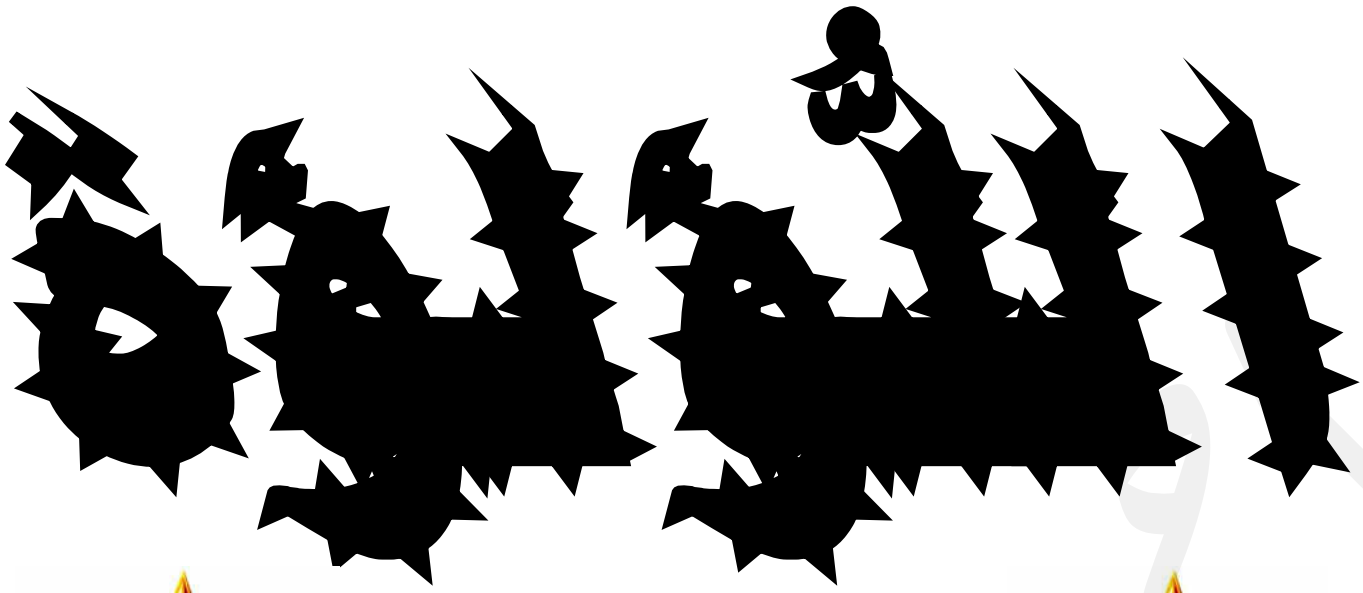


الرياضيات ٠٤

الفرع الأدبي

أحمد الرّامِيني

Ahmad Ramini

٠٧٩٦٩٧٠١٠٦

الوحدة الأولى

الشكل والمساحة

التكامل غير المحدود

مفهوم التكامل غير المحدود

تعلمنا في الفصل الاول "المستوى الثالث" في وحدة التفاضل بالتحديد أنه إذا كان
ق (س) = س^{٤} + س^{٣} فـــــــــــــــــأن
قَ (س) = ٤ س^{٣} +٣ س^{٢} أما في هذا الدرس فأننا سوف نأخذ العملية العكسية وهي إيجاد الاقتران ق(س) أذا علمنا المشتقة قَ(س) و تسمى هذه العمليه بالتكامل
فمثلاً : تكامل ٤ س^{٣} +٣ س^{٢} يعني إيجاد الاقتران ق (س) الذي مشتقة تساوي ٤ س^{٣} +٣ س^{٢} وتكتب عل شكل

$\int$(٤ س^{٣} +٣ س^{٢}) ٠ د س

ويقرأ الرمز $\int$ بـــ التكامل

فيكون $\int$(٤ س^{٣} +٣ س^{٢}) ٠ د س
= س^{٤} + س^{٣} + جـ حيث جـ ثابت

مثال

جد أ) $\int$ ٤ س^{٣} ٠ د س
ب) $\int$ ٦ س ٠ د س

الحل

أ) $\int$ ٤ س^{٣} ٠ د س = س^{٤} + جـ

المطلوب إيجاد الاقتران الذي مشتقته هي ٤ س^{٣}

ب) $\int$ ٦ س ٠ د س = ٣ س^{٢} + جـ

مثال

جد $\int$ ١٢ س ٠ د س

الحل :

١٢س ٠ د س = ٦ س^{٢} + جـ

للتأكد نرجع نشتق النتيجة

٦ س^{٢} بعد الاشتقاق = ١٢ س = الاقتران الأصلي

قواعد التكامل غير المحدود

القاعده الاولى

$\int$ أ ٠ د س = أ س + جـ حيث أ ثابت

١ جد ناتج ما يلي :

$\int$ ٥ ٠ د س = ٥س + جـ

$\int$ ٢ ٠ د س =

$\int$ ـ ٣ ٠ د س =

$\int \frac{٣}{٤}$ ٠ د س =

القاعده الثانيه

$\int$ س^{ن} ٠ د س = $\frac{\text{س}^{ن+١}}{ن+١}$ + جـ

٢ $\int$ س^{٤} ٠ د س = $\frac{\text{س}^{٥}}{٥}$ + جـ

$\int$ هـ$^{-٤}$ ٠ د هـ =

$\int$ ص^{٣} ٠ د ص =

القاعده الثالثه

$\int$ أ ٠ ق(س) ٠ د س = أ $\int$ ق(س) ٠ د س
حيث أ ثابت

٣ $\int$ ٦ س^{٥} ٠ د س = $\frac{٦\text{س}^{٦}}{٦}$ +جـ = س^{٦} + جـ

$\int$ ١٢ ع^{٣} ٠ د ع =

$\int$ ٣ س^{٢} ٠ د س =

قاعده

$\int (أس+ب)^{ن} \cdot دس = \frac{(أس+ب)^{ن+1}}{(ن+1) \times أ} + جـ$

٤ جد ناتج التكاملات التاليه

أ. $\int (٢س - ٣)^{٤} \cdot دس$

ب. $\int ٦ (س+٨)^{٥} \cdot دس$

ت. $\int -١٥ (٢-٣س)^{٤} \cdot دس$

القاعده الرابعه

$\int (ق(س) \pm هـ (س)) \cdot دس$

$= \int ق(س) \cdot دس \pm \int هـ(س) \cdot دس$

اي ان التكامل يوزع على الجمع و الطرح

٥ جد التكاملات التالية

أ) $\int ٥س^{٤} + ٦س^{٢} \cdot دس$

ب) $\int ٢س + ٣س^{٢} \cdot دس$

القاعده الخامسه

إذا كان ق(س) = لـو | س | فان

$\int \frac{١}{س} \cdot دس = لـو | س | + جـ$

واذا كان ق(س) = $هـ^{س}$ فان

$\int هـ^{س} \cdot دس = هـ^{س} + جـ$

أو بتعبير أخر

$\int \frac{قَ(س)}{ق(س)} = لـو | ق(س) | + جـ$

٦ جد التكاملات التالية:

أ) $\int هـ^{س} + \frac{٥}{} \cdot دس$

الحل: $هـ^{س} + ٥$ لـوس $+جـ$

ب) $\int (\frac{١}{س} + ٣ هـ^{س}) \cdot د س$

ج) $\int \frac{٢}{٣ س} \cdot د س$

د) $\int \frac{-٥}{٧ س} \cdot د س$

القاعده السادسه

$\int هـ^{أس} \cdot دس = \frac{هـ^{أس}}{أ} + جـ$

٧

جد أ) $\int هـ^{٣س} \cdot د س$

ب) $\int ٥ هـ^{٢س+١} \cdot د س$

ج) $\int ٣ هـ^{٢-س} \cdot د س$

القاعده السابعه

التكاملات الدائريه

$\int جا س \cdot د س = - جتا س + جـ$

$\int جتا س \cdot د س = جا س + جـ$

$\int قا^{٢}س \cdot د س = ظا س + جـ$

لكن اذا كانت الزاويه عباره عن أس فيكون كالتالي

$\int جا أس \cdot د س = - \frac{(جتا أس)}{أ} + جـ$

$\int جتا أس \cdot د س = \frac{(جا أس)}{أ} + جـ$

$\int قا^{٢}أس \cdot د س = \frac{(ظا أس)}{أ} + جـ$

٨ جد التكاملات التالية :

أ) $\int$ (٣س^{٢} + ٥جاس) ٠ د س

الحل : = س^{٣} - ٥ جتا س + جـ

ب) $\int$ (جتاس + قا^{٢}س) ٠ د س

ج) $\int$ (٣قا^{٢}س + ٢جاس) ٠ د س

د) $\int$ (جا٣س + جتا٢س) ٠ د س

هـ) $\int$ (جا^{٢}س + $\frac{٢}{س}$) ٠ د س

و) $\int$ (٢هـ^{٥س} + ٤جتا٣س) ٠ د س

تذكر انه نرفض عملية الضرب والقسمة داخل عملية التكامل لذلك نلجأ إلى تجهيزه باستخدام الاختصارات

تذكر أن

قاس × جتاس = ١

قا^{٢}س × جتا^{٢}س = ١

ظاس = $\frac{\text{جا س}}{\text{جتا س}}$

ظتا س = $\frac{١}{\text{ظاس}}$ = $\frac{\text{جتا س}}{\text{جاس}}$

٩ جد ما يلي:

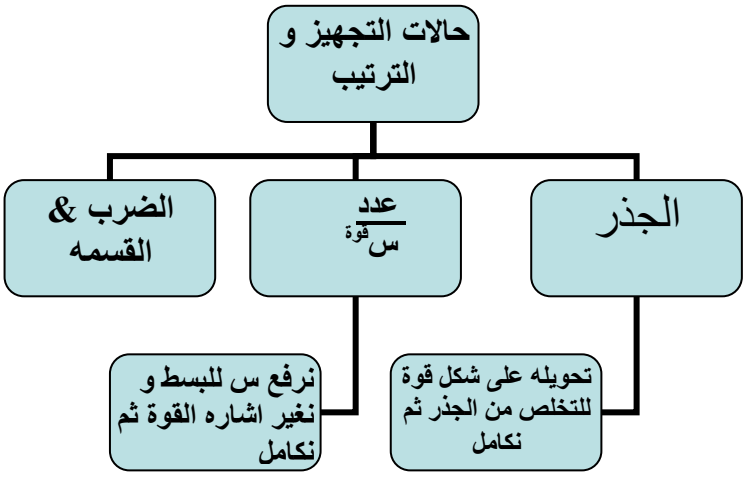
أ) $\int \frac{٣}{\text{جتا}^{٢}\text{س}}$ ٠ د س =

ب) $\int$ جتاس ظاس ٠ د س =

ج) $\int \frac{٣}{\text{قاس}} + ٤\text{جاس}$ ٠ د س

د) $\int$ (٥قاس جتاس) ٠ د س =

هـ) $\int \frac{\text{ظاس}}{\text{قاس}}$ ٠ د س =



جد ناتج التكاملات التاليه

أ) $\int \sqrt[٣]{\text{س}}$ ٠ د س =

الحل: $\int$ س$^{١/٣}$. دس

= $\frac{٣}{٤}$ س$^{٤/٣}$ + جـ

ب) $\int \sqrt{\text{س}}$ ٠ د س =

ج) $\int \frac{٢}{\text{س}^{٣}}$ ٠ د س =

د) $\int \frac{١}{\text{س}^{٢}}$ ٠ د س =

هـ) $\int \sqrt[٥]{\text{س}^{-٣}}$ ٠ د س =

مراجعة سريعة للوحده الاولى من المستوى الثالث

الميل = قَ(س) ⎰ الميل = ق(س)

السرعة = مشتقة المسافة ⎰ السرعة = المسافة

التسارع = مشتقة السرعة ⎰ التسارع = السرعة

كلمه ابتدائي === الزمن = صفر
المسافه الابتدائيه = الموقع الابتدائي = ف (٠)
السرعه الابتدائيه = ع (٠)
التسارع الابتدائي = ت (٠)

اذا كانت قَ(س) = ٦س^{٢}+ ٤ س وكانت ق(١) = ٧ فجد ق(س) ؟

إذا كانت قَ(س) = ٦س^{٢}+ ٤ س فجد ق(-١) اذا علمت ان ق (٠)= ٣ ؟

الحل:

إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران ق(س) عند النقطة (س،ص) يساوي ٣س^{٢}+ ٥ و كان ق يمر بالنقطة (-٢،١) فجد قاعدة الاقتران ق(س)؟

ميل المماس = قَ(س) = ٣س^{٢}+ ٥

ق(س) = ⎰ (٣س^{٢}+ ٥) ٠ د س

= س^{٣}+ ٥س+ جـ

نحاول الاستفادة من النقطة (-٢،١) لإيجاد قيمة الثابت جـ

ق(-١) = ٢ = (-١)^{٣}+ (٥)×-١+ جـ

= - ١- ٥+ جـ = ٢

جـ = ٨

∴ ق(س) = س^{٣}+ ٥س+ ٨

اذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران ق(س) عند النقطة (س،ص) يساوي (٤س^{٣}+٦س^{٢}- ٣) فجد قاعدة الاقتران ق علماً بان منحنى الاقتران يمر بالنقطة (٢،٠)؟

يتحرك جسم بحيث أن سرعته ع = ٢ن+ ٥ جد المسافة المقطوعة بعد مرور ٤ثواني علماً بان ف(٠) = ٣ ؟

يتحرك جسم بحيث ان تسارعه ت = ٤ن+ ٣ جد سرعة الجسم بعد ٥ ثواني علماً بان ع(٠) = ٢ ؟

ع = ⎰ ت ٠ د ن

= ⎰ (٤ن+ ٣) ٠ د ن

= ٤ن^{٢}+ ٣ن+ جـ

= ٢ن^{٢}+ ٣ن+ جـ

ع(٠) = ٢

٢(٠)^{٢}+ ٣(٠) + جـ = ٢

← جـ = ٢

ع = ٢ن^{٢}+ ٣ن+٢

ع(٥) = ٢(٥)^{٢}+ ٣(٥)+ ٢ = ٦٧

يتحرك جسم بحيث أن تسارعه ت = ٦ن+ ٤ جد المسافة المقطوعة بعد مرور ٣ ثواني علماً بان ع(٠) =٤، ف(٠) = ٥ ؟

اذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران ق عند النقطة (س،ص) يساوي (٤س – ٢) ^{٣} فجد قاعدة الاقتران ق علما بأنه يمر بالنقطة (١ ، ٨) ؟

اذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران ق(س) عند النقطه (س,ص) يساوي (٤ س^{٣} – ٦س) فاكتب قاعده الاقتران ق علما بانه يمر بالنقطه (٢،٥)؟

يتحرك جسم على خط مستقيم بحيث ان سرعته بعد ن ثانية تعطى بالعلاقة ع(ن)=٣(ن+١)^{٢} م/ث جد المسافة المقطوعة التي يقطعها الجسم بعد مرور ثانيتين من بدء الحركة علماً بأن موقعه الابتدائي ف(٠) = ١م ؟

يتحرك جسيم على خط مستقيم بحيث ان سرعته بعد (ن) ثانيه تعطى بالعلاقه ع(ن) = ٦ (ن+٢)^{٢} م/ث , جد المسافه التي يقطعها الجسيم بعد مرور ثانيتين من بدء حركته . علما بان موقعه الابتدائي ف(٠) = ٥ م ؟

اذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران ق(س) عند النقطه (س,ص) يساوي (هـ$^{٣-س}$) و كان المنحنى يمر بالنقطه (٣ ,١) فجد قاعده الاقتران ق؟

اذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران ق(س) عند النقطه (س,ص) يساوي (٢- $\frac{١}{س^{٢}}$) وكان المنحنى يمر يمر بالنقطه ($\frac{١}{٢}$, ١) فجد قاعده الاقتران ؟

اذا كان تسارع جسيم بعد مرور (ن) من الثواني يعطى بالعلاقه ت(ن) = ٦ن م/ث^{٢} , جد المسافه التي يقطعها الجسيم بعد مرور (ن) ثانيه من بدء الحركه علما بان السرهخ الابتدائيه للجسيم ع(٠) = ٢ م/ث , و موقعه الابتدائي ف(٠) = ١٢ م .

اذا كانت سرعة جسم ع = ١٢(٢ن + ١)^{٥} وكانت المسافه الابتدائيه = ٨م فجد المسافة المقطوعة بعد مرور ثانية واحدة ؟

التكامل المحدود

في حالة التكامل غير المحدود

$\int$ ق(س) ٠ د س = ق(س) + جـ

أما في التكامل المحدود للاقتران ق في الفترة [أ ، ب] يكون على صيغة

$\int_{أ}^{ب}$ ق(س) ٠ د س = ق(ب)– ق(أ) .

و هو لا يعتمد على الثابت جـ

قاعدة

$\int_{أ}^{ب}$ ك ٠ د س = ك× (ب– أ) حيث ك ثابت

جد $\int_{١}^{٤}$ ق(س) ٠ د س

إذا علمت أن ق(١) = ٢ ، ق(٤) = ٧ ؟

الحل :

$$\int_{١}^{٤} ق(س) ٠ د س = [ق(س)]_{١}^{٤}$$

$$= ق(٤) – ق(١)$$
$$= ٧ – ٢$$
$$= ٥$$

اذا كان ق(أ)= –٢وكان $\int_{أ}^{ب}$ ق(س) ٠ د س = ٧

فجد ق(ب) ؟

جد التكاملات التالية:

أ- $\int_{١}^{٦}$ ٤٠ د س **ب-** $\int_{-١}^{٨}$ ٨ ٠ د س

جـ- $\int_{٧}^{٥}$ ٦٠ د س

اذا كان $\int_{١}^{٥}$ ع ٠ د س = ١٥ **فجد الثابت ع؟**

إذا كان $\int_{-٢}^{ب}$ ٥٠ دس = ٤٠ **فجد ب؟**

اذا كان $\int_{أ}^{٨}$ ٤٠ د س = ١٢ **فجد أ ؟**

اذا كان $\int_{١}^{ب}$ ٣س^{٢}٠ د س = ٢٦ **فجد قيمه ب ؟**

قاعدة

$$\int_{أ}^{ب} س^{ن} \cdot د\,س = \left[\frac{س^{ن+1}}{ن+1} \right]_{أ}^{ب} = \frac{ب^{ن+1}}{ن+1} - \frac{أ^{ن+1}}{ن+1}$$

جد التكاملات التالية:

أ) $\int_{1}^{3} ٢س \cdot د\,س$

ب) $\int_{-1}^{1} ٣س^{٢} \cdot دس$

ج) $\int_{2}^{5} \frac{٢}{س^{٢}} \cdot دس$

د) $\int_{0}^{1} \sqrt[3]{س} \cdot دس$

جد التكاملات التالية

(١) $\int_{0}^{3} هـ^{س} \cdot دس$

(٢) $\int_{2}^{3} \frac{١}{س} \cdot دس$

(٣) $\int_{1}^{2} ٥ هـ^{س} \cdot دس$

(٤) $\int_{0}^{5} \frac{٤}{س} \cdot دس$

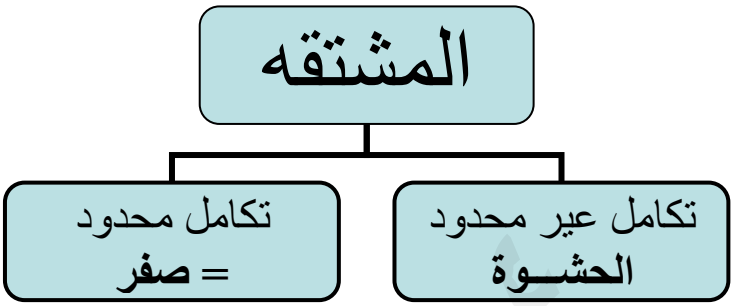
(٥) $\int_{0}^{3} ٦ هـ^{٢س+١} \cdot دس$

٢٠١٤ شتوي جد $\int_{0}^{1} \sqrt{س} + ٣س^{٢} .دس$ ٣ علامات

١٠

إذا كان ق(٠) = ٢ ق(٣) = ٩ فجد $\int_{0}^{3} ق'(س).دس$

المشتقه



إذا كان $\int$ قَ(س) · دس = $س^{\frac{2}{3}}$ + جـ فجد $\int_{-1}^{8}$ قَ(س) · دس

اذا كان $\int$ قَ(س) · د س = ٣$س^{٢}$ − ٥س + ٢ فجد قَ(١) ؟

صيفي ٢٠١١

اذا كان ق(س) = $\int$ (٤ $س^{٣}$ +٢س) . دس

فان قَ(١) يساوي

٢٠١٥ صيفى ٤علامات

اذا كان $\int$ قَ(س) · د س = هـ$^{١-س^{٢}}$ + ٤ هـ , و كان قَ(أ) = -٢ أ , أ ≠ صفر , فجد قيمه (قيم) الثابت أ ؟

٢٠١٤ شتوي ٤علامات

اذا كان جـ عددا ثابتا و كان ق(جـ) = ١٢ , ق(٠) = ٨

$\int_{٠}^{جـ}$ (قَ(س) − هـ^{س}) .دس = ٠ جد قيمه الثابت هـ^{جـ}؟

$\int$ قَ(س) · د س = ق(س) + جـ

إذا كان ص= $\int$(جاس + ٣جتاس) · د س فجد $\frac{د ص}{د س}$ ؟

اذا كان ص = $\int \frac{س^{٢}}{س+٢}$ · د س فجد قَ(س) ؟

اذا كان ق(س) = ٣$س^{٢}$ + ٦س دس − $\int_{٢}^{٥} \frac{٥س+٤س^{٢}}{١٣س+٥}$ دس

فجد $\int$ قَ (١) ؟

اذا كان $\int$ قَ(س) · د س = ٣$س^{٢}$ − ٥س + ٢ فجد ق(٢) ؟

خواص التكامل المحدود

الخاصيه الاولى

$$\int_{أ}^{أ} ق(س)\cdot د س = \text{صفر}$$

اي ان التكامل من النقطه الى نفسها يساوي صفر

١ جد التكاملات التالية

أ) $\int_{٢}^{٣} (٦س + \frac{٩}{س^{٣}})\, دس$

ب) $\int_{١}^{١} \frac{س^{٤} + ١}{٢س^{٣} + ٦}\, دس$

الخاصيه الثانيه

$$\int_{أ}^{ب} ق(س)\, دس = -\int_{ب}^{أ} ق(س)\, دس$$

اي انه عند قلب حدود التكامل فاننا نقلب اشاره التكامل فقط

٢ اذا كان $\int_{١٧}^{٣} ق(س)\, دس = ١٧$ فان $\int_{٣}^{١} ق(س) = -$

الخاصيه الثالثه

$$\int_{ب}^{أ} ج\, ق(س)\, دس = ج \int_{ب}^{أ} ق(س)\, دس$$

٣ اذا كان $\int_{٢}^{٦} ق(س)\, دس = ١٢$ فجد ما يلي

١) $\int_{٢}^{٦} ٣ق(س)\, دس$

الحل : $= ٣ \times ١٢ = ٣٦$

(٢) $\int_{٢}^{٦} \frac{١}{٢} ق(س)\, دس$

(٣) $\int_{٢}^{٦} -٢ق(س)\, دس$

٤ جد التكاملات التالية

١) $\int_{-١}^{٢} ٦ س^{٢}\, دس$

٢) $\int_{١}^{٩} \frac{٧}{\sqrt{س}}\, دس$ ٣) $\int_{٢}^{٤} \frac{٨}{س^{٢}}\, دس$

الخاصيه الرابعه

$$\int_{أ}^{ب} (ق(س) \pm هـ(س)) \, د س$$

$$= \int_{أ}^{ب} ق(س) \, د س \pm \int_{أ}^{ب} هـ(س) \, د س$$

أي أن التكامل يوزع في حالة الجمع و الطرح **فقط**

٥

إذا كان $\int_{-١}^{٢} ق(س) \, د س = ٥$ ،

$\int_{-١}^{٢} هـ(س) \, د س = ٣$ فجد ما يلي :

(١) $\int_{-١}^{٢} ٦ق(س) \, د س$

(٢) $\int_{-١}^{٢} ٤هـ(س) - ق(س) \, د س$

(٣) $\int_{٢}^{-١} ٣هـ(س)+٢س \, د س$

وزاره ٢٠٠٧

اذا علمت ان $\int_{٣}^{٣} ق(س) \, د س = -٤$

فان $\int_{١}^{٣} ٦ - ق(س) \, د س = ؟$

٦

اذا كان $\int_{١}^{أ} (٢س+ ٧) \, د س = ٥٢$ فجد قيمة أ ؟

٧

اذا كان $\int_{١}^{جـ} س^{٢} \, د س = \frac{٧}{٣}$ فجد قيمة جـ ؟

وزاره ٢٠٠٦

اذا علمت ان $\int_{٢}^{أ} ق(س) \, دس = -٣$ فان

$\int_{٠}^{٢} ق(س) + ٥ \, دس =$

الخاصيه الخامسه (خاصيه الاضافه)

