د. خالد جلال

079 - 9948198

طريق التفوق في الرياضيات للتوجيهي (العلمي) 2005

وحدة الاعداد المركبة

الوحدة الثالثة

الاعداد المركبة

الدرس الاول

الاعداد المركبة

Complex Numbers

مثال 1

أجد قيمة الجذر الرئيس في كلٍّ ممّا يأتي بدلالة i:

1) $\sqrt{-16}$ 2) $\sqrt{-72}$

اتحقّق من فهمي

أجد قيمة الجذر الرئيس في كلٍّ ممّا يأتي بدلالة i:

a) $\sqrt{-75}$ b) $\sqrt{-49}$

مثال 2

أجد ناتج كلٍّ ممّا يأتي في أبسط صورة مُفترِضًا أنَّ $i = \sqrt{-1}$:

1) $\sqrt{-8} \times \sqrt{-18}$ 2) $5i \times \sqrt{-4}$ 3) i^{15}

اتحقّق من فهمي

أجد ناتج كلٍّ ممّا يأتي في أبسط صورة مُفترِضًا أنَّ $i = \sqrt{-1}$:

a) $\sqrt{-27} \times \sqrt{-48}$ b) $\sqrt{-50} \times -4i$ c) i^{2021}

مثال 3

أجد قيمة x، وقيمة y الحقيقيتين اللتين تجعلان المعادلة: $2x - 6 + (3y + 2)i = 4x + 8i$ صحيحة.

اتحقّق من فهمي

أجــد قيمة x، وقيمة y الحقيقيتين اللتين تجعلان المعادلة: $x + 5 + (4y - 9)i = 12 - 5i$ صحيحة.

طريق التفوق في الرياضيات: د. خالد جلال 0799948198 & ا . اياد الحمد 0795604563

مثال 4

أُمثِّل العدد المُركَّب ومُرافِقه بيانيًّا في المستوى المُركَّب في كلٍّ ممّا يأتي:

1) $z = -3 + 5i$ 2) $z = 6 - 4i$ 3) $z = 2i$

أتحقَّق من فهمي

أُمثِّل العدد المُركَّب ومُرافِقه بيانيًّا في المستوى المُركَّب في كلٍّ ممّا يأتي:

a) $z = 2 + 7i$ b) $z = -3 - 2i$ c) $z = -3i$

مثال 5

أجد مقياس كل عدد مُركَّب ممّا يأتي:

1) $z = 3 - 4i$ 2) $z = 12i$

أتحقَّق من فهمي

أجد مقياس كل عدد مُركَّب ممّا يأتي:

a) $z = -3 - 6i\sqrt{2}$ b) $z = -2i$ c) $z = 4 + \sqrt{-20}$

مثال 6

أجد سعة كلٍّ من الأعداد المُركَّبة الآتية، مقربًا إجابتي لأقرب منزلتين عشريتين:

1) $z = 4 + 3i$ 2) $z = -3 + 8i$ 3) $z = -1 - 6i$ 4) $z = 8 - 4i$

أتحقَّق من فهمي

أجد سعة كلٍّ من الأعداد المُركَّبة الآتية، مقربًا إجابتي لأقرب منزلتين عشريتين:

a) $z = 8 + 2i$ b) $z = -5 + 12i$

c) $z = -2 - 3i$ d) $z = 8 - 8i\sqrt{3}$

مثال 7

أكتب العدد المُركَّب z في كل مما يأتي بالصورة المثلثية:

1) $|z| = 4, \mathrm{Arg}(z) = \frac{\pi}{6}$ 2) $z = -2 - 5i$

أتحقَّق من فهمي

أكتب العدد المُركَّب z في كل مما يأتي بالصورة المثلثية:

a) $|z| = 4\sqrt{2}, \operatorname{Arg}(z) = -\frac{3\pi}{4}$　b) $z = -4 - 4i$　c) $z = 2i$

أتدرَّب وأحُلّ المسائل

أجد قيمة الجذر الرئيس في كلٍّ ممّا يأتي بدلالة i:

1) $\sqrt{-19}$　2) $\sqrt{\frac{-12}{25}}$　3) $\sqrt{\frac{-9}{32}}$　4) $\sqrt{-53}$

أجد ناتج كلٍّ ممّا يأتي في أبسط صورة مُفترِضًا أنَّ $i = \sqrt{-1}$:

5) i^{26}　6) i^{39}　7) $(i)(2i)(-7i)$

8) $\sqrt{-6} \times \sqrt{-6}$　9) $\sqrt{-4} \times \sqrt{-8}$　10) $2i \times \sqrt{-9}$

أكتب في كلٍّ ممّا يأتي العدد المُركَّب z بالصورة القياسية:

11) $\frac{2+\sqrt{-4}}{2}$　12) $\frac{8+\sqrt{-16}}{2}$　13) $\frac{10-\sqrt{-50}}{5}$

أُحدِّد الجزء الحقيقي والجزء التخيُّلي لكلٍّ من الأعداد المُركَّبة الآتية، ثم أُمثِّلها جميعًا في المستوى المُركَّب نفسه:

14) $z = 2 + 15i$　15) $z = 10i$　16) $z = -16 - 2i$

أُمثِّل العدد المُركَّب ومُرافِقه بيانيًّا في المستوى المُركَّب في كلٍّ ممّا يأتي:

17) $z = -15 + 3i$　18) $z = 8 - 7i$　19) $z = 12 + 17i$

20) $z = -3 - 25i$　21) $3i$　22) 15

أجد $|z|$، و $\bar{z}$ لكلٍّ ممّا يأتي:

23) $z = -5 + 5i$　24) $z = 3 + 3i\sqrt{3}$　25) $z = 6 - 8i$

منهاجي
متعة التعليم الهادف

أجد قِيَم كلٍّ من x، و y الحقيقية التي تجعل كُلًّا من المعادلات الآتية صحيحة:

26 $x^2 - 1 + i(2y - 5) = 8 + 9i$

27 $2x + 3y + i(x - 2y) = 8 - 3i$

28 $y - 3 + i(3x + 2) = 9 + i(y - 4)$

29 $i(2x - 5y) + 3x + 5y = 7 + 3i$

أجد سعة كلٍّ من الأعداد المُركَّبة الآتية، مقربًا إجابتي لأقرب منزلتين عشريتين:

30 1

31 $3i$

32 $-5 - 5i$

33 $1 - i\sqrt{3}$

34 $6\sqrt{3} + 6i$

35 $3 - 4i$

36 $-12 + 5i$

37 $-58 - 93i$

38 $2i - 4$

أكتب في كلٍّ ممّا يأتي العدد المُركَّب z في صورة مثلثية:

39 $|z| = 2, \text{Arg } z = \frac{\pi}{2}$

40 $|z| = 3, \text{Arg } z = \frac{\pi}{3}$

41 $|z| = 7, \text{Arg } z = \frac{5\pi}{6}$

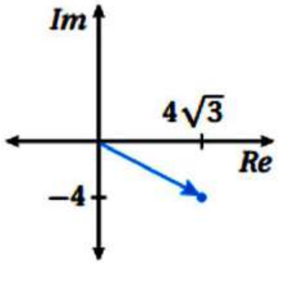
42 $|z| = 1, \text{Arg } z = \frac{\pi}{4}$

43 $z = 6$

44 $z = 1 + i$

45 يُبيِّن الشكل المجاور التمثيل البياني للعدد المُركَّب z_1 في المستوى المُركَّب. أجد العدد المُركَّب z_2 الذي يُحقِّق ما يأتي:

$$|z_2| = 40 \quad \text{and} \quad \text{Arg } z_2 = \text{Arg } \overline{z_1}$$



بافتراض أنَّ: $z = a + ib$، حيث: $|z| = 10\sqrt{2}$، وأنَّ: $\text{Arg}(z) = \frac{3\pi}{4}$:

46 أكتب العدد المُركَّب z بالصورة القياسية.

47 أجد قياس الزاوية المحصورة بين z و $\overline{z}$.

إذا كان: $z = -8 + 8i$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

48 $|z|$

49 $\text{Arg}(z)$

50 $|\overline{z}|$

51 $\text{Arg}(\overline{z})$

مهارات التفكير العليا

تبرير: إذا كان: $\alpha = \text{Arg}(5 + 2i)$، فأجد سعة كلٍّ ممّا يأتي بدلالة α، مُبرِّرًا إجابتي:

52 $-5 - 2i$

53 $5 - 2i$

54 $-5 + 2i$

55 $2 + 5i$

56 $-2 + 5i$

57 تحدٍّ: إذا كان: $z = 5 + im$، حيث: $|z| = 6$، و $0 < \text{Arg}(z) < \frac{\pi}{2}$، فأجد قيمة العدد الحقيقي m.

58 تبرير: إذا كان: $z = 5 + 3ik$، حيث: $|z| = 13$، فأجد جميع قِيَم k الحقيقية المُمكِنة، مُبرِّرًا إجابتي.

تحدٍّ: بافتراض أنَّ z_1 عدد مُركَّب، مقياسه: $4\sqrt{5}$، وسعته: $\theta = \tan^{-1}(2)$:

59 أكتب z_1 في الصورة القياسية.

60 إذا كان: $z_2 = 7 - 3i, z_3 = -5 + i$، فأجد مساحة المثلث الذي رؤوسه: z_1, z_2, z_3 في المستوى المُركَّب.

الدرس الثاني

العمليات على الاعداد المركبة

Operations with Complex Numbers

مثال 1

أجد ناتج كلٍّ ممّا يأتي:

1. $(5+7i)+(-9-4i)$
2. $(8-5i)-(2-11i)$

أتحقّق من فهمي

أجد ناتج كلٍّ ممّا يأتي:

a) $(7+8i)+(-9+14i)$

b) $(11+9i)-(4i-6i)$

مثال 2

أجد ناتج كلٍّ ممّا يأتي، ثم أكتبه بالصورة القياسية:

1. $5i(3-7i)$
2. $(6+2i)(7-3i)$
3. $(5+4i)(5-4i)$

أتحقّق من فهمي

أجد ناتج كلٍّ ممّا يأتي، ثم أكتبه بالصورة القياسية:

a) $-3i(4-5i)$

b) $(5+4i)(7-4i)$

c) $(3+6i)^2$

مثال 3

أجد ناتج كلٍّ ممّا يأتي، ثم أكتبه بالصورة القياسية:

1. $\frac{8-5i}{3-2i}$
2. $\frac{3+5i}{2i}$

أتحقّق من فهمي

أجد ناتج كلٍّ ممّا يأتي، ثم أكتبه بالصورة القياسية:

a) $\frac{-4+3i}{1+i}$

b) $\frac{2-6i}{-3i}$

c) $\frac{7i}{4-4i}$

مثال 4

إذا كان: $z_1 = 10\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{7}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{7}\right)\right)$، وكان: $z_2 = 2\left(\cos\frac{6\pi}{7} + i\sin\frac{6\pi}{7}\right)$،

فأجد ناتج كلٍّ ممّا يأتي بالصورة المثلثية:

1. $z_1 z_2$
2. $\frac{z_1}{z_2}$

أتحقّق من فهمي

أجد ناتج كلٍّ ممّا يأتي بالصورة المثلثية:

a) $6\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) \times 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

b) $6\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) \div 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$

مثال 5

أجد الجذرين التربيعيين للعدد المُركَّب: $z = 21 - 20i$.

أتحقّق من فهمي

أجد الجذرين التربيعيين لكلٍّ من الأعداد المُركَّبة الآتية:

a) $-5 - 12i$

b) $-9i$

c) $-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

مثال 6

أجد جميع الجذور الحقيقية والجذور المُركَّبة للمعادلة: $z^3 + 4z^2 + z = 26$.

أتحقّق من فهمي

أجد جميع الجذور الحقيقية والجذور المُركَّبة للمعادلة: $z^3 - 8z^2 + 9z - 72 = 0$.

مثال 7

إذا كان: $3 + 9i$ هو أحد جذور المعادلة: $x^2 + ax + b = 0$، فأجد قيمة كلٍّ من a، وb.

أتحقّق من فهمي

إذا كان: $2 - i$ هو أحد جذور المعادلة: $x^2 + ax + b = 0$، فأجد قيمة كلٍّ من a، وb.

أتدرّب وأحُلّ المسائل

أجد ناتج كلٍّ ممّا يأتي، ثم أكتبه بالصورة القياسية:

1. $(7+2i)+(3-11i)$
2. $(5-9i)-(-4+7i)$
3. $(4-3i)(1+3i)$
4. $(4-6i)(1-2i)(2-3i)$
5. $(9-2i)^2$
6. $\dfrac{48+19i}{5-4i}$

أجد ناتج كلٍّ ممّا يأتي بالصورة المثلثية:

7. $6(\cos\pi+i\sin\pi)\times 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$
8. $\left(\cos\frac{3\pi}{10}+i\sin\frac{3\pi}{10}\right)\div\left(\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}\right)$
9. $12\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\div 4\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$
10. $11\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)\times 2\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$

أجد القِيَم الحقيقية للثابتين a و b في كلٍّ ممّا يأتي:

11. $(a+6i)+(7-ib)=-2+5i$
12. $(11-ia)-(b-9i)=7-6i$
13. $(a+ib)(2-i)=5+5i$
14. $\dfrac{a-6i}{1-2i}=b+4i$

15. أضرِب العدد المُركَّب $8\left(\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ في مُرافِقه.

إذا كان: $z_1=2-3i, z_2=21-i, z_3=17(1-i)$، فأجد المقياس والسعة لكلٍّ ممّا يأتي:

16. $\dfrac{z_2}{z_1}$
17. $\dfrac{1}{z_3}$
18. $\dfrac{z_3}{z_2}$

إذا كان: $z=8\left(\cos\frac{2\pi}{3}-i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

19. أُمثِّل العدد z بيانيًّا في المستوى المُركَّب.
20. أجد الجذرين التربيعيين للعدد z.

أجد الجذرين التربيعيين لكلٍّ من الأعداد المُركَّبة الآتية:

21. $3-4i$
22. $-15+8i$
23. $5-12i$
24. $-7-24i$

25. إذا كان: $(a-3i)$، و $(b+ic)$ هما الجذرين التربيعيين للعدد المُركَّب: $55-48i$، فأجد قيمة كلٍّ من الثوابت الحقيقية: a، و b، و c.

إذا كان: $w = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$, $z = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right)$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي بالصورة المثلثية:

28 $\frac{w}{z}$ 27 $\frac{z}{w}$ 26 zw

31 $5iz$ 30 w^2 29 $\frac{1}{z}$

أحُلُّ كُلًّا من المعادلات الآتية:

34 $9z^2 + 68 = 0$ 33 $z^2 + 18z + 202 = 0$ 32 $z^2 + 104 = 20z$

37 $2z^3 = 8z^2 + 13z - 8$ 36 $z^3 + 4z + 10 = 5z^2$ 35 $z^3 - 8z^2 + 9z - 72 = 0$

أجد معادلة تربيعية لها الجذران المُركّبان المعطيان في كلٍّ ممّا يأتي:

41 $-3 \pm 2i$ 40 $-8 \pm 20i$ 39 $7 \pm 4i$ 38 $2 \pm 5i$

أحُلُّ المعادلة المعطى أحد جذورها في كلٍّ ممّا يأتي:

43 $x^3 + 7x^2 - 13x + 45 = 0, -7$ 42 $x^3 + x^2 + 15x = 225, 5$

45 $x^3 + 10x^2 + 29x + 30 = 0, -2 + i$ 44 $3x(x^2 + 45) = 2(19x^2 + 37), 6 - i$

إذا كان: $(4 + 11i)$ هو أحد جذري المعادلة: $z^2 - 8z + k = 0$، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

46 أجد الجذر الآخر للمعادلة. 47 أجد قيمة الثابت k.

مهارات التفكير العليا

تبرير: أُجيب عن الأسئلة الثلاثة الآتية تباعًا، مُبرِّرًا إجابتي:

48 أجد ناتج: $(p + iq)^2$، حيث p و q عددان حقيقيان.

49 إذا كان: $(p + iq)^2 = 45 + im$، حيث p و q عددان صحيحان موجبان، و $p > q$، فأجد ثلاث قِيَم مُمكِنة للعدد الحقيقي m.

50 أستعمل إجابة السؤال السابق لإيجاد الجذرين التربيعيين للعدد المُركَّب: $45 - 108i$.

51 برهان: أُثبِت أنَّ: $z\bar{z} = |z\bar{z}|$ لأيِّ عدد مُركَّب z.

52 برهان: إذا كان z عددًا مُركّبًا، حيث: $|z| = 5\sqrt{5}, \text{Arg}(z) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$، وكان: $\frac{z}{3+4i} = p + iq$، فأثبِت أنّ: $p + q = 1$.

53 تحدٍّ: العدد المُركّب: $z = (10 - i) - (2 - 7i)$ هو أحد جذور المعادلة: $z^3 - 20z^2 + 164z - 400 = 0$.
أجد بقية جذور هذه المعادلة، ثم أحُلّ المعادلة الآتية: $x^6 + 164x^2 = 20(x^4 + 20)$.

الدرس الثالث

المحل الهندسي في المستوى المركب

Locus in the Complex Plane

مثال 1

أجد المحل الهندســي الذي تُمثّله المعادلــة: $|z - 2 + 8i| = 3$، ثم أكتب المعادلة بالصيغة الديكارتية.

أتحقّق من فهمي

أجد المحل الهندســي الذي تُمثّله المعادلة: $|z + 5 - 4i| = 7$ ، ثم أكتب المعادلة بالصيغة الديكارتية.

مثال 2

إذا كانت: $|z - 5 - 3i| = 3$، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

1. أرسم المحل الهندسي الذي تُمثّله المعادلة في المستوى المُركّب.
2. أجد القيمة العظمى لسعة الأعداد المُركّبة z التي تُحقّق المعادلة.

أتحقّق من فهمي

إذا كانت: $|z + 4 - 4\sqrt{3}\, i| = 4$، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

a) أرسم المحل الهندسي الذي تُمثّله المعادلة في المستوى المُركّب.

b) أجد القيمة العظمى لسعة الأعداد المُركّبة z التي تُحقّق المعادلة.

مثال 3

أجد المحل الهندســي الذي تُمثّله المعادلــة: $|z - 3| = |z - 2i|$، ثم أكتب المعادلة بالصيغة الديكارتية.

أتحقّق من فهمي

أجد المحل الهندســي الذي تُمثّله المعادلة: $|z + 1| = |z - 5i|$، ثم أكتب المعادلة بالصيغة الديكارتية.

مثال 4

أجد المحل الهندسي الذي تُمثّله كل معادلة ممّا يأتي، ثم أرسمه في المستوى المُركّب:

1) $\text{Arg}(z-4i)=0$

2) $\text{Arg}(z+1+2i)=\frac{3\pi}{4}$

أتحقّق من فهمي

أجد المحل الهندسي الذي تُمثّله كل معادلة ممّا يأتي، ثم أرسمه في المستوى المُركّب:

a) $\text{Arg}(z)=\frac{\pi}{3}$

b) $\text{Arg}(z-5)=-\frac{2\pi}{3}$

مثال 5

أُمثّل في المستوى المُركّب المحل الهندسي للنقاط التي تُحقّق كل متباينة ممّا يأتي:

1) $|z-3|>5$

2) $|z-7|\leq|z+3i|$

أتحقّق من فهمي

أُمثّل في المستوى المُركّب المحل الهندسي للنقاط التي تُحقّق كل متباينة ممّا يأتي:

a) $|z+3+i|\leq 6$

b) $|z+3+i|<|z-4|$

c) $\frac{\pi}{4}<\text{Arg}(z+5)\leq\frac{\pi}{2}$

مثال 6

أُمثّل في المستوى المُركّب المحل الهندسي للنقاط التي تُحقّق المتباينة: $|z-1-2i|\leq 5$، والمتباينة: $\frac{\pi}{4}<\text{Arg}(z-1-2i)<\frac{2\pi}{3}$.

أتحقّق من فهمي

أُمثّل في المستوى المُركّب المحل الهندسي للنقاط التي تُحقّق المتباينة: $|z+3-2i|\geq 4$، والمتباينة: $\frac{-\pi}{2}<\text{Arg}(z-2+i)<\frac{\pi}{4}$.

