الشامل المختصر في الرياضيات

التوجيهي الأدبي الفصل الثاني

التكامل

إعداد الأستاذ : أشرف الهشلمون
ت : ٠٧٩٦١٧٠٥٧١

الدرس الأول : التكامل غير المحدود

إن عملية التكامل هي عكس التفاضل.

$\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{٢} \xrightarrow{\text{تفاضل}} \text{ق}'(\text{س}) = ٢\text{س}$

$\xrightarrow{\text{تكامل}}$

قواعد الدرس :

1) $\int \text{أ} \cdot \text{ءس} = \text{أ س} + \text{جـ}$

$\int ٧ \cdot \text{ءس} = ٧\text{س} + \text{جـ}$

و $\int \text{ءس} = ١\text{س} + \text{جـ} = \text{س} + \text{جـ}$

وينطبق ذلك على كل الثوابت مثل :

$\{٢ ، -٤ ، ٥و ، \frac{٧}{٣} ، \text{ل}٥ ، \pi ، \text{لهـ} ، \dots\}$

ملاحظة مهمة : عند التكامل غير المحدود لا ننسى وضع الثابت جـ في الناتج.

2) $\int \text{س}^{\text{ن}} \cdot \text{ءس} = \frac{\text{س}^{\text{ن}+١}}{\text{ن}+١} + \text{جـ}$

$\int \text{س}^{٢} \cdot \text{ءس} = \frac{\text{س}^{٢+١}}{٢+١} = \frac{١}{٣}\text{س}^{٣} + \text{جـ}$

$\int \text{س}^{-٤} \cdot \text{ءس} = \frac{\text{س}^{-٤+١}}{-٤+١} + \text{جـ} = \frac{\text{س}^{-٣}}{-٣} + \text{جـ}$

3) $\int \frac{١}{\text{س}} \cdot \text{ءس} = \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{س}| + \text{جـ}$

4) $\int \text{هـ}^{\text{س}} \cdot \text{ءس} = \text{هـ}^{\text{س}} + \text{جـ}$

5) $\int \text{جاس} \cdot \text{ءس} = -\text{جتاس} + \text{جـ}$

$\int \text{جتاس} \cdot \text{ءس} = \text{جاس} + \text{جـ}$

$\int \text{قا}^{٢}\text{س} \cdot \text{ءس} = \text{ظاس} + \text{جـ}$

6) $\int \text{أ ق}(\text{س}) \cdot \text{ءس} = \text{أ} \times \int \text{ق}(\text{س}) \cdot \text{ءس}$

$\int ٣\text{ق}(\text{س}) \cdot \text{ءس} = ٣ \times \int \text{ق}(\text{س}) \cdot \text{ءس}$

7) $\int \text{ق}(\text{س}) \mp \text{هـ}(\text{س}) \text{ءس} = \int \text{ق}(\text{س}) \text{ءس} \mp \int \text{هـ}(\text{س}) \cdot \text{ءس}$.

* أساسيات مهمة جداً :

$\frac{\text{أ}}{\text{ب}} + \text{جـ} = \frac{\text{أ}}{\text{ب}} + \frac{\text{ب} \times \text{جـ}}{\text{ب}} = \frac{\text{أ} + (\text{ب} \times \text{جـ})}{\text{ب}}$

$\frac{٥}{٢} + ١ = \frac{٥}{٢} + \frac{١ \times ٢}{٢} = \frac{٥}{٢} + \frac{٢}{٢} = \frac{٧}{٢}$

* $\sqrt[\text{ب}]{\text{س}^{\text{أ}}} = \text{س}^{\frac{\text{أ}}{\text{ب}}}$ $\left(\sqrt[٤]{\text{س}^{٣}} = \text{س}^{\frac{٣}{٤}}\right)$

* $\frac{١}{\text{س}^{\text{أ}}} = \text{س}^{-\text{أ}}$ $\left(\frac{١}{\text{س}^{٢}}\right) = \left(\text{س}^{-٢}\right)$.

* $\frac{١}{\sqrt[٣]{\text{س}}} = \frac{١}{\text{س}^{\frac{١}{٣}}} = \text{س}^{-\frac{١}{٣}}$

* $\text{س}^{\text{ن}} \times \text{س}^{\text{م}} = \text{س}^{\text{ن}+\text{م}}$

$\text{س}^{٢} \times \text{س}^{٣} = \text{س}^{٢+٣} = \text{س}^{٥}$.

$(\text{س}^{\text{ن}})^{\text{م}} = \text{س}^{\text{ن} \times \text{م}}$

$(\text{س}^{٢})^{٤} = \text{س}^{٢ \times ٤} = \text{س}^{٨}$

أساسيات :

$\frac{س^{ن}}{س^{م}} = س^{ن-م} = \left(\frac{س^{٥}}{س^{٢}}\right) = س^{٥-٢} = س^{٣}$

* $أ \times (ب \mp جـ) = (أ \times ب) \mp (أ \times جـ)$.

$(س \times (س^{٢} - ١)) = س^{٣} - س$

* ظا س = $\frac{جا س}{جتا س}$ ، قا² س = $\frac{١}{جتا^{٢} س}$

قا س = $\frac{١}{جتا س}$.

أسئلة متنوعة :

١- $\int ٨ س^{٣} - ٥ قا^{٢} س + ٤ \, . دس$

$= \frac{٨}{٤} س^{٤} - ٥ ظا س + ٤ س + جـ$

٢- $\int ٦ س^{٢} + \frac{٥}{س} - ١ \, دس$.

$= ٢ س^{٣} + ٥ لو_{هـ} |س| - س + جـ$

٣- $\int \sqrt[٣]{س^{٢}} - ٤ جا س + ٢ هـ^{س} \, . دس$

$= \int س^{\frac{٢}{٣}} - ٤ جا س + ٢ هـ^{س} \, . دس$

٤- $\int \frac{-٢}{س^{٢}} + \frac{١}{\sqrt[٣]{س^{٤}}} \, دس$

$= \int -٢ س^{-٢} + س^{-\frac{٤}{٣}} \, . دس$

$= \frac{-٢}{-١} س^{-١} + \frac{-٣}{١} س^{-\frac{١}{٣}} + جـ$

$= \frac{٢}{س} + \frac{٣}{\sqrt[٣]{س}} + جـ$

٥- $\int \frac{٣ س^{٢} - ٤}{س^{٤}} \, . دس$

$= \int (٣ س^{٢} - ٤) \times س^{-٤} \, . دس$.

$= \int ٣ س^{-٢} - ٤ س^{-٤} \, . دس$.

$= -٣ س^{-١} + \frac{٤}{٣} س^{-٣} + جـ$

٦- $\int \sqrt[٣]{س} \left(\sqrt[٣]{س} + \frac{١}{\sqrt{س}}\right) . دس$

$= \int س^{\frac{١}{٣}} \left(س^{\frac{١}{٣}} + س^{-\frac{١}{٢}}\right) . دس$

$= \int س^{\frac{١}{٣}} \left(س^{\frac{١}{٣}} + س^{-\frac{١}{٢}}\right) . دس$

$= \int س^{\frac{٢}{٣}} + س^{-\frac{١}{٦}} \, . دس$

$= \frac{٣}{٥} س^{\frac{٥}{٣}} + \frac{٦}{٥} س^{\frac{٥}{٦}} + جـ$

هناك أسئلة نحتاج فيها للتبسيط والاختصار كما في الأمثلة الآتية :

١- $\int \frac{٥ س^{٤} + ٨ س^{٦}}{س^{٣}} \, . دس$

$= \int \frac{\cancel{س^{٣}}(٥ س + ٨ س^{٣})}{\cancel{س^{٣}}} \, . دس$.

هنا استخدام إخراج عامل مشترك لنتخلص من المقام لنتخلص من المقام س³ .

$= \int ٥ س + ٨ س^{٣} \, . دس$

$= \frac{٥}{٢} س^{٢} + ٢ س^{٤} + جـ$

٢- $\int (س-٥)(س+٥)\, دس = \int س^2 - ٢٥\, دس = \frac{س^3}{٣} - ٢٥س + جـ$

هنا استخدمنا الفرق بين مربعين

$(أ-ب)(أ+ب) = أ^2 - ب^2$

٣- $\int \frac{٤-س^2}{س+٢}\, دس$

$= \int \frac{(\cancel{٢+س})(٢-س)}{(\cancel{س+٢})}\, دس$

$= \int (٢-س)\, دس = ٢س - \frac{س^2}{٢} + جـ$

٤- $\int (٣-٢\sqrt{س})^2\, دس$

$= \int ٩ - ١٢\sqrt{س} + ٤س\, دس$

$= \int ٩ - ١٢س^{\frac{١}{٢}} + ٤س\, دس$

$= ٩س - ٨س^{\frac{٣}{٢}} + ٢س^2 + جـ$

٥- $\int (٢س+٣)^2\, دس = \int ٤س^2 + ١٢س + ٩\, دس$

$= \frac{٤}{٣}س^3 + ٦س^2 + ٩س + جـ$

* تذكر

$(أ+ب)^2 = أ^2 + ٢أب + ب^2$

$(أ-ب)^2 = أ^2 - ٢أب + ب^2$

٦- $\int (٣-٢س^2)^2\, دس = \int ٩ - ١٢س^2 + ٤س^4\, دس$

$= ٩س - ٤س^3 + \frac{٤}{٥}س^5 + جـ$

٧- $\int \frac{-١٥}{جتا^2س}\, دس = \int -١٥ \times قا^2س\, دس$

$= -١٥ ظاس + جـ$

٨- $\int ٣ ظاس\, جتاس\, دس =$

$= \int \frac{٣ جاس}{\cancel{جتاس}} \times \cancel{جتاس}\, دس$

$= \int ٣جاس\, دس = -٣جتاس + جـ$

٩- $\int \frac{٤جاس}{٢ظاس}\, دس = \int \frac{\cancel{٤}جاس \times جتاس}{٢\cancel{جاس}}\, دس$

$= \int ٢جتاس\, دس = ٢جاس + جـ$

١٠- $\int (جتا^3س + ٤) \times ٢قا^2س\, دس$

$= \int \frac{٢جتا^3س + ٨}{جتا^2س}\, دس$

$= \int \frac{٢جتا^3س}{جتا^2س} + \frac{٨}{جتا^2س}\, دس$

$= \int ٢جتاس + ٨قا^2س\, دس$

$= ٢جاس + ٨ظاس + جـ$

١١- $\int \frac{٣س^4 + ٢س^2}{\sqrt[٣]{س^2}}\, دس$

$= \int (٣س^4 + ٢س^2) \times س^{\frac{-٢}{٣}}\, دس$

$= \int ٣س^{\frac{١٠}{٣}} + ٢س^{\frac{٤}{٣}}\, دس$

$= \frac{٩}{١٣}س^{\frac{١٣}{٣}} + \frac{٦}{٧}س^{\frac{٧}{٣}} + جـ$

12- $\int \frac{\text{ص}^2 - 1}{(\text{ص}+2)^{-1}}$. ءس $= \int (\text{ص}^2-1)(\text{ص}+2)$ ءص

$= \int \text{ص}^3 + 2\text{ص}^2 - \text{ص} - 2$. ءس .