$\int_{أ}^{ب} ق(س)\,د\,س = \int_{أ}^{جـ} ق(س)\,د\,س + \int_{جـ}^{ب} ق(س)\,د\,س$

٨ $\int_{١}^{٣} ق(س)\,د\,س = ٥$ ، $\int_{٣}^{٧} ق(س)\,د\,س = ٩$

فجد $\int_{١}^{٧} ق(س)\,د\,س$؟

٩ اذا كان $\int_{-٢}^{١} ق(س)\,د\,س = ٩$ ، $\int_{-٢}^{٢} ٣ق(س)\,د\,س = ١٨$

فجد $\int_{١}^{٢} ق(س)\,د\,س$؟

وزاره ٢٠٠٣

اذا علمت ان $\int_{١}^{٢} ق(س)\,د\,س = ٤$ $\int_{٢}^{٥} ق(س)\,د\,س = ٣$ فان

$\int_{١}^{٥} ق(س) + ٢\,د\,س$ يساوي ؟

وزاره ٢٠٠٤

إذا

اذا علمت ان $\int_{٢}^{٩} ق(س)\,د\,س = ٨$، $\int_{٢}^{٩} ق(س)\,د\,س = ١٩$

فان $\int_{٥}^{٩} ق(س)\,د\,س$=؟

١٠

اذا كان $ق(س) = \begin{cases} ٣س^{٢} & ، ١ \leq س < ٣ \\ ٢س + ٥ & ، ٣ \leq س < ٥ \end{cases}$

جد $\int_{١}^{٥} ق(س)\,.\,د\,س$ ؟

وزاره ٢٠١١

اذا كان $\int_{0}^{2} \frac{ق(س)}{2}$ **دس = ٦ , فجد قيمه**

$\int_{0}^{2} (٣ س^{٢} + ٣ق(س)) د س$ **؟**

صيفى ٢٠١٤ **اذا كان** $\int_{3}^{5} (ق(س) - ١)$ **.دس=٦**

٥ علامات

$\int_{3}^{8} ق(س)$ **.دس = ١٠ , فجد** $\int_{3}^{8} (ق(س)+٢س)$ **.دس**

وزاره ٢٠١١

اذا كان

$\int_{2}^{1} ق(س) د س = ٥$ ، $\int_{2}^{3} ٣ق(س) د س = ٩$

فجد $\int_{1}^{3} ق(س) د س$**؟**

١١

اذاكان ق(س) = $\begin{cases} س^{٣} - ٤ & , ٠ \leq س \leq ٢ \\ ٢س & , ٢ < س \leq ٤ \end{cases}$

فاوجد $\int_{1}^{3} ق(س) د س$ **؟**

شتوي ٢٠١٤ **اذا كان** $\int_{-1}^{6} (٣ق(س) - ٢)$ **.دس=١٠**

٤ علامات

$\int_{2}^{6} ق(س)$ **.دس = ١٤ , فجد** $\int_{-1}^{2} ق(س)$ **.دس**

صيفي ٢٠١٥

٤ علامات

اذا كان $\int_{١}^{٥} ٤\ ق(س)دس = ٨$, $\int_{٥}^{٧} ق(س)\ دس = -٩$, فجد

$\int_{١}^{٥} (\frac{٣}{٢} ق(س) - ٣\ س^{٢})\ دس$ ؟

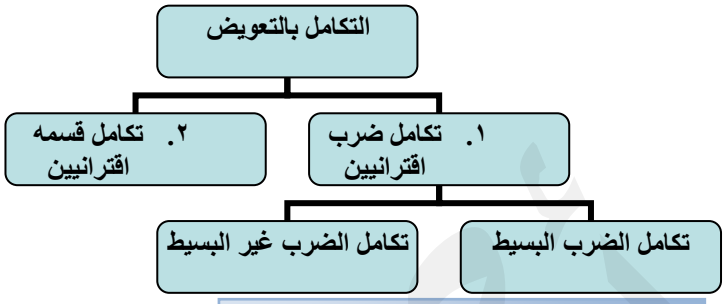
شتوى ٢٠١٥

٤ علامات

اذا كان $ق(س) = \begin{cases} س^{٢} + ١ & , -١ \leq س < ٣ \\ ٤\ س - ٢ & , ٣ \leq س < ٤ \end{cases}$

فجد $\int_{٤}^{-١} ق(س)\ دس$

التكامل بالتعويض



١ـ ١ تكامل الضرب البسيط البسيط

في هذا النوع يمكن إجراء عملية الضرب (أي يمكن فك الأقواس أن وجدت)

جد ناتج كل مما يلي :

ضرب بسيط يمكن اجرائه

١) $\int$ (س+٢)(س) د س

٢) $\int$ (٤س+٣)(س−٢) د س

مفكوك الاقواس

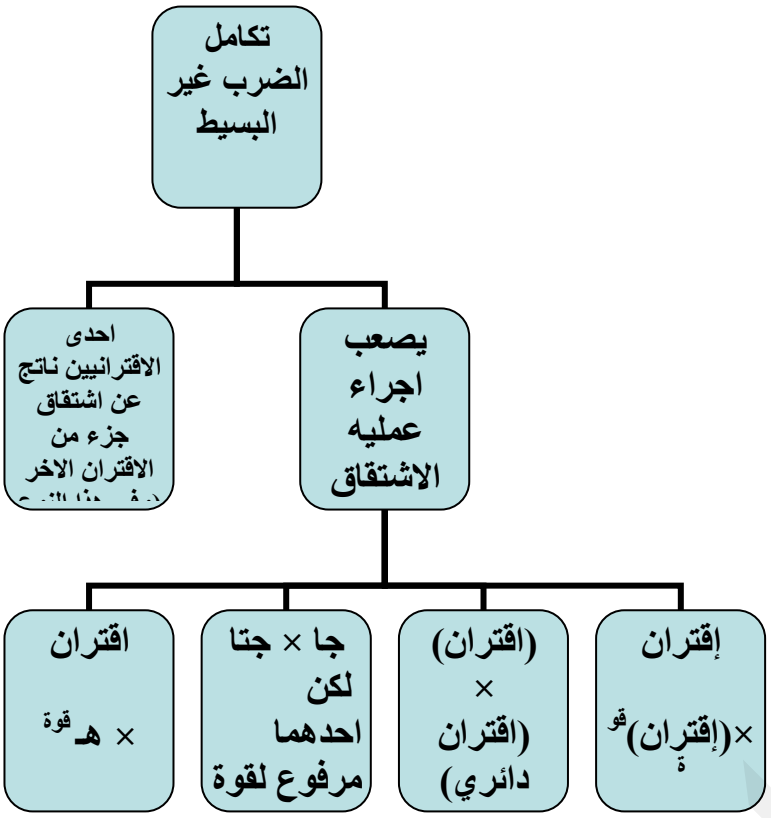
٣) $\int$ (س^{٢} − ٣)^{٢} د س

٤) $\int \frac{٢}{س^{٣}}$ (س^{٣} + س) د س

وزاره ٢٠٠٩

جد $\int$ س^{٢} (٨س+ ٣) د س

٢ـ١ تكامل الضرب غير البسيط



الحاله الاولى : (إقتران)×(إقتران)^{قوة}

طريقة حله: نفرض(ص) ما بداخل القوة

جد ناتج التكاملات التاليه :

١) $\int$ ٣س^{٢}(س^{٣}+ ٤)^{٥} د س

ص = س^{٣} + ٥
$\frac{دص}{دس}$ = ٣س^{٢}
دس = $\frac{دص}{٣س^{٢}}$

الحل: $\int$ ٣س^{٢}(ص)^{٥} $\frac{د ص}{٣س^{٢}}$

$\int$ ص^{٥} دص = $\frac{ص^{٦}}{٦}$ + جـ = $\frac{(س^{٣}+٥)^{٦}}{٦}$ + جـ

٢) $\int$ (٣س^{٢}+ ٥) (س^{٣}+ ٥س+ ٧)^{٨} د س

٣ $\int (٢س + ٧)(س^{٢} + ٧س + ٥)^{\frac{١}{٣}}$ د س

٤ $\int (س+٣)(\sqrt[٣]{س^{٢}+٦س-٤})$ د س

٥ جد $\int_{-٢}^{٢} س^{٢}(س^{٣}-٥)^{٢}$ د س

٦ جد $\int_{-٢}^{١} (٣س^{٢}-٢)(س^{٣}-٢س+١)^{٤}$ د س

٧ $\int_{٠}^{١} س(س^{٢}+١)^{٣}$ د س

٢٠١٣ صيفي $\int_{٠}^{٢} س\sqrt{س^{٢}+١}$.دس

الحاله الثانيه : جا × جتا
(لكن احدهما مرفوع لقوة)

طريقة حله: نفرض(ص) ما تحت القوه

٨

جد التكاملات التالية

A ∫ جا س جتا^{٣} س د س

B ∫ جا^{٤}س جتا س د س

الحاله الثالثه: (إقتران)×(إقتران دائري)

طريقة حله: نفرض(ص) = الزاويه

٩

جد التكاملات التالية

A ∫ جـا (٢س + ١) .دس

.....

B. ∫ ٣ جتا (٢+٥س) . دس

.....

C. ∫ ٧ قـا^{٢} (٤س-٣).دس

.....

D ∫ س^{٢} جتا س^{٣} د س

E ∫ ٥ س قا^{٢} (س^{٢}+٣) , د س

F ∫(س^{٢}+١) جتا(س^{٣}+٣س+١) د س

وزاره ٢٠٠٨

$\int$ س جا (س^{٢}−٣) د س

وزاره ٢٠١٤

٥ علامات

$\int$س^{٢} جا (س^{٣}-١) .دس

١٠ $\int$(س+١) قا^{٢} (س^{٢}+٢س+١) د س

الحاله الرابعه: اقتران × هـ$^{\text{قوة}}$

طريقة حله: نفرض(ص) = القوه

١١ **جد التكاملات التاليه:**

(١) $\int$هـ^{٢س} .دس

(٢) $\int$٥ هـ^{٢س} .دس

(٣) $\int$٤ س × هـ$^{س^{٢}}$ د س

وزاره ٢٠٠٩ جد ناتج $\int$س^{٢} (٨س+٣)دس

(٤) $\int$(س+٢)(هـ$^{س^{٢}+٤س}$) د س

(٥) $\int_{1}^{3} ٦ س هـ^{(س^{٢}-١)}$ د س

(٦) $\int_{0}^{١} س هـ^{س^{٢}}$ د س

(٧) $\int_{0}^{٢} جا س هـ^{جتا س}$ د س

١٢

إذا كان ق(٠) = ٢ ق(٣) = ٩ فجد $\int_{0}^{3} قَ(س)$.دس

وزاره ٢٠١١

اذا كان ق(٢) = ٥ , ق(١) = ٢ فان قيمه

$\int_{0}^{١} قَ (س+١)$ د س ؟

١٣

اذا كان ق(١) = ٢ ، ق(٥) = ٦ جد

$\int_{0}^{٢} ٦س قَ(س^{٢}+ ١)$ دس

٢٠١٥ صيفى

اذا كان ق(٨) = ١٤ , ق(-١) = -٥ , فجد قيمه
$\int_{-1}^{2}$ ٣س^{٢} ق (س^{٢}) دس

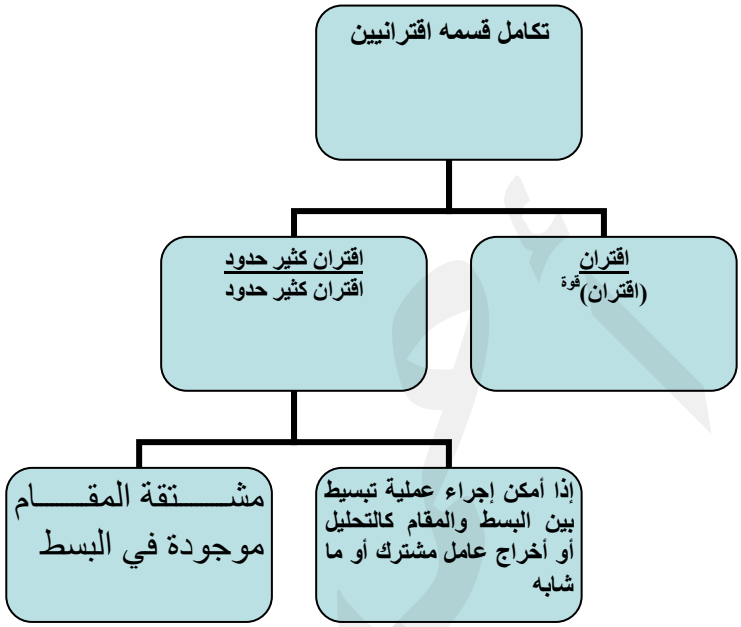
٢٠١٥ شتوي

جد $\int_{0}^{1}$ س^{٢} (س^{٣} – ١) ^{٢} دس

٢٠١٤ شتوي

$\int$ س^{٢} جـا (س^{٣} – ١) دس

٢ – تكامل قسمه اقترانيين



الحاله الاولى : اقتران (اقتران)

اذا المقام حد واحد :
نرفعه للبسط و نغير اشاره القوة ثم يصبح ضرب بسيط نجري عمليه الضرب ثم نكامل

جد ناتج عملية التكاملات التالية :

١٤

(١) $\int \frac{س^{-٢}+٣}{س^{٥}}$ د س

(٢) $\int \frac{٧ س - س^{-٢}+٥}{س^{٢}}$ د س

(٣) $\int \frac{٢س^{-٣}+ ٤س^{-٢}}{س^{٧}}$ دس

(٤) $\int \frac{س^{-٢}+٧س}{\sqrt[٣]{س}}$ د س

اذا المقام له قوة :
نرفعه للبسط و نغير اشاره القوة ثم يصبح تكامل بالتعويض

(٥) $\int \frac{١٠ س - ٥}{(س^{٢} - س + ٥)^{٣}}$ د س

(٦) $\int \frac{٧}{\sqrt{٣س + ٦}}$ د س

(٧) $\int \frac{-٣}{(٦س - ١)^{٤}}$ د س

الحاله الثانيه : اقتران كثير حدود
اقتران كثير حدود
(لكن مشتقة المقام موجودة في البسط)

طريقة حله: نفرض ص = المقام

اذا كان على شكل مشتقه / اقتران
نفرض (ص) المقام و اجباري الجواب لوغاريتم

وزاره ٢٠٠٣

$\int \frac{١ - س}{(س^{٢} - ٢س + ٨)^{٣}}$ د س

١٥

جد التكامل التالي :

$\int_{٠}^{١} \frac{١ - ٢س}{\sqrt{س^{٢} - س + ٤}}$ دس

١٦

جد التكاملات التالية :

١- $\int \frac{س^{٢}}{س^{٣} + ٦}$ د س

٢- $\int \frac{٣}{٥س + ٢}$ د س

٣- $\int \frac{س + ٢}{س^{٢} + ٦س + ٢}$ د س

٤- $\int_{٠}^{٢} \frac{٥}{٢س + ١}$ دس

٥- $\int_{-1}^{1} \frac{٢س}{٣س^{٢}+١}$ د س

٦- $\int \frac{٤}{س^{٢}+٢س+١}$.دس

الحاله الثانيه : اقتران كثير حدود / اقتران كثير حدود

طريقة حله: إذا أمكن إجراء عملية تبسيط بين البسط والمقام كالتحليل أو أخراج عامل مشترك أو ما شابه

جد ناتج التكاملات التالية ١٧

١- $\int \frac{س^{٢}-٩}{س-٣}$ د س

٢- $\int \frac{س^{٢}+٦س}{س+٦}$ دس

٣- $\int_{٠}^{٢} \frac{س^{٢}+٤س+٣}{٢س+٢}$ د س

٤- $\int \frac{هـ^{س}+١}{هـ^{س}}$.دس

٥- $\int \frac{هـ^{س}}{هـ^{س}+١}$. دس

اذا كان ق اقترانا قابلا للاشتقاق و كان
ق(س) = $\frac{٣}{س+١}$, س ≠ -١ , وكان
منحنى الاقتران ق يمر بالنقطه (٠،٢) فجد قاعده الاقتران ق

جد التكاملات التاليه :

$\int \frac{س^{٢}-١\sqrt{س}\ جـا\ س}{\sqrt{س}}$ دس

٢٠١٤ صيفى

٤ علامات

$\int \frac{١٠س-١}{\sqrt{٥س^{٢}-س+١}}$ دس

تطبيقات التكامل المحدود

ايجاد المساحات

ايجـــــاد المساحات

إيجـاد مساحة المنطقة بين محور السينات ومنحنى الاقتران ق(س) والمستقيمين س = أ ، س = ب أي في فترة [أ،ب]

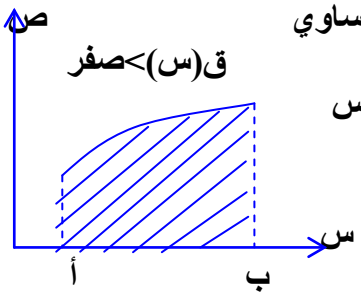
إيجـاد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيين الاقترانيين ق،هـ في فترة [أ،ب]

الحاله الاولى :
إيجاد مساحة المنطقة بين محور السينات ومنحنى الاقتران ق(س) والمستقيمين س = أ ، س = ب أي في فترة [أ،ب]

وسوف نتناول الآن طريقة حل كل حالة على حدى

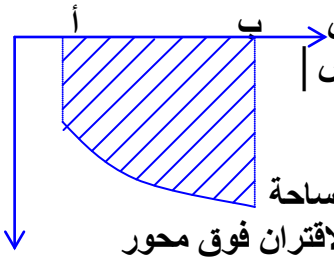
وتكون على واحد من الثلاث أشكال التاليث

(١) يقع الاقتران فوق محور السينات (ق(س) > صفر)
فان المساحة تساوي



$م = \int_{أ}^{ب} ق(س)\,دس$

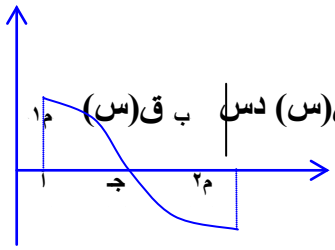
(٢) يقع الاقتران تحت محور السينات
(ق(س) < صفر) فان المساحة تساوي



$م = \left| \int_{أ}^{ب} ق(س)\,دس \right|$

قيمة مطلقة أي
قيمة موجبة لأنها مساحة

(٣) يقع جزء من الاقتران فوق محور السينات والجزء الأخر تحت محور السينات فأننا نجزئ التكامل إلى قسمين



ق(س) < صفر ← $م_1 = \int_{أ}^{جـ} ق(س)\,دس$

ق(س) > صفر ← $م_2 = \left| \int_{جـ}^{ب} ق(س)\,دس \right|$

∴ المساحة الكلية = $م_1 + م_2$

خطوات إيجاد المساحة المحصورة بين محور السينات ومنحنى الاقتران ق في الفترة [أ ، ب]

١. نجد أصفار الاقتران (بوضع ق(س) = صفر) لإيجاد حدود التكامل
٢. إذا كان هنالك أصفار للاقتران ضمن الفترة [أ ، ب] نأخذها بعين الاعتبار وعدا ذلك تهمل
٣. يتم تحديد على خط الأعداد موقع المنحنى ق(س) فوق أو تحت محور السينات حيث انه
أ) الفترة التي يكون فيها
ق(س) < صفر
← منحنى الاقتران فوق محور السينات
ب) الفترة التي يكون فيها
ق(س) > صفر
← منحنى الاقتران تحت محور السينات
٤. نطبق قوانين التكامل التي درسناها سابقا لحل المسألة

١ احسب المساحة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) = ٤ س – ٤ ومحور السينات والمستقيمين س = ٢، س = ٤ ؟

وزاره ٢٠٠٦ أحسب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) = ٢س + ١ ومحور السينات والمستقيمين س = ١ ، س = ٢ ؟

٢ أوجد المساحة المحصورة بين ق(س) = ٢س + ٤ ومحور السينات و المستقيمين س = ٠ ، س = ٣ ؟

٤ احسب مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين ق(س) = $س^{٢}$ – ١٦ و محور السينات و المستقيمان س= ٠ ، س = ٣ ؟

٣ حسب مساحة المنطقة المغلقه المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) = ٢ – س ومحور السينات والمستقيمين س = ٢ ، س = ٦ ؟

٥ أحسب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) = ٤ – ٢س ومحور السينات والمستقيمين س = ٠ ، س = ٤ ؟

٦ احسب المساحة المنطقة المحصورة بين ق(س) = ٢س–٦ و محور السينات حيث س ∋ [١ ، ٦]؟

٧ احسب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) = ٤– س^{٢} و محور السينات؟

٨ احسب مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) = س^{٢}– ٢س و محور السينات

٩ احسب مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) = س– س^{٣} و محور السينات ؟

١٠ **اوجد المساحة المحصورة بين**
ق(س) = ٦س– س^{٢} و محور السينات ؟

٢٠١٣ صيفي ٤علامات

احسب مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) = ٣س+٦ و محور السينات في الفترة [. , ٣]؟

١١ **احسب مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين**
ق(س) = ٩– س^{٢} و محور السينات ؟

٢٠١٥ صيفي ٦ علامات

احسب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) = ٣س^{٢} – ٦س و محور السينات في الفترة [-٢ , ١]؟

٢٠١٣ صيفي ٦ علامات

احسب مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين
ق(س) = س^{٢} – ٤س و محور السينات ؟

الحاله الثانيه :
ايجاد مساحة المنطقة بين منحنيين الاقترانيين
ق، هـ في الفترة [أ ، ب]

$$م = \int_{أ}^{ب} (ق(س) - هـ(س)) \, . \, د س$$

حيث ق(س) > هـ(س)

ملاحظه مهمه:
يتم تحديد نقاط التقاطع المنحنيين لتحديد حدود التكامل بوضع ق(س)=هـ(س)

١٢ **احسب مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين الاقترانيين ق(س) = س^{٢} ، هـ(س)= ٢س؟**

١٣ **احسب مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س)=١٦ – ٤س^{٢} و المستقيم ص = ٠ ؟**

وزاره ٢٠٠٨

احسب مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) = س^{٢} – ٤س والمستقيم ص = ٥ ؟

وزاره ٢٠٠٥

احسب مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنيين الاقترانيين ق(س)=س^{٢} – س والمستقيم ص = ٢ ؟

؟

٢٠١٤ شتوي

٧علامات

جد مساحه المنطقه المغلقه المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) = س^{٢} ،و المستقيم ص = ٢س+٣

وزاره ٢٠٠٩

اوجد مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقترانيين ق(س) = ٣ – س^{٢} هـ (س) = ٢س ؟

٢٠١٥ شتوي

جد مساحه المنطقه المغلقه المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) =٢ - س^{٢} ،هـ(س) = س ؟

٦ علامات

١٤

اوجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران
ق(س)=١– س^{٢}، هـ (س)= س^{٢}– ١ ؟

١٥

اوجـــد المســـاحة المحصـــورة بـــين
ق(س) = س^{٣} , هـ (س) = ٤س ؟

٢٠١٤ صيفى

جـد مســاحه المنطقــه المغلقــه المحصـورة بـين منحنـى الاقتـران ق(س) =١- س^{٢} ، و المستقيم ص = -٣ ؟

٦ علامات

٢٠١١ صيفى

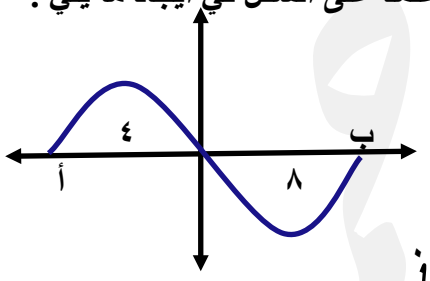
احسب مساحه المنطقه المغلقه المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) = س^{٢} – ١ , والمستقيم ص = ٣ ؟

٧علامات

تذكير :
المساحة دائما قيمة موجبة
فوق محور السينات =مـوجب التكامل
تحت محور السينات = سـالـب

١٦

الشكل يمثل منحنى الاقتران ق(س) في الفترة [أ ، ب]
إعتمد على الشكل في ايجاد ما يلي :



