ ٢} = \underset{-٢}{١٤}$

$\frac{٣\text{أ}}{٣} = \frac{١٢}{٣} \Leftarrow \text{أ} = ٤$

مثال ٣: اذا كان

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} ٤\text{س} + ٢ \text{ ، } & \text{س} \neq ٢ \\ \text{س}^{٢} + ١ \text{ ، } & \text{س} = ٢ \end{cases}$$

احسب أ) ق(٢) ب) $\underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهـا}}\ \text{ق}(\text{س})$

الحل: أ) ق(٢) = $٢^{٢} + ١ = ٥$

ب) $\underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهـا}}\ \text{ق}(\text{س}) = \underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهـا}} (٤\text{س} + ٢) = ٤ \times ٢ + ٢ = ١٠$

سؤال ١: اذا كان

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} ٣\text{س}^{٢} + ٨ \text{ ، } & \text{س} < ٢ \\ \text{أ}\text{س} - ١٢ \text{ ، } & \text{س} \geq ٢ \end{cases}$$

وكانت $\underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهـا}}\ \text{ق}(\text{س})$ موجوده فما قيمة أ؟

سؤال ٢: اذا كان

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \text{أ}\text{س}^{٢} + \text{ب} \text{ ، } & \text{س} < ٢ \\ ٣\text{س} + \text{أ} \text{ ، } & \text{س} \geq ٢ \end{cases}$$

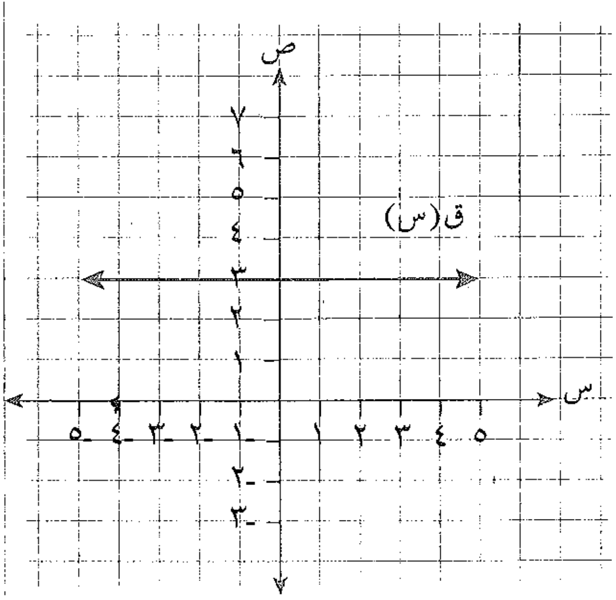
وكانت $\underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهـا}}\ \text{ق}(\text{س}) = ٥$ فجد قيمة

كل من الثابتين أ ، ب .

نشاط

١) اعتمادًا على الشكل (١-١٢) الذي يمثل منحنى كثير الحدود ق(س) = ٣، أجب عما يأتي:

أ) ما درجة الاقتران ق؟ ما نوعه؟



الشكل (١-١٢).

ب) جد قيمة كل من:

نهـــا ق(س)
س←٢

نهـــا ق(س)
س←٠

نهـــا ق(س)
س←-٢

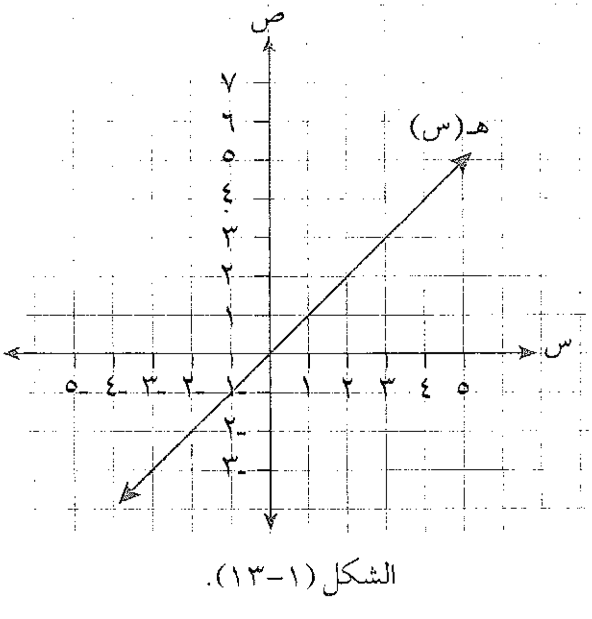
جـ) جد مجموعة قيم الثابت أ، حيث

نهـــا ق(س) = ٣
س←أ

د) ماذا تلاحظ؟

٢) اعتمادًا على الشكل (١-١٣) الذي يمثل منحنى الاقتران هـ (س) = س، أجب عن الأسئلة الآتية:

أ) ما درجة الاقتران هـ ؟ ما نوعه؟



الشكل (١-١٣).

ب) جد قيمة كل من:

نهـــا هـ (س)
س←٢

نهـــا هـ (س)،
س←٠

نهـــا هـ (س)
س←-٢

جـ) ماذا تلاحظ؟

نظريات النهايات

مثال١: اذا علمت أن

$$\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} (س - ١) = ١ \text{ ، } \underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} (س + ١) = ٣$$

جد قيمة كل مما يأتي:

١) $\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} (س^{٢} - ١)$

٢) $\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} ٢س$.

الحل: لاحظ أن $س^{٢} - ١ = (س - ١)(س + ١)$

١) $\therefore \underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} (س^{٢} - ١) =$

$= \underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} (س - ١)(س + ١) =$

$= \underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} (س - ١) \times \underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} (س + ١)$

$١ \times ٣ = ٣$

٢) لاحظ أن $٢س = (س + ١) + (س - ١)$

$\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} ٢س = \underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} \left((س + ١) + (س - ١)\right)$

$= \underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} (س + ١) + \underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} (س - ١)$

$= ٣ + ١$

مثال٢: اذا كان

$$ق(س) = \begin{cases} ٥س^{٢} - ل \text{ ، } & س < ٢ \\ ل س + ٢ \text{ ، } & س \geq ٢ \end{cases}$$

وكانت $\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} ق(س)$ موجودة فما قيمة الثابت ل ؟

الحل: بما أن $\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} ق(س)$ موجودة $\Leftarrow$

$$\underset{س \to ٢^{+}}{\text{نهـا}} ق(س) = \underset{س \to ٢^{-}}{\text{نهـا}} ق(س)$$

$$\underset{س \to ٢^{+}}{\text{نهـا}} (ل س + ٢) = \underset{س \to ٢^{-}}{\text{نهـا}} (٥س^{٢} - ل)$$

$$\begin{aligned} ٢ل + ٢ &= ٥ \times ٤ - ل \\ +ل \quad & \quad +ل \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ٣ل + ٢ &= ٢٠ \\ -٢ \quad & \quad -٢ \end{aligned} \Leftarrow \frac{٣ل}{٣} = \frac{١٨}{٣}$$

$$\boxed{ل = ٦}$$

سؤال: اذا كان

$$ق(س) = \begin{cases} ٥س - ٣ \text{ ، } & س \geq أ \\ ٦س + ٨ \text{ ، } & س < أ \end{cases}$$

جد قيمة أ علماً بأن $\underset{س \to أ}{\text{نهـا}} ق(س)$ موجودة .

تدريب ١ : جد قيمة كل مما يأتي :

١) $\underset{س \leftarrow -١}{\text{نهـا}} \left(س^{٦} - ٥س^{٢} + ٤س + ٩\right)$

٢) $\underset{س \leftarrow -١}{\text{نهـا}} \left(٧س^{٢} + ٥س\right)\left(س^{٤} + س - ١٠\right)$

٣) $\underset{س \leftarrow -١}{\text{نهـا}} \left(س^{٢} + ٥س\right)^{٣}$

تدريب ٢ :

اذا كانت $\underset{س \leftarrow -١}{\text{نهـا}} \left(ق(س) + س^{٣} - ٣\right) = ٥$

فجد قيمة $\underset{س \leftarrow -١}{\text{نهـا}} ٣\left(ق(س)\right)^{٢}$.

تدريب ٣ : اذا كان

① $ق(س) = \begin{cases} س^{٢} + ١ & ، س \leq ٣ \\ ٤س - ٢ & ، س > ٣ \end{cases}$

فجد قيمة كل مما يأتي (إن وجدت)

أ) $ق(٣)$ ب) $\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـا}} ق(س)$

جـ) $\underset{س \leftarrow ٤}{\text{نهـا}} ق(س)$ د) $\underset{س \leftarrow ٣}{\text{نهـا}} ق(س)$

② اذا كان $ق(س) = \begin{cases} س + ٦ & ، س \in ص \\ ٤س + ١ & ، س \notin ص \end{cases}$

حيث ص = مجموعة الأعداد الصحيحة .

فجد $\underset{س \leftarrow ٣}{\text{نهـا}} ق(س)$ (إن وجدت).

تدريب ٤ :

١) اذا كان $ق(س) = \begin{cases} ٥س - أ & ، س < ١ \\ ب س^{٢} + ٧ & ، س \geq ١ \end{cases}$

وكانت $\underset{س \leftarrow ٣}{\text{نهـا}} ق(س) = ١٦$ ، $\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـا}} ق(س)$ موجودة

فما قيمة كل من الثابتين أ ، ب ؟

٢) اذا كان $ق(س) = \begin{cases} ٥س^{٣} & ، س < أ \\ ٤٠ & ، س \geq أ \end{cases}$

وكانت $\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهـا}} ق(س)$ موجودة

فما قيمة الثابت أ ؟ .

حل تدريبات الكتاب
نظريات النهايات

الوحدة الأولى
النهايات والاتصال

تدريب ١ :

١) نها$_{س \leftarrow ١-}$ (س^{٦} − ٥س^{٢} + ٤س + ٩) =

(١-)^{٦} − ٥(١-)^{٢} + ٤(١-) + ٩

١ − ٥ − ٤ + ٩ = ١٠ − ٩ = ١

٢) نها$_{س \leftarrow ١-}$ (٧س^{٢} + ٥س) (س^{٢} + س − ١٠)

= (٧(١-)^{٢} + ٥(١-)) ((١-)^{٢} − ١ − ١٠)

= (٧ − ٥) (١ − ١ − ١٠)

= ٢ × ١٠- = ٢٠-

٣) نها$_{س \leftarrow ١-}$ (س^{٢} + ٥س)^{٣} =

((١-)^{٢} + ٥×١-)^{٣} = (١ − ٥)^{٣}

= (٤-)^{٣} = ٦٤- .

تدريب ٢ : نجد أولاً نها$_{س \leftarrow ١-}$ ق(س)

نها$_{س \leftarrow ١-}$ (ق(س) + س^{٣} − ٣) = ٥

نها$_{س \leftarrow ١-}$ ق(س) + (١-)^{٣} − ٣ = ٥ .

نها$_{س \leftarrow ١-}$ ق(س) + ٤- = ٥
　　　　　　　　　　+٤　　+٤

نها$_{س \leftarrow ١-}$ ق(س) = ٩ ⟸ نها$_{س \leftarrow ١-}$ ٣(ق(س))^{٢}

= ٣(نها$_{س \leftarrow ١-}$ ق(س))^{٢} = ٣ × ٩^{٢} = ٣ × ٨١ = ٢٤٣

تدريب ٣ : (١)

أ) ق(٢) = ٢^{٢} + ١ = ٥

ب) نها$_{س \leftarrow ١}$ ق(س) = ١^{٢} + ١ = ٢

جـ) نها$_{س \leftarrow ٤}$ ق(س) = ٤ × ٤ − ٢ = ١٦ − ٢ = ١٤

د) نها$_{س \leftarrow ٣}$ ق(س)

نها$_{س \leftarrow ٣+}$ ق(س) = ٤ × ٣ − ٢ = ١٠

نها$_{س \leftarrow ٣-}$ ق(س) = ٣^{٢} + ١ = ١٠

نها$_{س \leftarrow ٣}$ ق(س) = ١٠

(٢) نها$_{س \leftarrow ٣}$ ق(س) = ٣ + ٦ = ٩ .　لأن ٣ ∈ ص

تدريب ٤ : نها$_{س \leftarrow ٣}$ ق(س) = ١٦

(١) نها$_{س \leftarrow ٣}$ (ب س^{٢} + ٧) = ١٦

٩ب + ٧ = ١٦
　　−٧　　−٧

$\frac{٩ب}{٩} = \frac{٩}{٩}$

$\boxed{ب = ١}$

نها$_{س \leftarrow ١}$ ق(س) موجودة ⟸

نها$_{س \leftarrow ١+}$ ق(س) = نها$_{س \leftarrow ١-}$ ق(س)

نها$_{س \leftarrow ١+}$ (ب س^{٢} + ٧) = نها$_{س \leftarrow ١-}$ (٥س − أ)

تابع تدريب ٤ :

$\underset{س \leftarrow ١^{+}}{نها} (ب س^{٤} + ٧) = \underset{س \leftarrow ١^{-}}{نها} (٥س - م)$

$\boxed{ب = ١}$

$ب + ٧ = ٥ - م$

$١ + ٧ = ٥ - م$

$\underset{-٥}{٨} = \underset{-٥}{٥ - م}$

$٣ = -م \Leftarrow م = -٣$

---

(٢) $\underset{س \leftarrow م}{نها} د(س)$ موجودة $\Leftarrow$

$\underset{س \leftarrow م^{+}}{نها} د(س) = \underset{س \leftarrow م^{-}}{نها} د(س)$

$\underset{س \leftarrow م^{+}}{نها} ٤٠ = \underset{س \leftarrow م^{-}}{نها} ٥ س^{٣}$

$\frac{٤٠}{٥} = \frac{٥}{٥} (م)^{٣}$

$٨ = م^{٣}$ نأخذ الجذر التكعيبي للطرفين

$\sqrt[٣]{٨} = \sqrt[٣]{م^{٣}}$

$\Leftarrow م = ٢ .$

الأسئلة

١) إذا علمت أن نهـــا$_{س \leftarrow ٣}$ ق(س) = ٨ ، نهـــا$_{س \leftarrow ٣}$ هـ(س) = −٢ ، فجد قيمة كل مما يأتي (إن وجدت):

أ) نهـــا$_{س \leftarrow ٣}$ (٤ق(س) + ٢هـ(س))

ب) نهـــا$_{س \leftarrow ٣}$ (ق(س) − ٢هـ(س))

جـ) نهـــا$_{س \leftarrow ٣}$ (ق(س) × هـ(س))

د) نهـــا$_{س \leftarrow ٣}$ ٥ق(س)

هـ) نهـــا$_{س \leftarrow ٣}$ (٢ق(س) + ١)

و) نهـــا$_{س \leftarrow ٣}$ ((هـ(س))^{٣} + ٣س − ٧)

ز) نهـــا$_{س \leftarrow ٣}$ (٢ق(س) + ٣هـ(س) + ٢س + ٤)

٢) جد قيمة كل مما يأتي:

أ) نهـــا$_{س \leftarrow -٢}$ (٣س^{٤} − ٥س^{٣} + ٦س − ٧)

ب) نهـــا$_{س \leftarrow ١}$ (س^{٢} + ١) (س^{٣} + ٥س − ٢)

جـ) نهـــا$_{س \leftarrow -١}$ (س^{٣} + ٢)^{٥}

٣) إذا كانت نهـــا$_{س \leftarrow -٢}$ (٣ق(س) + ٢س + ١) = ٢٧ ، فجد نهـــا$_{س \leftarrow -٢}$ (ق(س))^{٣}

٤) إذا كانت نهـــا$_{س \leftarrow ٣}$ (م س^{٢} + ٥س + ١) = ٢٥ ، فما قيمة الثابت م؟

٥) إذا كان ق(س) = { ٤س + ١ ، س < ٠ ؛ ٥ − س^{٢} ، س ≥ ٠ } ، فجد قيمة كل مما يأتي:

أ) نهـــا$_{س \leftarrow ١}$ ق(س)

ب) نهـــا$_{س \leftarrow -٢}$ ق(س)

جـ) نهـــا$_{س \leftarrow ٠}$ ق(س)

٦) إذا كان هـ(س) = $\begin{cases} \text{س}^{٢} + ١ & ، \text{ س} \neq ٣ \\ ٨ & ، \text{ س} = ٣ \end{cases}$

فجد قيمة كل مما يأتي:

أ) $\underset{\text{س} \leftarrow ٥}{\text{نهــا}}$ هـ(س)　　ب) $\underset{\text{س} \leftarrow ٣}{\text{نهــا}}$ هـ(س)　　جـ) هـ(٣)

٧) إذا كان ق(س) = $\begin{cases} \text{أس} + ٤ & ، \text{ س} < ٢ \\ ٥\text{س}^{٢} + \text{أ} & ، \text{ س} \geq ٢ \end{cases}$

وكانت $\underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهــا}}$ ق(س) موجودة، فما قيمة الثابت أ ؟

٨) إذا كان ق(س) = $\begin{cases} \text{س}^{٢} + ١ & ، \text{ س} < ٢ \\ ٥\text{س} & ، ٢ \leq \text{س} \leq ٦ \\ \text{س}^{٢} - ٦ & ، \text{ س} > ٦ \end{cases}$

فجد قيمة كل من النهايات الآتية (إن وجدت):

أ) $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهــا}}$ ق(س)　　ب) $\underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهــا}}$ ق(س)

جـ) $\underset{\text{س} \leftarrow ٤}{\text{نهــا}}$ ق(س)　　د) $\underset{\text{س} \leftarrow ٦}{\text{نهــا}}$ ق(س)

٩) إذا كان ق(س) = $\begin{cases} ٣\text{س} - \text{أ} & ، \text{ س} < ٢ \\ ١٠ & ، \text{ س} > ٢ \end{cases}$

وكانت $\underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهــا}}$ ق(س) موجودة، فجد قيمة الثابت أ ؟

حل

(أ) $\underset{س \to ٣}{\text{نها}} \left(٤\text{ق}(س) + ٢\text{هـ}(س)\right) =$

$٤ \underset{س \to ٣}{\text{نها}} \text{ق}(س) + ٢ \underset{س \to ٣}{\text{نها}} \text{هـ}(س)$

$٤ \times ٨ + ٢ \times -٢ = ٣٢ - ٤$

$= ٢٨$.

(ب) $\underset{س \to ٣}{\text{نها}} \left(\text{ق}(س) - ٢\text{هـ}(س)\right) =$

$\underset{س \to ٣}{\text{نها}} \text{ق}(س) - ٢ \underset{س \to ٣}{\text{نها}} \text{هـ}(س)$

$٨ - ٢ \times -٢ = ٨ + ٤ = ١٢$

(جـ) $\underset{س \to ٢}{\text{نها}} \left(\text{ق}(س) \times \text{هـ}(س)\right) =$

$\underset{س \to ٣}{\text{نها}} \text{ق}(س) \times \underset{س \to ٣}{\text{نها}} \text{هـ}(س) =$

$٨ \times -٢ = -١٦$

(د) $\underset{س \to ٣}{\text{نها}} ٥\text{ق}(س) = ٥ \underset{س \to ٢}{\text{نها}} \text{ق}(س)$

$= ٥ \times ٨ = ٤٠$.

(هـ) $\underset{س \to ٣}{\text{نها}} \left(٢\text{ق}(س) + ١\right) =$

$= ٢ \underset{س \to ٣}{\text{نها}} \text{ق}(س) + ١$

$٢ \times ٨ + ١ = ١٦ + ١$

$= ١٧$

(و) $\underset{س \to ٣}{\text{نها}} \left((\text{هـ}(س))^{٣} + ٣س - ٧\right) =$

$\left(\underset{س \to ٢}{\text{نها}} \text{هـ}(س)\right)^{٣} + \underset{س \to ٣}{\text{نها}} (٣س - ٧) =$

$(-٢)^{٣} + ٣ \times ٣ - ٧ = -٨ + ٩ - ٧$

$= -٦$

(ز) $\underset{س \to ٣}{\text{نها}} \left(٢\text{ق}(س) + ٣\text{هـ}(س) + ٢س + ٤\right) =$

$٢ \underset{س \to ٣}{\text{نها}} \text{ق}(س) + ٣ \underset{س \to ٣}{\text{نها}} \text{هـ}(س) + \underset{س \to ٣}{\text{نها}} (٢س + ٤)$

$= ٢ \times ٨ + ٣ \times -٢ + ٢ \times ٣ + ٤$

$١٦ - ٦ + ٦ + ٤ = ٢٠$

س٢ أ) $\underset{س \to -٢}{\text{نها}} \left(٣س^{٤} - ٥س^{٣} + ٦س - ٧\right) =$

$٣(-٢)^{٤} - ٥(-٢)^{٣} + ٦(-٢) - ٧ =$

$٣ \times ١٦ - ٥ \times -٨ - ١٢ - ٧ = ٤٨ + ٤٠ - ١٩$

$٨٨ - ١٩ = ٦٩$

ب) $\underset{س \to ١}{\text{نها}} (س^{٢} + ١)(س^{٣} + ٥س - ٢)$

$(١ + ١)(١ + ٥ - ٢) = ٢ \times ٤ = ٨$.