أتدرّب وأحلّ المسائل

أجد المحل الهندسي الذي تُمثّله كل معادلة ممّا يأتي، ثم أُمثّله في المستوى المُركّب، ثم أجد معادلته الديكارتية:

1) $|z| = 10$

2) $|z-9| = 4$

3) $|z+2i| = 8$

4) $|z-5+6i| = 2$

5) $|z+\sqrt{2}+i\sqrt{2}| = 2$

6) $|z+6-i| = 7$

7) $|z-5| = |z-3i|$

8) $|z+3i| = |z-7i|$

9) $|z+5+2i| = |z-7|$

10) $|z-3| = |z-2-i|$

11) $\frac{|z+6-i|}{|z-10-5i|} = 1$

12) $|z+7+2i| = |z-4-3i|$

أجد المحل الهندسي الذي تُمثّله كلٌّ من المعادلات الآتية، ثم أرسمه في المستوى المُركّب:

13) $\text{Arg}(z+2-5i) = \frac{\pi}{4}$

14) $\text{Arg}(z-1+i\sqrt{3}) = \frac{2\pi}{3}$

15) $\text{Arg}(z-4i) = -\frac{3\pi}{4}$

أُمثّل في المستوى المُركّب المنطقة التي تُحدّدها كل متباينة ممّا يأتي:

16) $|z-2| < |z+2|$

17) $|z-4-2i| \leq 2$

18) $|z-4| > |z-6|$

19) $0 < \text{Arg}(z-2-2i) < \frac{\pi}{4}$

20) $-\frac{\pi}{4} \leq \text{Arg}(z-3+4i) \leq \frac{\pi}{4}$

21) $2 \leq |z-3-4i| \leq 4$

إذا كانت: $|z-\sqrt{5}-2i| = 2$، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

22) أرسم المحل الهندسي الذي تُمثّله المعادلة في المستوى المُركّب.

23) أجد القيمة العظمى لسعة الأعداد المُركّبة z التي تُحقّق المعادلة.

24) أُمثّل في المستوى المُركّب نفسه المحل الهندسي الذي تُمثّله كلٌّ من المعادلة: $|z-3+2i| = \sqrt{10}$، والمعادلة: $|z-7+i| = |z-6i|$، ثم أجد الأعداد المُركّبة التي تُحقّق المعادلتين معًا.

25) أجد العدد المُركّب الذي يُحقّق كُلًّا من المحل الهندسي: $|z+2i| = |z-3|$، والمحل الهندسي: $|z+3-i| = |z-1+5i|$.

منهاجي
متعة التعليم الهادف

26 أُمثِّل في المستوى المُركَّب نفسه المحل الهندسي الذي تُمثِّله كلٌّ من المعادلات الآتية:

$$\text{Arg}(z+2-5i)=\frac{\pi}{4}\,,\ \text{Arg}(z+2-5i)=\frac{-\pi}{2}\,,\ |z+2-5i|=\sqrt{29}$$

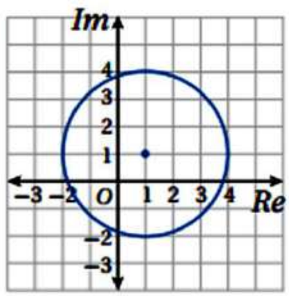
27 أُمثِّل في المستوى المُركَّب المحل الهندسي للنقاط التي تُحقِّق المتباينة: $|z+2i|>|z-3|$، والمتباينة: $|z+3-i|<|z-1+5i|$.

28 أُمثِّل في المستوى المُركَّب المحل الهندسي للنقاط التي تُحقِّق المتباينة: $\frac{-\pi}{2}<\text{Arg}(z+2-5i)<\frac{\pi}{4}$، والمتباينة: $|z+2-5i|>\sqrt{29}$.

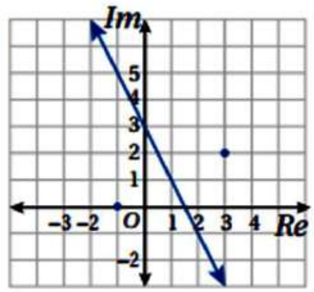
29 أُمثِّل في المستوى المُركَّب المحل الهندسي للنقاط التي تُحقِّق المتباينة: $\frac{-\pi}{4}\le\text{Arg}(z-2i)\le\frac{\pi}{3}$، والمتباينة: $2<|z-3+i|\le 5$

أكتب (بدلالة z) معادلة المحل الهندسي المُمثَّل بيانيًّا في كلٍّ ممّا يأتي:

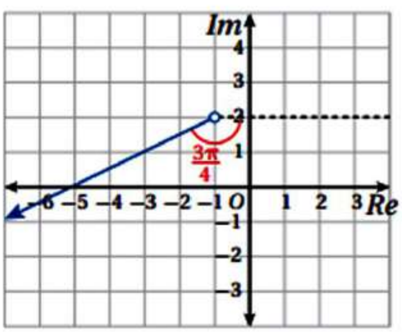
30



31

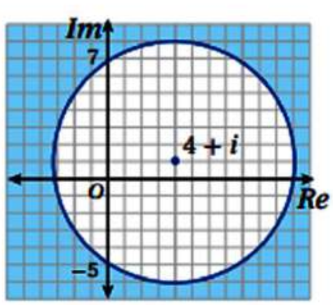


32 أكتب معادلة في صورة: $\text{Arg}(z-a)=\theta$، حيث a عدد مُركَّب، و $-\pi<\theta\le\pi$ تُمثِّل المحل الهندسي المُبيَّن في الشكل المجاور.

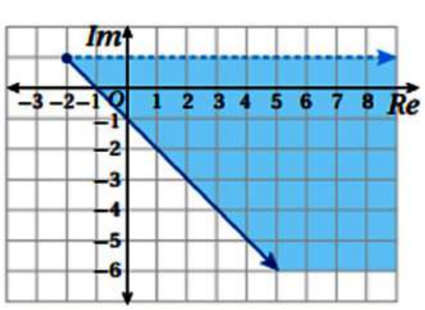


أكتب (بدلالة z) متباينة المحل الهندسي الذي تُمثِّله المنطقة المُظلَّلة في كلٍّ ممّا يأتي:

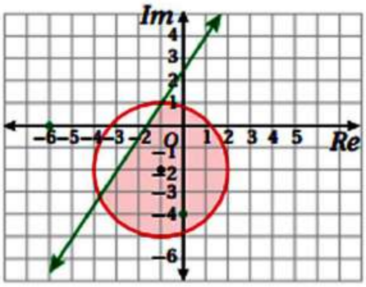
33



34



35 أكتب (بدلالة z) نظام متباينات يُمثّل المحل الهندسي المُبيَّن في الشكل المجاور.



مهارات التفكير العليا

36 تحدٍّ: أجد (بدلالة الثابت الحقيقي a) العددين المُركَّبين اللذين يُحقّقان المعادلة: $|z-a| = 2a$، والمعادلة: $|z-a| = |z + a(2+i)|$.

37 تبرير: إذا كان العدد المُركَّب z يُحقّق المعادلة: $|z-3+4i| = 2$، فأجد أكبر قيمة لِـ $|z|$ وأقل قيمة له، مُبرِّرًا إجابتي.

تحدٍّ: إذا كانت: $z = 5 + 2i$، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

38 أُبيِّن أنَّ: $\frac{z}{\bar{z}} = \frac{1}{29}(21 + 20i)$.

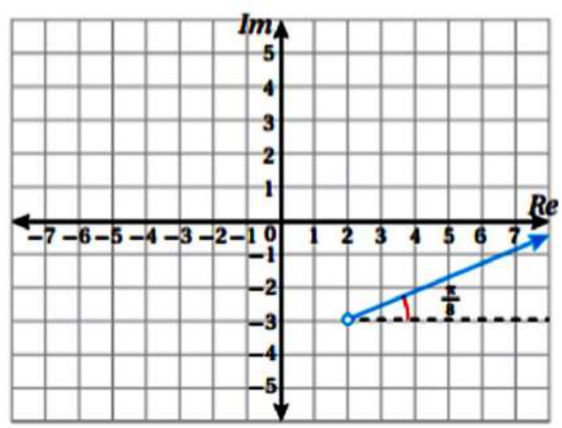
39 بناءً على البحث في سعة كلٍّ من الأعداد المُركَّبة: z، و $\bar{z}$، و $\frac{z}{\bar{z}}$ ، أُبيِّن أنَّ:

$$2\tan^{-1}\left(\frac{2}{5}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{20}{21}\right)$$

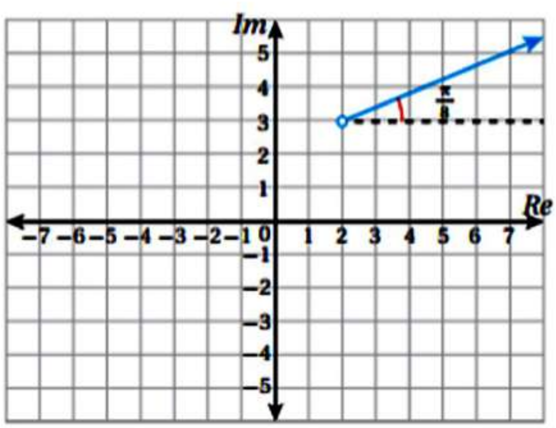
40 تحدٍّ: أُثبِت أنَّ المعادلة: $|z-6| = 2|z+6-9i|$ تُمثّل دائرة، ثم أجد مركزها وطول نصف قُطْرها.

41 تبرير: أيُّ الآتية هو المحل الهندسي الذي معادلته: $\text{Arg}(z-2+3i) = \frac{\pi}{8}$، مُبرِّرًا إجابتي؟

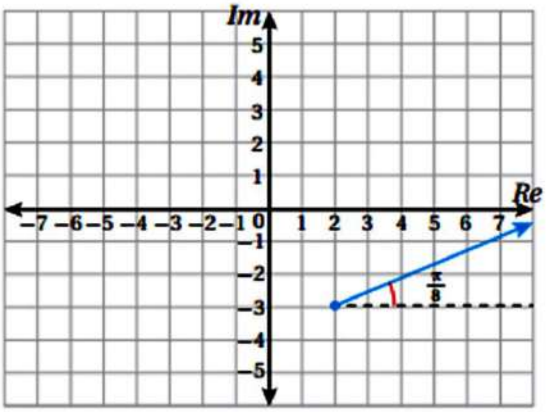
b)



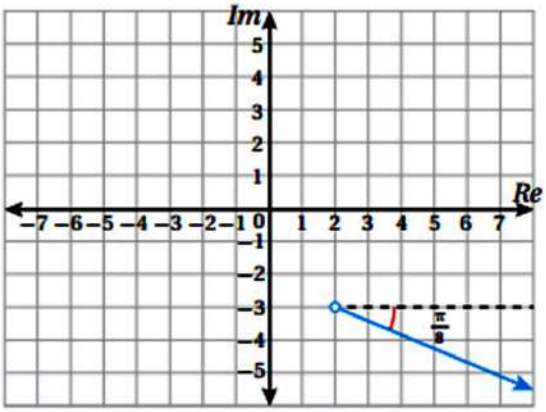
)



c)



d)



اختبار نهاية الوحدة

أختار رمز الإجابة الصحيحة في كلٍّ ممّا يأتي:

1 إذا كان: $i = \sqrt{-1}$، فإنَّ i^{343} تساوي:

a) -1 b) 1 c) $-i$ d) i

2 ناتج $(1-i)^3$ هو:

a) $-2+2i$ b) $-2-2i$

c) $2-2i$ d) $2+2i$

3 إذا كان $2i$ هو أحد جذور المعادلة:
$az^3 + 5z^2 + 8z + 20 = 0$، فإنَّ قيمة a هي:

a) -8 b) -2 c) 2 d) 8

4 الصورة المثلثية للعدد المُركَّب: $z = -1 + i\sqrt{3}$ هي:

a) $2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$

b) $2(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3})$

c) $2(\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3})$

d) $2(\cos\frac{2\pi}{3} - i\sin\frac{2\pi}{3})$

5 الصورة القياسية لناتج:

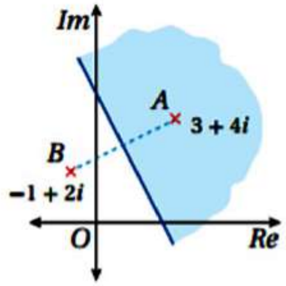
$$8\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) \div 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

هي:

a) $4i$ b) -4

c) $-4+4i$ d) $4-4i$

6 إحدى الآتية تصف المنطقة المُظلَّلة في الشكل المجاور:



a) $|z-1+2i| < |z+3+4i|$

b) $|z-1+2i| > |z+3+4i|$

c) $|z+1-2i| < |z-3-4i|$

d) $|z+1-2i| > |z-3-4i|$

7 أجد الجذرين التربيعيين للعدد المُركَّب: $z = 45 - 28i$.

8 أجد مقياس العدد المُركَّب: $w = -\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{2}i$، وسعته.

9 إذا كان: $z = -8 + 8i$، وكان: $w = a + 2i$، حيث $a < 0$، فأجد قيمة a، علمًا بأنَّ: $|z+w| = 26$.

إذا كان: $w = \frac{14-31i}{3-2i}$، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

10 أكتب العدد w في صورة: $x + iy$.

11 إذا كان العدد w هو أحد جذور المعادلة: $z^2 + cz + d = 0$، فأجد قيمة كلٍّ من العددين الحقيقيين c، و d.

أُمثِّل في المستوى المُركَّب المنطقة التي تُحدِّدها كل متباينة ممّا يأتي:

12 $|z-6| \le 3$

13 $\frac{\pi}{4} \le \text{Arg}(z-2) \le \frac{2\pi}{3}$

14 $|z+1+i| > |z-3-3i|$

إذا مثّلت النقطة M العدد: $z_1 = 1 - 8i$، ومثّلت النقطة N العدد: $z_2 = 4 + 7i$، وكانت O هي نقطة الأصل، فأُجيب عن الأسئلة الآتية تباعًا:

15 أُبيِّن أنَّ المثلث OMN متطابق الضلعين.

16 أُبيِّن أنَّ جيب تمام الزاوية MON يساوي $-\frac{4}{5}$.

17 أجد مساحة المثلث OMN.

18 أُمثِّل في المستوى المُركَّب المحل الهندسي للنقاط التي تُحقِّق المتباينة: $|z+2i| < |z-8|$، والمتباينة: $-\frac{\pi}{4} < \text{Arg}(z+3-6i) < \frac{\pi}{4}$.

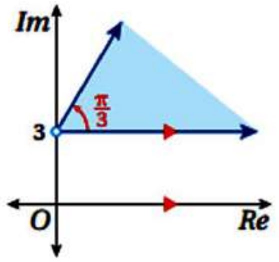
19 تقع رؤوس مثلث متطابق الأضلاع على دائرة مركزها نقطة الأصل في المستوى المُركَّب. إذا كان أحد هذه الرؤوس يُمثِّل العدد المُركَّب: $(4 + 2i)$، فأجد العددين المُركَّبين اللذين يُمثِّلهما الرأسان الآخران، ثم أكتب الإجابة في صورة: $x + iy$، حيث x، وy عددان حقيقيان.

تُمثِّل النقاط: A، وB، وC، وD جذور المعادلة:
$z^4 - 6z^3 + 14z^2 - 64z + 680 = 0$:

20 إذا كان العدد: $(-2 + 4i)$ هو أحد هذه الجذور، فأجد الجذور الثلاثة الأُخرى لهذه المعادلة.

21 أُمثِّل الجذور الأربعة في المستوى المُركَّب، ثم أجد مساحة الشكل الرباعي $ABCD$.

22 أكتب (بدلالة z) متباينة تُمثِّل المحل الهندسي المعطى في الشكل الآتي:



إذا كان: $z^2 + 2z + 10 = 0$، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

23 أُبيِّن أنَّ لجذري المعادلة المقياس نفسه.

24 أجد سعة كل جذر من جذري المعادلة.

إذا كان: $w = \frac{22+4i}{(2-i)^2}$ ، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

25 أُبيِّن أنَّ الصورة القياسية لهذا العدد هي: $w = 2+4i$.

26 إذا كان: $\frac{\pi}{4} \leq \text{Arg}\,(w+p) \leq \frac{3\pi}{4}$ ، فأجد مجموعة القِيَم المُمكِنة للعدد الثابت p.

27 يُحقِّق العددان المُركَّبان u، و v، المعادلة: $u + 2v = 2i$، والمعادلة: $iu + v = 3$. أحُلُّ المعادلتين لإيجاد العدد u، والعدد v.

28 أُمثِّل في المستوى المُركَّب المحل الهندسي للنقاط التي تُحقِّق المتباينة: $\frac{\pi}{2} \leq \text{Arg}\, z \leq \frac{2\pi}{3}$، والمتباينة: $|z-2i| \leq 2$.

اجابات كتاب الطالب

وحدة الاعداد المركبة

اعداد

المركز الوطني لتطوير المناهج

National Center for Curriculum Development

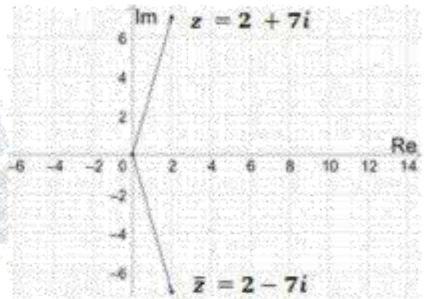
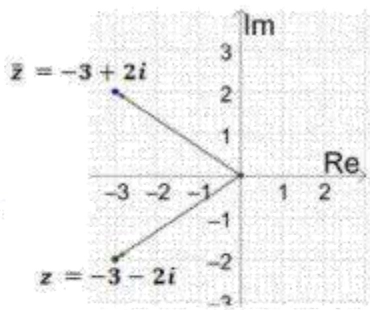
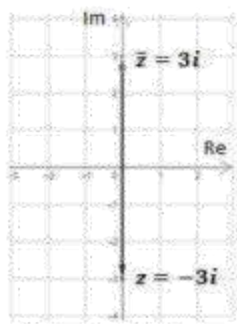
منهاجي

متعة التعليم الهادف

الدرس الأول: الأعداد المركبة

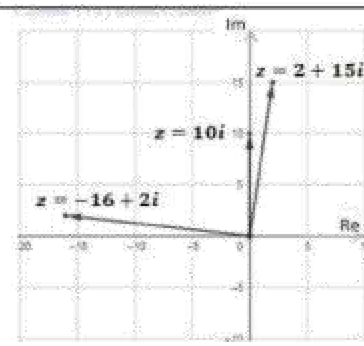
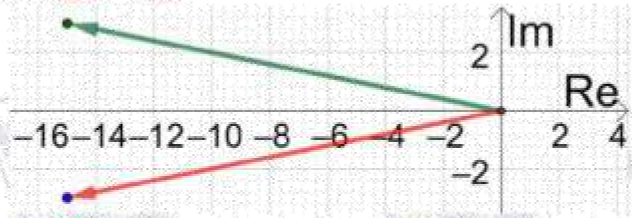
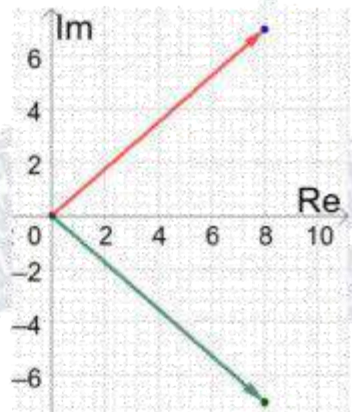
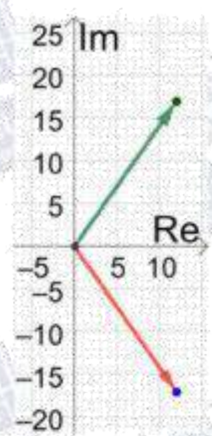
مسألة اليوم افترض عالِم الرياضيات الإيطالي جيرولامو كاردانو قديمًا أنَّ القيمة: $\sqrt{-1}$ تُمثِّل حلًّا للمعادلة: $x^2 + 1 = 0$. هل يبدو ذلك منطقيًّا؟