$= \frac{\text{س}^4}{4} + \frac{2}{3}\text{ص}^3 - \frac{\text{ص}^2}{2} - 2\text{ص} + \text{جـ}$

تذكر: (أ ∓ ب)(جـ ∓ د) = (أ × جـ) ∓ (أ × د) ∓ (ب × جـ) ∓ (ب × د).

قاعدة: مشتقة التكامل غير المحدود ينتج لنا ما داخل التكامل أي أنه:

$\frac{\text{ء}}{\text{ءس}} \int \text{ق(س)} \cdot \text{ءس} = \text{ق(س)}$.

لاحظ: $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}$ مع $\int$ يلغيان بعضهما البعض

مثال: إذا كان ق(س) = $\int 4\text{س}^3 - 1$ ءس

جد قَ(س) نشتق الطرفين:

$\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}$ ق(س) = $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}} \int 4\text{س}^3 - 1$. ءس

⟸ قَ(س) = $4\text{س}^3 - 1$

مثال: إذا كان $\int$ ق(س) ءس = $4\text{س}^2 - 3$

جد ق(س) ، ق(1) ، قَ(2) :

$\frac{\text{ء}}{\text{ءس}} \int$ ق(س) ءس = $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}} (4\text{س}^2 - 3)$.

⟸ ق(س) = 8س

ق(1) = 8 × 1 = 8

قَ(س) = 8 ⟸ قَ(2) = 8

مثال: إذا كان ق(س) = $\int 4\text{س} - 4\text{س}^3$. ءس

جد قَ(1) ؟

$\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}$ ق(س) = $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}} \int 4\text{س} - 4\text{س}^3$. ءس

قَ(س) = $4\text{س} - 4\text{س}^3$.

قَ(1) = صفر

مثال: جد $\int \frac{\text{ء}}{\text{ءس}}$ قاس . ءس .

مثال: جد $\int$ قً(س) . ءس ؟ قَ(س) .

مثال: إذا كان قً(س) = $4\text{س} - 3\text{س}^3$.

وكان قَ(0) = 4 جد قَ(س) ؟

$\int$ قً(س) . ءس = $\int 4\text{س} - 3\text{س}^3$. ءس

قَ(س) = $2\text{س}^2 - \frac{3}{4}\text{س}^4 + \text{جـ}$

لإيجاد جـ نعوض قَ(0) :

قَ(0) = $2 \times 0^2 - \frac{3}{4} \times 0^4 + \text{جـ} = 4$

⟸ جـ = 4

∴ قَ(س) = $2\text{س}^2 - \frac{3}{4}\text{س}^4 + 4$

لإيجاد قاعدة الاقتران من ميل المماس :

ميل المماس = قَ(س) ولإيجاد قاعدة الاقتران ق(س) نقوم بتكامل قَ(س) أي أنه:

$\int$ قَ(س) . ءس = ق(س) + جـ وهنا نستفيد من النقطة (س ، ص) لإيجاد قيمة جـ .

مثال: إذا كان ميل المماس للاقتران ق(س) هو $3\text{س}^2 - 1$ وكانت ق(2) = 4

مثال:

اذا كان ميل المماس للاقتران ق(س) هو $3س^2 - 1$ وكانت ق(2) = 4 جد قاعدة الاقتران؟

$ق(س) = \int 3س^2 - 1 \, دس$

$= س^3 - س + ج$

نستخدم ق(2) = 4 لإيجاد قيمة ج .

$ق(2) = 2^3 - 2 + ج = 4 \Leftarrow ج = -2$

$\therefore$ قاعدة الاقتران هي $ق(س) = س^3 - س - 2$

ملاحظة: في الأسئلة من هذا النوع يمكن إعطاءنا أن منحنى الاقتران يمر بالنقطة (م، ب) وهنا تكون ق(م) = ب .

فمثلاً في السؤال السابق يمكن أن يعطينا ق(2) = 4 أو يعطينا أن النقطة التي يمر بها المنحنى هي (2، 4).

* لإيجاد المسافة والسرعة .

ف: المسافة ع: السرعة

ت: التسارع

$ف(ن) = \int ع(ن) \, . \, دن$

$ع(ن) = \int ت(ن) \, . \, دن$

وعند التكامل نستخدم المعطيات لإيجاد قيمة ج

مثال: إذا كان تسارع جسيم ت بعد ن من الثواني يعطى بالعلاقة:

ت(ن) = 8 م/ث² جد المسافة التي يقطعها الجسيم بعد مرور (ن) ثانية من بدء الحركة علماً بأن السرعة الابتدائية للجسيم ع(0) = 4 م/ث وموقعه الابتدائي ف(0) = 8 م وجد المسافة التي يقطعها بعد مرور 5 ثواني؟

لإيجاد المسافة ف(ن) نجد أولاً ع(ن).

$ع(ن) = \int ت(ن) \, . \, دن$

$= \int 8 \, دن = 8ن + ج$

لإيجاد ج نعوض ع(0) = 4

$ع(0) = 8 \times 0 + ج = 4 \Leftarrow ج = 4$

$\therefore ع(ن) = 8ن + 4$.

$ف(ن) = \int ع(ن) \, دن = \int 8ن + 4 \, دن$

$= 4ن^2 + 4ن + ج$

لإيجاد ج نعوض ف(0) = 8

$ف(0) = 4 \times 0^2 + 4 \times 0 + ج = 8 \Leftarrow$

$ج = 8$

$\therefore ف(ن) = 4ن^2 + 4ن + 8$

ولإيجاد المسافة بعد مرور 5 ثواني نجد

$ف(5) = 4 \times 5^2 + 4 \times 5 + 8 = 128$ م

أسئلة متنوعة ومهمة:

سؤال: جد $\int \frac{4ص^3 + 2ص\sqrt{ص}}{2\sqrt{ص}} \, . \, دص$

$= \frac{4}{7}ص^{\frac{7}{2}} + \frac{ص^2}{2} + ج$

سؤال: يتحرك جسيم على خط مستقيم بحيث أن سرعته بعد ن ثانية تساوي ع(ن) = ٦ (ن + ٢)² م/ث جد المسافة التي يقطعها الجسيم بعد مرور ثانيتين من بدء الحركة علماً بأن موقعه الابتدائي ف(٠) = ٢م ؟

الإجابة ١١٤م .

سؤال (٣): إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران ق(س) عند النقطة (س، ص) هو $\left(٢ - \frac{١}{ص^{٢}}\right)$ وكان المنحنى يمر بالنقطة $\left(\frac{١}{٢} ، ١\right)$ أجد قاعدة الاقتران ؟

الإجابة ق(س) = ٢ص + $\frac{١}{ص}$ − ٢

سؤال (٤): يتحرك جسيم في خط مستقيم بحيث كانت سرعته تعطى بالعلاقة: ع(ن) = ٤ن + ٤ م/ث جد المسافة بعد مرور ثانيتين من بدء الحركة علماً بأن المسافة التي قطعها الجسيم بعد ٥ ثواني هي ٩٧م ؟

الإجابة: ٤٣م .

الدرس الثاني:

التكامل المحدود:

$$\int_{أ}^{ب} \text{ق}'(\text{س}) \cdot \text{د}\text{س} = \text{ق}(\text{س}) \Big]_{أ}^{ب} = \text{ق}(ب) - \text{ق}(أ)$$

وهنا نطبق نفس القواعد للتكامل غير المحدود ولكن نعوض حدود التكامل لإيجاد قيمة التكامل العددية مع ملاحظة عدم وضع الثابت جـ .

مثال: $\int_{١}^{٢} \text{د}\text{س} = \text{س} \Big]_{١}^{٢} = ١(٢ - ١) = ١$

مثال: $\int_{٢}^{٤} ٥ \, \text{د}\text{س} = ٥\text{س} \Big]_{٢}^{٤} = ٥(٤ - ٢) = ١٠$

مثال: إذا كان ق(١) = ٢ و ق(٣) = ٤ جد $\int_{١}^{٣} \text{ق}'(\text{س}) \cdot \text{د}\text{س}$ ؟

$$\int_{١}^{٣} \text{ق}'(\text{س}) \cdot \text{د}\text{س} = \text{ق}(\text{س}) \Big]_{١}^{٣} = \text{ق}(٣) - \text{ق}(١) = ٤ - ٢ = ٢$$

مثال: $\int_{٠}^{١} (\sqrt{\text{ص}} + \text{ص}) \cdot \text{د}\text{ص} = \int_{٠}^{١} (\text{ص}^{\frac{١}{٢}} + \text{ص}) \, \text{د}\text{ص}$

$$= \left(\frac{٢}{٣} \text{ص}^{\frac{٣}{٢}} + \frac{\text{ص}^{٢}}{٢}\right) \Big]_{٠}^{١}$$

$$= \frac{٢}{٣} \times ١^{\frac{٣}{٢}} + \frac{١}{٢} - \left(\frac{٢}{٣} \times ٠^{\frac{٣}{٢}} + \frac{٠}{٢}\right) = \frac{٧}{٦}$$

مثال: $\int_{١}^{ب} \frac{١}{هـ^{-س}} \cdot دس = \int هـ^{س} \cdot دس$

$= هـ^{س}]_{٠}^{٢} = هـ^{٢} - هـ^{٠} = هـ^{٢} - ١$

تذكر: $هـ^{٠} = ١$ ، $هـ^{(١)} = هـ$

أي عدد أس واحد يساوي العدد نفسه أي عدد أس صفر يساوي واحد.

