الجمهورية العربية السورية
وزارة التربية

الرياضيات
الجبر

كتاب الطالب

الثالث الثانوي العلمي

٢٠١٢ - ٢٠١٣م
١٤٣٣ هـ

الجُمهوريَّة العَربيَّة السُّوريَّة

وزارةُ التّربيةِ

الرّياضيات

الجبر

كتاب الطالب

الثالث الثّانوي العلمي

2012 - 2013 م

1433هـ

المؤسّسة العامّة للطّباعة

طُبع أوّل مرّة للعام الدراسي 2012 - 2013

أشرفت على تأليف هذا الكتاب اللجنة التوجيهيّة العليا المشكّلة
بالقرار الوزاريّ رقم 943/2053 تاريخ 2010/4/1

منسقا الصف

مروان بركة ميكائيل الحمود

المؤلفون

إبراهيم سعده	مأمون حاج قاسم
أحمد مريم	مروان بركة
د. إسماعيل حمدان	ميكائيل الحمود
خلدون الشماع	نضال تفاحة
عدنان المحاسنة	هايل فاعور
عيسى عثمان	وفاء حمشو
وليد الحوش	

وردت الأسماء حسب الترتيب الهجائي

المقومون

د. فرح سليمان المطلق	د. عمران قوبا
د. عبد اللطيف هنانو	د. إيلي قدسي
د. منير الشحف	بسام بركات
غدير اندراوس	صالح قرقوط
غياث الياس	حسن أنيس

التدقيق اللغوي

جمال أبو سمرة ، رداح عسكور

تصميم الغلاف

م. عزّت تلجة ، زياد بيطار

التنضيد الطباعي وتنفيذ الرسوم والتنسيق الفني

خليل أشقر ، زياد بيطار ، عصام علي

الإخراج الفني

مأمون الملاح

الإشراف الفني

م. عزّت تلجة

م. عماد الدين برما

مقدمة

قامت وزارة التربية في الجمهورية العربية السورية بمشروع وطني لتطوير المناهج وبنائها على أساس مفهوم جديد يسمّى المستويات التربوية والمعايير الوطنية بما ينسجم مع التطور المتسارع في ميادين المعرفة ، وذلك بغية تطوير التعليم والتميّز في التحصيل العلمي.
ولقد أُلّف هذا الكتاب (الجبر للصف الثالث الثانوي العلمي) اعتماداً على هذه المعايير وانسجاماً مع منهاج الرياضيات في الصفين الأول الثانوي والثاني الثانوي العلمي ومع الأهداف العامّة لتدريس الرياضيات.
وقد راعى الكتاب تنمية الفكر التّحليلي والتركيبي لدى الطالب وتنمية مهارات التفكير العليا من خلال اعتماد الترابط المنطقي للمفاهيم والبراهين والتبسيط قدر الإمكان، والتدرّج في عرض الأفكار النظرية ودعمها بالأمثلة والأنشطة والتدريبات والتمرينات المتنوعة والشاملة.
ويهدف الكتاب إلى تنمية قدرات الطلاب الذهنية والعملية على حل المسائل، باستخدام التفكير الناقد من خلال الفهم والاستيعاب وصياغة الفرضيات، واعتماد المسلمات في الوصول إلى النتائج وتقويمها واتخاذ القرارات المناسبة.
لقد راعى الكتاب أيضاً أن يكون الطالب هو المحور الأساسي في عملية التعلم، وربط الحقائق والمفاهيم التي يدرسها بحياته اليومية وبالعلوم الأخرى ما أمكن.
لقد استُفيدَ من برامج الحاسوب المختلفة في إنشاء الرّسوم والمخططات والخطوط البيانية والصور في هذا الكتاب، ومن هذه البرامج:

(*Geoplanw - Cabri 3D - Google SketchUp 7 - Mathematica 7.0 - MathType*).

نأمل من زملائنا المدرسين أن يزودونا بملاحظاتهم الميدانية ومقترحاتهم البنّاءة، متعاونين معاً لتطوير الكتاب المدرسي باستمرار، ومساهمين جميعاً في خدمة الوطن الغالي من أجل تقدمه وازدهاره.

:::المؤلفون:::

خطة توزيع المنهاج

(حصتان أسبوعيا)

الشهر	الأسبوع الأول	الأسبوع الثاني	الأسبوع الثالث	الأسبوع الرابع
أيلول			الاحتمالات	الاحتمالات
	الأسبوع الأول	الأسبوع الثاني	الأسبوع الثالث	الأسبوع الرابع
تشرين أول	الاحتمال المشروط	الاحتمال المشروط	الاستقلال الاحتمالي	الاستقلال الاحتمالي
	الأسبوع الأول	الأسبوع الثاني	الأسبوع الثالث	الأسبوع الرابع
تشرين ثاني	المتغير العشوائي والتوزيع الاحتمالي	المتغير العشوائي والتوزيع الاحتمالي	المتغير العشوائي والتوزيع الاحتمالي	الإحصاء
	الأسبوع الأول	الأسبوع الثاني	الأسبوع الثالث	الأسبوع الرابع
كانون أول	الإحصاء	الإحصاء	المصفوفات	مراجعة عامة
	الأسبوع الأول	الأسبوع الثاني	الأسبوع الثالث	الأسبوع الرابع
كانون ثاني	امتحان الفصل الأول + العطلة الانتصافية			جمل المعادلات الخطية
	الأسبوع الأول	الأسبوع الثاني	الأسبوع الثالث	الأسبوع الرابع
شباط	جمل المعادلات الخطية	جمل المعادلات الخطية	جمل المعادلات الخطية	جمل المعادلات الخطية
	الاسبوع الأول	الأسبوع الثاني	الأسبوع الثالث	الأسبوع الرابع
آذار	الأعداد المركبة (تحليل كثيرات الحدود)	الأعداد المركبة التمثيل الهندسي	الأعداد المركبة التمثيل الهندسي	الأعداد المركبة الشكل الأسي
	الأسبوع الأول	الأسبوع الثاني	الأسبوع الثالث	الأسبوع الرابع
نيسان	الأعداد المركبة الشكل الأسي	الأعداد المركبة الشكل الأسي الدوال	مسائل عامة	مسائل عامة
	الأسبوع الأول	الأسبوع الثاني	الأسبوع الثالث	الأسبوع الرابع
أيار	مسائل عامة	مسائل عامة	مسائل عامة	

الفهرست

1

الاحتمالات والإحصاء

- الاحتمال
- الاحتمال المشروط
- الاستقلال الاحتمالي
- المتغير العشوائي والتوزيع الاحتمالي
- الإحصاء

الاحتمال

سوف تتعلم :

1-1-1 المفاهيم الأساسية في الاحتمالات.
(مراجعة)

1.1.1 المفاهيم الأساسية في الاحتمالات:

درسنا سابقاً مفهوم الاختبار ، فضاء العينة ، الحدث ، العمليات على الأحداث ، مبرهنات في الاحتمال . لنتذكر معاً :

- **الاختبار**: هو تجربة يمكن إجراؤها أو استعراض لظاهرة طبيعية أو اجتماعيّة نعلم مسبقاً مجموعة نتائجها الممكنة (لكنّنا لا نعلم النتيجة التي سنحصل عليها عند إجراء التجربة) .
- **فضاء العينّة** : هو مجموعة النتائج الممكنة للاختبار، سنرمز لها بالحرف Ω، ويحددها الغرض من الاختبار، وقد تكون Ω مجموعة منتهية أو غير منتهية، ولكن سنقتصر في دراستنا على الحالة التي تكون فيها Ω مجموعة منتهية.
- **الحدث** : عندما يكون عدد عناصر فضاء العينة منتهياً نعرّف الحدث بأنّه أيّ مجموعة جزئية من فضاء العينة Ω، نرمز إلى الأحداث بحروف كبيرة $A, B, C, ...$. ونرمز بالرمز $\mathcal{P}(\Omega)$ إلى مجموعة جميع الأحداث، أي جميع أجزاء Ω، ونسميه فضاء الأحداث.
- **أحداث المميزة:**

1. الحدث الأكيد Ω
2. الحدث المستحيل $\varnothing$
3. الحدث البسيط (هو حدث وحيد العنصر)
4. الحدثان المتنافيان: هما حدثان يقتضي وقوع أحدهما عدم وقوع الآخر أي
(الحدثان A و B متنافيان) يكافئ $(A \cap B = \varnothing)$
5. الحدثان المتتامان (المتضادان) : هما حدثان وقوع أحدهما يُكافئ عدم وقوع الآخر أي
(الحدثان A و B متضادان) يكافئ $(B = \Omega \setminus A = A')$

- **العمليات على الأحداث :**

لتكن Ω فضاء العينة المرتبط بتجربة ما، وليكن $\mathcal{P}(\Omega)$ فضاء الأحداث مجموعة الأحداث المرتبطة بتلك التجربة. نعرّف العمليات على الأحداث كما يأتي :

1) اجتماع حدثين : اجتماع حدثين A و B هو الحدث الذي يقع إذا وفقط إذا وقع أحد الحدثين A أو B أو كلاهما ورمزه $A \cup B$.

2) تقاطع حدثين :تقاطع حدثين A و B هو الحدث الذي يقع إذا وفقط إذا وقع الحدثان A و B في آن معاً، ورمزه $A \cap B$.

3) فرق حدثين : الحدث A فرق B هو الحدث الذي يقع إذا وفقط إذا وقع A ولم يقع B، ورمزه $A \setminus B$.

- **دالّة الاحتمال** : ليكن Ω فضاء العيّنة لاختبار، ولنفترض أنّ Ω مجموعةٌ منتهية، نسمي دالة احتمال كل دالة منطلقها فضاء الأحداث $\mathcal{P}(\Omega)$ وتأخذ قيمها في المجال $[0,1]$، وتحقّق الشرطين :

1) $P(\Omega)=1$.

2) إذا كان $(A \cap B = \varnothing)$ كان $P(A \cup B)=P(A)+P(B)$

وعندئذٍ نسمي الثلاثية $(\Omega,\mathcal{P}(\Omega),P)$ فضاءً احتمالياً منتهياً.

وجدنا أن " احتمال حدث يساوي مجموع احتمالات الأحداث البسيطة المكوّنة له ".
نقول عن فضاء احتمالي $(\Omega,\mathcal{P}(\Omega),P)$، إنه متساوي الاحتمال (منتظم) إذا وفقط إذا كانت جميع الأحداث البسيطة متساوية الاحتمال . وعندها يعطى احتمال حدث A بالصيغة : $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}$.

نذكّر ببعض المبرهنات في الاحتمال التي درستها في دراستك السابقة:
في فضاء احتماليّ $(\Omega,\mathcal{P}(\Omega),P)$ تتحقّق الخواصّ الآتية أياً كان الحدثان A و B :

① $P(\varnothing)=0$

② $P(A')=1-P(A)$

③ $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \le P(B)$

④ $P(A \setminus B)=P(A)-P(A \cap B)$

⑤ $P(A \cup B)=P(A)+P(B)-P(A \cap B)$

اختبر معلوماتك:

فيما يأتي مجموعة من العبارات لكلٍّ منها ثلاث إجابات ، إجابة واحدة منها فقط صحيحة ، أقرأ كلّ عبارة جيّداً وبالتشاور مع زملائك ضع دائرة على الرمز الدال على الإجابة التي تختارونها .

م	العبـــــارة	رمز	الجواب المقترح
1	في تجربة رمي حجر نرد مرتين متتاليتين ، عدد عناصر فضاء العينة يساوي	A	2^6
		B	6^2
		C	$(2)\cdot(6)$
2	في تجربة رمي حجَريْ نرد معاً، عدد عناصر فضاء العيّنة يساوي	A	2^6
		B	21
		C	6^2

3	إن حدث ظهور عدد أولي في تجربة رمي حجر نرد كتب على أوجهه الأعداد $2,4,6,8,9,1$	A	حدث بسيط
		B	حدث أكيد
		C	حدث مستحيل
4	في تجربة رمي حجر نرد ، نعبّر لفظاً عن الحدث $A=\{3,6\}$ كما يأتي :	A	الحدث A هو ظهور عدد زوجي
		B	الحدث A هو ظهور عدد يقبل القسمة على 6
		C	الحدث A هو ظهور عدد يقبل القسمة على 3
5	في تجربة رمي حجري نرد ، إذا كان A حدث ظهور العدد 3 على أحد الحجرين فقط. و الحدث B أن يكون مجموع نقط الوجهين الظاهرين يساوي 10 . فإنّ الحدث $A\cap B$ هو	A	$A\cap B=\{(3,7),(7,3)\}$
		B	$A\cap B=\{(4,6)\}$
		C	$A\cap B=\varnothing$
6	إذا كان A , B حدثين من فضاء احتماليّ $(\Omega,\mathscr{P}(\Omega),P)$ حيث : $P(A)=\frac{1}{3},P(B)=\frac{1}{4},P(A\cap B)=\frac{1}{6}$ فإنّ	A	$P(A\setminus B)=\frac{1}{8}$
		B	$P(A\setminus B)=\frac{1}{6}$
		C	$P(A\setminus B)=\frac{1}{12}$
7	إذا كان A , B حدثين من فضاء احتماليّ $(\Omega,\mathscr{P}(\Omega),P)$ حيث : $P(A)=\frac{1}{3},P(B)=\frac{1}{4},P(A\cap B)=\frac{1}{6}$ فإنّ	A	$P(A\cup B)=\frac{7}{12}$
		B	$P(A\cup B)=\frac{1}{12}$
		C	$P(A\cup B)=\frac{5}{12}$
8	إذا كان A , B حدثين في فضاء احتمالي $(\Omega,\mathscr{P}(\Omega),P)$ فإن وقوع أحد الحدثين A , B فقط ، هو الحدث :	A	$A\cap B'$
		B	$B\setminus A$
		C	$(A\setminus B)\cup(A'\cap B)$
9	حجر نرد مصمّم بحيث يكون احتمال ظهور الوجه الذي يحمل عدداً زوجيّاً من النقط يساوي ثلاثة أمثال احتمال ظهور الوجه الذي يحمل عدداً فردياً من النقط فإنّ احتمال الحدث A الذي يقع إذا كان عدد نقط الوجه الظاهر أوّلياً يساوي	A	$P(A)=\frac{1}{12}$
		B	$P(A)=\frac{5}{12}$
		C	$P(A)=\frac{3}{12}$
10	يحتوي صندوق 6 كرات بيضاء و 5 كرات سوداء و 4 كرات حمراء ، نسحب من الصندوق 3 كرات معاً ، فإنّ عدد طرق سحب هذه الكرات يساوي	A	$C(15,3)$
		B	$P(15,3)$
		C	15^3

مثال

يحوي صندوق ثماني بطاقات مُرقّمة من 1 إلى 8. أوجد عدد عناصر فضاء العينة Ω في التجارب الآتية : سحب ثلاث بطاقات في كلّ من الحالات الآتية :

1. سحب ثلاث بطاقات على التتالي مع الاعادة.
2. سحب ثلاث بطاقات على التتالي دون إعادة.
3. سحب ثلاث بطاقات في آن معاً.

الحل:

1. يجري سحب البطاقة الأولى بثماني طرائق، ويجري سحب الثانية بثماني طرائق،وأخيراً يجري سحب الثالثة بثماني طرائق. إذن

$$n(\Omega)=8\cdot 8\cdot 8=8^3=512$$

2. يجري سحب البطاقة الأولى بثماني طرائق، ويجري سحب الثانية بسبع طرائق،وأخيراً يجري سحب الثالثة بست طرائق. إذن

$$n(\Omega)=P(8,3)=8\cdot 7\cdot 6=336$$

3. يجري سحب مجموعة جزئية مكونة من ثلاثة عناصر من المجموعة $\{1,2,\ldots,8\}$ إذن

$$n(\Omega)=C(8,3)=8\cdot 7=56$$

نشاط

صندوق فيه 15 كرة متماثلة، منها 6 كرات بيضاء، و 7 كرات سوداء، و كرتان حمراوان.

1. نسحب عشوائياً كرة واحدة من الصندوق. احسب احتمال أن تكون هذه الكرة بيضاء.

احتمال هذا الحدث يساوي : $\dfrac{C(6,1)}{C(15,1)}=\dfrac{6}{15}$

2. نسحب من الصندوق كرتين على التتالي من دون إعادة، احسب احتمال أن تكون الكرتان حمراوين.

احتمال هذا الحدث يساوي : $\dfrac{P(2,2)}{P(15,2)}=\dfrac{1}{105}$

3. نسحب من الصندوق ثلاث كرات على التتالي دون إعادة. احسب احتمال أن تكون الكرات الثلاث المسحوبة مختلفة الألوان (كرة من كلّ لون).

احتمال أن تكون الكرات المسحوبة بالترتيب (بيضاء، سوداء، حمراء) يساوي

$$\frac{6\cdot 7\cdot 2}{P(15,3)}=\frac{2}{5\cdot 13}=\frac{2}{65}$$

وكذلك يساوي احتمال أيّ واحد من التباديل الستّة التي يجري وفقها سحب الكرات الثلاث المختلفة بالألوان. إذن احتمال سحب ثلاث كرات مختلفة الألوان يساوي الحدث $\frac{12}{65}=(3!)\times\frac{2}{65}$.