أ) $\int_{أ}^{ب}$ ق (س) د س

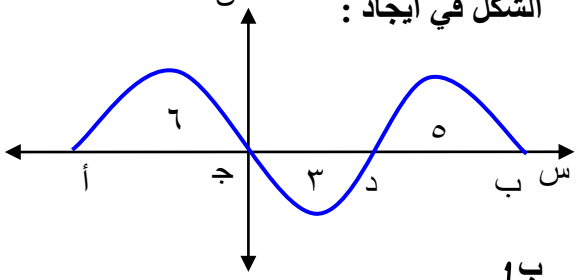
ب) $\int_{ب}^{أ}$ ق (س) د س

جـ) $\int_{أ}^{ب}$ ق (س) د س

د) المساحة الكلية المحصورة بين ق (س) ومحور السينات في [أ، ب]

١٧

يمثل الشكل المجاور المنطقة المغلقة المحصور بين منحنى الاقتران ق و محور السينات في الفترة [أ ، ب] أعتمد على الشكل في ايجاد :



أ) $\int_{أ}^{ب}$ ق (س) د س

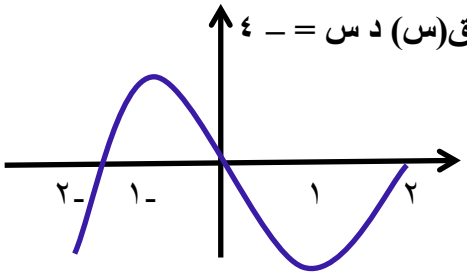
ب) $\int_{أ}^{د}$ ق (س) د س

ج) المساحة الكلية المحصورة بين ق(س) ومحور السينات في الفترة [أ ، ب]

١٨

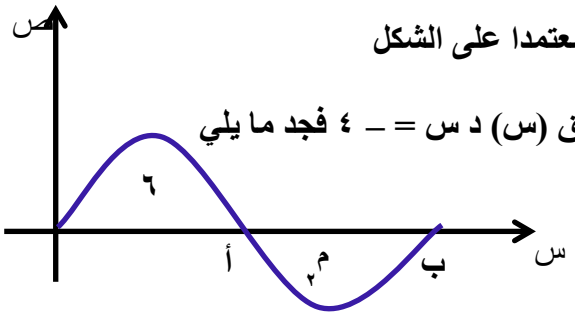
معتمدا على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى ق (س) جد المساحة المحصورة بين منحنى ق(س) ومحور السينات إذا كان $\int_{٠}^{٢}$ ق (س) د س = ٤ – ٢

و $\int_{٠}^{٢}$ ق(س) د س = – ٤



١٩

معتمدا على الشكل



إذا كان $\int_{٠}^{ب}$ ق (س) د س = – ٤ فجد ما يلي

١) $\int_{أ}^{ب}$ ق(س) د س

٢) المساحة م٢

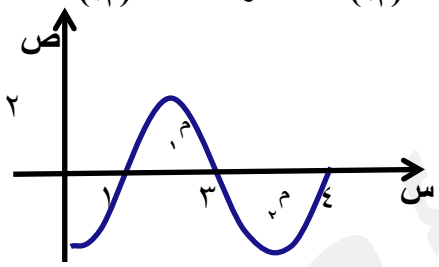
٣) $\int_{ب}^{أ}$ ق (س) د س

٤) $\int_{أ}^{ب}$ ق (س) د س

٥) المساحة المحصورة بين محور السينات و ق(س) في الفترة [٠ ، ب]

وزاره ٢٠٠٥

بالاعتماد على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى ق(س)
إذا كانت مساحة (م١) = ٦ ، والمساحة (م٢) = ٤



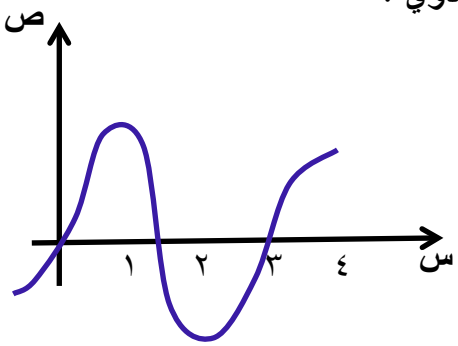
فإن $\int_{١}^{٤}$ ق (س) د س =

وزاره ٢٠٠٦

معتمدا على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى
ق(س) بحيث أن $\int_{٠}^{١}$ ق (س) د س = ٤

$\int_{١}^{٣}$ ق (س) د س = – ٦

فان المساحة المحصورة بين منحنى ق(س) ومحور السينات تساوي ؟

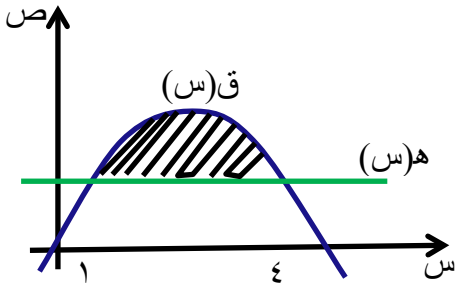


وزاره ٢٠٠٦

معتمدا على الشكل المجاور إذا
علمت أن $\int_{٠}^{٤}$ ق (س) د س = ٨

$\int_{١}^{٤}$ هـ (س) د س = ٣

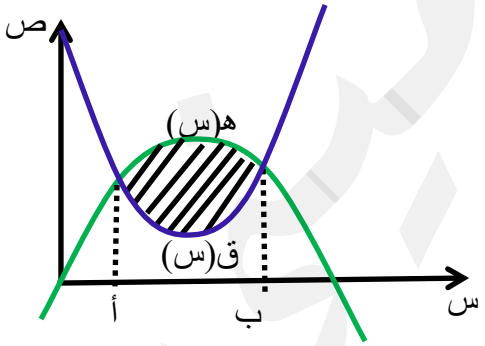
فإن المساحة المحصورة المظللة تساوي :



٢٢

بالاعتماد على الشكل المجاور إذا
علمت أن المساحة المحصورة بين منحنى
ق (س) و هـ (س) تساوي ٦

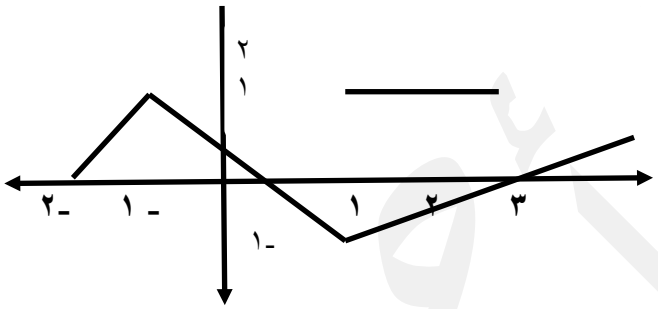
وكان $\int_{أ}^{ب}$ ق (س) د س = ١٠ فان $\int_{أ}^{ب}$ هـ (س) د س = ؟؟



٢٠١٥ صيفى

٤ علامات

يمثل الشكل المجاور منحنى الاقتران ق(س) المعرف على الفتره [-٢ , ٣] اعتمد على الشكل لايجاد قيمه $\int_{-2}^{3}$ ق(س) دس



التطبيقات

أولا: الإيراد الكلي

درسنا في الفصل الأول (المستوى الثالث) في الوحدة الثالثة (تطبيقات التكامل) عن التطبيقات الاقتصادية ومنها كانت المفاهيم التالية:

الإيراد الكلي = د(س)

الإيراد الحدي = دَ(س) [مشتقة الإيراد الكلي]

وبما ان التكامل عملية عكسية للتفاضل

$$د(س) = \int دَ(س)\ دس$$

حيث س = عدد الوحدات المباعة

ملاحظة مهمه :

ثابت التكامل في اقتران الايراد الكلي د(س) يساوي جـ ويساوي صفر لانه عند بيع صفر وحدة يكون الايراد د(س) = صفر

٢٠١٢ صيفى

اذا كان الايراد الحدي لبيع (س) لعبه من لعب الاطفال التي تنتجها احد المصانع هو دَ(س) = ٣س^{٢} – ٨س + ٥ دينار فجد الايراد الكلي الناتج عن بيع هذه اللعب

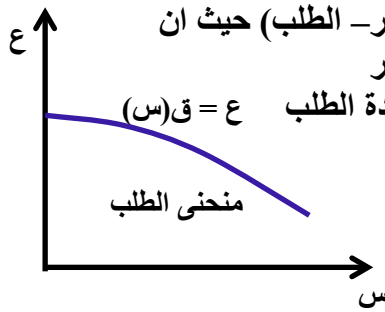
٥ علامات

وزاره ٢٠٠٦

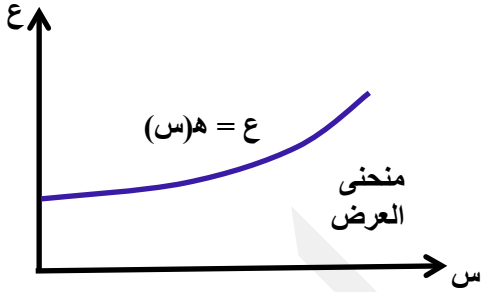
اذا كان الايراد الحدي الناتج عن بيع(س) وحدة من سلعة معينة هو دَ(س) = ٦ س^{٢} – ٢ س + ٤٠٠ فأحسب الايراد الكلي الناتج عن بيع (١٠) وحدات من هذه السلعة ؟

ثالثا : فائض المستهلك و فائض المنتج

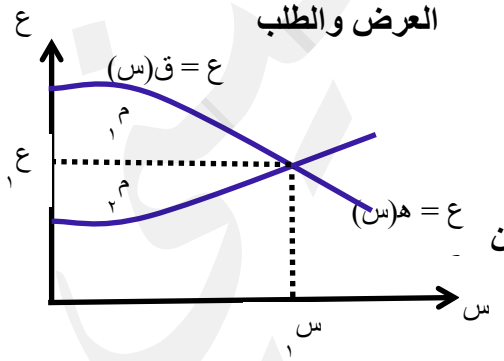
❖ يتاثر الطلب على سلعة معينة بتغير تلك السلعة ، فكلما زاد السعر قل الطلب ونعبر عن العلاقة بين السعر والطلب بالاقتران ع = ق(س) اقتران (السعر– الطلب) حيث ان
ع = السعر
س = وحدة الطلب



يتاثر العرض على سلعة معينة بتغير سعر تللك السلعة ، فكلما زاد السعر زاد الانتاج . لان المنتج يزيد انتاجه من سلعة ليزيد الربح ، ونعبر عن العلاقة بين السعر والعرض بالاقتران : ع = هـ(س) . اقتران (السعر – العرض)



❖ يسمى السعر (ع١) الذي يكون عنده ق(س١) = هـ(س١) بسعر التوازن وتسمى (س١) كمية التوازن بين العرض والطلب



وزاره ٢٠٠٩ اذا كان اقتران الايراد الحدي لبيع ثلاجة من انتاج مصنع هو دَ(س) = ٣ س^{٢} – ٨س + ٢٠ دينار فجد الايراد الكلي الناتج عن بيع (٢٠)ثلاجة ؟

٢٠١٤ صيفى اذا كان الايراد الحدي لبيع (س) لعبه من لعب الاطفال هو دَ(س) = ٦س^{٢} – ٤س + ٢ دينار فجد الايراد الكلي الناتج عن بيع (١٠) لعب ؟

٢٠١٤ شتوي اذا كان الايراد الحدي لبيع (س) من الثلاجات هو دَ(س) = ٦٠س^{٢} – ٣٠س + ٦ دينار فجد الايراد الكلي الناتج عن بيع (٤) ثلاجات ؟

٢٠١٤ شتوي اذا كان اقتران الايراد الحدي لبيع (س) من القطع من منتج معين هو دَ(س) = ٦٠س^{٢} – ١٨س + ٢٠ دينارا, فجد الايراد الكلي الناتج عن (٥) قطع .

فائض المستهلك (التوفير الكلي)

تمثل مساحة المنطقة م١ بالتوفير الكلي للمستهلك (فك)

$$ف_{ك} = \int_{٠}^{س_١} ق(س)دس - ع_١ \times س_١$$

فائض المنتج (المكسب الكلي)

تمثل مساحة المنطقة م٢ بالمكسب الكلي للمستهلك (فج)

$$ف_{ج} = ع_١ \times س_١ - \int_{٠}^{س_١} هـ(س)دس$$

١ اذا كان ع = ق(س) = ٣٠ – ٢س يمثل اقتران (السعر – الطلب) وان السعر ثابت عند ع١= ٦ فجد فائض المستهلك ؟

٢ اذا كان اقتران (السعر – الطلب) لمنتج معين هو ع = هـ(س) = ١٨ + ٤س ، حيث (ع) السعر بالدينار ، (س) عدد الوحدات المنتجة ، وكان السعر ثابتاً عند ع١= ٣٠ فجد فائض المنتج؟

وزاره ٢٠٠٨

اذا كان منحنى (السعر – العرض) لمنتج معين هو ع = هـ(س) = ٥ + ٢س حيث (ع)السعر بالدينار ، (س) عدد الوحدات المنتجة ، وكان السعر ثابتاً عند ع١ = ٢١اوجد قيمة المنتج ؟

وزاره ٢٠٠٦

اذا كان منحنى اقتران (السعر – الطلب) لمنتج ما هو ع = ق (س) = ٦٥ – ٣ س وكان منحنى (السعر – العرض) هو ع = هـ (س) = ٢٥ + س ، فجد ما يلي

١) سعر التوازن ٢) فائض المستهلك

٣ إذا كان منحنى اقتران (السعر- الطلب) لمنتج معين يعطي بالعلاقة ق(س) =١٥+ أس ، وكان منحنى (السعر- العرض) يعطى بالعلاقة هـ(س) = ٦ س^{٢} – ١٥ ، و اذا علمت ان س$_{١}$ = ١٠ هي كمية التوازن فان قيمة أ تساوي:

٢٠٠٤

اذا كان منحنى اقتران(السعر – الطلب) لمنتج معين يعطى بالعلاقة ق(س) = أ – س وكان منحنى(السعر – العرض) يعطى بالعلاقة هـ (س) = ٥ + ٣ س . واذا علمت ان س$_{١}$ = ٢٠ هي كمية التوازن فان قيمة أ تساوي

٢٠١٤ شتوي

اذا كان منحنى (السعر – الطلب)لمنتج معين هو ع = ق(س) = ٤٨-٣س ,واقتران (السعر-العرض) ع=هـ(س) = ٥س ,أوجد فائض المنتج عند سعر التوازن ؟

٦علامات

---

٤ اذا كان اقتران (السعر – الطلب) لمنتج معين هو ع = ق(س) = ١٦ – ٣س ، وكان اقتران (السعر – العرض) لهذا المنتج هو ع = هـ(س) = ٢س + ١ ، فان سعر التوازن هو :

٢٠١٤ صيفي

٤علامات

اذا كان منحنى (السعر – الطلب) لمنتج معين هو ع = ق(س) = ١٦ - ٢س حيث (ع)السعر بالدينار، (س) عدد الوحدات المنتجة ، وكان السعر ثابتاً عند ع١ = ١٠ دينارا وجد فائض المستهلك ؟

٢٠١٥ صيفي

٦علامات

اذا كان منحنى (السعر – الطلب) لمنتج معين هو ع = ق(س) = ٣٦-٢س , وكان اقتران (السعر – العرض) لهذا المنتج هو ع – هـ(س) = ٣س + ١٦ فجد فائض المستهلك عند سعر التوازن ؟

٢٠١٥ شتوي

٦علامات

اذا كان منحنى (السعر – العرض) لمنتج معين هو ع = هـ(س) = ١٠ + ٢س حيث (ع)السعر بالدينار، (س) عدد الوحدات المنتجة ، وكان السعر ثابتاً عند ع١ = ٢٤ دينارا وجد فائض المنتج ؟

الوحدة الثانية

الاعصار والحضارات

مـــبـــــدأ الـــــعد

القاعده العامه للعد

إذا أردنا إجراء عملية معينة و كان عدد طرق هذه العملية هو (س) مرة فإننا يمكننا إجرائها كالتالي:
يمكن إجراء المرحلة الأولى ---> ب ن١ من الطرق
يمكن إجراء المرحلة الثانية ---> ب ن٢ من الطرق
يمكن إجراء المرحلة الثالثة ---> ب ن٣ من الطرق
يمكن إجراء المرحلة الأخيرة (س)---> ب ن س من الطرق
بالتالي فان عدد الطرق التي يمكن إجراء العملية بها هو
ن١ × ن٢× ن٣× ----× ن س

مطعم ما يقدم ٣ أنواع من الساندويتشات و ٤ أنواع من المشروبات ، فما عدد الطرق التي يمكن لزبون معين أن يتناول بها وجبه ما مكونه من ساندويتش و مشروب ؟
الحل : هنالك ٣ طرق لاختيار الساندويتش و ٤ طرق لاختيار المشروب
∴ عدد الطرق لتناول وجبه = ٣×٤ =١٢ طريقة

اراد احمد السفر من عمان إلى العقبة مرورا بالكرك فإذا كان أمامه طريقتان للسفر من عمان إلى الكرك وهما السيارة أو الباص وكان بامكانه من الكرك إلى العقبة بثلاث طرق وهما السيارة، الباص،الطيارة فكم طريقه أمام احمد للسفر من عمان إلى العقبة مرورا بالكرك؟
عدد الطرق من عمان إلى الكرك = طريقتان
عدد الطرق من الكرك إلى العقبة = ٣ طرق
∴ عدد الطرق من عمان إلى العقبة = ٢×٣=٦ طرق

كم عدد من ثلاث منازل يمكن تكوينه من مجموعه الأرقام {١، ٢، ٣، ٤، ٥ }
أ) إذا سمح بتكرار الأرقام ؟
ب) إذا لم يسمح بتكرار الأرقام ؟
الحل ٣ منازل وخمس أرقام
ا) إذا سمح بتكرار الأعداد = ٥×٥×٥ = ١٢٥ عدد
ب) إذا لم يسمح بتكرار الأعداد = ٥×٤×٣= ٦٠ عدد
٣ منازل ولكن كل مره تقل عدد لن يتكرر

إذا كان عدد المعلمين في إحدى المدارس ٢٠ معلما بكم طريقه يكن تكوين لجنه ثلاثية مؤلفة من رئيس وأمين سر وأمين صندوق ؟
الحل : عدد الطرق = ٢٠×١٩×١٨

أراد احد الطلبة شراء قلم ومسطرة ودفتر فوجد ثلاثة أنواع من الأقلام ونوعين من المساطر و٥ أنواع من الدفاتر فبكم طريقه يمكن للطالب شراء قلم ومسطره ودفتر ؟
الحل : عدد الطرق =٣×٥×٢=٣٠ طريقة

أرادت دائرة السير صنع لوحات معدنية للسيارات تحمل كل منها حرفا من حروف الهجاء متبوعا بعدد من رقمين من مجموعه الارقام {١،٢،٣،٠٠٠٠،٩} فكم لوحه مختلفة يمكن صنعها ؟

الحل احتمال الأرقام لائنهم خانتين
عدد اللوحات =٢٨×٩×٩ = ٢٢٦٨ لوحه
عدد الأحرف من ١←٩

إذا كان لديك الأحرف {أ ،ب ،ج ،د ،هـ } والأرقام {٨،٧،٦،٥،٤،٣} نريد تكوين لوحات وكل لوحه منها تحوي رقمين و حرفين ما عدد اللوحات التي يمكن تكوينها في الحالات التالية
أ) إذا سمح بتكرار الحرف وتكرار الرقم؟
ب) إذا لم يسمح بتكرار الحرف و لا تكرار الرقم ؟
ج) إذا سمح بتكرار الحرف فقط ؟
د) إذا سمح بتكرار الرقم فقط ؟
الحل : حرفين رقمين
ا) ٥×٥ × ٦×٦ = ٩٠٠
ب) ٥×٤ × ٦×٥ = ٦٠٠
ج) ٥×٥ × ٦×٥ = ٧٥٠
د) ٥×٤ × ٦×٥ = ٧٢٠

ما هي عدد الطرق التي يمكن أن يجلس بها شخصان في ٥ مقاعد مختلفة موضوعه على استقامة واحدة ؟
الحل : عدد الطرق = ٥×٤= ٢٠

ما عدد الطرق التي يمكن أن يجلس بها خمسة أشخاص على خمسة مقاعد في صف ؟
هنالك ٥ مقاعد أمام الشخص الأول، ٤ مقعد أمام الشخص الثاني
٣مقاعد أمام الشخص الثالث
مقعدان أمام الرابع مقعد للخامس
عدد الطرق = ٥×٤×٣×٢×١ = ١٢٠

قاعدة

حاصل ضرب ٥×٤×٣×٢×١= ١٢٠ يسمى مضروب العدد(٥) و يرمز له بالرمز (٥!) و يقرأ مضروب العدد ٥

١! = ١

٢! =

٣! = ٣×٢×١

٤! =

٥! = ٥ ×٤ ×٣ ×٢ ×١ = ١٢٠

٦!=

٧! = ٧×٦×٥×٤×٣×٢×١

٨! =

٩! = ٩×٨×٧×٦×٥×٤×٣×٢×١

١٠! =

قاعدة

و بالتالي يمكننا استخراج القاعده التاليه

مضروب العدد الصحيح غير السالب (ن) هو ن!

ن! = ن × (ن – ١) × (ن– ٢) × ٠٠٠٠ × ٤ × ٣ × ٢ × ١

بالعاميه :

مضروب اي عدد = العدد نفسه × نفسه مطروح منه ١ × نفسه مطروح منه ٢ × ٠٠٠ × ١

حالة خـــــاصـــة:

٠! = ١ (مضروب الصفر = ١)

مصطلحات مخفيه موجوده في السؤال تـدلـنـــا على طريقه حـل:

عدد طرق ترتيب (ن) من

الأشياء في (ن) من الأماكن

$$= ن!$$

بكم طريقة يمكن ترتيب ٦ كتب على رف المكتبة لصنف واحد ؟

الحل: عدد الطرق = ٦!

=٦ × ٥ × ٤ × ٣ × ٢ × ١ =٧٢٠ طريقة

بكم طريقة يمكن توزيع فريق كرة السلة على أماكنهم المكونين من ٧ لاعبين ؟

الحل: عدد الطرق = ٧!

= ٧ × ٦ × ٥ × ٤ × ٣ × ٢ × ١

جد ما يلي :

(١) ٣! **(٢) ٨!** **(٣) ٥! – ٣!**

(٤) ٢! – ١٠! **(٥) $\frac{٨!}{}$** **(٦) ٦! – ٤!**

الحل:

(١) ٣! = ٣ × ٢ × ١ = ٦

(٢) ٨!

= ٨ × ٧ × ٦ × ٥ × ٤ × ٣ × ٢ × ١

= ٤٠٣٢٠

(٣) ٥! – ٣!

= (٥ × ٤ × ٣ × ٢ × ١) – (٣ × ٢ × ١) = ١٢٠ – ٦ = ١١٤

(٤) ٢! – ١٠! = (١ × ٢) + ١ = ٣

(٥) $\frac{٨!}{٦!}$

$$= \frac{٨ \times ٧ \times ٦ \times ٥ \times ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١}{٦ \times ٥ \times ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١}$$

= ٨ × ٧ = ٥٦

(٦) ٦! – ٤!

= (٦ × ٥ × ٤ × ٣ × ٢ × ١) – (٤ × ٣ × ٢ × ١) = ٧٢٠ – ٧٠٨ = ١٢

لاحظ ان ١٠! = ١٠ × ٩!

= ١٠ × ٩ × ٨!

= ١٠ × ٩ × ٨ × ٧!

ن! = ن × (ن – ١) !

= ن × (ن – ١) ! × (ن – ٢) !

= ن × (ن – ١) ! × (ن – ٢) ! × (ن – ٣)!

ما قيمة كل مما يلي :

(١) $\frac{١٥!}{١٢!}$ **(٢) $\frac{١٠٠!}{٩٨!}$** **(٣) $\frac{١٢!}{٩! \times ٣!}$**

الحل:

(١) $\frac{١٥!}{١٢!}$

$$= \frac{١٥ \times ١٤ \times ١٣ \times ١٢!}{١٢!}$$

= ١٥ × ١٤ × ١٣ = ٢٧٣٠

(٢) $\frac{١٠٠!}{٩٨!} = \frac{١٠٠ \times ٩٩ \times ٩٨!}{٩٨!} =$ ٩٩٠٠

(٣) $\frac{١٢!}{٩! \times ٣!} = \frac{١٢ \times ١١ \times ١٠ \times ٩!}{٩! \times ٣ \times ٢ \times ١}$

= ٢٢٠

جد قيمة ن في كل مما يلي:

(١) ن! = ٢٤ **(٢) ٣ن! = ٣٦٠**

(٣) (٣ن)! = ٧٢٠ **(٤) ن! – ٤! = ٩٦**

(٥) (٢ن + ١) ! = ١٢٠ **(٦) ن! =١**

الحل:

(١) ن! = ٢٤ $= ١ \times ٢ \times ٣ \times ٤$ ∴ ن = ٤

(٢) ٣ن! = ٣٦٠ ← ن! $= \frac{٣٦٠}{٣} = ١٢٠$

$١٢٠ = ١ \times ٢ \times ٣ \times ٤ \times ٥ = ٥!$ ← ن = ٥

(٢) (٣ن) ! = ٧٢٠

$= ١ \times ٢ \times ٣ \times ٤ \times ٥ \times ٦ = ٦!$

∴ (٣ن) ! = ٦ ← ن $= \frac{٦}{٣} = ٢$

(٤) ن! – ٤! = ٩٦

ن! = ٩٦ + ٤!