$\frac{صفر}{أي\ عدد} = صفر$ ، لو١ = صفر ، $لو_{هـ} هـ = ١$

لو٣ - لو٢ = لو $\frac{٣}{٢}$ ، $لو_{هـ} هـ^{٢} = ٢$

أسئلة على المجاهيل:

مثال: $\int_{-٣}^{١} ل \cdot دس = ٢٨$ جد قيمة ل؟

$ل (١ - -٣) = ٢٨ \Leftarrow ل = \frac{٢٨}{٤} = ٧$

مثال: إذا كان $\int_{٢}^{م} ٤ دس = ٨$ جد قيمة م؟

$٤(م - ٢) = ٨ \Leftarrow م = ٢ + ٢ = ٤$

مثال: إذا كان $\int_{١}^{ب} (٢س + ٣) \cdot دس = ٦$

جد قيمة ب؟

$(س^{٢} + ٣س)]_{١}^{ب} = ٦$

$ب^{٢} + ٣ب - ١ - ٣×١ = ٦$

$\Leftarrow ب^{٢} + ٣ب - ١٠ = ٠ \Leftarrow (ب + ٥)(ب - ٢) = ٠$

$\Leftarrow ب = -٥ ، ب = ٢$

سؤال: إذا كانت $\int_{م}^{٣م} ٤م \cdot دس = ٨$

جد قيمة م؟

الإجابة: م = ٢ ، ١

مثال: إذا كانت قَ(س) متصلة وكانت ق(١) = ٤ وق(٢) = ١٢ وكانت $\int_{١}^{٢} م ق'(س) دس$

= ١٦ جد قيمة م؟

$\int_{١}^{٢} م ق'(س) دس = م ق(س)]_{١}^{٢} =$

$م (ق(٢) - ق(١)) = ١٦ \Leftarrow$

$م (١٢ - ٤) = ١٦ \Leftarrow م = ٢$

مثال: إذا كانت قَ(س) = ٤س هي مشتقة الاقتران ق(س) المعرف على [٢، ٣]

جد قيمة ق(٣) - ق(٢)؟

$\int_{٢}^{٣} ق'(س) دس = \int_{٢}^{٣} ٤س \cdot دس =$

$٢س^{٢}]_{٢}^{٣}$

$= ٢×٣^{٢} - ٢×٢^{٢} = ١٠$

ولأن $\int_{٢}^{٣} ق'(س) = ق(٣) - ق(٢)$

$\therefore ق(٣) - ق(٢) = ١٠$

مثال: إذا كان جـ عدد ثابت وكان ق(جـ) = ١٢ و قَ(١) = ٨ وكان:

$\int_{1}^{جـ} (قَ(س) - هـ^{س})\, دس = ٠$ ، جد هـ^جـ ؟

$ق(س) \Big]_{1}^{جـ} - هـ^{س} \Big]_{1}^{جـ} =$ صفر

$ق(جـ) - ق(١) - هـ^{جـ} + هـ =$ صفر

$١٢ - ٨ - هـ^{جـ} + ١ =$ صفر $\Leftarrow هـ^{جـ} = ٥$

مثال: إذا كان $\int ل(س)\, دس = س^{٢} + جـ$ ، جد $\int_{-2}^{3} ل(س)\, دس$ ؟

$\int_{-2}^{3} ل(س)\, دس = س^{٢} \Big]_{-2}^{3}$

$= ٣^{٢} - (-٢)^{٢} = ٥$

سؤال: إذا كان $\int ق(س)\, دس = ٤س^{٢} + ٨س + جـ$ جد قيمة $\int_{2}^{3} ق(س)\, دس$ ؟

الإجابة: ٢٨.

قاعدة: مشتقة التكامل المحدود يساوي صفر دائماً.

مثال: إذا كان ص = $\int_{3}^{10} \sqrt{س} - ٤ جتاس\, دس$.

جد $\frac{دص}{دس}$ وجد المشتقة الأولى للعدد واحد؟

التكامل محدود ∴ $\frac{دص}{دس} =$ صفر

قَ(١) = صفر.

مثال: جد $\int_{1}^{2} \frac{٨}{س^{٥}}\, دس$ ؟

$= \frac{-٢}{س^{٤}} \Big]_{1}^{2} = \frac{٣٠}{١٦}$

مثال: إذا كان $\int_{1}^{جـ} هـ^{س}\, دس =$ صفر، جد جـ

قيمة جـ $= هـ^{س} \Big]_{1}^{جـ} = هـ^{جـ} - هـ^{١} = ٠$

$\Leftarrow هـ^{جـ} = هـ^{١}$ ∴ جـ = ١

سؤال: جد $\int_{1}^{8} \frac{١}{س^{4/3}}\, دس$ ؟

الإجابة: $\frac{٣}{٢}$

إذا كان $\int ع(س)\, دس = س^{2/3} + جـ$. جد $\int_{-1}^{8} ع(س)\, دس$ ؟

الإجابة: ٣.

الدرس الثالث: خواص التكامل المحدود

$\int_{م}^{ن} جـ\, ق(س)\, دس = جـ \int_{م}^{ن} ق(س)\, دس$

جـ: عدد ثابت.

مثال: $\int_{1}^{3} ٥س\, دس = ٥ \times \int_{1}^{3} س\, دس$

$= ٥ \times \left(\frac{س^{٢}}{٢} \Big]_{1}^{3} \right) = ٥ \left(\frac{٩}{٢} - \frac{١}{٢} \right) =$

٢٠.

مثال: $\int_{1}^{3} 3\,ق(س) \,.\, دس = 12$ جد قيمة

$\int_{1}^{3} ق(س) \,.\, دس$ ؟

$3 \times \int_{1}^{3} ق(س) \,.\, دس = 12$

$\Leftarrow \int_{1}^{3} ق(س)\, دس = \frac{12}{3} = 4$

مثال: إذا كان $\int_{0}^{1} 4\,ق(س) - 5 = 11$

جد $\int_{0}^{1} ق(س) \,.\, دس$ ؟

$4 \times \int_{0}^{1} ق(س)\, دس - 5(1-0) = 11$

$\int_{0}^{1} ق(س)\, دس = \frac{16}{4} = 4$

٢- $\int_{أ}^{ب} (ق(س) \mp هـ(س))\, دس =$

$\int_{أ}^{ب} ق(س)\, دس \mp \int_{أ}^{ب} هـ(س)\, دس$.

مثال: $\int_{0}^{3} (3ص^2 + 4ص)\, دص$.

$= \int_{0}^{3} 3ص^2\, دص + \int_{0}^{3} 4ص \,.\, دص$.

$= ص^3 \Big]_{0}^{3} + 2ص^2 \Big]_{0}^{3} = (3^3 - 0^3) + (2\times3^2 -$

$2\times 0^2) = 45$.

مثال: إذا كان $\int_{0}^{3} ق(س)\, دس = 10$ جد

$\int_{0}^{3} (2ص + ق(ص))\, دص$ ؟

$\int_{0}^{3} 2ص\, دص + \int_{0}^{3} ق(س) \,.\, دس = ص^2 \Big]_{0}^{3} + 10$

$= 19$

سؤال: $\int_{م}^{5} 3\,ق'(س)\, دس = 12$ وق(5) = 7 جد ق(م) ؟ الإجابة:

ق(م) = 3 .

٣- $\int_{أ}^{أ} ق(ص) \,.\, دص =$ صفر أي أنه إذا

كانت حدود التكامل متساوية فإن قيمة

التكامل تساوي صفر دائماً .

مثال: $\int_{5}^{5} \left(\sqrt{ص} - \frac{5}{ص^2} + جتاص\right) دص$

= صفر .

٤- $\int_{أ}^{ب} ق(س) \,.\, دس = - \int_{ب}^{أ} ق(س) \,.\, دس$

أي أنه إذا قلبنا حدود التكامل نعكس إشارة

الإجابة .

مثال: $\int_{2}^{5} (س^3 + جاص)\, دس = 2$ فإن

$\int_{5}^{2} (س^3 + جاص)\, دس = -2$.

مثال: إذا كان $\int_{3}^{5} 2ق(س)\, دس = 12$ جد

$\int_{5}^{3} ق(س)\, دس$ ؟ $\int_{3}^{5} 2ق(س)\, دس = 12$

$\Leftarrow \int_{3}^{5} ق(س)\, دس = \frac{12}{2} = 6$

$\therefore \int_{5}^{3} ق(س)\, دس = -6$

مثال: إذا كان $\int_{-2}^{5} ق(س)\,دس = 6$ و

$\int_{5}^{-2} \frac{1}{2} ع(ص)\,دص = 4$ جد $\int_{-2}^{5} 3ق(س) +$

$ع(ص) - ص\,دس$ ؟

$\int_{5}^{-2} \frac{1}{2} ع(ص)\,دص = 4$ جد $\int_{-2}^{5} 3ق(س) +$

$ع(س) - ص\,دص$ ؟

$\int_{5}^{-2} \frac{1}{2} ع(ص)\,دص = 4 \Leftarrow \int_{5}^{-2} ع(ص)\,دص$

$= 8 \Leftarrow \int_{-2}^{5} ع(ص)\,دص = -8$

$\therefore 3 \times 6 + -8 - \frac{1}{2} ص^2 \Big]_{-2}^{5} = 10 - \frac{21}{2}$

$= -\frac{1}{2}$.

ملاحظة: إذا كان ناتج التكامل صفر فليس من الضرورة أنه تكون الحدود متساوية تماماً

المثال التالي:

مثال: إذا كان $\int_{2}^{م} 2ص\,دس =$ صفر جد

قيم م ؟

$= ص^2 \Big]_{2}^{م} = م^2 - 4 =$ صفر $\Leftarrow$

$م = \sqrt{4} = \pm 2$

مثال: إذا كان $\int_{م}^{3} ق(س)\,دس = 4م - 12$

جد قيمة م ؟

$\int_{م}^{3} ق(س)\,دس = 4م - 12$ جد قيمة م ؟

$\int_{3}^{3} ق(ص)\,دص =$ صفر $\therefore 4م - 12 = 0$

$\Leftarrow م = 3$

6) $\int_{م}^{ن} ق(ص)\,دص = \int_{م}^{ك} ق(س)\,دس$

$+ \int_{ك}^{ن} ق(س)\,دص$.