4. سُحبت من الصندوق، ثلاثُ كرات على التتالي مع الإعادة، ما احتمال أن تكون الكرات الثلاث المسحوبة مختلفة الألوان (كرة من كلّ لون)؟

اشرح لماذا يساوي احتمال هذا الحدث : $\frac{56}{375}=(3!)\cdot\frac{2\cdot6\cdot7}{15\cdot15\cdot15}$ ؟

5. سُحبت من الصندوق ثلاثُ كرات على التتالي مع الإعادة، احسب احتمال أن تكون الكرات المسحوبة حمراء اللّون .

اشرح لماذا يساوي احتمال هذا الحدث $\frac{8}{3375}=\frac{2\cdot2\cdot2}{15\cdot15\cdot15}$؟

6. سُحبت من الصندوق سبعُ كرات معاً، احسب احتمال أن تكون الكرات المسحوبة على النحو : ثلاث كرات بيضاء، وكرتان سوداوان، وكرتان حمراوان.

احتمال هذا الحدث يساوي : $\frac{28}{429}=\frac{C(6,3)\cdot C(7,2)\cdot C(2,2)}{C(15,7)}$ علّل هذه الإجابة.

7. نسحب من الصندوق ثلاثَ كرات معاً، احسب احتمال أن نحصل على كرة حمراء واحدة على الأقلّ.

الحدث المطلوب A هو اجتماع الحدثين : A_1 الذي يمثّل الحصول على كرة حمراء واحدة فقط. والحدث A_2 الذي يمثّل الحصول على كرتين حمراوين. ولكن

$$P(A_1)=\frac{C(2,1)\cdot C(13,2)}{C(15,3)}=\frac{12}{35}$$

$$P(A_2)=\frac{C(2,2)\cdot C(13,1)}{C(15,3)}=\frac{1}{35}$$

ولأنّ الحدثين A_1 و A_2 متنافيان استنتجنا أنّ:

$$P(A)=P(A_1)+P(A_2)=\frac{12}{35}+\frac{1}{35}=\frac{13}{35}$$

أو بطريقة ثانية :

ليكن A_0 حدث عدم الحصول على كرة حمراء. عندئذ يكون الحدث المطلوب A هو الحدث المُضاد للحدث A_0 أي $A=A_0'=\Omega\backslash A_0$، ولكن $P(A_0)=\frac{C(13,3)}{C(15,3)}=\frac{22}{35}$ ، إذن $P(A)=1-P(A_0)=\frac{13}{35}$

تمرينات

1. صف دراسيّ فيه 8 طالبات و 12 طالباً ، نريد تأليف لجنة مكوّنة من ثلاثة أشخاص من هذا الصف بطريقة عشوائية، أوجد احتمال أن :

a) تكون اللجنة من الطالبات فقط.

b) تكون في اللجنة طالبتان فقط.

c) تكون في اللجنة طالبة واحدة على الأقل.

d) يكون في اللجنة طالب واحد على الأكثر.

1) في تجربة رمي حجري نرد معاً. نتأمّل الحدثين :

A : حدث ظهور ثلاث نقط على أحد الوجهين فقط .

B : حدث ظهور وجهين مجموع نقاطهما أصغر تماماً من 7 .

والمطلوب هو حساب احتمالات كلّ من الأحداث الآتية :

$$A, B, A\cap B, A\cup B, A\cap B', A'\cap B', A'\cup B', A\backslash B, (A\cup B)', (A\cap B)'$$

2. في مركزٍ لتعليم اللّغات يوجد 100 طالب، يدرس 50 طالباً منهم الفرنسية، و 40 طالباً منهم الإسبانية،

ويدرس 10 طلاب هاتين اللغتين معاً، اختير طالب بطريقة عشوائية، أوجد احتمال :

a) أن يكون من دارسي اللغة الفرنسيّة أو الإسبانية.

b) ألّا يكون من دارسي اللغة الفرنسيّة ولا الإسبانية.

c) أن يكون دارساً للغة واحدة فقط من بين اللغتين الفرنسيّة أو الإسبانية.

d) أن يكون دارساً للفرنسية فقط.

3. لاعب شطرنج يلعب مع الحاسوب مرتين، احتمال فوزه في المرة الأولى $\frac{6}{10}$ ، وفي المرة الثانية $\frac{8}{10}$

واحتمال فوزه في المرّتين $\frac{45}{100}$ ، ما احتمال خسارته في المرتين؟

4. في تجربة رمي قطعة نقود عادلة أربع مرّات، ما احتمال ظهور شعار واحد على الأقل في هذه التجربة.

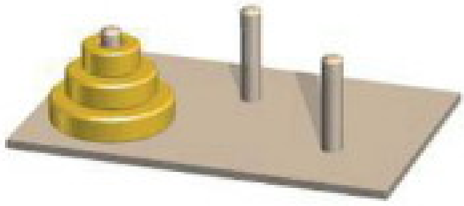
الاحتمال المشروط

سوف تتعلم :

1-2-1 تعريف الاحتمال المشروط

2-2-1 الاحتمال المشروط وقاعدة الاحتمال المركب

أبراج هانوي: لدينا ثلاثة محاور عمودية، يتوضّع على المحور الأول n قرصاً متدرجة في أقطارها، ونريد نقل هذه الأقراص إلى المحور الثالث وبحيث ننقل قرصاً واحداً في كلّ مرة، كما لا يجوز في أي حال وضع قرص فوق قرص آخر ذي قطر أصغر.



هل ترتبط حركة القرص المراد تحريكه بالحركات السابقة؟

ما هو أصغر عدد من الحركات . من أجل 3 أقراص؟

1.2.1 تعريف الاحتمال الشرطي:

من المسائل المهمّة في حساب الاحتمال دراسة العلاقات الاحتمالية بين الأحداث، فإذا كان A و B حدثين متعلقين بتجربة معيّنة فإن وقوع أحد الحدثين قد يؤثر في احتمال وقوع الحدث الآخر. ولتوضيح ذلك نتأمل المثال الآتي:

مثال

لنتأمل معهداً يضم N طالباً وطالبة يدرس بعضهم اختصاصاً علمياً، ويدرس **الباقي** اختصاصاً أدبياً. لنرمز بالرمز S إلى مجموعة الأشخاص الذين يدرسون اختصاصاً علمياً، ولنرمز بالرمز F إلى مجموعة الطالبات في المعهد.

نختار عشوائيّاً شخصاً من المعهد ونتأمّل الحدثين :

S: " الشخص المُختار يدرس اختصاصاً علمياً "

F: " الشخص المُختار أنثى "

من الواضح أنّ

$$P(F)=\frac{n(F)}{N} \quad \text{و} \quad P(S)=\frac{n(S)}{N}$$

لنركز الآن اهتمامنا على فئة الطالبات. إنّ احتمال اختيار طالبة تدرس اختصاصاً علمياً من بين هؤلاء الطالبات يساوي نسبة عدد الطالبات اللّاتي يدرسن اختصاصاً علمياً إلى عدد الطالبات : $\frac{n(F\cap S)}{n(F)}$.

لا توجد أية فكرة جديدة فيما ذكرناه، ولكنّنا نحتاج إلى ترميز جديد نشير فيه إلى أنّنا نركز اهتمامنا على مجموعة جزئيّة هي مجموعة الطالبات.

سنعتمد الرمز $P_F(S)$ الذي يُقرأ «احتمال الحدث S مشروطاً بالحدث F» أو «احتمال الحدث S بافتراض وقوع الحدث F» ونكتب بالرموز :

$$P_F(S)=\frac{n(F\cap S)}{n(F)}=\frac{n(F\cap S)}{N}\Big/\frac{n(F)}{N}=\frac{P(F\cap S)}{P(F)}$$

نشاط

لنتأمّل تجربة رمي حجر نرد مرّة واحدة، نعلم أنّ $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$. ثُمّ لنتأمّل الحدثين:

A: " العدد الظاهر يساوي 3 "

B: " العدد الظاهر فردي "

من الواضح أنّ $P(A)=\frac{1}{6}$ و $P(B)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$.

لنفترض الآن أنّ حجر النّرد قد رُمي مرة واحدة، وأنّ هناك من أخبرنا عن وقوع الحدث B دون أن يعلمنا بنتيجة التجربة. عندئذ يصبح فضاء العينة الجديد $\{1,3,5\}$، ويصبح احتمال وقوع الحدث A علماً أن B قد وقع : $P_B(A)=\frac{n(\{3\})}{n(\{1,3,5\})}=\frac{1}{3}$.

من الواضح في هذه التجربة، أنّ احتمال وقوع الحدث A قد تغيّر بعد أن علمنا بوقوع الحدث B. ونلاحظ مجدّداً أنّ

$$P_B(A)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{3}$$

تعريف: ليكن $(\Omega,\mathcal{P}(\Omega),P)$ فضاءً احتمالياً منتهياً، وليكن B حدثاً يحقّق $P(B)\neq 0$، عندئذٍ، أياً كان الحدث A من $\mathcal{P}(\Omega)$، نعرّف احتمال A مشروطاً بوقوع B، أو احتمال A علماً أن B قد وقع، بأنّه المقدار

$$P_B(A)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

2.2.1 الاحتمال المشروط وقاعدة الاحتمال المركب:

نشاط 1 نتأمّل فضاء احتمالياً منتهياً $(\Omega,\mathcal{P}(\Omega),P)$، B حدثاً يحقق $P(B)\neq 0$.

① اشرح لماذا $P(A\cap B)\leq P(B)$ وذلك مهما كان الحدث A؟ نستنتج إذن أنّ $P_B(A)\in[0,1]$.

② احسب المقدار $P_B(\Omega)$.

③ نتأمّل حدثين A_1 و A_2 يحقّقان $A_1\cap A_2=\varnothing$. أثبت أنّ $P_B(A_1\cup A_2)=P_B(A_1)+P_B(A_2)$.

فتكون بذلك قد أثبت صحة المبرهنة الآتية :

مبرهنة: ليكن $(\Omega,\mathcal{P}(\Omega),P)$ فضاءً احتمالياً منتهياً، وليكن B حدثاً يحقّق $P(B)\neq 0$، عندئذ تكون الدالة $P_B:\mathcal{P}(\Omega)\to[0,1], A\mapsto P_B(A)$ دالة احتمالية، تسمى دالة الاحتمال المشروط بالحدث B.

نتائج

1) لمّا كانت P_B دالة احتمال فإن جميع خواص دالة الاحتمال محققة وعلى وجه الخصوص

❶ $P_B(A')=1-P_B(A)$

❷ $P_B(A_1\cup A_2)=P_B(A_1)+P_B(A_2)-P_B(A_1\cap A_2)$

2) قاعدة الاحتمال المركّب لحدثين: إذا كان A و B حدثين من فضاء احتمالي $(\Omega,\mathcal{P}(\Omega),P)$، وكان $P(B)\neq 0$ و $P(A)\neq 0$ كان:

$$P(A\cap B)=P(B)\cdot P_B(A)$$
$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P_A(B)$$

3) يمكن تعميم الخاصة الأخيرة على عدد منتهٍ من الأحداث، فمثلاً إذا كانت A و B و C أحداثاً من $\mathcal{P}(\Omega)$، وكان $P(A)\neq 0$ و $P(A\cap B)\neq 0$ كان :

$$P(A\cap B\cap C)=P((A\cap B)\cap C)=P(A\cap B)\cdot P_{A\cap B}(C)$$
$$=P(A)\cdot P_A(B)\cdot P_{A\cap B}(C)$$

4) في حالة الفضاء المتساوي الاحتمال لدينا

$$P_B(A)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}$$

نشاط 2

صندوق يحوي خمس كرات حمراء مُرقّمة بالأرقام 1, 1, 1, 1, 2، وثلاث كرات بيضاء مُرقّمة بالأرقام 1, 1, 2، نسحب من الصندوق كرتين بالتتالي دون إعادة.

1. احسب احتمال الحصول على كرتين مجموعُ رقميهما يساوي 2 .
2. احسب احتمال الحصول على كرتين حمراوين مجموع رقميهما يساوي 2 .
3. إذا علمت أنّ الكرتين المسحوبتين حمراوان، احسب احتمال أن يكون مجموع رقميهما 2 .
4. إذا علمت أن مجموع رقمي الكرتين يساوي 2 ، فما احتمال أن تكون الكرتان المسحوبتان حمراوين.

الحل :

1. لنتأمّل الحدث C أي حدث الحصول على كرتين مجموع رقميهما 2 . ولنفكّر معاً:

- كيف يقع الحدث C؟

الجواب : يقع هذا الحدث إذا حصلنا على كرة تحمل الرقم 1 في السحب الأول وعلى كرة تحمل الرقم 1 في السحب الثاني, إذن لنعرّف الحدثين :

A: " الحصول على كرة تحمل الرقم 1 بنتيجة السحب الأول "

B: " الحصول على كرة تحمل الرقم 1 بنتيجة السحب الثاني "

فيكون $C = A \cap B$.

- ثُمّ يمكننا استعمال قاعدة الاحتمال المركب $P(C) = P(A) \cdot P_A(B)$. ما هو $P(A)$ وما هو $P_A(B)$.

الجواب: عند السحب الأول عدد الكرات الكلي يساوي 8 وعدد الكرات التي تحمل الرقم 1 يساوي 6. إذن $P(A) = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$.

إذا وقع الحدث A، يبقى لدينا 7 كرات خمس منها تحمل الرقم 1 إذن $P_A(B) = \frac{5}{7}$.

- إذن $P(C) = \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{7} = \frac{15}{28}$.

2. لنتأمّل الحدث D أي حدث الحصول على كرتين حمراوين مجموع رقميهما 2. ولنفكّر معاً:

- كيف يقع الحدث D ؟

الجواب: يقع هذا الحدث إذا حصلنا على كرة حمراء تحمل الرقم 1 في السحب الأول وعلى كرة حمراء تحمل الرقم 1 في السحب الثاني. إذن لنعرّف الحدثين :

E: " الحصول على كرة حمراء تحمل الرقم 1 بنتيجة السحب الأول "

F: " الحصول على كرة حمراء تحمل الرقم 1 بنتيجة السحب الثاني "

فيكون $D = E \cap F$.

- ما قيمة كل من $P(E)$ و $P_E(F)$؟

الجواب : $P(E) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ و $P_E(F) = \frac{3}{7}$

- إذن $P(D) = P(E) \cdot P_E(F) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{7} = \frac{3}{14}$.

3. ليكن الحدث R حدث " الحصول على كرتين حمراوين " عندئذ : $P(R) = \frac{C(5,2)}{C(8,2)} = \frac{5}{14}$.

- الحصول على كرتين مجموع رقميهما يساوي 1 هو الحدث C الذي درسناه في الطلب الأوّل. إذن المطلوب هو حساب $P_R(C)$.

ولكن $C \cap R = D$ حيثُ D هو الحدث الذي درسناه في الطلب الثاني. إذن

$$P_R(C)=\frac{P(R\cap C)}{P(R)}=\frac{P(D)}{P(R)}=\frac{3}{14}\cdot\frac{14}{5}=\frac{3}{5}$$

4. المطلوب هنا $P_C(R)$.

- لحساب $P_C(R)$ نكتب $P_C(R)=\frac{P(R\cap C)}{P(C)}=\frac{P(D)}{P(C)}=\frac{3}{14}\cdot\frac{28}{15}=\frac{2}{5}$

نشاط 3

صندوقان متماثلان أحدهما I يحوي كرتين حمراوين وثلاث كرات بيضاء، والآخر II يحوي n كرة حمراء وكرة واحدة بيضاء. نختار عشوائياً صندوقاً، ثُمّ نسحب منه كرة واحدة فقط، ليكن A حدث الحصول على كرة حمراء، وليكن B حدث اختيار الصندوق II. احسب n إذا علمت أن $P_A(B)=\frac{5}{8}$.

الحل :

نلاحظ أن حدث اختيار الصندوق I هو B' أي الحدث المضاد للحدث B. إذن :

$$A=(A\cap B')\cup(A\cap B)$$

ومنه

$$P(A)=P(A\cap B')+P(A\cap B)$$
$$P(A)=P(B')\cdot P_{B'}(A)+P(B)\cdot P_B(A)$$

ولكن $P(B)=P(B')=\frac{1}{2}$ ، و $P_B(A)=\frac{n}{n+1}$ و $P_{B'}(A)=\frac{2}{5}$. إذن

$$P(A)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}+\frac{1}{2}\cdot\frac{n}{n+1}=\frac{7n+2}{10(n+1)}$$

و

$$P(A\cap B)=P(B)\cdot P_B(A)=\frac{1}{2}\cdot\frac{n}{n+1}=\frac{n}{2(n+1)}$$

إذن

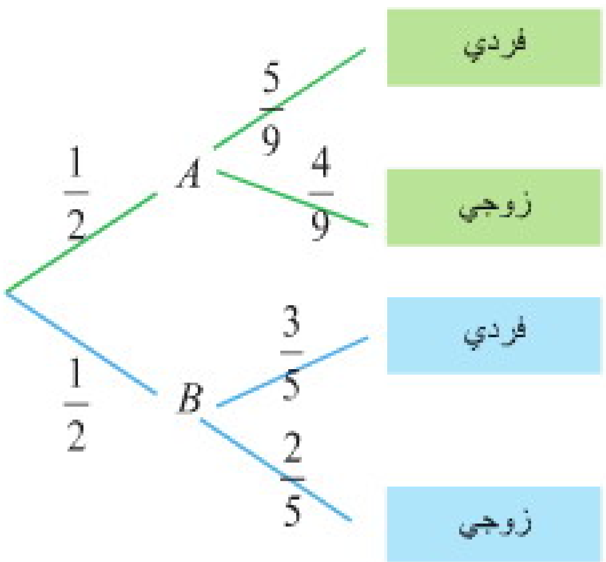
$$P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{n}{2(n+1)}\cdot\frac{10(n+1)}{7n+2}=\frac{5n}{7n+2}$$

ولكن لدينا استناداً إلى الفرض $P_A(B)=\frac{5}{8}$ ، إذن $\frac{5n}{7n+2}=\frac{5}{8}$ ، ومنه $n=2$. وهي النتيجة المطلوبة.