	مسألة اليوم صفحة 140
	إذا تصورنا وجود جذر تربيعي للعدد -1 في مجموعة من مجموعات الأعداد، فإن: $(\sqrt{-1})^2 + 1 = -1 + 1 = 0$ وبالتالي يكون $\sqrt{-1}$ حلًّا للمعادلة $x^2 + 1 = 0$
	أتحقق من فهمي صفحة 141
a	$\sqrt{-75} = \sqrt{-1 \times 25 \times 3} = \sqrt{-1} \times \sqrt{25} \times \sqrt{3} = 5i\sqrt{3}$
b	$\sqrt{-49} = \sqrt{-1 \times 49} = \sqrt{-1} \times \sqrt{49} = 7i$
	أتحقق من فهمي صفحة 142
a	$\sqrt{-27} \times \sqrt{-48} = \sqrt{-1 \times 27} \times \sqrt{-1 \times 48}$ $= i\sqrt{9 \times 3} \times i\sqrt{16 \times 3}$ $= i^2\sqrt{9 \times 3 \times 16 \times 3}$ $= 36i^2 = -36$
b	$\sqrt{-50} \times -4i = \sqrt{-1 \times 50} \times (-4i)$ $= 5i\sqrt{2} \times (-4i) = -20\sqrt{2}i^2 = 20\sqrt{2}$
c	$i^{2021} = (i^2)^{1010} \times i = (-1)^{1010} \times i = i$
	أتحقق من فهمي صفحة 144
	$x + 5 + (4y - 9)i = 12 - 5i \;\rightarrow x + 5 = 12$ و $4y - 9 = -5$ $\rightarrow x = 7 \,, y = 1$

	أتحقق من فهمي صفحة 145
a	$z = 2 + 7i \ , \bar{z} = 2 - 7i$ 
b	$z = -3 - 2i \ , \bar{z} = -3 + 2i$ 
c	$z = -3i \ , \bar{z} = 3i$ 
	أتحقق من فهمي صفحة 146
a	$z = -3 - 6i\sqrt{2} \quad \rightarrow \lvert z \rvert = \sqrt{(-3)^2 + \left(-6\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{81} = 9$
b	$z = -2i \quad \rightarrow \lvert z \rvert = \sqrt{(0)^2 + (-2)^2} = \sqrt{4} = 2$
c	$z = 4 + \sqrt{-20} = 4 + \sqrt{-1} \times \sqrt{20} = 4 + i\sqrt{20}$ $\rightarrow \lvert z \rvert = \sqrt{(4)^2 + \left(\sqrt{20}\right)^2} = \sqrt{36} = 6$

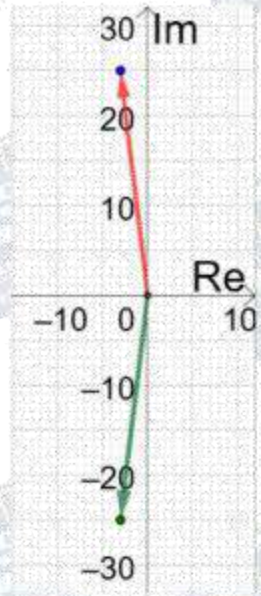
	أتحقق من فهمي صفحة 150
a	$z = 8 + 2i$ $Arg(z) = \tan^{-1}\left(\frac{2}{8}\right) \approx 0.24$
b	$z = -5 + 12i$ $Arg(z) = \pi - \tan^{-1}\left(\frac{12}{5}\right) \approx 1.97$
c	$z = -2 - 3i$ $Arg(z) = -\left(\pi - \tan^{-1}\left(\frac{3}{2}\right)\right) \approx -2.16$
d	$z = 8 - 8i\sqrt{3}$ $Arg(z) = -\tan^{-1}\left(\frac{8\sqrt{3}}{8}\right) \approx -\frac{\pi}{3}$
	أتحقق من فهمي صفحة 152
a	$\lvert z\rvert = 4\sqrt{2}, Arg(z) = -\frac{3\pi}{4}$ $z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = 4\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right)$
b	$z = -4 - 4i$ $\rightarrow r = \lvert z\rvert = \sqrt{(-4)^2 + (-4)^2} = 4\sqrt{2}$ $Arg(z) = -\left(\pi - \tan^{-1}\left(\frac{4}{4}\right)\right) \approx -\frac{3\pi}{4}$ $z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = 4\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right)$
c	$z = 2i$ $\rightarrow r = \lvert z\rvert = \sqrt{(0)^2 + (2)^2} = 2$ $Arg(z) = \frac{\pi}{2}$ $z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$
	أتدرب وأحل المسائل صفحة 152
1	$\sqrt{-19} = \sqrt{-1 \times 19} = \sqrt{-1} \times \sqrt{19} = i\sqrt{19}$

2	$\sqrt{-\frac{12}{25}}=\sqrt{-1\times\frac{12}{25}}=\sqrt{-1}\times\sqrt{\frac{12}{25}}=\frac{2\sqrt{3}}{5}i$
3	$\sqrt{-\frac{9}{32}}=\sqrt{-1\times\frac{9}{32}}=\sqrt{-1}\times\sqrt{\frac{9}{32}}=\frac{3}{4\sqrt{2}}i$
4	$\sqrt{-53}=\sqrt{-1\times 53}=\sqrt{-1}\times\sqrt{53}=i\sqrt{53}$
5	$i^{26}=(i^2)^{13}=-1$
6	$i^{39}=(i^2)^{19}\times i=(-1)^{19}\times i=-i$
7	$(i)(2i)(-7i)=(2i^2)(-7i)=(-2)(-7i)=14i$
8	$\sqrt{-6}\times\sqrt{-6}=\sqrt{-1\times 6}\times\sqrt{-1\times 6}$ $=i\sqrt{6}\times i\sqrt{6}$ $=6i^2=-6$
9	$\sqrt{-4}\times\sqrt{-8}=\sqrt{-1\times 4}\times\sqrt{-1\times 8}$ $=2i\times 2\sqrt{2}i$ $=4\sqrt{2}i^2=-4\sqrt{2}$
10	$2i\times\sqrt{-9}=2i\times\sqrt{-1\times 9}$ $=2i\times 3i$ $=6i^2=-6$
11	$\frac{2+\sqrt{-4}}{2}=\frac{2+2i}{2}=1+i$
12	$\frac{8+\sqrt{-16}}{2}=\frac{8+4i}{2}=4+2i$
13	$\frac{10-\sqrt{-50}}{5}=\frac{10-5i\sqrt{2}}{5}=2-i\sqrt{2}$

<table>
<tr><td>14</td><td>$z = 2 + 15i$
$\rightarrow Re(z) = 2, Im(z) = 15$</td><td rowspan="3">
</td></tr>
<tr><td>15</td><td>$z = 10i$
$\rightarrow Re(z) = 0, Im(z) = 10$</td></tr>
<tr><td>16</td><td>$z = -16 - 2i$
$\rightarrow Re(z) = -16, Im(z) = -2$</td></tr>
<tr><td>17</td><td colspan="2">$z = -15 + 3i$, $\bar{z} = -15 - 3i$

</td></tr>
<tr><td>18</td><td colspan="2">$z = 8 - 7i$, $\bar{z} = 8 + 7i$

</td></tr>
<tr><td>19</td><td colspan="2">$z = 12 + 17i$, $\bar{z} = 12 - 17i$

</td></tr>
</table>

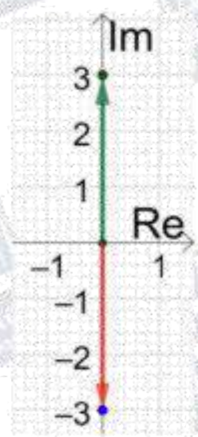
20

$z = -3 - 25i \ , \bar{z} = -3 + 25i$



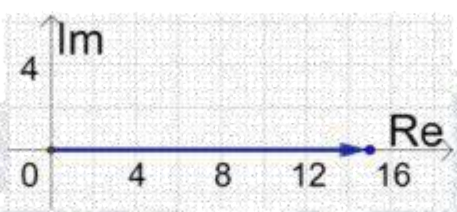
21

$z = 3i \ , \bar{z} = -3i$



22

$z = 15 \ , \bar{z} = 15$



23

$z = -5 + 5i$

$\bar{z} = -5 - 5i$

$|z| = \sqrt{(-5)^2 + (5)^2} = 5\sqrt{2}$

24

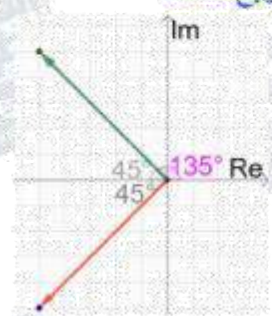
$z = 3 + 3\sqrt{3}i$

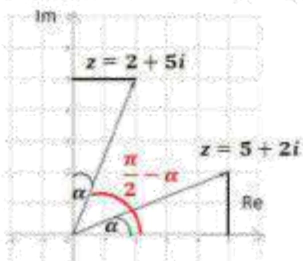
$\bar{z} = 3 - 3\sqrt{3}i$

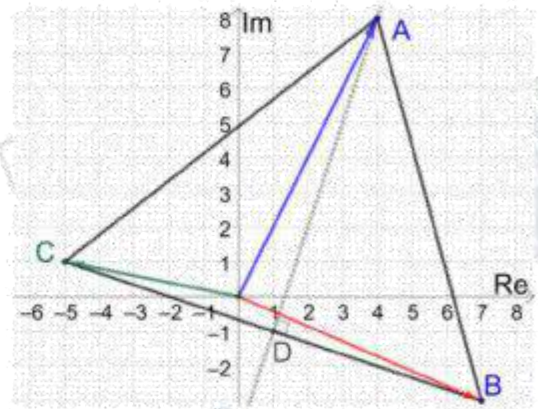
$|z| = \sqrt{(3)^2 + \left(3\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{9 + 27} = 6$

25	$z = 6 - 8i$ $\bar{z} = 6 + 8i$ $\lvert z\rvert = \sqrt{(6)^2 + (-8)^2} = \sqrt{36+64} = 10$
26	$x^2 - 1 + i(2y-5) = 8 + 9i \rightarrow x^2 - 1 = 8$ و $2y - 5 = 9$ $\rightarrow x = \pm 3$ و $y = 7$
27	$2x + 3y + i(x - 2y) = 8 - 3i \rightarrow 2x + 3y = 8$ و $x - 2y = -3$ $\rightarrow x = 1$ و $y = 2$
28	$y - 3 + i(3x+2) = 9 + i\,(y-4) \rightarrow y - 3 = 9$ و $3x + 2 = y - 4$ $\rightarrow y = 12$ و $x = 2$
29	$i(2x - 5y) + 3x + 5y = 7 + 3i \rightarrow 2x - 5y = 3$ و $3x + 5y = 7$ $\rightarrow x = 2$ و $y = \frac{1}{5}$
30	$z = 1$ $Arg(z) = \tan^{-1}\left(\frac{0}{1}\right) = 0$
31	$z = 3i$ $Arg(z) = \frac{\pi}{2}$
32	$z = -5 - 5i$ $Arg(z) = -\left(\pi - \tan^{-1}\left(\frac{5}{5}\right)\right) = -\frac{3\pi}{4}$
33	$z = 1 - i\sqrt{3}$ $Arg(z) = -\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{1}\right) = -\frac{\pi}{3}$
34	$z = 6\sqrt{3} + 6i$ $Arg(z) = \tan^{-1}\left(\frac{6}{6\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}$
35	$z = 3 - 4i$ $Arg(z) = -\tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right) \approx -0.93$

36	$z=-12+5i$ $Arg(z)=\pi-\tan^{-1}\left(\frac{5}{12}\right)\approx 2.75$
37	$z=-58-93i$ $Arg(z)=-\left(\pi-\tan^{-1}\left(\frac{93}{58}\right)\right)\approx -2.13$
38	$z=-4+2i$ $Arg(z)=\pi-\tan^{-1}\left(\frac{2}{4}\right)\approx 2.68$
39	$r=\lvert z\rvert=2$ $Arg(z)=\frac{\pi}{2}$ $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)=2\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$
40	$r=\lvert z\rvert=3,\quad Arg(z)=\frac{\pi}{3}$ $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)=3\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$
41	$r=\lvert z\rvert=7,\ Arg(z)=\frac{5\pi}{6}$ $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)=7\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right)$
42	$r=\lvert z\rvert=1,\ Arg(z)=\frac{\pi}{4}$ $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)=1\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)=\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$
43	$z=6$ $\rightarrow r=\lvert z\rvert=\sqrt{(6)^2+(0)^2}=6$ $Arg(z)=0$ $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)=6(\cos(0)+i\sin(0))$
44	$z=1+i$ $\rightarrow r=\lvert z\rvert=\sqrt{(1)^2+(1)^2}=\sqrt{2}$ $Arg(z)=\tan^{-1}\left(\frac{1}{1}\right)=\frac{\pi}{4}$ $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$

45	$z_1 = 4\sqrt{3} - 4i \quad \rightarrow \overline{z_1} = 4\sqrt{3} + 4i$ $Arg(z_2) = Arg(\overline{z_1}) = \tan^{-1}\left(\frac{4}{4\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}$ $z_2 = r(\cos\theta + i\sin\theta) = 40\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ $= 40\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 20\sqrt{3} + 20i$ إذن، $z_2 = 20\sqrt{3} + 20i$
46	$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = 10\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$ $= 10\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = -10 + 10i$ إذن، $z = -10 + 10i$
47	بما أن z في الربع الثاني إذن $\bar{z}$ في الربع الثالث  فتكون الزاوية بينهما هي $\frac{\pi}{2}$
48	$z = -8 + 8i$ $\lvert z\rvert = \sqrt{(-8)^2 + (8)^2} = 8\sqrt{2}$
49	$Arg(z) = \pi - \tan^{-1}\left(\frac{8}{8}\right) = \frac{3\pi}{4}$
50	$\lvert\bar{z}\rvert = \lvert z\rvert = 8\sqrt{2}$
51	$\bar{z} = -8 - 8i \quad \rightarrow Arg(\bar{z}) = -\left(\pi - \tan^{-1}\left(\frac{8}{8}\right)\right) = -\frac{3\pi}{4}$ أو نكتب مباشرة: $Arg(\bar{z}) = -Arg(z) = -\frac{3\pi}{4}$

52	$Arg(5+2i)=\alpha=\tan^{-1}\left(\frac{2}{5}\right)$ $Arg(-5-2i)=-\left(\pi-\tan^{-1}\left(\frac{2}{5}\right)\right)=-(\pi-\alpha)=-\pi+\alpha$
53	$Arg(5-2i)=-\tan^{-1}\left(\frac{2}{5}\right)=-\alpha$
54	$Arg(-5+2i)=\pi-\tan^{-1}\left(\frac{2}{5}\right)=\pi-\alpha$
55	 يوضح الرسم المجاور العلاقة بين سعة كل من العددين $z = 5+2i$ ، و $z = 2+2i$ $Arg(2+5i)=\tan^{-1}\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}\left(\frac{2}{5}\right)=\frac{\pi}{2}-\alpha$
56	$Arg(-2+5i)=\pi-\tan^{-1}\left(\frac{5}{2}\right)=\pi-\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\frac{\pi}{2}+\alpha$
57	$z=5+im \quad , \quad \lvert z\rvert=6 , \quad 0<Arg(z)<\frac{\pi}{2}$ $\lvert z\rvert=\sqrt{(5)^2+(m)^2}=\sqrt{25+m^2}=6 \;\rightarrow\; 25+m^2=36 \;\rightarrow\; m=\pm\sqrt{11}$ لكن $0<Arg(z)<\frac{\pi}{2}$ وهذا يعني أن z في الربع الأول، ومنه $m=\sqrt{11}$
58	$z=5+3ik \quad , \quad \lvert z\rvert=13$ $\lvert z\rvert=\sqrt{(5)^2+(3k)^2}=\sqrt{25+9k^2}=13 \;\rightarrow\; 25+9k^2=169 \;\rightarrow\; k=\pm4$
59	$\lvert z_1\rvert=r=4\sqrt{5} , \quad Arg(z_1)=\tan^{-1}(2)=\theta$ (نستنتج هنا أن z_1 يقع في الربع الأول، ففي الأرباع الأخرى تكون السعة بإشارة سالبة أو تحتوي π) $\tan\theta=2 \;\rightarrow\; \sin\theta=\frac{2}{\sqrt{5}} , \cos\theta=\frac{1}{\sqrt{5}}$ $z_1=r(\cos\theta+i\sin\theta)=4\sqrt{5}(\cos\theta+i\sin\theta)=4\sqrt{5}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}+i\frac{2}{\sqrt{5}}\right)=4+8i$



$z_1 = 4 + 8i \,, z_2 = 7 - 3i \,, z_3 = -5 + i$

$$AC = \sqrt{(4-(-5))^2 + (8-1)^2} = \sqrt{130}$$

$$AB = \sqrt{(4-7)^2 + (8-(-3))^2} = \sqrt{130}$$

$$BC = \sqrt{(7-(-5))^2 + (-3-1)^2} = \sqrt{160}$$

60

ومنه فإن المثلث ABC متطابق الضلعين، نتخذ BC قاعدة له ونجد إحداثيي النقطة D نقطة منتصف القاعدة BC:

$$D\left(\frac{7-5}{2}, \frac{-3+1}{2}\right) \to D(1,-1)$$

ارتفاع هذا المثلث هو القطعة المستقيمة الواصلة بين الرأس ومنتصف القاعدة وهو $\overline{AD}$

$$AD = \sqrt{(4-1)^2 + (8--1)^2} = \sqrt{90}$$

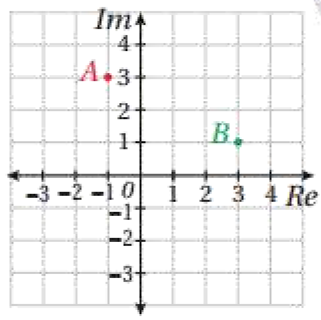
لتكن مساحة المثلث ABCهي A فإن:

$$A = \frac{1}{2} \times \sqrt{160} \times \sqrt{90} = 60$$

إذن، مساحة المثلث ABC تساوي 60 وحدة مربعة.

منهاجي
متعة التعليم الهادف

الدرس الثاني: العمليات على الأعداد المركبة



مسألة اليوم مُعتمِدًا المستوى المُركَّب المجاور الذي يُبيِّن العددين المُركَّبين A و B، أجد السعة والمقياس للعدد المُركَّب AB.