مثال: إذا كان $\int_{1}^{3} ق(ص)\,دص = 2$ و

كان $\int_{1}^{6} ق(س)\,دس = 7$ جد $\int_{3}^{6} ق(ص)$

$دص$ ؟

$\int_{1}^{6} ق(ص)\,دس = \int_{1}^{3} ق(س)\,دس + \int_{3}^{6}$

$ق(س)\,دس = 2 + 7 = 9$

مثال: إذا كان $\int_{1}^{3} ق(س)\,دس = 2$

وكان $\int_{1}^{6} ق(ص)\,دس = 9$ جد

$\int^{3} ق(س)\,دس$ ؟

أولاً نجد $\int_{3}^{6} ق(س)\,دس$

$\int_{1}^{6} ق(س)\,دس = \int_{1}^{3} ق(س)\,دس +$

$\int_{3}^{6} ق(س)\,دس$

$9 = 2 + \int_{3}^{6} ق(س)\,دس \Leftarrow \int_{3}^{6} ق(س)\,دس$

$= 7 \Leftarrow \int_{6}^{3} ق(س)\,دس = -\int_{3}^{6} ق(س)\,دس$

$= -7$

مثال: إذا كان $\int_{2}^{-2} ق(س)\,دس = -7$

وكان $\int_{2}^{4} 3ق(س)\,دس = 9$ جد $\int_{-2}^{4} ق(س)\,دس$

$\int_{-2}^{4} ق(س)\,دس = \int_{-2}^{2} ق(س)\,دس + \int_{2}^{4} ق(س)\,دس$

$\int_{-2}^{2} ق(س)\,دس = -\int_{2}^{-2} ق(س)\,دس = --7 = 7$

$\int_{2}^{4} 3ق(س)\,دس = 9 \Leftarrow \int_{2}^{4} ق(س)\,دس$

$= \frac{9}{3} = 3$

$\int_{-2}^{4} ق(س)\,دس = 7 + 3 = 10$

مثال: إذا كان $\int_{-2}^{5} ق(س)\,دس = 6$ وكان

$\int_{-2}^{1} 4ق(ص)\,دص = 8$ جد $\int_{1}^{5} (ق(س) + 4ص)$

$دس^{-3}$ ؟

$\int_{-2}^{1} 4ق(ص)\,دص = 8 \Leftarrow \int_{-2}^{1} ق(ص)\,دس$

$= \frac{8}{4} = 2$ ونجد كذلك $\int_{1}^{5} ق(س)\,دس$

$\int_{-2}^{5} ق(س)\,دس = \int_{-2}^{1} ق(س)\,دس + \int_{1}^{5}$

ق(س) دس .

$6 = 2 + \int_{1}^{5} ق(س)\,دس \Leftarrow \int_{1}^{5} ق(س)\,دس = 4$

$\int_{1}^{5} (ق(س) + 4ص)\,دس = \int_{1}^{5} ق(ص)\,دص +$

$\int_{1}^{5} 4ص\,دص = 4 + (2ص^2]_{1}^{5}) =$

$= 4 + 50 - 2 = 52$

مثال: إذا كان $ق(س) = \begin{cases} 2س + 1 & ، -1 \leq س \leq 1 \\ 3س^2 + 2 & ، 1 < س \leq 4 \end{cases}$

جد $\int_{-1}^{4} ق(س)\,دس$ ؟

حدود التكامل يتم تعويضها في اقترانين مختلفين لأن الحد -1 يقع في الاقتران $2س + 1$ والحد 4 يقع في الاقتران $3س^2 + 2$

وهنا يتم تقسيم التكامل الأول $\int$ والثاني

$\int_{-1}^{4}$ ؛ $\int_{-1}^{4} ق(س)\,دس = \int_{-1}^{1} ق(س)\,دس$

$+ \int_{1}^{4} ق(س)\,دس = \int_{-1}^{1} (2س + 1)\,دس +$

$\int_{1}^{4} (3س^2 + 2)\,دس = (س^2 + س)]_{-1}^{1} +$

$(س^3 + 2س)]_{1}^{4} = 71$

في السؤال السابق جد $\int_{0}^{3} ق(س)\,دس$ ؟

$\int_{0}^{3} ق(س)\,دس = \int_{0}^{1} ق(س)\,دس +$

$\int_{1}^{3} (3س^2 + 2)\,دس$.

سؤال: إذا كان $ق(س) = \begin{cases} 2س + 9 & ، س < 2 \\ 3س^2 + 5 & ، س \geq 2 \end{cases}$

وكان $\int_{أ}^{3} ق(س)\,دس = 42$ جد قيمة أ ؟

الإجابة: أ = -12 .

مثال: إذا كان $\int_{-1}^{3} ق(س)\,دس = 6$ و كان $\int_{3}^{-1} \frac{ع(س)}{2}\,دس = -5$ جد ما يلي:

1- $\int_{-1}^{3} (4ق(س) - ع(س))\,دس$.

$\int_{3}^{-1} \frac{ع(س)}{2}\,دس = -5 \Leftarrow \int_{3}^{-1} ع(س)\,دس$

$= -5 \times 2 = -10$ ∴ $\int_{-1}^{3} ع(س)\,دس = 10$

$\int_{-1}^{3} (4ق(س) - ع(س))\,دس = 4 \times 6 - 10$

$= 14$

2- $\int_{-1}^{3} (6س^2 - 3ع(س) + 2)\,دس$

$= 2س^3 \Big]_{-1}^{3} - 3 \times 10 + 2س \Big]_{-1}^{3} =$

ع ٣

مثال: إذا كان $\int_{3}^{5} \left(\frac{ق(س)}{2} - 1\right) دس = 6$

وإذا كان $\int_{8}^{5} ق(س)\,دس = 10$ جد

$\int_{3}^{8} (ق(س) + 2س)\,دس$؟

$\int_{3}^{5} \frac{ق(س)}{2} - 1\,دس = \frac{1}{2} \int_{3}^{5} ق(س)\,دس$

$-1(5-3) = 6$

∴ $\int_{3}^{5} ق(س)\,دس = (6+2) \times 2 = 16$

$\int_{3}^{8} ق(س)\,دس = \int_{3}^{5} ق(س)\,دس + \int_{5}^{8}$

$ق(س).دس = 16 + -10 = 6$

∴ $\int_{3}^{8} ق(س) + 2س\,دس =$

$6 + س^2 \Big]_{3}^{8} = 61$

سؤال: إذا كان ق(س) =

$$\begin{cases} 3س^3 - 1 & ، س \le 0 \\ 4س^2 & ، س < 4 \\ -3 & ، س \ge 4 \end{cases}$$

جد $\int_{-3}^{3} قً(س)\,دس$؟

الإجابة: $\int_{-2}^{3} ق(س)\,دس = 28$

سؤال: إذا كان

$ق(س) = \int_{0}^{3} (3ص - ص^3 + \sqrt{ص})\,دص -$

$\int (6س^2 + 1)\,دس + 4س^2$.

جد قَ(1)؟

الإجابة: قَ(1) = 5.

الدرس الرابع: التكامل بالتعويض:

إن تكامل حاصل ضرب أو قسمة اقترانين يكون غالباً أحدهما مشتقة الآخر وإذا لم يكن كذلك نلجأ لطرق الاختصار والتبسيط التي تعلمناها سابقاً.

عندما يكون أحد الاقترانات مشتقة الآخر فإننا نلجأ للحل كما هو موضح في الأمثلة الآتية:

مثال: جد $\int (2س+5)(س^2+5س)^4 \, دس$

نفرض $ص = س^2 + 5س$ لاحظ أن مشتقته تساوي $2س + 5$.

$\frac{دص}{دس} = 2س + 5 \Leftarrow دس = \frac{دص}{2س+5}$

$\Leftarrow \int \cancel{(2س+5)}(ص)^4 \cdot \frac{دص}{\cancel{(2س+5)}}$

$= \int ص^4 \, دص = \frac{ص^5}{5} + ج = \frac{1}{5}(س^2+5س)^5$

$+ ج$.

مثال: $\int \frac{4س^2}{(2س^3+3)^5} \, دس$

نفرض $ص = 2س^3 + 3$ ، $\frac{دص}{دس} = 6س^2$

$دس = \frac{دص}{6س^2} \Leftarrow \int \frac{4س^2}{ص^5} \times \frac{دص}{6س^2}$

$= \frac{4}{6} \int ص^{-5} \, دص = \frac{4}{6} \times \frac{ص^{-4}}{-4} + ج$

$= \frac{-1}{6(2س^3+3)^4} + ج$

سؤال: جد $\int 2س^2 (س^3+1)^5 \, دس$.

الإجابة: $\frac{(س^3+1)^6}{9} + ج$

مثال: $\int (8س^3+3)\left(\sqrt[5]{2س^4+3س}\right) دس$

نفرض $ص = 2س^4 + 3س$ ، $\frac{دص}{دس} = 8س^3 + 3$

$دس = \frac{دص}{8س^3+3}$

$\int (8س^3+3)\left(\sqrt[5]{ص}\right) \cdot \frac{دص}{8س^3+3}$

$= \int ص^{\frac{1}{5}} \, دص = \frac{5}{6} ص^{\frac{6}{5}} + ج$

$= \frac{5(2س^4+3س)^{\frac{6}{5}}}{6} + ج$

مثال: $\int 6س \, جا س^2 \, دس$ نفرض $ص = س^2$

$\frac{دص}{دس} = 2س \Leftarrow دس = \frac{دص}{2س}$

$\int 6س \, جا ص \cdot \frac{دص}{2س} = \int 3 جا ص \cdot دص$

$= -3 جتا ص + ج = -3 جتا س^2 + ج$

مثال: $\int 2س^2 هـ^{(س^3+5)} \cdot دس$

نفرض $ص = س^3 + 5 \Leftarrow \frac{دص}{دس} = 3س^2 \Leftarrow$

$دس = \frac{دص}{3س^2}$

$\int 2س^2 هـ^ص \cdot \frac{دص}{3س^2} = \int \frac{2}{3} هـ^ص \cdot دص$

$= \frac{2}{3} هـ^ص + ج = \frac{2}{3} هـ^{س^3+5} + ج$

سؤال: جد $\int \frac{جتا \sqrt{س}}{\sqrt{س}} . دس$

الإجابة: $2 جا \sqrt{س} + ج$

مثال: $\int \frac{2س + 3}{جتا^2(س^2 + 3س)} . دس$

$= \int (2س + 3)(قا^2(س^2 + 3س)) . دس$

نفرض $ص = س^2 + 3س$ ، $\frac{دص}{دس} = 2س + 3$

$دس = \frac{دص}{2س + 3}$

$\int (2س + 3) قا^2 ص . \frac{دص}{2س + 3} = \int قا^2 ص$

$. دص = ظا ص + ج$

$= ظا(س^2 + 3س) + ج$

سؤال: $\int \frac{-4 قا^2(لو_{هـ} س)}{2س} . دس$

الإجابة: $-2 ظا لو_{هـ}|س| + ج$

سؤال: $\int (س + 3) \sqrt[3]{س^2 + 6س - 4} . دس$

نفرض $ص = س^2 + 6س - 4$

$\frac{دص}{دس} = 2س + 6 \Leftarrow دس = \frac{دص}{2س + 6}$

$\int (س + 3) \sqrt[3]{ص} . \frac{دص}{2(س + 3)}$

$= \int \frac{1}{2} ص^{\frac{1}{3}} . دص = \frac{3}{8} (س^2 + 6س - 4)^{\frac{4}{3}}$

$+ ج$

مثال: جد $\int 2س^2 قا(2س^3 - 2) ظا(2س^3 - 2) دس$

نفرض $ص = 2س^3 - 2$ ، $\frac{دص}{دس} = 6س^2$

$\Leftarrow دس = \frac{دص}{6س^2}$

$\int 2س^2 قا(ص) ظا(ص) . \frac{دص}{6س^2} = \frac{1}{3} \int قا(ص) ظا(ص) دص$

$= \frac{1}{3} قا(ص) + ج = \frac{1}{3} قا(2س^3 - 2)$

$+ ج .$

سؤال: جد $\int 4س قا^2(2س^2 - 5) . دس$

الإجابة: $ظا(2س^2 - 5) + ج$

* في تكاملات الاقترانات الخطية (أس + ب) نقوم بنفس الأسلوب مع أنه لا يوجد اقتران ومشتقة معاً.