مثال 1

يحتوي صندوق (A) على 9 بطاقات مرقّمة من 1 إلى 9، ويحتوي صندوق (B) على 5 بطاقات مرقمة من 1 إلى 5، اختير أحد الصندوقين عشوائياً،وسحبت منه بطاقة، فإذا كان رقم البطاقة المسحوبة زوجياً، فما احتمال أن تكون البطاقة قد سُحبت من الصندوق A ؟

حل مقتضب :



لنرمز بالرمز C إلى حدث كون رقم البطاقة زوجياً فيكون الاحتمال المنشود:

$$P_C(A) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{9}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{9}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}} = \frac{10}{19}$$

وضّح خطوات هذا الحل.

مثال 2

تحتوي علبه 12 مصباحاً كهربائياً، منها 8 مصابيح لتوفير الطاقة، والباقي مصابيح عادية. اخترنا مصباحين عشوائياً من هذه العلبة واحداً تلو الآخر دون إعادة:

1. أوجد احتمال أن يكون المصباحان من مصابيح توفير الطاقة.
2. أوجد احتمال أن يكون أحدهما عادياً والآخر لتوفير الطاقة.

الحل:

لنتأمّل الحدثين

A : " الحصول على مصباح لتوفير الطاقة بنتيجة الاختيار الأول "

B : " الحصول على مصباح لتوفير الطاقة بنتيجة الاختيار الثاني "

1. المطلوب هو $P(A \cap B)$، وهذا يُحسب ببساطة كما يأتي $P(A \cap B) = P(A)P_A(B) = \frac{8}{12}\cdot\frac{7}{11} = \frac{14}{33}$.

2. المطلوب هو:

$$P((A\cap B')\cup(A'\cap B))=P(A\cap B')+P(A'\cap B)$$
$$=P(A)P_A(B')+P(A')P_{A'}(B)$$
$$=\frac{8}{12}\cdot\frac{4}{11}+\frac{4}{12}\cdot\frac{8}{11}=\frac{16}{33}$$

مثال 3

صندوق فيه 12 كرة متماثلة منها 4 كراتٍ زرقاء و 8 كرات حمراء، سُحبت منه ثلاثُ كرات عشوائياً واحدة تلو الأخرى دون إعادة، ما احتمال أن تكون الكرات الثلاث المسحوبة حمراء؟

الحل:

طريقة أولى: نتأمّل الأحداث

A: الحدث أن تكون الكرة المسحوبة الأولى حمراء.

B: الحدث أن تكون الكرة الثانية المسحوبة حمراء أيضاً.

C: الحدث أن تكون الكرة الثالثة المسحوبة حمراء أيضاً.

فيكون الاحتمال المنشود:

$$p(A\cap B\cap C)=p(A)\cdot p_A(B)\cdot p_{A\cap B}(C)$$
$$=\frac{8}{12}\cdot\frac{7}{11}\cdot\frac{6}{10}=\frac{14}{55}$$

طريقة ثانية: نحصل على ثلاث كرات حمراء بـ $C(8,3)$ طريقة، والعدد الكلّيّ لنتائج سحب ثلاث كرات يساوي $C(12,3)$. إذن الاحتمال المطلوب يساوي $\frac{C(8,3)}{C(12,3)}=\frac{14}{55}$.

تمرينات

1 استطلع مدير مدرسة ثانوية مختلطة آراء طلبة الصف الثالث الثانوي العلمي حول رغبتهم في القيام برحلة إلى أحد الأماكن الأثرية، وكانت النتيجة كالآتي:

الجنس	يرغبون بالرحلة	لا يرغبون بالرحلة	مترددون	المجموع
ذكور	11	3	2	16
إناث	9	4	6	19
مجموع	20	7	8	35

فإذا اختير أحد الطلبة عشوائياً، فأجب عن الأسئلة الآتية:

1) ما احتمال أن يكون هذا الطالب ممن يرغبون بالرحلة؟

2) ما احتمال أن يكون ممن يرغبون في الرحلة، علماً أنه ذكر؟

3) ما احتمال أن يكون متردداً مع أنه أنثى؟

4) ما احتمال أن يكون ذكراً إذا علمت أنه لا يرغب في الرحلة ؟

2 إذا كان احتمال مشاركة الطالب A في سباق الجري الذي تقيمه المدرسة هو $\frac{8}{10}$. واحتمال مشاركة الطالب B في السباق نفسه هو $\frac{5}{10}$. واحتمال مشاركة الطالب A بشرط مشاركة B هو $\frac{9}{10}$، فإذا شارك الطالب A بالسباق، فما احتمال عدم مشاركة الطالب B؟

3 صندوق فيه 4 كرات حمراء، وثلاث سوداء. سُحبت كرتان على التوالي دون إعادة. احسب احتمال أن تكون:

1) الكرة الثانية حمراء إذا كانت الأولى حمراء.

2) الكرتان حمراوين.

4 إذا كانت عودة موظف إلى منزله تجري على مرحلتين، في المرحلة الأولى يمكنه أن يستقل القطار باحتمال $\frac{1}{10}$، أو أن يستقل حافلة.

في المرحلة الثانية يمكنه أن يتابع سيرا على الأقدام أو أن يستقل سيارة أجرة.

إذا أتم المرحلة الأولى باستعمال الحافلة، فإن احتمال وصوله إلى منزله سيراً على الأقدام يساوي $\frac{6}{10}$. أما إذا أتم المرحلة الأولى باستعمال القطار، فإن احتمال وصوله إلى منزله مستقلاً سيارة أجرة يساوي $\frac{3}{10}$. ما احتمال أن يصل الرجل إلى منزله سيراً على الأقدام ؟

الاستقلال الاحتمالي

هل تؤثر إصابة الهدف من قبل أحد الرماة في احتمال إصابة الرامي الآخر للهدف؟

$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$

1.3.1 الاستقلال الاحتمالي:

من المسائل المهمة في حساب الاحتمال دراسة العلاقات الاحتمالية بين الأحداث، فإذا كان A و B حدثين متعلقين بتجربة معينة فإن وقوع أحد الحدثين قد يؤثر على احتمال وقوع الحدث الآخر.

تعريف: إذا كان A و B حدثين في فضاء احتمالي $(\Omega,\mathcal{P}(\Omega),P)$، نقول إنّ الحدثين A و B مستقلان احتمالياً إذا وفقط إذا تحقق الشرط : $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$.

في حالة $P(B)\neq 0$، يُكافئ الاستقلال الاحتمالي للحدثين A و B أن يكون

$$P_B(A)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{P(A)P(B)}{P(B)}=P(A)$$

أي إنّ احتمال وقوع الحدث A لا يتغيّر بتأثير وقوع الحدث B.

مثال

في تجربة رمي حجر نرد مرة واحدة: ليكن A الحدث الموافق لظهور وجه عدد نقاطه زوجي، وليكن B الحدث الموافق لظهور وجه عدد نقاطه مربّع لعدد صحيح، برهن أنّ A و B مستقلان احتمالياً.

الحل:

في الحقيقة لدينا $A=\{2,4,6\}$ و $B=\{1,4\}$ و $A\cap B=\{4\}$ إذن $p(A)=\frac{1}{2}$ و $p(B)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$ وأخيراً $p(A\cap B)=\frac{1}{6}$. نستنتج أنّ $p(A\cap B)=p(A).p(B)$ فالحدثان A و B مستقلان احتمالياً.

ملاحظة :

1. إنّ المساواة $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$ صحيحة فقط إذا كان الحدثان A و B مستقلين احتمالياً ومن ثم لا يمكن استعمالها إلا بعد التحقق من كون الحدثين A و B مستقلين احتمالياً.
2. هناك أحداث توحي صياغتها بأنها مستقلة كما هي حال الأحداث في مسائل الرمي المتتالي على هدف، إلقاء قطعة نقود مرتين أو أكثر، إلقاء حجر نرد مرتين أو أكثر، والأحداث الناتجة عن تجربة يجري فيها السحب بالتتالي مع الإعادة، وبوجه عام الأحداث الناتجة عن تكرار تجربة في الشروط نفسها عدداً من المرات.
3. هناك أحداث لا يمكن الحكم مباشرة على استقلاليتها إلا من التعريف $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$.

مبرهنة: في فضاء احتمالي $(\Omega,\mathcal{P}(\Omega),P)$، إذا كان الحدثان A و B مستقلين احتمالياً كان الحدثان A و B' مستقلين احتمالياً أيضاً.

الإثبات:

$$P(A\cap B')=P(A\setminus B)=P(A)-P(A\cap B)$$

(لأنّ A و B مستقلان احتمالياً)

$$=P(A)-P(A)\cdot P(B)=P(A)(1-P(B))$$

$$=P(A)\cdot P(B')$$

فالحدثان A و B' مستقلان احتمالياً.

نتيجتان:

في فضاء احتمالي $(\Omega,\mathcal{P}(\Omega),P)$.

1) إذا كان الحدثان A و B مستقلين احتمالياً، كان الحدثان A' و B مستقلين احتمالياً .

2) إذا كان الحدثان A و B مستقلين احتمالياً، كان الحدثان A' و B' مستقلين احتمالياً أيضاً.

مثال

يُطلق كل من الراميين A و B طلقةً واحدة على هدف. فإذا كان احتمال أن يصيب الرامي A الهدف يساوي $\left(\frac{6}{10}\right)$ واحتمال أن يصيب الرامي B الهدف يساوي $\left(\frac{7}{10}\right)$.

1. ما احتمال أن يصيب الراميان الهدف معاً ؟

2. ما احتمال أن يصيب أحدهما على الأقل الهدف؟

3. ما احتمال عدم إصابة الهدف؟

4. ما احتمال أن يصيب أحدهما فقط الهدف؟

5. إذا علمت أنّ أحدهما على الأقل أصاب الهدف، فما احتمال أن يكون الرامي A فقط هو الذي أصاب الهدف ؟

6. إذا علمت أنّ أحدهما على الأقل أصاب الهدف، فما احتمال أن يكون الرامي A هو الذي أصاب الهدف ؟

الحل:

لنرمز بالرمز A إلى الحدث " الرامي A يصيب الهدف "

ولنرمز بالرمز B إلى الحدث "الرامي B يصيب الهدف "

فيكون لدينا استناداً إلى نص المسألة : $P(A)=\frac{6}{10}$ و $P(B)=\frac{7}{10}$.

1. إنّ إصابة الهدف من أحد الراميين لا تؤثر في احتمال إصابته من الآخر فالحدثان A و B مستقلان عشوائياً، ومنه

$$P(A\cap B)=P(B)\cdot P(B)=\frac{6}{10}\times\frac{7}{10}=\frac{42}{100}$$

2. احتمال أن يصيب أحدهما على الأقل الهدف:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

$$=\frac{6}{10}+\frac{7}{10}-\frac{42}{100}=\frac{88}{100}$$

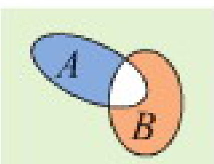
ويمكن أيضاً أن نقول إنّ A' و B' مستقلان احتمالياً إذن

$$P(A'\cap B')=P(B')\cdot P(B')=\frac{4}{10}\times\frac{3}{10}=\frac{12}{100}$$

ومن ثَمّ

$$P(A\cup B)=1-P((A\cup B)')=1-P(A'\cap B')=\frac{88}{100}.$$

3. إذا رمزنا بالرمز F إلى حدث عدم إصابة الهدف، وجدنا أنّ $F=(A\cup B)'=A'\cap B'$ لذلك يمكن حساب احتمال F بطريقتين. فمثلاً $P(F)=1-P(A\cup B)=\frac{12}{100}$.



4. ليكن D الحدث الموافق لإصابة أحد الراميين الهدف فقط. عندئذ

$$D=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)=(A\cup B)\setminus(A\cap B)$$

إذن، اعتماداً على نتائج الطلبين الأول والثاني تجد أنّ :

$$P(D)=P(A\cup B)-P(A\cap B)=\frac{88}{100}-\frac{42}{100}=\frac{46}{100}$$

أو بالاستفادة من الاستقلال الاحتمالي للأحداث A' و B وللأحداث A و B' :

$$\begin{aligned}P(D)&=P(A\cap B')+P(A'\cap B)\\&=P(A)\cdot P(B')+P(A')\cdot P(B)\\&=\frac{6}{10}\cdot\frac{3}{10}+\frac{4}{10}\cdot\frac{7}{10}=\frac{46}{100}\end{aligned}$$

5. إنّ الحدث الموافق لإصابة الرامي A فقط الهدف هو $A_1=A\setminus B=A\cap B'$. إذن بالاستفادة من الاستقلال الاحتمالي للحدثين A و B' يمكننا أن نكتب:

$$P(A_1)=P(A\cap B')=P(A)\cdot P(B')=\frac{6}{10}\cdot\frac{3}{10}=\frac{18}{100}$$

أمّا الاحتمال المشروط المطلوب فهو $P_{A\cup B}(A_1)$، ولكن $A_1\subseteq A\cup B$ إذن

$$P_{A\cup B}(A_1)=\frac{P\left((A\cup B)\cap A_1\right)}{P(A\cup B)}=\frac{P(A_1)}{P(A\cup B)}=\frac{18}{100}\Big/\frac{88}{100}=\frac{9}{44}$$

6. الاحتمال المشروط المطلوب هو $P_{A\cup B}(A)$،

$$P_{A\cup B}(A)=\frac{P\left((A\cup B)\cap A\right)}{P(A\cup B)}=\frac{P(A)}{P(A\cup B)}=\frac{6}{10}\Big/\frac{88}{100}=\frac{15}{22}$$

تمرينات

1 تقدم طالبان إلى امتحان اللغة الإنكليزية. احتمال نجاح الأول $\frac{3}{4}$، واحتمال نجاح الثاني $\frac{4}{5}$.

a. ما احتمال نجاحهما معاً ؟

b. ما احتمال نجاح أحدهما على الأقل ؟

2 رُمي حجرا نرد أحدهما أحمر اللون والآخر أخضر، وليكن A الحدث " ظهور العدد 4 على حجر النرد الأحمر" والحدث B " مجموع العددين الظاهرين فردي " هل الحدثان مستقلان ؟

3 صندوقان متماثلان فيهما كرات متماثلة. الصندوق (I) يحوي ثلاث كرات مرقمة بالأرقام $1, 2, 3$ و يحوي الصندوق (II) أربع كرات مرقمة بالأرقام $2, 3, 4, 5$. نسحب عشوائياً كرة من الصندوق (I) ثم نسحب كرة من الصندوق (II) والمطلوب :

a. اكتب فضاء العينة المرتبط بهذا الاختبار.

b. نتأمّل الأحداث A : إحدى الكرتين على الأقل تحمل الرقم 3.

B : مجموع رقمي الكرتين أكبر تماماً من 5.

هل الحدثان A و B مستقلان احتمالياً ؟

4 في تجربة رمي ثلاث قطع نقود معاً إذا كان الحدث A ظهور شعار واحد على الأكثر، والحدث B ظهور كتابتين فقط هل الحدثان A و B مستقلان احتمالياً.

5 يطلق راميان A و B طلقة واحدة على هدف معين، إذا كان احتمال عدم إصابة الهدف بأية طلقة يساوي $\frac{3}{25}$ واحتمال إصابة A فقط للهدف يساوي $\frac{7}{25}$.

a. احسب احتمال أن يصيب الرامي B الهدف.

b. احسب احتمال أن يصيب الرامي A الهدف.

6 وجد في أحد المشافي أن 50% من المرضى يعانون من ارتفاع ضغط الدم ، وأن 30% من المرضى مصابون بمرض التهاب الكبد وأن 20% يعانون من المرضين معاً. هل ارتفاع ضغط الدم ومرض التهاب الكبد مستقلان ؟

المتغيّر العشوائي والتوزيع الاحتمالي

سوف نتعلم :

1-4-1 المتغير العشوائي

2-4-1 القانون الاحتمالي لمتغير عشوائي

3-4-1 التوقع الرياضي

هل يمكن تشكيل دالة من فضاء العينة تقرن بكل تجربة نلقي فيها قطعة نقود ثلاث مرات متتالية عدد مرات ظهور صورة؟

1.4.1 المتغيّر العشوائي:

تزودنا التجربة الإحصائية بمجموعة بيانات (كيفية أو كمية) فمثلاً عند رمي قطعة نقود معدنية ثلاث مرات متتالية نحصل على البيانات (فضاء العيّنة) الآتية:

$$\Omega=\{(H,H,H),(T,H,H),(H,T,H),(H,H,T),$$
$$(T,H,T),(T,T,H),(H,T,T),(T,T,T)\}$$

يساعد ردُّ هذه البيانات الكيفية إلى بيانات كمية (عددية) في تسهيل الدراسة واستقراء النتائج. فمثلاً إذا قابلنا كل عنصر من المجموعة Ω بعدد مرات ظهور الصّورة (H) في كل تجربة،فإننا نحصل على المجموعة القيم التالية : $\{3,2,1,0\}$.