$= ٩٦ + (٤ \times ٣ \times ٢ \times ١) = ٩٦ + ٢٤$

$= ١٢٠$

$١٢٠ = ٥ \times ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١ = ٥!$ ← ∴ ن = ٥

(٥) (٢ن + ١) ! =١٢٠ = ٥! ← ٢ن + ١ = ٥ ← ٢ن = ٤ ← ن = ٢

(٦) ن! =١ ← ن = ٠ أو ١

اذا كان ٣(ن!) + ٣! = ٣٦٦ , فجد قيمه ن ؟

سؤال وزاره٢٠١١

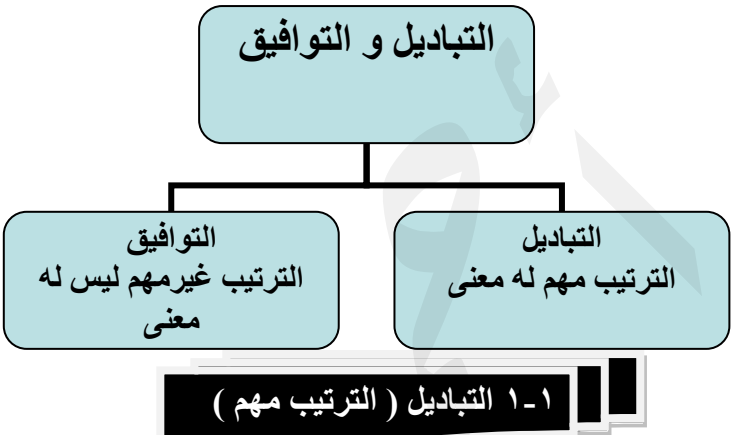
٣(ن!) = ٣٦٦ – ٣!

= ٣٦٦ – ٦ = ٣٦٠

(ن)! $= \frac{٣٦٠}{٣} = ١٢٠ = ٥!$

∴ ن = ٥

التباديل و التوافيق



١-١ التباديل (الترتيب مهم)

إذا كان لدينا مجموعه من العناصر عددها ٣ عناصر كانت تعطي كل واحد على رمز أ، ب، ج فإننا إذا أردنا أن نأخذ المجموعات المكونة من تبديل ترتيب العناصر هو:

أ ب جـ ، أ جـ ب ، ب أ جـ ،
ب جـ أ ، جـ أ ب ، جـ ب أ

إذا أردنا الناتج من تبديل كل عنصرين على حدا يكون
أ ب ، أ جـ ، ب أ ، ب جـ ، جـ أ ، جـ ب
و إذا أردنا التبديل بين كل عنصر على حدا فيكون أ ، ب ، جـ

ونسمي العملية هذه بالتبادل أي ترتيب العناصر ويعبر عن
الصورة الأولى بالرمز ل(٣ ، ٣) = ٦
والصورة الثانية بالرمز ل(٣ ، ٢) = ٦
والصورة الثالثة بالرمز ل (٣ ، ١) = ٣

أي تكتب على شكل :

$$ل(ن ، ر) = \frac{ن!}{(ن - ر)!}$$

أو يمكن كتابتها على شكل

$$ل(ن ، ر) = \frac{ن \times (ن-١) \times (ن-٢) \times \cdots \times (ن-ر+١)}{\text{عدد الحدود}}$$

حيث ر = عدد الحدود
ن = عدد العناصر

جد ١) ل (٧ ، ٤) ٢) ل (١٠ ، ٣) ٣) ل (١٠٠ ، ٢)

الحل ١) ل (٧،٤) $= \frac{!٧}{!(٧-٤)}$

$= \frac{٧ \times ٦ \times ٥ \times ٤ \times !٣}{!٣}$

$= ٨٤٠$

٢) ل(١٠ ، ٣) $= \frac{!١٠}{!(١٠-٣)}$

$= \frac{١٠ \times ٩ \times ٨ \times !٧}{!٧} = ٧٢٠$

٣) ل(١٠ ، ٢) =

$\frac{!١٠٠}{!(١٠-٢)} = \frac{١٠٠ \times ٩٩ \times !٩٨}{!٩٨} = ٩٩٠٠$

حالة خـاصـــة:
ل(ن ، ١) = ن
ل(ن ، ٠) = ١
ل(ن ، ن) = ن!

جد ناتج ما يلي

١) ل (٦ ، ١) = ٦ ٢) ل (٣، ١) = ٣
٣) ل (٥٠،١) = ٥٠

جد قيم ما يلي :

١) ل (٧ ، ٢) ٢) ل (٥ ، ٣)
٣) $\frac{ل(٦ ، ٣)}{!٣}$ ٤) $\frac{ل(١٠ ، ٤)}{ل(٨ ، ٣)}$

الحل

١) ل(٧ ، ٢) $= \frac{!٧}{!(٧-٢)}$

$= \frac{٧ \times ٦ \times !٥}{!٥} = ٧ \times ٦ = ٤٢$

٢) ل (٥ ، ٣) $= \frac{!٥}{!(٥-٣)}$

$= \frac{٥ \times ٤ \times ٣ \times !٢}{!٢} = ٦٠$

٣) $\frac{ل(٦ ، ٣)}{!٣} = \frac{٦ \times ٥ \times ٤}{١ \times ٢ \times ٣} = \frac{١٢٠}{٦} = ٢٠$

٤) $\frac{ل(١٠ ، ٤)}{ل(٨ ، ٣)} = \frac{١٠ \times ٩ \times ٨ \times ٧}{٦ \times ٧ \times ٨} = ١٥$

كم لون يمكن تكوينه من مزج الألوان التالية احمر، اخضر، اصفر، زهري ، بني ، اسود ، سكني إذا علمت أن المزج مكون من أ) ٣ الوان ب) ٤ الوان جـ) ٥ الوان

الحل

ا) ل (٧ ، ٣) = ٧×٦×٥ = ٢١٠ لون

ب) ل(٧ ، ٤) = ٧×٦×٥×٤ = ٨٤٠ لون

جـ) ل(٧، ٥) = ٧×٦×٥×٤×٣ = ٢٥٢٠ لون

بكم طريقة يمكن أن يجلس ٢٠ شخص في حافلة مكونة من ٢٠ مقعد بطريقة مرقمة على خط مستقيم ؟

الحل ====> ل (٢٠ ، ٢٠) = ٢٠!

جد قيمة ر في كل مما يلي:

أ) ل (٨ ، ر) = ١٦٨٠

ب) ل (٦ ، ر) = ١٢٠

جـ) ٥ ل (٥ ، ر) = ١٠٠

د) ٣ ل (٦ ، ر) = ٩٠

نبدأ بالعدد الأول ثم نطرح(١) حتى نصل إلى أن حاصل ضربهم = القيمة المعطاة

أ) ل (٨ ، ر) = ١٦٨٠ = ٨×٧×٦×٥ ==> ر = ٤

ب) ل (٦ ، ر) = ١٢٠ ===> ٦×٥×٤ ==> ر = ٣

ج) ٥ ل (٥، ر) = ١٠٠===> ل (٥ ، ر) = ١٠٠ / ٥ = ٢٠

٥×٤ = ٢٠ ===> ر = ٢

د) ٣ ل (٦ ، ر) = ٩٠ ==> ل (٦ ، ر) = ٩٠ / ٣ = ٣٠

٦× ٥ = ٣٠ ==> ر = ٢

جد قيمة ن التي تحقق كل مما يلي

١) ل (ن ، ٢) = ٧٢

٢) ل (ن ، ٣) = ٦٠

٣) ٤ ل (ن ، ٢) = ١٢٠

٤) ل (ن ، ن) = ٧٢٠

٥) ل (ن ، ٣) = ٩ ل (ن ، ٢)

١) نبحث عن عددين متتاليين حاصل ضربهم = القيمة المعطى

ل (ن ، ٢) = ٧٢ ن (ن – ١) =٧٢ ===> ٩×٨ = ٧٢

∴ ن = ٩

٢) نبحث في ٣ أعداد متتالية حاصل ضربهم = ٦٠

ل (ن ، ٣) = ن ×(ن– ١)× (ن– ٢) = ٦٠ = ٧×٦×٥

===> ن = ٧

٣) ٤ ل (ن ، ٢) = ١٢٠ ===>

ل (ن ، ٢) = ١٢٠ / ٤ = ٣٠

ن × (ن – ١) = ٣٠ = ٦×٥ ∴ ن = ٥

٤) ل (ن ، ن) = ٧٢٠

ن! = ٧٢٠ = ١×٢×٣×٤×٥×٦ ===> ن = ٦

٥) ل (ن ، ٣) = ٩ ل (ن ، ٢)

ن (ن– ١) (ن– ٢) = ٩ ×ن× (ن– ١)

ن – ٢ = ٩ ===> ن = ٩+ ٢ =١١

بكم طريقة يمكن اختيار مديرة و مساعدة مديرة و سكرتيرة و محاسبة و مراسل من بين ١٠ موظفين

عدد المطلوبين = ٥

∴ ل (١٠ ، ٥) = ١٠×٩×٨×٧×٦

= ٣٠٢٤٠ طريقة

سؤال وزاره ٢٠٠٨

جد قيمة ل (٨ ، ٣) / ٣!

ل (٨ ، ٣) / ٣! = ٨×٧×٦ / ٣×٢ = ٥٦

مجموعه مكونة من (٥) طلاب بكم طريقة يمكن اختيار رئيس و نائب ؟

أ) ٢٠ ب) ١٥ جـ) ١٠ د) ٥

ل (٥ ، ٢) = ٥×٤ = ٢٠

سؤال وزاره ٢٠٠٦

===> الجواب فرع أ

إذا علمت أن ل (٥ ، ر) = ٢٠ فما قيمة ر ؟

أ) ٤ ب) ٢ جـ) ١ د) ٥

ل (٥ ، ر) = ٢٠

===> عددين متتاليين حاصل ضربهم = ٢٠

٥×٤ = ٢٠ ===> ر= ٢ = عدد الحدود

∴ الجواب ب

سؤال وزاره ٢٠٠٧

إن قيمة المقدار ل (٦ ، ١) / ٣! تساوي

أ) ٢ ب) ١ جـ) ٥ د) ٩

ل (٦ ، ١) / ٣! = ٦ / ٣×٢×١ = ٦ / ٦ = ١

سؤال وزاره ٢٠٠٧

الجواب فرع ب

بكم طريقة مختلفة يمكن اختيار لجنة مكونة من مدير و نائب له و أمين سر من بين ٥ مرشحين

أ) ٦ ب) ١٠ جـ) ٦٠ د) ١٢٠

سؤال وزاره ٢٠٠٨

الحل

(٥ ، ٣) = ٥×٤ × ٣ = ٦٠

==> الجواب فرع جـ)

سؤال وزاره ٢٠٠٨

اذا كان ٣ × ن! = ٧٢ فان قيمه (ن) تساوي ؟

أ) ٤ ب) ٥ ج) ٣ د)٢

١-٢ التوافيق (الترتيب غير مهم)

أي انه إذا أردنا اختيار شخصين من بين ٤ أشخاص هم (أ ، ب ، جـ ، د) مع الاهتمام من هو الشخص الأول ومن الثاني فأنه (أ ، ب) هي اختيار و (ب ، أ) هو اختيار ثاني مختلف و في هذه الحالة فإننا نستخدم التبادل فيكون عدد الطرق

$= (٤، ٢) = ٤ \times ٣ = ١٢$

أما إذا كان لا يهمنا الترتيب أي أن (أ ، ب) و (ب ، أ) هم نفس العنصر فهذا يسمى توافيق وتعطى على شكل $\binom{٤}{٢}$

وتعني عدد طرق اختيار شخصين من بين ٤ أشخاص دون الاهتمام لترتيبهم و تكون على الشكل التالي :

$\binom{٤}{٢} = \frac{!٤}{!٢ \times (٤-٢)!} = \frac{!٤}{!٢ \times !٢} = \frac{٤ \times ٣ \times ٢}{٢ \times ١ \times ٢} = ٦$

و بصورة عامه يكون $\binom{ن}{ر}$ و يقرأ ن فوق ر

$= \frac{!ن}{!ر \times (ن-ر)!} = \frac{ل(ن، ر)}{!ر}$

جد قيمة ما يلي

ا) $\binom{٨}{٣}$ ب) $\binom{٦}{٤}$ جـ) $\binom{٨}{١} \times \binom{٩}{٢}$

د) $\binom{٨}{٨}$ هـ) $\binom{١٢}{١}$ و) $\binom{٥}{٠}$

ا) $\binom{٨}{٣} = \frac{!٨}{!٣ \times (٨-٣)!} = \frac{!٨}{!٣ \times !٥}$

$= \frac{٨ \times ٧ \times ٦ \times !٥}{٣ \times ٢ \times ١ \times !٥} = ٥٦$

ب) $\binom{٦}{٤} = \frac{!٦}{!٤ \times (٦-٤)!} = \frac{!٦}{!٤ \times !٢}$

$= \frac{٦ \times ٥ \times !٤}{٢ \times ١ \times !٤} = ١٥$

جـ) $\binom{٨}{١} \times \binom{٩}{٢}$

$= \frac{!٨}{!١ \times (٨-٣)!} \times \frac{!٩}{!٢ \times (٩-٢)!}$

$= \frac{!٨}{!١ \times !٧} \times \frac{!٩}{!٢ \times !٧}$

$= \frac{٨ \times !٧}{!٧} \times \frac{٩ \times ٨ \times !٧}{٢ \times ١ \times !٧} = ٨ \times ٣٦ = ٢٨٨$

د) $\binom{٨}{٨} = \frac{!٨}{!٨ \times !٠} = \frac{!٨}{!٨ \times ١} = ١$

هـ) $\binom{١٢}{١} = \frac{!١٢}{!١١ \times (١٢-١)!}$

$= \frac{١٢ \times !١١}{١ \times !١١} = ١٢$

و) $\binom{٥}{٠} = \frac{!٥}{!٠ \times !٥} = \frac{!٥}{١ \times !٥} = ١$

ملاحظه :

$\binom{ن}{٠} = ١$ $\binom{ن}{ن} = ١$ $\binom{ن}{١} = ن$

جد قيمة كل مما يلي

١) $\binom{٩}{٢}, \binom{٩}{٧}$ ٢) $\binom{١٠}{٦}, \binom{١٠}{٤}$

الحل ١) $\binom{٩}{٢} = \frac{!٩}{!٢ \times (٩-٢)!}$

$= \frac{٩ \times ٨ \times !٧}{٢ \times ١ \times !٧} = ٣٦$

$\binom{٩}{٧} = \frac{!٩}{!٧ \times (٩-٧)!} = \frac{٩ \times ٨ \times !٧}{٢ \times ١ \times !٧} = ٣٦$

٢) $\binom{١٠}{٦} = \frac{!١٠}{!٦ \times (١٠-٦)!}$

$= \frac{١٠ \times ٩ \times ٨ \times ٧ \times !٦}{٤ \times ٣ \times ٢ \times ١ \times !٦} = ٢١٠$

$\binom{١٠}{٤} = \frac{!١٠}{!٤ \times (١٠-٤)!}$

$= \frac{١٠ \times ٩ \times ٨ \times ٧ \times !٦}{٤ \times ٣ \times ٢ \times ١ \times !٦} = ٢١٠$

ملاحظه :

١) $\binom{ن}{ر} = \binom{ن}{ن-ر}$

٢) إذا كان $\binom{ن}{ر_١} = \binom{ن}{ر_٢}$

فأن $ر_١ = ر_٢$ أو $ر_١ + ر_٢ = ن$

حل المعادلات التالية

١) $\binom{١٢}{س} = \binom{١٢}{٧}$

٢) $\binom{١٥}{٣} = \binom{١٥}{س+١}$

٣) $\binom{٩}{٣س} = \binom{٩}{٣}$

٤) $\binom{س}{٣} = \binom{س}{٧}$

٥) $\binom{٨}{س} = ١$

٦) $\binom{١٣}{س} = ١٣$

٧) $\binom{س}{١} = ٩$

الحل ١) $\binom{١٢}{س} = \binom{١٢}{٧}$

∴ س = ٧ أو ١٢ – ٧ = ٥

٢) س+١ = ٣ ⟸ س = ٢ او س+١ = ١٥ – ٣

س = ١٢ – ١ = ١١

٣) ٣س = ٣ ⟸ س = ١ او ٣س = ٩ – ٣

٣س = ٦ ⟸ س = ٢

٤) س = ٣+٧ = ١٠

٥) س = ٠ او س = ٨

٦) س = ١ او س = ١٣ – ١ = ١٢

٧) س = ٩

حل المعادلات التالية

أ) $\binom{ن}{٣} = ١٠$ ب) $\binom{ن}{٢} = ٣٦$

الحل ⟸

أ) $\binom{ن}{٣} = ١٠ = \frac{ل\,(ن\,،\,٣)}{!٣}$

$= \frac{ل\,(ن\,،\,٣)}{١\times٢\times٣} = ١٠$ ∴ ل (ن ، ٣) = ٦٠

∴ ٣ أعداد متتالية حاصل ضربهما = ٦٠

٥×٤×٣ = ٦٠ ⟸ ن = ٥

ب) $\binom{ن}{٢} = ٣٦ = \frac{ل\,(ن\,،\,٢)}{!٢}$

$= \frac{ل\,(ن\,،\,٢)}{١\times٢} = ٣٦$

∴ ل (ن ، ٢) = ٧٢

∴ عددين متتالين حاصل ضربهم = ٧٢ = ٨×٩ ن = ٩

إذا كان $\binom{ن}{٣}$ = ٢٠ فجد ل (ن ، ٣)

الحل $\binom{ن}{٣} = \frac{ل\,(ن\,،\,٣)}{!٣}$

$= \frac{ل\,(ن\,،\,٣)}{١\times٢\times٣} = ٢٠$ ∴ ل (ن ، ٣) = ٢٠×٦ = ١٢٠

١) **إذا كان ل (ن ، ر) = ٢٠**

ن = ١٠ فجد $\binom{ن}{ر}$ ، ر

٢) **إذا كان ل (ن ، ر) = ٢١٠**

$\binom{ن}{ر}$ = ٣٥ فجد ن ، ر

الحل ⟸ ١) $\binom{ن}{ر} = \frac{ل\,(ن\,،\,ر)}{!ر}$

$= \frac{٢٠}{!ر}$ ⟸ ١٠ = $\frac{٢٠}{!ر}$ = ٢ ∴ ر = ٢

ل (ن ، ر) = ل (ن ، ٢) = ٢٠

⟸ عددين متتاليين حاصل ضربهم = ٢٠ = ٥×٤

٢) $\binom{ن}{ر} = \frac{ل\,(ن\,،\,ر)}{!ر}$

$= \frac{٢١٠}{!ر}$ ⟸ ٣٥ = $\frac{٢١٠}{!ر}$ = ٦

⟸ ر ! = ٣×٢×١ = ٣

ل (ن ، ر) = ل (ن ، ٣) = ٢١٠

ن × (ن – ١) × (ن – ٢) = ٢١٠ ⟸ ٣ أعداد متتالية حاصل ضربهم = ٢١٠ = ٧×٦×٥ ∴ ن = ٧

إذا كان ل (ن ، ١) = $\binom{ن}{٢}$ فجد قيمة ن

ل (ن ، ١) = ن

$\binom{ن}{٢} = \frac{ل\,(ن\,،\,٢)}{!٢}$

$= \frac{ن\times(ن-١)}{١\times٢} = ن$

سؤال وزاره ٢٠٠٦

ن^{٢} – ن = ٢ن

⟸ ن^{٢} – ٢ن – ن = ٠

ن^{٢} – ٣ن = صفر ن (ن – ٣) = ٠

⟸ ن = صفر أو ٣ مرفوض , بس حدا بعرف ليش ☺ ؟

إذا كان $\binom{ن}{ن-٢} = ل\ (٣ ، ٢)$ **فجد قيمة ن ؟**

سؤال وزاره ٢٠٠٦

الحل ==> $ل(٣ ، ٢) = ٣\times٢ = ٦$

$\binom{ن}{ن-٢} = \binom{ن}{٢} = \frac{ل(ن ، ٢)}{!٢} = ٦$

$ل(ن ، ٢) = ٦\times٢ = ١٢$

$ن \times (ن-١) = ١٢ = ٤\times٣$ ===> $ن = ٤$

سؤال وزاره ٢٠١١

اذا كان $\binom{س}{٤} = \binom{س}{٥}$ **فان قيمه س تساوي ؟**

أ) ٤ ب) ٥

ج) ٩ د) ٢٠

ما عدد الطرق الممكنة لاختيار (٦) أسئلة للإجابة عنها في الامتحان الوزاري من عدد أسئلة يتكون من ٨؟

عدد الطرق $= \binom{٨}{٦} = \frac{!٨}{!٦ \times (٨-٦)!}$

$= \frac{!٦ \times ٧ \times ٨}{!٦ \times ١ \times ٢} = ٢٨$

ما عدد الطرق التي يمكن بها إجراء مباريات التصفية للعبة الشطرنج من بين (٦) لاعبين؟

الحل: $\binom{٦}{٢} = \frac{!٦}{!٢ \times (٦-٢)!}$

$= \frac{!٤ \times ٥ \times ٦}{!٤ \times ١ \times ٢} = ١٥$ عدد اللاعبين في كل مرة يساوي ٢

سؤال وزاره ٢٠٠٩

بكم طريقة يمكن اختيار معلمين و طالبين لتشكيل لجنة من بين ٥ معلمين و ٩ طلاب؟

الحل: يتم اختيار معلمين من بين ٥ معلمين بطرق عددها $= \binom{٥}{٢} = \frac{!٥}{!٢ \times (٥-٣)!} = \frac{!٣ \times ٤ \times ٥}{!٣ \times ١ \times ٢} = ١٠$

و يتم اختيار طالبين من بين ٩ طلاب بطرق عددها $= \binom{٩}{٢} = \frac{!٩}{!٢ \times (٩-٢)!} = \frac{!٧ \times ٨ \times ٩}{!٧ \times ١ \times ٢} = ٣٦$

عدد طرق تشكيل لجنة $= ١٠ \times ٣٦ = ٣٦٠$ طريقة

في إحدى الكليات الجامعية (٣١) مدرسا أرادت الإدارة أن تختار منهم عميدا للكلية و نائبا للعميد فان عدد الطرق الممكنة لذلك هو؟

أ- ٣١ ب- $\binom{٣١}{٢}$

جـ - ٢! د – ل (٣١ ، ٢)

الجواب فرع (د)

بكم طريقة بمكن اختيار ٤ مهندسين و فنين اثنين لتشكيل لجنة صيانة مكونة من بين ٧ مهندسين و ٤ فنين؟

الحل:

و = ×
او = +

عدد طرق اختيار المهندسين

$= \binom{٧}{٤} = \frac{!٧}{!٤ \times (٧-٤)!}$

$= \frac{!٤ \times ٥ \times ٦ \times ٧}{!٤ \times ١ \times ٢ \times ٣} = ٣٥$

عدد طرق اختيار الفنيين

$= \binom{٤}{٢} = \frac{!٤}{!٢ \times (٤-٢)!} = \frac{!٢ \times ٣ \times ٤}{!٢ \times ١ \times ٢} = ٦$

∴ عدد طرق تشكيل اللجنة $= ٣٥ \times ٦ = ٢١٠$

إذا كان عدد أعضاء مجلس إدارة إحدى الشركات هو (١٠) أعضاء من بينهم (٤) سيدات ما عدد الطرق الممكنة لاختيار رجلين وسيدة من الإعظاء لتمثيل الشركة في مؤتمر دوري؟

عدد الرجال $= ١٠ - ٤ = ٦$ رجال عدد النساء $= ٤$ نساء

عدد طرق اختيار الرجال

$= \binom{٦}{٢} = \frac{!٦}{!٢ \times (٦-٢)!} = \frac{!٤ \times ٥ \times ٦}{!٤ \times ١ \times ٢} = ١٥$