جـ) $\underset{س \to -١}{\text{نها}} (س^{٣} + ٢)^{٥} =$

$\left((-١)^{٣} + ٢\right)^{٥} = (-١ + ٢)^{٥}$

$= ١^{٥} = ١$

س٣

نهـا (٣ق(س) + ٢س + ١) = ٢٧
س←٢-

٣ نهـا ق(س) + نهـا (٢س + ١) = ٢٧
س←٢- س←٢-

٣ نهـا ق(س) + ٢×٢- + ١ = ٢٧
س←٢-

٣ نهـا ق(س) − ٣ = ٢٧
س←٢- +٣ +٣

٣/٣ نهـا ق(س) = ٣٠/٣
س←٢-

نهـا ق(س) = ١٠
س←٢-

نهـا (ق(س))^٣ = (نهـا ق(س))^٣
س←٢- س←٢-

= ١٠^٣ = ١٠٠٠

س٤ نهـا (أس² + ٥س + ١) = ٢٥
س←٣

نهـا أس² + ٥×٣ + ١ = ٢٥
س←٣

أ(٣)² + ١٦ = ٢٥

٩أ = ٢٥ − ١٦

٩أ/٩ = ٩/٩

أ = ١

س٥ أ) نهـا ق(س) = ٥ − ١² = ٤
س←١

ب) نهـا ق(س) = ٤×٢- + ١ = ٨- + ١
= ٧-
س←٢-

جـ) نهـا ق(س) = ٥ − ٠ = ٥
س←٠+

نهـا ق(س) = ٤×٠ + ١ = ١
س←٠-

⇐ نهـا ق(س) غير موجودة.
س←٠

س٦ أ) نهـا هـ(س) = ٥² + ١ = ٢٦
س←٥

ب) نهـا هـ(س) = ٣² + ١ = ١٠
س←٣

جـ) هـ(٣) = ٨.

س٧ نهـا ق(س) موجودة ⇐
س←٢

نهـا ٥س² + أ = نهـا أس + ٤
س←٢+ س←٢-

٢٠ + أ = ٢أ + ٤

٢٠ − ٤ = ٢أ − أ

١٦ = أ

س٥ نها د(س) = ٠^{٢} + ١
أ) س←٠   = ١

ب) نها د(س) = ٥ × ٢ = ١٠
س←٢⁺

نها د(س) = ٢^{٢} + ١ = ٥
س←٢⁻

⟸ نها د(س) = غير موجودة
س←٢

جـ) نها د(س) = ٥ × ٤
س←٤   = ٢٠

د) نها د(س) = ٦^{٢} − ٦
س←٦⁺   = ٣٦ − ٦ = ٣٠

نها د(س) = ٥ × ٦ = ٣٠
س←٦⁻

⟸ نها د(س) = ٣٠
س←٦ .

س٩ نها د(س) موجودة ⟸
س←٢

نها د(س) = نها د(س)
س←٢⁺   س←٢⁻

١٠ = نها(٣س − أ)
س←٢⁻

١٠ = ٣×٢ − أ

١٠ = ٦ − أ

−٦   −٦

٤ = − أ ⟸

أ = −٤ .

نهاية خارج قسمة اقترانين

نهاية خارج قسمة اقترانين

اذا كانت أ، ل، ك أعداداً حقيقية ك $\neq 0$،
وكانت $\underset{\text{س}\to\text{أ}}{\text{نها}}\ \text{ق(س)} = \text{ل}$ ، $\underset{\text{س}\to\text{أ}}{\text{نها}}\ \text{هـ(س)} = \text{ك}$
فإن $$\underset{\text{س}\to\text{أ}}{\text{نها}} \frac{\text{ق(س)}}{\text{هـ(س)}} = \frac{\underset{\text{س}\to\text{أ}}{\text{نها}}\ \text{ق(س)}}{\underset{\text{س}\to\text{أ}}{\text{نها}}\ \text{هـ(س)}} = \frac{\text{ل}}{\text{ك}}$$

* في الاقترانات النسبية عند التعويض المباشر ينتج الحالات التالية

$\boxed{١}$ $\frac{\text{عدد}}{\text{عدد}}$ هنا النهاية موجودة (معروفة)

$\boxed{٢}$ $\frac{\text{صفر}}{\text{عدد}} = \text{صفر}$

$\boxed{٣}$ $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ = قيمة غير معروفة

* اذا كان ناتج التعويض $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ نلجأ الى احدى الطرق التالية:

١) التحليل ٢) توحيد المقامات

٣) الضرب في المرافق

مثال١: احسب قيمة ما يلي:

① $$\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نها}} \frac{\text{س}^٢ + \text{٣س} - ٥}{\text{٢س} + ١} = \frac{٢^٢ + ٣(٢) - ٥}{٢\times٢ + ١} = ١$$

② $$\underset{\text{س}\to -٢}{\text{نها}} \frac{٤ + \text{٢س}}{\text{س}^٢ - ١} = \frac{٤ + ٢\times-٢}{(-٢)^٢ - ١} = \frac{\text{صفر}}{٣} = \text{صفر}$$

سؤال١: ما قيمة كل مما يأتي

١) $$\underset{\text{س}\to ١}{\text{نها}} \frac{\text{٣س} - ٤}{\text{س}^٢ + \text{س} - ٣}$$

٢) $$\underset{\text{س}\to ٣}{\text{نها}} \frac{\text{س} - ٣}{\text{٢س}^٢ - \text{س} - ١}$$

٣) $$\underset{\text{س}\to ٥}{\text{نها}} \frac{\sqrt{\text{٢س} - ١} + ٧}{\text{س}^٢ - ٣}$$

٤) $$\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نها}} \frac{(\text{٢س} - ٥)^٢ - ١٦}{\text{٢س} - ٩}$$

مثال١: ما $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نها}} \frac{\text{٣س} - ٦}{\text{س} - ٢}$

الحل: نعوض $\Leftarrow \frac{٣\times٢ - ٦}{٢ - ٢} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

نخرج ٣ عامل مشترك

$$\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نها}} \frac{\text{٣س} - ٦}{\text{س} - ٢} = \underset{\text{س}\to ٢}{\text{نها}} \frac{٣\cancel{(\text{س} - ٢)}}{\cancel{\text{س} - ٢}} = \underset{\text{س}\to ٢}{\text{نها}}\ ٣ = ٣$$

مثال٢: ما $\underset{\text{س}\to ٤}{\text{نها}} \frac{\text{س}^٢ - ١٦}{\text{٢س}^٢ - \text{٨س}}$

الحل: التعويض المباشر يعطي $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

نحلل البسط والمقام

$$\underset{\text{س}\to ٤}{\text{نها}} \frac{\text{س}^٢ - ١٦}{\text{٢س}^٢ - \text{٨س}} = \underset{\text{س}\to ٤}{\text{نها}} \frac{\cancel{(\text{س} - ٤)}(\text{س} + ٤)}{\text{٢س}\cancel{(\text{س} - ٤)}}$$

$$\underset{\text{س}\to ٤}{\text{نها}} \frac{\text{س} + ٤}{\text{٢س}} = \frac{٤ + ٤}{٢\times٤} = \frac{٨}{٨} = ١$$

تذكر: تحليل فرق المربعين هو
$\text{س}^٢ - \text{ص}^٢ = (\text{س} - \text{ص})(\text{س} + \text{ص})$

الوحدة الأولى
النهايات والاتصال

نهاية خارج قسمة اقترانين

(٢)

سؤال٢: جد قيمة ما يأتي

١) $\underset{س \to ١}{\text{نها}} \frac{س^{٤} - ١}{س - ١}$

٢) $\underset{س \to -٣}{\text{نها}} \frac{س^{٢} - ٩}{٣س + ٩}$.

٣) $\underset{س \to ٢}{\text{نها}} \frac{س^{٢} - ٣س + ٢}{س - ٢}$ (وزاري ٢٠٠٣)

٤) $\underset{س \to -١}{\text{نها}} \frac{س^{٣} + ١}{س + ١}$ (وزاري ٢٠٠٢)

٥) $\underset{س \to ١}{\text{نها}} \frac{س - ١}{س^{٢} + ٥س - ٦}$

٦) $\underset{س \to ٤}{\text{نها}} \frac{س^{٢} - ٣س - ٤}{س^{٢} - ١٦}$

٧) $\underset{س \to ٢}{\text{نها}} \frac{س^{٣} - ٨}{س^{٢} - س - ٢}$

٨) $\underset{س \to ٢}{\text{نها}} \frac{س - ٢}{س^{٤} - ١٦}$

*تذكر: تحليل العبارة التكعيبية

$س^{٣} - م^{٣} = (س - م)(س^{٢} + م س + م^{٢})$

$س^{٣} + م^{٣} = (س + م)(س^{٢} - م س + م^{٢})$

٩) $\underset{س \to -٣}{\text{نها}} \frac{س^{٣} + ٢٧}{س + ٣}$

تذكر:
مرافق $\sqrt{س} - \sqrt{ص}$ هو $\sqrt{س} + \sqrt{ص}$
وحاصل ضربهما $س - ص$

مثال: ما $\underset{س \to ٥}{\text{نها}} \frac{\sqrt{س - ١} - ٢}{س - ٥}$

التعويض المباشر يعطي $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ فيجب القيام بعمليات جبرية مناسبة للحصول على العامل (س - ٥) في البسط ومن ثم اختصاره مع (س - ٥) الموجود في المقام وبعد ذلك يمكن حساب النهاية بالتعويض المباشر.

وفي هذا المثال يمكن انطاق البسط بالضرب بالمرافق وهو $\sqrt{س - ١} + ٢$

$$\underset{س \to ٥}{\text{نها}} \frac{\sqrt{س - ١} - ٢}{س - ٥} \times \frac{\sqrt{س - ١} + ٢}{\sqrt{س - ١} + ٢}$$

$$\underset{س \to ٥}{\text{نها}} \frac{س - ٢ - ٤}{(س - ٥)(\sqrt{س - ١} + ٢)} = \underset{س \to ٥}{\text{نها}} \frac{\cancel{س - ٥}}{(\cancel{س - ٥})(\sqrt{س - ١} + ٢)}$$

$$\underset{س \to ٥}{\text{نها}} \frac{١}{\sqrt{س - ١} + ٢} = \frac{١}{\sqrt{٤} + ٢} = \frac{١}{٤}.$$

سؤال٣:

ما قيمة $\underset{س \to ٨}{\text{نها}} \frac{٢س - ١٦}{\sqrt{س + ١} - ٣}$

الوحدة الأولى

النهايات والاتصال

(٣)

نهاية خارج قسمة اقترانين

مثال ١١: ما $\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـا}} \dfrac{\dfrac{١}{س+١} - \dfrac{٢}{س+٣}}{س-١}$

الحل: ناتج التعويض $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ فيجب تبسيط المقدار للحصول على العامل (س−١) في البسط لاختصاره مع (س−١) الموجود في المقام بحيث يمكن حساب نهاية الاقتران الجديد بالتعويض المباشر.

$$\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـا}} \dfrac{\dfrac{١\,(س+٣)}{(س+١)(س+٣)} - \dfrac{٢\,(س+١)}{(س+٣)(س+١)}}{س-١}$$ توحيد المقامات في البسط

$$\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـا}} \dfrac{\dfrac{س+٣-٢(س+١)}{(س+٣)(س+١)}}{س-١}$$

$$\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـا}} \dfrac{س+٣-٢س-٢}{(س+٣)(س+١)} \div (س-١)$$

$$\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـا}} \dfrac{١-س}{(س+٣)(س+١)} \times \dfrac{١}{(س-١)}$$ بتحويل القسمة إلى ضرب

$$\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـا}} \dfrac{-\cancel{(س-١)}}{(س+٣)(س+١)} \times \dfrac{١}{\cancel{س-١}}$$

$$\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـا}} \dfrac{-١}{(س+٣)(س+١)} = \dfrac{-١}{٤ \times ٢} = \dfrac{-١}{٨}.$$

سؤال ٤: جد قيمة النهايات التالية :

① $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\dfrac{٢}{س-٣} + \dfrac{٤}{س+٦}}{س}$

② $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـا}} \dfrac{\dfrac{٣}{س} - \dfrac{٣}{٢}}{س-٢}$ (وزاري ٢٠٠٣)

③ $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\dfrac{١}{س+٢} - \dfrac{١}{٢}}{س}$ (وزاري ١٩٩٨)

④ $\underset{س \leftarrow ٩}{\text{نهـا}} \dfrac{س-٩}{\sqrt{س}-٣}$ (وزاري ٢٠٠٤)

⑤ $\underset{س \leftarrow ٨}{\text{نهـا}} \dfrac{س-٨}{\sqrt{س+١}-٣}$ (وزاري ٢٠٠٨)

⑥ $\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt{٣س+١}-٢}{س-١}$ (وزاري ٢٠٠٥)

سؤال ٥: اذا كانت $\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـا}}\ ق(س) = ٦$ ،

$\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـا}}\ هـ(س) = -٤$ جد

$\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـا}} \left(ق^{٢}(س) - \dfrac{هـ(س)}{٢} - ١١\right)$ (وزاري ١٩٩٧)

سؤال ٦: اذا كان $ق(س) = \begin{cases} س^{٤} + ٥ & ، س < ٣ \\ ٢٠ & ، س = ٣ \\ أس + ٣ & ، س > ٣ \end{cases}$

وكانت $\underset{س \leftarrow ٣}{\text{نهـا}}\ ق(س)$ موجودة جد قيمة أ ؟

حل سؤال ١ :

١) $\underset{س \to -١}{نها} \frac{٣س - ٤}{س^٢ + س - ٣} = \frac{٣ \times -١ - ٤}{(-١)^٢ + ١ - ٣} = \frac{-٧}{-١} = ٧$

٢) $\underset{س \to ٣}{نها} \frac{س - ٣}{٢س^٢ - س - ١} = \frac{٣ - ٣}{٢ \times ٩ - ٣ - ١} = \frac{\text{صفر}}{١٤} = \text{صفر}$

٣) $\underset{س \to ٥}{نها} \frac{\sqrt{٢س - ١} + ٧}{س^٢ - ٣} = \frac{\sqrt{٩} + ٧}{٢٥ - ٣} = \frac{١٠}{٢٢} = \frac{٥}{١١}$

٤) $\underset{س \to ٢}{نها} \frac{(٢س - ٥)^٢ - ١٦}{٢س - ٩} = \frac{(٢ \times ٢ - ٥)^٢ - ١٦}{٢ \times ٢ - ٩}$

$= \frac{١ - ١٦}{٤ - ٩} = \frac{-١٥}{-٥} = ٣$

حل سؤال ٣ :

١) $\underset{س \to ١}{نها} \frac{س^٢ - ١}{س - ١} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ حلل البسط

$\underset{س \to ١}{نها} \frac{(\cancel{س - ١})(س + ١)}{\cancel{س - ١}} = ١ + ١ = ٢$

٢) $\underset{س \to -٣}{نها} \frac{س^٢ - ٩}{٣س + ٩} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

$\underset{س \to -٣}{نها} \frac{(س - ٣)(\cancel{س + ٣})}{٣(\cancel{س + ٣})} = \frac{-٣ - ٣}{٣} = \frac{-٦}{٣} = -٢$

٣) $\underset{س \to ٢}{نها} \frac{س^٢ - ٣س + ٢}{س - ٢} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

$\underset{س \to ٢}{نها} \frac{(\cancel{س - ٢})(س - ١)}{\cancel{س - ٢}} = ٢ - ١ = ١$

٤) $\underset{س \to -١}{نها} \frac{س^٣ + ١}{س + ١} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

$\underset{س \to -١}{نها} \frac{(\cancel{س + ١})(س^٢ - س + ١)}{\cancel{س + ١}} = ١ + ١ + ١ = ٣$

٥) $\underset{س \to ١}{نها} \frac{س - ١}{س^٢ + ٥س - ٦} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

$\underset{س \to ١}{نها} \frac{\cancel{س - ١}}{(\cancel{س - ١})(س + ٦)} = \frac{١}{١ + ٦} = \frac{١}{٧}$

٦) $\underset{س \to ٤}{نها} \frac{س^٢ - ٣س - ٤}{س^٢ - ١٦} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

$\underset{س \to ٤}{نها} \frac{(\cancel{س - ٤})(س + ١)}{(\cancel{س - ٤})(س + ٤)} = \frac{٤ + ١}{٤ + ٤} = \frac{٥}{٨}$

٧) $\underset{س \to ٢}{نها} \frac{س^٣ - ٨}{س^٢ - س - ٢} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

$\underset{س \to ٢}{نها} \frac{(\cancel{س - ٢})(س^٢ + ٢س + ٤)}{(\cancel{س - ٢})(س + ١)} = \frac{٤ + ٤ + ٤}{٢ + ١} = \frac{١٢}{٣} = ٤$

٨) $\underset{س \to ٢}{نها} \frac{س - ٢}{س^٤ - ١٦} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

$\underset{س \to ٢}{نها} \frac{س - ٢}{(س^٢ - ٤)(س^٢ + ٤)} = \underset{س \to ٢}{نها} \frac{\cancel{س - ٢}}{(\cancel{س - ٢})(س + ٢)(س^٢ + ٤)}$

$= \frac{١}{(٢ + ٢)(٤ + ٤)} = \frac{١}{٤ \times ٨} = \frac{١}{٣٢}$

٩) $\underset{س \to -٣}{نها} \frac{س^٣ + ٢٧}{س + ٣} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

$\underset{س \to -٣}{نها} \frac{(\cancel{س + ٣})(س^٢ - ٣س + ٩)}{\cancel{س + ٣}} = ٩ + ٩ + ٩ = ٢٧$