	مسألة اليوم صفحة 155
	$z_1 = -1 + 3i, \quad z_2 = 3 + i$ $z_1 z_2 = (-1 + 3i)(3 + i)$ $= -3 - i + 9i - 3 = -6 + 8i$ $\lvert z_1 z_2 \rvert = \sqrt{36 + 64} = 10$ $Arg(z_1 z_2) = \pi - \tan^{-1}\left(\frac{8}{6}\right) \approx 2.21$
	أتحقق من فهمي صفحة 156
a	$(7 + 8i) + (-9 + 14i) = -2 + 22i$
b	$(11 + 9i) - (4 - 6i) = 7 + 15i$
	أتحقق من فهمي صفحة 157
a	$-3i(4 - 5i) = -12i + 15i^2 = -15 - 12i$
b	$(5 + 4i)(7 - 4i) = 35 - 20i + 28i - 16i^2 = 35 + 8i + 16 = 51 + 8i$
c	$(3 + 6i)^2 = 9 + 36i + 36i^2 = 9 + 36i - 36 = -27 + 36i$
	أتحقق من فهمي صفحة 158
a	$\frac{-4 + 3i}{1 + i} = \frac{-4 + 3i}{1 + i} \times \frac{1 - i}{1 - i}$ $= \frac{-4 + 4i + 3i - 3i^2}{1 - i^2} = \frac{-4 + 7i + 3}{1 + 1} = \frac{-1 + 7i}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{7}{2}i$

b	$\frac{2-6i}{-3i}=\frac{2-6i}{-3i}\times\frac{i}{i}$ $=\frac{2i-6i^2}{-3i^2}$ $=\frac{2i+6}{3}=2+\frac{2}{3}i$
c	$\frac{7i}{4-4i}=\frac{7i}{4-4i}\times\frac{4+4i}{4+4i}$ $=\frac{28i+28i^2}{16-16i^2}$ $=\frac{28i-28}{16+16}$ $=\frac{28i-28}{32}=-\frac{7}{8}+\frac{7}{8}i$

أتحقق من فهمي صفحة 160

a	$6\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)\times 2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ $=6\times 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)\right)=12\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$
b	$6\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)\div 2\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$ $=\frac{6}{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}-\frac{5\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}-\frac{5\pi}{6}\right)\right)$ $=3\left(\cos\left(-\frac{7\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{7\pi}{6}\right)\right)$ $=3\left(\cos\left(-\frac{7\pi}{6}+2\pi\right)+i\sin\left(-\frac{7\pi}{6}+2\pi\right)\right)=3\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$

أتحقق من فهمي صفحة 161	
a	$\sqrt{-5-12i} = x+iy \rightarrow -5-12i = x^2+2ixy+i^2y^2$ $\rightarrow -5-12i = x^2-y^2+2ixy$ $\rightarrow -5 = x^2-y^2$ و $-12 = 2xy$ $y = -\frac{6}{x}$ $x^2-y^2 = -5 \rightarrow x^2 - \frac{36}{x^2} = -5$ $\rightarrow x^4+5x^2-36 = 0$ $\rightarrow (x^2+9)(x^2-4) = 0 \rightarrow x = \pm 2$ عندما $x = 2$ ، فإن $y = -3$، وعندما $x = -2$ ، فإن $y = 3$، إذن الجذران التربيعيان للعدد المركب $-5-12i$ هما: $2-3i \quad , -2+3i$
b	$\sqrt{-9i} = x+iy \rightarrow -9i = x^2+2ixy+i^2y^2$ $\rightarrow -9i = x^2-y^2+2ixy$ $\rightarrow 0 = x^2-y^2$ و $-9 = 2xy$ $y = -\frac{9}{2x}$ $x^2-y^2 = 0 \rightarrow x^2 - \frac{81}{4x^2} = 0$ $\rightarrow 4x^4-81 = 0$ $\rightarrow (2x^2+9)(2x^2-9) = 0 \rightarrow x = \pm\frac{3}{\sqrt{2}}$ عندما $x = \frac{3}{\sqrt{2}}$ ، فإن $y = -\frac{3}{\sqrt{2}}$، وعندما $x = -\frac{3}{\sqrt{2}}$ ، فإن $y = \frac{3}{\sqrt{2}}$، إذن الجذران التربيعيان للعدد المركب $-9i$ هما: $\frac{3}{\sqrt{2}} - \frac{3}{\sqrt{2}}i \quad , -\frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{2}}i$

c

$$\sqrt{-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i}=x+iy \rightarrow -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i=x^2+2ixy+i^2y^2$$

$$\rightarrow -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i=x^2-y^2+2ixy$$

$$\rightarrow -\frac{1}{2}=x^2-y^2 \quad \text{و} \quad \frac{\sqrt{3}}{2}=2xy$$

$$y=\frac{\sqrt{3}}{4x}$$

$$x^2-y^2=-\frac{1}{2} \rightarrow x^2-\frac{3}{16x^2}=-\frac{1}{2}$$

$$\rightarrow 16x^4+8x^2-3=0$$

$$\rightarrow (4x^2-1)(4x^2+3)=0 \rightarrow x=\pm\frac{1}{2}$$

عندما $x=\frac{1}{2}$ ، فإن $y=\frac{\sqrt{3}}{2}$، وعندما $x=-\frac{1}{2}$ ، فإن $y=-\frac{\sqrt{3}}{2}$،

إذن الجذران التربيعيان للعدد المركب $-5-12i$ هما: $-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$, $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

أتحقق من فهمي لمثال 6 صفحة 165

$$z^3-z^2-7z+15=0$$

عوامل الحد الثابت هي: $\pm1, \pm3, \pm5, \pm15$

بالتعويض، نجد أن العدد -3 يحقق المعادلة لأن: $(-3)^3-(-3)^2-7(-3)+15=0$

إذن $(z+3)$ هو أحد عوامل كثير الحدود، نجري عملية القسمة فنجد أن:

$$z^3-z^2-7z+15=(z+3)(z^2-4z+5)=0$$

$$z=-3 \ , z=\frac{4\pm\sqrt{16-20}}{2}=2\pm i$$

إذن لهذه المعادلة 3 جذور هي: $-3, 2+i, 2-i$

أتحقق من فهمي لمثال 7 صفحة 165

$$x=2\pm i \rightarrow x-2=\pm i \rightarrow (x-2)^2=-1 \rightarrow x^2-4x+4=-1$$

$$x^2-4x+5=0$$

بمقارنة هذه المعادلة مع المعادلة المعطاة $(x^2+ax+b=0)$ نجد أن: $a=-4, \quad b=5$

	أتدرب وأحل المسائل صفحة 165
1	$(7+2i)+(3-11i)=10-9i$
2	$(5-9i)-(-4+7i)=9-16i$
3	$(4-3i)(1+3i)=4+12i-3i+9=13+9i$
4	$(4-6i)(1-2i)(2-3i)=(4-6i)(2-3i-4i-6)$ $=(4-6i)(-4-7i)$ $=-16-28i+24i-42$ $=-58-4i$
5	$(9-2i)^2=81-36i-4=77-36i$
6	$\frac{48+19i}{5-4i}=\frac{48+19i}{5-4i}\times\frac{5+4i}{5+4i}$ $=\frac{240+192i+95i-76}{25+16}$ $=\frac{164+287i}{41}$ $=4+7i$
7	$6(\cos\pi+i\sin\pi)\times 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$ $=12\left(\cos\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)\right)=12\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$
8	$\left(\cos\left(\frac{3\pi}{10}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{10}\right)\right)\div\left(\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}\right)$ $=\cos\left(\frac{3\pi}{10}-\frac{2\pi}{5}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{10}-\frac{2\pi}{5}\right)$ $=\cos\left(-\frac{\pi}{10}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{10}\right)$
9	$12\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)\div 4\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ $=\frac{12}{4}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}\right)\right)$ $=3\left(\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right)$

10	$11\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)\times 2\left(\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right)$ $=22\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{3\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{3\pi}{2}\right)\right)$ $=22\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right)$ $=22\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}-2\pi\right)+i\sin\left(\frac{4\pi}{3}-2\pi\right)\right)$ $=22\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right)$
11	$(a+6i)+(7-bi)=-2+5i$ $a+7+(6-b)i=-2+5i \rightarrow a+7=-2$ و $6-b=5$ $\rightarrow a=-9\,,b=1$
12	$(11-ia)-(b-9i)=7-6i$ $11-b+(9-a)i=7-6i \rightarrow 11-b=7$ و $9-a=-6$ $\rightarrow b=4\,,a=15$
13	$(a+ib)(2-i)=5+5i$ $2a+b+(2b-a)i=5+5i \rightarrow 2a+b=5$ و $2b-a=5$ $\rightarrow b=3\,,a=1$ طريقة ثانية للحل: $a+ib=\frac{5+5i}{2-i}$ $=\frac{5+5i}{2-i}\times\frac{2+i}{2+i}=\frac{10+5i+10i-5}{4+1}=1+3i \rightarrow a=1\,,b=3$
14	$\frac{a-6i}{1-2i}=b+4i \rightarrow \frac{a-6i}{1-2i}\times\frac{1+2i}{1+2i}=b+4i$ $\rightarrow \frac{a+2ai-6i+12}{1+4}=b+4i$ $\rightarrow \frac{a+12}{5}+\frac{2a-6}{5}i=b+4i$ $\rightarrow \frac{a+12}{5}=b\,,\quad \frac{2a-6}{5}=4 \rightarrow a=13$ بتعويض قيمة a في المعادلة الأولى ينتج أن: $b=5$ طريقة ثانية للحل: $a-6i=(b+4i)(1-2i) \rightarrow a-6i=b+8+(-2b+4)i$ $\rightarrow a=b+8\,,\quad -6=-2b+4 \rightarrow b=5\,,a=13$

15	$z = 8\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = 8\left(\cos\left(\frac{-\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{4}\right)\right)$ $\rightarrow \bar{z} = 8\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$ $\rightarrow z\bar{z} = 8\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) \times 8\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$ $= 64\left(\cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = 64$ الحل الثاني: نكتب كلا من العددين بالصورة المثلثية أولا ثم نطبق القاعدة: $z = 8\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = 8\left(\cos\left(\frac{-\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{4}\right)\right)$ $\rightarrow \bar{z} = 8\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$ $\rightarrow z\bar{z} = 64\left(\cos\left(\frac{-\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right)\right) = 64$ الحل الثالث: كتابة العددين بالصورة القياسية أولا ثم إجراء عملية الضرب: $z = 8\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = 8\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = 4\sqrt{2} - 4\sqrt{2}i$ $\rightarrow \bar{z} = 4\sqrt{2} + 4\sqrt{2}i$ $\rightarrow z\bar{z} = (4\sqrt{2} - 4\sqrt{2}i)(4\sqrt{2} + 4\sqrt{2}i) = 32 + 32 = 64$
16	$z_1 = 2\sqrt{3} - 2i \quad , \quad z_2 = \sqrt{5} - i\sqrt{15} \quad , \quad z_3 = 2 - 2i$ $\|z_1\| = \sqrt{12+4} = 4$ $\|z_2\| = \sqrt{5+15} = 2\sqrt{5}$ $\|z_3\| = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$ $Arg(z_1) = -\tan^{-1}\left(\frac{2}{2\sqrt{3}}\right) = -\tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{\pi}{6}$ $Arg(z_2) = -\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{5}}\right) = -\tan^{-1}(\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}$ $Arg(z_3) = -\tan^{-1}\left(\frac{2}{2}\right) = -\tan^{-1}(1) = -\frac{\pi}{4}$ $\left\|\frac{z_2}{z_1}\right\| = \frac{\|z_2\|}{\|z_1\|} = \frac{2\sqrt{5}}{4} = \frac{\sqrt{5}}{2}$ $Arg\left(\frac{z_2}{z_1}\right) = Arg(z_2) - Arg(z_1) = -\frac{\pi}{3} - \left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\pi}{6}$

17

$$\left|\frac{1}{z_3}\right| = \frac{|1|}{|z_3|} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$Arg\left(\frac{1}{z_3}\right) = Arg(1) - Arg(z_3) = 0 - (-\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{4}$$

18

$$\overline{z_2} = \sqrt{5} + i\sqrt{15} \;\rightarrow\; |\overline{z_2}| = |z_2| = 2\sqrt{5} \;\;, Arg(\overline{z_2}) = -Arg(z_2) = \frac{\pi}{3}$$

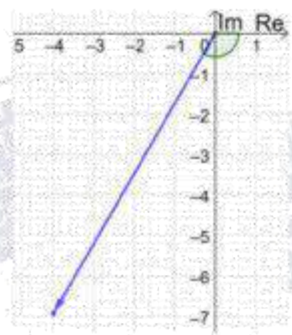
$$\left|\frac{z_3}{\overline{z_2}}\right| = \frac{|z_3|}{|\overline{z_2}|} = \frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$$

$$Arg\left(\frac{z_3}{\overline{z_2}}\right) = Arg(z_3) - Arg(\overline{z_2}) = -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3} = -\frac{7\pi}{12}$$

19

$$z = 8\left(\cos\frac{2\pi}{3} - i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = 8\left(\cos(\frac{-2\pi}{3}) + i\sin(\frac{-2\pi}{3})\right)$$

إذن مقياس z يساوي 8 وسعته $\frac{-2\pi}{3}$



20

$$z = 8\left(\cos\frac{2\pi}{3} - i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = 8\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -4 - 4\sqrt{3}i$$

$$\sqrt{-4 - 4\sqrt{3}i} = x + iy \;\rightarrow\; -4 - 4\sqrt{3}i = x^2 + 2ixy + i^2 y^2$$

$$\rightarrow -4 - 4\sqrt{3}i = x^2 - y^2 + 2ixy$$

$$\rightarrow -4 = x^2 - y^2 \quad \text{و} \quad -4\sqrt{3} = 2xy$$

$$y = -\frac{2\sqrt{3}}{x} \quad ، \quad x^2 - y^2 = -4 \;\rightarrow x^2 - \frac{12}{x^2} = -4 \;\rightarrow x^4 + 4x^2 - 12 = 0$$

$$\rightarrow (x^2+6)(x^2-2) = 0 \;\rightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

عندما $x = \sqrt{2}$ ، فإن $y = -\sqrt{6}$، وعندما $x = -\sqrt{2}$ ، فإن $y = \sqrt{6}$،

إذن الجذران التربيعيان للعدد المركب z هما: $-\sqrt{2} + i\sqrt{6} \;\;, \sqrt{2} - i\sqrt{6}$

21	$\sqrt{3-4i} = x+iy \rightarrow 3-4i = x^2+2ixy+i^2y^2$ $\rightarrow 3-4i = x^2-y^2+2ixy$ $\rightarrow 3 = x^2-y^2$ و $-4 = 2xy$ $y = -\frac{2}{x}$ $x^2-y^2=3 \rightarrow x^2-\frac{4}{x^2}=3 \rightarrow x^4-3x^2-4=0 \rightarrow (x^2+1)(x^2-4)=0$ $\rightarrow x = \pm 2$ عندما $x=2$ ، فإن $y=-1$، وعندما $x=-2$ ، فإن $y=1$ إذن الجذران التربيعيان للعدد المركب $3-4i$ هما: $2-i \quad , -2+i$
22	$\sqrt{-15+8i} = x+iy \rightarrow -15+8i = x^2+2ixy+i^2y^2$ $\rightarrow -15+8i = x^2-y^2+2ixy$ $\rightarrow -15 = x^2-y^2$ و $8 = 2xy$ $y = \frac{4}{x}$ $x^2-y^2=-15 \rightarrow x^2-\frac{16}{x^2}=-15 \rightarrow x^4+15x^2-16=0$ $\rightarrow (x^2+16)(x^2-1)=0 \rightarrow x=\pm 1$ عندما $x=1$ ، فإن $y=4$، وعندما $x=-1$ ، فإن $y=-4$ إذن الجذران التربيعيان للعدد المركب $-15+8i$ هما: $1+4i \quad , -1-4i$
23	$\sqrt{5-12i} = x+iy \rightarrow 5-12i = x^2+2ixy+i^2y^2$ $\rightarrow 5-12i = x^2-y^2+2ixy$ $\rightarrow 5 = x^2-y^2$ و $-12 = 2xy$ $y = -\frac{6}{x}$ $x^2-y^2=5 \rightarrow x^2-\frac{36}{x^2}=5 \rightarrow x^4-5x^2-36=0$ $\rightarrow (x^2+4)(x^2-9)=0 \rightarrow x=\pm 3$ عندما $x=3$ ، فإن $y=-2$، وعندما $x=-3$ ، فإن $y=2$ إذن الجذران التربيعيان للعدد المركب $5-12i$ هما: $3-2i \quad , -3+2i$

24	$\sqrt{-7-24i}=x+iy \rightarrow -7-24i=x^2+2ixy+i^2y^2$ $\rightarrow -7-24i=x^2-y^2+2ixy$ $\rightarrow -7=x^2-y^2$ و $-24=2xy$ $y=-\frac{12}{x}$ $x^2-y^2=-7 \rightarrow x^2-\frac{144}{x^2}=-7$ $\rightarrow x^4+7x^2-144=0$ $\rightarrow (x^2+16)(x^2-9)=0 \rightarrow x=\pm 3$ عندما $x=3$ ، فإن $y=-4$، وعندما $x=-3$ ، فإن $y=4$ إذن الجذران التربيعيان للعدد المركب $-7-24i$ هما: $-3+4i$, $3-4i$
25	بما أن $a-3i$ هو جذر للعدد المركب $55-48i$، إذن: $(a-3i)^2=55-48i \rightarrow a^2-6ia-9=55-48i$ $\rightarrow a^2-9=55, -6a=-48 \rightarrow a=8$ و بما أن $b+ic$ هو جذر للعدد المركب $55-48i$، إذن: $(b+ic)^2=55-48i \rightarrow b^2+2ibc-c^2=55-48i$ $\rightarrow b^2-c^2=55, 2bc=-48$ $\rightarrow c=-\frac{24}{b} \rightarrow b^2-\frac{576}{b^2}=55$ $\rightarrow b^4-55b^2-576=0$ $\rightarrow (b^2-64)(b^2+9)=0 \rightarrow b=\pm 8$ عندما $b=8$ ، فإن $c=-3$، وعندما $b=-8$ ، فإن $c=3$ جذرا هذا العدد المركب هما $8+3i$ و $-8-3i$ وبمقارنة هذين الجذرين مع الجذرين المعطيين $(a-3i, b+ic)$ نلاحظ أنّ: $a=8, b=-8, c=3$ الحل الأسهل هو: بما أن $a-3i$ جذر للعدد المركب $55-48i$ إذن $-a+3i$ هو أيضا جذر له، ومنه: بالمقارنة مع الجذرين $a-3i$ و $b+ic$ نجد أن: $b=-a$ و $c=3$ ومنه: $(a-3i)^2=55-48i \rightarrow a^2-6ia-9=55-48i$ $\rightarrow a^2-9=55, -6a=-48 \rightarrow a=8 \rightarrow b=-8$

منهاجي
متعة التعليم الهادف

26	$z = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right) = 2\left(\cos(\frac{-\pi}{4}) + i\sin(\frac{-\pi}{4})\right), w = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ $zw = 4\left(\cos\left(\frac{-\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right)\right) = 4\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$
27	$\frac{z}{w} = 1\left(\cos\left(\frac{-\pi}{4} - \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{4} - \frac{\pi}{3}\right)\right) = \cos(\frac{-7\pi}{12}) + i\sin(\frac{-7\pi}{12})$
28	$\frac{w}{z} = 1\left(\cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{-\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{-\pi}{4}\right)\right) = \cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}$
29	$1 = 1(\cos 0 + i\sin 0)$ $\frac{1}{z} = \frac{1}{2}\left(\cos\left(0 - \frac{-\pi}{4}\right) + i\sin\left(0 - \frac{-\pi}{4}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$
30	$w^2 = ww = 4\left(\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right)\right) = 4\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$
31	$5i = 5\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$ $5iz = 5\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) \times 2\left(\cos\left(\frac{-\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{4}\right)\right)$ $= 10\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{-\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{-\pi}{4}\right)\right)$ $= 10\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$
32	$z^2 + 104 = 20z \rightarrow z^2 - 20z + 104 = 0$ $z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{20 \pm \sqrt{400 - 416}}{2} = \frac{20 \pm \sqrt{-16}}{2}$ $z = \frac{20 \pm 4i}{2} = 10 \pm 2i$ إذن، لهذه المعادلة جذران هما: $10 + 2i$، و $10 - 2i$

منهاجي
متعة التعليم الهادف

33	$z^2+18z+202=0$ $z=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ $=\frac{-18\pm\sqrt{324-808}}{2}$ $=\frac{-18\pm\sqrt{-484}}{2}$ $=\frac{-18\pm 22i}{2}=-9\pm 11i$ إذن، لهذه المعادلة جذران هما: $-9+11i$، و $-9-11i$
34	$9z^2+68=0\rightarrow z^2=-\frac{68}{9}\rightarrow z=\pm\sqrt{-\frac{68}{9}}=\pm i\frac{\sqrt{68}}{3}$ إذن، لهذه المعادلة جذران هما: $i\frac{\sqrt{68}}{3}$، و $-i\frac{\sqrt{68}}{3}$
35	$3z^3-2z^2+2z+1=0$ الأصفار النسبية المحتملة هي: $\pm1,\pm\frac{1}{3}$ بالتعويض، نجد أن العدد $z=-\frac{1}{3}$ يحقق المعادلة لأن: $3\left(-\frac{1}{3}\right)^3-2\left(-\frac{1}{3}\right)^2+2\left(-\frac{1}{3}\right)+1=0$ $z=-\frac{1}{3}\rightarrow 3z=-1\rightarrow 3z+1=0$ إذن $(3z+1)$ هو أحد عوامل كثير الحدود، نجري عملية القسمة فنجد أن: $3z^3-2z^2+2z+1=(3z+1)(z^2-z+1)=0$ $\rightarrow z=-\frac{1}{3}\quad, z=\frac{1\pm\sqrt{1-4}}{2}=\frac{1\pm i\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$ إذن لهذه المعادلة 3 حلول (جذور) هي: $-\frac{1}{3},\ \frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$