عدد طرق اختيار النساء $= \binom{٤}{١} = ٤$

∴ عدد طرق اختيار اللجنة $= ١٥ \times ٤ = ٦٠$

من بين (٥) أطباء نريد تكوين لجنة ما عدد الطرق الممكنة إذا كانت تحوي : ١) ٣ أطباء ٢) ٣ أطباء على الأقل؟

(١) عدد الطرق

$= \binom{٥}{٣} = \frac{!٥}{!٣ \times (٥-٣)!} = \frac{!٣ \times ٤ \times ٥}{!٣ \times ١ \times ٢} = ١٠$

(٢) ٣ أطباء + ٤ أطباء + ٥ أطباء

بما انه ذكر على الأقل ٣ أطباء فانه ممكن ٣او٤او٥

$= \binom{٥}{٣} + \binom{٥}{٤} + \binom{٥}{٥} = ١٠ + ٥ + ١ = ١٦$

مجموعة مكونة من ٨ معلمين و٣ معلمات جد عدد الطرق التي يمكن بها تكوين لجنة رباعية منهم في كل من الحالات التالية ؟

أ) تتكون اللجنة من ٣ معلمين ومعلمة

ب) رئيس اللجنة ونائبه من المعلمات والباقي من المعلمين

جـ) تكون اللجنة من معلمتين على الأقل

(أ) عدد الطرق لاختيار المعلمين

$= \binom{٨}{٣} = \frac{!٨}{!٣ \times (٨-٣)!} = \frac{!٥ \times ٦ \times ٧ \times ٨}{!٥ \times ١ \times ٢ \times ٣} = ٥٦$

عدد طرق اختيار معلمة $= \binom{٣}{١} = ٣$

عدد طرق اختيار اللجنة من ٣ معلمين ومعلمة $= ٥٦ \times ٣ = ١٦٨$

ب) عدد الطرق اختيار رئيس اللجنة = $\binom{٣}{١}$ = ٣

عدد طرق اختيار الرئيس و النائب = ٣ + ٣ = ٦

عدد طرق اختيار نائب الرئيس = $\binom{٣}{١}$ = ٣

عدد طرق اختيار من المعلمين = $\binom{٨}{٢}$

$= \frac{!٨}{!١٢ \times !٦} = \frac{٨ \times ٧ \times !٦}{!٦ \times ١ \times ٢} = ٢٨$

عدد الطرق = ٦ × ٢٨ = ١٦٨

جـ) معلمين على الأقل تعني معلمين و معلمتين أو ٣ معلمات و معلم

$= \binom{٣}{٢} \times \binom{٨}{٢} + \binom{٣}{٣} \times \binom{٨}{١}$

$= (٣ \times ٢٨) + (١ \times ٨) = ٩٢$

في مسابقة اختيار من متعدد إذا كانت تتكون من نوعين، ٦ من النوع الأول و ٥ من النوع الثاني، و يختار المتسابق ٣ أسئلة للإجابة عنها لاجتياز المسابقة. ما عدد طرق اختيار الأسئلة إذا كان على المتسابق أن يختار

١) سؤال من النوع الأول و سؤالين من النوع الثاني

٢) سؤالين على الأقل من النوع الأول

٣) جميع الأسئلة من نوع واحد

الحل:

١) عدد الطرق = $\binom{٦}{١} \times \binom{٥}{٢}$

$= \frac{!١٦}{!١ \times !٥} \times \frac{!٥}{!٢ \times !٣} = ٦ \times ١٠ = ٦٠$

٢) عدد الطرق = عدد طرق اختيار سؤالين من النوع الأول و سؤالين من النوع الثاني + عدد طرق اختيار ٣ أسئلة من النوع الأول

$= \binom{٦}{٢} \times \binom{٥}{١} + \binom{٦}{٣}$

$= (١٥ \times ٥) + ٢٠ = ٧٥ + ٢٠ = ٩٥$

٣) عدد الطرق = عدد طرق اختيار جميع الأسئلة من النوع الأول + عدد طرق اختيار جميع الأسئلة من النوع الثاني

$= \binom{٦}{٣} + \binom{٥}{٣} = ٢٠ + ١٠ = ٣٠$

مجلس الآباء و المعلمين في إحدى المدارس يتكون من ٥ من الآباء و ٣ من المعلمين، قرر المجلس اختيار معلم واحد و ٢ من الآباء للمشاركة في احتفال ما، بكم طريقة مختلفة يمكنه ذلك؟

أ) ٢ ب) ١٥ جـ) ٣٠ د) ٢٠

عدد الطرق لاختيار معلم = $\binom{٣}{١}$ = ٣

سؤال وزاره ٢٠٠٦

عدد الطرق لاختيار الآباء

$= \binom{٥}{٢} = \frac{!٥}{!٣ \times !٢} = \frac{٥ \times ٤ \times !٣}{!٣ \times ١ \times ٢} = ١٠$

عدد الطرق الآباء = ٣ × ١٠ = ٣٠ الجواب فرع جـ

بكم طريقة مختلفة يمكن اختيار ٤ أسئلة الإجابة عنها من بين ٦ أسئلة؟

أ) ل (٦،٤) ب) $\binom{٦}{٤}$ جـ) ٦! د) ٤!

الجواب فرع ب

بكم طريقة يمكن اختيار ٣ أشخاص على الأقل للذهاب إلى العمرة من بين مجموعة مكونة من ٥ أشخاص ؟

الحل: بما انه ذكر ٣ أشخاص على الأقل

يمكن أن يكون ٣ أشخاص أو ٤ أشخاص أو ٥ أشخاص

عدد الطرق = $\binom{٥}{٣} + \binom{٥}{٤} + \binom{٥}{٥}$

$= \frac{!٥}{!٣ \times !٢} + \frac{!٥}{!٤ \times !١} + \frac{!٥}{!٥ \times !١}$

$= \frac{٥ \times ٤ \times !٣}{٢ \times ١ \times !٣} + \frac{٥ \times !٤}{!٤ \times ١} + ١$

= ١٠ + ٥ + ١ = ١٦ طريقة

بكم طريقة مختلفة يمكن اختيار (٤) طلاب و (٣) طالبات لتشكيل لجنهفي احدى الكليات من بين (١٠) طلاب و (٥) طالبات ؟

أ) $\binom{١٠}{٤}\binom{٥}{٣}$ **ب)** $\binom{١٠}{٣}\binom{٥}{٤}$

ج) ل(١٠ , ٤) × ل(٣،٥)

د) ل(١٠ , ٣) × ل(٤،٥)

جد قيمه (ن) التي تحقق المعادله ل(ن,٣) = ٤ل(ن,٢)

المتغير العشوائي المنفصل

يلزمنا التعرف في هذا الدرس على ٥ مفاهيم جديدة و لكي نقوم بفهمها بطريقة سلسة سوف نأخذ المثال التالي للتوضيح .

عند رمي قطعة نقد فئة النصف دينار مرتين في الجو و رمزنا للصورة بالرمز ص و الكتابة بالرمز ك فان احتمالية ظهور الصورة هي

{(ص ، ص) ، (ص ، ك) ، (ك ، ص) ، (ك ، ك) }

وهذا يسمى **الفضاء العينى Ω و تلفظ اوميجا**

Ω = {(ص ، ص)،(ص ، ك)،(ك ، ص)،(ك ، ك) }

و بما إننا قمنا برمي القطعة مرتين فانه احتمال ظهور (ص,ص) هو مرتين و يرمز له كالتالي :

قيم المتغير العشوائي س

س (ص ، ص) = ٢

س (ص ، ك) = ١

س (ك ، ص) = ١

س (ك ، ك) = ٠

و يأخذ س القيم = { ٠ ، ١ ، ٢}

و إن احتمال حدوث كل من تلك القيم ل(س)

ل(س= ٢) = ل(ص، ص) = $\frac{١}{٤}$

ل(س= ١) = ل(ص ، ك) + ل(ك ، ص) = $\frac{٢}{٤}$

ل(س= ٠) = ل(ك ، ك) = $\frac{١}{٤}$

احتمال الحادث ح = عدد عناصر الحادث ح / عدد عناصر Ω

و إذا ربطنا كل قيمة مع احتمالها كالجدول التالي

جدول التوزيع الاحتمالي

س	٠	١	٢
ل(س)	$\frac{١}{٤}$	$\frac{٢}{٤}$	$\frac{١}{٤}$

اما الازواج المرتبه على الشكل التالي :

التوزيع الاحتمالى

{ (٠ ، $\frac{١}{٤}$) ، (١ ، $\frac{٢}{٤}$) ، (٢ ، $\frac{١}{٤}$)}

- إذا انتبهنا فان ل(س) = $\frac{١}{٤}$ + $\frac{٢}{٤}$ + $\frac{١}{٤}$ = ١ **دائما**
- يسمى ل اقتران احتمال للمتغير العشوائي المنفصل س إذا كان:

١) ل(س) ≥ صفر (اي ان الاحتمال موجب و اقل من ١)

٢) Σ ل(س) = ١ (مجموع كل الاحتمالات = ١) .

إذا دل المتغير العشوائي س على عدد الأطفال الغير ذكور في تجربة عشوائية لعائلة مكونة من ٣ أطفال و تم تسجيل النتائج حسب الجنس و تسلسل الولادة فجد:

١) قيم س ٢) جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي س

و = ولد ب = بنت

Ω = {(و،و،و) ، (و،و،ب) ، (و،ب،و) ، (ب،و،و) ، (ب،و،ب) ، (و،ب،ب) ، (ب،ب،ب) ، (ب،ب،و)}

بما انه يريد الأطفال الغير ذكور (يريد الإناث)

س (و،و،و) = ٠

س(و،و،ب) = س (و،ب،و) = س(ب،و،و) = ١ س(ب،و،ب) = س

(و،ب،ب) = س(ب،ب،و) = ٢ س(ب،ب،ب) = ٣

١) قيم س { ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣}

٢)

س	٠	١	٢	٣
ل(س)	$\frac{١}{٨}$	$\frac{٣}{٨}$	$\frac{٣}{٨}$	$\frac{١}{٨}$

إذا كان التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي س معطى بالمجموعة {(٠ ، ٠,٣) ، (١ ، ٠,٤) ، (٢ ، ب) } فما قيمة ب

ل(٠) + ل(١) + ل(٢) = ١ ٠,٣ + ٠,٤ + ب = ١ ب = ٠,٣

يمثل الجدول المجاور التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي س فما قيمة الثابت د؟

س	٠	١	٢	٣
ل(س)	٠,١	٠,٣٥	د	٠,١٣

ل(٠) + ل(١) + ل(٢) +ل(٣) = ١

٠,١ + ٠,٣٥ + د +٠,١٣ = ١ ٠,٥٨ + د = ١

د = ١ ـ ٠,٥٨ = ٠,٤٢

إذا كان التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المنفصل (س) معطى في الجدول التالي فان قيمة ج تساوي

س	٠	١	٢	٣
ل(س)	٠,٢	جـ	٠,٣	٠,١

أ) ٠,٢ ب) ٠,١ جـ)٠,٣ د)٠,٤

سؤال وزارة ٢٠٠٨

ل(٠) + ل(١) + ل(٢) +ل(٣) = ١

٠,٢ + ٠,٣ + ٠,١ + ج = ١

٠,٦ + ج = ١ ج = ٠,٤ الجواب فرع د

إذا كانت قيم س = { ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣} متغيرا عشوائيا للاقتران الاحتمالي و كان ل(٠) = ٠,٢ ، ل(١) = ٠,٢٥ ، ل(٣) = ٠,٣٥ , فجد ل(٢)؟

سؤال وزاره ٢٠١١

ل(٠) + ل(١) + ل(٢) +ل(٣) = ١

٠,٢ + ٠,٢٥ + ل(٢) + ٠,٣٥ = ١

ل(٢) = ١ ـ ٠,٨ = ٠,٢

إذا كان التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المنفصل (س) معطى بالمجموعه :

{ (١ , ٠,٢) ، (٢ ، ٠,١) ، (٣ ، ٠,٤) ، (٤ ، ك)} فان قيمه ك تساوي ؟

أ) ٠,٢ ب) ٠,٣

ج) ٠,٥ د) ٠,٧

توزيع ذات الحدين

إذا قمنا بإجراء تجربة معينة ن من المرات و كان احتمالين لها احديهما احتمال الفشل و الأخر احتمال النجاح، فإذا كان احتمال النجاح فى المحاولة هو أ و كان س يمثل عدد مرات النجاح

$$ل(س = ر) = \binom{ن}{ر} (أ)^{ر} (1-أ)^{ن-ر}$$

ن = عدد مرات إجراء التجربة (العدد الكلي)
ر = العدد المطلوب من التجربه
س = متغير عشوائي يمثل عدد مرات النجاح
أ = احتمال النجاح في المرة الواحدة

إذا كان هنالك مجموعة شباب يتسابقون على رمي السهم على دائرة فيها نقطة في المنتصف فإذا كان احتمال أن يصيبها احدهم في كل سهم يرميه على الدائرة يساوي (٠,٧) فإذا رمى (٥) أسهم على الهدف فما احتمال:

١) إصابة الهدف ٣ مرات
٢) إصابة الهدف ٥ مرات
٣) عدم إصابة الهدف

ن = ٥ أ = ٠,٧

١) $ل(س=٣) = \binom{٥}{٣} (٠,٧)^{٣} (١-٠,٧)^{٥-٣}$

$= \binom{٥}{٣} (٠,٧)^{٣} (١-٠,٧)^{٢}$

$= ١٠ \times ٠,٣٤٣ \times ٠,٩ = ٠,٣٠٨٧$

٢) $ل(س=٥) = \binom{٥}{٥} (٠,٧)^{٥} (١-٠,٧)^{٥-٥}$

$= ١ \times (٠,٧)^{٥} \times ١ = ٠,١٦٨٧$

٣) $ل(س=٠) = \binom{٥}{٥} (٠,٧)^{٠} (١-٠,٧)^{٥-٠}$

$= ١ \times ١ \times (٠,٣)^{٥} = ٠,٠٠٢٤٣$

إذا كان هناك شخص يقوم برمي قطعة من النقود ١٠ مرات
١) ما احتمال ظهور الصورة ٤ مرات
٢) ما احتمال ظهور الصورة في كل مرة

ن = ١٠ أ = $\frac{١}{٢}$ (صورة أو كتابة)

١) $ل(س=٤) = \binom{١٠}{٤} \left(\frac{١}{٢}\right)^{٤} \left(\frac{١}{٢}\right)^{٦} = ١٠^{٢} \times \frac{١}{٢}^{١٠}$

٢) $ل(س=١٠) = \binom{١٠}{١٠} \left(\frac{١}{٢}\right)^{١٠} \left(\frac{١}{٢}\right)^{٠} =$

$١ \times ١ \times \left(\frac{١}{٢}\right)^{١٠} = \left(\frac{١}{٢}\right)^{١٠}$

عند رمي حجر النرد أربع مرات متتالية فما احتمال ظهور العدد ٥ في ٣ مرات

ن = ٤ ر = ٣ أ = $\frac{١}{٦}$ مرة من ٦ أوجه

$ل(٣) = \binom{٤}{٣} \left(\frac{١}{٦}\right) \left(\frac{٥}{٦}\right)^{٣} = ٤ \times \frac{١}{٢١٦} \times \frac{٥}{٦} = \frac{٢٠}{١٢٦٩}$

إذا كانت نسبة التالف من إنتاج مصنع الألبسة (٠,٠٠١) و أخذت عينة حجمها (٥) من الألبسة بطريقة عشوائية فما احتمال أن تكون جميعها صالحة؟

الحل:

ن = ٥ ر = ٠ أ = ٠,٠٠١

$ل(٠) = \binom{٥}{٠} (٠,٠٠١)^{٠} (٠,٩٩٩)^{٥}$

$= (٠,٩٩٩)^{٥}$

إذا كان احتمال إصابة صياد للحمامة الطائرة في الرمية الواحدة $\frac{٢}{٥}$ و أطلق هذا الصياد ٣ طلقات
١) ما احتمال أن يصيب الهدف في ٣ مرات
٢) ما احتمال أن يصيب الهدف في ٣ مرات على الأقل

الحل:

ن = ٥ أ = $\frac{٢}{٣}$

١) ر = ٣

$ل(٣) = \binom{٥}{٣} \left(\frac{٢}{٣}\right)^{٣} \left(\frac{١}{٣}\right)^{٢}$

$= ١٠ \times \frac{٨}{٢٧} \times \frac{١}{٩} = \frac{٨٠}{٢٤٣}$

٢) ل(٣) + ل(٤) + ل(٥)

$= \frac{٨٠}{٢٤٣} + \binom{٥}{٤} \left(\frac{٢}{٣}\right)^{٤} \left(\frac{١}{٣}\right)^{١} + \binom{٥}{٥} \left(\frac{٢}{٣}\right)^{٥} \left(\frac{١}{٣}\right)^{٠}$

$= \frac{٨٠}{٢٤٣} + (٥ \times \frac{١٦}{٨١} \times \frac{١}{٣}) + (١ \times \frac{٣٢}{٢٤٣} \times ١)$

$= \frac{٨٠}{٢٤٣} + \frac{٨٠}{٢٤٣} + \frac{٣٢}{٢٤٣} = \frac{١٩٢}{٢٤٣}$

إذا كان س متغير عشوائي ذا حدين معاملاه (ن = ٥) ، (أ = ٠,٤) فجد كلا مما يلي:
١) ل (س = ٢) ٢) ل (س = ٤) ٣) ل (س ≥ ١)
٤) ل (س > ٣) ٥) ل (٢< س ≤ ٤)

١) ل (س = ٢) = $\binom{٥}{٢}$ (٠,٤)^{٢} (١ – ٠,٤)$^{٥-٢}$

= $\binom{٥}{٢}$(٠,٤)^{٢} (٠,٦)^{٣}

٢) ل (س = ٤) = $\binom{٥}{٤}$ (٠,٤)^{٤} (٠,٦)^{١}

٣) ل (س ≥ ١) = ل(١) + ل(٠)

= $\binom{٥}{١}$ (٠,٤)^{١} (٠,٦)^{٤} + $\binom{٥}{٠}$ (٠,٤)^{٠} (٠,٦)^{٥}

= $\binom{٥}{٢}$× ٠,٤ × (٠,٦)^{٤} + ١ × ١× (٠,٦)^{٥}

= (٠,٦)^{٤} + (٠,٦)^{٥}

٤) ل (س > ٣) = ل(٤) + ل(٥)

= $\binom{٥}{٤}$ (٠,٤) ^{٤} (٠,٦) ^{١} + $\binom{٥}{٥}$ (٠,٤) ^{٥} (٠,٦) ^{٠}

٥) ل(٢< س ≤ ٤) = ل(٣) + ل(٤)

= $\binom{٥}{٣}$(٠,٤)^{٣} (٠,٦)^{٢} + $\binom{٥}{٤}$(٠,٤)^{٤} (٠,٦)^{١}

إذا كان احتمال إصابة هدف يساوي ٨٠% فما احتمال إصابة هدفين على الأقل إذا تم إطلاق ٣ مرات؟

ن = ٣ أ = ٨٠% = ٠,٨

ل (س ≤ ٢) = ل(٢) + ل(٣)

= $\binom{٣}{٢}$ (٠,٨)^{٢} (٠,٢)^{١} + $\binom{٣}{٣}$(٠,٨)^{٣} (٠,٢)^{٠}

= (٣ × ٠,٦٤ × ٠,٢) + (١× ٠,٥١٢ × ١)

= ٠,٣٨٤ + ٠,٥١٢ = ٠,٨٩٦

اذا كان س متغير عشوائياً ذا حدين ومعاملاه ن = ٣ ، أ = ٠,٨ فجد ١) قيم س ٢) ل (س = ٣) ٣) جدول التوزيع الاحتمالي

(١) ن = ٣ ← قيم س = { ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣}

(٢) ل (س = ٣) = $\binom{٣}{٣}$(٠,٨)^{٣}(١ – ٠,٨)$^{٣-٣}$

= ١ × ٠,٥١٢ × ١ = ٠,٥١٢

(٣) جدول التوزيع الاحتمالية

∴ نجد ل (٠) ، ل (١) ، ل (٢) ، ل (٣)

ل (٠) = $\binom{٣}{٠}$(٠,٨)^{٠}(٠,٢)^{٣}

= ١ × ١ × ٠,٠٠٨ = ٠,٠٠٨

ل (١) = $\binom{٣}{١}$(٠,٨)^{١}(٠,٢)^{٢}

= ٣ × ٠,٨ × ٠,٠٤ = ٠,٠٩٦

ل (٢) = $\binom{٣}{٢}$(٠,٨)^{٢}(٠,٢)^{١}

= ٣ × ٠,٦٤ × ٠,٢ = ٠,٣٨٤

ل (٣) = ٠,٥١٢

جدول التوزيع الاحتمالي

س	٠	١	٢	٣
ل(س)	٠,٠٠٨	٠,٠٩٦	٠,٣٨٤	٠,٥١٢

اذا كان س متغيرا عشوائيا ذا الحدين معاملاه ن = ٢ , أ = ٠,١ , اكتب جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي س

إذا كانت نسب القطع التالفة (المعيبة) في إنتاج مصنع معين هي ١٠٪ وأخذنا ٥ قطع من إنتاج المصنع بطريقة عشوائية ، فما احتمال
(١) أن لا تجد قطع معيبة ؟
(٢) أن يكون بينها قطعة واحدة معيبة فقط ؟
(٣) أن لا يزيد عدد القطع التالفة على قطعة واحدة ؟

ن = ٥ أ = ١٠٪ = ٠,١

(١) أن لا نجد قطعة تالفة ← س = ٠

ل(٠) = $\binom{٥}{٠}$× (٠,١)^{٠}(٠,٩)^{٥}

= ١ × ١ × (٠,٩)^{٥}= (٠,٩)^{٥}

ل(س = ١) = $\binom{٥}{١}$× (٠,١)^{١}(٠,٩)^{٤}

= ٥ × (٠,١) (٠,٩)^{٤}= (٠,٩)^{٤}

ل(س ≥ ١) = ل (١) + ل (٠)

$\binom{٥}{١}$ × (٠,١)^{١}(٠,٩)^{٤} + $\binom{٥}{٠}$(٠,١)^{٠}(٠,٩)^{٥}

سجلت أحدى القابلات في أحدى المستشفيات ولادة ثلاث أطفال في نفس اليوم حسب الجنس و تسلسل الولادة فإذا علمت إن الأطفال ولدوا من ثلاث أمهات و إن احتمال ولادة ذكر يساوي احتمال ولادة أنثى :
(ا) إذا دل المتغير العشوائي س كل عدد الأطفال الذكور المسجلين في ذلك المستشفى فاكتب قيم س الممكنة ؟
(ب) ما احتمال إن يكون جميع المواليد من الإناث ؟

ن= ٣ أ = ٠,٥

(ا) س (عدد الذكور) = { ٠ ، ١ ، ٢، ٣ }

(ب) ل(٠) = $\binom{٣}{٠}$ (٠,٥)^{٠} (١ – ٠,٥)^{٣}

= ١ × ١ × ٠,١٢٥ = ٠,١٢٥

شركة صناعية بها ٥ غرف إذا كان احتمال زيادة عدد الغرف في السنة الخامسة بعد تأسيسها هو ٠,٢ فاحسب احتمال :
(١) إن لا تحتاج زيادة أي غرفة ؟
(٢) إن تحتاج إلى غرفتين فقط ؟
(٣) إن تحتاج غرفتين على الأكثر؟
(٤) إن تحتاج غرفة واحدة على الأقل ؟

الحل: ن = ٥ آلات أ = ٠,٢

(١) إن لا تحتاج زيادة أي غرفة ← س = ٠

$$ل(٠) = \binom{٥}{٠}(٠,٢)^{٠}(٠,٨)^{٥}$$

$$= ١ \times ١ \times (٠,٨)^{٥} = (٠,٨)^{٥}$$

(٢) إلى غرفتين فقط ← س = ٢

$$ل(٢) = \binom{٥}{٢}(٠,٢)^{٢}(٠,٨)^{٣}$$

$$= ١٠ \times (٠,٢)^{٢}(٠,٨)^{٣} = ١٠ \times ٠,٠٤ \times (٠,٨)^{٣}$$

(٣) غرفتين على الأكثر←

ل (٢) + ل (١) + ل (٠)

$$= \binom{٥}{٢}(٠,٢)^{٢}(٠,٨)^{٣} + \binom{٥}{١} \times (٠,٢)^{١}(٠,٨)^{٤}$$

$$+ \binom{٥}{٠} \times (٠,٢)^{٠} \times (٠,٨)^{٥}$$

(٤) غرفة واحدة على الأقل

= ل (١) + ل (٢) + ... + ل (٥)