مثال: $\int (2س + 3)^4 . دس$

نفرض $ص = 2س + 3$ ، $\frac{دص}{دس} = 2 \Leftarrow$

$دس = \frac{دص}{2}$ ∴ $\int ص^4 . \frac{دص}{2}$

$= \frac{1}{10} \times (2س + 3)^5 + ج$

سؤال: جد $\int \frac{3}{(5 - 4س)^7} . دس$

$= \frac{3}{24} \times (5 - 4س)^{-6} + ج$

مثال ٥: $\int \sqrt[5]{(5-3\text{س})^{3}}\,.\,\text{دس}$

نفرض $\text{ص} = 5 - 3\text{س}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = -3 \Leftarrow \text{دس} = \frac{\text{دص}}{-3}$

$\int \sqrt[5]{\text{ص}^{3}}\,.\,\frac{\text{دص}}{-3} = \frac{1}{-3} \times \int \text{ص}^{\frac{3}{5}}\,.\,\text{دص}$

$= \frac{1}{-3} \times \frac{5}{8} \times \text{ص}^{\frac{8}{5}} + \text{ج}$

$= \frac{-5}{24} \times \sqrt[5]{(5-3\text{س})^{8}} + \text{ج}$

مثال ٦: $\int \text{هـ}^{(3\text{س}-1)}\,.\,\text{دس}$ نفرض ص = $3\text{س} - 1$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 3 \Leftarrow \text{دس} = \frac{\text{دص}}{3}$

$\int \text{هـ}^{\text{ص}}\,.\,\frac{\text{دص}}{3} = \frac{1}{3} \times \text{هـ}^{(3\text{س}-1)} + \text{ج}$

مثال ٧: $\int \frac{-2}{\text{س}+1}\,.\,\text{دس}$ نفرض ص = $\text{س} + 1$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 1 \Leftarrow \text{دس} = \frac{\text{دص}}{1} = \text{دص}$

$\int \frac{-2}{\text{ص}}\,.\,\text{دص} = -2\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ص}| + \text{ج}$

$= -2\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}+1| + \text{ج}$

مثال ٨: $\int \frac{3}{\text{س}+\text{هـ}}\,.\,\text{دس}$.

هـ: العدد النيبيري وهو ثابت.

نفرض ص = س + هـ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 1$

$\text{دس} = \text{دص}$

$\int \frac{3}{\text{ص}}\,.\,\text{دص} = 3\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ص}| + \text{ج}$

$= 3\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س} - \text{هـ}| + \text{ج}$

مثال ٩: $\int \frac{3}{\text{س}^{2} + 8\text{س} + 16}\,.\,\text{دس}$

$= \int \frac{3}{(\text{س}+4)(\text{س}+4)}\,.\,\text{دس} =$

$\int \frac{3}{(\text{س}+4)^{2}}\,.\,\text{دس}$ نفرض ص = $\text{س} + 4$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 1 \Leftarrow \text{دس} = \text{دص}$

$\int 3\,\text{ص}^{-2}\,.\,\text{دص} = 3 \times \frac{\text{ص}^{-1}}{-1} + \text{ج}$

$= \frac{-3}{(\text{س}+4)} + \text{ج}$.

مثال ١٠: $\int \text{هـ}^{(2-\text{س})} + \text{قا}^{2}\text{س}\,.\,\text{دس}$

$= \int \text{هـ}^{(2-\text{س})}\,\text{دس} + \int \text{قا}^{2}\text{س}\,.\,\text{دس}$

$\int \text{هـ}^{(2-\text{س})}\,.\,\text{دس}$ ، نفرض ص = $2 - \text{س}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = -1 \Leftarrow \text{دس} = -\text{دص}$

$\int \text{هـ}^{\text{ص}} \times -1\,\text{دص} = -\text{هـ}^{\text{ص}} + \text{ج}$

$= -\text{هـ}^{(2-\text{س})} + \text{ج}$ $\therefore \int \text{هـ}^{(2-\text{س})} + \text{قا}^{2}\text{س}\,\text{دس} =$

$= -\text{هـ}^{(2-\text{س})} + \text{ظاس} + \text{ج}$

قواعد مختصرة لتكامل الاقترانات الخطية

1- $\int (أس+ب)^{ن}\, دس = \frac{(أس+ب)^{ن+1}}{أ \times (ن+1)} + ج$

مثال $\int (5س+2)^{5}\, دس = \frac{(5س+2)^{6}}{5 \times 6} + ج$

2- $\int جا(أس+ب)\, دس = \frac{-1}{أ} \times جتا(أس+ب) + ج$

$\int جتا(أس+ب)\, دس = \frac{1}{أ} \times جا(أس+ب) + ج$

$\int قا^{2}(أس+ب)\, دس = \frac{1}{أ} \times ظا(أس+ب) + ج$

مثال $\int جتا(4-2س)\, دس = \frac{1}{-2} \times جا(4-2س) + ج$

3) $\int \frac{ج}{أس+ب}\, دس = \frac{ج}{أ} \times لو_{هـ}|أس+ب| + ج$

مثال: $\int \frac{-2}{هـ-س}\, دس = \frac{-2}{-1} \times لو_{هـ}|هـ-س| + ج$

4- $\int هـ^{(أس+ب)}\, دس = \frac{1}{أ} \times هـ^{(أس+ب)} + ج$

مثال $\int هـ^{(5س-2)}\, دس = \frac{1}{5} \times هـ^{(5س-2)} + ج$

مثال $\int \left(4هـ^{(3س+2)} + \frac{5}{س-هـ}\right) دس$

$= \frac{4}{3} هـ^{(3س+2)} + 5\, لو_{هـ}|س-هـ| + ج$

* في حالة التكامل المحدود :
لابد أنه نفرض ص ونعوض الحدود فيها لإيجاد قيم ص والتي ستكون حدود التكامل الجديد.

مثال: $\int_{0}^{2} (2س+3)(س^{2}+3س)^{4}\, دس$.

نفرض ص = $س^{2} + 3س$.

$\frac{دص}{دس} = 2س + 3 \Leftarrow دس = \frac{دص}{2س+3}$

الحدود في السؤال هي (0 ، 2).

عندما س = 0 فإن ص = $0^{2} + 3 \times 0 = 0$
(الحد السفلي).

وعندما س = 2 فإن ص = $2^{2} + 3 \times 2 = 10$ (الحد العلوي).

$\int_{0}^{10} (\cancel{2س+3}) \times ص^{4}\, \frac{دص}{(\cancel{2س+3})} =$

$\int_{0}^{10} ص^{4}\, دص$.

$= \frac{ص^{5}}{5}\Big]_{0}^{10} = \frac{10^{5}}{5} - \frac{0}{5} = \frac{10^{5}}{5}$

مثال: $\int_{0}^{2} س\, هـ^{س^2} \cdot دس$. نفرض ص = $س^2$

$\frac{دص}{دس} = 2س \Leftarrow دس = \frac{دص}{2س}$

عندما س = 0 فإن ص = 0^2 = 0

وعندما س = 2 فإن ص = 2^2 = 4

$\int_{0}^{4} س\, هـ^{ص} \cdot \frac{دص}{2س} = \frac{1}{2} هـ^{ص} \Big]_{0}^{4}$

$= \frac{1}{2}(هـ^{4} - هـ^{0}) = \frac{1}{2}(هـ^{4} - 1) =$

$\frac{1}{2} هـ^{4} - \frac{1}{2}$.

سؤال جد: $\int_{0}^{1} \frac{1 - 2س}{\sqrt{س^2 - س + 4}} \cdot دس$.

الإجابة: صفر.

مثال: إذا علمت أن ق(4) = 12

ق(1) = -8 ، جد:

$\int_{-1}^{2} 2س\, ق'(س^2) \cdot دس$ ؟

نفرض ص = $س^2$ ، $\frac{دص}{دس} = 2س$

$دس = \frac{دص}{2س}$ عندما س = -1 فإن

ص = 1 وعندما س = 2 فإن ص = 4

$\int_{1}^{4} 2س\, ق'(ص) \cdot \frac{دص}{2س} = ق(ص) \Big]_{1}^{4}$

= ق(4) - ق(1) = 12 - -8 = 20 .

مثال: إذا علمت أن $\int_{3}^{2} ق(ص) \cdot دص$

= 4

جد $\int_{0}^{1} 3س^2\, ق(س^3 + 2) \cdot دس$ ؟

نفرض ص = $س^3 + 2$ ، $\frac{دص}{دس} = 3س^2 \Leftarrow$

$دس = \frac{دص}{3س^2}$ عندما س = 0 فإن ص = 2

وعندما س = 1 فإن ص = 3 .

$\int_{2}^{3} 3س^2\, ق(ص) \cdot \frac{دص}{3س^2} = \int_{2}^{3} ق(ص)$

$\cdot دص$

$\int_{2}^{3} ق(ص) \cdot دص = -\int_{3}^{2} ق(ص) \cdot دص$

= -4 .