خطوة التعويض ضرورية قبل التحليل

نهاية خارج قسمة الدالتين

حل سؤال ٣ :

$$\text{نهـا}_{س\to ٨} \frac{٢س - ١٦}{\sqrt{س+١} - ٣} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$$

$$\text{نهـا}_{س\to ٨} \frac{٢س - ١٦}{\sqrt{س+١} - ٣} \times \frac{\sqrt{س+١} + ٣}{\sqrt{س+١} + ٣}$$

$$\text{نهـا}_{س\to ٨} \frac{(٢س - ١٦)(\sqrt{س+١} + ٣)}{س + ١ - ٩}$$

$$\text{نهـا}_{س\to ٨} \frac{٢(\cancel{س - ٨})(\sqrt{س+١} + ٣)}{\cancel{س - ٨}} = ٢(\sqrt{٩} + ٣)$$

$$= ٢ \times ٦ = ١٢$$

حل سؤال ٤ :

$$١)\ \text{نهـا}_{س\to ٠} \frac{\frac{٢}{س-٣} + \frac{٤}{س+٦}}{س} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$$

$$\text{نهـا}_{س\to ٠} \frac{٢(س+٦) + ٤(س-٣)}{(س-٣)(س+٦)} \times \frac{١}{س}$$

$$\text{نهـا}_{س\to ٠} \frac{٢س + \cancel{١٢} + ٤س - \cancel{١٢}}{(س-٣)(س+٦)} \times \frac{١}{س}$$

$$\text{نهـا}_{س\to ٠} \frac{٦\cancel{س}}{(س-٣)(س+٦)} \times \frac{١}{\cancel{س}} = \frac{٦}{-٣ \times ٦} = -\frac{١}{٣}$$

$$٢)\ \text{نهـا}_{س\to ٢} \frac{\frac{٣}{س} - \frac{٣}{٢}}{س - ٢} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$$

$$\text{نهـا}_{س\to ٢} \frac{٦ - ٣س}{٢س} \times \frac{١}{س - ٢}$$

$$\text{نهـا}_{س\to ٢} \frac{٣(\overset{-١}{\cancel{٢ - س}})}{٢س} \times \frac{١}{\cancel{س - ٢}} = \frac{-٣}{٢ \times ٢}$$

$$= \frac{-٣}{٤} .$$

$$٣)\ \text{نهـا}_{س\to ٠} \frac{\frac{١}{س+٢} - \frac{١}{٢}}{س} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$$

$$\text{نهـا}_{س\to ٠} \frac{٢ - (س+٢)}{(س+٢) \times ٢} \times \frac{١}{س} = \text{نهـا}_{س\to ٠} \frac{\cancel{٢} - س - \cancel{٢}}{(س+٢) \times ٢} \times \frac{١}{س}$$

$$\text{نهـا}_{س\to ٠} \frac{-\cancel{س}}{٢(س+٢)} \times \frac{١}{\cancel{س}} = \frac{-١}{٢(٠+٢)} = \frac{-١}{٤} ،$$

$$٤)\ \text{نهـا}_{س\to ٩} \frac{س - ٩}{\sqrt{س} - ٣} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$$

$$\text{نهـا}_{س\to ٩} \frac{(\cancel{\sqrt{س} - ٣})(\sqrt{س} + ٣)}{\cancel{\sqrt{س} - ٣}} = ٣ + ٣ = ٦$$

ويمكن حل السؤال باستخدام المرافق

$$٥)\ \text{نهـا}_{س\to ٨} \frac{س - ٨}{\sqrt{س+١} - ٣} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$$

$$\text{نهـا}_{س\to ٨} \frac{س - ٨}{\sqrt{س+١} - ٣} \times \frac{\sqrt{س+١} + ٣}{\sqrt{س+١} + ٣}$$

$$\text{نهـا}_{س\to ٨} \frac{(س - ٨)(\sqrt{س+١} + ٣)}{س + ١ - ٩}$$

$$\text{نهـا}_{س\to ٨} \frac{(\cancel{س - ٨})(\sqrt{س+١} + ٣)}{\cancel{(س - ٨)}} = ٣ + ٣ = ٦ .$$

$$٩)\ \text{نهـا}_{س\to ١} \frac{\sqrt{٣س+١} - ٢}{س - ١} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$$

$$\text{نهـا}_{س\to ١} \frac{\sqrt{٣س+١} - ٢}{س - ١} \times \frac{\sqrt{٣س+١} + ٢}{\sqrt{٣س+١} + ٢}$$

$$\text{نهـا}_{س\to ١} \frac{٣س + ١ - ٤}{(س - ١)(\sqrt{٣س+١} + ٢)} = \text{نهـا}_{س\to ١} \frac{٣س - ٣}{(س - ١)(\sqrt{٣س+١} + ٢)}$$

$$\text{نهـا}_{س\to ١} \frac{٣(\cancel{س - ١})}{(\cancel{س - ١})(\sqrt{٣س+١} + ٢)} = \frac{٣}{٢ + ٢} = \frac{٣}{٤} .$$

حل سؤال ٥ :

$$\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}}\left(\text{ق}^{٢}(\text{س}) - \frac{\text{هـ}(\text{س})}{٢} - ١١\right) =$$

$$= \left(\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}}\ \text{ق}(\text{س})\right)^{٢} - \underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{هـ}(\text{س})}{٢} - ١١ =$$

$$= ٦^{٢} - \frac{-٤}{٢} - ١١ =$$

$$٣٦ + ٢ - ١١ = ٢٧ .$$

حل سؤال ٦ :

$$\underset{\text{س}\to ٣}{\text{نهـا}}\ \text{ق}(\text{س})\ \text{موجودة} \Longleftarrow$$

$$\underset{\text{س}\to ٣^{+}}{\text{نهـا}}\ \text{ق}(\text{س}) = \underset{\text{س}\to ٣^{-}}{\text{نهـا}}\ \text{ق}(\text{س})$$

$$\underset{\text{س}\to ٣^{+}}{\text{نهـا}}(\text{أ}\text{س} + ٢) = \underset{\text{س}\to ٣^{-}}{\text{نهـا}}(\text{س}^{٢} + ٥)$$

$$٣\text{أ} + ٢ = ٩ + ٥$$

$$٣\text{أ} + ٢ = ١٤$$

$$-٢ \qquad -٢$$

$$\frac{٣\text{أ}}{٣} = \frac{١٢}{٣}$$

$$\text{أ} = ٤ .$$

تدريب (١): جد قيمة النهاية لكل مما يأتي (إن وجدت)

١) $\underset{س \to ١}{\text{نها}} \frac{س^{٢} - ٢٥}{س + ٥}$

٢) $\underset{س \to ٢}{\text{نها}} \frac{٢س - ٤}{س + ٣}$

٣) $\underset{س \to ٢}{\text{نها}} \frac{س + ٣}{س^{٢} - ٤}$

٤) $\underset{س \to ٣}{\text{نها}} \frac{س^{٤} - ١}{س + ٣}$

تدريب ٢: جد قيمة كل مما يأتي (إن وجدت)

١) $\underset{س \to -٣}{\text{نها}} \frac{س^{٢} + ٣س}{س + ٣}$

٢) $\underset{س \to ٢}{\text{نها}} \frac{س^{٢} - ٢س}{٥س - ١٠}$

٣) $\underset{س \to -٣}{\text{نها}} \frac{س^{٤} + ٢٧س}{س + ٣}$

٤) $\underset{س \to ٣}{\text{نها}} \frac{س^{٢} - ٦س + ٩}{س^{٢} - ٩}$

تدريب ٣:

جد قيمة كل مما يأتي (إن وجدت)

١) $\text{نها} \frac{٣س - ١٥}{\sqrt{س + ٢٠} - ٥}$

٢) $\underset{س \to ٢}{\text{نها}} \frac{\sqrt{س + ٢} - ٢}{س - ٢}$

تدريب ٤:

جد

$$\underset{س \to ٢}{\text{نها}} \frac{\frac{١}{س + ١} - \frac{١}{٣}}{س - ٢} .$$

تدريب ١ :

١) $\lim_{س \to ١} \frac{س^٢ - ٢٥}{س + ٥} = \frac{١ - ٢٥}{١ + ٥} = \frac{-٢٤}{٦} = -٤$

٢) $\lim_{س \to ٢} \frac{٢س - ٤}{س + ٣} = \frac{٢ \times ٢ - ٤}{٢ + ٣} = \frac{\text{صفر}}{٥} = \text{صفر}$

٣) $\lim_{س \to ٢} \frac{س + ٣}{س^٢ - ٤} = \frac{٢ + ٣}{٤ - ٤} = \frac{٥}{٠} = \text{غير موجودة}$

٤) $\lim_{س \to ٣} \frac{س^٢ - ١}{س + ٣} = \frac{٩ - ١}{٣ + ٣} = \frac{٨}{٦} = \frac{٤}{٣}$

تدريب ٢ :

١) $\lim_{س \to -٣} \frac{س^٢ + ٣س}{س + ٣} = \frac{٩ + -٩}{-٣ + ٣} = \frac{٠}{٠}$

$\lim_{س \to -٣} \frac{س^٢ + ٣س}{س + ٣} = \lim_{س \to -٣} \frac{س\cancel{(س + ٣)}}{\cancel{س + ٣}}$

$= \lim_{س \to -٣} س = -٣$

٢) $\lim_{س \to ٢} \frac{س^٢ - ٢س}{٥س - ١٠} = \frac{٢^٢ - ٢ \times ٢}{٥ \times ٢ - ١٠} = \frac{٠}{٠}$

$\lim_{س \to ٢} \frac{س^٢ - ٢س}{٥س - ١٠} = \lim_{س \to ٢} \frac{س\cancel{(س - ٢)}}{٥\cancel{(س - ٢)}}$

$\lim_{س \to ٢} \frac{س}{٥} = \frac{٢}{٥}.$

٣) $\lim_{س \to -٣} \frac{س^٤ + ٢٧س}{س + ٣} = \frac{(-٣)^٤ + ٢٧ \times -٣}{-٣ + ٣} = \frac{٠}{٠}$

$\lim_{س \to -٣} \frac{س^٤ + ٢٧س}{س + ٣} = \lim_{س \to -٣} \frac{س(س^٣ + ٢٧)}{س + ٣}$

$= \lim_{س \to -٣} \frac{س\cancel{(س + ٣)}(س^٢ - ٣س + ٩)}{\cancel{س + ٣}}$

$= -٣ \left((-٣)^٢ - ٣ \times -٣ + ٩\right)$

$= -٣ (٩ + ٩ + ٩) = -٣ \times ٢٧ = -٨١ .$

٤) $\lim_{س \to ٣} \frac{س^٢ - ٦س + ٩}{س^٢ - ٩} = \frac{٩ - ١٨ + ٩}{٩ - ٩} = \frac{٠}{٠}$

$\lim_{س \to ٣} \frac{س^٢ - ٦س + ٩}{س^٢ - ٩}$

$\lim_{س \to ٣} \frac{\cancel{(س - ٣)}(س - ٣)}{(س + ٣)\cancel{(س - ٣)}}$

$\lim_{س \to ٣} \frac{س - ٣}{س + ٣}$

$\frac{٣ - ٣}{٣ + ٣} = \frac{\text{صفر}}{٦} = \text{صفر} .$

تدريب ٣ :

١) $\text{نها}_{س \to ٥} \frac{٣س - ١٥}{\sqrt{س+٢٠} - ٥} = \frac{٣\times٥ - ١٥}{\sqrt{٢٥} - ٥} = \frac{٠}{٠}$

نضرب بالمرافق

$$\text{نها}_{س \to ٥} \frac{٣س - ١٥}{\sqrt{س+٢٠} - ٥} \times \frac{\sqrt{س+٢٠} + ٥}{\sqrt{س+٢٠} + ٥}$$

$$\text{نها}_{س \to ٥} \frac{(٣س - ١٥)(\sqrt{س+٢٠} + ٥)}{س + ٢٠ - ٢٥}$$

$$\text{نها}_{س \to ٥} \frac{٣\cancel{(س - ٥)}(\sqrt{س+٢٠} + ٥)}{\cancel{س - ٥}}$$

$$\text{نها}_{س \to ٥} ٣(\sqrt{س+٢٠} + ٥)$$

$$٣(\sqrt{٢٥} + ٥) = ٣ \times ١٠ = ٣٠ \ .$$

٢) $\text{نها}_{س \to ٢} \frac{\sqrt{س+٢} - ٢}{س - ٢} = \frac{\sqrt{٤} - ٢}{٢ - ٢} = \frac{٠}{٠}$

$$\text{نها}_{س \to ٢} \frac{\sqrt{س+٢} - ٢}{س - ٢} \times \frac{\sqrt{س+٢} + ٢}{\sqrt{س+٢} + ٢}$$

$$\text{نها}_{س \to ٢} \frac{س + ٢ - ٤}{(س - ٢)(\sqrt{س+٢} + ٢)}$$

$$\text{نها}_{س \to ٢} \frac{\overset{١}{\cancel{س - ٢}}}{(س - ٢)(\sqrt{س+٢} + ٢)}$$

$$\text{نها}_{س \to ٢} \frac{١}{\sqrt{س+٢} + ٢} = \frac{١}{٢ + ٢} = \frac{١}{٤} \ .$$

تدريب ٤ :

$$\text{نها}_{س \to ٢} \frac{\frac{١}{س+١} - \frac{١}{٣}}{س - ٢} = \frac{\frac{١}{٣} - \frac{١}{٣}}{٢ - ٢} = \frac{٠}{٠}$$

$$\text{نها}_{س \to ٢} \frac{\frac{١\times٣}{(س+١)\times٣} - \frac{(س+١)}{(س+١)}\frac{١}{٣}}{س - ٢}$$

$$\text{نها}_{س \to ٢} \frac{\frac{٣}{٣(س+١)} - \frac{(س+١)}{٣(س+١)}}{س - ٢}$$

$$\text{نها}_{س \to ٢} \frac{\frac{٣ - (س+١)}{٣(س+١)}}{س - ٢}$$

$$\text{نها}_{س \to ٢} \frac{٣ - س - ١}{٣(س+١)(س - ٢)}$$

$$\text{نها}_{س \to ٢} \frac{\overset{-١}{\cancel{٢ - س}}}{٣(س+١)\cancel{(س - ٢)}}$$

$$\text{نها}_{س \to ٢} \frac{-١}{٣(س+١)}$$

$$\frac{-١}{٣(٢+١)}$$

$$\frac{-١}{٣\times٣} = \frac{-١}{٩} \ .$$

الأسئلة

١) إذا كانت $\underset{٢\leftarrow\text{س}}{\text{نهـــا}}\ \text{ق}(\text{س}) = ٣$، $\underset{٢\leftarrow\text{س}}{\text{نهـــا}}\ \text{هـ}(\text{س}) = ٩$، فجد قيمة كل مما يأتي (إن وجدت):

أ) $\underset{٢\leftarrow\text{س}}{\text{نهـــا}}\ \frac{\text{ق}(\text{س})}{\text{هـ}(\text{س})}$

ب) $\underset{٢\leftarrow\text{س}}{\text{نهـــا}}\ \frac{\text{هـ}(\text{س}) + ١}{\text{ق}(\text{س}) + \text{س} - ٥}$

٢) جد قيمة النهاية في كل مما يأتي عند النقطة المبينة إزاء كل منها (إن وجدت):

أ) $\text{ق}(\text{س}) = \frac{\text{س}^{٢} + ١}{\text{س} + ٨}$ ، $\text{صفر}\leftarrow\text{س}$

ب) $\text{هـ}(\text{س}) = \frac{\text{س}^{٢} + ٥\text{س}}{\text{س} - ١}$ ، $١\leftarrow\text{س}$

جـ) $\text{ل}(\text{س}) = \frac{\text{س}^{٢} - ٣\text{س} - ٤}{١٢ - ٣\text{س}}$ ، $٤\leftarrow\text{س}$

د) $\text{م}(\text{س}) = \frac{\text{س}^{٣} - ٢٧}{٣\text{س}^{٢} - ٩\text{س}}$ ، $٣\leftarrow\text{س}$

هـ) $\text{ك}(\text{س}) = \frac{\frac{١}{\text{س} - ٢} - \frac{١}{٥}}{٢\text{س} - ١٤}$ ، $٧\leftarrow\text{س}$

و) $\text{د}(\text{س}) = \frac{\sqrt{\text{س} + ١} - ٣}{\text{س} - ٨}$ ، $٨\leftarrow\text{س}$

ز) $\text{و}(\text{س}) = \frac{\text{س} - ٧}{٣ - \sqrt{\text{س} + ٢}}$ ، $٧\leftarrow\text{س}$

٣) إذا كان ق(س) = س، فجد $\underset{س \to -٣}{\text{نهــا}} \dfrac{ق^{٢}(س) - ق(٩)}{س + ٣}$

٤) إذا علمت أن $\underset{س \to ٥}{\text{نهــا}}$ ق(س) = −٧، $\underset{س \to ٥}{\text{نهــا}}$ هـ (س) = ٢، فبيِّن أن:

$$\underset{س \to ٥}{\text{نهــا}} \frac{٢ق(س) - ٣هـ(س)}{ق(س) + س + ٧} = -٤$$

٥) إذا كان ق(س) = $\dfrac{١}{س - ٢}$، فجد $\underset{هـ \to ٠}{\text{نهــا}} \dfrac{ق(س + هـ) - ق(س)}{هـ}$

٦) جد $\underset{س \to ١}{\text{نهــا}} \dfrac{س^{٢} + س - ٢}{س^{٢} - ١}$

(*) السؤال من أسئلة الاختبارات الدولية.

نهاية خارج قسمة اقترانين

س١) أ) $\dfrac{\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نها}}\ \text{ق(س)}}{\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نها}}\ \text{هـ(س)}} = \dfrac{٣}{٩} = \dfrac{١}{٣}$

ب) $\dfrac{\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نها}}\ \text{هـ(س)} + ١}{\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نها}}\ \text{ق(س)} + ٢ - ٥} = \dfrac{٩ + ١}{٣ - ٣}$

$\dfrac{١٠}{٠}$ = غير موجودة .

س٢) أ) $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}}\ \dfrac{\text{س}^٤ + ١}{\text{س} + ٨}$

$\dfrac{٠ + ١}{٠ + ٨} = \dfrac{١}{٨}$.

ب) $\underset{\text{س}\to ١}{\text{نها}}\ \dfrac{\text{س}^٤ + ٥\text{س}}{\text{س} - ١} = \dfrac{١ + ٥}{١ - ١}$

$= \dfrac{٦}{٠}$ = غير موجودة .

جـ) $\underset{\text{س}\to ٤}{\text{نها}}\ \dfrac{\text{س}^٢ - ٣\text{س} - ٤}{١٢ - ٣\text{س}} = \dfrac{١٦ - ١٢ - ٤}{١٢ - ١٢} = \dfrac{٠}{٠}$

$\underset{\text{س}\to ٤}{\text{نها}}\ \dfrac{\overset{-١}{\cancel{(\text{س} - ٤)}}(\text{س} + ١)}{٣\cancel{(٤ - \text{س})}} = \dfrac{-١(٤ + ١)}{٣}$

$= \dfrac{-٥}{٣}$.

د) $\underset{\text{س}\to ٣}{\text{نها}}\ \dfrac{\text{س}^٣ - ٢٧}{٣\text{س}^٢ - ٩\text{س}} = \dfrac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

$\underset{\text{س}\to ٣}{\text{نها}}\ \dfrac{\cancel{(\text{س} - ٣)}(\text{س}^٢ + ٣\text{س} + ٩)}{٣\text{س}\cancel{(\text{س} - ٣)}}$

$\dfrac{٢^٢ + ٢ \times ٢ + ٩}{٣ \times ٣} = \dfrac{٢٧}{٩} = ٣$

هـ) $\underset{\text{س}\to ٧}{\text{نها}}\ \dfrac{\dfrac{١}{\text{س} - ٢} - \dfrac{١}{٥}}{٢\text{س} - ١٤} = \dfrac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ ،

$\underset{\text{س}\to ٧}{\text{نها}}\ \dfrac{\dfrac{٥ - (\text{س} - ٢)}{٥(\text{س} - ٢)}}{٢\text{س} - ١٤} = \underset{\text{س}\to ٧}{\text{نها}}\ \dfrac{٥ - \text{س} + ٢}{٥(\text{س} - ٢) \times ٢(\text{س} - ٧)}$

$\underset{\text{س}\to ٧}{\text{نها}}\ \dfrac{\overset{-١}{\cancel{٧ - \text{س}}}}{١٠(\text{س} - ٢)\cancel{(\text{س} - ٧)}} = \dfrac{-١}{١٠(٧ - ٢)} = \dfrac{-١}{٥٠}$

و) $\underset{\text{س}\to ٨}{\text{نها}}\ \dfrac{\sqrt{\text{س} + ١} - ٣}{\text{س} - ٨} = \dfrac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

$\underset{\text{س}\to ٨}{\text{نها}}\ \dfrac{\sqrt{\text{س} + ١} - ٣}{\text{س} - ٨} \times \dfrac{\sqrt{\text{س} + ١} + ٣}{\sqrt{\text{س} + ١} + ٣}$

$\underset{\text{س}\to ٨}{\text{نها}}\ \dfrac{\text{س} + ١ - ٩}{(\text{س} - ٨)(\sqrt{\text{س} + ١} + ٣)} = \underset{\text{س}\to ٨}{\text{نها}}\ \dfrac{\cancel{\text{س} - ٨}}{\cancel{(\text{س} - ٨)}(\sqrt{\text{س} + ١} + ٢)}$

$\dfrac{١}{\sqrt{٩} + ٣} = \dfrac{١}{٢ + ٢} = \dfrac{١}{٦}$.