= ١ − ل (٠)

$$= ١ - \binom{٥}{٠}(٠,٢)^{٠}(٠,٨)^{٥}$$

إذا كان س متغيراً عشوائياً ذي حدين ، معاملات ن = ٤ أ = ٠,٣ أوجد :
(أ) ل (س = ٢) (ب) ل (س ≤ ٣)

الحل:

$$(أ)\ ل(س = ٢) = \binom{٤}{٢}(٠,٣)^{٢}(٠,٧)^{٢}$$

$$= ٦ \times ٠,٩ \times ٠,٤٩ = ٠,٢٦٤٦$$

(ب) ل (س ≤ ٣) = ل (٣) + ل (٤)

$$= \binom{٤}{٣}(٠,٣)^{٣}(٠,٧)^{١} + \binom{٤}{٤}(٠,٣)^{٤}(٠,٧)^{٠}$$

$$= (٤ \times ٠,٠٢٧ \times ٠,٧) + (١ \times ٠,٠٠٨١ \times ١)$$

$$= ٠,٠٧٥٦ + ٠,٠٠٨١ = ٠,٠٨٣٧$$

إذا كان س متغيراً عشوائياً ذا حدين ن = ٣ و كان ل (س ≤ ١) = $\frac{١٩}{٢٧}$ فجد:
(١) قيمة أ (٢) ل (س = ٢)

(١) ل (س ≤ ١) = $\frac{١٩}{٢٧}$

= ل (١) + ل (٢) + ل (٣) = ١ − ل (٠)

∴ ل (٠) = ١ − $\frac{١٩}{٢٧}$ = $\frac{٨}{٢٧}$

$$ل(٠) = \binom{٣}{٠}(أ)^{٠}(١-أ)^{٣} = \frac{٨}{٢٧}$$

$$١ \times ١ \times (١-أ)^{٣} = \frac{٨}{٢٧}$$

$$١ - أ = \sqrt[٣]{\frac{٨}{٢٧}} = \frac{٢}{٣}$$

$$أ = ١ - \frac{٢}{٣} \leftarrow أ = \frac{١}{٣}$$

$$(٢)\ ل(س = ٢) = \binom{٣}{٢}\left(\frac{١}{٣}\right)^{٢}\left(\frac{٢}{٣}\right)^{١}$$

$$= ٣ \times \frac{١}{٩} \times \frac{٢}{٣} = \frac{٢}{٩}$$

إذا كان س متغيراً ذا حدين حيث ن = ٣ وكان ل (س ≤ ٢) = $\frac{٩٨}{١٢٥}$ فجد :
(١) قيمة أ (٢) ل (س = ٢)

(١) ل (س ≤ ١) = ل (٠) + ل (١) + ل (٢) = $\frac{٩٨}{١٢٥}$ = ١ − ل (٣)

∴ ل (٣) = ١ − $\frac{٩٨}{١٢٥}$ = $\frac{٢٧}{١٢٥}$

$$ل(٣) = \binom{٣}{٣}(أ)^{٣}(١-أ)^{٠} = \frac{٢٧}{١٢٥}$$

$$أ^{٣} = \frac{٢٧}{١٢٥} \leftarrow أ = \frac{٣}{٥}$$

$$(٢)\ ل(س = ٢) = \binom{٣}{٢}\left(\frac{٣}{٥}\right)^{٢}\left(\frac{٢}{٥}-١\right)^{١}$$

$$= ٣ \times \frac{٩}{٢٥} \times \frac{٢}{٥} = \frac{٥٤}{١٢٥}$$

اذا كان س متغيرا عشوائيا ذا الحدين معاملاه ن = ٣ , أ=٠,٦ فجد ل (س ≤ ٢) ؟

اذا كانت نسبه القطع المعيبه في انتاج احد المصانع ٥٪ , اخذت (٤) قطع من انتاج المصنع بطريقه عشوائيه . ما احتمال ان يكون عدد القطع لبمعيبه ثلاث قطع على الاقل ؟

العلامه المعيـــــاريـــه

ينصب اهتمامنا في بعض الحالات على إيجاد قيمة معينة مقارنة بباقي القيم لذلك فإننا نقوم بإيجاد الانحرافات المعيارية لتلك القيمة عن الوسط الحسابي و هكذا نكون قد حولنا هذه القيمة إلى قيمة جديدة تسمى

(العلامة المعيارية)

$$ز_س = \frac{س - \bar{س}}{ع}$$

ز س = العلامة المعيارية
س = العلامة الأصلية (الخام)
$\bar{س}$ = الوسط الحسابي
ع = الانحراف المعياري

إذا كان الوسط الحسابي لتوزيع معين يساوي ٧٢ و الانحراف المعياري يساوي ٨ فجد العلامات المعيارية للعلامات الأصلية ٨٤ ، ٢٠ ، ٧٥ ، ٧٢ ؟

س = ٧٢ $\quad \bar{ع} = ٨$

$ز_{٨٤} = \frac{٨٤ - ٧٢}{٨} = \frac{١٢}{٨} = ١,٥$

$ز_{٢٠} = \frac{٢٠ - ٧٢}{٨} = \frac{-٥٢}{٨} = -٦,٥$

$ز_{٥٧} = \frac{٥٧ - ٥٢}{٨} = \frac{٥}{٨}$

$ز_{٧٢} = \frac{٧٢ - ٧٢}{٨} =$ صفر

إذا كان الوسط الحسابي لعلامات صف هو ٧٠ ، و الانحراف المعياري هو ٦ فجد العلامات الأصلية للعلامات المعيارية التالية:

(أ) ١,٥ $\quad$ (ب) – ٣

الحل: س = ٧٠ $\quad \bar{ع} = ٦$

(أ) $١,٥ = \frac{س - ٧٠}{٦} \leftarrow ١,٥ \times ٦$

$س - ٧٠ \leftarrow ٩ + ٧٠ = س \leftarrow س = ٧٩$

(ب) $-٣ = \frac{س - ٧٠}{٦}$

$\leftarrow س = -١٨ + ٧٠ = ٥٢$

في توزيع معين كان الوسط الحسابي (٥٦) وحصل طالب على العلامة ٨٠ و كانت علامته المعيارية تساوي ٤ . فجد الانحراف المعياري ؟

الحل: س = ٥٦ ، س = ٨٠ ، ز = ٤ ، ع = ؟

$ز_س = \frac{س - \bar{س}}{ع}$

$٤ = \frac{٨٠ - ٥٦}{ع} \leftarrow ٤ع = ٢٤ \leftarrow ع = \frac{٢٤}{٤} = ٦$

في توزيع ما كان الانحراف المعياري يساوي (١٢) وحصل طالب على العلامة (٨٥) و كانت علامته المعيارية تساوي (٣) فجد الوسط الحسابي ؟

الحل: س = ؟ ، س = ٨٥ ، ز = ٣ ، ع = ١٢

$ز_س = \frac{س - \bar{س}}{ع}$

$٣ = \frac{٨٥ - س}{ع} \leftarrow ٣ \times ١٢ = ٨٥ - س$

$\leftarrow س = ٨٥ - ٣٦ = \bar{٤٩}$

إذا كانت علامة طالب في الرياضيات (٨٦) و علامته في اللغة العربية (٧٨) ، الوسط الحسابي لعلامات الرياضيات (٧٠) و الانحراف المعياري له (٨)، أما الوسط الحسابي للغة العربية (٧٣) و الانحراف المعياري له(٥) ففي أي المبحثين كان مستوى تحصيل الطالب أفضل؟

الحل:

الرياضيات س = ٨٦ ، س = ٧٠ ، $\bar{ع} = ٨$

$ز_{٨٦} = \frac{س - \bar{س}}{ع} = \frac{٨٦ - ٧٠}{٨} = \bar{٢}$

اللغة العربية س = ٧٨ ، س = ٧٣ ، $\bar{ع} = ٥$

$ز_{٧٨} = \frac{٧٨ - ٧٣}{٥} = \frac{٥}{٥} = ١$

∴ بما ان ٢ > ١ ⟵ مستواه في الرياضيات أفضل من مستواه في اللغة العربية

في امتحان لصف ما حصل طالبات مع العلامتين ٧٠ ، ٨٤ و كانت علامتيهما المعارتين هما ١ ، ٣ ، فجد الوسط الحسابي و الانحراف المعياري لعلامات الصف؟

الحل: الطالب الأول س = ٧٠ ، ز = ١
الطالب الثاني س = ٨٤ ، ز = ٣

∴ $١ = \frac{٧٠ - س}{ع} \leftarrow ع = ٧٠ - س \leftarrow (١)$

$٣ = \frac{٨٤ - س}{ع} \leftarrow \bar{٣ع} = ٨٤ - س \leftarrow (٢)$

نطرح معادلة (٢) من معادلة (١)

$٣ع = ٨٤ - س$
$ع = ٧٠ - س$
$٢ع = ١٤ \leftarrow ع = ٧$

∴ $ع = ٧٠ - س \leftarrow \bar{س} = ٧٠ - ٧ = ٦٣$

إذا كان الوسط الحسابي لعلامات طلاب صف الأول ثانوي أدبي في مادة الرياضيات هو (٦٠) و الانحراف المعياري لهم هو (١٠) فجد العلامات المعيارية لعلامات كل من أحمد ، صهيب ، محمد ، إذا كانت علاماتهم في مادة الرياضيات على الترتيب هي (٨٥) . (٦٠) . (٤٠) ؟

الحل:

أحمد ← $ز_{٨٥} = \frac{٨٥ - ٦٠}{١٠} = \frac{٢٥}{١٠} = ٢,٥$

صهيب ← $ز_{٦٠} = \frac{٦٠ - ٦٠}{١٠} =$ صفر

محمد ← $ز_{٤٠} = \frac{٤٠ - ٦٠}{١٠} = \frac{-٢٠}{١٠} = -٢$

نتيجة

تكون | ز | مساوية لعدد الانحرافات المعيارية التي تنحرفها المشاهدة (س) عن الوسط الحسابي ، أما إشارة (ز) فتدل على موقع المشاهد (س) حيث أن

إشارة (ز) سالب ← تحت الوسط الحسابي

إشارة (ز) موجب ← فوق الوسط الحسابي

إذا كان الوسط الحسابي لعلامات طلاب التوجيهي العلمي في الرياضيات (٨٠) و الانحراف المعياري له (١٢) و الوسط الحسابي لعلامات شعبة المعلوماتية (٨٥) و الانحراف المعياري لها (١٠) ، و كانت علامة أحدى الطلبة في شعبة الرياضيات هي (٦٠) وعلامة أحدى الطلبة في شعبة المعلوماتية هي (٩٥) فأي العلامتين أفضل؟

الحل:

شعبة العلمي س = ٦٠ , س = ٨٠ ,ع = ١٢

$ز_{٦٠} = \frac{٦٠ - ٨٠}{١٢} = \frac{-٢٠}{١٢} = \frac{-٥}{٣}$

شعبة المعلوماتيه: س = ٩٥ , س = ٨٥ ,ع = ١٠

$ز_{٩٥} = \frac{٩٥ - ٨٥}{١٠} = ١$

بما أن $\frac{-٥}{٣} = \frac{٥}{٣} > ١$ أي أن القيمة المعمارية لطلبة الأدبي أعلى من العلمي ∴ العلامة ٦٠ أفضل

ثلاث طلاب في إحدى الصفوف علامتهم المعيارية هي ٤ ، ٢ ، ١,٥ على الترتيب وكان الوسط الحسابي لعلامات جميع الطلاب في الصف هو ٦٨ والفرق بين علامتي الطالب الأول و الثالث هي ٢٠ فجد ما يلي :

(١) الانحراف المعياري لعلامات طلاب الصف ؟

(٢) العلامات الفعلية للطلاب ؟

نفرض الطالب الأول أ ، الثاني ب ، الثالث ج

أ ← ٤

ب ← ٢

ج ← ١,٥

أ – ج = ٢٠ س = ٦٨

(١) $٤ = \frac{أ - ٦٨}{ع}$ ← ٤ع = أ – ٦٨ -- (١)

$١,٥ = \frac{ج - ٦٨}{ع}$ ← ١,٥ع = ج – ٦٨ (٢)

نطرح (١) من (٢)

٢,٥ع = أ – ج

لكن أ – ج = ٢٠ ← ٢,٥ع = ٢٠

$ع = \frac{٢٠}{٢,٥} = ٨$

(٢) $٤ = \frac{أ - ٦٨}{٨}$ ← ٤ × ٨ = أ – ٦٨

٣٦ + ٦٨ = أ ← أ = ١٠٤ ← علامة الطالب الاول

$٢ = \frac{ب - ٦٨}{٨}$ ← ٢ × ٨ = ب – ٦٨

٦٨ + ١٦ = ب ← ب = ٨٤ ← علامة الطالب الثاني

أ – ج = ٢٠ ← ج = ١٠٤ – ٢٠ = ٨٤ ← علامة الطالب الثالث

إذا كان الفرق بين علامتي طالبين من الصف نفسه (٢٣) والفرق بين العلامتين المعياريتين لهما هو (٢,٣) فجد الانحراف المعياري لعلامات الطلاب في الصف نفسه؟

الحل :

$س_1 - س_2 = ٢٣$

$ز_{س_1} - ز_{س_2} = ٢,٣$

$ز_{س_1} = \frac{س_1 - \bar{س}}{ع}$

$ز_{س_2} = \frac{س_2 - \bar{س}}{ع}$

$ز_{س_1} - ز_{س_2} = \frac{س_1 - س_2}{ع} \leftarrow ٢,٣ = \frac{٢٣}{ع}$

$\leftarrow ع = \frac{٢٣}{٢,٣} = ١٠$

اذا كانت علامات ثلاث طلاب في اختيار الفيزياء هي (٩٠) ، (٨٠) ، (س) على الترتيب وعلامتهن المعيارية هي (٣) ، (٢) ، (- ١) فجد ما يلي :

(١) الانحراف المعياري لعلامات طلاب الصف ؟

(٢) الوسط الحسابي لعلامات الطلاب ؟

(٣) علامة الطالب الثالثة ؟

الحل :

(١) $ز_{س_1} - ز_{س_2} = \frac{س_1 - س_2}{ع}$

$\therefore ع = \frac{س_1 - س_2}{ز_{س_1} - ز_{س_2}} = \frac{٩٠ - ٨٠}{٣ - ٢} = \frac{١٠}{١} = ١٠$

(٢) $ز_{س_1} = \frac{س_1 - \bar{س}}{ع}$

$٣ = \frac{٩٠ - س}{١٠} \leftarrow ٣ \times ١٠ = ٩٠ - س$

$س = ٩٠ - ٣٠ = ٦٠$

(٣) $- ١ = \frac{س - ٦٠}{١٠} \leftarrow - ١٠ = س - ٦٠$

$س = - ١٠ + ٦٠ = ٥٠ \leftarrow$ علامة الطالب الثالث

إذا كان الوسط الحسابي لعلامات صف هو (٦٠) والانحراف المعياري لها هو (٨) فجد (١) العلامة التي تنحرف فوق الوسط الحسابي بمقدار (٣) انحرافات معيارية

(٢) العلامة التي تنحرف تحت (دون) الوسط الحسابي بمقدار انحرافين معيارين

(٣) عدد الانحرافات المعيارية التي تنحرفها العلامة (٧٢) عن الوسط الحسابي؟

الحل :

(١) ٣ انحرافات × ٨ الانحراف المعياري = ٢٤

فوق الوسط = العلامة + ٢٤ = ٦٠ + ٢٤ = ٨٤

(٢) ٢ × ٨ = ١٦

تحت الوسط = ٦٠ - ١٦ = ٤٤

(٣) عدد الانحرافات

$ز = \frac{٧٢ - ٦٠}{٨} = \frac{١٢}{٨} = ١,٥$

∴ عدد الانحرافات = ١,٥ انحراف معياري

اذا كان الوسط الحسابي لعلامات صف ما , في ماده الرياضيات (٦٠) و الانحراف المعياري لها (٤) و كانت العلامه المعياريه لعلامه الطالب احمد تساوي (-٣), فجد علامته الفعليه التي حصل عليها؟

اذا كان الوسط الحسابي لعلامات صف ما في ماده الرياضيات (٦٥) و الانحراف المعياري لها (٦), فجد العلامه التي تنحرف فوق الوسط الحسابي انحرافيين معياريين ؟

انحرافين معياريين × ٦ الانحراف المعياري = ١٢

∴ فوق الوسط = العلامة + ١٢

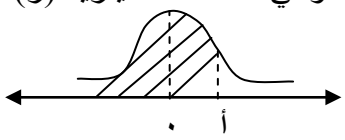
= ٦٥ + ١٢ = ٧٧

سؤال وزارة ٢٠١١

التـــوزيـــــع الـــطـبيعـــــي

التوزيع الطبيعي المعياري

هي التوزيع الذي وسطه الحسابي يساوي (صفر) وانحرافه المعياري يساوي (١) ومتغيره العشوائي العلامة المعيارية (ز)



الوسط الحسابي = صفر
الانحراف المعياري = ١
المساحه الكليه = ١

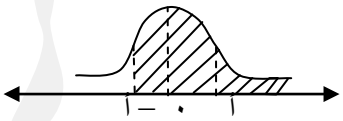
ويتم استخدام جدول التوزيع الطبيعي الوارد في نهاية الكتاب لايجاد الاحتمالات لقيم (ز) الاقل من (أ) أي ل (ز ≤ أ) حيث أ ≤ صفر اما الاحتمالات الباقية ؛ أي على يسار قيم (ز) السالبة او يمينها (الموجبة) فيتم استخدام خاصية التمثيل

فاذا كانت (أ < صفر) فان

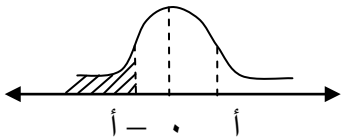
١) ل (ز ≤ أ) ← من الجدول مباشرة

٢) ل (ز ≤ أ) = ١ – ل (ز ≥ أ)

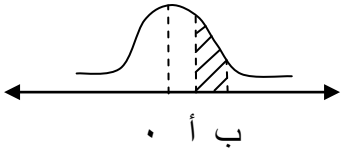
٣) ل (ز ≤ – أ) = ل (ز ≥ أ)



٤) ل (ز ≥ – أ) = ل (ز ≤ أ)
= ١ – ل (ز ≥ أ)



٥) ل (أ ≤ ز ≤ ب) = ل (ز ≤ ب) – ل (ز ≤ أ)



إذا كان (ز) متغيراً عشوائياً طبيعياً معيارياً ، فجد كل مما يلي :

(١) ل (ز ≥ ١,٣٤)
(٢) ل (ز ≥ ١,٣)
(٣) ل (ز≤ – ١,٥)
(٤) ل (ز ≥ – ٠,٨٥)
(٥) ل (ز ≤ ٢)
(٦) ل (٠,٧ ≤ ز ≤ ١,٢٥)
(٧) ل (٠,٢ ≤ ز ≤ ٢,٣)
(٨) ل (– ٠,٤ ≤ ز ≤ ١,٨)
(٩) ل (ز ≤ ٠,٦٥)
(١٠) ل (– ١,٥٧ ≤ ز ≤ ٠)

الحل :

(١) ل (ز ≥ ١,٣٤) = ٠,٩٠٩٩ ← من الجدول مباشرة [نتحرك حتى ١,٣ عمودي و ٠,٠٤ أفقي وتقاطعهم الجواب]

(٢) ل (ز ≥ ١,٣) = ٠,٩٠٣٢ ← من الجدول مباشرة [نتحرك حتى ١,٣ عمودي و ٠,٠٠ أفقي وتقاطعهم الجواب]

(٣) ل (ز≤ – ١,٥) = ل (ز≥ ١,٥) = ٠,٩٣٣٢

(٤) ل (ز ≥ – ٠,٨٥) = ل (ز ≤ ٠,٨٥)
= ١ – ل (ز ≥ ٠,٨٥)
= ١ – ٠,٠٨٠٢٣ = ٠,١٩٧٧

(٥) ل (ز ≤ ٢) = ١ – ل (ز ≥ ٢)
= ١ – ٠,٩٧٧٢ = ٠,٠٢٢٨

(٦) ل (٠,٧ ≤ ز ≤ ١,٢٥)
= ل (ز ≥ ١,٢٥) – ل (ز ≥ ٠,٧)
= ٠,٨٩٤٤ – ٠,٧٥٨٠ = ٠,١٣٦٤

(٧) ل (٠,٢ ≤ ز ≤ ٢,٣)
= ل (ز ≥ ٢,٣) – ل (ز ≥ ٠,٢)
= ٠,٩٨٩٣ – ٠,٥٧٩٣ = ٠,٤١٠٠

(٨) ل (– ٠,٤ ≤ ز ≤ ١,٨)
= ل (ز ≥ ١,٨) – (١ – ل (ز ≥ ٠,٤))
= ٠,٩٦٤١ – (١ – ٠,٦٥٥٤)
= ٠,٩٦٤١ – ٠,٣٤٤٦ = ٠,٦١٩٥

(٩) ل (ز ≤ ٠,٦٥)
= ١ – ل (ز ≥ ٠,٦٥)
= ١ – ٠,٧٤٢٢ = ٠,٢٥٧٨

(١٠) ل (– ١,٥٧ ≤ ز ≤ ٠)
= ل (ز ≥ ٠) – ل (ز ≥ – ٢,٥٧)
= ل (ز ≥ ٠) – (١ – ل (ز ≥ ٢,٥٧))
= ٠,٥ – (١ – ٠,٩٩٤٩)
= ٠,٥ – ٠,٠٠٥١ = ٠,٩٤٩

جد ز في الحالات التالية :
(١) ل (ز ≥ أ) = ٠,٨٧٠٨
(٢) ل (ز ≤ أ) = ٠,٩٩٦٠
(٣) ل (ز≤ أ) = ٠,٠٦٦٨
الحل :
(١) ل (ز ≥ أ) = ٠,٨٧٠٨ ← أ = ١,١٣ → نبحث في الجدول عن قيم ز المناظرة للاحتمال ٠,٨٧٠٨

(٢) ل (ز ≤ أ) = ٠,٩٩٦٠ ← أ = ٢,٦٥ (لانه على يسار المنحنى اي بعد الصفر)

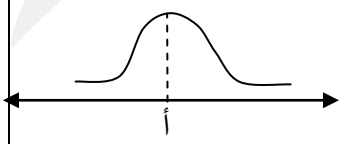
(٣) ل (ز≤ أ) = ٠,٠٦٦٨
∴ ل (ز≤ أ) = ١ – ٠,٠٦٦٨ = ٠,٩٣٣٢ ← أ = ١,٥

استعمال جدول التوزيع الطبيعي المعياري لإيجاد قيمة أ في كل من الحالات التالية :
(١) ل (ز ≥ أ) = ٠,٨٥٣١
(٢) ل (ز ≤ أ) = ٠,٣٠٥٠
الحل :
(١) ل (ز ≥ أ) = ٠,٨٥٣١ ← أ = ١,٠٥

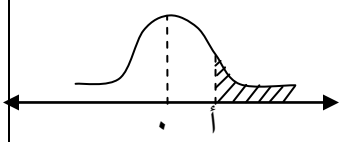
(٢) ل (ز≤ أ) = ٠,٣٠٥٠
∴ ل (ز≤ أ) = ١ – ٠,٣٠٥٠ = ٠,٦٩٥٠ ← أ = – ٠,٥١

ملاحظات

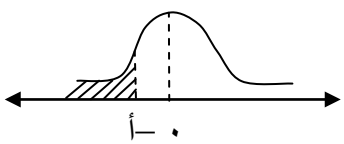
(١) إذا كانت أ في المنتصف فان :
ل (ز ≥ أ) = ٠,٥٠٠
وأيضا ل (ز≤ أ) = ٠,٥٠٠



(٢) إذا كانت أ موجب فان :
ل (ز ≥ أ) < ٠,٥٠٠
وأيضا ل (ز≤ أ) > ٠,٥٠٠



(٣) إذا كانت أ سالب فان :
ل (ز ≥ أ) > ٠,٥٠٠
وأيضا ل (ز≤ أ) < ٠,٥٠٠



يرمز للوسط الحسابي للمجتمع الإحصائي بالرمز **(μ)** " و تلفظ مي "
والانحراف المعياري (σ) " و تلفظ سيغما"
اما الوسط الحسابي للعينة (س)
والانحراف المعياري لها (ع)
لإيجاد الاحتمالات للمتغيرات العشوائي المتصل (س) الذي يتبع التوزيع الطبيعي ليتم تحويل العلامة الخام (س) إلى العلامة المعيارية (ز)

$$ز = \frac{س - \mu}{\sigma}$$

إذا كان (س) متغير عشوائياً يتبع التوزيع الطبيعي الذي وسطه الحسابي (٦٠) وانحرافه المعياري (٨) فجد :
(١) ل (س ≥ ٧٦)
(٢) ل (س ≤ ٤٨)
الحل :
(١) $ز = \frac{س - \mu}{\sigma}$
$= \frac{٧٦ - ٦٠}{٨} = ٢$
ل (س ≥ ٧٦) = ل (س ≥ ٢) = ٠,٩٧٧٢ → من الجدول