منهاجي
متعة التعليم الهادف

36	$z^3+4z+10=5z^2 \rightarrow z^3-5z^2+4z+10=0$ الأصفار النسبية المحتملة هي: $\pm1, \pm2, \pm5, \pm10$ بالتعويض، نجد أن العدد $z=-1$ يحقق المعادلة لأن: $(-1)^3-5(-1)^2+4(-1)+10=0$ إذن $(z+1)$ هو أحد عوامل كثير الحدود، نجري عملية القسمة فنجد أن: $z^3-5z^2+4z+10=(z+1)(z^2-6z+10)=0$ $\rightarrow z=-1 \quad ,z=\frac{6\pm\sqrt{36-40}}{2}=\frac{6\pm2i}{2}=3\pm i$ إذن لهذه المعادلة 3 حلول (جذور) هي: $-1,\ 3+i,\ 3-i$
37	$2z^3=8z^2+13z-87 \rightarrow 2z^3-8z^2-13z+87=0$ الأصفار النسبية المحتملة هي: $\pm1, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}, \pm3, \pm29, \pm\frac{29}{2}, \frac{87}{2}, \pm87$ بالتعويض، نجد أن العدد $z=-3$ يحقق المعادلة لأن: $2(-3)^3-8(-3)^2-13(-3)+87=0$ إذن $(z+3)$ هو أحد عوامل كثير الحدود، نجري عملية القسمة فنجد أن: $2z^3-8z^2-13z+87=(z+3)(2z^2-14z+29)=0$ $\rightarrow z=-3 \quad ,z=\frac{14\pm\sqrt{196-232}}{4}$ $\rightarrow z=-3 \quad ,z=\frac{14\pm\sqrt{-36}}{4}=\frac{14\pm6i}{4}=\frac{7}{2}\pm\frac{3}{2}i$ إذن لهذه المعادلة 3 حلول (جذور) هي: $-3,\ \frac{7}{2}+\frac{3}{2}i,\ \frac{7}{2}-\frac{3}{2}i$
38	$x=2\pm5i$ $x-2=\pm5i$ $(x-2)^2=-25$ $x^2-4x+4=-25$ $x^2-4x+29=0$ طريقة أخرى للحل: نعلم أنه إذا كان h و k هما جذرا المعادلة التربيعية $x^2-bx+c=0$، فإن: $b=h+k$، و $c=hk$ مجموع الجذرين يساوي: 4، وناتج ضربهما يساوي: $4+25=29$ إذن، المعادلة هي: $x^2-4x+29=0$

منهاجي
متعة التعليم الهادف

39	$x = 7 \pm 4i$ $x - 7 = \pm 4i$ $(x-7)^2 = -16$ $x^2 - 14x + 49 = -16$ $x^2 - 14x + 65 = 0$	طريقة أخرى للحل: مجموع الجذرين يساوي: 14، وناتج ضربهما يساوي: $49 + 16 = 65$ إذن، المعادلة هي: $x^2 - 14x + 65 = 0$
40	$x = -8 \pm 20i$ $x + 8 = \pm 20i$ $(x+8)^2 = -400$ $x^2 + 16x + 64 = -400$ $x^2 + 16x + 464 = 0$	طريقة أخرى للحل: مجموع الجذرين يساوي: 16−، وناتج ضربهما يساوي: $64 + 400 = 464$ إذن، المعادلة هي: $x^2 + 16x + 464 = 0$
41	$x = -3 \pm 2i$ $x + 3 = \pm 2i$ $(x+3)^2 = -4$ $x^2 + 6x + 9 = -4$ $x^2 + 6x + 13 = 0$	طريقة أخرى للحل: مجموع الجذرين يساوي: 6−، وناتج ضربهما يساوي: $9 + 4 = 13$ إذن، المعادلة هي: $x^2 + 6x + 13 = 0$
42	$x^3 + x^2 + 15x = 225 \rightarrow x^3 + x^2 + 15x - 225 = 0$ بما أن 5 جذر لهذه المعادلة، إذن $(x-5)$ أحد عوامل كثير الحدود، بالقسمة عليه نحصل على: $x^3 + x^2 + 15x - 225 = (x-5)(x^2 + 6x + 45) = 0$ $x = 5, x = \frac{-6 \pm \sqrt{36-180}}{2} = \frac{-6 \pm \sqrt{-144}}{2} = \frac{-6 \pm 12i}{2} = -3 \pm 6i$ حلول هذه المعادلة هي: $x = 5, x = -3 + 6i, x = -3 - 6i$	
43	$x^3 + 7x^2 - 13x + 45 = 0$ بما أن 9- جذر لهذه المعادلة، إذن $(x+9)$ أحد عوامل كثير الحدود، بالقسمة عليه نحصل على: $x^3 + 7x^2 - 13x + 45 = (x+9)(x^2 - 2x + 5) = 0$ $x = -9, x = \frac{2 \pm \sqrt{4-20}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{2 \pm 4i}{2} = 1 \pm 2i$ حلول هذه المعادلة هي: $x = -9, x = 1 + 2i, x = 1 - 2i$	

44	$3x(x^2+45)=2(19x^2+37) \rightarrow 3x^3-38x^2-135x-74=0$ بما أن $(6-i)$ جذر لهذه المعادلة، إذن مرافقه $(6+i)$ هو أيضا جذر لهذه المعادلة، نكوّن المعادلة التربيعية التي جذراها $(6-i)$، $(6+i)$: $x=6\pm i$ $x-6=\pm i$ $(x-6)^2=-1$ $x^2-12x+36=-1$ $x^2-12x+37=0$ ثم نقسم كثير الحدود $3x^3-38x^2-135x-74$ على $x^2-12x+37$ فنجد أن: $3x^3-38x^2-135x-74=(x^2-12x+37)(3x-2)=0$ $\rightarrow x=\frac{2}{3}, x=6\pm i$ حلول هذه المعادلة هي: $x=\frac{2}{3}, x=6+i, x=6-i$
45	$x^3+10x^2+29x+30=0$ بما أن $(-2+i)$ جذر لهذه المعادلة، إذن مرافقه $(-2-i)$ هو أيضا جذر لهذه المعادلة، نكوّن المعادلة التربيعية التي جذراها $(-2+i)$، $(-2-i)$: $x=-2\pm i$ $x+2=\pm i$ $(x+2)^2=-1$ $x^2+4x+4=-1$ $x^2+4x+5=0$ ثم نقسم كثير الحدود $x^3+10x^2+29x+30$ على x^2+4x+5 فنجد أن: $x^3+10x^2+29x+30=(x^2+4x+5)(x+6)=0$ $\rightarrow x=-6, x=-2\pm i$ حلول هذه المعادلة هي: $x=-6, x=-2+i, x=-2-i$
46	الجذر الآخر هو مرافق الجذر الأول، أي $4-11i$

47	$k = (4 - 11i)(4 + 11i) = 16 - 121i^2 = 16 + 121 = 137$
48	$(p + iq)^2 = p^2 + 2ipq + i^2q^2 = p^2 + 2ipq - q^2$
49	$(p + iq)^2 = 45 + im = p^2 - q^2 + 2ipq$ $\rightarrow p^2 - q^2 = 45 \;,\; m = 2pq$ $\rightarrow p^2 - q^2 = 45 \;\rightarrow (p + q)(p - q) = 45$ بما أن p و q عددان صحيحان موجبان و $p > q$ فان $(p + q)$ و $(p - q)$ عددان صحيحان موجبان أيضا و $(p + q) > (p - q)$ ومنه يكفي تحليل العدد 45 إلى عاملين صحيحين موجبين أحدهما أكبر من الآخر، لدينا ثلاث حالات لتحليل 45 إلى عاملين صحيحين موجبين هي: الحالة الأولى: $45 = 45 \times 1$ فإن: $p + q = 45$ و $p - q = 1$ ومنه: $p = 23$ و $q = 22$ أي أنّ: $m = 2pq = 1012$ الحالة الثانية: $45 = 15 \times 3$ فإن: $p + q = 15$ و $p - q = 3$ ومنه: $p = 9$ و $q = 6$ أي أنّ: $m = 2pq = 108$ الحالة الثالثة: $45 = 9 \times 5$ فإنّ: $p + q = 9$ و $p - q = 5$ ومنه: $p = 7$ و $q = 2$ أي أنّ: $m = 2pq = 28$ قيم m المطلوبة هي: $28, 108, 1012$
50	المطلوب إيجاد الجذرين التربيعيين للعدد المركب $45 - 108i$ بما أن $m = 2pq = -108$ إذن العددان p و q مختلفان بالإشارة، من السؤال السابق نجد أن: $p = 9 \,, q = -6$ أو $p = -9 \,, q = 6$ الجذران المطلوبان هما: $-9 + 6i \;,\; 9 - 6i$
51	ليكن $z = x + iy$ ، إذن: $\bar{z} = x - iy$ $z\bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 - y^2i^2 = x^2 + y^2 = (\sqrt{x^2 + y^2}\,)^2 = \lvert z\rvert^2$

52	$\|z\| = 5\sqrt{5}$, $Arg(z) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$, $\frac{z}{3+4i} = p + iq$ ليكن $z = x + iy$ بما أن $Arg(z) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$, إذن يقع العدد المركب z في الربع الأول، ويكون $x = 2y$ $\rightarrow z = 2y + iy$ $\|z\| = 5\sqrt{5}$ $(2y)^2 + y^2 = 125 \rightarrow y^2 = 25 \rightarrow y = 5, x = 10$ إذن، $z = 10 + 5y$ $\frac{z}{3+4i} = \frac{10+5i}{3+4i} = \frac{10+5i}{3+4i} \times \frac{3-4i}{3-4i}$ $p + iq = \frac{30 - 40i + 15i + 20}{9+16} = \frac{50-25i}{25} = 2 - i$ إذن، $p = 2$, $q = -1$ ويكون، $p + q = 1$:

$z^3-20z^2+164z-400=0$

بما أن $(8+6i)$ جذر لهذه المعادلة، فإن مرافقه $(8-6i)$ هو أيضًا جذر لهذه المعادلة،
نكوّن المعادلة التربيعية التي جذراها $(8+6i)$، $(8-6i)$:

$(8+6i)+(8-6i)=16$

$(8+6i)\times(8-6i)=64+36=100$

$\rightarrow z^2-16z+100=0$

ثم نقسم كثير الحدود $z^3-20z^2+164z-400$ على $z^2-16z+100$ فنجد أنّ:

$z^3-20z^2+164z-400=(z^2-16z+100)(z-4)=0$

$\rightarrow z=4, z=8\pm 6i$

حلول هذه المعادلة هي: $z=4, z=8+6i, z=8-6i$

المعادلة الجديدة هي: $x^6-20x^4+164x^2-400=0$

إذا عوضنا $z=x^2$ ، تتحول هذه المعادلة إلى $z^3-20z^2+164z-400=0$

إذن، حلول المعادلة $x^6-20x^4+164x^2-400=0$ هي الجذور التربيعية لحلول المعادلة

$z^3-20z^2+164z-400=0$

إذن، حلول هذه المعادلة هي: $x=\pm 2$ ،$x=\pm\sqrt{8+6i}$ ،$x=\pm\sqrt{8-6i}$

53 نجد الجذرين التربيعيين للعدد $8+6i$

$\sqrt{8+6i}=h+ik \rightarrow 8+6i=h^2-k^2+2ihk$

$\rightarrow 8=h^2-k^2$ و $6=2hk$

$h=\frac{3}{k}$

$h^2-k^2=8 \rightarrow h^2-\frac{9}{k^2}=8$

$\rightarrow h^4-8h^2-9=0$

$\rightarrow (h^2+1)(h^2-9)=0 \rightarrow h=\pm 3 \rightarrow k=\pm 1$

إذن الجذران التربيعيان للعدد المركب $8+6i$ هما: $3+i$, $-3-i$

بالمثل نجد أنّ الجذرين التربيعيين للعدد المركب $8-6i$ هما: $-3+i$, $3-i$

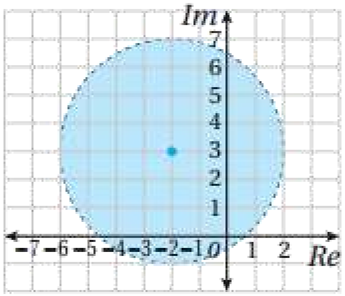
ويكون للمعادلة $x^6-20x^4+164x^2-400=0$ ستة حلول هي:

$x=2, x=-2, x=3+i, x=3-i, x=-3+i, x=-3-i$

منهاجي
متعة التعليم الهادف

الدرس الثالث: المحل الهندسي في المستوى المركب

مسألة اليوم أكتب متباينة بدلالة z، تُحقِّقها جميع الأعداد المُركَّبة التي تقع في المنطقة المُظلَّلة المُبيَّنة في المستوى المُركَّب في الشكل المجاور.



مسألة اليوم صفحة 168

المنطقة المظللة تمثل الأعداد المركبة التي تبعد عن العدد $2+3i$ مسافة تقل عن 4 وحدات، فتكون المتباينة المطلوبة هي:

$$|z-(2+3i)|<4$$

أتحقق من فهمي صفحة 169

$$|z+5-4i|=7 \rightarrow |z-(-5+4i)|=7$$

وهذه معادلة دائرة في المستوى المركب مركزها $(-5,4)$ وطول نصف قطرها 7

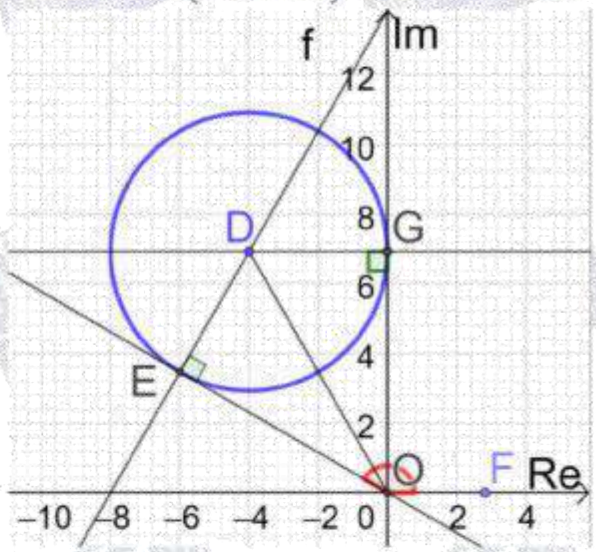
$$|z+5-4i|=7 \rightarrow |x+iy+5-4i|=7$$

$$\rightarrow |(x+5)+(y-4)i|=7$$

$$\rightarrow \sqrt{(x+5)^2+(y-4)^2}=7$$

$$\rightarrow (x+5)^2+(y-4)^2=49$$

وهذه معادلة دائرة مركزها $(-5,4)$ وطول نصف قطرها 7

	أتحقق من فهمي صفحة 171
a	$\lvert z+4-4\sqrt{3}i\rvert = 4 \;\; \rightarrow \lvert z-(-4+4\sqrt{3}i)\rvert = 4$ وهذه معادلة دائرة في المستوى المركب مركزها $(-4, 4\sqrt{3})$ وطول نصف قطرها 4 
b	أكبر سعة للعدد المركب z تساوي قياس الزاوية $\angle FOE$ المحصورة بين مماس الدائرة OE والمحور الحقيقي الموجب مماسا الدائرة OG وOE عموديان على الترتيب على نصفي القطرين DG وDE، المثلثان OGD وOED متطابقان بثلاثة أضلاع، إذن الزاويتان $\angle GOD$ و $\angle EOD$ متطابقتان $\tan\angle GOD = \frac{4}{4\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \;\; \rightarrow \angle GOD = \frac{\pi}{6}$ $Arg(z) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$ القيمة العظمى لسعة الأعداد المركبة z التي تحقق المعادلة المعطاة هي $\frac{5\pi}{6}$

منهاجي
متعة التعليم الهادف

أتحقق من فهمي صفحة 172

$|z+1| = |z-5i| \rightarrow |z-(-1)| = |z-(5i)|$

هذه هي معادلة المنصف العمودي للقطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين $(-1,0), (0,5)$

$|z+1| = |z-5i| \rightarrow |x+iy+1| = |x+iy-5i|$

$\rightarrow |(x+1)+iy| = |x+i(y-5)|$

$\rightarrow \sqrt{(x+1)^2+y^2} = \sqrt{x^2+(y-5)^2}$

$\rightarrow (x+1)^2+y^2 = x^2+(y-5)^2$

$\rightarrow x^2+2x+1+y^2 = x^2+y^2-10y+25$

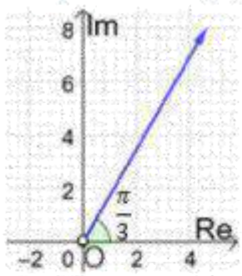
$\rightarrow 2x+10y-24=0$

إذن معادلة المنصف العمودي للقطعة المستقيمة بالصيغة الديكارتية هي: $x+5y-12=0$

أتحقق من فهمي صفحة 174

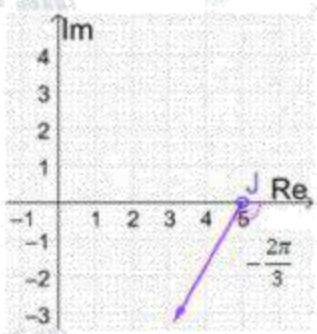
a $Arg(z) = \frac{\pi}{3} \rightarrow Arg(z-(0)) = \frac{\pi}{3}$

هذه معادلة شعاع يبدأ بالنقطة $(0,0)$ ولا يشملها، ويصنع زاوية قياسها $\frac{\pi}{3}$ مع المحور الحقيقي

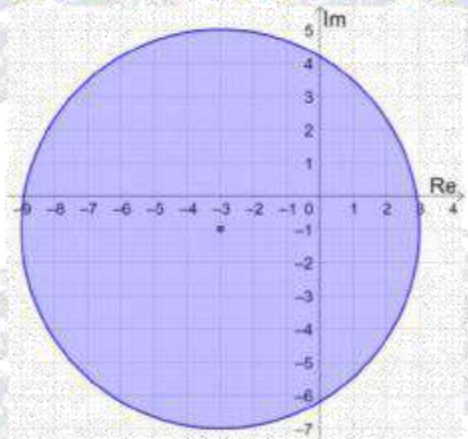
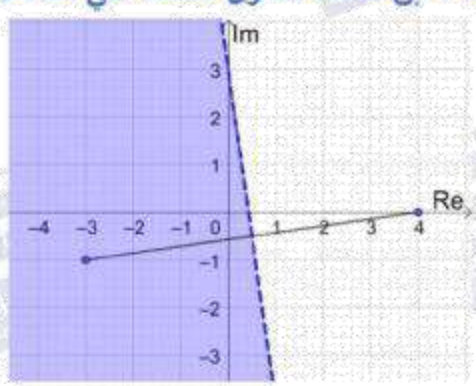


b $Arg(z-5) = -\frac{2\pi}{3} \rightarrow Arg(z-(5)) = -\frac{2\pi}{3}$

هذه معادلة شعاع يبدأ بالنقطة $(5,0)$ ولا يشملها، ويصنع زاوية قياسها $-\frac{2\pi}{3}$ مع المحور الحقيقي



أتحقق من فهمي صفحة 177

a	$\|z+3+i\| \leq 6$ المنحنى الحدودي لهذه المتباينة معادلته $\|z+3+i\| = 6$ وهو دائرة مركزها $(-3,-1)$، وطول نصف قطرها 6 وحدات. وبما أنه توجد مساواة في رمز المتباينة، فإننا نرسم المنحنى الحدودي متصلاً. أما منطقة المحل الهندسي فهي داخل الدائرة وعلى محيطها وليس خارجها، لأن الأعداد المركبة التي تحقق المتباينة تبعد مسافة تقل عن 6 وحدات عن مركز الدائرة أو تساويها. 
b	$\|z+3+i\| < \|z-4\|$ المنحنى الحدودي لهذه المتباينة معادلته $\|z+3+i\| = \|z-4\|$ وهو المنصف العمودي للقطعة المستقيمة الواصلة بين $(-3,-1)$و $(4,0)$. وبما أنه لا توجد مساواة في رمز المتباينة، فإننا نرسم المنحنى الحدودي متقطعاً. نحدد جهة المنحنى الحدودي التي تحقق المتباينة باختيار نقطة الأصل مثلا وتعويضها في المتباينة. $\|0+3+i\| < \|0-4\| \to \sqrt{10} < 4$ ✓ بما أن نقطة الأصل تحقق المتباينة، فإن منطقة الحلول الممكنة هي المنطقة التي تحوي نقطة الأصل. 

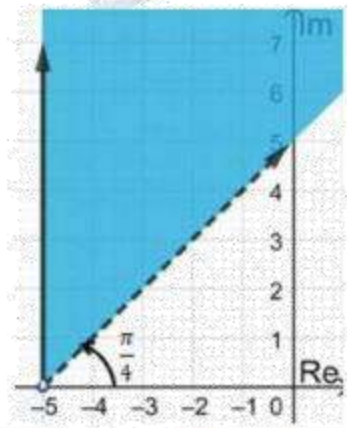
c

$\frac{\pi}{4} < \mathrm{Arg}(z+5) \le \frac{\pi}{2}$

يمثل منحنى المعادلة $\mathrm{Arg}(z+5) = \frac{\pi}{2}$ شعاعا (نرسمه متصلا بسبب وجود مساواة في المتباينة) يبدأ من النقطة $(-5,0)$ ولا يشملها، ويصنع زاوية قياسها $\frac{\pi}{2}$ مع المحور الحقيقي.