ز) $\underset{\text{س}\to ٧}{\text{نها}}\ \dfrac{\text{س} - ٧}{٣ - \sqrt{\text{س} + ٢}} = \dfrac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$.

$\underset{\text{س}\to ٧}{\text{نها}}\ \dfrac{\text{س} - ٧}{٣ - \sqrt{\text{س} + ٢}} \times \dfrac{٣ + \sqrt{\text{س} + ٢}}{٣ + \sqrt{\text{س} + ٢}}$

$\underset{\text{س}\to ٧}{\text{نها}}\ \dfrac{(\text{س} - ٧)(٣ + \sqrt{\text{س} + ٢})}{٩ - \text{س} - ٢} = \underset{\text{س}\to ٧}{\text{نها}}\ \dfrac{\overset{-١}{\cancel{(\text{س} - ٧)}}(٣ + \sqrt{\text{س} + ٢})}{\cancel{٧ - \text{س}}}$

$-١(٣ + \sqrt{٩}) = -١(٣ + ٣)$
$= -٦$

س٣ د(س) = س

$$\text{نهـا}_{\text{س}\to -٣} \frac{\text{د}^{٢}(\text{س}) - \text{د}(٩)}{\text{س}+٣} =$$

$$\text{نهـا}_{\text{س}\to -٣} \frac{\text{س}^{٢} - ٩}{\text{س}+٣} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}} \quad \text{نحلل البسط}$$

$$\text{نهـا}_{\text{س}\to -٣} \frac{(\text{س}-٣)\cancel{(\text{س}+٣)}}{\cancel{\text{س}+٣}} = -٣-٣ = -٦$$

س٤ $\text{نهـا}_{\text{س}\to ٥} \text{د}(\text{س}) = -٧$ ، $\text{نهـا}_{\text{س}\to ٥} \text{هـ}(\text{س}) = ٢$

بين أن

$$\text{نهـا}_{\text{س}\to ٥} \frac{٢\text{د}(\text{س}) - ٣\text{هـ}(\text{س})}{\text{د}(\text{س}) + \text{س} + ٧} = -٤$$

$$= \frac{٢\,\text{نهـا}_{\text{س}\to ٥}\text{د}(\text{س}) - ٣\,\text{نهـا}_{\text{س}\to ٥}\text{هـ}(\text{س})}{\text{نهـا}_{\text{س}\to ٥}\text{د}(\text{س}) + ٥ + ٧}$$

$$\frac{٢\times -٧ - ٣\times ٢}{-٧ + ٥ + ٧} = \frac{-١٤-٦}{٥}$$

$$= \frac{-٢٠}{٥} = -٤$$

س٥ $$\text{نهـا}_{\text{هـ}\to ٠} \frac{\text{د}(\text{س}+\text{هـ}) - \text{د}(\text{س})}{\text{هـ}}$$

$$\text{نهـا}_{\text{هـ}\to ٠} \frac{\frac{١}{\text{س}+\text{هـ}-٢} - \frac{١}{\text{س}-٢}}{\text{هـ}}$$

$$\text{نهـا}_{\text{هـ}\to ٠} \frac{\frac{\text{س}-٢}{(\text{س}-٢)(\text{س}+\text{هـ}-٢)} - \frac{(\text{س}+\text{هـ}-٢)}{(\text{س}+\text{هـ}-٢)(\text{س}-٢)}}{\text{هـ}}$$

$$\text{نهـا}_{\text{هـ}\to ٠} \frac{\cancel{\text{س}} \cancel{-٢} \cancel{-\text{س}} - \text{هـ} \cancel{+٢}}{(\text{س}+\text{هـ}-٢)(\text{س}-٢)\times \text{هـ}}$$

$$\text{نهـا}_{\text{هـ}\to ٠} \frac{-\cancel{\text{هـ}}\;\;-١}{(\text{س}+\text{هـ}-٢)(\text{س}-٢)\times \cancel{\text{هـ}}} = \text{نهـا}_{\text{هـ}\to ٠} \frac{-١}{(\text{س}+\text{هـ}-٢)(\text{س}-٢)}$$

$$= \frac{-١}{(\text{س}-٢)(\text{س}-٢)} = \frac{-١}{(\text{س}-٢)^{٢}}$$

س٦ $$\text{نهـا}_{\text{س}\to ١} \frac{\text{س}^{٢}+\text{س}-٢}{\text{س}^{٢}-١} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}} \quad \text{نحلل}$$

$$\text{نهـا}_{\text{س}\to ١} \frac{\cancel{(\text{س}-١)}(\text{س}+٢)}{\cancel{(\text{س}-١)}(\text{س}+١)}$$

$$\text{نهـا}_{\text{س}\to ١} \frac{\text{س}+٢}{\text{س}+١} =$$

$$\frac{١+٢}{١+١} = \frac{٣}{٢}.$$

الوحدة الاولى
النهايات والاتصال

نهاية اقتران الجذر النوني

(ملغى)

(١)

* اذا كانت $\lim_{س \to م} ق(س) = صفر$ وكان ن عدداً زوجياً فإن

$\lim_{س \to م} \sqrt[ن]{ق(س)} = صفر$ اذا كان ق(س) > صفر على يمين س = م وعلى يسارها وتكون غير موجوده اذا كان ق(س) < صفر على أحد جانبي (س = م) أو كليهما .

مثال ١: جد قيمة النهايات الآتية اذا كانت موجوده

١) $\lim_{س \to ٤^+} \sqrt{س - ٤}$ ٢) $\lim_{س \to ٤^-} \sqrt{س - ٤}$

٣) $\lim_{س \to ٤} \sqrt{س - ٤}$ ٤) $\lim_{س \to ٢} \sqrt[٤]{(س - ٢)^٢}$

الحل: ١) $\lim_{س \to ٤^+} \sqrt{س - ٤} = صفر$ لأن $\lim_{س \to ٤} (س - ٤) = صفر$

س − ٤ > صفر عندما س > ٤ .

٢) $\lim_{س \to ٤^-} \sqrt{س - ٤}$ غير موجوده لأن س − ٤ < صفر عندما س < ٤ والجذر التربيعي غير معرف للاعداد السالبه .

٣) $\lim_{س \to ٤} \sqrt{س - ٤}$ غير موجوده لان $\lim_{س \to ٤^-} \sqrt{س - ٤}$ غير موجوده

٤) $\lim_{س \to ٢} \sqrt[٤]{(س - ٢)^٢} = صفر$ لأن $\lim_{س \to ٢} (س - ٢)^٢ = صفر$

لأن $(س - ٢)^٢$ > صفر عندما تكون س > ٢ وعندما تكون س < ٢ على حد سواء .

* الجذور الزوجية غير معرفه اذا كان ناتج ما داخل الجذر سالب

** خطوات حساب نهاية الجذور التربيعيه :

① اذا كان ناتج ما داخل الجذر موجب فان النهايه موجوده

② اذا كان ناتج ما داخل الجذر سالب فان النهايه غير موجوده .

٣) اذا كان ناتج ما داخل الجذر صفر ندرس اشاره ما داخل الجذر بحيث

أ- اذا كان الناتج من اليمين واليسار موجب فان النهايه موجوده .

ب- اذا كان الناتج من اليمين واليسار مختلفين في الاشاره فان النهايه غير موجوده .

سؤال ١: اذا كان $ق(س) = \sqrt{٨ - س}$ احسب

أ) $\lim_{س \to ٤} ق(س)$ ب) $\lim_{س \to -١} ق(س)$

جـ) $\lim_{س \to ٩} ق(س)$ د) $\lim_{س \to ٨} ق(س)$

سؤال ٢ اذا كان $ق(س) = \sqrt{س - ٣}$ احسب

أ) $\lim_{س \to ٣^+} ق(س)$ ب) $\lim_{س \to ٣^-} ق(س)$

جـ) $\lim_{س \to ٣} ق(س)$

سؤال ٣ : احسب $\lim_{س \to ٠} \sqrt{س^٤ + ٤}$

تدريب ١ :

اذا كانت $\underset{س \leftarrow ٣}{\text{نها}}$ ق(س) = ٢٤ ،

$\underset{س \leftarrow ٣}{\text{نها}}$ هـ(س) = ٨ فجد ما يأتي

(ان وجدت) :

$\underset{س \leftarrow ٣}{\text{نها}} \sqrt{ق(س) - هـ(س)} + س\, هـ(س)$.

تدريب ٢ :

جد نهاية كل اقتران من الاقترانات الآتية (ان وجدت) :

١) $\underset{س \leftarrow ٤}{\text{نها}} \sqrt{س + ١}$

٢) $\underset{س \leftarrow -١}{\text{نها}} \sqrt{س^{٢}}$

٣) $\underset{س \leftarrow ١^{-}}{\text{نها}} \sqrt[٤]{س - ١}$

٤) $\underset{س \leftarrow ١^{+}}{\text{نها}} \sqrt[٤]{س - ١}$

٥) $\underset{س \leftarrow ١}{\text{نها}} \sqrt[٢]{س - ١}$

٦) $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نها}} \sqrt{س}$

تدريب ١ :

$\underset{س \leftarrow ٣}{\text{نها}} \sqrt{ق(س) - هـ(س)} + س\,هـ(س)$

$\sqrt{\underset{س \leftarrow ٣}{\text{نها}}\, ق(س) - \underset{س \leftarrow ٣}{\text{نها}}\, هـ(س)} + \underset{س \leftarrow ٣}{\text{نها}}\, س\,هـ(س)$

$= \sqrt{٢٤ - ٨} + ٣ \times ٨$

$= \sqrt{١٦} + ٢٤$

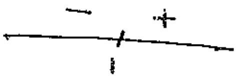
$= ٤ + ٢٤ = ٢٨$

تدريب ٢ :

١) $\underset{س \leftarrow ٤}{\text{نها}} \sqrt{٢س + ١} = \sqrt{٩} = ٣$

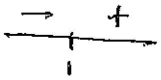
٢) $\underset{س \leftarrow -١}{\text{نها}} \sqrt{س^{٢}} = \sqrt{١} = ١$

٣) $\underset{س \leftarrow ١^{-}}{\text{نها}} \sqrt[٤]{س - ١}$ $\qquad$ $س - ١ = ٠$ ، $س = ١$



$\underset{س \leftarrow ١^{-}}{\text{نها}} \sqrt[٤]{س - ١} = \text{غير موجودة}$

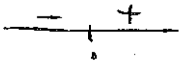
٤) $\underset{س \leftarrow ١^{+}}{\text{نها}} \sqrt[٤]{س - ١}$



$\underset{س \leftarrow ١^{+}}{\text{نها}} \sqrt[٤]{س - ١} = \text{صفر}$

٥) $\underset{س \leftarrow ١}{\text{نها}} \sqrt[٤]{س - ١} = \text{غير موجودة}$

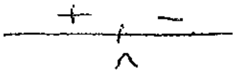
٦) $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نها}} \sqrt{٢س}$



$\left\{ \begin{array}{l} \underset{س \leftarrow ٠^{+}}{\text{نها}} \sqrt{٢س} = \text{صفر} \\ \text{نها} \sqrt{٢س} = \text{غير موجودة} \end{array} \right. \Leftarrow \underset{س \leftarrow ٠}{\text{نها}} \sqrt{٢س} = \text{غير موجودة}$

حل سؤال ١ صفحة ١

$م(س) = \sqrt{٨ - س}$ $\qquad$ $٨ - س = ٠ \leftarrow س = ٨$



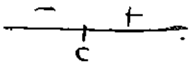
أ) $\underset{س \leftarrow ٤}{\text{نها}}\, م(س) = \sqrt{٨ - ٤} = \sqrt{٤} = ٢$

ب) $\underset{س \leftarrow -١}{\text{نها}}\, م(س) = \sqrt{٨ + ١} = \sqrt{٩} = ٣$

جـ) $\underset{س \leftarrow ٩}{\text{نها}}\, م(س) = \sqrt{٨ - ٩} = \sqrt{-١} = \text{غير موجودة}$

د) $\left. \begin{array}{l} \underset{س \leftarrow ٨^{+}}{\text{نها}}\, م(س) = \text{غير موجودة} \\ \underset{س \leftarrow ٨^{-}}{\text{نها}}\, م(س) = \text{صفر} \end{array} \right\} \Rightarrow \underset{س \leftarrow ٨}{\text{نها}}\, م(س)\ \text{غير موجودة}$

سؤال ٢ : $م(س) = \sqrt{س - ٢}$ $\qquad$ $س - ٢ = ٠$ ، $س = ٢$



أ) $\underset{س \leftarrow ٢^{+}}{\text{نها}}\, م(س) = \text{صفر}$

ب) $\underset{س \leftarrow ٢^{-}}{\text{نها}}\, م(س) = \text{غير موجودة}$

جـ) $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نها}}\, م(س) = \text{غير موجودة}$

سؤال ٣ : $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نها}} \sqrt{س^{٢} + ٤} =$

$\sqrt{٠^{٢} + ٤} = \sqrt{٤} = ٢ .$

الأسئلة

١) إذا علمت أن $\underset{\text{س}\leftarrow ٣}{\text{نهــا}}\ \text{ق(س)} = -٦٤$، فجد قيمة كل مما يأتي (إن وجدت):

أ) $\underset{\text{س}\leftarrow ٣}{\text{نهــا}}\ \sqrt[٣]{\text{ق(س)}}$

ب) $\underset{\text{س}\leftarrow ٣}{\text{نهــا}}\ \sqrt{\text{ق(س)}}$

جـ) $\underset{\text{س}\leftarrow ٣}{\text{نهــا}}\ \left(\sqrt[٣]{\text{ق(س)}} + \text{س}^{٢} + ٥\text{س} - ٣\right)$

د) $\underset{\text{س}\leftarrow ٣}{\text{نهــا}}\ \left(\sqrt[٥]{\frac{\text{ق(س)}}{٢}} + \text{س} - ٥\right)$

٢) جد قيمة كل مما يأتي (إن وجدت):

أ) $\underset{\text{س}\leftarrow ٣^{+}}{\text{نهــا}}\ \sqrt{\text{س} - ٣}$

ب) $\underset{\text{س}\leftarrow -٥}{\text{نهــا}}\ \left(\sqrt[٣]{٣ - \text{س}} + \text{س}^{٢} - ٤\right)$

جـ) $\underset{\text{س}\leftarrow -٢}{\text{نهــا}}\ \sqrt[٣]{٤ - \text{س}^{٢}}$

د) $\underset{\text{س}\leftarrow ٢}{\text{نهــا}}\ \sqrt[٤]{٤ - \text{س}^{٢}}$

س١ $\underset{س \to ٣}{\text{نها}}\ ق(س) = -٦٤$

أ) $\underset{س \to ٣}{\text{نها}}\ \sqrt[٣]{ق(س)} = \sqrt[٣]{\underset{س \to ٣}{\text{نها}}\ ق(س)}$

$= \sqrt[٣]{-٦٤} = -٤$

ب) $\underset{س \to ٣}{\text{نها}}\ \sqrt{ق(س)} = \sqrt{-٦٤} =$ غير موجودة

جـ) $\underset{س \to ٣}{\text{نها}} \left(\sqrt[٣]{ق(س)} + س^٢ + ٥س - ٣ \right) =$

$\sqrt[٣]{\underset{س \to ٣}{\text{نها}}\ ق(س)} + ٣^٢ + ٥ \times ٣ - ٣$

$\sqrt[٣]{-٦٤} + ٩ + ١٥ - ٣ =$

$-٤ + ٢١ = ١٧ .$

د) $\underset{س \to ٣}{\text{نها}} \left(\sqrt[٥]{\frac{ق(س)}{٢}} + س - ٥ \right)$

$\sqrt[٥]{\frac{\underset{س \to ٣}{\text{نها}}\ ق(س)}{٢}} + ٣ - ٥ =$

$= \sqrt[٥]{\frac{-٦٤}{٢}} - ٢$

$= \sqrt[٥]{-٣٢} - ٢$

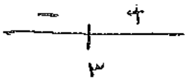
$-٢ - ٢ = -٤$

س٢ $\underset{س \to ٣^+}{\text{نها}}\ \sqrt{س - ٣}$

أ)

نبحث في اشارة الاقتران س - ٣

$س - ٣ =$ صفر $\Leftarrow س = ٣$



$\underset{س \to ٣^+}{\text{نها}}\ \sqrt{س - ٣} =$ صفر .

ب) $\underset{س \to -٥}{\text{نها}} \left(\sqrt[٣]{٣ - س} + س^٢ - ٤ \right) =$

$\sqrt[٣]{٣ - -٥} + (-٥)^٢ - ٤ = \sqrt[٣]{٨} + ٢٥ - ٤$

$٢ + ٢١ = ٢٣$

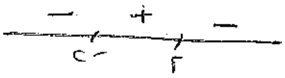
جـ) $\underset{س \to -٢}{\text{نها}}\ \sqrt[٣]{٤ - س^٢} = \sqrt[٣]{٤ - ٤} = \sqrt[٣]{\text{صفر}}$

= صفر .

د) $\underset{س \to ٢}{\text{نها}}\ \sqrt[٤]{٤ - س^٢}$ نبحث اشارة $٤ - س^٢$

$٤ - س^٢ = ٠ \Leftarrow س^٢ = ٤$

$\Leftarrow س = \mp ٢$



نجد النهاية من اليمين واليسار حول س = ٢

$\underset{س \to ٢^+}{\text{نها}}\ \sqrt[٤]{٤ - س^٢} =$ غير موجودة .

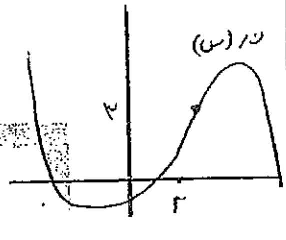
$\underset{س \to ٢^-}{\text{نها}}\ \sqrt[٤]{٤ - س^٢} =$ صفر .

$\underset{س \to ٢}{\text{نها}}\ \sqrt[٤]{٤ - س^٢} =$ غير موجودة .

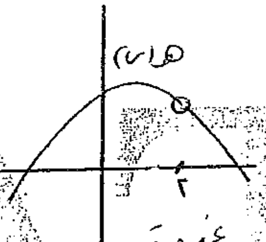
الاتصال عند نقطة

الاتصال :

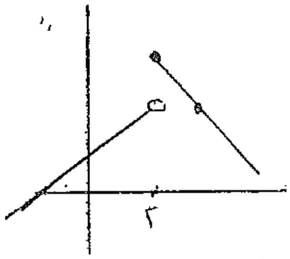
* يقال ان الاقتران ق متصل اذا امكن رسم منحنى ق على اي فترة في مجاله دون رفع القلم عن الورقة بحيث لا يوجد في منحناه ثقوب او قفزات .



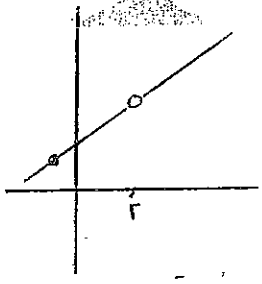
متصل عند س = ٢



غير متصل عند س = ٢
(يوجد ثقب)



غير متصل عند س = ٢
(يوجد قفزة) .



غير متصل عند س = ٢
(يوجد ثقب)

يقسم الاتصال الى نوعين :

أ) اتصال عند نقطة

ب) اتصال على فترة .

تعريف :

يكون الاقتران ق متصلاً عند النقطة س = أ اذا تحققت الشروط التالية

(١) ق معرف عند أ اي ان ق(أ) عدد حقيقي

(٢) $\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهـا}}$ ق(س) موجودة .

(٣) $\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهـا}}$ ق(س) = ق(أ) .

* واذا لم يتحقق شرط او اكثر من هذه الشروط فان ق غير متصل عند أ وتسمى أ عندئذٍ نقطة عدم اتصال (نقطة انفصال)

مثال: اذا كان ق(س) = ٣س^٢ + ٢س - ١ فهل ق متصل عند س = ٢ ؟

الحل: (١) ق معرف عند س = ٣ حيث

ق(٢) = ٣(٢)^٢ + ٢(٢) - ١ = ١٥

(٢) $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـا}}$ ق(س) = $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـا}}$(٣س^٢ + ٢س - ١) = ٣(٢)^٢ + ٢(٢) - ١
= ١٥ .