(٢) $ز = \frac{٤٨ - ٦٠}{٨} = - ١,٥$
ل (س ≤ ٤٨) = ل (س ≤ – ١,٥) =
ل (س ≥ ١,٥) = ٠,٩٣٣٢ → من الجدول

يخضع معامل النجاح في عينة لمصنع ما للتوزيع الطبيعي وسطه (١١٥) وانحرافه المعياري (٢٠) إذا تم اختيار احد العينات بطريقة عشوائية ، فما احتمال ان تكون من العينات الناجحة اقل من (١٢٠) .
الحل :
$\mu = ١١٥$ $\sigma = ٢٠$
ل (س ≥ ١٢٠) = ل (ز ≥ $\frac{١٢٠ - ١١٥}{٢٠}$)
= ل (ز ≥ ٠,٢٥) = ٠,٥٩٨٧ → من الجدول

إذا كانت علامات (٢٠٠٠) طالب تتبع التوزيع الطبيعي بوسط حسابي مقداره (٨٠) وانحراف معياري مقداره (٢٠) فإذا اخترنا طالب عشوائياً :
(١) ما احتمال أن تقل علامته عن ٩٠
(٢) ما احتمال أن تزيد علامته عن ٨٨
(٣) ما احتمال أن تنحصر علامته بين (٥٢) و (٨٦)
(٤) إذا قبلت الجامعة أعلى ٢٠٪ من الطلاب ،فجد مجموع المقبول

الحل :

$س = ٨٠ \quad \sigma = ٢٠$

(١) $ز_{٩٠} = \frac{٩٠ - ٨٠}{٢٠} = \frac{١٠}{٢٠} = ٠,٥$

$ل (ز \geq ٠,٥) = ٠,٦٩١٥$

(٢) $ز_{٨٨} = \frac{٨٨ - ٨٠}{٢٠} = \frac{٨}{٢٠} = ٠,٤$

$ل (ز \leq ٠,٤) = ١ - ل (ز \geq ٠,٤)$
$= ١ - ٠,٦٥٥٤ = ٠,٣٤٤٦$

(٣) $ز_{٥٢} = \frac{٥٢ - ٨٠}{٢٠} = \frac{-٢٨}{٢٠} = -١,٦$

$ز_{٨٦} = \frac{٨٦ - ٨٠}{٢٠} = \frac{٦}{٢٠} = ٠,٣$

$ل (-١,٦ \leq ز \leq ٠,٣)$
$= ل (ز \leq ٠,٣) - ل (ز \leq -١,٦)$
$= ل (ز \leq ٠,٣) - (١ - ل (ز \leq ١,٦))$
$= ٠,٦١٧٩ - (١ - ٠,٩٤٥٢)$
$= ٠,٦١٧٩ - ٠,٠٥٤٨ = ٠,٥٦٣١$

(٤) $ل (ز \leq أ) = ٢٠٪ = ٠,٢$
$\therefore ل (ز \geq أ) = ١ - ٠,٢ = ٠,٨$
$\therefore ٠,٨٤ = \frac{س - ٨٠}{٢٠}$

$٢٠ \times ٠,٨٤ = س - ٨٠$
$\leftarrow س = ٨١,٦٨ \quad \therefore$ عدد الطلبه $= ٠,٨١٦٨ \times ٢٠٠٠ =$
$١٦٣٣,٦ = ١٦٣٧$ طالب

إذا كانت أوزان الطلبة في إحدى المدارس و عددهم (١٠٠٠) طالب تتبع التوزيع الطبيعي و كان الوسط الحسابي لأوزانهم (٦٠) كغم و الانحراف المعياري (٦) كغم إذا اختير احد الطلبة عشوائيا:
١) ما احتمال أن يكون من الطلبة الذين تقل أوزانهم عن (٤٢)كغم
٢) ما احتمال أن يكون من الطلبة الذين تزيد أوزانهم عن (٦٣)كغم
٣) ما عدد الطلبة الذين تنحصر أوزانهم بين (٦٠) و (٦٩) كغم

الحل:

$\bar{س} = ٦٠ \quad \sigma = ٦$

١) $ز_{٤٢} = \frac{٤٢ - ٦٠}{٦} = \frac{-١٨}{٦} = -٣$

$ل(ز \geq -٣) = ١ - ل(ز \leq ٣)$
$= ١ - ٠,٩٩٨٧ = ٠,٠٠١٣$

٢) $ز_{٦٣} = \frac{٦٣ - ٦٠}{٦} = ٠,٥$

$ل(ز \leq ٠,٥) = ١ - ل(ز \leq ٠,٥)$
$= ١ - ٠,٦٩١٥ = ٠,٣٠٨٥$

٣) $ز_{٦٠} = \frac{٦٠ - ٦٠}{٦} =$ صفر

$ز_{٦٩} = \frac{٦٩ - ٦٠}{٦} = ١,٥$

$ل (٠ \leq ز \leq ١,٥)$
$= ل (ز \leq ١,٥) - ل (ز \geq ٠)$
$= ٠,٩٣٣٢ - ٠,٥ = ٠,٤٣٣٢$

عدد الطلبة الذين تنحصر أوزانهم بين (٦٠) و (٦٩) كغم
= العدد الكلي × الاحتمال
$= ١٠٠٠ \times ٠,٤٣٣٢ = ٤٣٣,٢ \approx ٤٣٣$ طالب

تقدم (١٠٠٠٠) طالب لامتحان و كان التوزيع لعلاماتهم قريبا من التوزيع الطبيعي فإذا كان الوسط الحسابي لهذه العلامات يساوي (٥٧) و لانحراف المعياري لها يساوي (١٠) و كان عدد الطلبة الذين علاماتهم فوق العلامة (س) و اقل من الوسط الحسابي (١٧٠٠) طالب فما قيمة العلامة س؟

الحل:

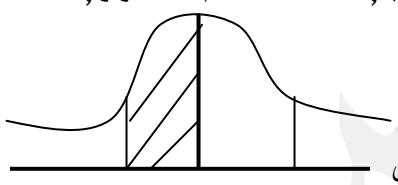
$\bar{س} = ٥٧$ $\quad \sigma = ١٠$

عدد الطلبة تحت العلامة س

$= \frac{١٠٠٠٠}{٢} - ١٧٠٠ = ٣٣٠٠$ طالب

$ل(ز \geq أ) = \frac{٣٣٠٠}{١٠٠٠٠} = ٠,٣٣$

$ل(ز \leq أ) = ١ - ٠,٣٣ = ٠,٦٧$ $\quad أ = -٠,٤٤$



$ز = \frac{\bar{س} - س}{\sigma}$

$-٠,٤٤ = \frac{س - ٧٥}{١٠}$

$-٠,٤٤ \times ١٠ = س - ٥٧$

$س = ٥٢,٦$

تقدم لامتحان قبول الجنسية لدولة أجنبية (٤٠٠٠٠) شخص من جميع أنحاء العالم فإذا كان الوسط الحسابي لمعدل القبول هو (٦٢) و الانحراف المعياري لها (١٥) جد عدد الأشخاص الذين حصلوا على علامة (٩٠) على فرض أن المعدلات مقربة لأقرب علامة صحيحة و كان توزيع العلامات يتبع التوزيع الطبيعي

$\bar{س} = ٦٢$ $\quad \sigma = ١٥$

بما أن المعدلات مقربة لأقرب علامة صحيحة و هو يريد عند (٩٠)

(٨٩,٥ – ٩٠,٤) تقرب إلى ٩٠

$ز_{٨٩,٥} = \frac{٨٩,٥ - ٦٢}{١٥} = ١,٨٣$

$ز_{٩٠,٤} = \frac{٩٠,٤ - ٦٢}{١٥} = ١,٨٩$

$ل(١,٨٣ \leq ز \leq ١,٨٩)$

$= ل(ز \geq ١,٨٩) - ل(ز \geq ١,٨٣)$

$= ٠,٩٧٠٦ - ٠,٩٦٦٤ = ٠,٠٠٤٢$

عدد الطلبة $= ٠,٠٠٤٢ \times ٤٠٠٠٠ = ١٦٨$ طالب

إذا كان أوزان طلبة إحدى المدارس تتبع توزيعا طبيعيا وسطه الحسابي (٤٥) كغم و انحرافه المعياري (٤) كغم اختير احد الطلبة عشوائيا ما احتمال أن يكون من الطلبة الذين تنحصر أوزانهم بين (٤٣) كغم و (٤٩) كغم؟

ملاحظة: يمكن الاستفادة من الجدول التالي و الذي يمثل جزءا من جدول التوزيع الطبيعي المعياري:

ز	٠	٠,٥	١	١,٥	٢
ل(ز)	٠,٥	٠,٦٩١٥	٠,٨٤١٣	٠,٩٣٣٢	٠,٩٧٧٢

الحل:

$\bar{س} = ٤٥$ $\quad \sigma = ٤$

$ز_{٤٣} = \frac{٤٣ - ٤٥}{٤} = -٠,٥$

$ز_{٤٩} = \frac{٤٩ - ٤٥}{٤} = ١$

$ل(-٠,٥ \leq ز \leq ١)$

$= ل(ز \leq ١) - ل(ز \leq -٠,٥)$

$= ل(ز \leq ١) - (١ - ل(ز \leq ٠,٥))$

$= ٠,٨٤١٣ - (١ - ٠,٦٩١٥)$

$= ٠,٥٣٢٨$

إذا كانت رواتب (١٠٠٠٠) موظف تتبع التوزيع الطبيعي لوسط حسابي مقداره (٢٠٠) دينار و انحراف معياري مقداره (١٠) دنانير

١) جد عدد الموظفين الذين تنحصر رواتبهم بين ١٩٢ و ٢١٥ دينار

٢) إذا كان عدد الموظفين الذين تزيد رواتبهم عن الوسط الحسابي و تقل عن راتب معين (س) هو (٤٤٥٢) فجد قيمة (س)؟

الحل:

$\bar{س} = ٢٠٠$ $\quad \sigma = ١٠$

١) $ز_{١٩٢} = \frac{١٩٢ - ٢٠٠}{١٠} = -٠,٨$

$ز_{٢١٥} = \frac{٢١٥ - ٢٠٠}{١٠} = ١,٥$

$ل(-٠,٨ \leq ز \leq ١,٥)$

$= ل(ز \leq ١,٥) - ل(ز \leq -٠,٨)$

$= ل(ز \leq ١,٥) - (١ - ل(ز \leq ٠,٨))$

$= ٠,٩٣٣٢ - (١ - ٠,٧٨٨١)$

$= ٠,٧٢١٣$

عدد الموظفين $= ١٠٠٠٠ \times ٠,٧٢١٣$

$= ٧٢١٣$

٢) عدد الموظفين الذين تقل رواتبهم عن س = ٤٤٥٢ + ٥٠٠٠ = ٩٤٥٢

النسبة = ٩٤٥٢ / ١٠٠٠٠ = ٠,٩٤٥٢

ل (ز ≤ أ) = ٠,٩٤٥٢ ز = ١,٦

$$ز = \frac{س - \bar{س}}{\sigma}$$

١,٦ = (س – ٢٠٠) / ١٠ ١٦ = س – ٢٠٠

س = ٢١٦

ز	٠,٥	٠,٦	٠,٧	٠,٨	٠,٩	١
ل(ز)	٠,٦٩١٥	٠,٧٢٥٧	٠,٧٥٨٠	٠,٧٨٨١	٠,٨١٥٩	٠,٨٤١٣

اذا كانت اوزان الاطفال عند الولاده تتبع التوزيع الطبيعي بوسط حسابي (٣,٥) كغم و انحراف معياري (٠,٥) كغم , اذا اختسر طفل عشوائيا عند الولاده, فما احتمال ان يكون وزنه اكبر من (٣) كغم , ملاحظة: يمكن الاستفادة من الجدول التالي و الذي يمثل جزءا من جدول التوزيع الطبيعي المعياري:

سؤال وزارة ٢٠١١

الحل :ل (س ≤ ٣)

ز٣ = (س – μ) / σ = (٣-٣,٥) / ٠,٥ = -١

ل(ز ≤ -١) = ل (ز ≥ ١) = ٠,٨٤١٣

تقدم لامتحان عام (٥٠٠٠) طالب و كانت علاماتهم تتبع التوزيع الطبيعي بوسط حسابي (٤١), و انحراف معياري (٦). جد عدد الطلبه الناجحين في الامتحان علما بان علامه النجاح (٥٠) , ملاحظه: يمكنك الاستفاده من الجدول الاتي)؟

ز	صفر	٠,٥	١	١,٥	٢	٢,٥
ل(ز)	٠,٥٠٠	٠,٦٩١٥	٠,٨٤١٣	٠,٩٣٣٢	٠,٩٧٧٢	٠,٩٩٣٨

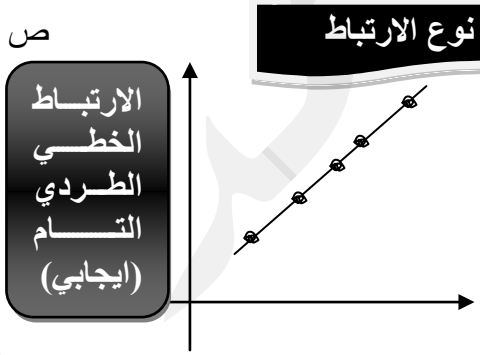
سؤال وزارة ٢٠٠٩

الارتباط و معامل الارتباط

الارتباط يعرف على انه العلاقة بين متغيرين اثنين حيث إذا تغير احديهما فان الثاني يتغير و إن التغير سوف يكون إما طرديا (إذا زاد الأول يزداد الثاني و إذا نقص الأول ينقص الثاني)
أو تكون علاقة عكسية (إذا زاد الأول ينقص الثاني و إذا نقص الأول يزداد الثاني)
و من احد طرق معرفة العلاقة بين المتغيرين هو **(شكل الانتشار)**

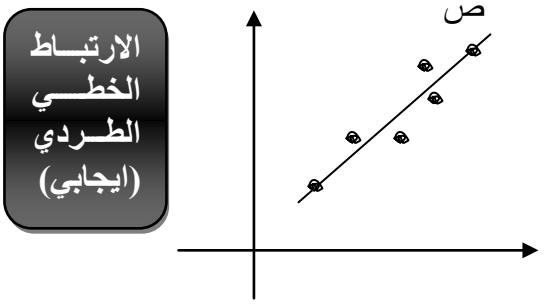
نوع الارتباط

الارتباط الخطي الطردي التام (ايجابي)



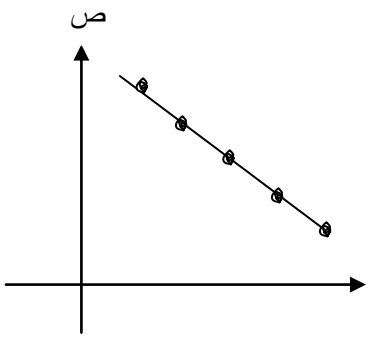
قيم ص تزداد بازدياد قيم س
ر = ١

الارتباط الخطي الطردي (ايجابي)



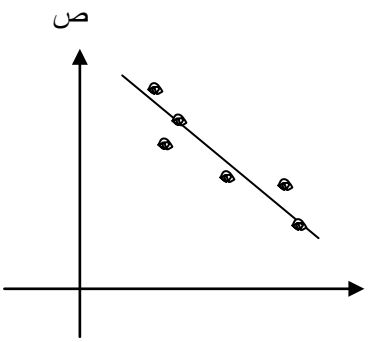
قيم ص تزداد بازدياد قيم س (طردي)
٠ < ر ≤ ١

الارتباط الخطي العكسي التام (سلبي)

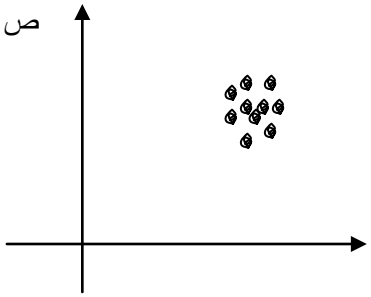


قيم ص تتناقص بازدياد قيم س (عكسي)

الارتباط الخطي العكسي (سلبي)



قيم ص تتناقص بازدياد قيم س (عكسي)
– ١ ≤ ر < ٠

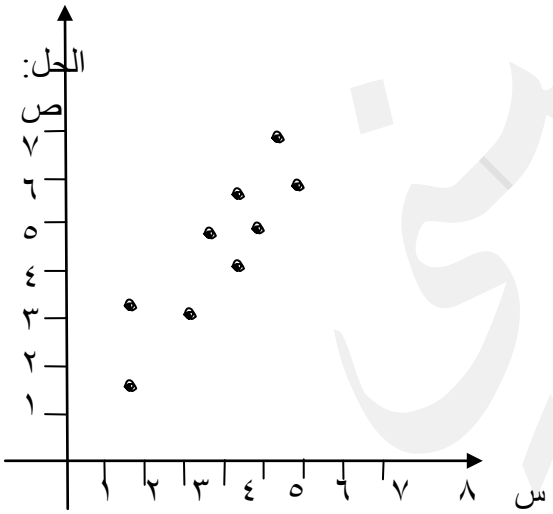


لا يوجد ارتباط خطي تتجمع القيم على شكل دائرة
ر= ٠

ارسم شكل الانتشار لقيم س ، ص في الجدول التالي و حدد نوع الارتباط؟

س	٨	٣	٥	٦	٤	٧	٦	٥	٢
ص	٦	٤	٤	٦	٤	٧	٥	٥	٣

الحل:



نلاحظ من الرسم بان نوع الارتباط هو (ارتباط خطي طردي) ايجابي

الجدول آلاتي يبين علامات (٦) طلاب في مبحث الرياضيات و عدد أيام غياب كل منهم

سؤال وزارة ٢٠٠٨

علامة الطالب في الرياضيات(س)	٦	٧	٤	١	٢	١
عدد أيام غياب الطالب (ص)	١	٢	٤	٦	٥	٨

١) ارسم شكل الانتشار بين المتغيرين س، ص

٢) حدد نوع العلاقة بين المتغيرين س، ص

الحل

نوع العلاقة (ارتباط خطي عكسي) سلبي

معامل ارتباط بيرسون الخطي

هو مقياس يستخدم لقياس قوة الارتباط الخطي بين متغيرين

$$ر = \frac{(س - \bar{س})(ص - \bar{ص})}{\sqrt{(س - \bar{س})^2 \times (ص - \bar{ص})^2}}$$

حسب معامل ارتباط بيرسون بين المتغيرين س، ص في الجدول آلاتي:

س	٤	٦	٧	٥	٨
ص	٥	٧	٧	٦	١٠

الحل:

نجد قيمة $\bar{س}$ و $\bar{ص}$ أولا ثم نكون جدول

$$\bar{س} = \frac{٤ + ٦ + ٧ + ٥ + ٨}{٥} = \frac{٣٠}{٥} = ٦$$

عدد قيم س هو ٥ قيم

$$\bar{ص} = \frac{٥ + ٧ + ٧ + ٦ + ١٠}{٥} = \frac{٣٥}{٥} = ٧$$

س	ص	$س - \bar{س}$	$ص - \bar{ص}$	$(س - \bar{س})(ص - \bar{ص})$	$(س - \bar{س})^2$	$(ص - \bar{ص})^2$
٤	٥	٢ −	٢ −	٤	٤	٤
٦	٧	٠	٠	٠	٠	٠
٧	٧	١	٠	٠	١	٠
٥	٦	١ −	١ −	١	١	١
٨	١٠	٢	٣	٦	٤	٩
المجموع				١١	١٠	١٤

$$ر = \frac{(س - \bar{س})(ص - \bar{ص})}{\sqrt{(س - \bar{س})^2 \times (ص - \bar{ص})^2}}$$

$$= \frac{١١}{\sqrt{١٤ \times ١٠}} = \frac{١١}{\sqrt{١٤٠}}$$

إذا كان

$(\bar{س} - س)(\bar{ص} - ص) = ١٨$ ،

$(س - \bar{س})^{٢} = ٨١$ ، $(ص - \bar{ص})^{٢} = ٣٦$

فجد معامل ارتباط بيرسون

الحل:

$$ر = \frac{(س - \bar{س})(ص - \bar{ص})}{\sqrt{(س - \bar{س})^{٢} \times (ص - \bar{ص})^{٢}}}$$

$$= \frac{١٨}{\sqrt{٨١ \times ٣٦}} = \frac{١٨+}{\sqrt{(٩)^{٢} \times (٦)^{٢}}} = \frac{١٨}{٦ \times ٩} = \frac{١}{٣}$$

الجدول الأتي يبين علامة (٥) طلاب في المادتين س، ص احسب معدل ارتباط بيرسون بين المتغيرات س ، ص

س	٠	٢	٣	٤	٦
ص	٤	٦	٥	٧	٨

الحل:

$$\bar{س} = \frac{٠ + ٢ + ٣ + ٤ + ٦}{٥} = \frac{١٥}{٥} = ٣$$

$$\bar{ص} = \frac{٤ + ٦ + ٥ + ٧ + ٨}{٥} = \frac{٣٠}{٥} = ٦$$

الآن نكون الجدول:

س	ص	$س - \bar{س}$	$\bar{ص} - ص$	$\frac{(\bar{س} - س)}{(ص - \bar{ص})}$	$(\bar{س} - س)^{٢}$	$(\bar{ص} - ص)^{٢}$
٠	٤	٣ _	٢ _	٦	٩	٤
٢	٦	١ _	٠	٠	١	٠
٣	٥	٠	١ _	٠	٠	١
٤	٧	١	١	١	١	١
٦	٨	٣	٢	٦	٩	٤
المجموع				١٣	٢٠	١٠

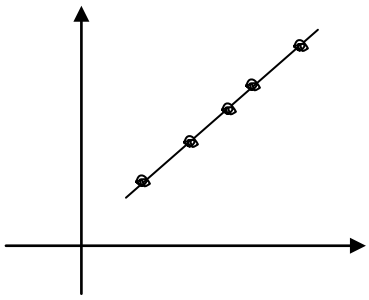
$$ر = \frac{(س - \bar{س})(ص - \bar{ص})}{\sqrt{(س - \bar{س})^{٢} \times (ص - \bar{ص})^{٢}}}$$

$$= \frac{١٣}{\sqrt{٢٠٠}} = \frac{١٣}{١٤,٢} = ٠,٩٢$$

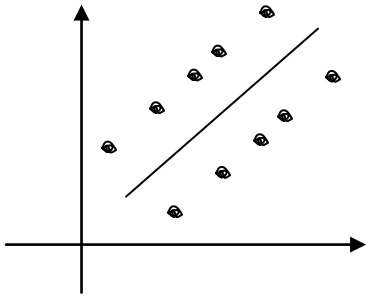
يمكن تقدير قيمة معامل الارتباط من خلال شكل الانتشار

قدر قيمة معامل الانتشار في كل من الإشكال التالية

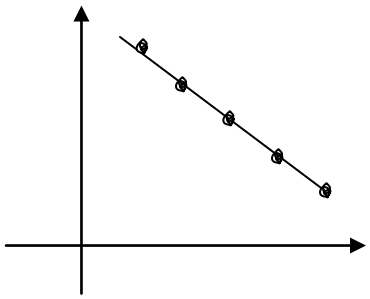
أ)



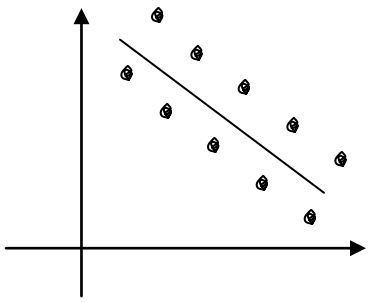
ب)



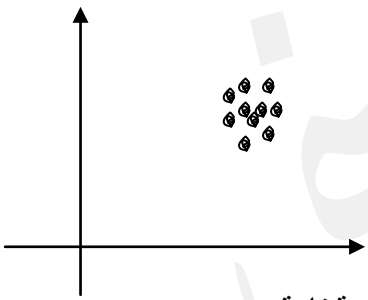
ج)



د)



هـ)