و يمثل منحنى المعادلة $\mathrm{Arg}(z+5) = \frac{\pi}{4}$ شعاعا (نرسمه متقطعا بسبب عدم وجود مساواة في المتباينة) يبدأ من النقطة $(-5,0)$ ولا يشملها، ويصنع زاوية قياسها $\frac{\pi}{4}$ مع المحور الحقيقي.

المحل الهندسي للنقاط التي تحقق المتباينة المطلوبة هو الجزء المظلل من المستوى المركب كالآتي:



أتحقق من فهمي صفحة 178

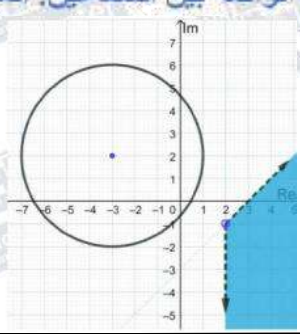
$|z+3-2i| \ge 4 \quad , \quad -\frac{\pi}{2} < \mathrm{Arg}(z-2+i) < \frac{\pi}{4}$

تمثل المعادلة $|z+3-2i| = 4$ دائرة مركزها النقطة $(-3,2)$ وطول نصف قطرها 4 وحدات، وبما أنه توجد مساواة في رمز المتباينة فإننا نرسم المنحنى الحدودي متصلا.

تمثل المعادلة $\mathrm{Arg}(z-2+i) = \frac{\pi}{4}$ شعاعا يبدأ بالنقطة $(2,-1)$ ويصنع زاوية قياسها $\frac{\pi}{4}$ مع مستقيم يوازي المحور الحقيقي، وبما أنه لا توجد مساواة في رمز المتباينة، فإننا نرسم الشعاع متقطعا.

تمثل المعادلة $\mathrm{Arg}(z-2+i) > -\frac{\pi}{2}$ شعاعا يبدأ بالنقطة $(2,-1)$ ويصنع زاوية قياسها $\frac{\pi}{2}$ مع مستقيم يوازي المحور الحقيقي، وبما أنه لا توجد مساواة في رمز المتباينة، فإننا نرسم الشعاع متقطعا.

تمثل المتباينة $|z+3-2i| \ge 4$ النقاط الواقعة على الدائرة أو خارجها، وتمثل المتباينة $-\frac{\pi}{2} < \mathrm{Arg}(z-2+i) < \frac{\pi}{4}$ النقاط الواقعة بين الشعاعين. المنطقة التي تحقق المتباينتين هي الجزء المظلل في الرسم أدناه.

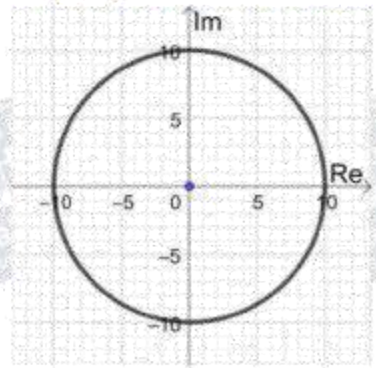


أتدرب وأحل المسائل صفحة 178

1

$|z| = 10 \quad \rightarrow |x + iy| = 10 \quad \rightarrow x^2 + y^2 = 100$

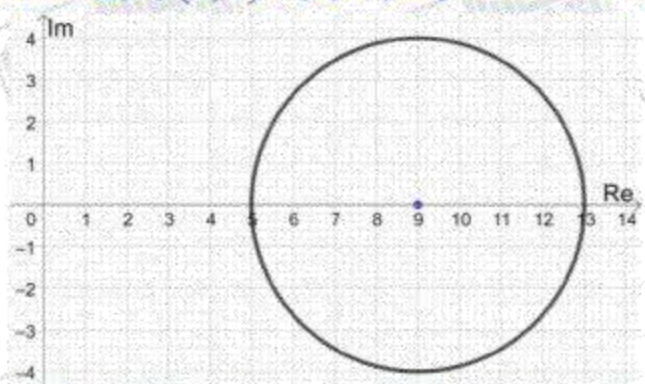
المحل الهندسي الذي تمثله هذه المعادلة هو دائرة مركزها $(0, 0)$ وطول نصف قطرها 10 وحدات



2

$|z - 9| = 4 \quad \rightarrow |(x - 9) + iy| = 16 \quad \rightarrow (x - 9)^2 + y^2 = 16$

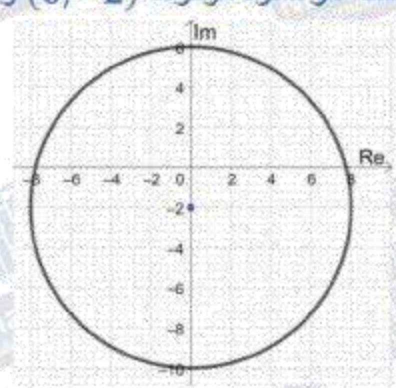
المحل الهندسي الذي تمثله هذه المعادلة هو دائرة مركزها $(9, 0)$ وطول نصف قطرها 4 وحدات



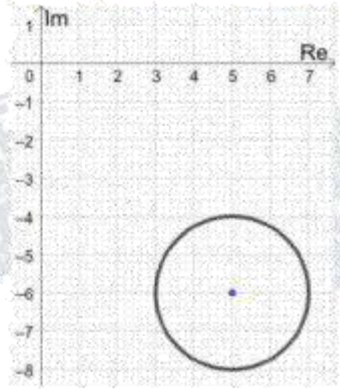
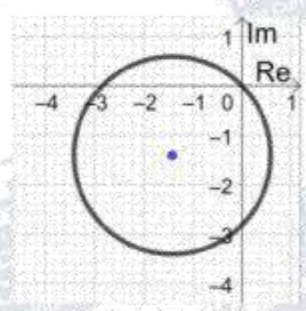
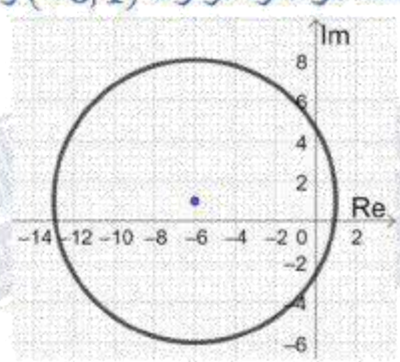
3

$|z + 2i| = 8 \quad \rightarrow |x + i(y + 2)| = 8 \quad \rightarrow x^2 + (y + 2)^2 = 64$

المحل الهندسي الذي تمثله هذه المعادلة هو دائرة مركزها $(0, -2)$ وطول نصف قطرها 8 وحدات



منهاجي
متعة التعليم الهادف

4	$\lvert z-5+6i\rvert=2 \rightarrow \lvert(x-5)+i(y+6)\rvert=2 \rightarrow (x-5)^2+(y+6)^2=4$ المحل الهندسي الذي تمثله هذه المعادلة هو دائرة مركزها $(5,-6)$ وطول نصف قطرها وحدتان 
5	$\lvert z+\sqrt{2}+i\sqrt{2}\rvert=2 \rightarrow \lvert(x+\sqrt{2})+i(y+\sqrt{2})\rvert=2$ $\rightarrow (x+\sqrt{2})^2+(y+\sqrt{2})^2=4$ المحل الهندسي الذي تمثله هذه المعادلة هو دائرة مركزها $(-\sqrt{2},-\sqrt{2})$ وطول نصف قطرها وحدتان 
6	$\lvert z+6-i\rvert=7 \rightarrow \lvert(x+6)+i(y-1)\rvert=7 \rightarrow (x+6)^2+(y-1)^2=49$ المحل الهندسي الذي تمثله هذه المعادلة هو دائرة مركزها $(-6,1)$ وطول نصف قطرها 7 وحدات 

7

$|z-5| = |z-3i| \to |z-(5)| = |z-(3i)|$

هذه هي معادلة المنصف العمودي للقطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين $(5,0), (0,3)$

$|z-5| = |z-3i| \to |(x-5)+iy| = |x+i(y-3)|$

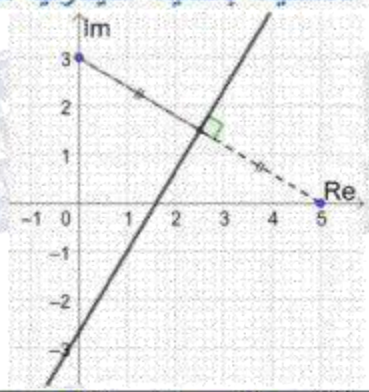
$$\to \sqrt{(x-5)^2+y^2} = \sqrt{x^2+(y-3)^2}$$

$$\to (x-5)^2+y^2 = x^2+(y-3)^2$$

$$\to x^2-10x+25+y^2 = x^2+y^2-6y+9$$

$$\to 10x-6y-16=0$$

إذن معادلة المنصف العمودي للقطعة المستقيمة بالصيغة الديكارتية هي: $5x-3y-8=0$



8

$|z+3i| = |z-7i| \to |z-(-3i)| = |z-(7i)|$

هذه هي معادلة المنصف العمودي للقطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين $(0,-3), (0,7)$

$|z+3i| = |z-7i| \to |x+i(y+3)| = |x+i(y-7)|$

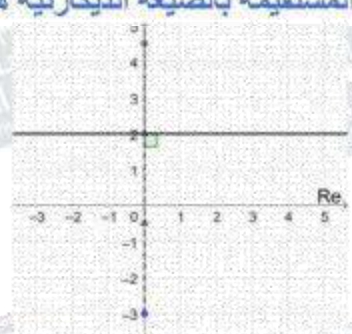
$$\to \sqrt{x^2+(y+3)^2} = \sqrt{x^2+(y-7)^2}$$

$$\to x^2+(y+3)^2 = x^2+(y-7)^2$$

$$\to x^2+y^2+6y+9 = x^2+y^2-14y+49$$

$$\to 20y-40=0$$

إذن معادلة المنصف العمودي للقطعة المستقيمة بالصيغة الديكارتية هي: $y=2$



9

$|z+5+2i| = |z-7| \rightarrow |z-(-5-2i)| = |z-(7)|$

هذه هي معادلة المنصف العمودي للقطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين $(-5,-2),(7,0)$

$|z+5+2i| = |z-7| \rightarrow |(x+5)+i(y+2)| = |(x-7)+iy|$

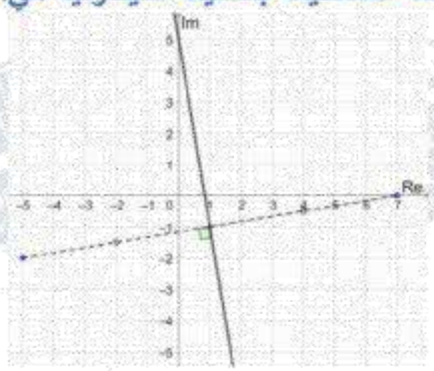
$$\rightarrow \sqrt{(x+5)^2+(y+2)^2} = \sqrt{(x-7)^2+y^2}$$

$$\rightarrow (x+5)^2+(y+2)^2 = (x-7)^2+y^2$$

$$\rightarrow x^2+10x+25+y^2+4y+4 = x^2-14x+49+y^2$$

$$\rightarrow 24x+4y-20=0$$

إذن معادلة المنصف العمودي للقطعة المستقيمة بالصيغة الديكارتية هي: $6x+y-5=0$



10

$|z-3| = |z-2-i| \rightarrow |z-(3)| = |z-(2+i)|$

هذه هي معادلة المنصف العمودي للقطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين $(3,0),(2,1)$

$|z-3| = |z-2-i| \rightarrow |(x-3)+iy| = |(x-2)+i(y-1)|$

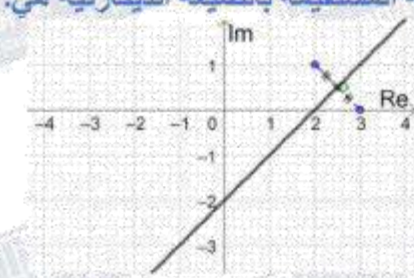
$$\rightarrow \sqrt{(x-3)^2+y^2} = \sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2}$$

$$\rightarrow (x-3)^2+y^2 = (x-2)^2+(y-1)^2$$

$$\rightarrow x^2-6x+9+y^2 = x^2-4x+4+y^2-2y+1$$

$$\rightarrow 2x-2y-4=0$$

إذن معادلة المنصف العمودي للقطعة المستقيمة بالصيغة الديكارتية هي: $x-y-2=0$



$\dfrac{|z+6-i|}{|z-10-5i|}=1 \quad \rightarrow |z+6-i| = |z-10-5i|$

$\rightarrow |z-(-6+i)| = |z-(10+5i)|$

هذه هي معادلة المنصف العمودي للقطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين $(-6,1), (10,5)$

$|z+6-i| = |z-10-5i| \ \rightarrow |(x+6)-i(y-1)| = |(x-10)+i(y-5)|$

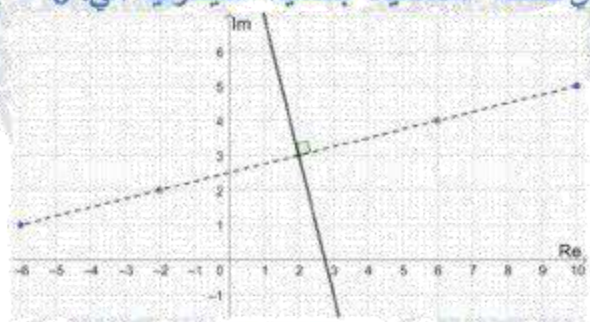
$\rightarrow \sqrt{(x+6)^2+(y-1)^2} = \sqrt{(x-10)^2+(y-5)^2}$

$\rightarrow (x+6)^2+(y-1)^2 = (x-10)^2+(y-5)^2$

11 $\rightarrow x^2+12x+36+y^2-2y+1 = x^2-20x+100+y^2-10y+25$

$\rightarrow 32x+8y-88=0$

إذن معادلة المنصف العمودي للقطعة المستقيمة بالصيغة الديكارتية هي: $4x+y-11=0$



$|z+7+2i| = |z-4-3i| \ \rightarrow |z-(-7-2i)| = |z-(4+3i)|$

هذه هي معادلة المنصف العمودي للقطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين $(-7,-2), (4,3)$

$|z+7+2i| = |z-4-3i| \ \rightarrow |(x+7)+i(y+2)| = |(x-4)+i(y-3)|$

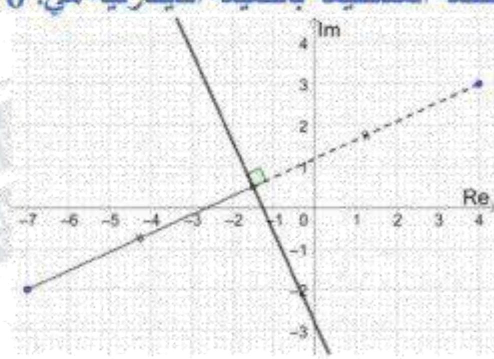
$\rightarrow \sqrt{(x+7)^2+(y+2)^2} = \sqrt{(x-4)^2+(y-3)^2}$

$\rightarrow (x+7)^2+(y+2)^2 = (x-4)^2+(y-3)^2$

$\rightarrow x^2+14x+49+y^2+4y+4 = x^2-8x+16+y^2-6y+9$

12 $\rightarrow 22x+10y+28=0$

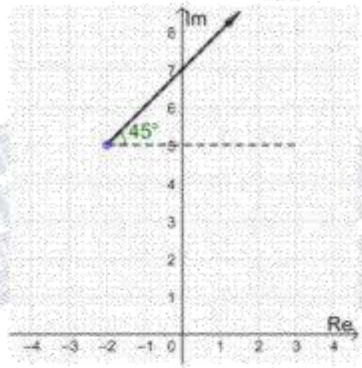
إذن معادلة المنصف العمودي للقطعة المستقيمة بالصيغة الديكارتية هي: $11x+5y+14=0$



13

$$\text{Arg}(z+2-5i)=\frac{\pi}{4}\ \rightarrow \text{Arg}(z-(2+5i))=\frac{\pi}{4}$$

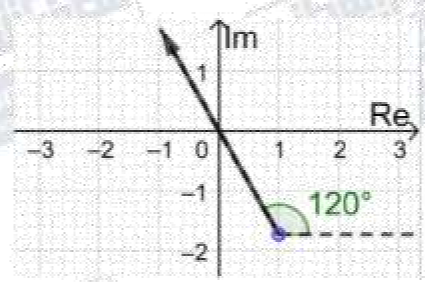
المحل الهندسي لهذه المعادلة هو شعاع ينطلق من النقطة $(-2,5)$ ولا يشملها، ويصنع زاوية قياسها $\frac{\pi}{4}$ مع مستقيم يوازي المحور الحقيقي.



14

$$\text{Arg}(z-1+i\sqrt{3})=\frac{2\pi}{3}\ \rightarrow \text{Arg}\left(z-(1-i\sqrt{3})\right)=\frac{2\pi}{3}$$

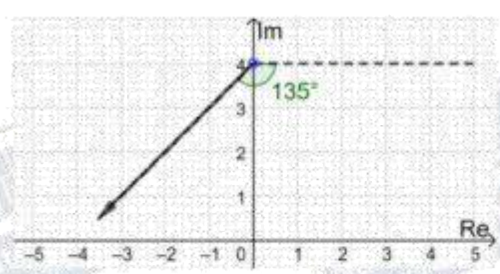
المحل الهندسي لهذه المعادلة هو شعاع ينطلق من النقطة $(1,-\sqrt{3})$ ولا يشملها، ويصنع زاوية قياسها $\frac{2\pi}{3}$ مع مستقيم يوازي المحور الحقيقي.

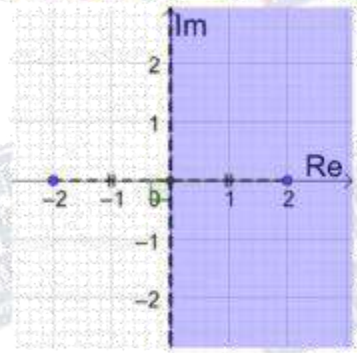
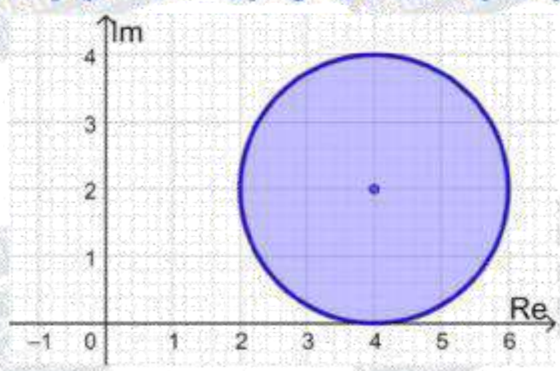


15

$$\text{Arg}(z-4i)=-\frac{3\pi}{4}\ \rightarrow \text{Arg}(z-(4i))=-\frac{3\pi}{4}$$

المحل الهندسي لهذه المعادلة هو شعاع ينطلق من النقطة $(0,4)$ ولا يشملها، ويصنع زاوية قياسها $-\frac{3\pi}{4}$ مع مستقيم يوازي المحور الحقيقي.



16	$\|z-2\|<\|z+2\|$ المنحنى الحدودي لهذه المتباينة معادلته $\|z-2\|=\|z+2\|$ وهو المنصف العمودي للقطعة المستقيمة الواصلة بين $(-2,0)$و $(2,0)$. وبما أنه لا توجد مساواة في رمز المتباينة، فإننا نرسم المنحنى الحدودي متقطعا. نحدد جهة المنحنى الحدودي التي تحقق المتباينة باختيار $z=1+i$ مثلا وتعويضه في المتباينة، $\|1+i-2\|<\|1+i+2\|\rightarrow\|-1+i\|<\|3+i\|\rightarrow\sqrt{2}<\sqrt{10}$ ✓ بما أن $z=1+i$ حقق المتباينة، فإن منطقة الحلول الممكنة هي المنطقة التي تحوي $z=1+i$ (أي نختار الجهة التي يكون فيها بعد النقاط عن النقطة $(2,0)$ أقل من بعدها عن النقطة $(-2,0)$) 
17	$\|z-4-2i\|\leq 2\ \rightarrow\|z-(4+2i)\|\leq 2$ المنحنى الحدودي لهذه المتباينة معادلته $\|z-4-2i\|=2$ ، وهو دائرة مركزها $(4,2)$ وطول نصف قطرها وحدتان. وبما أنه توجد مساواة في رمز المتباينة، فإننا نرسم المنحنى الحدودي متصلا. أما منطقة المحل الهندسي فهي داخل الدائرة وعلى محيطها وليس خارجها، لأن الأعداد المركبة التي تحقق المتباينة تبعد عن مركز الدائرة مسافة تقل عن طول نصف القطر أو تساويها. 