(٣) $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـا}}$ ق(س) = ق(٢) .

∴ ق(س) متصل عند س = ٢ .

نتيجة : اذا كان ق(س) كثير حدود فانه يكون متصلاً لجميع الاعداد الحقيقية

الاتصال عند نقطة

مثال ١: اذا كان

$$ل(س) = \begin{cases} س + ٥ & ، \quad س < -١ \\ ٩ - ٢س & ، \quad -١ \le س \le ٣ \\ س^{٢} - ٦ & ، \quad س > ٣ \end{cases}$$

ابحث في اتصال ل عند س = -١

الحل: (١) $ل(-١) = ٩ - ٢(-١) = ١١$

(٢) لايجاد النهاية يجب حساب النهاية من اليمين ومن اليسار .

$$\underset{س \to -١^{+}}{\text{نها}} ل(س) = \underset{س \to -١^{+}}{\text{نها}} (٩ - ٢س) = ١١$$

$$\underset{س \to -١^{-}}{\text{نها}} ل(س) = \underset{س \to -١^{-}}{\text{نها}} (س + ٥) = ٤$$

$\Leftarrow \underset{س \to -١}{\text{نها}} ل(س)$ غير موجوده

$\Leftarrow$ ل(س) غير متصل عند س = -١ .

سؤال: في المثال السابق ابحث في اتصال ل(س) عند س = ٣ .

مثال ٢:

$$ه(س) = \begin{cases} \dfrac{س^{٢} - ٩}{س - ٣} & ، \quad س \ne ٣ \\ ٥ & ، \quad س = ٣ \end{cases}$$

هل ه متصل عند س = ٣ ، س = ٤ ؟

الحل: أ) عند س = ٣

١- $ه(٣) = ٥$

٢- $\underset{س \to ٣}{\text{نها}} ه(س) = \underset{س \to ٣}{\text{نها}} \dfrac{س^{٢} - ٩}{س - ٣}$

ناتج التعويض $\dfrac{\text{صفر}}{\text{صفر}} \Leftarrow$ تحلل البسط

$$\underset{س \to ٣}{\text{نها}} \frac{(\cancel{س - ٣})(س + ٣)}{\cancel{س - ٣}} = ٣ + ٣ = ٦ .$$

٣- $\underset{س \to ٣}{\text{نها}} ه(س) \ne ه(٣)$.

$\therefore$ ه(س) غير متصل عند س = ٣ .

ب) عند س = ٤ .

١- $ه(٤) = \dfrac{٤^{٢} - ٩}{٤ - ٣} = \dfrac{١٦ - ٩}{١} = ٧$.

٢- $\underset{س \to ٤}{\text{نها}} ه(س) = \underset{س \to ٤}{\text{نها}} \dfrac{س^{٢} - ٩}{س - ٣} = ٧$.

٣- $\underset{س \to ٤}{\text{نها}} ه(س) = ه(٤)$.

$\therefore$ ه(س) متصل عند س = ٤ .

ملاحظة:

دائماً نجد القيمة ه(م) من اشارة المساواة ونجد النهاية من عدم المساواة أو > ، < .

وزاري ٢٠٠٤ ①

$$ه(س) = \begin{cases} \dfrac{س^{٢} - ٤}{س - ٢} & ، \quad س \ne ٢ \\ ٤ & ، \quad س = ٢ \end{cases}$$

ابحث في اتصال ه(س) عند س = ٢

وزاري ٢٠٠٤ ②

$$ق(س) = \begin{cases} \frac{س}{س^{٢}+س} ، & س \neq صفر \\ \frac{١}{٢} ، & س = صفر \end{cases}$$

ابحث في اتصال ق(س) عند س = صفر

وزاري ٢٠٠٤ ③

$$ق(س) = \begin{cases} \frac{س-٢}{\frac{١}{س}-\frac{١}{٢}} ، & س \neq ٢ \\ ٤ ، & س = ٢ \end{cases}$$

ابحث في اتصال ق(س) عند س = ٢

مثال:

$$ق(س) = \begin{cases} ٢س+١ ، & س \geq ٣ \\ أس^{٢} ، & س < ٣ \end{cases}$$

أوجد قيمة أ التي تجعل ق(س) متصلاً عند س = ٣

الحل: بما أن ق(س) متصل عند س = ٣ ⟸

$$\lim_{س \to ٣^{+}} ق(س) = \lim_{س \to ٣^{-}} ق(س)$$

$$\lim_{س \to ٣^{+}} (٢س+١) = \lim_{س \to ٣^{-}} (أس^{٢})$$

$$٢ \times ٣ + ١ = أ(٣)^{٢}$$

$$\frac{٧}{٩} = \frac{\cancel{٩}أ}{\cancel{٩}}$$

$$\boxed{أ = \frac{٧}{٩}}$$

وزاري ٢٠٠٨: إذا كان

$$ق(س) = \begin{cases} ٣س^{٢}+١ ، & س < -٢ \\ س+أ ، & س \geq -٢ \end{cases}$$

وكان ق(س) متصلاً عند س = −٢ جد قيمة أ.

وزاري ٢٠٠٤ ④: إذا كان

$$ق(س) = \begin{cases} س+١ ، & س \geq ٢ \\ ٣س^{٢}+م ، & س < ٢ \end{cases}$$

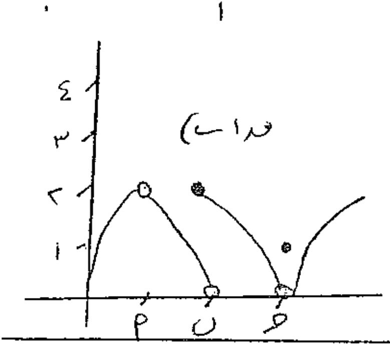
أوجد قيمة م التي تجعل ق(س) متصلاً عند س = ٢.

سؤال ١: إذا كان

$$ق(س) = \begin{cases} \frac{س^{٢}-٥س+٦}{س-٣} ، & س \neq ٣ \\ أ ، & س = ٣ \end{cases}$$

أوجد قيمة أ التي تجعل ق(س) متصلاً عند س = ٣

سؤال ٢: اعتماداً على الشكل التالي اذكر سبب عدم الاتصال عند النقاط أ ، ب ، جـ ؟



وزاري ٢٠٠٤ ①

$$\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{\text{س}^2 - ٤}{\text{س} - ٢} & \text{، س} \neq ٢ \\ ٤ & \text{، س} = ٢ \end{cases}$$

ابحث في اتصال د عند س = ٢

١) $\text{د}(٢) = ٤$

٢) $\underset{\text{س} \to ٢}{\text{نها}}\ \text{د}(\text{س}) = \underset{\text{س} \to ٢}{\text{نها}}\ \dfrac{\cancel{(\text{س} - ٢)}(\text{س} + ٢)}{\text{س} - ٢} = ٤$

٣) $\underset{\text{س} \to ٢}{\text{نها}}\ \text{د}(\text{س}) = \text{د}(٢)$

د متصل عند س = ٢

٢٠٠٤ ③

$$\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{\text{س} - ٢}{\frac{١}{\text{س}} - \frac{١}{٢}} & \text{، س} \neq ٢ \\ ٤ & \text{، س} = ٢ \end{cases}$$

عند س = ٢

١) $\text{د}(٢) = ٤$

٢) $\underset{\text{س} \to ٢}{\text{نها}}\ \text{د}(\text{س}) = \underset{\text{س} \to ٢}{\text{نها}}\ \dfrac{\text{س} - ٢}{\frac{٢ - \text{س}}{٢\text{س}}}$

$\underset{\text{س} \to ٢}{\text{نها}}\ (\text{س} - ٢) \div \dfrac{٢ - \text{س}}{٢\text{س}} =$

$\underset{\text{س} \to ٢}{\text{نها}}\ \overset{-١}{\cancel{\text{س} - ٢}} \times \dfrac{٢\text{س}}{\cancel{٢ - \text{س}}} = -٢ \times ٢ = -٤$

٣) $\underset{\text{س} \to ٢}{\text{نها}}\ \text{د}(\text{س}) \neq \text{د}(٢)$

د غير متصل عند س = ٢ .

٢٠٠٤ ②

$$\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{\text{س}}{\text{س}^2 + \text{س}} & \text{، س} \neq \text{صفر} \\ \frac{١}{٢} & \text{، س} = \text{صفر} \end{cases}$$

س = صفر

١) $\text{د}(٠) = \frac{١}{٢}$

٢) $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نها}}\ \text{د}(\text{س}) = \underset{\text{س} \to ٠}{\text{نها}}\ \dfrac{\cancel{\text{س}}}{\cancel{\text{س}}(\text{س} + ١)} = \dfrac{١}{٠ + ١} = ١$

٣) $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نها}}\ \text{د}(\text{س}) \neq \text{د}(٠)$

د غير متصل عند س = ٠

٢٠٠٨ :

$$\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} ٣\text{س}^2 + ١ & \text{، س} < -٢ \\ \text{س} + \text{م} & \text{، س} \geq -٢ \end{cases}$$

د متصل عند س = −٢ ⇐

$\underset{\text{س} \to -٢^+}{\text{نها}}\ \text{د}(\text{س}) = \underset{\text{س} \to -٢^-}{\text{نها}}\ \text{د}(\text{س})$

$-٢ + \text{م} = ١٢ + ١$

$-٢ + \text{م} = ١٣ \leftarrow \text{م} = ١٥$

٢٠٠٤ ④ :

$$\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س} + ١ & \text{، س} \geq ٢ \\ ٣\text{س} + \text{م} & \text{، س} < ٢ \end{cases}$$

د متصل عند س = ٢

$\underset{\text{س} \to ٢^+}{\text{نها}}\ \text{د}(\text{س}) = \underset{\text{س} \to ٢^-}{\text{نها}}\ \text{د}(\text{س})$

$٢ + ١ = ٣ \times ٢ + \text{م}$

$٣ = ٦ + \text{م}$

$-٦ \qquad -٦$

$-٣ = \text{م}$

حل سؤال ١ :

$$\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{\text{س}^2 - ٥\text{س} + ٦}{\text{س} - ٣} & ، \text{س} \neq ٣ \\ \text{أ} & ، \text{س} = ٣ \end{cases}$$

د متصل عند س = ٣ ⇐

$$\lim_{\text{س} \to ٣} \text{د}(\text{س}) = \text{د}(٣)$$

$$\lim_{\text{س} \to ٣} \frac{\cancel{(\text{س} - ٣)}(\text{س} - ٢)}{\cancel{\text{س} - ٣}} = \text{أ}$$

$$٣ - ٢ = \text{أ}$$

$$\text{أ} = ١$$

حل سؤال ٢

① عند س = أ

د(أ) غير معرف ⇐ د غير متصل عند س = أ

② عند س = ب

$$\lim_{\text{س} \to \text{ب}^+} \text{د}(\text{س}) = ٢$$

$$\lim_{\text{س} \to \text{ب}^-} \text{د}(\text{س}) = \text{صفر}$$

⇐ $\lim_{\text{س} \to \text{ب}} \text{د}(\text{س})$ غير موجودة ⇐

د غير متصل عند س = ب

③ عند س = جـ

$$\text{د}(\text{جـ}) = ١$$

$$\lim_{\text{س} \to \text{جـ}} \text{د}(\text{س}) = \text{صفر}$$

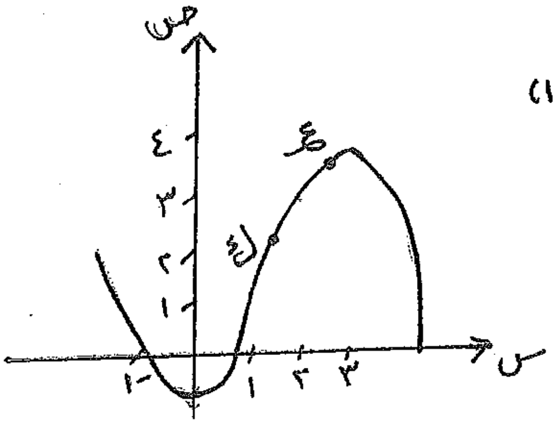
$$\lim_{\text{س} \to \text{جـ}} \text{د}(\text{س}) \neq \text{د}(\text{جـ})$$

⇐ د غير متصل عند س = جـ .

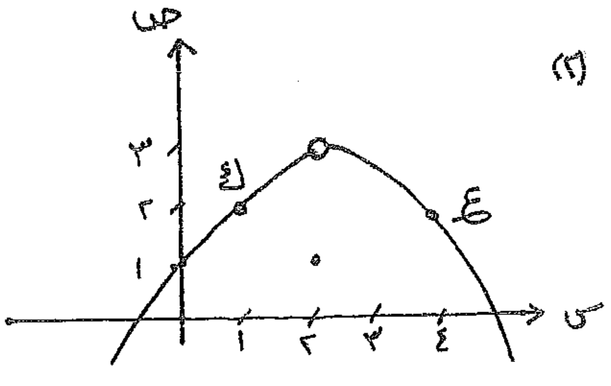
الاتصال عند نقطة

تأمل الاشكال التالية وحدد أيها يمثل اقتراناً متصلاً عند س = ٢ مع بيان السبب .

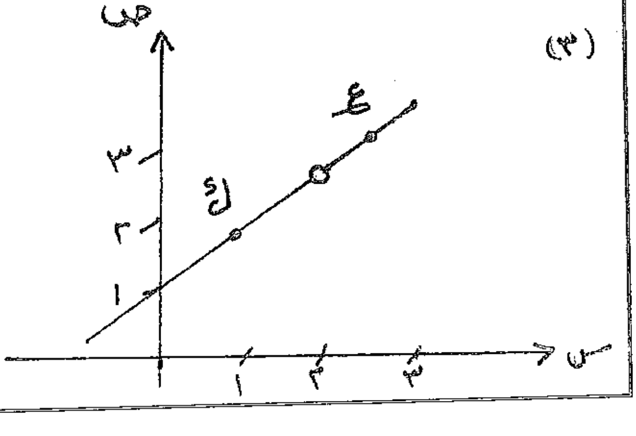
(١)



(٢)



(٣)

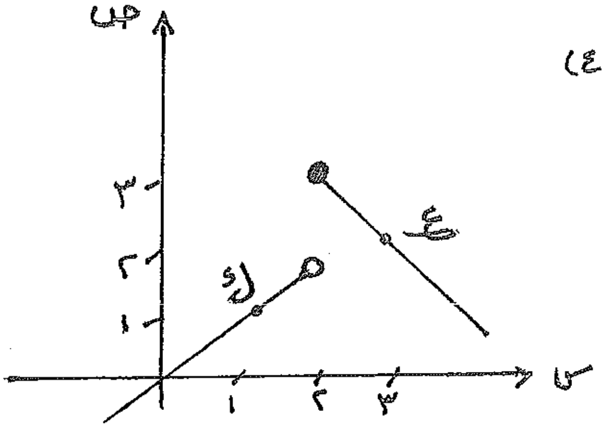


الوحدة الأولى

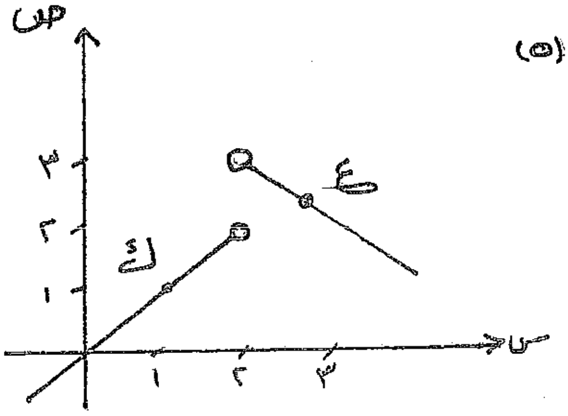
النهايات والاتصال

الاتصال عند نقطة

(٤)



(٥)



الوحدة الأولى
النهايات والاتصال

الاتصال عند نقطة

تدريب ١ : اذا كان

$$\text{ق(س)} = \begin{cases} \text{س}^{٢} + ٢ \text{ ، } & \text{س} < ١ \\ ٣\text{س} \text{ ، } & ١ \leq \text{س} < ٣ \\ \text{س}^{٣} - ١٨ \text{ ، } & \text{س} > ٣ \end{cases}$$

ابحث في اتصال الاقتران ق عند كل مما يأتي :

١) س = صفر   ٢) س = ١   ٣) س = ٣

تدريب ٢ : اذا كان

$$\text{ق(س)} = \begin{cases} \dfrac{\text{س}^{٢} - ٢\text{س}}{\text{س} - ٢} \text{ ، } & \text{س} \neq ٢ \\ ٤ \text{ ، } & \text{س} = ٢ \end{cases}$$

فابحث اتصال الاقتران ق عندما س = ٢

تدريب ٣ : اذا كان

(١) $$\text{ق(س)} = \begin{cases} ٢\text{س}^{٣} + ٤ \text{ ، } & \text{س} < -٢ \\ \text{أس} + ٦ \text{ ، } & \text{س} \geq -٢ \end{cases}$$

وكان الاقتران ق متصلاً عندما س = −٢ فجد قيمة الثابت أ ؟

(٢) اذا كان

$$\text{ق(س)} = \begin{cases} \text{أس} + ٣ \text{ ، } & \text{س} < ١ \\ ٧ \text{ ، } & \text{س} = ١ \\ \text{س} - \text{ب} \text{ ، } & \text{س} > ١ \end{cases}$$

وكان ق متصلاً عندما س = ١ فجد قيمة كل من الثابتين أ ، ب .

تدريب ١ :

د(س) = { $س^{٢}$ + ٢ ، س < ١
٣س ، ١ ≤ س < ٣
$س^{٣}$ − ١٨ ، س > ٣

① عند س = ٠

١- د(٠) = $٠^{٢}$ + ٢ = ٢

٢- نهـا$_{س \to ٠}$ د(س) = $٠^{٢}$ + ٢ = ٢

٣- نهـا$_{س \to ٠}$ د(س) = د(٠)

∴ د متصل عند س = ٠

② س = ١

١- د(١) = ٣ × ١ = ٣

٢- نهـا$_{س \to ١^{+}}$ د(س) = ٣ × ١ = ٣

نهـا$_{س \to ١^{-}}$ د(س) = ١ + ٢ = ٣

⟸ نهـا$_{س \to ١}$ د(س) = ٣

٣- نهـا$_{س \to ١}$ د(س) = د(١)

تدريب ٢ :

د(س) = { $\frac{س^{٢} - ٢س}{س - ٢}$ ، س ≠ ٢
٤ ، س = ٢

عند س = ٢

① د(٢) = ٤

٢) نهـا$_{س \to ٢}$ د(س) = نهـا$_{س \to ٢}$ $\frac{س^{٢} - ٢س}{س - ٢}$

= نهـا$_{س \to ٢}$ $\frac{س\cancel{(س - ٢)}}{\cancel{س - ٢}}$

= ٢

٣) نهـا$_{س \to ٢}$ د(س) ≠ د(٢)

∴ د غير متصل عند س = ٢ .