ونكون بذلك قد عرفنا على فضاء العينة Ω دالة عددية X. تقرن بكل تجربة نلقي فيها قطعة نقود ثلاث مرات متتالية عدد مرات ظهور الصّورة (H).

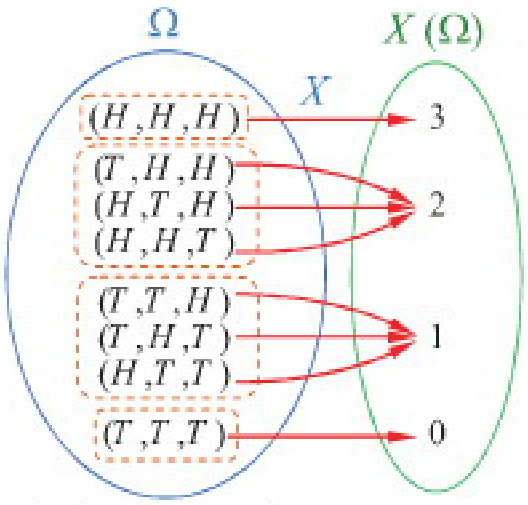
تأخذ X القيمة 3 فقط عند وقوع الحدث البسيط $A=\{(H,H,H)\}$. نرمز إلى هذا الحدث بالرمز $\{X=3\}$.

وتأخذ X القيمة 2 فقط عند وقوع الحدث $B=\{(T,H,H),(H,T,H),(H,H,T)\}$. نرمز إلى هذا الحدث بالرمز $\{X=2\}$.

وتأخذ X القيمة 1 فقط عند وقوع الحدث $C=\{(T,T,H),(T,H,T),(H,T,T)\}$. نرمز إلى هذا الحدث بالرمز $\{X=1\}$.

وأخيراً تأخذ X القيمة 0 فقط عند وقوع الحدث $D=\{(T,T,T)\}$. نرمز إلى هذا الحدث بالرمز $\{X=0\}$.

وأخيراً نرمز بالرمز $X(\Omega)$ إلى مجموعة القيم التي تأخذها X أي $\{0,1,2,3\}$.



نسمي الدالة X متغيّراً عشوائياً ونسمّي المجموعة $X(\Omega)=\{0,1,2,3\}$ مجموعة قيم المتغيّر العشوائي X، ومنه التعريف الآتي:

تعريف: ليكن $(\Omega,\mathcal{P}(\Omega),\mathrm{P})$ فضاءً احتمالياً منتهياً. نعرّف المتغيّر العشوائي بأنّه دالة منطلقها فضاء العيّنة Ω، ومستقرها مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$، وإذا رمزنا إلى هذه الدالة بالرمز X، رمزنا إلى مجموعة القيم التي تأخذها بالرمز $X(\Omega)$، وأسميناها مجموعة قيم المتغيّر العشوائي X، وإذا كانت r إحدى القيم التي يأخذها المتغير العشوائي X، أي $r\in X(\Omega)$، عرّفنا الحدث $\{X=r\}$ بأنه مجموعة الأحداث البسيطة التي يأخذ عندها المتغير العشوائي X القيمة r.

مثال

في تجربة رمي حجري نرد مرة واحدة. ليكن X المتغير العشوائي الذي يدل على مجموع نقط الوجهين الظّاهرين.

1. اكتب مجموعة قيم المتغيّر العشوائي.
2. ما الحدث $\{X=3\}$؟ وما احتمال وقوع هذا الحدث؟
3. ما الحدث $\{X=7\}$؟ وما احتمال وقوع هذا الحدث؟

الحل:

1. $X(\Omega)=\{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$
2. يأخذ المتغيّر العشوائي X القيمة 3 عندما يظهر وجهان مجموع نقاطهما يساوي 3

أي : $\{X=3\}=\{(1,2),(2,1)\}$، واحتمال وقوع هذا الحدث يساوي $\frac{1}{18}=\frac{2}{36}$.

3. يأخذ المتغيّر العشوائي X القيمة 7 عندما يساوي مجموع نقاط الوجهين الظّاهرين العدد 7 أي :

$$\{X=7\}=\{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$$

واحتمال وقوع هذا الحدث يساوي $\frac{1}{6}=\frac{6}{36}$.

2.4.1 القانون الاحتمالي لمتغير عشوائي:

لنرجع إلى تجربة رمي قطعة نقود معدنية عادلة ثلاث مرات متتالية. وليكن X المتغير العشوائي الذي يعطي عدد المرات التي تظهر فيها الصورة H في كل تجربة. لقد رأينا أنّ $X(\Omega)=\{0,1,2,3\}$ وأنّ الأحداث $\{X=r\}$ حيث $r\in\{0,1,2,3\}$ هي أحداث مميزة فلننظّم جدولاً باحتمالاتها :

r	0	1	2	3
$P(X=r)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

لاحظ أننا رمزنا $P(X=r)$ بدلاً من الرمز الصحيح $P(\{X=r\})$، وذلك بهدف تبسيط الكتابة.

في هذا الجدول نقرن بكل قيمة r من $X(\Omega)$ عدداً $P(X=r)$ يساوي احتمال أن يأخذ المتغير العشوائي X القيمة r. إذن نعرّف على المجموعة $X(\Omega)$ دالة عددية : $r\mapsto P(X=r)$، نسمي هذه الدالة القانون الاحتمالي للمتغير العشوائي.

وبوجه عام لدينا التعريف الآتي:

تعريف: ليكن $(\Omega,\mathcal{P}(\Omega),P)$ فضاءً احتمالياً منتهياً. وليكن X متغيراً عشوائياً على Ω مجموعة قيمه $X(\Omega)=\{r_1,r_2,\ldots,r_n\}$. نسمي الدالة

$$f_X: X(\Omega)\rightarrow\mathbb{R}: r\mapsto f_X(r)=P(X=r)$$

القانون الاحتمالي للمتغيّر العشوائي X .

وفي الحالة التي يكون فيها عدد عناصر المجموعة $X(\Omega)$ صغيراً فإننا نمثّل f_X في جدول يحوي سطره الأوّل عناصر $X(\Omega)$ أي $r_1,r_2,\ldots,r_n$ ونضع في السطر الثاني تحت كل عنصر r_k قيمة $f_X(r_k)$ أي احتمال أن يأخذ المتغيّر العشوائي X القيمة r_k. كما فعلنا في المثال السابق :

r_i	r_1	r_2	....	r_r
$f_X(r_i)$	$f_X(r_1)$	$f_X(r_2)$	....	$f_X(r_r)$

ملاحظة :

① لما كانت قيم القانون الاحتمالي f_X احتمالات أحداث فهي جميعاً أعداد من المجال $[0,1]$.

② ولما كانت الأحداث $\{X=r_1\}$ ، $\{X=r_2\}$ ، $\dots$ ، $\{X=r_n\}$ تجزئة الفضاء Ω إلى أحداث منفصلة استنتجنا أن مجموع احتمالات هذه الأحداث يجب أن يساوي 1 أي

$$f_X(r_1)+f_X(r_2)+\cdots+f_X(r_n)=1$$

③ إذا كان المتغير العشوائي معروفاً من السياق، فيمكن أن نكتفي بكتابة f بدلاً من f_X.

3.4.1 التوقع الرياضي (أو الأمل الرياضي) للمتغير العشوائي:

ليكن $(\Omega,\mathcal{P}(\Omega),P)$ فضاء احتمالياً منتهياً. وليكن X متغيراً عشوائياً على Ω مجموعة قيمه $X(\Omega)=\{r_1,r_2,\dots,r_n\}$، وقانونه الاحتمالي f_X . عندئذ نسمي العدد

$$\sum_{k=1}^{n} r_k \cdot P(X=r_k)=r_1\cdot f_X(r_1)+r_1\cdot f_X(r_2)+\cdots+r_n\cdot f_X(r_n)$$

التوقع الرياضي للمتغير العشوائي X ونرمز إليه بالرمز $E(X)$. أي:

$$E(X)=\sum_{k=1}^{n} r_k \cdot f_X(r_k)$$

مثال 1

يحوي صندوق 5 كرات متماثلة ثلاث منها بيضاء اللون واثنتان سوداوان. نسحب من الصندوق عشوائياً ثلاث كرات معاً. و ليكن X المتغير العشوائي الذي يدل على عدد الكرات السوداء المسحوبة. اكتب مجموعة قيم المتغيّر العشوائي X وجدول قانونه الاحتمالي ثُم احسب توقعه الرياضي.

الحل:

من الواضح أنّ $X(\Omega)=\{0,1,2\}$.

الحدث $\{X=0\}$ هو حدث سحب ثلاث كرات بيضاء. إذن $f(0)=\frac{C(3,3)}{C(5,3)}=\frac{1}{10}$.

الحدث $\{X=1\}$ هو حدث سحب كرتين بيضاوين وكرة سوداء. إذن

$$f(1)=\frac{C(3,2)\cdot C(2,1)}{C(5,3)}=\frac{6}{20}$$

وأخيراً الحدث $\{X=1\}$ هو حدث سحب كرة بيضاء وكرتين سوداوين. إذن

$$f(2)=\frac{C(3,1)\cdot C(2,2)}{C(5,3)}=\frac{3}{10}$$

ومنه جدول القانون الاحتمالي للمتغيّر العشوائي X:

r_i	0	1	2
$f(r_i)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{3}{10}$

أما التوقع الرياضي للمتغيّر العشوائي X فيحسب كما يلي :

$$E(X)=\sum_{i=1}^{3} r_k \cdot f(r_k)=0+\frac{6}{10}+\frac{6}{10}=\frac{12}{10}=\frac{6}{5}$$

مثال 2

يطلق رامٍ طلقتين على هدف. احتمال إصابته الهدف بالطلقة الأولى $\frac{6}{10}$ ، واحتمال إصابته للهدف بالطلقة الثانية $\frac{8}{10}$. يربح الرامي 5 نقط إذا أصاب الهدف بالطلقة الأولى ويربح 3 نقط إذا أصاب الهدف بالطلقة الثانية. يخسر الرامي 4 نقط إذا لم يصب الهدف بالطلقة الأولى ويخسر 5 نقط إذا لم يصب الهدف بالطلقة الثانية. ليكن X المتغير العشوائي الذي يدل على عدد النقط التي ينالها الرامي في نهاية المباراة، اكتب قيم المتغيّر العشوائي X، واكتب جدول قانونه الاحتمالي، ثُم احسب توقعه الرّياضي.

الحل:

إذا أصاب الرامي في الرميتين نال $5+3=8$ نقاط

وإذا لم يصب في الرمية الأولى، وأصاب في الرمية الثانية نال $-4+3=-1$ نقطة.

وإذا أصاب في الرمية الأولى، ولم يصب في الرمية الثانية نال $5-5=0$ نقطة.

وأخيراً إذا لم يصب الرامي بالطلقتين نال: $-4-5=-9$ نقاط.

إذن مجموعة قيم المتحول العشوائي هي: $X(\Omega)=\{-9,-1,0,8\}$.

لنعرّف الحدثين A و B كما يأتي:

A: إصابة الهدف بالرمية الأولى.

B: إصابة الهدف بالرمية الثانية.

الحدثان A و B مستقلّان احتمالياً ولدينا

$$f(-9)=P(X=-9)=\mathrm{P}(A'\cap B')$$
$$=\mathrm{P}(A')\cdot\mathrm{P}(B')=\frac{4}{10}\times\frac{2}{10}=\frac{8}{100}$$

وكذلك

$$f(-1)=P(X=-1)=\mathrm{P}(A'\cap B)$$
$$=\mathrm{P}(A')\cdot\mathrm{P}(B)=\frac{4}{10}\times\frac{8}{10}=\frac{32}{100}$$
$$f(0)=P(X=0)=\mathrm{P}(A\cap B')$$
$$=\mathrm{P}(A)\cdot\mathrm{P}(B')=\frac{6}{10}\times\frac{2}{10}=\frac{12}{100}$$

وأخيراً

$$f(8)=\mathrm{P}(A\cap B)$$
$$=\mathrm{P}(A)\cdot\mathrm{P}(B)=\frac{6}{10}\times\frac{8}{10}=\frac{48}{100}$$

وبذلك نحصل على جدول القانون الاحتمالي للمتغير العشوائي X :

r_k	-9	-1	0	8
$f(r_k)$	$\frac{8}{100}$	$\frac{32}{100}$	$\frac{12}{100}$	$\frac{48}{100}$

أما التّوقع الرّياضي للمتغير العشوائي X فيحسب بسهولة كما يأتي:

$$E(X)=\sum_{k=1}^{4} r_k.f(r_k)$$
$$=\frac{-72}{100}+\frac{-32}{100}+0+\frac{384}{100}=\frac{280}{100}=2,8$$

مثال 3

يحوي صندوق ثلاث كرات مرقّمة بالأرقام 1 و 2 و 3. نجري تجربة سحب كرتين من الصندوق مع الإعادة. ونعرّف المتحول العشوائي X الذي يساوي مجموع رقمي الكرتين المسحوبتين.

1. اكتب مجموعة قيم المتغيّر العشوائي X.
2. اكتب جدول القانون الاحتمالي للمتغير X.
3. احسب التّوقع الرّياضي للمتغير X.

الحل:

1. هنا لدينا $\Omega=\{(i,j):1\le i,j\le 3\}$

و $X(\Omega)=\{2,3,4,5,6\}$

2. يوضح الجدول الآتي حساب القانون الاحتمالي للمتغير العشوائي X.

k	$\{X=k\}$	$f_X(k)$
2	$\{(1,1)\}$	$\frac{1}{9}$
3	$\{(1,2),(2,1)\}$	$\frac{2}{9}$
4	$\{(1,3),(2,2),(3,1)\}$	$\frac{3}{9}$
5	$\{(2,3),(3,2)\}$	$\frac{2}{9}$
6	$\{(3,3)\}$	$\frac{1}{9}$

ومنه القانون الاحتمالي الآتي للمتحوّل العشوائي X:

r_k	2	3	4	5	6
$f_X(r_k)$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

.3

$$E(X)=\sum_{k=1}^{n} r_k \cdot f(r_k)=\frac{1}{9}(2+6+12+10+6)=4$$

مثال 4

صندوق يحوي 6 بطاقات تحمل الأرقام 6 , 5 , 4 , 3 , 2 , 1

أولاً :نسحب عشوائياً من الصندوق بطاقتين معاً ، نعرف المتغيّر العشوائي X الذي يدل على مجموع رقمي البطاقتين المسحوبتين.

1) عين مجموعة قيم المتغير العشوائي X.

2) نظّم جدول القانون الاحتمالي للمتغيّر العشوائي X.

ثانياً : في تجربة أخرى نسحب من الصندوق ذاته بطاقتين على التتالي مع الإعادة، ونعرّف المتغيّر العشوائي Y الذي يدل على مجموع رقمي البطاقتين المسحوبتين عيّن في هذه الحالة مجموعة قيم Y، ثم نظم جدول قانونه الاحتمالي.

الحل :

أولاً:

1. $X(\Omega)=\{3,4,5,6,7,8,9,10,11\}$

2. يمكن أن ننظم جدولاً يساعد في تعيين القانون الاحتمالي f_X على النحو الآتي :

+	1	2	3	4	5	6
1		3	4	5	6	7
2	3		5	6	7	8
3	4	5		7	8	9
4	5	6	7		9	10
5	6	7	8	9		11
6	7	8	9	10	11	

ومنه نجد القانون الاحتماليّ f_X للمتغير العشوائي X :

r_k	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$f_X(r_k)$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$

ثانياً :

يمكن أن ننظم جدولاً يساعد في إيجاد $Y(\Omega)$ وفي حساب القانون الاحتماليّ f_Y كما يأتي:

+	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

إذن $Y(\Omega)=\{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$. أما جدول القانون الاحتمالي f_Y للمتغير العشوائي Y فهو الآتي :

r_k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$f_Y(r_k)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

مثال 5

صندوق يحوي 6 بطاقات تحمل الأرقام 6 , 5 , 4 , 3 , 2 , 1 نسحب عشوائياً من الصندوق بطاقتين على التتالي دون إعادة، ونعرف المتغيّر العشوائي X الذي يدل على الرقم الأكبر بين رقمي البطاقتين المسحوبتين.

1. عين مجموعة قيم المتغير العشوائي X.
2. نظّم جدول التوزيع الاحتمالي للمتغيّر العشوائي X.
3. احسب التوقع الرياضي للمتغير العشوائي X.