سؤال: إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران ق عند النقطة (س، ص) يساوي $(4س - 2)^3$ فاكتب قاعدة الاقتران المار بالنقطة (1، 8)؟

$ق(س) = \int (4س - 2)^3 \cdot دس = \frac{(4س - 2)^4}{4 \times 4} + جـ$

$ق(1) = \frac{(4 \times 1 - 2)^4}{16} + جـ = 8$

$\text{٨} = \text{جـ} + \frac{\text{٢}^{\text{٤}}}{\text{١٦}} \Leftarrow \text{٨} = \text{جـ} + \frac{\text{١٦}}{\text{١٦}}$

$\Leftarrow \text{جـ} = \text{٧}$ ∴ $\text{ق(ص)} = \frac{(\text{٤ص} - \text{٢})^{\text{٤}}}{\text{١٦}} + \text{٧}$.

سؤال: يتحرك جسيم على خط مستقيم بحيث أنه سرعته بعد ن ثانية تعطى بالعلاقة: $\text{ع(ن)} = \text{٣}(\text{ن}+\text{١})^{\text{٢}}$ م/ث جد المسافة التي يقطعها الجسيم بعد ثانيتين من بدء الحركة علماً بأن موقعه الابتدائي ف(٠) = ١م ؟

$\text{ف(ن)} = \int \text{ع(ن)} \cdot \text{دن}$

$\text{ف(ن)} = \int \text{٣}(\text{ن}+\text{١})^{\text{٢}} \cdot \text{دن} = (\text{ن}+\text{١})^{\text{٣}} + \text{جـ}$

$\text{ف(٠)} = (\text{٠}+\text{١})^{\text{٣}} + \text{جـ} = \text{١} \Leftarrow$

جـ = صفر.

∴ $\text{ف(ن)} = (\text{ن}+\text{١})^{\text{٣}}$

∴ $\text{ف(٢)} = (\text{٢}+\text{١})^{\text{٣}} = \text{٢٧}$م.

سؤال: جد $\int \text{هـ}^{(\pi\text{ص}+\text{٣})} - \frac{\text{٣}}{\pi - \text{٤ص} + \text{هـ}} \cdot \text{دص}$

الإجابة: $\frac{\text{١}}{\pi} \text{هـ}^{\pi\text{ص}+\text{٣}} + \frac{\text{٣}}{\text{٤}} \text{لو} |\pi - \text{٤ص} + \text{هـ}| + \text{جـ}$

سؤال: جد $\int_{\text{٠}}^{\text{٢}} \frac{\text{ص}^{\text{٢}} + \text{٤ص} + \text{٣}}{\text{٢ص} + \text{٢}} \cdot \text{دص}$

الإجابة: ٤

سؤال: جد $\int \frac{\text{٣}}{\sqrt[\text{٤}]{\text{٤ص} - \text{١}}} \cdot \text{دص}$.

الإجابة: $\sqrt[\text{٤}]{(\text{٤ص} - \text{١})^{\text{٣}}} + \text{جـ}$

سؤال: جد $\int \frac{\text{٤}}{(\text{ص}+\text{٣})(\text{س}+\text{٣})} \cdot \text{دس}$

الإجابة: $\frac{-\text{٤}}{\text{ص}+\text{٣}} + \text{جـ}$

سؤال: إذا كان $\int_{\text{٢}}^{\text{٤}} \text{ق(ص)} \cdot \text{دص} = \text{٤}$

جد $\int_{\text{١}}^{\text{٢}} \text{٢ق(٢س)} \cdot \text{دس}$.

الإجابة: ٢.

سؤال: جد $\int \frac{\text{٤ص} - \text{٦}}{\sqrt[\text{٣}]{\text{ص}^{\text{٢}} - \text{٣ص} + \text{١}}} \cdot \text{دص}$.

الإجابة: $\text{٣} \sqrt[\text{٣}]{(\text{ص}^{\text{٢}} - \text{٣ص} + \text{١})^{\text{٢}}} + \text{جـ}$

سؤال: جد $\int_{\text{٢}}^{\text{٤}} \frac{\text{قَ}(\frac{\text{١}}{\text{س}})}{\text{س}^{\text{٢}}} \cdot \text{دس}$

إذا علمت أنه $\text{ق}(\frac{\text{١}}{\text{٢}}) = \text{٣}$ و $\text{ق}(\frac{\text{١}}{\text{٤}}) = \text{٢}$.

الإجابة: ١

الدرس الخامس :

تطبيقات التكامل المحدود :

(إيجاد المساحة) :

لإيجاد المساحة نقوم بالتكامل ودائماً المساحة موجبة .

المساحة = $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس}$ حيث أ = س١ ، ب = س٢ .

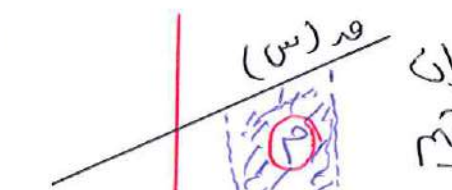
١- الحالة الأولى : وتقسم إلى جزئين :

أ- الجزء الأول أنه الاقتران لا يقطع محور السينات بين العددين أ ، ب ويطلب السؤال إيجاد المساحة بين الاقتران ومحور السينات والمستقيمان :

س = أ ، س = ب أو في الفترة [أ، ب]

كما في الشكل المقابل في هذه الحالة نقوم بالتالي :

١- نساوي الاقتران بالصفر لنجد قيم س .



٢- نرى إن كان س لا تقع بين العددين أ ، ب

٣- المساحة م = $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس}$.

مثال : جد المساحة للمنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) = ٤س − ٤ ومحور السينات و المستقيمين س = ٢ ، س = ٣ ؟

ق(س) = ٠ ⟸ ٤س − ٤ = ٠ ⟸ س = ١

(١) لا تقع في الفترة المعطاة في السؤال

[٢، ٣] ، م = $\int_{2}^{3} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس}$

= $\int_{2}^{3} (4\text{س} - 4)\,\text{دس}$.

= $\left[2\text{س}^2 - 4\text{س}\right]_{2}^{3}$ = ٢×٩ − ١٢

− ٨ + ٨ = ٦ وحدة مربعة .

مثال : جد المساحة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) = ٢س − ١ ومحور السينات والمستقيمان س = −٢ ، س = −١ ؟

ق(س) = ٠ ⟸ ٢س − ١ = ٠ ⟸

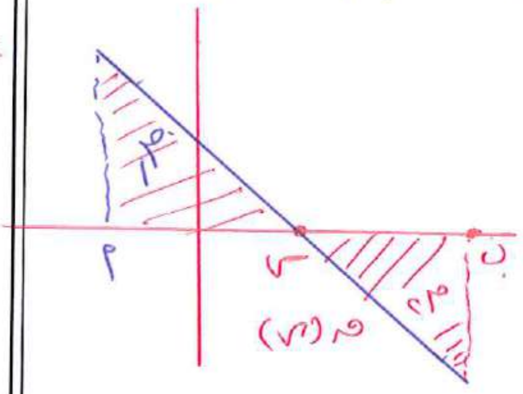
س = $\frac{1}{2}$ ⟸ $\frac{1}{2}$ ∉ [−٢، −١] .

∴ م = $\int_{-2}^{-1} (2\text{س} - 1)\,\text{دس} = \left[\text{س}^2 - \text{س}\right]_{-2}^{-1}$

= |١ − ٤| = ٤ وحدة مربعة (المساحة موجبة) .

ب- الجزء الثاني من الحالة الأولى:

الاقتران يقطع محور السينات بين العددين أ، ب أي أنه س $\in$ [أ، ب] وهنا نجزئ التكامل انظر إلى الشكل المجاور:



هنا لإيجاد المساحة م نجد م١ ونجد م٢

$م_1 = \left|\int_{أ}^{س} ق(س)\,ءس\right|$ ، $م_2 = \left|\int_{س}^{ب} ق(س)\,ءس\right|$.

المساحة م = م١ + م٢

مثال: جد مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) = ٦ − ٢س ومحور السينات في الفترة [٠، ٤]؟

ق(س) = ٠ $\Leftarrow$ ٦ − ٢س = ٠ $\Leftarrow$ س = ٣

٣ $\in$ [٠، ٤] وهنا نجزئ المساحة

$م_1 = \int_{0}^{3} (6 - 2س)\,ءس = [6س - س^2]_{0}^{3}$

$= 18 - 9 - (0 - 0) = 9$ وحدة مربعة.

$م_2 = \int_{3}^{4} (6 - 2س)\,ءس = [6س - س^2]_{3}^{4}$

$= 24 - 16 - (18 - 9) = |-1| = 1$ وحدة مربعة.

المساحة الكلية = م = ٩ + ١ = ١٠ وحدة مربعة

مثال: جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) = ٥س^2 + ٢ ومحور السينات والمستقيمين س = −١، س = ٢؟

ق(س) = ٠ $\Leftarrow$ ٥س^2 + ٢ = ٠

هنا عبارة أولية لا تحلل ∴ $م = \int_{-1}^{2} (5س^2 + 2)\,ءس$

$= [\frac{5}{3}س^3 + 2س]_{-1}^{2} = 21$ وحدة مربعة.

ملاحظة: إذا طلب السؤال المساحة بين ق(س) ومستقيم واحد ومحور الصادات نعتبر محور الصادات مستقيم ويساوي صفر أي س = صفر.

مثال: جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) = ٥ − س و المستقيم س = ٣ ومحوري السينات و الصادات ؟

هنا محور الصادات تعني س = ٠ ∴ الفترة [٠ ، ٣] . ق(س) = ٠ ⟸ ٥ − س = ٠ ⟸ س = ٥

٥ ∉ [٠ ، ٣] ∴ م = $\int_{0}^{3}$ ٥ − س ءس

= ٥س − $\frac{س^2}{2}$ $\Big]_{0}^{3}$ = $\frac{21}{2}$ وحدة مربعة.

مثال: جد مساحة المنطقة المحصورة بين الاقتران ق(س) = س² والمستقيم س = ٢ و محور السينات ؟

هنا الفترة هي [٠ ، ٢] .

ق(س) = ٠ ⟸ س² = ٠ ⟸ س = ٠

م = $\int_{0}^{2}$ س² ءس = $\frac{1}{3}$ س³ $\Big]_{0}^{2}$ = $\frac{8}{3}$ وحدة مربعة.

مثال: جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) = ٦ ومحور السينات والمستقيمين س = −٢ ، س = ٥ ؟ ق(س) = ٦ ≠ ٠

∴ م = $\int_{-2}^{5}$ ٦ ءس = ٦س $\Big]_{-2}^{5}$ =

٦ (٥ − −٢) = م = ٤٢ وحدة مربعة.