تدريب ٣ :

د(س) = { ٢$س^{٣}$ + ٤ ، س < −٢
أس + ٦ ، س ≥ −٢

(١)

د متصل عندما س = −٢

نهـا$_{س \to -٢^{+}}$ د(س) = نهـا$_{س \to -٢^{-}}$ د(س)

−٢أ + ٦ = ٢$(-٢)^{٣}$ + ٤

−٢أ + ٦ = −١٦ + ٤

−٢أ + ٦ = −١٢
  −٦ −٦

$\frac{-٢أ}{-٢}$ = $\frac{-١٨}{-٢}$ ⟸ $\boxed{أ = ٩}$

(٢) نهـا$_{س \to ١^{+}}$ د(س) = نهـا$_{س \to ١^{-}}$ د(س) = د(١)

نهـا$_{س \to ١^{+}}$ ($س^{٢}$ − ب) = ٧

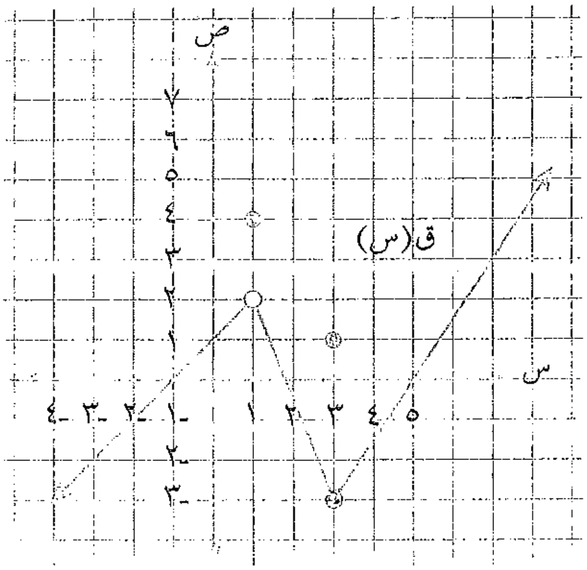
١ − ب = ٧ ⟸ $\boxed{ب = -٦}$

نهـا$_{س \to ١^{-}}$ (أس + ٣) = ٧

أ + ٣ = ٧
  −٣ −٣
⟸ $\boxed{أ = ٤}$

الأسئلة

١) اعتمادًا على الشكل (١–١٥) الذي يمثل منحنى الاقتران ق المعرف على مجموعة الأعداد الحقيقية، حدد قيم س التي يكون الاقتران ق عندها غير متصل.



الشكل (١–١٥).

٣

٢) إذا كان ق(س) = $$\begin{cases} \text{س}^{٢} - ١ & ، \text{س} < ١ \\ ٢\text{س} & ، \text{س} \geq ١ \end{cases}$$

فابحث اتصال الاقتران ق عندما س = ١

٣) إذا كان هـ (س) = $$\begin{cases} \dfrac{٥}{\text{س} + ١} & ، \text{س} \neq ١ \\ ٣ & ، \text{س} = ١ \end{cases}$$

فابحث اتصال الاقتران هـ عندما س = ١

٤) إذا علمت أن ق(س) = $$\begin{cases} \text{س}^{٢} + ٣ & ، \text{س} < -١ \\ ٥ - \text{س} & ، -١ \leq \text{س} < ١ \\ \text{س}^{٣} + ٣ & ، \text{س} \geq ١ \end{cases}$$

فابحث اتصال الاقتران ق عندما:

أ) س = ١   ب) س = −١

٥) إذا كان ق (س) = $$\begin{cases} \dfrac{٣ - \text{س}}{\text{س} - ٣} & ، \text{س} \neq ٣ \\ \text{م س} + ٢ & ، \text{س} = ٣ \end{cases}$$

وكان الاقتران ق متصلًا عندما س = ٣، فجد قيمة الثابت م.

٦) إذا كان هـ (س) = $\begin{cases} \text{س} + \text{أ} & \text{،} \quad \text{س} < ٢ \\ ٨ & \text{،} \quad \text{س} = ٢ \\ \text{ب س} + ٦ & \text{،} \quad \text{س} > ٢ \end{cases}$

وكان الاقتران هـ متصلًا عندما س = ٢، فجد قيمة كل من الثابتين: أ ، ب.

٧) إذا كان ل (س) = $\begin{cases} \text{أس} - \text{ب} & \text{،} \quad \text{س} < ١ \\ ٤ & \text{،} \quad \text{س} = ١ \\ \text{أس}^{٣} + \text{ب} + ٢ & \text{،} \quad \text{س} > ١ \end{cases}$

وكان الاقتران ل متصلا عندما س = ١، فجد قيمة كل من الثابتين: أ، ب.

٨) إذا كان الاقتران ق متصلًا عندما س = ٢، وكانت $\underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهـا}}$ ٢ق(س) + س = ٦ ، فجد قيمة ق(٢).

س١ قيم س التي يكون عندها الاقتران غير متصل هي س = ١ ، س = ٣

س٢ ① ق(١) = ٢ × ١ = ٢

٢) $\underset{س\leftarrow ١^{+}}{\text{نها}}$ ق(س) = ٢ × ١ = ٢

$\underset{س\leftarrow ١^{-}}{\text{نها}}$ ق(س) = ١ − ١ = صفر

⟸ $\underset{س\leftarrow ١}{\text{نها}}$ ق(س) غير موجودة ⟸

ق(س) غير متصل عند س = ١

س٣ ١) هـ(١) = ٣

٢) $\underset{س\leftarrow ١}{\text{نها}}$ هـ(س) = $\frac{٥}{١+١}$ = $\frac{٥}{٢}$

٣) $\underset{س\leftarrow ١}{\text{نها}}$ هـ(س) ≠ هـ(١) .

∴ هـ غير متصل عند س = ١

س٤ $\boxed{أ}$ عند س = ١

١) ق(١) = $١^{٣}$ + ٣ = ٤

٢) $\underset{س\leftarrow ١^{+}}{\text{نها}}$ ق(س) = ٤

$\underset{س\leftarrow ١^{-}}{\text{نها}}$ ق(س) = ٥ − ١ = ٤

$\underset{س\leftarrow ١}{\text{نها}}$ ق(س) = ٤ .

٣) $\underset{س\leftarrow ١}{\text{نها}}$ ق(س) = ق(١)

∴ ق(س) متصل عند س = ١ .

$\boxed{ب}$ عند س = −١

١) ق(−١) = ٥ − −١ = ٦

٢) $\underset{س\leftarrow −١^{+}}{\text{نها}}$ ق(س) = ٦

$\underset{س\leftarrow −١^{-}}{\text{نها}}$ ق(س) = ١ + ٣ = ٤

⟸ $\underset{س\leftarrow −١}{\text{نها}}$ ق(س) = غير موجودة

∴ ق(س) غير متصل عند س = −١ .

س٥ ق متصل عند س = ٣ ⟸

$\underset{س\leftarrow ٣}{\text{نها}}$ ق(س) = ق(٣)

$\underset{س\leftarrow ٣}{\text{نها}}$ $\frac{\overset{−١}{\cancel{٣ − س}}}{\cancel{س − ٣}}$ = م × ٣ + ٢

$\underset{س\leftarrow ٣}{\text{نها}}$ −١ = ٣م + ٢

−١ = ٣م + ٢
−٢   −٢

$\frac{٣م}{٣}$ = $\frac{−٣}{٣}$

م = −١ .

٦) ∵ هـ متصل عند س = ٢ ⟸

نهـا هـ(س) = نهـا هـ(س) = هـ(٢)
س ← ٢+ ، س ← ٢−

نهـا هـ(س) = هـ(٢)
س ← ٢+

نهـا ب س + ٦ = ٨
س ← ٢+

٢ب + ٦ = ٨ ⟸ ٢ب/٢ = ٢/٢
−٦ −٦

⟸ $\boxed{ب = ١}$

نهـا هـ(س) = هـ(٢)
س ← ٢−

نهـا (س + أ) = ٨
س ← ٢−

٢ + أ = ٨ ⟸ $\boxed{أ = ٦}$

٧) ∵ ل متصل عندما س = ١

نهـا ل(س) = نهـا ل(س) = ل(١)
س ← ١+ ، س ← ١−

نهـا ل(س) = ل(١) .
س ← ١+

أ + ب + ٢ = ٤ ⟸ أ + ب = ٢ --- ①
−٢ −٢

نهـا ل(س) = ل(١)
س ← ١−

أ − ب = ٤ --- ②

بجمع المعادلتين ① + ② .

أ + ب = ٢
+ أ − ب = ٤

٢أ/٢ = ٦/٢ ⟸ $\boxed{أ = ٣ .}$

نعوض في معادلة ①

أ + ب = ٢
٣ + ب = ٢ ⟸ $\boxed{ب = −١}$
−٣ −٣

٨) ∵ م متصل عند س = ٢ ⟸

نهـا م(س) = م(٢) .
س ← ٢

نهـا ٢ م(س) + س = ٦
س ← ٢

٢ نهـا م(س) + نهـا س = ٦
س ← ٢ ، س ← ٢

٢ نهـا م(س) + ٢ = ٦
س ← ٢
−٢ −٢

٢/٢ نهـا م(س) = ٤/٢
س ← ٢

نهـا م(س) = ٢
س ← ٢

∴ م(٢) = نهـا م(س) = ٢ .
س ← ٢

نظرية:

إذا كان الاقترانان ق ، هـ متصلين عند س = أ فإن

١) ق + هـ متصل عند س = أ

٢) ق − هـ متصل عند س = أ

٣) ق × هـ متصل عند س = أ

٤) $\frac{\text{ق}}{\text{هـ}}$ متصل عند س = أ إذا كان هـ(أ) ≠ صفر

مثال: إذا كان ق(س) = س^{٣} + ٥س

هـ(س) = $\begin{cases} \text{٥س} ، & \text{س} \le ٠ . \\ \text{س}^{٢} ، & \text{س} > ٠ . \end{cases}$

وكان ل(س) = (ق × هـ)(س) فابحث اتصال الاقتران ل عندما س = ٠ .

الحل: نجد قاعدة الاقتران ل(س)

ل(س) = $\begin{cases} (\text{س}^{٢} + \text{٥س})(\text{٥س}) ، & \text{س} \le ٠ . \\ (\text{س}^{٢} + \text{٥س})(\text{س}^{٤}) ، & \text{س} > ٠ . \end{cases}$

نبحث في اتصال ل(س) عند س = ٠ .

١) ل(٠) = (٠^{٢} + ٥×٠) (٥×٠) = ٠ .

٢) $\begin{cases} \lim_{\text{س} \to ٠^-} \text{ل(س)} = ٠ \\ \lim_{\text{س} \to ٠^+} \text{ل(س)} = ٠ \end{cases} \Leftarrow \lim_{\text{س} \to ٠} \text{ل(س)} = ٠ .$

٣) $\lim_{\text{س} \to ٠}$ ل(س) = ل(٠)

∴ ل(س) متصل عند س = ٠ .

نتيجة: كل اقتران نسبي هو اقتران متصل عند جميع الأعداد الحقيقية باستثناء أصفار المقام

مثال: ما نقط عدم الاتصال للاقترانات التالية

١) ق(س) = س^{٣} − ٥

الحل: ق كثير حدود متصل لجميع قيم س ⟸ لا يوجد نقاط عدم اتصال .

٢) ق(س) = $\frac{\text{س} - ٩}{\text{س}^{٢} - \text{٣س}}$

الحل: ق اقتران نسبي فهو متصل لجميع قيم س باستثناء أصفار المقام

س^{٢} − ٣س = ٠ ⟸ س(س − ٣) = ٠

س = ٠ ، س − ٣ = ٠ ⟸ س = ٣

∴ نقاط عدم الاتصال أو نقاط الانفصال هي س = صفر ، ٣ .

نظريات الاتصال

(٢)

سؤال ١: ما نقط عدم الاتصال للاقترانات التالية:

① $\text{ق}(\text{س}) = ٥$

② $\text{ق}(\text{س}) = (\text{س}+٣)(\text{س}^٢-١٦)$.

③ $\text{ق}(\text{س}) = \dfrac{\text{س}^٢-٩}{\text{س}+٥}$ وزاري

④ $\text{ق}(\text{س}) = \dfrac{\text{س}}{\text{س}^٢-٣\text{س}-٢٨}$.

⑤ $\text{ق}(\text{س}) = \dfrac{\text{س}-٣}{(\text{س}-١)(\text{س}+٣)}$ ، وزاري

مثال: اذا كان $\text{ق}(\text{س}) = ٣\text{س}-١$

$$\text{هـ}(\text{س}) = \begin{cases} ٤\text{س}+١ \text{ ، } \text{س} < ٢ \\ \text{س}^٢+٥ \text{ ، } \text{س} \geq ٢ \end{cases}$$

فابحث في اتصال $\text{ق}(\text{س}) \times \text{هـ}(\text{س})$ عند $\text{س}=٢$

الحل: $\text{ق}(\text{س})$ متصل عند $\text{س}=٢$ لأنه كثير حدود

نبحث في اتصال $\text{هـ}(\text{س})$ عند $\text{س} = ٢$

١- $\text{هـ}(٢) = ٢^٢+٥ = ٩$

٢- $\underset{\text{س}\to٢^+}{\text{نها}}\ \text{هـ}(\text{س}) = \underset{\text{س}\to٢^+}{\text{نها}}\ (\text{س}^٢+٥) = ٩$

$\underset{\text{س}\to٢^-}{\text{نها}}\ \text{هـ}(\text{س}) = \underset{\text{س}\to٢^-}{\text{نها}}\ (٤\text{س}+١) = ٩$

$\Leftarrow \underset{\text{س}\to٢}{\text{نها}}\ \text{هـ}(\text{س}) = ٩$.

٣- $\underset{\text{س}\to٢}{\text{نها}}\ \text{هـ}(\text{س}) = \text{هـ}(٢)$

$\therefore$ $\text{هـ}(\text{س})$ متصل عند $\text{س}=٢$.

$\therefore$ $\text{ق}(\text{س}) \times \text{هـ}(\text{س})$ متصل عند $\text{س}=٢$ (حاصل ضرب اقترانين متصلين)

طريقة اخرى للحل:

نجد حاصل ضرب $\text{ق}(\text{س}) \times \text{هـ}(\text{س}) = \text{ل}(\text{س})$

$$\text{ل}(\text{س}) = \begin{cases} (٣\text{س}-١)(٤\text{س}+١) \text{ ، } \text{س} < ٢ \\ (٣\text{س}-١)(\text{س}^٢+٥) \text{ ، } \text{س} \geq ٢ \end{cases}$$

نبحث في شروط الاتصال الثلاثة

١) $\text{ل}(٢) = (٣\times٢-١)\cdot(٢^٢+٥) = ٥\times٩ = ٤٥$.

٢) $\underset{\text{س}\to٢^-}{\text{نها}}\ \text{ل}(\text{س}) = \underset{\text{س}\to٢^-}{\text{نها}}\ (٣\text{س}-١)(٤\text{س}+١) = ٤٥$

$\underset{\text{س}\to٢^+}{\text{نها}}\ \text{ل}(\text{س}) = \text{نها}\ (٣\text{س}-١)(\text{س}^٢+٥) = ٤٥$

$\Leftarrow \underset{\text{س}\to٢}{\text{نها}}\ \text{ل}(\text{س}) = ٤٥$.

٣) $\underset{\text{س}\to٢}{\text{نها}}\ \text{ل}(\text{س}) = \text{ل}(٢)$.

$\therefore$ $\text{ل}(\text{س})$ متصل عند $\text{س} = ٢$.

ملاحظة: يجب استعمال الطريقة الثانية عندما يكون احد الاقترانين او كلاهما غير متصل عند النقطة المطلوبة

وزاري ٢٠٠٤:

اذا كان
$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} -١ \text{ ، } \text{س} < ١ \\ \text{صفر} \text{ ، } \text{س} = ١ \\ ١ \text{ ، } \text{س} > ١ \end{cases}$$

$\text{هـ}(\text{س}) = \text{س}^٢\ \text{ق}(\text{س})$

ابحث في اتصال $\text{هـ}(\text{س})$ عند $\text{س} = ١$

الوحدة الأولى
النهايات والاتصال

نظريات الاتصال

تدريبات الكتاب (٣)

تدريب ١ :

اذا كان ق(س) = $س^{٢}$ + ٢

هـ(س) = { س - ١ ، س ≤ ٣
٥ - س ، س > ٣

فابحث في اتصال (ق+هـ) عندما س = ٣

تدريب ٢ : اذا كان ق(س) = $س^{٢}$ + ٥

هـ(س) = { $س^{٢}$ + ٦ ، س ≤ -١
٣٥ - س ، س > -١

ابحث في اتصال الاقتران م(س) = ق(س) × هـ(س)
عندما س = -١ .

تدريب ٣ :

جد قيم س (إن وجدت) التي يكون عندها كل اقتران مما يأتي غير متصل :

١) ق(س) = $س^{٣}$ - ٣س + ٨

٢) هـ(س) = $\frac{س - ١}{س^{٢} + ٥س + ٦}$.

٣) ل(س) = $\frac{٥ - س}{س^{٣} - ١}$.

تدريب ١ :

ل(س) = ن(س) + هـ(س) =

$$\begin{cases} س^{٢} + ٢ + س - ١ & ، س \le ٣ \\ س^{٢} + ٢ + ٥ - س & ، س > ٣ \end{cases}$$

$$ل(س) = \begin{cases} س^{٢} + س + ١ & ، س \le ٣ \\ س^{٢} - س + ٧ & ، س > ٣ \end{cases}$$

نبحث اتصال ل(س) عند س = ٣

١) $ل(٣) = ٣^{٢} + ٣ + ١ = ١٣$

٢) $\underset{س \leftarrow ٣^{-}}{نها} ل(س) = ٣^{٢} + ٣ + ١ = ١٣$

$\underset{س \leftarrow ٣^{+}}{نها} ل(س) = ٣^{٢} - ٣ + ٧$
$= ١٣$

$\Leftarrow \underset{س \leftarrow ٣}{نها} ل(س) = ١٣$

٣) $\underset{س \leftarrow ٣}{نها} ل(س) = ل(٣)$

∴ ل(س) متصل عند س = ٣.

تدريب ٢ : م(س) = ن(س) × هـ(س).

$$م(س) = \begin{cases} (س^{٢} + ٥)(س^{٢} + ٦) & ، س \le -١ \\ (س^{٢} + ٥)(٣٥ - س) & ، س > -١ \end{cases}$$

١) $م(-١) = ((-١)^{٢} + ٥)((-١)^{٢} + ٦)$
$= ٩ \times ٧$
$= ٤٢$

٢) $\underset{س \leftarrow -١^{+}}{نها} م(س) = ((-١)^{٢} + ٥)(٣٥ - ١)$
$= ٩ \times ٣٦ = ٢١٦$

$\underset{س \leftarrow -١^{-}}{نها} م(س) = ((-١)^{٢} + ٥)((-١)^{٢} + ٦)$
$= ٩ \times ٧ = ٤٢$

$\underset{س \leftarrow -١}{نها} م(س) =$ غير موجودة $\Leftarrow$ م(س) غير متصل عند س = −١

تدريب ٣ :

١) $ن(س) = س^{٣} - ٣س + ٨$ كثير حدود متصل

٢) $هـ(س) = \frac{س - ١}{س^{٢} + ٥س + ٦}$

نجد أصفار المقام

$س^{٢} + ٥س + ٦ = ٠ \Leftarrow (س + ٣)(س + ٢) = ٠$

$س + ٣ = ٠ \Leftarrow س = -٣$
$-٣ \quad -٣$

$س + ٢ = ٠ \Leftarrow س = -٢$
$-٢ \quad -٢$

نقاط عدم الاتصال هي {−٣ ، −٢}.

٣) $ل(س) = \frac{٥ - س}{س^{٣} - ١}$ نجد أصفار

نجد أصفار المقام

$س^{٣} - ١ = ٠ \Leftarrow س^{٣} = ١$
$+١ \quad +١$

$\sqrt[٣]{س^{٣}} = \sqrt[٣]{١} \Leftarrow س = ١$

نقاط عدم الاتصال = {١}.

الأسئلة

١) إذا كان $\text{ق(س)} = ٥\text{س}^٢ + ٥\text{س} - ١$ ، $\text{هـ(س)} = \begin{cases} \text{س} + ٩ & ، \text{س} \le ٢ \\ ٥\text{س} + ١ & ، \text{س} > ٢ \end{cases}$

وكان $\text{ل(س)} = ٢\text{ق(س)} + \text{هـ(س)}$، فابحث اتصال الاقتران ل عندما $\text{س} = ٢$

٢) إذا كان $\text{ق(س)} = ٥\,\text{س}^٢ + ٤$ ، $\text{هـ(س)} = \begin{cases} \text{س} + ٤ & ، \text{س} < ٠ \\ ٤ - \text{س}^٣ & ، \text{س} \ge ٠ \end{cases}$

وكان $\text{ل(س)} = (\text{ق} \times \text{هـ})\,\text{(س)}$، فابحث اتصال الاقتران ل عندما $\text{س} = ٠$

٣) إذا كان $\text{ق(س)} = \begin{cases} ٥ - \text{س} & ، \text{س} < ٥ \\ \text{س} - ٥ & ، \text{س} \ge ٥ \end{cases}$ ، $\text{هـ(س)} = \dfrac{\text{س} - ٣}{\text{س}^٢ - ٢٥}$ ،

فابحث اتصال $(\text{ق} \times \text{هـ})\,\text{(س)}$ عندما $\text{س} = ٥$

٤) إذا كان $(\text{ق} + \text{هـ})\,\text{(س)}$ متصلاً عندما س = أ، فهل نستنتج أن كلًّا من ق، هـ متصل عندما س = أ ؟ برِّر إجابتك.