الحل:

1. أولاً نلاحظ أنّ $X(\Omega)=\{2,3,4,5,6\}$.
2. يقع الحدث $\{X=k\}$ إذا كان رقم البطاقة الأولى يساوي k ورقم الثانية من بين $\{1,2,\ldots,k-1\}$، أو إذا كان رقم البطاقة الأولى من بين $\{1,2,\ldots,k-1\}$ ورقم البطاقة الثانية k. إذن

$$f_X(k)=P(X=k)=\frac{2(k-1)}{6\cdot 5}=\frac{k-1}{15}$$

ومنه جدول القانون الاحتمالي للمتغيّر العشوائي X.

k	2	3	4	5	6
$f_X(k)$	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{5}{15}$

3. $E(X)=\frac{1}{15}(2+6+12+20+30)=\frac{70}{15}=\frac{14}{3}$

مثال 6

ليكن n عدداً طبيعياً يحقق $2 \leq n \leq 8$. يحوي صندوق 10 كرات متماثلة منها n كرة سوداء اللون وباقي الكرات حمراء اللون، نسحب من الصندوق عشوائياً كرتين معاً.

1. احسب بدلالة n المقدار P_1 الذي يمثل احتمال أنّ تكون الكرتان مختلفتين .
2. احسب بدلالة n المقدار P_2 الذي يمثل احتمال أنّ تكون الكرتان من لون واحد. وعين n ليكون P_2 أصغر ما يمكن، ثُم احسب P_2 عندئذٍ.
3. في حالة $n = 5$، نعرف المتغير العشوائي X الذي يدل على عدد الكرات السوداء المسحوبة. عين مجموعة قيم المتغير العشوائي X. ثُم نظّم جدول قانونه الاحتمالي واحسب التوقعه الرياضي.

الحل:

1. من الواضح أنّ $P_1 = \dfrac{C(n,1) \cdot C(10-n,1)}{C(10,2)} = \dfrac{n \cdot (10-n)}{45} = \dfrac{10n - n^2}{45}$.

2. طريقة أولى : نلاحظ أن حدث " الكرتان مختلفتان " هو الحدث المضاد للحدث " الكرتان من لون واحد " لذلك نستنتج أن

$$P_2 = 1 - P_1 = 1 - \frac{10n - n^2}{45} = \frac{n^2 - 10n + 45}{45} = \frac{(n-5)^2 + 20}{45}$$

طريقة ثانية: نحسب مباشرة كما يأتي :

$$P_2 = \frac{C(n,2) + C(10-n,2)}{C(10,2)} = \frac{\frac{n(n-1)}{2} + \frac{(10-n)\cdot(9-n)}{2}}{45}$$

$$P_2 = \frac{n\cdot(n-1) + (10-n)\cdot(9-n)}{90} = \frac{2n^2 - 20n + 90}{90}$$

$$= \frac{(n-5)^2 + 20}{45}$$

يكون P_2 أصغر ما يمكن عندما يكون المقدار الموجب $(n-5)^2$ أصغر ما يمكن أي عندما يكون $n = 5$، عند ذلك: $P_2 = \frac{40}{90} = \frac{4}{9}$.

3. مجموعة قيم المتغيّر العشوائي X هي : $X(\Omega) = \{0,1,2\}$، ولدينا

$$f(0) = \frac{C(5,2)}{C(10,2)} = \frac{10}{45} = \frac{2}{9}$$

$$f(1)=\frac{C(5,1)\cdot C(5,1)}{C(10,2)}=\frac{25}{45}=\frac{5}{9}$$

$$f(2)=\frac{C(5,2)}{C(10,2)}=\frac{2}{9}$$

ومنه جدول القانون الاحتمالي f_X للمتغيّر العشوائي X

r	0	1	2
$f_X(r)$	$\frac{2}{9}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{2}{9}$

أما التوقع الاحتمالي للمتغير العشوائي X فيساوي

$$E(X)=0\times\frac{2}{9}+1\times\frac{5}{9}+2\times\frac{2}{9}=\frac{9}{9}=1$$

تدريب

[1] يحوي مغلف تسع بطاقات مرقمة بالأرقام 0,0,0,0,0,1,1,1,1
نسحب من المغلف ثلاث بطاقات معاً. وليكن X متغيراً عشوائياً يدل على مجموع أرقام البطاقات المسحوبة. اكتب قيم المتغيّر العشوائي X ثُم احسب توقعه الرّياضي.

[2] يرمي شخص قطعة نقود ثلاث مرات متتالية فيربح 12 نقطة إذا ظهرت ثلاث شعارات متتالية، ويربح 4 نقط إذا ظهر شعاران فقط، ويخسر 6 نقط فيما عدا ذلك.
ليكن X المتغير العشوائي الذي يدل على عدد النقط التي ينالها الشخص. اكتب مجموعة قيم المتغيّر العشوائي X ثم احسب توقعه الرّياضي.

تمرينات

[1] يحوي صندوق 6 كرات سوداء و 4 كرات بيضاء، يسحب شخص من الصّندوق ثلاث كرات على التتالي مع الإعادة. نسمّي \تجربة جيدة\ إذا جرى سحب كرتين بيضاوين على الأقل.

1) ما احتمال الحصول على تجربة جيدة ؟

2) نعرّف المتغير العشوائي X الذي قيمته تساوي عدد الكرات البيضاء المسحوبة. عين قيم المتغيّر العشوائي X ثُم اكتب جدول قانونه الاحتمالي واحسب تَوقعه الرّياضي.

[2] يحوي صندوق 9 كرات متماثلة (2 حمراء و 3 بيضاء و 4 زرقاء) نسحب عشوائياً من الصّندوق كرتين معاً.

أولاً: أوجد:

1) احتمال الحصول على كرتين بيضاوين.

2) احتمال الحصول على كرتين من اللون نفسه.

3) احتمال الحصول على كرتين من لونين مختلفين.

ثانياً: نعطي للكرة البيضاء القيمة (1) وللكرة الزرقاء القيمة (2) وللكرة الحمراء القيمة (0). ثُمّ نعرّف المتغير العشوائي X الذي يدل على مجموع القيم الناتجة من سحب كرتين معاً.

1) ما هي قيم المتغيّر العشوائي X ؟

2) اكتب جدول القانون الاحتمالي g للمتغيّر العشوائي X ثُم احسب توقعه الرّياضي.

[3] صنعت قطعة نقود بحيث يكون احتمال ظهور الصّورة (H) يساوي $\frac{3}{4}$ واحتمال ظهور الكتابة (T) يساوي $\frac{1}{4}$. ألقيت هذه القطعة ثلاث مرات متتالية. وليكن X المتغيّر العشوائي الدّال على عدد الصور الظّاهرة في الرميات الثلاثة أوجد مجموعة قيم المتغيّر العشوائي X واكتب جدول قانونه الاحتمالي، ثُم احسب توقعه الرّياضي.

[4] يحتوي صندوق على أربع كرات تحمل الأرقام $1,2,3,m$، حيث $m \in \mathbb{N}$. نسحب من الصّندوق كرة واحدة، احتمال سحب كل كرة حسب رقمها يساوي p_1, p_2, p_3, p_m. نفترض أنّ p_1, p_2, p_3, p_m بهذا الترتيب هي أربعة حدود متتالية من متتالية حسابية أساسها $\frac{1}{12}$.

1) احسب كلاً من p_1, p_2, p_3, p_m.

2) ليكن X المتغير العشوائي الدّال على رقم الكرة المسحوبة، احسب m إذا علمت أنّ التّوقع الرّياضي للمتغير العشوائي X يساوي $\frac{53}{12}$.

[5] يحوي صندوق على 33 كرة متماثلة (15 صفراء و 10 حمراء و 8 خضراء)
نسحب من الصّندوق كرة واحدة.

1) ما احتمال الحصول على كرة صفراء، كرة حمراء، كرة خضراء ؟

2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يأخذ القيمة 2 عند سحب كرة حمراء والقيمة 5 عند سحب كرة خضراء والقيمة α عند سحب كرة صفراء.

❶ أوجد قيم المتغيّر العشوائي X ثُم احسب توقعه الرّياضي.

❷ احسب α التي تجعل التّوقع الرّياضي معدوماً .

[6] يحوي صندوق 6 بطاقات تحمل الأرقام (1 , 1 , 1 , 2 , 2 , 3) نسحب من الصّندوق بطاقتين على التتالي دون إعادة، ليكن X المتغيّر العشوائي الدّال على مجموع رقمي البطاقتين المسحوبتين.

عيّن مجموعة قيم المتغيّر X ثُم اكتب جدول قانونها الاحتمالي واحسب تّوقعه الرّياضي.

[7] يسدد كل من لاعبي كرة القدم مازن ومجد مرة واحدة على المرمى، إذا كان احتمال عدم تسجيل أي هدف من قبل اللاعبين $\frac{3}{25}$ ، و احتمال أن يسجل اللاعب مازن فقط هدفاً يساوي $\frac{7}{25}$.

1) احسب احتمال أن يسجل مجد هدفاً .

2) احسب احتمال أن يسجل مازن هدفاً.

3) إذا كان X المتغيّرالعشوائي الذي يدل على عدد الأهداف التي سجّلها اللاعبون معاً، اكتب مجموعة قيم المتغيّر العشوائي X وجدول توزيعه الاحتمالي ثُم احسب توقعه الرّياضي.

[8] يحوي جهاز كهربائي (5) كتل اثنتان منها معيبتان ، يسحب عامل صيانة هذه الكتل واحدة تلو الأخرى ويفحصها على جهاز خاص لمعرفة الكتلتين المعيبتين .

1) ما احتمال معرفة الكتلتين المعيبتين بعد انتهاء الفحص الثالث .

2) إذا كان X المتغيّر العشوائي الذي يدل على عدد مرات الفحص اللازمة لمعرفة الكتلتين المعيبتين اكتب مجموعة قيم المتغيّر العشوائي X ثُم عين جدول قانونه الاحتمالي واحسب توقعه الرّياضي.

[9] صندوقان متماثلان فيهما كرات متماثلة

الصندوق (I) يحتوي كرات مرقمة بالأعداد $3,2,1$.

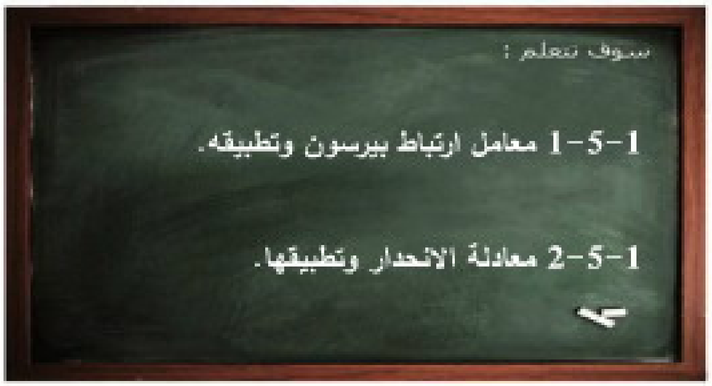
الصندوق (II) يحتوي كرات مرقّمة بالأعداد $5,4,3,2$.

1) نختار عشوائيّاً أحد الصندوقين ونسحب منه بطاقتين معاً ، احسب احتمال أن يكون مجموع رقمي البطاقتين زوجياً .

2) نختار عشوائيّاً أحد الصندوقين و نسحب منه بطاقتين معاً ، فإذا علمت أنّ مجموع رقمي البطاقتين فردي، احسب احتمال أن تكون البطاقتان قد سحبتا من الصندوق (II) .

3) نسحب عشوائياً كرتين من الصندوق (I)، ونسحب عشوائياً كرة من الصندوق (II) فإذا كان X المتغيّر العشوائيّ الذي يدل على مجموع أرقام الكرات الثلاث المسحوبة من الصندوقين، اكتب مجموعة قيم المتغيّر العشوائي X، ثُم عين جدول قانونه الاحتمالي واحسب توقّعه الرياضي.

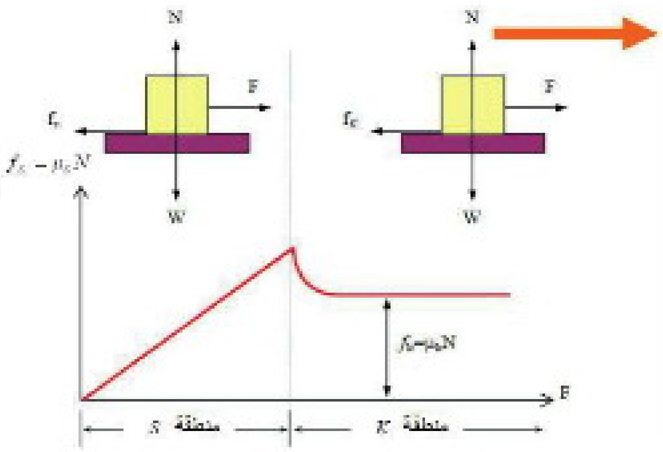
الإحصاء



مقدِمة:

لقد تعرضنا في السنوات السابقة لبعض المسائل المتعلّقة بدراسة متغير إحصائي واحد، مثل أجور مجموعة من العمال في أحد المصانع أو أطوال مجموعة من الطلّاب أو تقدير الطلاب في امتحانات فصل دراسي ما أو .... إلخ. في هذا البحث تنصب دراستنا على المسائل المتعلّقة بمتغيّرين اثنين مثل

1. العلاقة بين مستوى الذكاء والعمر العقلي للطالب.
2. العلاقة بين مستوى الدخل والإنفاق للأسرة.
3. العلاقة بين الوزن والطول لمجموعة من الأطفال.
4. العلاقة بين سرعة المشي وعدد ضربات القلب.
5. العلاقة بين السمنة والإصابة بمرض السكري.
6. العلاقة بين غياب الطالب عن المدرسة وتحصيله العلمي.



العلاقة بين القوى المؤثرة على جسم وقوى الاحتكاك بيانيا

فإذا رمزنا إلى أحد المتغيّرين X وإلى الآخر Y ، عندئذٍ قد نستطيع التعبير عن هذه العلاقة رياضياً، وتقدير قيم أحد المتغيرين بمعرفة قيم الآخر.

تقتصر دراستنا في هذا البحث على:

1. إيجاد معامل الارتباط الخطي لبيرسون، وهو مؤشر كمي يقيس مدى تبعيّة متغيرٍ لمتغيّر آخر تبعيّةً خطيةً.
2. إيجاد هذه التبعيّة الخطية أي إيجاد معادلة خطّ الانحدار للمتغيّر Y بدلالة X وبالعكس.

1.5.1 معامل ارتباط بيرسون وتطبيقه:

المتوسط الحسابي والانحراف المعياري والتغاير:

لنبدأ التذكير ببعض المقدَّرات الإحصائية المتعلّقة بمجموعة من البيانات.

تعريف1: إذا كانت $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ تمثّل عيّنة مكوّنة من n قراءة لمقدار إحصائي. عندئذ نعرّف:

- **المتوسط الحسابي** لهذه العينة بأنه المقدار $\bar{x}$ المعرّف بالصيغة:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k$$

- **تباين العينة** $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ، بأنه المقدار V_x المعرّف بالصيغة:

$$V_x = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k - \bar{x})^2 = \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right) - \bar{x}^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2$$

حيث رمزنا بالرمز $\overline{x^2}$ إلى المتوسط الحسابي لمربعات قيم العينة أي $(x_1^2, x_2^2, \ldots, x_n^2)$.

- **الانحراف المعياري للعينة** $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ، بأنه المقدار $\sigma_x = \sqrt{V_x}$. وهو مقدّر إحصائي يقيس مدى تباعد قيم العينة عن متوسطها الحسابي.

نلاحظ أن جميع المُقدرات السابقة تتعلق بعينة واحدة $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$، سنعرض في التعريف الآتي مُقدراً إحصائياً جديداً يهتم بالعلاقة بين عينتين:

تعريف2: إذا كانت $\left\{(x_k, y_k) : 1 \le k \le n\right\}$ تمثّل عيّنة مكوّنة من n قراءة لثنائيات من المقادير الإحصائية. عندئذ نعرّف **تغاير** هذه العينة بأنّه المقدار σ_{xy} المعرّف بالصيغة :

$$\sigma_{xy} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k - \bar{x})(y_k - \bar{y}) = \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right) - \bar{x}\cdot\bar{y} = \overline{xy} - \bar{x}\cdot\bar{y}$$

حيث $\bar{x}$ و $\bar{y}$ هما المتوسطان الحسابيان للعينتين $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ و $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ بالترتيب. ورمزنا بالرمز $\overline{xy}$ إلى المتوسط الحسابي للجداءات: $(x_1y_1, x_2y_2, \ldots, x_ny_n)$.

مثال 1 الجدول الآتي يبين درجات 5 طلاب في الرياضيات والفيزياء (الدرجة العظمى للمادة 10)

درجة الفيزياء x_i	7	9	9	10	6
درجة الرياضيات y_i	8	8	7	9	5

احسب كلاً من المتوسط الحسابي والانحراف المعياري لدرجات الطلاب في كل مادة، ثُمّ احسب تغاير درجات الطلاب في المادتين.