منهاجي
متعة التعليم الهادف

18

$|z-4| > |z-6|$

المنحنى الحدودي لهذه المتباينة معادلته $|z-4| = |z-6|$

وهو المنصف العمودي للقطعة المستقيمة الواصلة بين $(6,0)$ و $(4,0)$.

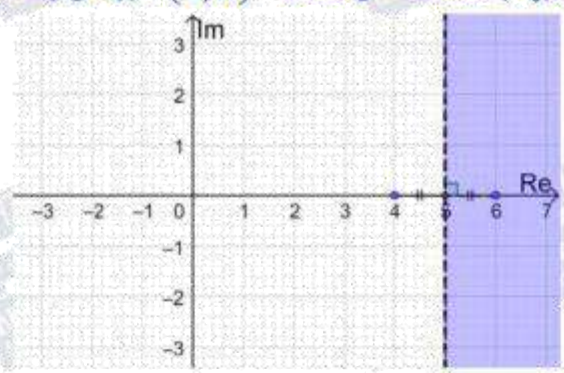
وبما أنه لا توجد مساواة في رمز المتباينة، فإننا نرسم المنحنى الحدودي متقطعا.

نحدد جهة المنحنى الحدودي التي تحقق المتباينة باختيار $z = 0$ مثلا وتعويضه في المتباينة.

$|0-4| > |0-6| \to 2 > \sqrt{6}$ ✗

بما أن العدد لا يحقق المتباينة، فإن منطقة الحلول الممكنة هي المنطقة التي لا تحوي $z = 0$.

(أي نختار الجهة التي يكون فيها بعد النقاط عن النقطة $(4,0)$ أكبر من بعدها عن النقطة $(6,0)$)

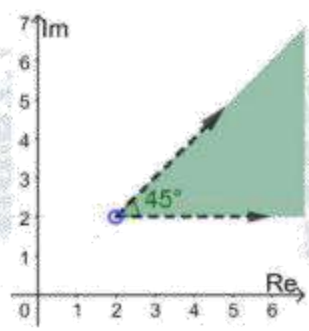


19

$0 < \operatorname{Arg}(z-2-2i) < \frac{\pi}{4}$

يمثل منحنى المعادلة $\operatorname{Arg}(z-2-2i) = \frac{\pi}{4}$ شعاعا (نرسمه متقطعا بسبب عدم وجود مساواة في المتباينة) يبدأ من النقطة $(2,2)$ ولا يشملها، ويصنع زاوية قياسها $\frac{\pi}{4}$ مع مستقيم يوازي المحور الحقيقي. ويمثل منحنى المعادلة $\operatorname{Arg}(z-2-2i) = 0$ شعاعا (نرسمه متقطعا بسبب عدم وجود مساواة في المتباينة) يبدأ من النقطة $(2,2)$ ولا يشملها، ويوازي المحور الحقيقي.

المحل الهندسي للنقاط التي تحقق المتباينة المطلوبة هو الجزء من المستوى المركب المحصور بين هذين الشعاعين.



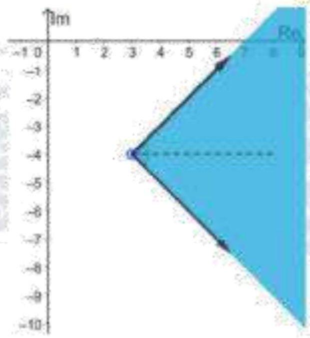
20

$$-\frac{\pi}{4} \leq \operatorname{Arg}(z-3+4i) \leq \frac{\pi}{4}$$

يمثل منحنى المعادلة $\operatorname{Arg}(z-3+4i)=\frac{\pi}{4}$ شعاعا (نرسمه متصلا بسبب وجود مساواة في المتباينة) يبدأ من النقطة $(3,-4)$ ولا يشملها، ويصنع زاوية قياسها $\frac{\pi}{4}$ مع مستقيم مواز للمحور الحقيقي.

و يمثل منحنى المعادلة $\operatorname{Arg}(z-3+4i)=-\frac{\pi}{4}$ شعاعا (نرسمه متصلا بسبب وجود مساواة في المتباينة) يبدأ من النقطة $(3,-4)$ ولا يشملها، ويصنع زاوية قياسها $-\frac{\pi}{4}$ مع مستقيم مواز للمحور الحقيقي.

المحل الهندسي للنقاط التي تحقق المتباينة المطلوبة هو الجزء من المستوى المركب كما في الشكل:



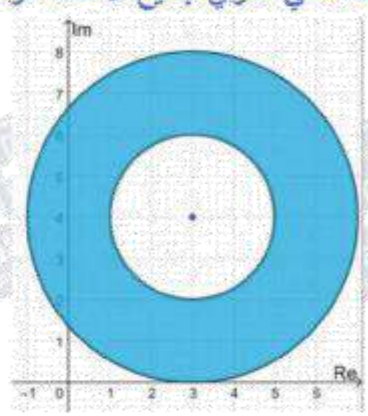
21

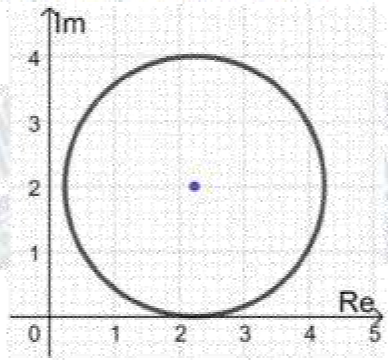
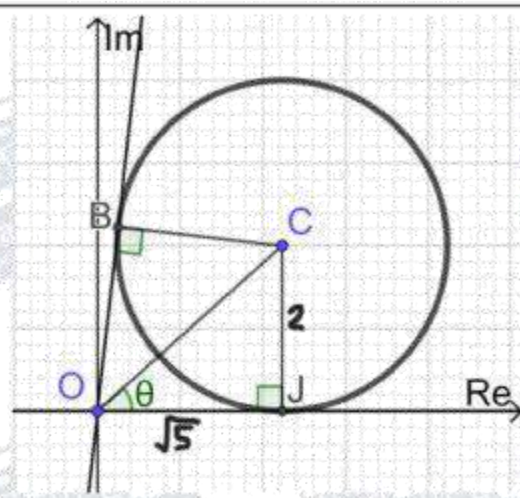
$$2 \leq |z-3-4i| \leq 4 \;\rightarrow 2 \leq |z-(3+4i)| \leq 4$$

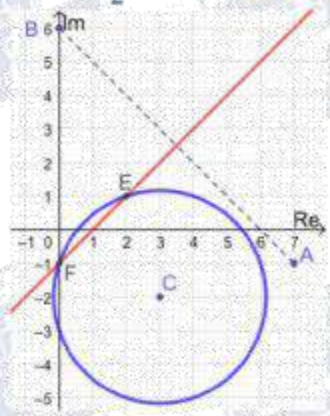
يمثل منحنى المعادلة $|z-(3+4i)| = 2$ دائرة مركزها $(3,4)$ وطول نصف قطرها وحدتان، وبما أنه توجد مساواة في رمز المتباينة، فإننا نرسم المنحنى الحدودي متصلا.

ويمثل منحنى المعادلة $|z-(3+4i)| = 4$ دائرة مركزها $(3,4)$ وطول نصف قطرها 4 وبما أنه توجد مساواة في رمز المتباينة، فإننا نرسم المنحنى الحدودي متصلا.

أما منطقة المحل الهندسي فهي المنطقة التي تحوي جميع الأعداد الواقعة على الدائرتين أو بينهما.



22	$\left\lvert z-\sqrt{5}-2i\right\rvert = 2 \quad \rightarrow \left\lvert z-\left(\sqrt{5}+2i\right)\right\rvert = 2$ المحل الهندسي الذي تمثله هذه المعادلة هو دائرة مركزها $\left(\sqrt{5},2\right)$ وطول نصف قطرها وحدتان 
23	 أكبر سعة للعدد المركب z تساوي قياس الزاوية $\angle JOB$ المحصورة بين مماس الدائرة OB والمحور الحقيقي الموجب مماسا الدائرة OJ وOB عموديان على الترتيب على نصفي القطرين CJ وCB، المثلثان OJC وOBC متطابقان بثلاثة أضلاع، إذن الزاويتان $\angle JOC$ و $\angle BOC$ متطابقتان $\tan\angle\theta = \frac{2}{\sqrt{5}} \quad \rightarrow \theta = \tan^{-1}\frac{2}{\sqrt{5}} \rightarrow \angle JOB = 2\times\tan^{-1}\frac{2}{\sqrt{5}} \approx 1.46$ القيمة العظمى لسعة الأعداد المركبة z التي تحقق المعادلة المعطاة هي 1.46

24	المحل الهندسي الذي تمثله المعادلة $\lvert z-3+2i\rvert=\sqrt{10}$ هو دائرة مركزها $(3,-2)$ وطول نصف قطرها $\sqrt{10}$ وحدات، ومعادلتها الديكارتية هي: $(x-3)^2+(y+2)^2=10$ المحل الهندسي الذي تمثله المعادلة $\lvert z-7+i\rvert=\lvert z-6i\rvert$ هو المنصف العمودي للقطعة المستقيمة التي طرفاها $(0,6)$ و $(7,-1)$ ، نستطيع إيجاد معادلته الديكارتية عن طريق ميل العمودي ونقطة منتصف القطعة المستقيمة: $m=1\rightarrow y-\frac{5}{2}=x-\frac{7}{2}\Rightarrow y=x-1$  لإيجاد الأعداد المركبة التي تحقق المعادلتين معا، نجد نقاط تقاطع المنحنيين: بالتعويض: $(x-3)^2+(y+2)^2=10$ و $y=x-1$ $(x-3)^2+(y+2)^2=10\ \rightarrow(x-3)^2+(x-1+2)^2=10$ $\rightarrow 2x^2-4x=0\ \rightarrow 2x(x-2)=0$ $\rightarrow x=0\,,x=2\ \rightarrow y=-1\ or\ y=1$ العددان المركبان اللذان يحققان المعادلتين معا هما: $z_1=-i, z_2=2+i$
25	$\lvert z-3\rvert=\lvert z+2i\rvert\ \rightarrow\ \lvert(x-3)+iy\rvert=\lvert x+i(y+2)\rvert$ $\rightarrow(x-3)^2+y^2=x^2+(y+2)^2$ $\rightarrow -6x+9=4y+4$ $\rightarrow 6x+4y=5\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (1)$ $\lvert z+3-i\rvert=\lvert z-1+5i\rvert\rightarrow\lvert(x+3)+i(y-1)\rvert=\lvert(x-1)+i(y+5)\rvert$ $\rightarrow(x+3)^2+(y-1)^2=(x-1)^2+(y+5)^2$ $\rightarrow x^2+6x+9+y^2-2y+1=x^2-2x+1+y^2+10y+25$ $\rightarrow 8x-12y-16=0$ $\rightarrow 2x-3y=4\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (2)$ بحل المعادلتين (1) و (2) نجد: $y=-\frac{7}{13}$ و $x=\frac{31}{26}$ ويكون العدد المركب الذي يحقق كلا من المعادلتين هو: $z=\frac{31}{26}-\frac{7}{13}i$

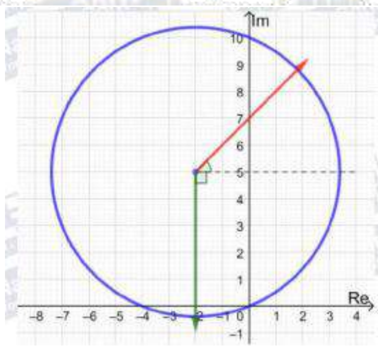
منهاجي
متعة التعليم الهادف

26

يمثل منحنى المعادلة $\text{Arg}(z+2-5i)=\frac{\pi}{4}$ شعاعا يبدأ من النقطة $(-2,5)$ ولا يشملها، ويصنع زاوية قياسها $\frac{\pi}{4}$ مع مستقيم يوازي المحور الحقيقي

و يمثل منحنى المعادلة $\text{Arg}(z+2-5i)=-\frac{\pi}{2}$ شعاعا يبدأ من النقطة $(-2,5)$ ولا يشملها، ويصنع زاوية قياسها $-\frac{\pi}{4}$ مع مستقيم يوازي المحور الحقيقي

و يمثل منحنى المعادلة $|z+2-5i|=\sqrt{29}$ دائرة مركزها $(-2,5)$ وطول نصف قطرها $\sqrt{29}$



27

1) $|z-3|>|z+2i|$

المنحنى الحدودي لهذه المتباينة معادلته $|z-3|=|z+2i|$

وهو المنصف العمودي للقطعة المستقيمة التي طرفاها $(0,-2)$ و $(3,0)$.

وبما أنه لا توجد مساواة في رمز المتباينة، فإننا نرسم المنحنى الحدودي متقطعا.

نحدد جهة المنحنى الحدودي التي تحقق المتباينة باختيار $z=0$ مثلاً وتعويضه في المتباينة،

$|0-3|>|0+2i|\to 3>2$ ✓

بما أن العدد0 يحقق المتباينة، فإن منطقة الحلول الممكنة هي المنطقة التي تحوي $z=0$ (نقطة الأصل)

2) $|z+3-i|<|z-1+5i|$

المنحنى الحدودي لهذه المتباينة معادلته $|z+3-i|=|z-1+5i|$

وهو المنصف العمودي للقطعة المستقيمة التي طرفاها $(1,-5)$ و $(-3,1)$.

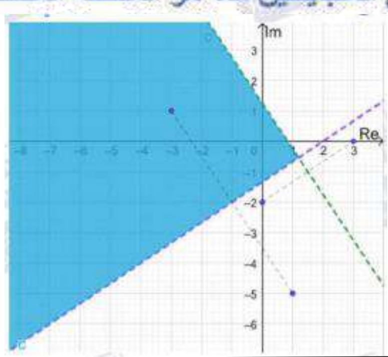
وبما أنه لا توجد مساواة في رمز المتباينة، فإننا نرسم المنحنى الحدودي متقطعا.

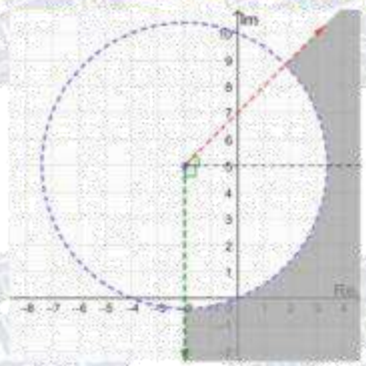
نحدد جهة المنحنى الحدودي التي تحقق المتباينة باختيار $z=0$ مثلاً وتعويضه في المتباينة،

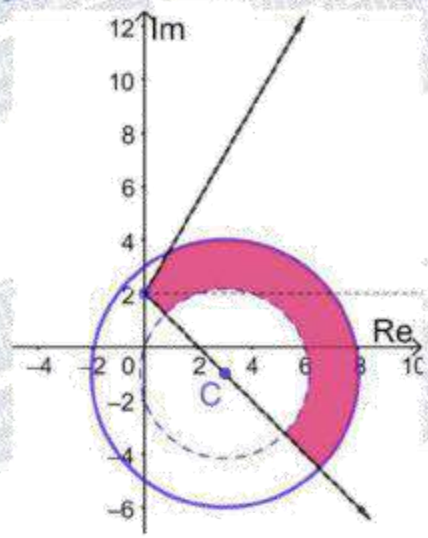
$|0+3-i|<|0-1+5i|\to\sqrt{10}<\sqrt{26}$ ✓

بما أن العدد0 يحقق المتباينة، فإن منطقة الحلول الممكنة هي المنطقة التي تحوي $z=0$ (نقطة الأصل)

المحل الهندسي للنقاط التي تحقق المتباينتين معا هو المنطقة المظللة في الشكل أدناه:



28	1) $-\frac{\pi}{2} < \mathrm{Arg}(z+2-5i) < \frac{\pi}{4}$ يمثل منحنى المعادلة $\mathrm{Arg}(z+2-5i) = \frac{\pi}{4}$ شعاعا (نرسمه متقطعا بسبب عدم وجود مساواة في المتباينة) يبدأ من النقطة $(-2,5)$ ولا يشملها، ويصنع زاوية قياسها $\frac{\pi}{4}$ مع مستقيم مواز للمحور الحقيقي. و يمثل منحنى المعادلة $\mathrm{Arg}(z+2-5i) = -\frac{\pi}{2}$ شعاعا (نرسمه متقطعا بسبب عدم وجود مساواة في المتباينة) يبدأ من النقطة $(-2,5)$ ولا يشملها، ويصنع زاوية قياسها $-\frac{\pi}{2}$ مع مستقيم مواز للمحور الحقيقي. 2) $\lvert z+2-5i\rvert > \sqrt{29}$ و يمثل منحنى المعادلة $\lvert z+2-5i\rvert = \sqrt{29}$ دائرة مركزها $(-2,5)$ وطول نصف قطرها $\sqrt{29}$ نرسمها متقطعة بسبب عدم وجود مساواة في المتباينة المحل الهندسي للنقاط التي تحقق المتباينتين معا هو المنطقة المظللة في الشكل أدناه: 

29	1) $-\frac{\pi}{4} \le \text{Arg}(z-2i) \le \frac{\pi}{3}$ يمثل منحنى المعادلة $\text{Arg}(z-2i) = -\frac{\pi}{4}$ شعاعًا (نرسمه متصلا بسبب وجود مساواة في المتباينة) يبدأ من النقطة $(0,2)$ ولا يشملها، ويصنع زاوية قياسها $-\frac{\pi}{4}$ مع مستقيم مواز للمحور الحقيقي. و يمثل منحنى المعادلة $\text{Arg}(z-2i) = \frac{\pi}{3}$ شعاعًا (نرسمه متصلا بسبب وجود مساواة في المتباينة) يبدأ من النقطة $(0,2)$ ولا يشملها، ويصنع زاوية قياسها $\frac{\pi}{3}$ مع مستقيم مواز للمحور الحقيقي. 2) $2 < \|z-3+i\| \le 5$ ويمثل منحنى المعادلة $\|z-3+i\| = 5$ دائرة مركزها $(3,-1)$ وطول نصف قطرها 5 نرسمها متصلة بسبب وجود مساواة في المتباينة ويمثل منحنى المعادلة $\|z-3+i\| = 2$ دائرة مركزها $(3,-1)$ وطول نصف قطرها 2 نرسمها متقطعة بسبب عدم وجود مساواة في المتباينة المحل الهندسي للنقاط التي تحقق المتباينتين معًا هو المنطقة المظللة في الشكل أدناه: 
30	$\|z-(1+i)\| = 3$
31	نبدأ بالتحقق من أن المستقيم المرسوم هو فعلا العمود المنصف للقطعة المستقيمة التي طرفاها $(3,2)$ و $(-1,0)$: ميل القطعة المستقيمة يساوي $\frac{1}{2}$ وميل المستقيم يساوي -2 فهما متعامدان، معادلة المستقيم هي $y = 3 - 2x$ ، ونقطة منتصف القطعة المستقيمة هي $(1,1)$ وهي واقعة على المستقيم لأن إحداثييها يحققان معادلته، إذن المستقيم المرسوم هو المنصف العمودي للقطعة، ومعادلته: $\|z-(3+2i)\| = \|z-(-1)\|$