٥) جد قيم س (إن وجدت) التي لا يكون عندها كل اقتران مما يأتي متصلاً:

أ) $\text{ق(س)} = \text{س}^٣ + ١$

ب) $\text{هـ(س)} = \dfrac{\text{س} - ٣}{\text{س}^٢ - ٥\text{س} + ٦}$

جـ) $\text{ل(س)} = \dfrac{\text{س} + ٢}{\text{س}^٢ - ١} + \dfrac{٥}{\text{س}}$

د) م(س) = $\begin{cases} \text{س}^{٣} + ٣ & \text{، س} < ٢ \\ ٦ - \text{س} & \text{، س} \geq ٢ \end{cases}$

عند نقطة التشعب
نبحث الاتصال عند س = ٢

(١

٦) إذا كان ق(س) = س + ٣ ، هـ (س) = $\frac{\text{س} - ٣}{\text{س}^{٢} - ٩}$ ، وكان

ل(س) = ق(س) × هـ (س)، فابحث اتصال الاقتران ل عندما س = ٣

(٢

(٣

(٤

حـل ل(س) = ٢م(س) + هـ(س)

ل(س) = { ١٠س^{٢} + ١٠س − ٢ + س + ٩ ، س ≤ ٢
ـــــــــ { ١٠س^{٢} + ١٠س − ٢ + ٥س + ١ ، س > ٢

ل(س) = { ١٠س^{٢} + ١١س + ٧ ، س ≤ ٢
ـــــــــ { ١٠س^{٢} + ١٥س − ١ ، س > ٢

١) ل(٢) = ١٠(٢)^{٢} + ١١×٢ + ٧
= ٤٠ + ٢٢ + ٧ = ٦٩

٢) نهـا ل(س) = ٦٩
س ← ٢$^{-}$

نهـا ل(س) = ١٠(٢)^{٢} + ١٥(٢) − ١
س ← ٢$^{+}$ = ٤٠ + ٣٠ − ١ = ٦٩

⇐ نهـا ل(س) = ٦٩
س ← ٢

٣) نهـا ل(س) = ل(٢) .
س ← ٢

∴ ل(س) متصل عند س = ٢ .

حـل^{٢}

ل(س) = { (٥س^{٢} + ٤)(س + ٤) ، س < ٠
ـــــــــ { (٥س^{٢} + ٤)(٤ − س^{٣}) ، س ≥ ٠

١) ل(٠) = (٠ + ٤)(٤ − ٠) = ٤×٤ = ١٦

٢) نهـا ل(س) = ١٦
س ← ٠$^{+}$

نهـا ل(س) = (٥(٠)^{٢} + ٤)(٠ + ٤)
س ← ٠$^{-}$ = ١٦

نهـا ل(س) = ١٦ .
س ← ٠

٣) نهـا ل(س) = ل(٠)
س ← ٠

∴ ل(س) متصل عند س = صفر .

حـل^{٣}

م(س) = { (٥ − س)((س − ٣)/(س^{٢} − ٢٥)) ، س < ٥
ـــــــــ { (س − ٥)((س − ٣)/(س^{٢} − ٢٥)) ، س ≥ ٥

م(س) = { $\overset{-١}{\cancel{(٥ − س)}}$ (س − ٣)/($\cancel{(س − ٥)}$(س + ٥)) ، س < ٥
ـــــــــ { $\cancel{(س − ٥)}$ (س − ٣)/($\cancel{(س − ٥)}$(س + ٥)) ، س ≥ ٥

م(س) = { − (س − ٣)/(س + ٥) ، س < ٥
ـــــــــ { (س − ٣)/(س + ٥) ، س ≥ ٥

١) م(٥) = (٥ − ٣)/(٥ + ٥) = ٢/١٠

٢) نهـا م(س) = ٢/١٠
س ← ٥$^{+}$

نهـا م(س) = − ((٥ − ٣)/(٥ + ٥)) = −٢/١٠
س ← ٥$^{-}$

⇐ نهـا م(س) = غير موجودة .
س ← ٥

∴ م(س) غير متصل عند س = ٥ .

س٥ أ) $هـ(س) = س^{٣} + ١$

هـ كثيرة حدود متصلة لجميع قيم س

∴ لا يوجد نقاط عدم اتصال .

ب) $هـ(س) = \frac{س - ٣}{س^{٢} - ٥س + ٦}$

نجد أصفار المقام

$س^{٢} - ٥س + ٦ = ٠$

$(س - ٣)(س - ٢) = ٠$

س = ٢ ، س = ٣

نقاط عدم الاتصال {٢، ٣} .

جـ) $ل(س) = \frac{س + ٢}{س^{٢} - ١} + \frac{٥}{س}$

$س^{٢} - ١ = صفر \Leftarrow (س^{٢} = ١)$ بإضافة $+١$ للطرفين

$\Leftarrow س = \mp ١$

س = صفر

نقاط عدم الاتصال {١، -١، صفر} .

د) $م(س) = \begin{cases} س^{٣} + ٣ & ، س < ٢ \\ ٦ - س & ، س \geq ٢ \end{cases}$

نبحث الاتصال عند نقاط التحول وهي س = ٢

١) م(٢) = ٦ − ٢ = ٤

٢) $\underset{س \leftarrow ٢^{+}}{\text{نها}}\ م(س) = ٦ - ٢ = ٤$

$\underset{س \leftarrow ٢^{-}}{\text{نها}}\ م(س) = ٢^{٣} + ٣ = ١١$

$\Leftarrow \underset{س \leftarrow ٢}{\text{نها}}\ م(س)$ غير موجودة

∴ س = ٢ نقطة عدم اتصال .

ح

$ل(س) = \frac{(س + ٣)(س - ٣)}{(س^{٢} - ٩)}$

$ل(س) = \frac{س^{٢} - ٩}{س^{٢} - ٩}$

ل(س) = ١

١) ل(٣) = ١

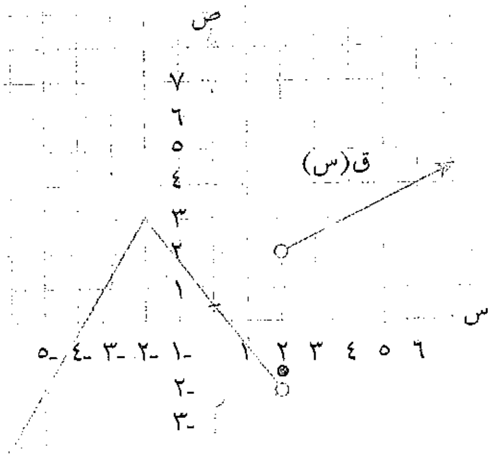
٢) $\underset{س \leftarrow ٣}{\text{نها}}\ ل(س) = ١$

٣) $\underset{س \leftarrow ٣}{\text{نها}}\ ل(س) = ل(٣)$

∴ ل(س) متصل عند س = ٣ .

أسئلة الوحدة

١) اعتمادًا على الشكل (١-١٦) الذي يمثل منحنى الاقتران ق، جد قيمة كل مما يأتي:



الشكل (١-١٦).

أ) ق(٢)

ب) $\underset{\text{س}\leftarrow -\text{١}}{\text{نهـــا}}$ ق(س)

جـ) $\underset{\text{س}\leftarrow \text{٢}}{\text{نهـــا}}$ ق(س)

د) قيم س التي يكون عندها منحنى الاقتران ق غير متصل

هـ) $\underset{\text{س}\leftarrow \text{٠}}{\text{نهـــا}}$ $\left((\text{ق(س)})^{\text{٢}} - \text{س} + \text{٢}\right)$

٢) إذا كانت $\underset{\text{س}\leftarrow \text{١}}{\text{نهـــا}}$ $(\text{ق(س)})^{\text{٣}} + \text{٢} = \text{٢٩}$، $\underset{\text{س}\leftarrow \text{١}}{\text{نهـــا}}$ هـ(س) = -٣، فجد قيمة كل مما يأتي:

أ) $\underset{\text{س}\leftarrow \text{١}}{\text{نهـــا}}$ (ق(س) + ٢هـ(س) + س)

ب) $\underset{\text{س}\leftarrow \text{١}}{\text{نهـــا}}$ (ق(س) × هـ(س))

٣) إذا كان ق(س) =

٢أس^٢ + ب ، س < ١

٧ ، س = ١

س^٢ - ٤ب - ٦ ، س > ١

وكان الاقتران ق متصلًا عندما س = ١، فجد قيمة كل من الثابتين: أ، ب.

٤) جد قيمة النهاية (إن وجدت) في كل مما يأتي عند قيم س المبينة إزاء كل منها:

أ) ق (س) = $\sqrt{\text{٣} - \text{س}} + \dfrac{\text{س} + \text{١}}{\text{س}^{\text{٢}} + \text{١}}$ ، س ← -١

ب) هـ (س) = $\dfrac{\text{س}^{\text{٢}} - \text{٥س}}{\text{٢س} - \text{١٠}}$ ، س ← ٥

جـ) $\text{ل(س)} = \dfrac{\text{س}^{٢} - ٢\text{س} + ١}{١٢ - ٣\text{س}}$ ، س ← ١

د) $\text{م(س)} = \dfrac{\text{س}^{٣} - ٢٧}{\text{س} - ٣}$ ، س ← ٣

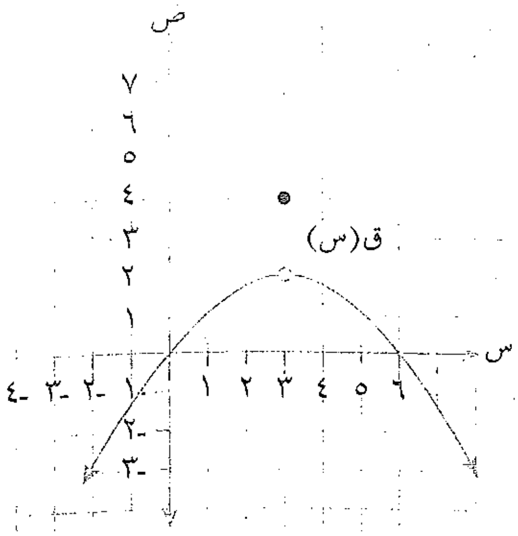
هـ) $\text{ك(س)} = \dfrac{\dfrac{١}{\text{س} - ٢} - \dfrac{١}{٢}}{٢\text{س} - ٨}$ ، س ← ٤

و) $\text{د(س)} = \dfrac{\sqrt{٣\text{س} + ٤} - ٥}{\text{س}^{٢} - ٤٩}$ ، س ← ٧

٥) إذا كان $\text{ق(س)} = \text{س}^{٣} + ٥\text{س}$ ، $\text{هـ(س)} = \begin{cases} ٥\text{س} + ٤ & \text{، س} \le ١ \\ ٨ + \text{س}^{٢} & \text{، س} > ١ \end{cases}$

وكان ل(س) = (ق + هـ) (س) ، فابحث اتصال الاقتران ل عندما س = ١

٦) اعتمادًا على الشكل (١–١٧) الذي يمثل منحنى الاقتران ق، ابحث اتصال الاقتران ق عندما س = ٣



الشكل (١–١٧).

٧) إذا كان كل من الاقترانين: ق ، هـ متصلا عندما س = ٥، وكان هـ (٥) = ٤،

$\underset{\text{س} \leftarrow ٥}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{ق(س)} + \text{س}}{٣\ \text{هـ(س)}} = ١$ ، فجد ق(٥).

٨) إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \frac{\text{١}}{\text{س}} + \frac{\text{س} - \text{٣}}{\text{س}^{\text{٢}} - \text{٣س}}$ ، فما قيم س التي لا يكون عندها الاقتران ق متصلًا؟

٩) يتكون هذا السؤال من خمس فقرات من نوع الاختيار من متعدد، لكل فقرة أربعة بدائل، واحد منها فقط صحيح. ضع دائرة حول رمز البديل الصحيح:

(١) إذا كان م عددًا ثابتًا، وكان $\lim\limits_{\text{س} \to \text{١}} (\text{م س}^{\text{٢}} - \text{٤س} + \text{٥}) = \text{٥}$ ، فإن قيمة م هي:

أ) ١ ب) −١ جـ) ٤ د) −٤

(٢) $\lim\limits_{\text{س} \to -\text{١}} (\text{س}^{\text{٢}} - \text{٤})^{\text{٣}}$ تساوي :

أ) −١٢٥ ب) −٢٧ جـ) ١٢٥ د) ٢٧

(٣) إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \frac{\text{س}^{\text{٢}} - \text{٥س}}{\text{س}^{\text{٢}} - \text{٣س} + \text{٢}}$ ، فإن قيم س التي لا يكون عندها الاقتران ق متصلًا هي:

أ) {٥، ٠} ب) {−٥، ٠} جـ) {١، ٢} د) {−١، −٢}

(٤) إذا كان $\text{هـ}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س} - \text{١} & \text{، س} \le \text{٢} \\ \text{٣} & \text{، س} = \text{٢} \\ \text{س}^{\text{٢}} & \text{، س} > \text{٢} \end{cases}$ ، فإن $\lim\limits_{\text{س} \to \text{٢}} \text{هـ}(\text{س}) =$

أ) ٣ ب) ٤ جـ) ١ د) غير موجودة

(٥) إذا كانت $\lim\limits_{\text{س} \to \text{٢}} (\text{٣ ق}(\text{س})) = \text{٩}$ ، فإن قيمة $\lim\limits_{\text{س} \to \text{٢}} (\text{ق}(\text{س}))^{\text{٢}}$:

أ) ٩ ب) ٨١ جـ) ٢٧ د) ٢

حل أسئلة الوحدة

الوحدة الأولى
النهايات والاقتران

س١) أ) ق(٢) = -١٫٥

ب) نهـا ق(س) = ٢
س ← ١⁻

ج) نهـا ق(س) غير موجودة
س ← ٢

لأن نهـا ق(س) = ٢
س ← ٢⁺

نهـا ق(س) = -٢
س ← ٢⁻

د) قيم س التي يكون عندها الاقتران ق غير متصل هي س = ٢

هـ) نهـا $(\text{ق(س)})^{٢}$ - س + ٢)
س ← ٠

$(\text{نهـا ق(س)})^{٢}$ - ٠ + ٢
س ← ٠

$(\frac{١}{٢})^{٢}$ + ٢ = $\frac{١}{٤}$ + ٢

$\frac{١}{٤}$ + $\frac{٨}{٤}$ = $\frac{٩}{٤}$

س٢) نهـا $(\text{ق(س)})^{٣}$ + ٢ = ٢٩ نجد نهـا ق(س)
س ← ١ س ← ١

$(\text{نهـا ق(س)})^{٣}$ + ٢ = ٢٩
س ← ١
-٢ -٢

$(\text{نهـا ق(س)})^{٣}$ = ٢٧
س ← ١

$\sqrt[٣]{(\text{نهـا ق(س)})^{٣}}$ = $\sqrt[٣]{٢٧}$
س ← ١

$\boxed{\text{نهـا ق(س) = ٣}}$
س ← ١

نهـا هـ(س) = -٣
س ← ١

أ) نهـا (ق(س) + ٢هـ(س) + س) =
س ← ١

نهـا ق(س) + ٢ نهـا هـ(س) + ١
س ← ١ س ← ١

٣ + ٢×-٣ + ١ = ٤-٦
= -٢

ب) نهـا (ق(س) × هـ(س)) =
س ← ١

نهـا ق(س) × نهـا هـ(س)
س ← ١ س ← ١

٣ × -٣ = -٩ .

س٣) ق متصل عند س = ١

نهـا ق(س) = نهـا ق(س) = ق(١)
س ← ١⁺ س ← ١⁻

نهـا ق(س) = ق(١)
س ← ١⁺

١-٤ب - ٦ = ٧

-٥ - ٤ب = ٧ ⇐ $\frac{-٤ب}{-٤}$ = $\frac{١٢}{-٤}$
+٥ +٥

⇐ $\boxed{\text{ب = -٣}}$

نهـا ق(س) = ق(١)
س ← ١⁻

٢أ + -٣ = ٧
+٣ +٣

$\frac{٢أ}{٢}$ = $\frac{١٠}{٢}$

$\boxed{\text{أ = ٥}}$

س٤ أ) $\underset{\text{س} \to -١}{\text{نها}} \left(\sqrt{٣ - \text{س}} + \frac{\text{س} + ١}{\text{س}^٢ + ١} \right)$

$= \sqrt{٣ - -١} + \frac{-١ + ١}{١ + ١}$

$= \sqrt{٤} + \frac{\text{صفر}}{٢} = ٢ + \text{صفر} = ٢$.

ب) $\underset{\text{س} \to ٥}{\text{نها}} \frac{\text{س}^٢ - ٥\text{س}}{٢\text{س} - ١٠} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

$\underset{\text{س} \to ٥}{\text{نها}} \frac{\text{س}^٢ - ٥\text{س}}{٢\text{س} - ١٠} = \underset{\text{س} \to ٥}{\text{نها}} \frac{\text{س} \cancel{(\text{س} - ٥)}}{٢ \cancel{(\text{س} - ٥)}}$

$\underset{\text{س} \to ٥}{\text{نها}} \frac{\text{س}}{٢} = \frac{٥}{٢}$.

ج) $\underset{\text{س} \to ١}{\text{نها}} \frac{\text{س}^٢ - ٢\text{س} + ١}{١٢ - ٣\text{س}} = \frac{١ - ٢ + ١}{١٢ - ٣}$

$= \frac{\text{صفر}}{٩} = \text{صفر}$.

د) $\underset{\text{س} \to ٣}{\text{نها}} \frac{\text{س}^٣ - ٢٧}{\text{س} - ٣} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

$\underset{\text{س} \to ٣}{\text{نها}} \frac{\text{س}^٣ - ٢٧}{\text{س} - ٣} = \underset{\text{س} \to ٣}{\text{نها}} \frac{(\text{س} - ٣)(\text{س}^٢ + ٣\text{س} + ٩)}{\text{س} - ٣}$

$= ٣^٢ + ٣ \times ٣ + ٩$

$= ٩ + ٩ + ٩$

$= ٢٧$

هـ) $\underset{\text{س} \to ٤}{\text{نها}} \frac{\frac{١}{\text{س} - ٢} - \frac{١}{٢}}{٢\text{س} - ٨} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

$\underset{\text{س} \to ٤}{\text{نها}} \frac{\frac{٢}{٢ \times (\text{س} - ٢)} - \frac{\text{س} - ٢}{٢(\text{س} - ٢)}}{٢\text{س} - ٨}$

$\underset{\text{س} \to ٤}{\text{نها}} \frac{\frac{٢ - \text{س} + ٢}{٢(\text{س} - ٢)}}{٢\text{س} - ٨}$

$\underset{\text{س} \to ٤}{\text{نها}} \frac{\frac{\overset{-١}{\cancel{٤ - \text{س}}}}{٢(\text{س} - ٢)}}{\cancel{٢(\text{س} - ٤)}}$

$\underset{\text{س} \to ٤}{\text{نها}} \frac{-١}{٤(\text{س} - ٢)} = \frac{-١}{٤ \times (٤ - ٢)} = \frac{-١}{٨}$

و) $\underset{\text{س} \to ٧}{\text{نها}} \frac{\sqrt{٣\text{س} + ٤} - ٥}{\text{س}^٢ - ٤٩} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

$\underset{\text{س} \to ٧}{\text{نها}} \frac{\sqrt{٣\text{س} + ٤} - ٥}{(\text{س} - ٧)(\text{س} + ٧)} \times \frac{\sqrt{٣\text{س} + ٤} + ٥}{\sqrt{٣\text{س} + ٤} + ٥}$

$\underset{\text{س} \to ٧}{\text{نها}} \frac{٣\text{س} + ٤ - ٢٥}{(\text{س} - ٧)(\text{س} + ٧)(\sqrt{٣\text{س} + ٤} + ٥)}$

$\underset{\text{س} \to ٧}{\text{نها}} \frac{٣\text{س} - ٢١}{(\text{س} - ٧)(\text{س} + ٧)(\sqrt{٣\text{س} + ٤} + ٥)}$

$\underset{\text{س} \to ٧}{\text{نها}} \frac{٣\cancel{(\text{س} - ٧)}}{\cancel{(\text{س} - ٧)}(\text{س} + ٧)(\sqrt{٣\text{س} + ٤} + ٥)}$

$\frac{٣}{(٧ + ٧)(\sqrt{٢٥} + ٥)} = \frac{٣}{١٤ \times ١٠} = \frac{٣}{١٤٠}$

س٥

$$\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^{٣} + ٥\text{س} + ٥\text{س} + ٤ \text{ ، } \text{س} \leq ١ \\ \text{س}^{٣} + ٥\text{س} + ٨ + \text{س}^{٢} \text{ ، } \text{س} > ١ \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \text{س}^{٣} + ١٠\text{س} + ٤ \text{ ، } \text{س} \leq ١ \\ \text{س}^{٣} + \text{س}^{٢} + ٥\text{س} + ٨ \text{ ، } \text{س} > ١ \end{cases}$$

١) $\text{د}(١) = ١ + ١٠ + ٤ = ١٥$

٢) $\lim\limits_{\text{س} \to ١^{-}} \text{د}(\text{س}) = ١٥$

$\lim\limits_{\text{س} \to ١^{+}} \text{د}(\text{س}) = ١ + ١ + ٥ + ٨ = ١٥$

$\lim\limits_{\text{س} \to ١} \text{د}(\text{س}) = ١٥$

٣) $\lim\limits_{\text{س} \to ١} \text{د}(\text{س}) = \text{د}(١)$.