الحل:

نبدأ بتنظيم حساباتنا في جدول كما يأتي:

k	x_k	x_k^2	y_k	y_k^2	$x_k y_k$
1	7	49	8	64	56
2	9	81	8	64	72
3	9	81	7	49	63
4	10	100	9	81	90
5	6	36	5	25	30
$\sum_{k=1}^{5}$	41	347	37	283	311
$\frac{1}{5}\sum_{k=1}^{5}$	8.2	69.4	7.4	56.6	62.2

وعليه، المتوسط الحسابي لدرجات الطلّاب في الفيزياء هو $\bar{x} = 8.2$.

والمتوسط الحسابي لدرجات الطلاب في الرياضيات هو $\bar{y} = 7.4$.

ونقرأ من الجدول:

$$\overline{x^2} = 69.4 \text{ و } \overline{y^2} = 56.6 \text{ و } \overline{xy} = 62.2$$

الانحراف المعياري لدرجات الطلاب في الفيزياء هو

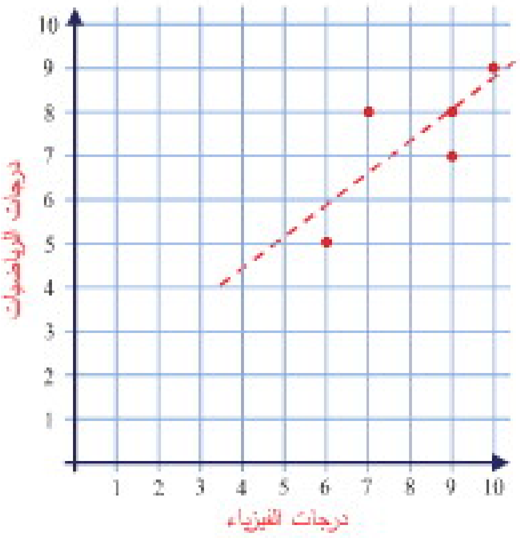
$$\sigma_x = \sqrt{\overline{x^2} - \bar{x}^2} = \sqrt{69.4 - 67.24} = \sqrt{2.16} \approx 1.47$$

الانحراف المعياري لدرجات الطلّاب في الرياضيات هو

$$\sigma_y = \sqrt{\overline{y^2} - \bar{y}^2} = \sqrt{56.6 - 54.76} = \sqrt{1.84} \approx 1.36$$

أمّا تغاير درجات الطلاب في المادتين فيساوي

$$\sigma_{xy} = \overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y} = 62.2 - 8.2 \times 7.4 = 1.52$$



إحدى الطرائق الممكنة لإلقاء نظرة شاملة على هذه العينة من النتائج هي في توضيع النقاط (x_k , y_k) في مخطط ثنائي البُعد في المستوي كما في الشكل المجاور. يسمى هذا المخطط "سحابة الانتشار".

يوحي الرسم بوجود نوع ما من الارتباط بين نتائج الطلاب في المادتين، (وهي نتيجة متوقعة)؟ سنرى لاحقاً كيف نعطي معنى رياضياً لهذا الأمر؟ ولكن لنتأمّل مثالاً آخر.

مثال 2 (الارتباط بين طول طفل رضيع ووزنه)

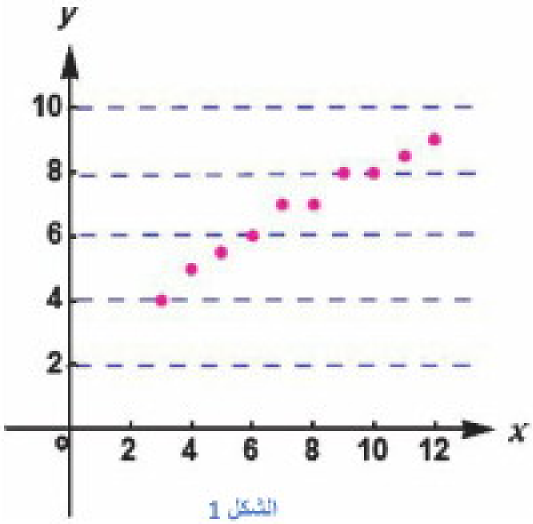
الجدول الآتي يبيّن أوزان عشرة أطفال وأعمارهم بالأشهر:

العمر x (شهر)	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
الوزن y (كغ)	4	5	5.5	6	7	7	8	8	8.5	9

لاحظ التمثيل البياني لسحابة انتشار هذه المجموعة:

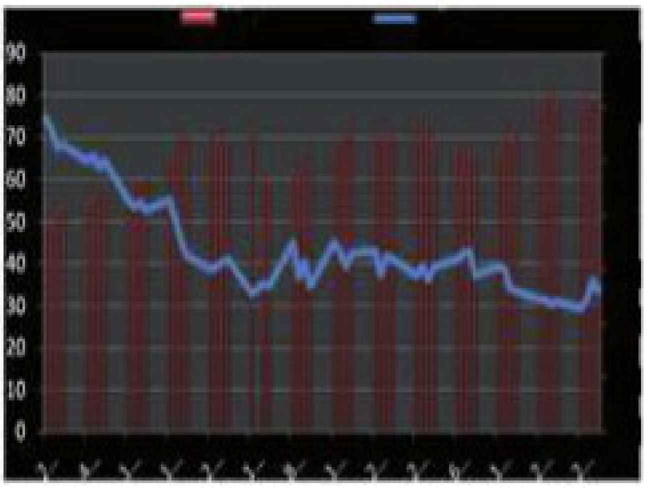
هل ترى علاقة بين عمر الطفل ووزنه؟

هل يمكنك بالاستفادة من التمثيل البياني السابق تقدير وزن طفل عمره 16 شهراً ؟



الشكل 1

الارتباط:



نبحث إذن عن "علاقة" أو رابطة تقديريّة بين متغيرين أو أكثر. إذا تغير أحدهما تبعه الآخر في التغيير.

يهمنا مثلاً معرفة إذا ما كانا يتغيّران في الاتجاه ذاته (ارتباط طردي)، مثل العلاقة بين الدخل والاستهلاك، إذا كانا يتغيّران في اتجاهين متضادين (ارتباط عكسي)، مثل العلاقة بين الاستهلاك والادخار، أو إذا كان المتغيّران مستقلين أي لا ارتباط بينهما، مثل العلاقة بين طول الطالب ودرجته في مادة الرياضيات.

لنتأمّل إذن مجموعة من الأزواج المرتبة: $\left\{(x_1,y_1),(x_2,y_2),\dots,(x_n,y_n)\right\}$ أو $\left\{(x_k,y_k)\ :\ 1\le k\le n\right\}$

يمثل المسقط الأوّل مجموعة قراءات لإحدى الصفات، ويمثل المسقط الثاني القراءات الموافقة لصفة أخرى.

سنقتصر في دراستنا على البحث عن الارتباط الخطي بين مجموعة البيانات هذه أي البحث عن دالة تآلفية $x\mapsto f(x)=ax+b$ تكون في حالتها القيم المحسوبة $f(x_k)$ قريبة من القيم y_k المُشاهدة. أي بحيث يكون المستقيم الذي معادلته $y=ax+b$ (المسمى عندئذ مستقيم الانحدار) أفضل تقريب لسحابة الانتشار الموافقة لجملة البيانات $\left\{(x_k,y_k)\ :\ 1\le k\le n\right\}$.

وبهدف التعبير عن مدى قرب القيم المحسوبة $f(x_k)$ من y_k، نعتمد المقدار Δ التالي مقياساً للخطأ:

$$\Delta=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(f(x_i)-y_i\right)^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(ax_i+b-y_i\right)^2$$

أي المتوسط الحسابي لمربعات الأخطاء المرتكبة عند تقدير كل قيمة مُشاهدة y_i بالقيمة المحسوبة $f(x_i)$. وبالطبع سنعين العددين a و b بحيث يكون مقدار هذا الخطأ أصغرياً.

هنا نستفيد من المبرهنة التالية، التي يخرج إثباتها عن إطار المنهاج:

مبرهنة: باعتماد الرموز السابقة، يأخذ الخطأ Δ أصغر قيمة له (ونرمز إليها Δ^*) عندما يأخذ المقداران a و b بالترتيب، القيمتين a^* و b^* المعرّفتين كما يلي:

$$b^* = \bar{y} - a^*\bar{x} \qquad a^* = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}$$

وعندئذ يكون $\Delta^* = \sigma_y^2(1 - r_{xy}^2)$ ، حيث $r_{xy} = \dfrac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$.

تسمح لنا المبرهنة السابقة بوضع التعريفين الآتيين:

تعريف3 : إذا كانت $\{(x_k, y_k) : 1 \le k \le n\}$ تمثّل عيّنة مكوّنة من n قراءة لثنائيات من المقادير الإحصائية. عندئذ نعرّف مُعامل ارتباط العينة بأنّه المقدار r_{xy} المعطى بالصيغة:

$$r_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\sqrt{\left(\overline{x^2} - \bar{x}^2\right)} \cdot \sqrt{\left(\overline{y^2} - \bar{y}^2\right)}}$$

حيث σ_{xy} هو تغاير العينة، و σ_x و σ_y هما الانحرافان المعياريان للعينتين $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ و $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ بالترتيب.

2.5.1 معادلة الانحدار وتطبيقها:

تعريف4 : إذا كانت $\{(x_k, y_k) : 1 \le k \le n\}$ تمثّل عيّنة مكوّنة من n قراءة لثنائيات من المقادير الإحصائية. عندئذ نعرّف مستقيم انحدار العينة بأنه المستقيم الذي معادلته $y = a^*x + b^*$ ، حيث:

$$b^* = \bar{y} - a^*\bar{x} \quad \text{و} \quad a^* = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}$$

حيث σ_{xy} هو تغارير العينة، و σ_x و σ_y هما الانحرافان المعياريان للعينتين $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ و $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ بالترتيب، و $\bar{x}$ و $\bar{y}$ هما المتوسطان الحسابيان للعينتين $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ و $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ بالترتيب. تُكتب معادلة مستقيم انحدار بالصيغة المتناظرة الآتية:

$$\frac{y - \bar{y}}{\sigma_y} = r_{xy} \cdot \left(\frac{x - \bar{x}}{\sigma_x}\right).$$

مثال 3 لنرجع إلى المثال (1)، ولنعيّن معامل ارتباط العينة ومستقيم انحدارها. ونجد أنّ

$$\bar{x} = 8.2, \quad \sigma_x = 1.47, \quad \bar{y} = 7.4, \quad \sigma_y = 1.36, \quad \sigma_{xy} = 1.52$$

إذن معامل الارتباط

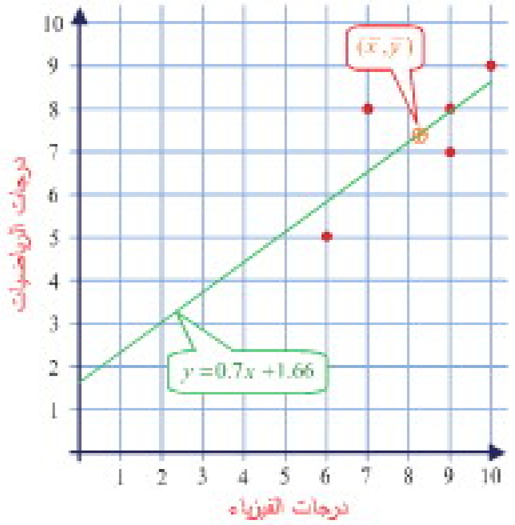
$$r_{xy}=\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x\sigma_y}=\frac{1.52}{1.47\times1.36}=0.76$$

ولتعيين مستقيم الانحدار نحسب

$$a^*=\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}=\frac{1.52}{1.47^2}\approx 0.7$$

$$b^*=\bar{y}-a^*\bar{x}=7.4-0.7\times 8.2\approx 1.66$$

فمعادلة مستقيم الانحدار هي $y=0.7x+1.66$.



بالاستفادة من المبرهنة السابقة يمكننا الوصول إلى النتائج الآتية :

– رأينا أنّ أصغر قيمة للخطأ Δ^* تعطى بالصيغة $\Delta^*=\sigma_y^2\cdot(1-r_{xy}^2)$. إذن دوماً لدينا $|r_{xy}|\leq 1$، وكلما كان r_{xy} قريباً من 1 أو من -1 كان Δ^* أصغر، وكانت القيم المُشاهدة y_k قريبة من القيم المحسوبة $f(x_k)$. أي توزعت سحابة الانتشار قريبة من المستقيم الذي معادلته $y=a^*x+b^*$.

أما إذا كانت r_{xy} قريبة من الصفر يصبح Δ^* كبيراً، ويضعف الارتباط الخطي.

عادة نقول إن:

- **الارتباط قوي** في حالة $r_{xy}^2\geq\frac{1}{2}$ أو $|r_{xy}|\gtrsim 0.7$،
- **الارتباط متوسط** في حالة $\frac{1}{4}\leq r_{xy}^2<\frac{1}{2}$ أو $0.5\leq|r_{xy}|\lesssim 0.7$،
- **الارتباط ضعيف** في حالة $r_{xy}^2<\frac{1}{4}$ أو $|r_{xy}|<0.5$.

– نلاحظ أيضاً أنّ إشارة r_{xy} هي من إشارة a^* (ميل مستقيم الانحدار) لذلك، نقول إنّ

- **الارتباط سلبي** في حالة $r_{xy}<0$ ،
- **الارتباط إيجابي** في حالة $r_{xy}>0$.

– إنّ حالة $r_{xy}=1$ أو $r_{xy}=-1$ توافق $\Delta^*=0$، أي تقع جميع نقاط سحابة الانتشار على المستقيم الذي معادلته $y=a^*x+b^*$، ويكون لدينا ارتباط تام.

– يمر مستقيم الانحدار $y=a^*x+b^*$ دوماً من النقطة $(\bar{x},\bar{y})$.

مثال 4 لنرجع إلى المثالين (1) و (3)، نجد أنّ $r_{xy}=0.76>0.7$، إذن هناك ارتباط قوي إيجابي بين درجات الطلاب في الفيزياء ودرجاتهم في الرياضيات.

مثال 5 لتكن البيانات الممثلة في الجدول توضح ربح السهم الواحد لكل شركة:

اسم الشركة	A	B	C	D	E
ربح السهم x	0.5	0.7	0.9	0.4	0.6
سعر السهم y	1.2	2.3	3	1.5	2

2) أوجد معامل الارتباط r، ثم أوجد معادلة مستقيم انحدار العينة.

3) ما السعر المقدر لسهم يعطي ربحاً 0.8؟

الحل:

1. لدينا $\overline{y}=2$, $\overline{x}=0.62$ وأيضاً $\sigma_x=0.17,\ \sigma_y=0.63,\ r_{xy}=0.94$.

لإيجاد معادلة مستقيم الانحدار نحسب كلاً من $\sigma_x, \sigma_y, \overline{x}, \overline{y}$

ومنه نجد $a^*=\dfrac{\sigma_Y}{\sigma_X}\cdot r_{xy}=3.5$ و $b^*=\overline{y}-a^*\overline{x}=-0.17$.

فتكون معادلة مستقيم الانحدار: $y=3.5x-0.17$

2. السعر التقديري للسهم الذي يعطي ربحاً 0.8 هو: $y=3.5(0.8)-0.17=2.63$.

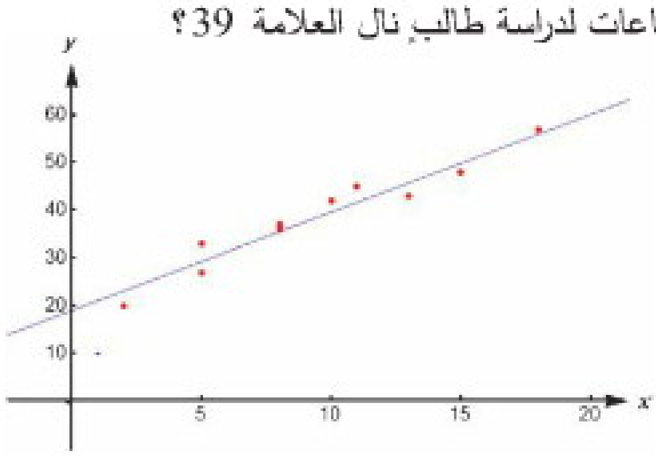
مثال 6 يبين الجدول الآتي عدد ساعات الدراسة لعشرة طلاب في تحضير مادة الرياضيات والعلامات التي حصلوا عليها:

عدد ساعات الدراسة للطالب x_i	8	5	11	13	10	5	18	15	2	8
علامة الطالب y_i	37	27	45	43	42	33	57	48	20	36

1. ارسم سحابة انتشار العينة.
2. أوجد معامل الارتباط بين عدد ساعات الدراسة للطلاب العشرة وعلاماتهم الواردة.
3. أوجد معادلة مستقيم الانحدار، ومثله بيانياً مع سحابة الانتشار.
4. ما العلامة المتوقعة لطالب درس 14 ساعة، وآخر درس 9 ساعات؟
5. ما هو العدد التقريبي لساعات لدراسة طالب نال العلامة 39؟

الحل:

.1



2. نلاحظ من مخطط الانتشار وجود علاقة طردية بين عدد ساعات الدراسة x والعلامة التي ينالها الطالب y. ولتبسيط الحسابات نشكل الجدول الآتي :

i	x_i	y_i	x_i^2	$x_i.y_i$	y_i^2
1	8	37	64	296	1369
2	5	27	25	135	729
3	11	45	121	495	2025
4	13	43	169	559	1849
5	10	42	100	420	1764
6	5	33	25	165	1089
7	18	57	324	1026	3249
8	15	48	225	720	2304
9	2	20	4	40	400
10	8	36	64	288	1296
المجموع	95	388	1121	4144	16074

وبالتبديل في صيغ r_{xy} و a^* و b^* نجد:

$$r_{xy} \approx 0.97\ ,\quad b^* \approx 18.89\ ,\quad a^* \approx 2.1$$

فالارتباط إيجابي قوي.