* الحالة الثانية: إيجاد المساحة بين الاقتران ومحور السينات وهنا نجد حدود التكامل بمساواة الاقتران بالصفر:

مثال: جد مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) = س² − ٢س و محور السينات ؟

ق(س) = ٠ ⟸ س² − ٢س = ٠ ⟸

س (س − ٢) = ٠ ∴ س = ٠ ، س = ٢

∴ [٠ ، ٢] الفترة.

م = $\int_{0}^{2}$ س² − ٢س ءس = $\frac{س^3}{3}$ − س² $\Big]_{0}^{2}$

م = $\left|\frac{-4}{3}\right|$ = $\frac{4}{3}$ وحدة مربعة.

مثال: مدخل مجمع رياضي تمثله منحنى الاقتران ق(س) = ٤ − س² ما تكلفة إنشاء باب حديدي للمدخل إذا كان سعر الوحدة المربعة منها ٣٠ دينار؟ ق(س) = ٠

⟸ ٤ − س² = ٠ ⟸ س² = ٤ ∴ س = ±٢ .

م = $\int_{-2}^{2}$ ٤ − س² ءس = (٤س − $\frac{س^3}{3}$) $\Big]_{-2}^{2}$

م = $\frac{32}{3}$ وحدة مربعة.

∴ التكلفة = $\frac{32}{3}$ × ٣٠ = ٣٢٠ دينار

سؤال: جد مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين كل من منحنيات الاقترانات الآتية ومحور السينات:

1- ق(س) = ٥ − ٥س² ($\frac{٢٠}{٣}$ وحدة مربعة)

2- هـ(س) = س² + ٢س − ٣ ($\frac{٣٢}{٣}$ وحدة مربعة)

3- ص = س − س³ ($\frac{١}{٢}$ وحدة مربعة)

* الحالة الثالثة: إيجاد المساحة بين اقترانين ق(س) و هـ(س) هنا نساوي الاقترانين ببعضهما لإيجاد قيم س والتي هي حدود التكامل (أ ، ب) ولحساب المساحة م = $\int_{أ}^{ب}$ ق(س) − هـ(س) ءس.

حيث الاقتران العلوي − الاقتران السفلي وهنا ق(س) هو العلوي.

ملاحظة: لمعرفة الاقتران العلوي نعوض رقم ضمن حدود الفترة في كلا الاقترانين والقيمة الأكبر للاقتران العلوي.

مثال: جد مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) = س² ومنحنى الاقتران هـ(س) = ٢س.

ق(س) = هـ(س) ⟸ س² = ٢س

س² − ٢س = ٠ ⟸ س(س − ٢) = ٠

∴ س = ٠ ، س = ٢ وهما حدود التكامل

∴ م = $\int_{٠}^{٢}$ ق(س) − هـ(س) ءس.

م = $\int_{٠}^{٢}$ ٢س − س² ءس = $\frac{١}{٦}$ وحدة مربعة.

مثال: جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) = س² − ٤س والمستقيم ص = ٥؟

هنا المساحة بين اقترانين لأنه ص = ٥ اقتران

ق(س) = ص ⟸ س² − ٤س = ٥.

س² − ٤س − ٥ = ٠ ⟸ (س − ٥)(س + ١) = ٠

∴ س = −١ ، س = ٥

م = $\int_{-١}^{٥}$ ٥ − (س² − ٤س) ءس

= $\int_{-١}^{٥}$ ٥ − س² + ٤س ءس = ٣٦ وحدة مربعة.

* لا ننسى دائماً المساحة موجبة.

مثال: جد مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران ص − س = ٦ و ص = س²؟

الاقتران ص − س = ٦ ⟸ ص = ٦ + س

٦ + س = س² ⟸ س² − س − ٦ = ٠

(س − ٣)(س + ٢) = ٠ ∴ س = −٢

س = ٣.

م = $\int_{-٢}^{٣}$ ٦ + س − س² ءس = $\frac{١٢٥}{٦}$

سؤال: جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقترانات التالية:

١- ق(س) = ٢س - ٣ و هـ(س) = س² - ٢س

الإجابة: $\frac{٤}{٣}$ وحدة مربعة.

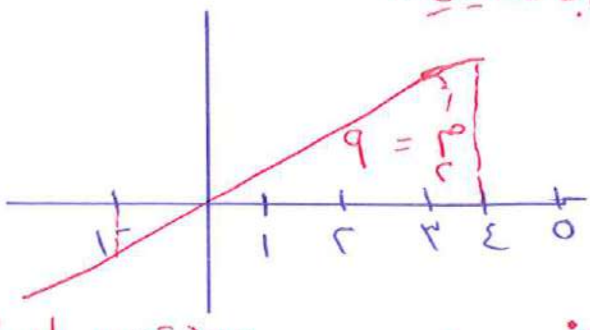
٢- ق(س) = ١٦ - ٤س² والمستقيم ص = ٠.

الإجابة $\frac{٤}{٣}$ وحدة مربعة.

سؤال: جد المساحة المحصورة بين ق(س) = -٤ - ٢√س ومحوري السينات والصادات؟ الإجابة: $\frac{١٦}{٣}$.

لإيجاد المساحة والتكامل من خلال الرسم:
المساحة دائماً موجبة سواء فوق أو تحت محور السينات أما التكامل فهو موجب فوق محور السينات وسالب تحت محور السينات.

مثال: من خلال الرسم التالي الذي يمثل منحنى الاقتران ق(س) خلال الفترة [-١، ٤] أجب عما يلي:



١- $\int_{-1}$ ق(س) . دس = -٣ (تحت محور السينات)

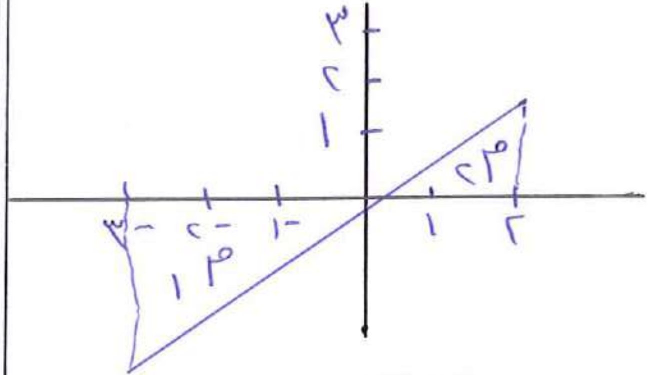
٢- $\int_{0}^{4}$ ق(س) . دس = ٩ فوق محور السينات.

٣- $\int_{0}^{-1}$ ق(س) . دس = $-\int_{-1}$ ق(س) دس = ٣

٤- $\int_{-1}^{4}$ ق(س) . دس = -٣ + ٩ = ٦

٥- المساحة الكلية = |-٣| + ٩ = ١٢ وحدة مربعة.

سؤال: يمثل الشكل التالي المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) ومحور السينات فإذا كانت م١ = ٤ جد $\int_{-3}^{2}$ ق(س) . دس.



م٢ = مساحة المثلث.
= $\frac{1}{2}$ × القاعدة × الارتفاع.
= $\frac{1}{2}$ × ٢ × ٢ = ٢ وحدة مربعة.

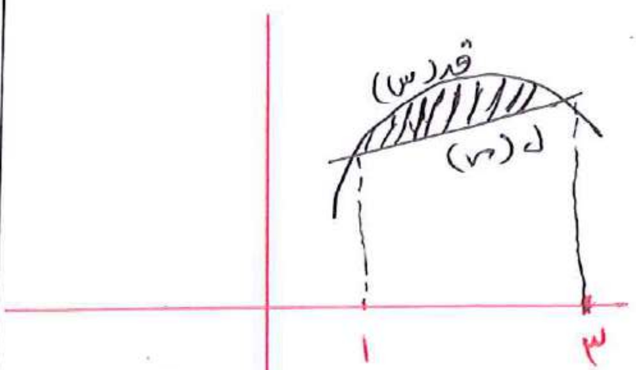
$\int_{-3}^{2}$ ق(س) . دس = -٤ + ٢ = -٢

ملاحظة: ممكن أن يأتي السؤال بشكل رسمة لاقترانين بينهما مساحة محصورة ويطلب السؤال إيجادها.

سؤال: عيّن الشكل المجاور منحني الاقترانين ق(س) و ل(س) إذا علمت أن:

$\int_1^3 2$ ق(س) . دس $= 12$ و

$\int_3^1$ ل(س) . دس $= -4$ فما مساحة المنطقة المحصورة بين منحني الاقترانين في الفترة $[1 ، 3]$ ؟



$\int_1^3 2$ق(س) . دس $= 12 \Leftarrow \int_1^3$ ق(س) . دس

$= \frac{12}{2} = 6$

$\int_1^3$ ل(س) دس $= - \int_3^1$ ل(س) . دس $= 4$

م $= \int_1^3$ ق(س) . دس $-$ ل(س) : ل(س) .

$= \int_1^3$ ق(س) . دس $- \int_1^3$ ل(س) . دس .

$= 6 - 4 = 2$ وحدة مربعة .

سؤال: جد المساحة بين ص(س) = س² والمستقيم ص = 4 والواقعة في الربع الأول؟

الإجابة: $\frac{16}{3}$

الدرس السادس: تطبيقات التكامل المحدود (تطبيقات اقتصادية).

1- الإيراد الكلي د(س) وهو تكامل الإيراد الحدي د(س) $= \int$ دَ(س) . دس .

وهنا ج = صفر لأنه عند بيع صفر وحدة (س = 0) يكون الإيراد = صفر

مثال: إذا كان الإيراد الحدي لبيع س من قطعة من منتج ما يعطى بالاقتران.

دَ(س) = 3س² − 4س + 3 .

جد الإيراد الناتج عند بيع 5 قطع من هذا المنتج؟

أولاً يجب إيجاد الإيراد الكلي .

د(س) $= \int$ دَ(س) . دس .

$= \int$ 3س² − 4س + 3 . دس .

د(س) = س³ − 2س² + 3س

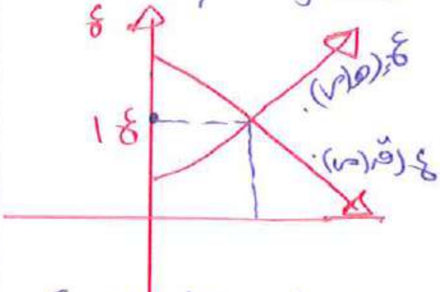
د(5) $= 5^3 - 2 \times 5^2 + 3 \times 5 = 90$

دينار .