32	$\text{Arg}(z+1-2i) = -\frac{3\pi}{4}$
33	$r = \sqrt{(4-0)^2 + (1-7)^2} = \sqrt{52}$ $\lvert z-(4+i)\rvert \geq \sqrt{52}$
34	قياس الزاوية بين الشعاع والمستقيم الموازي للمحور الحقيقي هو $\frac{\pi}{4}-$ لأن ميل الشعاع -1 $-\frac{\pi}{4} \leq \text{Arg}(z+2-i) < 0$
35	$\lvert z+2+i\rvert \leq 3$ $\lvert z+6\rvert \geq \lvert z+4i\rvert$
36	لنفرض أن $a \neq 0$: $\lvert z-a\rvert = \lvert z+a(2+i)\rvert \rightarrow \lvert x-a+iy\rvert = \lvert x+2a+i(y+a)\rvert$ $\rightarrow (x-a)^2+y^2 = (x+2a)^2+(y+a)^2$ $\rightarrow y = -3x-2a \ldots\ldots (1)$ $\lvert z-a\rvert = 2a \rightarrow \lvert (x-a)+iy\rvert = 2a$ $\rightarrow (x-a)^2+y^2 = 4a^2 \ldots\ldots (2)$ $(x-a)^2+(-3x-2a)^2 = 4a^2$ $x^2-2ax+a^2+9x^2+12ax+4a^2 = 4a^2$ $10x^2+10ax+a^2 = 0$ $x = \frac{-10a \pm \sqrt{100a^2-40a^2}}{20}$ $= \frac{-10a \pm \sqrt{60a^2}}{20} = \frac{-10a \pm 2a\sqrt{15}}{20}$ $x = -\frac{a}{2} \pm \frac{a\sqrt{15}}{10}$ $y = -3\left(-\frac{a}{2} \pm \frac{a\sqrt{15}}{10}\right) - 2a = -\frac{a}{2} \mp \frac{3a\sqrt{15}}{10}$ إذا كان $a \neq 0$ فإن العددين المطلوبين هما: $-\frac{a}{2}+\frac{a\sqrt{15}}{10} - (\frac{a}{2}+\frac{3a\sqrt{15}}{10})\,i, -\frac{a}{2}-\frac{a\sqrt{15}}{10} - (\frac{a}{2}-\frac{3a\sqrt{15}}{10})\,i$ أما إذا كان $a = 0$ فيوجد عدد مركب وحيد يحقق المعادلتين وهو: $z = 0$

منهاجي
متعة التعليم الهادف

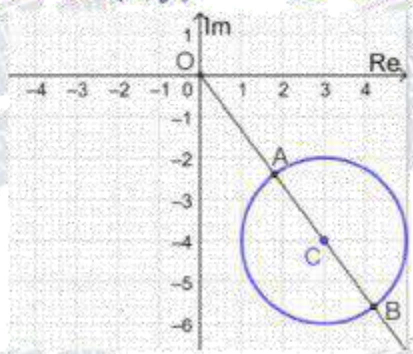
37

$|z-3+4i|=2 \rightarrow |z-(3-4i)|=2$

z يقع على الدائرة التي مركزها $(3,-4)$ وطول نصف قطرها 2

نفرض $z=x+iy$ فإن:

$|z|$ يساوي $\sqrt{x^2+y^2}$ وهو يمثل البعد بين النقطة (x,y) ونقطة الأصل في المستوى الديكارتي



من الشكل أعلاه نجد أن:

$OC=\sqrt{9+16}=5$

أقل قيمة لـ $|z|$ هي: $|z|=OC-r=5-2=3$

أكبر قيمة لـ $|z|$ هي: $|z|=OC+r=5+2=7$

38

$z=5+2i \rightarrow \bar{z}=5-2i$

$\frac{z}{\bar{z}}=\frac{5+2i}{5-2i}\times\frac{5+2i}{5+2i}=\frac{25+20i-4}{25+4}=\frac{21+20i}{29}=\frac{1}{29}(21+20i)$

39

$Arg(z)=\tan^{-1}\frac{2}{5}$

$Arg(\bar{z})=-\tan^{-1}\frac{2}{5}$

$Arg\left(\frac{z}{\bar{z}}\right)=\tan^{-1}\frac{20}{21}$

$Arg\left(\frac{z}{\bar{z}}\right)=Arg(z)-Arg(\bar{z}) \rightarrow \tan^{-1}\frac{20}{21}=\tan^{-1}\frac{2}{5}-(-\tan^{-1}\frac{2}{5})$

$\rightarrow \tan^{-1}\frac{20}{21}=2\tan^{-1}\frac{2}{5}$

40

$|z-6|=2|z+6-9i| \rightarrow |x-6+iy|=2|(x+6)+i(y-9)|$

$\rightarrow (x-6)^2+y^2=4((x+6)^2+(y-9)^2)$

$\rightarrow x^2-12x+36+y^2=4(x^2+12x+36+y^2-18y+81)$

$\rightarrow x^2+y^2+20x-24y+144=0$

$\rightarrow (x+10)^2+(y-12)^2=100$

وهي معادلة دائرة مركزها $(-10,12)$ وطول نصف قطرها 10

41	$\text{Arg}(z-2+3i)=\frac{\pi}{8}$ المحل الهندسي لهذه المعادلة هو شعاع ينطلق من النقطة $(2,-3)$ ولا يشملها، ويصنع زاوية قياسها $\frac{\pi}{8}$ مع مستقيم يوازي المحور الحقيقي، وهو الممثل بالشكل b أما الشكل a فنقطة بداية الشعاع ليست صحيحة والشكل c فنقطة بداية الشعاع مشمولة، وهو ليس صحيحا والشكل d فسعة العدد المركب هي $-\frac{\pi}{8}$ وهو مخالف للسعة المعطاة بالمعادلة.

اختبار نهاية الوحدة الثالثة

1	c
2	b
3	c
4	b
5	a
6	d
7	$\sqrt{45-28i} = x+iy \to 45-28i = x^2-y^2+2ixy$ $\to x^2-y^2=45 \quad ,2xy=-28 \to y=-\frac{14}{x}$ $\to x^2-\frac{196}{x^2}=45$ $\to x^4-45x^2-196=0$ $\to (x^2-49)(x^2+4)=0$ $\to x=7, y=-2 \quad or\ x=-7, y=2$ الجذران التربيعيان للعدد $45-28i$ هما: $7-2i$، و $-7+2i$
8	$\lvert w\rvert = \sqrt{\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{7}{12}}$ $Arg(\omega) = -\left(\pi-\tan^{-1}\left(\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{3}}\right)\right) = -\left(\pi-\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) = -2.28$
9	$z+w=a-8+10i \to \lvert z+\omega\rvert = \sqrt{(a-8)^2+100}=26$ $\to (a-8)^2+100=676 \to (a-8)^2=576 \to a-8=-24 \to a=-16$
10	$\omega = \frac{14-31i}{3-2i}\times\frac{3+2i}{3+2i} = \frac{104-65i}{9+4} = 8-5i$

11

$$(8-5i)^2+c(8-5i)+d=0 \to 64-80i-25+8c-5ci+d=0$$
$$\to 39+d+8c-i(80+5c)=0$$
$$\to 39+d+8c=0\ ,80+5c=0$$
$$\to c=-16, d=89$$

حل آخر:

$$\omega=8-5i \to \bar{\omega}=8+5i$$
$$\to c=-(\omega+\bar{\omega})=-16$$
$$\to d=\omega\times\bar{\omega}=64+25=89$$

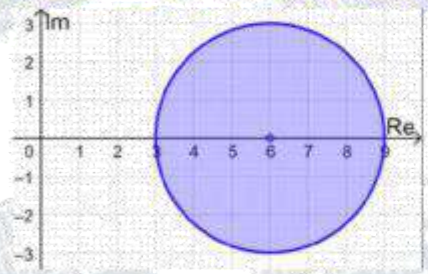
12

$|z-6|\le 3$

المنحنى الحدودي لهذه المتباينة معادلته $|z-6|=3$ ، وهو دائرة مركزها $(6,0)$ وطول نصف قطرها 3وحدات.

وبما أنه توجد مساواة في رمز المتباينة، فإننا نرسم المنحنى الحدودي متصلا.

أما منطقة المحل الهندسي فهي داخل الدائرة وعلى محيطها وليس خارجها، لأن الأعداد المركبة التي تحقق المتباينة تبعد عن مركز الدائرة مسافة تقل عن طول نصف القطر أو تساويها.



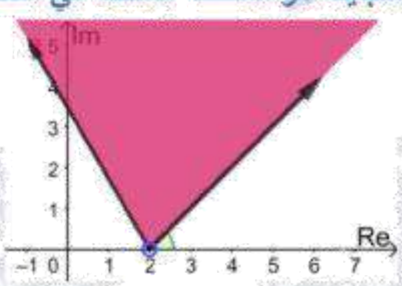
13

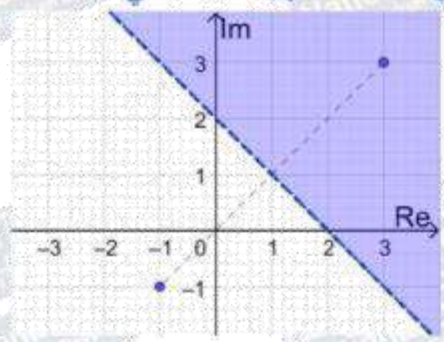
$$\frac{\pi}{4}\le \text{Arg}(z-2)\le\frac{2\pi}{3}$$

يمثل منحنى المعادلة $\text{Arg}(z-2)=\frac{\pi}{4}$ شعاعا (نرسمه متصلا بسبب وجود المساواة في المتباينة) يبدأ من النقطة $(2,0)$ ولا يشملها، ويصنع زاوية قياسها $\frac{\pi}{4}$ مع المحور الحقيقي

ويمثل منحنى المعادلة $\text{Arg}(z-2)=\frac{2\pi}{3}$ شعاعا (نرسمه متصلا بسبب وجود المساواة في المتباينة) يبدأ من النقطة $(2,0)$ ولا يشملها، ويصنع زاوية قياسها$\frac{2\pi}{3}$ مع المحور الحقيقي

المحل الهندسي للنقاط التي تحقق المتباينة هو المنطقة المظللة في الشكل أدناه:



14	$\lvert z+1+i\rvert > \lvert z-3-3i\rvert$ المنحنى الحدودي لهذه المتباينة معادلته $\lvert z+1+i\rvert = \lvert z-3-3i\rvert$ وهو المنصف العمودي للقطعة المستقيمة التي طرفاها $(3,3)$ و $(-1,-1)$. وبما أنه لا توجد مساواة في رمز المتباينة، فإننا نرسم المنحنى الحدودي متقطعا. نحدد جهة المنحنى الحدودي التي تحقق المتباينة باختيار $z=0$ مثلاً وتعويضه في المتباينة، $\lvert 0+1+i\rvert > \lvert 0-3-3i\rvert \to \sqrt{2} > \sqrt{18}$ ✗ بما أن العدد لا يحقق المتباينة، فإن منطقة الحلول الممكنة هي المنطقة التي لا تحوي $z=0$ 
15	$NO = \sqrt{16+49} = \sqrt{65}$ $MO = \sqrt{1+64} = \sqrt{65}$ إذن المثلث OMN متطابق الضلعين
16	باستخدام قانون جيوب التمام في المثلث OMN: $(NM)^2 = (NO)^2 + (MO)^2 - 2(NO)(MO)\cos\angle MON$ $\to \cos\angle MON = -\frac{234-130}{130} = -\frac{4}{5}$
17	$A = \frac{1}{2}(NO)(MO)\sin\angle MON = \frac{1}{2}\times 65\times\frac{3}{5} = \frac{39}{2}$

18

$|z-8| > |z+2i|$

المنحنى الحدودي لهذه المتباينة معادلته $|z-8| = |z+2i|$

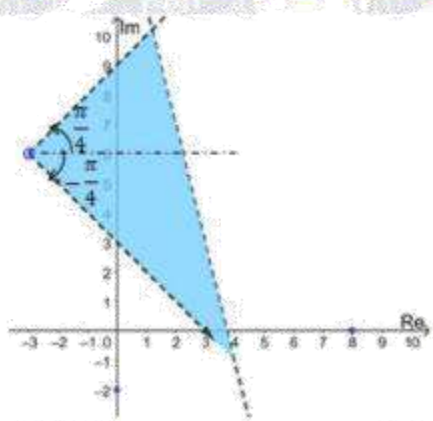
وهو المنصف العمودي للقطعة المستقيمة التي طرفاها $(0,-2)$و $(8,0)$.

وبما أنه لا توجد مساواة في رمز المتباينة، فإننا نرسم المنحنى الحدودي متقطعا.

$-\frac{\pi}{4} < \mathrm{Arg}(z+3-6i) < \frac{\pi}{4}$

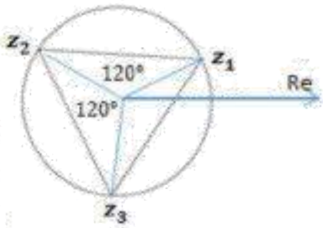
يمثل منحنى المعادلة $\mathrm{Arg}(z+3-6i) = \frac{\pi}{4}$ شعاعًا (نرسمه متقطعا بسبب عدم وجود مساواة في المتباينة) يبدأ من النقطة $(-3,6)$ ولا يشملها، ويصنع زاوية قياسها $\frac{\pi}{4}$ مع مستقيم مواز للمحور الحقيقي

ويمثل منحنى المعادلة $\mathrm{Arg}(z+3-6i) = \frac{2\pi}{3}$ شعاعًا (نرسمه متقطعا بسبب عدم وجود مساواة في المتباينة) يبدأ من النقطة $(-3,6)$ ولا يشملها، ويصنع زاوية قياسها $-\frac{\pi}{4}$ مع مستقيم مواز للمحور الحقيقي. المحل الهندسي للنقاط التي تحقق المتباينتين هو المنطقة المظللة في الشكل أدناه:



$r = |4+2i| = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} = |z_1| = |z_2| = |z_3|$

إذا وقعت رؤوس مثلث متطابق الأضلاع على دائرة، فإن قياس الزاوية المركزية التي ضلعاها يمران برأسين من رؤوس هذا المثلث يساوي $\frac{2\pi}{3}$



نفرض z_1, z_2, z_3 الأعداد المركبة التي تمثل هذه الرؤوس، حيث $z_1 = 4+2i$ ، وهو في الربع الأول

فإن العدد z_2 يقع في الربع الثاني، والعدد z_3 يقع في الربع الثالث.

$Arg(z_2) = Arg(z_1) + \frac{2\pi}{3},\ Arg(z_2) = Arg(z_1) - \frac{2\pi}{3}$

بما أن $Arg(z_2) = Arg(z_1) + \frac{2\pi}{3}$، و $|z_1| = |z_2|$، فإن z_2 هو ناتج ضرب z_1 في العدد المركب الذي مقياسه 1، و سعته $\frac{2\pi}{3}$ وهو:

19

$$z = 1\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

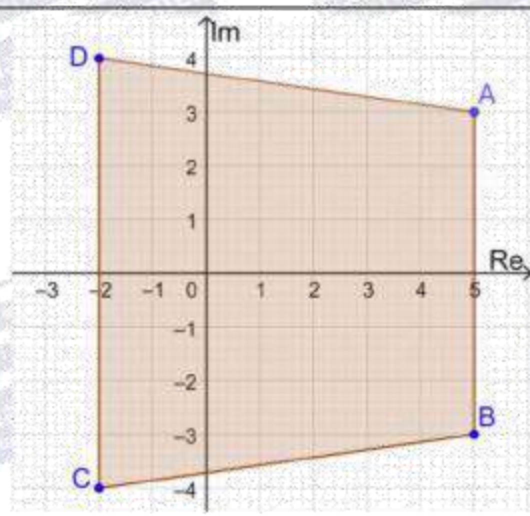
$$z_2 = (4+2i)\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -2 + 2i\sqrt{3} - i - 2\sqrt{3}$$

$$= -(2+2\sqrt{3}) + (2\sqrt{3}-1)i$$

بما أن $Arg(z_3) = Arg(z_1) - \frac{2\pi}{3}$، و $|z_1| = |z_3|$، فإن z_3 هو ناتج قسمة z_1 على العدد $-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$z_3 = \frac{4+2i}{-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{4+2i}{-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}} \times \frac{-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{-2 - 2i\sqrt{3} - i + \sqrt{3}}{(-\frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2}$$

$$= \frac{-2 - 2i\sqrt{3} - i + \sqrt{3}}{1} = -2 + \sqrt{3} - (2\sqrt{3}+1)i$$

20	$z^4-6z^3+14z^2-64z+680=0$ بما أن العدد $-2+4i$ هو حل لهذه المعادلة، إذن مرافقه $-2-4i$ يكون حلًا أيضا لها ويكون ناتج ضربهما أحد عوامل كثير الحدود المرتبط بهذه المعادلة. $(z-(-2+4i))(z-(-2-4i))=z^2+4z+20$ نقسم $z^4-6z^3+14z^2-64z+680$ على $z^2+4z+20$ فنجد أن: $z^4-6z^3+14z^2-64z+680=(z^2+4z+20)(z^2-10z+34)=0$ لإيجاد جذور المعادلة $z^2-10z+34=0$ نستخدم القانون العام لحل المعادلة التربيعية: $z=\frac{10\pm\sqrt{-36}}{2}=\frac{10\pm 6i}{2}=5\pm 3i$ فتكون الجذور الثلاثة المطلوبة هي: $5+3i, 5-3i, -2-4i$
21	 الرباعي ABCD هو شبه منحرف، مساحته بالوحدات المربعة تساوي: $A=\frac{1}{2}(7)(6+8)=49$
22	$0\le \text{Arg}(z-3i)\le\frac{\pi}{3}$
23	$z^2+2z+10=0$ $\Delta=4-40=-36$ مميز المعادلة التربيعية سالب، إذن لهذه المعادلة جذران مركبان مترافقان، وحسب النظرية فإن العددان المركبان المترافقان لهما المقياس نفسه

24

$$z_1 = \frac{-2+\sqrt{-36}}{2} = -1+3i \to \text{Arg}(z_1) = \pi - \tan^{-1} 3$$

$$z_2 = \frac{-2-\sqrt{-36}}{2} = -1-3i \to \text{Arg}(z_2) = -(\pi - \tan^{-1} 3)$$

25

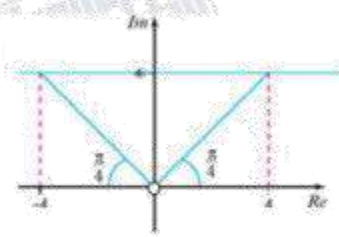
$$w = \frac{22+4i}{(2-i)^2} = \frac{22+4i}{3-4i} \times \frac{3+4i}{3+4i} = \frac{50+100i}{25} = 2+4i$$

26

$$\frac{\pi}{4} \le \text{Arg}(w+p) \le \frac{3\pi}{4}$$

$$\to \frac{\pi}{4} \le \text{Arg}(2+4i+p) \le \frac{3\pi}{4}$$

$$\to \frac{\pi}{4} \le \text{Arg}(2+p+4i) \le \frac{3\pi}{4}$$



نفرض أن العدد $2+p+4i$ هو z، فيكون التمثيل البياني للمتباينة $\frac{\pi}{4} \le \text{Arg}(z) \le \frac{3\pi}{4}$ كما في الشكل المجاور والأعداد التي تحقق هذه المتباينة هي الأعداد الواقعة بين الشعاعين المارين بنقطة الأصل ونلاحظ من الرسم أن الجزء الحقيقي للعدد z الذي يحقق هذه المتباينة ينحصر بين 4-، و4

إذن، $-4 \le 2+p \le 4 \to -6 \le p \le 2$

27

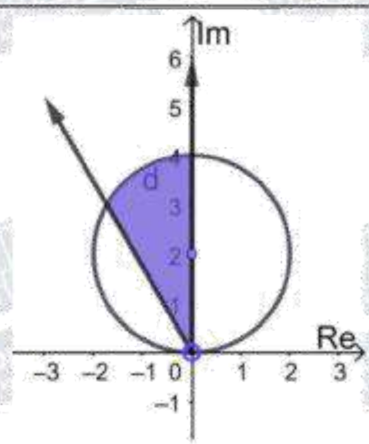
$$u + 2v = 2i \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$iu + v = 3 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

$$i \times (2) + (1): v(2+i) = 5i \to v = \frac{5i}{2+i} \times \frac{2-i}{2-i} = \frac{10i+5}{4+1} = 1+2i$$

$$\to u = 2i - 2(1+2i) = -2-2i$$

28



المتباينة الأولى تمثلها المنطقة بين الشعاعين المنطلقين من نقطة الأصل يصنع أحدهما زاوية قياسها $\frac{\pi}{2}$ مع المحور الحقيقي الموجب، ويصنع الآخر زاوية قياسها $\frac{2\pi}{3}$ مع المحور الحقيقي الموجب. والمتباينة الثانية تمثلها النقاط الواقعة على دائرة مركزها النقطة(0, 2)، وطول نصف قطرها وحدتان مع النقاط الواقعة داخل الدائرة. فالمحل الهندسي للنقاط التي تحقق المتباينتين هو الجزء المظلل في الرسم المجاور.

جيل

2005

الرياضيات كما ينبغي أن تكون

تتضمن الوحدة:

١ - الأمثلة

٢ - أتحقق من فهمي

٣ - التمارين

٤ - اختبار نهاية الوحدة

مع الاجابات الكاملة لكل منها