أ) ر = ١ علاقة طردية تامة

ب) ر = ٠,٨ علاقة طردية قوية

ج) ر = _ ١ علاقة عكسية تامة

د) ر = _ ٠,٨ علاقة عكسية قوية

هـ) ر = ٠ لا توجد علاقة

إذا علمت أن

(س – س̄) (ص – ص̄) = ٣٢ ،

(س – س̄)² = ٨٠ ، (ص – ص̄)² = ٢٠

احسب معامل ارتباط بيرسون الخطي من متغيرين س، ص

الحل:

$$ر = \frac{\sum (س - \bar{س})(ص - \bar{ص})}{\sqrt{\sum (س - \bar{س})^2 \times \sum (ص - \bar{ص})^2}}$$

$$= \frac{٣٢}{\sqrt{٨٠ \times ٢٠}} = \frac{٣٢}{\sqrt{١٦٠٠}} = \frac{٣٢}{٤٠} = ٠,٨$$

اثر التعديلات الخطيه في قيمه معامل

إذا كان معامل ارتباط بيرسون بين متغيرين س، ص يساوي (ر) و عدلت قيم س، ص حسب العلاقة

س* = أ س + ب

ص* = جـ ص + هـ

فان معامل الارتباط بين س*، ص* يساوي

(ر) إذا كانت إشارتا (أ ، جـ) متشابهتان

(– ر) إذا كانت إشارتا (أ ، جـ) مختلفتان

اذا كان معامل الارتباط بين قيم س، ص هو ٠,٣٥ فجد معامل الارتباط بين س* ، ص* في الحالات التالية

١) س* = ٢س + ١ **ص* = ٥ ص – ٣**

٢) س* = ٦ – ٣ س **ص* = ٢ – ٢ ص**

٣) س* = ٢س +٦ **ص* = ٦ – ٣ ص**

٤) س* = ١٦ – ٣ س **ص* = ١٣ ص + ١٨**

سؤال وزارة ٢٠٠٩

الحل:

١) ر = ٠,٣٥ (أ ، جـ نفس الإشارة)

٢) ر = ٠,٣٥ (أ ، جـ نفس الإشارة)

٣) ر = – ٠,٣٥ (أ ، جـ مختلفان بالإشارة)

٤) ر = – ٠,٣٥ (أ ، جـ مختلفان بالإشارة)

بالاعتماد على الجدول جد معامل ارتباط بين المتغيرين س ، ص

س	**٣**	**٥**	**١**	**٧**
ص	**٢**	**٤**	**١**	**٥**

الحل:

$$ر = \frac{\sum (س - \bar{س})(ص - \bar{ص})}{\sqrt{\sum (س - \bar{س})^2 \times \sum (ص - \bar{ص})^2}}$$

$$س = \frac{٣ + ٥ + ١ + ٧}{٤} = \frac{١٦}{٤} = ٤$$

$$ص = \frac{٢ + ٤ + ١ + ٥}{٤} = \frac{١٢}{٤} = ٣$$

س	ص	س – س̄	ص – ص̄	(س – س̄) (ص – ص̄)	(س – س̄)²	(ص – ص̄)²
٣	٢	– ١	– ١	١	١	١
٥	٤	١	١	١	١	١
١	١	– ٣	– ٢	٦	٩	٤
٧	٥	٣	٢	٦	٩	٤
المجموع				١٤	٢٠	١٠

$$ر = \frac{\sum (س - \bar{س})(ص - \bar{ص})}{\sqrt{\sum (س - \bar{س})^2 \times \sum (ص - \bar{ص})^2}}$$

$$ر = \frac{١٤}{\sqrt{٢٠ \times ١٠}} = \frac{١٤}{\sqrt{٢٠٠}}$$

معتمدا على المعلومات الواردة في الجدول آلاتي جد معامل الارتباط بيرسون بين المتغيرين س ، ص

س	ص	س – س̄	ص – ص̄	(س – س̄) (ص – ص̄)	(س – س̄)²	(ص – ص̄)²
٣	١٠	– ٢	٢	– ٤	٤	٤
٤	٩	– ١	١	– ١	١	١
٥	٧	٠	– ١	٠	٠	١
٦	٨	١	٠	٠	١	٠
٧	٦	٢	– ٢	– ٤	٤	٤

سؤال وزارة ٢٠٠٩

الحل:

$$ر = \frac{\sum (س - \bar{س})(ص - \bar{ص})}{\sqrt{\sum (س - \bar{س})^2 \times \sum (ص - \bar{ص})^2}}$$

$$= \frac{– ٩}{\sqrt{١٠ \times ١٠}} = \frac{– ٩}{١٠} = – ٠,٩$$

إذا كان س ، ص متغيرين و عدد قيم كل منها

(٨) و كان (س – س̄) (ص – ص̄) = ١٢٠

(س – س̄)² = ٢٠٠ ، (ص – ص̄)² = ١٢٨

أوجد معامل ارتباط بيرسون الخطي بين متغيرين س، ص

الحل:

$$ر = \frac{(س - \bar{س})(ص - \bar{ص})}{\sqrt{(س - \bar{س})^2 \times (ص - \bar{ص})^2}}$$

$$= \frac{١٢٠}{\sqrt{١٢٨ \times ٢٠٠}} = \frac{١٢٠}{\sqrt{٢٥٦٠٠}}$$

أي معاملات الارتباط التالية هي الأقوى

أ) صفر ب) ١,٠ حـ) ٠,٧٠ د)-٠,٩٠

الجواب فرع د) – ٠,٩ لأنه اقرب على – ١ من ٠,٧ على ٠,١

أي من التالي هو معامل ارتباط طردي تام

أ) – ١ ب) ١ جـ) صفر

د) ٠,٩

الجواب فرع ب) ١

إذا كان معامل الارتباط بين المتغيرين س ، ص يساوي (٠,٧) فان معامل الارتباط بين (١– ٢ س) ، ص تساوي؟

أ) -٠,٧٠ ب) -٠,٤٠ جـ)٠,٧

د)٠,٤

الجواب فرع أ) – ٠,٧ لان أ ، ج (معامل س ، ص) اختلفا بالإشارة

إذا كان معامل الارتباط بين المتغيرين س ، ص يساوي (٠,٦) فان معامل

الارتباط بين (١– ٠,٥ س) ،

(١,٥ ، – ص) يساوي؟

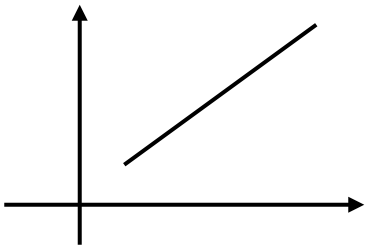
أ) ٠,٦ ب) – ٠,٦ جـــ) ٠,٧

د) ٠,٩

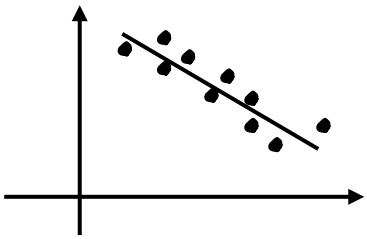
الجواب فرع أ) ٠,٦٠ لان س و ص نفس الاشاره (كلاهما سالب)

إذا علمت أن معامل الارتباط بين المتغيرين س ، ص يساوي (٠,٧) فأي الأشكال يمثل شكل الانتشار بين المتغيرين س ، ص ؟

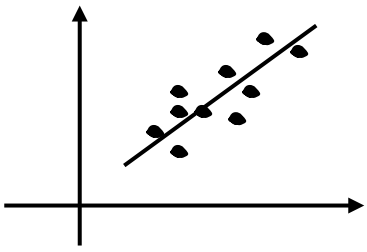
أ)



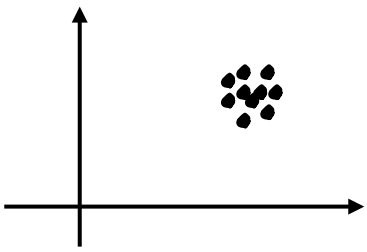
ب)



جـ)



د)



الجواب فرع جـ)

إذا كان معامل الارتباط بين المتغيرين س ، ص يساوي (٠,٤) و عدلت قيم س ، ص حيث أضيف لكل قيمة من قيم س العدد (٠,٣) و ضربت كل قيمة من قيم ص بالعدد (– ٠,٢) فان معامل الارتباط بين س , ص بعد التعديل يساوي؟

أ) ٠,٧ ب) ٠,٤ جـ) – ٠,٤ د) – ٠,٨

الجواب فرع جـ) – ٠,٤ لان س ضربت بعدد موجب ص ضربت بعدد سالب اختلفت الإشارة

في محاضرة ألقاها زراعي و أفصح انه في معظم الأحيان كلما ترتفع أجور عمال الزراعة (س) فان ذلك يؤدي إلى زيادة أسعار البندورة (ص) فأي مما يلي يمثل معامل ارتباط بين س، ص حسب قول الخبير

أ) – ٠,٩٨ ب) ١,٢ جـ) ٠,١٣ د) ٠,٧٢

الجواب فرع د) طردي

الانحدار

معادلة الانحدار : هي معادلة خطية تربط بين المتغيرين و تستخدم للتنبؤ بقيم أحد المتغيرين إذا علم قيمة المتغير الأخر و تعطى بالعلاقة التالية:

$\hat{ص} = أ\ \overline{س} + ب$

حيث أن $أ = \frac{\sum (س - \overline{س})(ص - \overline{ص})}{\sum (س - \overline{س})^2}$

$ب = \overline{ص} - أ\ \overline{س}$

الخطأ في التنبؤ

عند رسم شكل الانتشار في الفضاء بين المتغيرين نلاحظ أن العلاقة بينهم خطية و أن النقط تتجمع حول مستقيم يمر بعدد منها و النقط الأخرى يتوسطها و لا يمر بها، و هذه النقط لأنها لا تقع على الخط المستقيم فإنها تسبب ما يسمى بالخطأ في التنبؤ و يمكن التعبير عنه بشكل رياضي كالتالي:

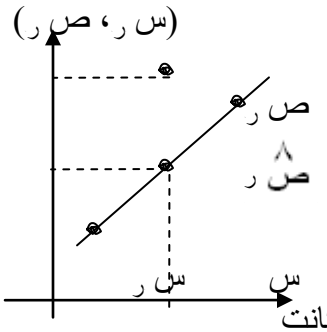
الخطأ في التنبؤ = القيمة الحقيقية – القيمة المتنبأ بها

$= ص_ر - \hat{ص}_ر$

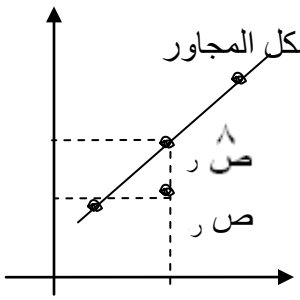
حيث أن $ص_ر$ = القيمة الحقيقية

$\hat{ص}_ر$ = القيمة المتنبأ بها

و يكون الخطأ في التنبؤ موجبا إذا كانت $ص_ر > \hat{ص}_ر$ كما في الشكل المجاور



و يكون الخطأ في التنبؤ سالبا إذا كانت $ص_ر < \hat{ص}_ر$ كما في الشكل المجاور



الجدول يبين قيم لكل من س ، ص

س	٥	٦	٢	٨	٤
ص	٣٥	٥٠	٣٠	٦٠	٣٥

١) جد معادلة خط الانحدار

٢) جد القيمة المتوقعة لـ ص إذا كانت س =٥

٣) جد خطأ التنبؤ عند س = ٦

$\hat{ص} = أ\ س + ب$

حيث أن $أ = \frac{\sum (س - \overline{س})(ص - \overline{ص})}{\sum (س - \overline{س})^2}$

نجد $\overline{س}$ ، $\overline{ص}$ و نشكل الجدول

$\overline{س} = \frac{٥ + ٦ + ٢ + ٨ + ٤}{٥} = \frac{٢٥}{٥} = ٥$

$\overline{ص} = \frac{٣٥ + ٥٠ + ٣٠ + ٦٠ + ٣٥}{٥} = \frac{٢١٠}{٥} = ٤٢$

س	ص	$س - \overline{س}$	$ص - \overline{ص}$	$(س - \overline{س})(ص - \overline{ص})$	$(س - \overline{س})^2$
٥	٣٥	٠	٧ –	٠	٠
٦	٥٠	١	٨	٨	١
٢	٣٠	٣ –	١٢ –	٣٦	٩
٨	٦٠	٣	١٨	٥٤	٩
٤	٣٥	١ –	٧ –	٧	١
المجموع				١٠٥	٢٠

أ = $\frac{١٠٥}{٢٠} = \frac{٢١}{٤}$

ب = $\overline{ص} - أ \overline{س} = ٤٢ - (\frac{٢١}{٤} \times ٥)$

$= \frac{١٦٨}{٤} - \frac{١٠٥}{٤} = \frac{٦٣}{٤}$

$\hat{ص} = أ س + ب$

$= \frac{٢١ س}{٤} + \frac{٦٣}{٤}$

س	ص	س – $\overline{س}$	ص – $\overline{ص}$	(س – $\overline{س}$)(ص – $\overline{ص}$)	(س – $\overline{س}$)^٢
٨	٩٥	٣	١٣	٣٩	٩
٢	٦٥	– ٣	– ١٧	٥١	٩
٥	٩٠	٠	٨	٠	٠
٣	٧٠	– ٢	– ١٢	٢٤	٤
٧	٩٠	٢	٨	١٦	٤
المجموع				١٣٠	٢٦

٢) عند س = ٥

$\hat{ص} = \frac{٢١}{٤} \times ٥ + \frac{٦٣}{٤}$

$= \frac{١٠٥}{٤} + \frac{٦٣}{٤} = \frac{١٦٨}{٤} = ٤٢$

٣) الخطأ = القيمة الحقيقية – القيمة المتنبأ بها

= ٥٠ – القيمة المتنبأ بها (عند س = ٦)

من الجدول

$\hat{ص} = \frac{٢١}{٤} \times ٦ + \frac{٦٣}{٤}$

$= \frac{١٢٦ + ٦٣}{٤} = \frac{١٨٩}{٤} = ٤٧,٢٥$

الخطأ = ٥٠ – ٤٧,٢٥ = ٢,٢٥

بين الجدول آلاتي إنتاج خمسة مصانع من نفس السلعة و عدد الساعات التي يقضيها كل مصنع يوميا

عدد الساعات (س)	٨	٢	٥	٣	٧	٨
الانتاج(ص)	٩٥	٦٥	٩٠	٧٠	٩٠	٩٥

١) ارسم شكل الانتشار بين المتغيرين س ، ص

٢) هل يوجد علاقة بين إنتاج المصنع و عدد الساعات

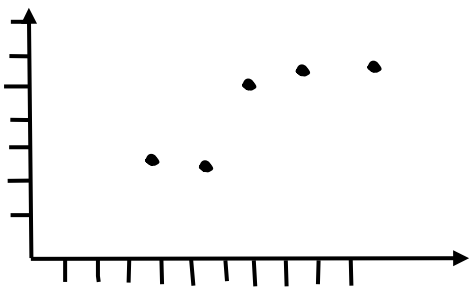
٣) إذا افترضنا أن العلاقة بين س ، ص علاقة خطية جد معادلة خط الانحدار؟

٤) قدر كمية الإنتاج المتوقعة لمصنع يعمل يوميا ست ساعات؟

٥) إذا عمل مصنع ٨ ساعات يوميا احسب خطأ التنبؤ في الإنتاج للكمية التي أنتجها؟

الحل:

١)



٢) العلاقة طردية

٣) $\hat{ص} = أ س + ب$

$\overline{س} = \frac{٨ + ٢ + ٥ + ٣ + ٧}{٥} = \frac{٢٥}{٥} = ٥$

$\overline{ص} = \frac{٩٥ + ٦٥ + ٩٠ + ٧٠ + ٩٠}{٥} = \frac{٤١٠}{٥} = ٨٢$

حيث أن أ = $\frac{(س - \overline{س})(ص - \overline{ص})}{(س - \overline{س})^٢}$

$= \frac{١٣٠}{٢٦} = ٥$

ب = $\overline{ص} - أ \overline{س} = ٨٢ - (٥ \times ٥) = ٥٧$

$\hat{ص} = أ س + ب$

$= ٥ س + ٥٧$ معادلة خط الانحدار

٤) عند س = ٦

$\hat{ص} = (٥ \times ٦) + ٥٧ = ٣٠ + ٥٧ = ٨٧$

يتوقع أن تكون كمية الإنتاج = ٨٧ عند العمل ٦ ساعات

٤) الخطأ في التنبؤ

= القيمة الحقيقية – القيمة المتنبأ بها

عند س = ٨

$\hat{ص} = (٨ \times ٥) + ٥٧ = ٤٠ + ٥٧ = ٩٧$

الخطأ في التنبؤ = ٩٥ – ٩٧ = – ٢

من الجدول ص = عند س = ٨

اذا كان الجدول التالي يبين قيم س ، ص فجد كل مما يلي:
١) احسب معدل ارتباط بيرسون
٢) اكتب معادلة خط الانحدار للتنبؤ بقيم ص اذا علمت قيم س؟

س	٢	٣	٦	٩
ص	٣	٥	٤	٨

الحل:
معدل ارتباط بيرسون

$$ر = \frac{\sum (س - \bar{س})(ص - \bar{ص})}{\sqrt{\sum (س - \bar{س})^2 \times \sum (ص - \bar{ص})^2}}$$

$$\bar{س} = \frac{٢ + ٣ + ٦ + ٩}{٤} = \frac{٢٠}{٤} = ٥$$

$$\bar{ص} = \frac{٣ + ٥ + ٤ + ٨}{٤} = \frac{٢٠}{٤} = ٥$$

س	ص	$س - \bar{س}$	$ص - \bar{ص}$	$(س - \bar{س})(ص - \bar{ص})$	$(\bar{س} - س)^2$	$(ص - \bar{ص})^2$
٢	٣	٣ ـ	٢ ـ	٦	٩	٤
٣	٥	٢ ـ	٠	٠	٤	٠
٦	٤	١	١ ـ	١ ـ	١	١
٩	٨	٤	٣	١٢	١٦	٩
المجموع				١٧	٣٠	١٤

$$ر = \frac{١٧}{\sqrt{٣٠ \times ١٤}} = \frac{١٧}{\sqrt{٤٢٠}}$$

٢) $\hat{ص} = أ س + ب$
حيث أن

$$أ = \frac{\sum (س - \bar{س})(ص - \bar{ص})}{\sum (س - \bar{س})^2} = \frac{١٧}{٣٠}$$

$$ب = \bar{ص} - أ \bar{س}$$
$$= ٥ - \frac{١٧}{٣٠} \times ٥$$
$$= \frac{١٥٠ - ٨٥}{٣٠} = \frac{٦٥}{٣٠}$$
$$ص = \frac{٦٥}{٣٠} س + \frac{١٧}{٣٠}$$

إذا كان $\bar{ص} = ١٠$ ، $\bar{س} = ٨$
$\sum (س - \bar{س})(ص - \bar{ص}) = ١٢٠$،
$\sum (س - \bar{س})^2 = ٢٤٠$
جد ما يلي
١) معادلة خط الانحدار
٢) قدر قيمة ص إذا كانت س = ٤
الحل:

أ) $\hat{ص} = أ س + ب$

$$أ = \frac{\sum (س - \bar{س})(ص - \bar{ص})}{\sum (س - \bar{س})^2}$$
$$= \frac{١٢٠}{٢٤٠} = \frac{١}{٢}$$

$$ب = \bar{ص} - أ \bar{س}$$
$$= ١٠ - (\frac{١}{٢} \times ٨) = ١٠ - ٤ = ٦$$

$$\hat{ص} = \frac{١}{٢} س + ٦$$

عند س = ٤

$$\hat{ص} = (\frac{١}{٢} \times ٤) + ٦ = ٢ + ٦ = ٨$$

وصل مجموعة من الباحثين في دراسة علامات الطلاب مقارنة بعدد الساعات الدراسية يوميا إلى معادلة خط الانحدار الخطي البسيط للعلاقة بين عدد ساعات الدراسة اليومي (س) و معدل الطلاب بـ (ص) فكانت $\hat{ص} = ١٢ + ٣ س$ اعتمد على المعادلة في الإجابة عن الأسئلة التالية:
١) استخرج قيمة أ ، ب
٢) قدر معدل الطلاب إذا كانت ساعات الدراسة اليومية هي ٥ ساعات
٣) اذا كانت قيمة ص عند س = ٧ هي ٣٠ فجد خطأ التنبؤ

١) $\hat{ص} = ١٢ + ٣ س$
أ = ٣ ب = ١٢

٢) $\hat{ص} = ١٢ + ٣ س = ١٢ + (٣ \times ٥) = ١٢ + ١٥ = ٢٧$

٣) الخطأ في التنبؤ = القيمة الحقيقية ـ المتوقعة

عند س = ٧ $\hat{ص} = ١٢ + (٣ \times ٧) = ١٢ + ٢١ = ٣٣$
الخطأ = ٣٠ ـ ٣٣ = ـ ٣

توصل باحث تربوي إلى معادلة خط الانحدار البسيط للعلاقات بين عدد ساعات الدراسة (س) و المعدل في الثانوية العامة (ص) فكانت

$\hat{ص}$ = ٣ س + ٦٥

١) ما قيمة كل من أ ، ب

٢) درست طالبة ٨ ساعات يوميا و حصلت على معدل (٨٦) احسب الخطأ في التنبؤ للمعدل الذي حصلت عليه طالبة و معتمدا على معادلة خط الانحدار المعطاة

١) أ = ٣ ب = ٦٥

٢) $\hat{ص}$ = ٣ س + ٦٥

عند س = ٨ = (٣× ٨) + ٦٥ = ٨٩

الخطأ في التنبؤ

= القيمة الحقيقية – القيمة المتنبأ بها

= ٨٦ – ٨٩ = – ٣

الجدول يمثل العلاقة بين المتغيرين س ، ص

س	٠	٤	٢	٣	١
ص	١	٦	٢	٥	١

معتمدا على الجدول أوجد ما يلي:

١) معادلة خط الانحدار للتنبؤ بقيم ص

٢) إذا كانت (س = ٤) فما قيمة ص المتنبأ بها

١) $\bar{س} = \frac{٠ + ٤ + ٢ + ٣ + ١}{٥} = \frac{١٠}{٥} = ٢$

$\bar{ص} = \frac{١ + ٦ + ٢ + ٥ + ١}{٥} = \frac{١٥}{٥} = ٣$

سؤال وزارة ٢٠٠٣

$\hat{ص}$ = أ س + ب

أ = $\frac{(س - \bar{س})(ص - \bar{ص})}{(س - \bar{س})^٢}$

ب = ص – أ س

س	ص	س – $\bar{س}$	ص – $\bar{ص}$	(س – س) (ص – $\bar{ص}$)	(س – $\bar{س}$)^٢
٠	١	– ٢	– ٢	٤	٤
٤	٦	٢	٣	٦	٤
٢	٢	٠	– ١	٠	٠
٣	٥	١	٢	٢	١
١	١	– ١	– ٢	٢	١
المجموع				١٤	١٠

أ = $\frac{١٤}{١٠}$ = ١,٤

ب = ٣ – (١,٤ × ٢)

= ٣ – ٢,٨ = ٠,٢

$\hat{ص}$ = ١,٤ س + ٠,٢

٢) عند س = ٤

$\hat{ص}$ = (١,٤ × ٤) + ٠,٢

= ٥,٦ + ٠,٢ = ٥,٨

سؤال وزارة ٢٠٠٩

يبين الجدول الآتي علامات ٦ طلاب في امتحاني العلوم (س) و الرياضيات (ص) جد معادلة خط الانحدار للتنبؤ بقيم (ص) إذا علمت قيم (س)

العلوم (س)	٦	٤	٨	٧	٢	٣
الرياضيات (ص)	٩	٨	١٠	٨	٥	٢

الحل:

$\bar{س} = \frac{٦ + ٤ + ٨ + ٧ + ٢ + ٣}{٦} = \frac{٣٠}{٦} = ٥$

$\bar{ص} = \frac{٩ + ٨ + ١٠ + ٨ + ٥ + ٢}{٦} = \frac{٤٢}{٦} = ٧$

أ = $\frac{(س - \bar{س})(ص - \bar{ص})}{(س - \bar{س})^٢}$

= $\frac{٢٨}{٢٨}$ = ١

ب = $\bar{ص}$ – أ $\bar{س}$

= ٧ – (١ × ٥) = ٧ – ٥ = ٢

$\hat{ص}$ = أ س + ب

= أ × س + ٢ = س + ٢

س	ص	س – $\bar{س}$	ص – $\bar{ص}$	(س – $\bar{س}$) (ص – $\bar{ص}$)	(س – $\bar{س}$)^٢
٦	٩	١	٢	٢	١
٤	٨	– ١	١	– ١	١
٨	١٠	٣	٣	٩	٩
٧	٨	٢	١	٢	٤
٢	٥	– ٣	– ٢	٦	٩
٣	٢	– ٢	– ٥	١٠	٤
المجموع				٢٨	٢٨