فائض المستهلك وفائض المنتج نعلم أنه كلما زاد السعر قل الطلب ونعبر عن هذه العلاقة بالاقتران $\text{ع} = \text{ق}(\text{س})$ ويسمى اقتران السعر - الطلب.

وكلما زاد السعر زادت الوحدات المنتجة ونعبر عن هذه العلاقة بالاقتران $\text{ع} = \text{هـ}(\text{س})$.

ويسمى اقتران السعر - العرض



عندما يتساوى $\text{ق}(\text{س}_1) = \text{هـ}(\text{س}_1) = \text{ع}_1$

يكون س_1 كمية التوازن بين العرض والطلب

و ع_1 سعر التوازن.

فائض المستهلك: $\text{ف}_\text{ك} = \int_0^{\text{س}_1} \text{ق}(\text{س})\,\text{د}\text{س} - \text{ع}_1\text{س}_1$

فائض المنتج: $\text{ف}_\text{ج} = \text{ع}_1\text{س}_1 - \int_0^{\text{س}_1} \text{هـ}(\text{س})\,\text{د}\text{س}$

لإيجاد كمية التوازن س_1 نساوي اقتران (السعر - الطلب) باقتران (السعر - العرض) أو نساوي أحدهما بالسعر ع ونجد قيمة س_1

لإيجاد سعر التوازن ع_1 نجد $\text{ع}_1 = \text{ق}(\text{س}_1)$ أو $\text{ع}_1 = \text{هـ}(\text{س}_1)$ أي أننا نعوض قيمة س_1 في أي من الاقترانين وتكون النتيجة ع_1

مثال: إذا كان $\text{ع} = \text{ق}(\text{س}) = ٤٢ - ٣\text{س}$ يمثل اقتران السعر - الطلب حيث ع السعر بالدينار وس عدد الوحدات المنتجة وكان السعر ثابتاً عند $\text{ع}_1 = ٣٠$ جد قيمة فائض المستهلك؟

$\text{ف}_\text{ك} = \int_0^{\text{س}_1} \text{ق}(\text{س})\,\text{د}\text{س} - \text{ع}_1\text{س}_1$

نجد س_1: $(\text{ق}(\text{س}_1) = \text{ع}_1)$.

$٤٢ - ٣\text{س}_1 = ٣٠ \Leftarrow \text{س}_1 = ٤$

$\text{ف}_\text{ك} = \int_0^{٤} (٤٢ - ٣\text{س})\,\text{د}\text{س} - (٣٠ \times ٤)$

$= \left[٤٢\text{س} - \frac{٣}{٢}\text{س}^2\right]_0^{٤} - ١٢٠$

$= ١٤٤ - ١٢٠ = ٢٤$ دينار

مثال: إذا كان اقتران السعر - العرض لمنتج معين هو $\text{ع} = \text{هـ}(\text{س}) = ١١ + ٢\text{س}$ حيث س عدد القطع المنتجة وع السعر بالدينار وأن السعر ثابت عند $\text{ع}_1 = ٢١$ جد قيمة فائض المنتج؟

$\text{ف}_\text{ج} = \text{ع}_1\text{س}_1 - \int_0^{\text{س}_1} \text{هـ}(\text{س})\,\text{د}\text{س}$

نجد س_1: $(\text{هـ}(\text{س}_1) = \text{ع}_1)$

$١١ + ٢\text{س}_1 = ٢١ \Leftarrow \text{س}_1 = ٥$

$\text{ف}_\text{ج} = (٢١ \times ٥) - \int_0^{٥} (١١ + ٢\text{س})\,\text{د}\text{س}$

$= ١٠٥ - \left[١١\text{س} + \text{س}^2\right]_0^{٥}$

$\text{ف}_\text{ج} = ١٠٥ - ٨٠ = ٢٥$ دينار

ملاحظة: إذا كان نتيجة س_1 عدد سالب نهمل.

مثال: إذا كان اقتران السعر – العرض لمنتج معين هو $\text{ع} = \text{هـ}(\text{س}) = 5 + 3\text{س}^2$ حيث ع السعر بالدينار، س عدد القطع المنتجة وأن السعر ثابت عند $\text{ع}_1 = 53$ دينار، جد فائض المنتج؟

$\text{هـ}(\text{س}_1) = \text{ع}_1 \Leftarrow 5 + 3 \times \text{س}_1^2 = 53$

$\Leftarrow \text{س}_1^2 = 16 \Leftarrow \text{س}_1 = 4 ، \text{س}_1 = -4$

هنا نهمل -4 ∴ $\text{س}_1 = 4$.

$\text{فا ج} = \text{ع}_1\text{س}_1 - \int_0^{\text{س}_1} \text{هـ}(\text{س})\,\text{دس}$.

$= (53 \times 4) - \int_0^4 5 + 3\text{س}^2\,\text{دس}$

$= 212 - \left(5\text{س} + \text{س}^3\right]_0^4)$

$= 212 - 84 = 128$

مثال: إذا كان $\text{ع} = \text{ق}(\text{س}) = 100 - 5\text{س}$ يمثل اقتران السعر – الطلب حيث س عدد القطع المنتجة و ع السعر بالدينار وأن السعر ثابت عند $\text{س}_1 = 5$ جد قيمة فائض المستهلك.

$\text{فا س} = \int_0^{\text{س}_1} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} - \text{ع}_1\text{س}_1$

نجد ع_1 : $(\text{ع}_1 = \text{ق}(\text{س}_1))$.

$\text{ع}_1 = \text{ق}(5) = 100 - 5 \times 5 = 75$

$\text{فا س} = \int_0^5 100 - 5\text{س}\,\text{دس} - (75 \times 5)$

$= 100\text{س} - \frac{5}{2}\text{س}^2\Big]_0^5 - 375$

$= \frac{875}{2} - 0 - 375 = \frac{875}{2} - \frac{750}{2}$

$= \frac{125}{2} = 62.5$ دينار.

مثال: إذا كان اقتران السعر – الطلب لمنتج معين هو $\text{ع} = \text{ق}(\text{س}) = 48 - 3\text{س}$ وكان اقتران السعر – العرض لهذا المنتج هو $\text{ع} = \text{هـ}(\text{س}) = 2\text{س} + 13$ جد ما يلي:

1- كمية التوازن.

$\text{ق}(\text{س}_1) = \text{هـ}(\text{س}_1) \Leftarrow 48 - 3\text{س}_1 = 2\text{س}_1 + 13 \Leftarrow 35 - 5\text{س}_1 = 0$

$\Leftarrow \text{س}_1 = 7$

2- سعر التوازن $\text{ع}_1 = \text{ق}(\text{س}_1) = \text{هـ}(\text{س}_1) =$

$\text{ق}(7) = 48 - 3 \times 7 = 27$

3- فائض المستهلك عند سعر التوازن.

$\text{فا س} = \int_0^{\text{س}_1} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} - \text{ع}_1\text{س}_1$

$= \int_0^7 48 - 3\text{س}\,\text{دس} - 27 \times 7$

$= \frac{147}{2}$ دينار

٤- فائض المنتج عند سعر التوازن.

فائض المنتج = $ع_1 س_1 - \int_{0}^{س_1} هـ(س)\, دس$.

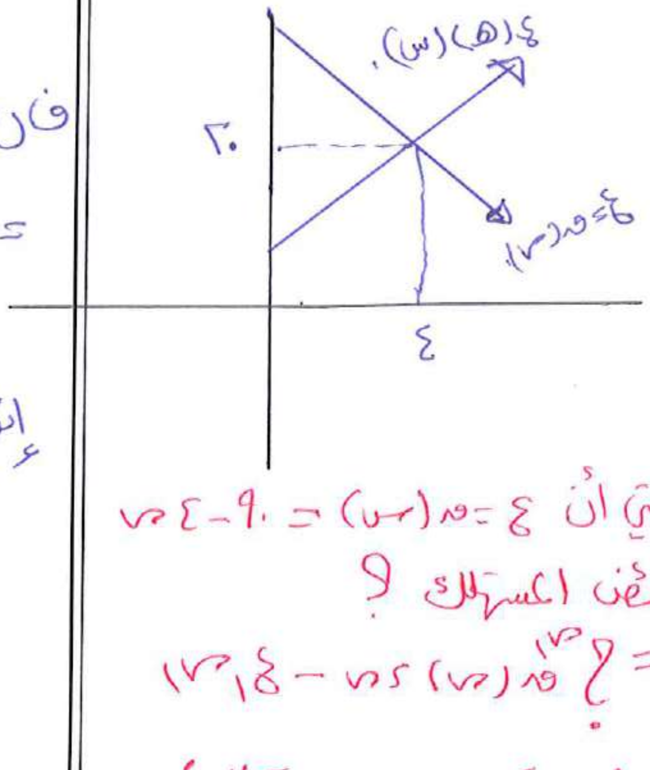
$= ٢٧ \times ٧ - \int_{0}^{٧} (٢س + ١٣)\, دس =$

٤٩ دينار

مثال٤: من خلال الشكل المجاور والذي يمثل منحنى الاقترانين السعر- الطلب والسعر- العرض جد ما يلي:

كمية التوازن: $س_1 = ٤$

سعر التوازن: $ع_1 = ٢٠$



إذا علمت أن ع = ق(س) = ٩٠ - ٤س جد فائض المستهلك؟

فائض = $\int_{0}^{س_1} ق(س)\, دس - ع_1 س_1$

$= \int_{0}^{٤} (٩٠ - ٤س)\, دس - ٢٠ \times ٤$

$= ٩٠س - ٢س^2 \Big]_{0}^{٤} - ٨٠ =$

٢٤٨ دينار.

مثال: إذا كان اقتران السعر- الطلب المنتج معين هو ع = ق(س) = ٤٠ - ٢س

وكان اقتران السعر- العرض هو

ع = هـ(س) = ٦س جد فائض المستهلك عند سعر التوازن؟

$ق(س_1) = هـ(س_1) \Leftarrow ٤٠ - ٢س_1 = ٦س_1$.

$٤٠ - ٨س_1 = ٠ \Leftarrow س_1 = ٥$

$ع_1 = هـ(س_1) = هـ(٥) = ٦ \times ٥ = ٣٠ \quad \therefore ع_1 = ٣٠$

فائض = $\int_{0}^{٥} (٤٠ - ٢س)\, دس - ٣٠ \times ٥$

= ١٧٥ - ١٥٠ = ٢٥ دينار.

انتهت الوحدة بحمد الله.