3. معادلة مستقيم الانحدار هي $y = 2.1x + 18.89$

ولرسم هذا المستقيم يكفي أن نلاحظ أنّه يمرّ بالنقطتين $(1,20.99)$, $(0,18.89)$

4. نعوض $x = 14$ في معادلة مستقيم الانحدار، فنجد $y = 2.1\times 14 + 18.89 = 48.29$.

أي إنّ العلامة المتوقعة للطالب الذي يدرس 14 ساعة هي حوالي 48.

وبأسلوب مشابه عندما $x = 9$ نجد $y = 37.79$ والعلامة المتوقعة للطالب الذي يدرس 9 ساعات هي حوالي 38.

5. إذا وضعنا في معادلة الانحدار $y = 39$ نجد $39 = 2.1\,x + 18.89$ ومنه $x = 9.58$

أي إنّ الطالب الذي حصل على العلامة 39 يُتوقّع أنه قضى 10 ساعات في المذاكرة تقريباً.

تمرينات

1 يبين الجدول الآتي أوزان عشرة أطفال وأعمارهم بالأشهر:

العمر x (شهر)	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
الوزن y (كغ)	4	5	5.5	6	7	7	8	8	8.5	9

(a) احسب كلاً من المقادير $\bar{x}, \sigma_x, \bar{y}, \sigma_y, \sigma_{xy}$.

(b) ارسم سحابة انتشار العينة.

(c) احسب معامل الارتباط r_{xy}، وبيّن نوعه.

(d) عين معادلة مستقيم انكفاء العينة وارسمه مع سحابة الانتشار على الشكل نفسه.

2 أجرت شركة دعاية وإعلان دراسة حول تكلفة بطاقة الدعاية وسعرمبيعها بالليرة السورية فكان الجدول:

الكلفة x	9	10	7	14	15	12	5	11
المبيع y	150	160	150	165	180	130	130	160

(a) احسب كلاً من المقادير $\bar{x}, \sigma_x, \bar{y}, \sigma_y, \sigma_{xy}$.

(b) ارسم سحابة انتشار العينة.

(c) احسب معامل الارتباط r_{xy}، وبيّن نوعه.

(d) عين معادلة مستقيم انكفاء العينة وارسمه مع سحابة الانتشار على الشكل نفسه.

3 يبين الجدول الآتي علامات مادة الرياضيات x وعلامات مادة الفيزياء y لعشرة من طلاب الشهادة الثانوية العامة في الامتحان النهائي

x	55	40	58	40	55	50	33	56	30	42
y	36	25	34	30	35	30	22	35	22	25

(a) احسب كلاً من المقادير $\bar{x}, \sigma_x, \bar{y}, \sigma_y, \sigma_{xy}$.

(b) ارسم سحابة انتشار العينة.

(c) احسب معامل الارتباط r_{xy}، وبيّن نوعه.

(d) عين معادلة مستقيم انكفاء العينة وارسمه مع سحابة الانتشار على الشكل نفسه.

(e) ما العلاقة المتوقعة في الفيزياء لطالب حصل على علامة 46 في الرياضيات؟

(f) ما العلامة المتوقعة في الرياضيات لطالب حصل على علامة 28 في الفيزياء؟

4 تمثل البيانات الآتية الطول x والوزن y لاثني عشر شخصاً:

x	65	73	70	68	66	69	75	70	64	72	65	71
y	124	184	161	164	140	154	210	164	126	172	133	155

(a) احسب كلاً من المقادير $\bar{x}, \sigma_x, \bar{y}, \sigma_y, \sigma_{xy}$.

(b) ارسم سحابة انتشار العينة.

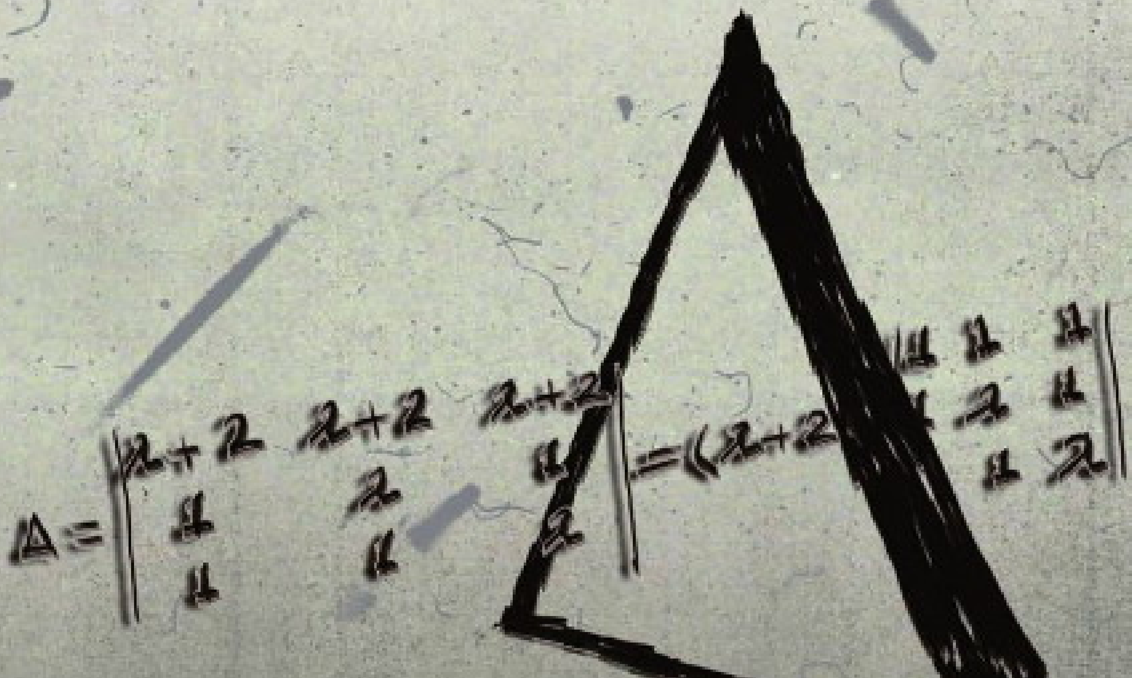
(c) احسب معامل الارتباط r_{xy}، وبيّن نوعه.

(d) عين معادلة مستقيم انكفاء العينة ثم ارسمه مع سحابة الانتشار على الشكل نفسه.

2

المصفوفات و المعادلات الخطية

- المصفوفات
- جمل المعادلات الخطية



المصفوفات

سوف نتعلم :

2-1-1 خطوات إجراء التحويلات السطرية الأولية على مصفوفة.

2-1-2 المصفوفتان المتكافئتان.

2-1-3 المصفوفة المدرجة.

نشاط تبيع محطة توزيع محروقات(وقود)، نوعين من البنزين : نوع عادي سعر الليتر منه 50 ليرة سورية، وآخر ممتاز (صديق للبيئة) سعر الليتر منه 55 ليرة سورية، إذا كانت مبيعات هذه المحطة في أحد الأيام 5000 ليتر وسعرها الإجمالي 260000 ليرة سورية.

فكم ليتراً باعت من كل نوع؟

الحل: ليكن عدد الليترات المبيعة من النوع العادي x

وعدد الليترات المبيعة من النوع الممتاز y فيكون

معادلة النوع:

$$x + y = 5000 \quad (1)$$
$$50x + 55y = 260000 \quad (2)$$

بحل هاتين المعادلتين بطريقة الحذف بالتعويض أو الحذف بالجمع (مثلاً) نجد أن:

$$x = 3000 \quad , \quad y = 2000$$

تسمى كل من المعادلتين (1) و (2) معادلة خطية ذات مجهولين $x\ ,y$

وتسمى المعادلتان معاً جملة معادلتين خطيتين ذات مجهولين.

وباستخدام لغة المصفوفات يمكن كتابة الجملة:

$$(\mathrm{I}) \quad \begin{cases} x + y = 5000 \\ 50x + 55y = 260000 \end{cases}$$

على الشكل الآتي:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 50 & 55 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5000 \\ 260000 \end{bmatrix}$$

أو $A . X = B$

حيث: $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 50 & 55 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 5000 \\ 260000 \end{bmatrix}$

تُسمى A مصفوفة الأمثال للجملة (I).

تُسمى X مصفوفة (عمود) المجاهيل للجملة (I).

تُسمى B مصفوفة (عمود) الحدود الثابتة للجملة (I).

وبإضافة عمود الحدود الثابتة B إلى المصفوفة A نحصل على المصفوفة $H = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 5000 \\ 50 & 55 & 260000 \end{array}\right]$

التي تكتب اختصاراً $H = [A \mid B]$ وتُسمى المصفوفة المُوسَّعة للجملة (I). وهي تؤدي دوراً في حل جملة المعادلات الخطية.

1.1.2 التحويلات السطرية الأولية على المصفوفات:

لتكن المصفوفة:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & . & a_{1j} & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & a_{2j} & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{i1} & a_{i2} & . & a_{ij} & . & a_{in} \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & . & a_{mj} & . & a_{mn} \end{bmatrix}$$

ذات mسطراً و n عموداً و نرمزها اختصاراً بالرمز $A = [a_{ij}]$ حيث $i \in \{1,2,....,m\}$, $j \in \{1,2,....,n\}$

إن كل إجراء مما يأتي على المصفوفة A يُسمى تحويلاً سطرياً أولياً على المصفوفة A:

1) المبادلة بين السطر iوالسطر j و نرمّزه $i \leftrightarrow j$.

2) ضرب السطر j بالعدد k حيث $k \neq 0$ و نرمّزه $kR_j \to R_j$.

3) ضرب السطر j بالعدد k ثم إضافته إلى السطر i ونرمّزه $R_i + kR_j \to R_i$.

معلومة:
في التحويل $R_i + kR_j \to R_i$ يتغير السطر i فقط

2.1.2 المصفوفتان المتكافئتان:

نقول إن المصفوفتين A و B متكافئتان إذا كانت إحداهما تنتج عن الأخرى بإجراء عدد منته من التحويلات السطرية الأولية ونكتب عندئذ $A \sim B$.

مثال 1 لتكن المصفوفة $A=\begin{bmatrix}3&1&-1&0\\2&2&1&1\\1&1&0&3\end{bmatrix}$

- بإجراء التحويل $R_1 \leftrightarrow R_3$ على المصفوفة A نحصل على المصفوفة $\begin{bmatrix}1&1&0&3\\2&2&1&1\\3&1&-1&0\end{bmatrix}$

ونكتب $A \sim \begin{bmatrix}1&1&0&3\\2&2&1&1\\3&1&-1&0\end{bmatrix}$

- بإجراء التحويل $R_3-\frac{1}{2}R_2 \rightarrow R_3$ على المصفوفة A نحصل على المصفوفة $\begin{bmatrix}3&1&-1&0\\2&2&1&1\\0&0&-\frac{1}{2}&\frac{5}{2}\end{bmatrix}$

ونكتب $A \sim \begin{bmatrix}3&1&-1&0\\2&2&1&1\\0&0&-\frac{1}{2}&\frac{5}{2}\end{bmatrix}$

- بإجراء التحويل $2R_3 \rightarrow R_3$ على المصفوفة الناتجة نجد: $\begin{bmatrix}3&1&-1&0\\2&2&1&1\\0&0&-1&5\end{bmatrix}$

ونكتب: $A \sim \begin{bmatrix}3&1&-1&0\\2&2&1&1\\0&0&-1&5\end{bmatrix}$

مثال 2 لتكن المصفوفة $A=\begin{bmatrix}1&0&3\\-3&1&4\\4&2&2\end{bmatrix}$

a) طبّق على المصفوفة A التحويلين $R_2+3R_1 \rightarrow R_2$ ثُمّ $R_3-4R_1 \rightarrow R_3$ على التوالي.

b) أجرِ التحويل $R_3-2R_2 \rightarrow R_3$ على المصفوفة الناتجة في الطلب (a).

c) أجرِ التحويل $-\frac{1}{36}R_3 \rightarrow R_3$ على المصفوفة الناتجة في الطلب (b).

الحل:

a) $A \sim \begin{bmatrix}1&0&3\\0&1&13\\0&2&-10\end{bmatrix}$ b) $A \sim \begin{bmatrix}1&0&3\\0&1&13\\0&0&-36\end{bmatrix}$ c) $A \sim \begin{bmatrix}1&0&3\\0&1&13\\0&0&1\end{bmatrix}$

تدريب لتكن المصفوفة $A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ 2 & 1 & 1\\ 3 & 2 & 3\end{bmatrix}$

a) أجرِ على المصفوفة A التحويلين $R_2-2R_1\to R_2$ ثُمَّ $R_3-3R_1\to R_3$ على التوالي.

b) أجرِ على المصفوفة الناتجة عن التحويلين السابقين التحويل $R_3-R_2\to R_3$.

2.1.2 المصفوفة المدرّجة سطرياً (أو اختصاراً المصفوفة المدرّجة):

تعريف1: إن أول عنصر غير معدوم في كل سطر (يُقرأ من اليسار إلى اليمين) في مصفوفة يسمى **عنصراً رائداً** في سطره.

تعريف2: **السطر الصفري** (المعدوم) في مصفوفة هو سطر جميع عناصره معدومة.

تعريف3: **المصفوفة المدرّجة** هي مصفوفة تحقق ما يأتي:

a) العنصر الرائد في كل سطر يقع إلى يمين العنصر الرائد في السطر الذي يسبقه.

b) الأسطر غير الصفرية تسبق الأسطر الصفرية (إن وجدت).

مثال

1) المصفوفة $\begin{bmatrix}\boxed{1} & 5 & 0 & 4\\ 0 & \boxed{2} & 3 & 1\\ 0 & 0 & 0 & \boxed{2}\end{bmatrix}$ العناصر الرائدة

مصفوفة مدرّجة.

2) المصفوفة $\begin{bmatrix}1 & 3 & -2\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$ غير مدرّجة لأن السطر الثاني صفري يسبق السطر الثالث غير الصفري .

3) المصفوفة $\begin{bmatrix}1 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 1\\ 2 & 0 & -1\end{bmatrix}$ غير مدرّجة لأن العنصر الرائد في السطر الثالث لا يقع على يمين العنصر الرائد في السطر الثاني.

4) المصفوفة:
$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & 3 & 4 \\ 0 & \boxed{5} & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
العناصر الرائدة

هي مصفوفة مدرّجة.

مبرهنة : أياً كانت المصفوفة A فإنه توجد على الأقل مصفوفة مدرّجة مكافئة لها.

مثال لتكن المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 8 & 5 & -11 \\ -2 & 1 & 12 & -17 \end{bmatrix}$، أوجد مصفوفة مدرّجة مكافئة لها.

الحل: نجري التحويلين $R_2 - 3R_1 \to R_2$ ثُم $R_3 + 2R_1 \to R_3$ على التوالي فنجد:

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 8 & -14 \\ 0 & 5 & 10 & -15 \end{bmatrix}$$

ثم نجري التحويل $\frac{1}{2}R_2 \to R_2$ فنجد:

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & -7 \\ 0 & 5 & 10 & -15 \end{bmatrix}$$

ثم نجري التحويل $R_3 - 5R_2 \to R_3$ فنجد:

$$A \sim \begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & -1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 4 & -7 \\ 0 & 0 & \boxed{-10} & 20 \end{bmatrix} = B$$

والمصفوفة B مصفوفة مدرّجة مكافئة للمصفوفة A.

ملاحظة: عموماً توجد أكثر من مصفوفة مُدرّجة مكافئةٍ لمصفوفة معطاة A.

مثال 1 كلُّ مصفوفة مما يأتي هي مدرَّجة:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} 1 & 4 & -3 & 7 \\ 0 & 1 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

مثال 2 لتكن المصفوفة،

$$A=\begin{bmatrix}3&1&-1&0\\2&2&1&2\\1&1&0&3\end{bmatrix}$$

رد المصفوفة A إلى مصفوفة مدرجة.

الحل:

نبدأ بإجراء التحويل $R_1 \leftrightarrow R_3$ على المصفوفة A فنكتب:

$$A\sim\begin{bmatrix}1&1&0&3\\2&2&1&2\\3&1&-1&0\end{bmatrix}$$

ثم نجري التحويلين: $R_2-2R_1\to R_2$ ثم $R_3-3R_1\to R_3$ على التوالي فنجد:

$$A\sim\begin{bmatrix}1&1&0&3\\0&0&1&-4\\0&-2&-1&-9\end{bmatrix}$$

ثم نجري التحويل $R_2 \leftrightarrow R_3$ فنجد:

$$A\sim\begin{bmatrix}1&1&0&3\\0&-2&-1&-9\\0&0&1&-4\end{bmatrix}=B$$

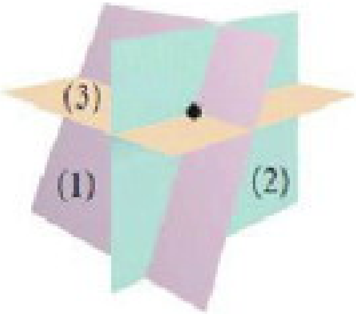
فتكون المصفوفة الناتجة B مصفوفة مدرّجة مكافئة للمصفوفة A.