∴ د(س) متصل عند س = ١

س٦ ١) $\text{ن}(٣) = ٤$

٢) $\lim\limits_{\text{س} \to ٣} \text{ن}(\text{س}) = ٢$

٣) $\lim\limits_{\text{س} \to ٣} \text{ن}(\text{س}) \neq \text{ن}(٣)$

∴ ن(س) غير متصل عند س = ٣

س٧ ن متصل عند س = ٥ ⟸

$\lim\limits_{\text{س} \to ٥} \text{ن}(\text{س}) = \text{ن}(٥)$.

هـ متصل عند س = ٥ ⟸

$\lim\limits_{\text{س} \to ٥} \text{هـ}(\text{س}) = \text{هـ}(٥)$.

$$\lim\limits_{\text{س} \to ٥} \frac{\text{ن}(\text{س}) + \text{س}}{٣\,\text{هـ}(\text{س})} = ١$$

$$\frac{\lim\limits_{\text{س} \to ٥} \text{ن}(\text{س}) + \lim\limits_{\text{س} \to ٥} \text{س}}{٣ \lim\limits_{\text{س} \to ٥} \text{هـ}(\text{س})} = ١$$

$$\frac{\text{ن}(٥) + ٥}{٣\,\text{هـ}(٥)} = ١$$

$$\frac{\text{ن}(٥) + ٥}{٣ \times ٤} = ١$$

$$\frac{\text{ن}(٥) + ٥}{١٢} = ١$$

$$\text{ن}(٥) + ٥ = ١٢$$
$$-٥ \qquad -٥$$

$$\boxed{\text{ن}(٥) = ٧}$$

س٨ $\text{د(س)} = \frac{١}{\text{س}} + \frac{\text{س} - ٣}{\text{س}^{٢} - ٣\text{س}}$

نجد أصفار المقام

$\boxed{\text{س} = ٠}$

$\text{س}^{٢} - ٣\text{س} = ٠ \Longleftarrow \text{س}(\text{س} - ٣) = ٠$

$\boxed{\text{س} = ٠}$ ، $\boxed{\text{س} = ٣}$

نقاط عدم الاتصال {٠ ، ٣}

س٩ (١) $\lim\limits_{\text{س} \to ١} (\text{م س}^{٢} - ٤\text{س} + ٥) = ٥$

$\text{م} - ٤ + ٥ = ٥$

$\underset{-١}{\text{م} + ١} = \underset{-١}{٥} \Longleftarrow \boxed{\text{م} = ٤}$ (ج)

(٢) $\lim\limits_{\text{س} \to -١} (\text{س}^{٢} - ٤)^{٣} = \left((-١)^{٢} - ٤\right)^{٣}$

$= (١ - ٤)^{٣} = (-٣)^{٣} = \boxed{-٢٧}$ (ب)

(٣) $\text{د(س)} = \frac{\text{س}^{٢} - ٥\text{س}}{\text{س}^{٢} - ٣\text{س} + ٢}$

نجد أصفار المقام

$\text{س}^{٢} - ٣\text{س} + ٢ = \text{صفر}$

$(\text{س} - ٢)(\text{س} - ١) = \text{صفر}$

س = ٢ ، س = ١

{٢ ، ١} (ج)

(٤) $\lim\limits_{\text{س} \to ٢^{+}} \text{هـ(س)} = ٢^{٢} = ٤$

$\lim\limits_{\text{س} \to ٢^{-}} \text{هـ(س)} = ٢ - ١ = ١$

$\lim\limits_{\text{س} \to ٢} \text{هـ(س)} = $ غير موجودة (د)

(٥) $\lim\limits_{\text{س} \to ٢} (٣\,\text{د(س)}) = ٩$

$\frac{٣}{٣} \lim\limits_{\text{س} \to ٢} \text{د(س)} = \frac{٩}{٣}$

$\lim\limits_{\text{س} \to ٢} \text{د(س)} = ٣$

$\lim\limits_{\text{س} \to ٢} (\text{د(س)})^{٢} = \left(\lim\limits_{\text{س} \to ٢} \text{د(س)}\right)^{٢}$

$= ٣^{٢}$

$= ٩$ (أ)

جمعية المركز الإسلامي الخيرية
مدارس بيت المقدس الثانوية

مدارس بيت المقدس

ورقة عمل رقم (   )

لمادة: الرياضيات

الاسم: .... الصف: ثاني أدبي عنوان الورقة: الاتصال التاريخ: / / ٢٠

النتاج: حل أسئلة متنوعة على الاتصال ونظريات الاتصال:

س١ اذا كان ق(س) = س^٢ - ٩

هـ(س) = { س ، س < ٣
صفر ، س = ٣
-س ، س > ٣

وكان ل(س) = ق(س) × هـ(س) فبين
ان ل(س) متصل عند س = ٣

-٢٠١٧-

س٢ اذا كان هـ(س) = ٤ - س^٢

ل(س) = { ٤س - ٣ ، س < ٣
س^٢ + ١ ، س ≥ ٣

وكان ق(س) = هـ(س) × ل(س) فابحث في
اتصال الاقتران ق(س) عند س = ٣ -٢٠١٥-

س٣ اذا كان ق(س) = { ٢س^٢ + ٤ ، س < -٢
أس + ٦ ، س ≥ -٢

وكان ق متصلاً عند س = -٢
فما قيمة الثابت أ

-٢٠١٥-

س٤ اذا كان ق(س) = (٦ - ٣س) / (س^٢ + ٣س - ١٠) فأجب عما يلي

١) جد قيم (قيم س) التي تجعل ق(س) غير متصل

٢) جد نها ق(س)
س ← ٢
-٢٠١٤-

س٥ اذا كان ق(س) = ٤س^٢ ،

هـ(س) = { س + ٧ ، س ≥ ١
٣س^٢ + ٥ ، س < ١

وكان ل(س) = ق(س) × هـ(س) فابحث في اتصال
ل(س) عند س = ١ -٢٠١٤-

س٦ اذا كان ق(س) = { س^٢ - ١ ، س < ٢
س + ١ ، س ≥ ٢

وكان ل(س) = ٣س + ٥ ، هـ(س) = ق(س) + ل(س)
فابحث في اتصال هـ(س) عند س = ٢ -٢٠١٣-

س٧ اذا كان ق(س) = { س^٣ - ٤ ، س ≥ ٢
أس + ٣ ، س < ٢

وكان ق متصلاً عندما س = ٢
فما قيمة الثابت أ؟ -٢٠١٠-

جمعية المركز الإسلامي الخيرية
مدارس بيت المقدس الثانوية

ورقة عمل رقم (   )

لمادة: الرياضيات

الاسم: .... الصف: ثاني أدبي عنوان الورقة: الاتصال التاريخ: / / ٢٠

النتائج: اجابة الاسئلة الوزارية على الاتصال ونقاط الاتصال

س١ ق(س) = { س(س^٢ - ٩) ، س < ٣
صفر ، س = ٣
-س(س^٢ - ٩) ، س > ٣

١) ق(٣) = صفر

٢) نها$_{س ← ٣^+}$ ق(س) = صفر
نها$_{س ← ٣^-}$ ق(س) = صفر } ⟸ نها$_{س ← ٣}$ ق(س) = صفر

٣) نها$_{س ← ٣}$ ق(س) = ق(٣)

∴ ق(س) متصل عند س = ٣

س٢ هـ(س) = { (٤ - س^٢)(٤س - ٢) ، س < ٣
(٤ - س^٢)(س^٢ + ١) ، س ≥ ٣

١) هـ(٣) = (٤ - ٣^٢)(٣^٢ + ١) = -٥ × ١٠ = -٥٠

٢) نها$_{س ← ٣^+}$ هـ(س) = -٥٠
نها$_{س ← ٣^-}$ هـ(س) = (٤ - ٣^٢)(٤×٣ - ٢)
= -٥ × ١٠ = -٥٠

نها$_{س ← ٣}$ هـ(س) = -٥٠

٣) نها$_{س ← ٣}$ هـ(س) = هـ(٣)

∴ هـ متصل عند س = ٣

س٣ هـ متصل عند س = -٢ ⟸
نها$_{س ← -٢^+}$ هـ(س) = نها$_{س ← -٢^-}$ هـ(س)

نها$_{س ← -٢^+}$ (أس + ٦) = نها$_{س ← -٢^-}$ (٢س^٢ + ٤)

-٢أ + ٦ = -١٦ + ٤

-٢أ + ٦ = -١٢ ⟸ -٢أ = -١٢ - ٦

$\frac{-٢أ}{-٢} = \frac{-١٨}{-٢}$ ⟸ أ = ٩

س٤ س^٢ + ٣س - ١٠ = صفر

١) (س + ٥)(س - ٢) = صفر

س = -٥ / س = ٢ نقاط عدم الاتصال

٢) نها$_{س ← ٢}$ $\frac{٦ - ٣س}{س^٢ + ٣س - ١٠}$ = نها$_{س ← ٢}$ $\frac{٣\cancel{(٢ - س)}^{-١}}{(س - ٢)(س + ٥)}$

نها$_{س ← ٢}$ $\frac{-٣}{س + ٥}$

= $\frac{-٣}{٢ + ٥}$

= $\frac{-٣}{٧}$

تابع حل الأسئلة الوزارية

حـ٥ $ل(س) = \begin{cases} (س+٧)\,٤ك^{٢} &، س \geq ١ \\ (٣س^{٢}+٥)\,٤ك^{٢} &، س < ١ \end{cases}$

١) $ل(١) = (١+٧) \times ٤ = ٨ \times ٤ = ٣٢$

٢) $\underset{س \leftarrow ١^{+}}{نها}\, ل(س) = ٣٢$

$\underset{س \leftarrow ١^{-}}{نها}\, ل(س) = (٣+٥) \times ٤ = ٣٢$ $\Leftarrow \underset{س \leftarrow ١}{نها}\, ل(س) = ٣٢$

٣) $ل(١) = \underset{س \leftarrow ١}{نها}\, ل(س)$

ل(س) متصل عند س = ١

حـ٦ $ه(س) = \begin{cases} س^{٢} - ١ + ٣س + ٥ &، س < ٢ \\ س + ١ + ٣س + ٥ &، س \geq ٢ \end{cases}$

$ه(س) = \begin{cases} س^{٢} + ٣س + ٤ &، س < ٢ \\ ٤س + ٦ &، س \geq ٢ \end{cases}$

١) $ه(٢) = ٤ \times ٢ + ٦ = ٨ + ٦ = ١٤$

٢) $\underset{س \leftarrow ٢^{+}}{نها}\, ه(س) = ١٤$

$\underset{س \leftarrow ٢^{-}}{نها}\, ه(س) = ٢^{٢} + ٣ \times ٢ + ٤ = ١٤$

$\Leftarrow \underset{س \leftarrow ٢}{نها}\, ه(س) = ١٤$

٣) $\underset{س \leftarrow ٢}{نها}\, ه(س) = ه(٢)$.

∴ ه(س) متصل عند س = ٢

حـ٧ ن متصل عند س = ٢ ⇐

$\underset{س \leftarrow ٢^{+}}{نها}\, ن(س) = \underset{س \leftarrow ٢^{-}}{نها}\, ن(س)$

$\underset{س \leftarrow ٢^{+}}{نها}\, (س^{٣} - ٤) = \underset{س \leftarrow ٢^{-}}{نها}\, (أس + ٣)$

$٨ - ٤ = ٢أ + ٣$

$٤ = ٢أ + ٣$

$-٣ \qquad -٣$

$\frac{٢أ}{٢} = \frac{١}{٢} \Leftarrow أ = \frac{١}{٢}$.

بيت المقدس الثانوية

ورقة عمل لمادة الرياضيات

الاسم: .... الصف: ثاني أدبي عنوان الورقة: النهايات والاتصال التاريخ: / / م

①

مراجعة الوحدة الأولى

س١ بالاعتماد على الجدول الآتي الذي يبين قيم ق(س) عندما س ← ٣

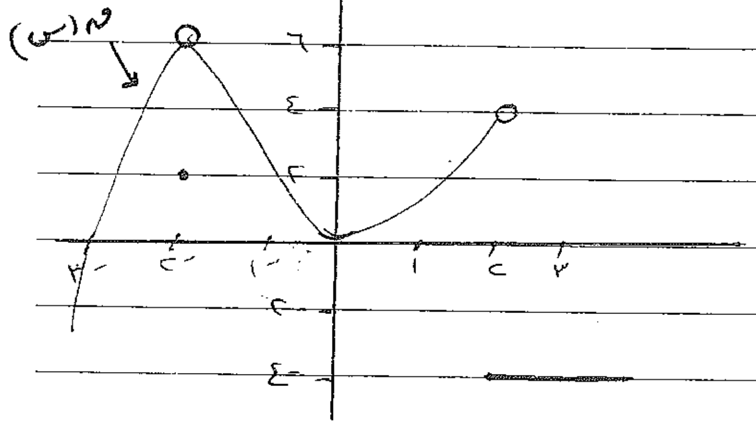
→ ٣ ←

س	٣٫١	٣٫٠١	٣٫٠٠١		٢٫٩٩	٢٫٩٨	٢٫٩
ق(س)	٤٫١	٤٫٠١	٤٫٠٠١		٥٫٩٩	٥٫٩٨	٥٫٩

جـ ١) $\underset{\text{س} \leftarrow ٣^{+}}{\text{نها}}$ ق(س)   ٢) $\underset{\text{س} \leftarrow ٣^{-}}{\text{نها}}$ ق(س)

٣) $\underset{\text{س} \leftarrow ٣}{\text{نها}}$ ق(س)

س٢ بالاعتماد على الشكل التالي الذي يمثل منحنى ق(س)



جد ما يلي:

١) $\underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نها}}$ ق(س)

٢) ق(٢)

٣) $\underset{\text{س} \leftarrow -٢}{\text{نها}}$ ق(س)

٤) ق(-٢)

٥) $\underset{\text{س} \leftarrow ٠^{+}}{\text{نها}}$ ق(س)

٦) $\underset{\text{س} \leftarrow ٠^{-}}{\text{نها}}$ ق(س)

٧) قيم س التي يكون عندها الاقتران ق(س) غير متصل

تابع مراجعة الوحدة الأولى (النهايات والاتصال)

س٣ جد قيمة النهايات التالية:

١) $\underset{س \to ٥}{\text{نها}} \dfrac{س^{٢} - ٢٥}{\sqrt{س + ٤} - ٣}$

٢) $\underset{س \to -١}{\text{نها}} \dfrac{س^{٣} + ١}{س^{٢} - س - ٢}$

٣) $\underset{س \to ١}{\text{نها}} \dfrac{س^{٣} + ٥س^{٢} - ٦س}{س^{٢} - ١}$

٤) $\underset{س \to ٣}{\text{نها}} \dfrac{\dfrac{س}{س + ١} - \dfrac{٣}{٤}}{س - ٣}$

س٤ اذا كانت $\underset{س \to ٢}{\text{نها}} (ق(س) - ٣) = ٢$ ، $\underset{س \to ٢}{\text{نها}} هـ(س) = ٦$ أجب عما يلي:

(١) جد $\underset{س \to ٢}{\text{نها}} \left(س^{٢} ق(س) - ٣ (هـ(س))^{٢} + ٥\right)$

(٢) جد قيمة الثابت م التي تجعل $\underset{س \to ٢}{\text{نها}} \dfrac{ق(س) - م^{٢}}{هـ(س)} = ١$

س٥ جد قيمة النهايات التالية:

(١) $\underset{س \to ١١}{\text{نها}} \sqrt{س - ٧}$

(٢) $\underset{س \to ٦}{\text{نها}} \sqrt[٣]{س - ٧}$

(٣) $\underset{س \to ٤}{\text{نها}} \sqrt[٣]{٢س - ٨}$

(٤) $\underset{س \to -٣}{\text{نها}} \sqrt{٢س + ٦}$

(٥) $\underset{س \to -٥}{\text{نها}} \sqrt{٢٥ - س^{٢}}$

(٦) $\underset{س \to ٩}{\text{نها}} \sqrt{(س - ٩)^{٢}}$

(٧) $\underset{س \to -٥}{\text{نها}} \left(\sqrt[٣]{٣ - س} + \dfrac{س + ٥}{س^{٢} - س}\right)$

(٨) $\underset{س \to -٤}{\text{نها}} \left(١ - ٦س + \dfrac{٢س + ٨}{س + ٣}\right)$

تابع مراجعة الوحدة الأولى (النهايات والاتصال)

س٦ إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} ٢\text{س}^{٣} + ٤ & ، \text{س} < -٢ \\ \text{أ}\text{س} + ٦ & ، \text{س} \geq -٢ \end{cases}$ وكان ق متصلاً عند س = -٢ فما قيمة الثابت أ ؟

س٧ إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^{٣} + ١ & ، \text{س} \geq -١ \\ ٥\text{س} + ٥ & ، \text{س} < -١ \end{cases}$ ابحث في اتصال ق(س) عند س = -١

س٨ $\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{\text{س}^{٤} - ٩}{\text{س} - ٣} & ، \text{س} \neq ٣ \\ ٢\text{س} & ، \text{س} = ٣ \end{cases}$ ابحث في اتصال ق(س) عند س = ٣ .

س٩ $\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \text{أ}\text{س}^{٤} + \text{س} & ، \text{س} \geq ١ \\ ٥\text{أ}\text{س} - ١١ & ، \text{س} < ١ \end{cases}$ جد قيمة أ التي تجعل ق(س) متصل عند س = ١

س١٠ $\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^{٣} + \text{س} & ، \text{س} \geq -٢ \\ -١٠ & ، \text{س} < -٢ \end{cases}$ ، هـ(س) = س + ٤ ادرس اتصال ق × هـ عند س = -٢

س١١ **ملغي** $\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^{٣} & ، \text{س} = -١ \\ ٥\text{س} & ، -١ < \text{س} < ١ \\ \text{س} + ٤ & ، \text{س} = ١ \end{cases}$ ادرس اتصال ق على الفترة [-١ ، ١] .

س١٢ جد نقاط عدم الاتصال للاقترانات التالية :

١) $\text{ق}(\text{س}) = \dfrac{\text{س}^{٢} + ٥\text{س}}{\text{س}^{٢} + ٢\text{س} - ٣}$

٢) $\text{ق}(\text{س}) = \dfrac{٥\text{س}^{٣} - ٤}{٢\text{س} - ٨}$.