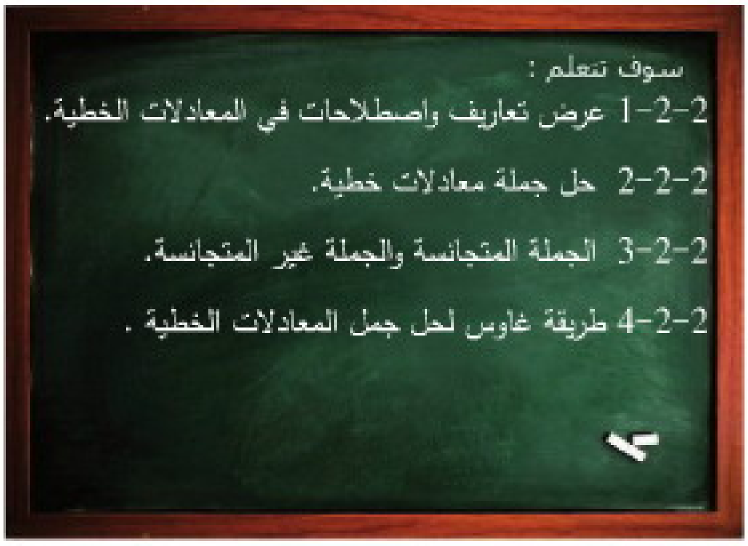
تدريب أوجد مصفوفة مدرّجة مكافئة لكل من المصفوفات الآتية:

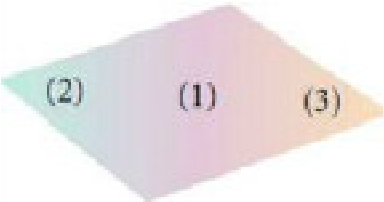
1] $A=\begin{bmatrix}1&2&4\\1&-1&1\\2&1&5\end{bmatrix}$, 2] $B=\begin{bmatrix}1&2&-3\\-1&0&3\\0&1&2\end{bmatrix}$, 3] $C=\begin{bmatrix}6&3&-4\\-4&1&-6\\1&2&-5\end{bmatrix}$

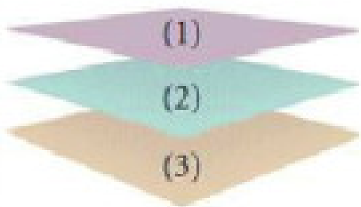
4] $D=\begin{bmatrix}1&2&-3&0\\2&3&-1&2\\-3&-5&4&1\end{bmatrix}$, 5] $E=\begin{bmatrix}5&3&1&0\\2&-2&6&1\\3&1&4&3\end{bmatrix}$, 6] $F=\begin{bmatrix}0&-1&2&3\\2&3&4&5\\1&3&-1&2\\3&2&4&1\end{bmatrix}$

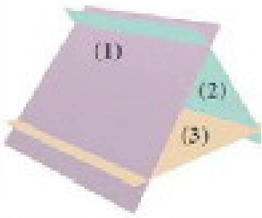
جمل المعادلات الخطية

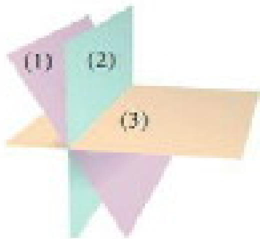












1.2.2 تعاريف واصطلاحات:

تُسمى كل معادلة من الشكل : $ax+by=c$ حيث a,b,c ثوابت حقيقية، معادلة خطية ذات مجهولين ويمكن تمثيلها في المستوي المحدَث oxy بمستقيم عندما $(a,b)\neq(0,0)$.

و تُسمى كل معادلة من الشكل : $ax+by+cz=d$ حيث a,b,c,d ثوابت حقيقية، معادلة خطية ذات ثلاثة مجاهيل، يمكن تمثيلها في جملة الإحداثيات الثلاثية $oxyz$، بمستوٍ في الفراغ عندما. $(a,b,c)\neq(0,0,0)$.

و سنعرّف فيما يأتي المعادلة الخطية و جمل المعادلات الخطية:

تعريف1 : المعادلة الخطية ذات n مجهولاً $x_1,x_2,\dots\dots,x_n$ هي كل معادلة من الشكل:

$$a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=b$$

حيث: $a_1,a_2,\dots\dots,a_n,b$ ثوابت حقيقية .

تُسمى الثوابت a_i $(i=1,2,\dots,n)$ أمثال حدود المعادلة، ويُسمى b الحد الثابت للمعادلة.

ملاحظة :

1) إذا كانت المعادلة الخطية تضم أربعة مجاهيل أو أقل، عندئذٍ يُفضل أن ترمّز هذه المجاهيل بالرموز x, y, z, w أو برموز مناسبة أخرى، بدلاً من x_1, x_2, x_3, x_4 (أي الابتعاد ما أمكن عن ترميزات ذات دليل رقمي). فمثلاً : $7x-3y+8z+t=9$ هي معادلة خطية بأربعة مجاهيل.

2) تسمى الصيغة $a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=b$ شكلاً معيارياً (نظامياً) للمعادلة الخطية.

مثال

1) $2x_1-4x_2+x_3=1$: معادلة خطية ذات ثلاثة مجاهيل x_1, x_2, x_3 مكتوبة بالشكل المعياري.

2) $\sqrt{x}+7y-z=0$ غير خطية لأنها تضم حداً من الشكل $\sqrt{x}$.

نشاط فيما يأتي ميّز كل معادلة خطية، وكل معادلة غير خطية، عيّن مجاهيل الخطية واكتبها بالشكل المعياري.

1) $x-2y+z=w-\frac{1}{2}$

2) $x.y+4x-z=5$

3) $\sqrt{2}\,x+3z=y$

تعريف2 : حلُّ المعادلة الخطية $a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=b$ هو إيجاد قيم المجاهيل $x_1, x_2, \ldots, x_n$ التي تحقق هذه المعادلة (أي تجعل طرفها الأول يساوي طرفها الثاني).

مثال المعادلة الخطية (*)... $3x-4y=-1$ تقبل حلاً $y=4, x=5$ ويُكتب بالشكل $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix}$ وهو يحقق المعادلة (*) حيث نجد بالتعويض:

$$3(5)-4(4)=15-16=-1$$

كذلك $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ هو حل للمعادلة $(*)$، تحقق من ذلك.

أما $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ فهو ليس حلاً للمعادلة $(*)$، علل؟

2.2.2 حل جملة المعادلات الخطية

المعادلة الخطية ذات مجهولين:

ليكن $(a,b) \neq (0,0)$ ولنتأمل المعادلة الخطية : $ax + by = c$ ذات المجهولين x و y.

- تقبل هذه المعادلة عدداً غير منته من الحلول، حيث نحسب أحد المجهولين (الذي أمثاله غير معدومة) بدلالة الآخر.

مثال أوجد حلول المعادلة $4x - 3y = 6 \cdots\cdots(*)$.

الحل: تُكتب المعادلة بالصيغة المُكافئة : $4x - 6 = 3y$ ومنه: $y = \frac{4}{3}x - 2$.

إذن مجموعة حلول المعادلة هي: $S = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = \frac{4}{3}x - 2 \right\}$

ونحصل على كل حل للمعادلة $(*)$ بإعطاء قيمة للمجهول x، ثم حساب قيمة المجهول y فعند $x = 3$ نجد $y = 2$ ومنه $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ حل للمعادلة $(*)$.

وبوجه عام ليكن $(a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n) \neq (0,0,\ldots\ldots,0)$ لكل معادلة خطية من الشكل $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots. a_nx_n = b$ عدد غير منته من الحلول.

مفاهيم أساسية:

- جملة المعادلات الخطية:

نسمي جملة m معادلة خطية بـ n مجهولاً هي $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ كل جملة معادلات من الشكل :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots\cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots\cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots\cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

- ونسمي قيم المجاهيل $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ التي تحقق كل معادلة من معادلات هذه الجملة حلاً للجملة.
- مجموعة الحل أو الحلول لجملة معادلات خطية هي مجموعة كل الحلول لهذه الجملة.

وسنأخذ بعين الاعتبار الآتي:

إن قولنا: حُل جملة المعادلات الخطية، يكافئ قولنا: أوجد مجموعة الحلول لجملة المعادلات الخطية.

مثال لتكن الجملة:

$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ x + 3y = 5 \end{cases}$$

- إنّ $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ حلٌ لهذه الجملة لأنه يحقق كلاً من معادلتي الجملة (تحقق من ذلك).
- ولكن $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ ليس حلاً لهذه الجملة لأنه يحقق المعادلة الأولى ولا يحقق الثانية (بيّن ذلك).
- ونتأكد بسهولة أنّ مجموعة الحل لهذه الجملة هي $S = \{(2,1)\}$.
- نقول إنّ جملتين من المعادلات الخطية متكافئتان إذا كان لهما مجموعة الحل نفسها.

حل جملة m معادلة خطية بـ n مجهولاً:

لتكن جملة m معادلة خطية بـ n مجهولاً :

$$(I) \cdots\cdots \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots\cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots\cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots\cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

سنجد فيما يأتي أنّه قد يكون للجملة (I) حل وحيد، أو أن تكون مستحيلة الحل أو أن يكون لها عدد غير منتهٍ من الحلول.

يمكن باستعمال المصفوفات صياغة الجملة (I) على الشكل الآتي:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_j \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}}_{B}$$

الذي يُسمى الشكل المصفوفي للجملة (I) ويكتب اختصاراً : $A \cdot X = B$.

حيث تسمى المصفوفة A من المرتبة $m \times n$ مصفوفة أمثال الجملة (I)، حيث يمثل كل عمود فيها أمثال مجهول واحد فقط في الجملة. وتسمى X مصفوفة (عمود) مجاهيل الجملة (I). وأخيراً تسمى B مصفوفة (عمود) الحدود الثابتة للجملة (I).

وعادة نقرن بالجملة (I) المصفوفة الموسعة $H = [A \,\vdots\, B]$ للجملة (I) :

$$H = \left[\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} & b_i \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

مما سبق نلاحظ ما يأتي :

- عدد معادلات الجملة (I)، يساوي m، و هو عدد أسطر المصفوفة A.
- عدد مجاهيل الجملة (I) ، يساوي n، وهو عدد أعمدة المصفوفة A.

ومنه على سبيل المثال :

- كل مصفوفة من المرتبة 3×2 هي مصفوفة الأمثال لجملة ثلاث معادلات خطية بمجهولين.
- كل مصفوفة من المرتبة 2×3 هي مصفوفة الأمثال لجملة معادلتين خطيتين بثلاثة مجاهيل.
- كل مصفوفة مربعة من المرتبة 4×4 هي مصفوفة الأمثال لجملة أربع معادلات خطية بأربعة مجاهيل.

مثال 1 لتكن جملة المعادلات الخطية:

$$\begin{aligned} x + 3y + 6z &= 7 \\ 2y + z - 7x + 1 &= 0 \\ 5z - 2x &= 4 \end{aligned}$$

1) اكتب هذه الجملة بالشكل المعياري (النظامي).

2) اكتب كلاً من المصفوفات (مصفوفة الأمثال A ومصفوفة المجاهيل X ومصفوفة الثوابت B والمصفوفة الموسعة H) لهذه الجملة.

الحل:

1) كتابة الجملة بالشكل المعياري هو أن نكتب كل معادلة فيها بالشكل المعياري كالآتي:

$$\begin{aligned} x + 3y + 6z &= 7 \\ 7x - 2y - z &= 1 \\ 2x + 0y - 5z &= -4 \end{aligned}$$

2) $A=\begin{bmatrix}1&3&6\\7&-2&-1\\2&0&-5\end{bmatrix}$, $X=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}7\\1\\-4\end{bmatrix}$, $H=\left[\begin{array}{ccc:c}1&3&6&7\\7&-2&-1&1\\2&0&-5&-4\end{array}\right]$

مثال 2 لتكن المصفوفة: $H=\begin{bmatrix}1&2&8&0\\0&1&3&2\\0&0&0&0\end{bmatrix}$

1) هل هذه المصفوفة مُدرّجة؟ علل.

2) اكتب جملة المعادلات الخطية التي مصفوفتها الموسعة H.

الحل:

1) H مصفوفة مدرجة لأنها تحقق تعريف المصفوفة المدرجة وهو:

- العنصر الرائد في كل سطر يقع يمين العنصر الرائد في السطر الذي يسبقه.
- الأسطر الصفرية تقع في أسفل المصفوفة (تسبقها الأسطر غير الصفرية).

2) جملة المعادلات الخطية هي:

$$\begin{aligned}x+2y+8z&=0\\ y+3z&=2\\ 0&=0\end{aligned}$$

تدريب

1) لتكن جملة المعادلات الخطية

$$\begin{aligned}2x-y-z&=-3\\ x\qquad+z&=0\\ x+2y-z&=-2\end{aligned}$$

أوجد مصفوفة مدرجة مكافئة للمصفوفة المُوسّعة ولتكن H'.

2) اكتب جملة المعادلات الخطية التي مصفوفتها الموسعة هي $H=\left[\begin{array}{cccc:c}1&-1&0&3&2\\1&1&2&1&4\\0&1&0&2&0\end{array}\right]$

3.2.2 الجملة المتجانسة والجملة غير المتجانسة:

الجملة المتجانسة: هي جملة معادلات خطية، الحد الثابت في كل منها معدوم.

أي إن مصفوفة حدودها الثابتة هي $B=\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}=\mathbf{0}$ وتمثلها المعادلة المصفوفية $A\cdot X=\mathbf{0}$ ومصفوفتها المُوسّعة $H=\left[A\ \vdots\ \mathbf{0}\right]$.

الجملة غير المتجانسة: هي جملة معادلات خطية مصفوفة الحدود الثابتة فيها ليست صفرية أي $B \neq \mathbf{0}$ تمثلها المعادلة المصفوفية $A \cdot X = B$، مصفوفتها الموسعة $H = [A \mid B]$.

المبرهنتان الآتيتان تقدمان مجموعة الحلول لكل من الجملة المتجانسة، والجملة غير المتجانسة: $A \cdot X = B$.

مبرهنة 1: (حالة الجملة غير المتجانسة) لتكن (I) جملة m معادلة خطية ذات n مجهولاً مصفوفتها الموسّعة $H = [A \mid B]$.

- نرد المصفوفة الموسّعة $H = [A \mid B]$ إلى الشكل المدرج.
- ليكن r عدد العناصر الرائدة في مصفوفة مدرّجة مكافئة لمصفوفة الأمثال A.
- وليكن r' عدد العناصر الرائدة في مصفوفة مدرّجة مكافئة للمصفوفة الموسعة H، وهو دوماً يحقق المتراجحة $r' \geq r$.

عندئذٍ تتحقّق واحدة فقط من الحالات الآتية:

1) $r = r' = n$. فيكون للجملة حل وحيد في هذه الحالة.

2) $r = r' < n$. للجملة عدد غير منتهٍ من الحلول بـ $n - r$ مجهولاً اختيارياً.

3) $r \neq r'$ الجملة مستحيلة الحل (متناقضة).

مبرهنة 2: (حالة الجملة المتجانسة) لتكن I جملة متجانسة مكونة من m معادلة خطية ذات n مجهولاً مصفوفتها الموسعة $H = [A \mid \mathbf{0}]$. باتباع خطوات المبرهنة السابقة، نلاحظ أنّه لدينا دوماً في هذه الحالة $r = r'$، إذن نميز فقط حالتين :

1) $r = n$ وللجملة حل وحيد هو الحل الصفري $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$ في هذه الحالة.

2) $r < n$ وللجملة عدد غير منتهٍ من الحلول بـ $n - r$ مجهولاً اختيارياً.

ملاحظة :

1) إنّ الجملة المتجانسة هي دوماً جملة قابلة للحل (غير مستحيلة) لأنّ $(0,0,.......,0)$ حل واضح لها.

2) إذا كان عدد المعادلات m أصغر من n عدد المجاهيل فإن للجملة المتجانسة عدد غير منته من الحلول.

مثال 1 للجملة: $\begin{cases}2x-3y+5z=0\\ x+y-z=0\end{cases}$ عدد غير منته من الحلول، علل؟

التعليل: إن هذه الجملة متجانسة وعدد المعادلات $m=2$ أصغر من عدد المجاهيل $n=3$ فلها عدد غير منتهٍ من الحلول.

مثال 2 للجملة : $\begin{cases}2x-3y+5z=0\\ x+y-z=0\\ x-y+z=0\end{cases}$ حل وحيد هو الحل الصفري

التعليل: مصفوفة الأمثال هي: $A=\begin{bmatrix}2&-3&5\\1&1&-1\\1&-1&1\end{bmatrix}$

نجري التحويل الآتي: $R_1\leftrightarrow R_2$ فنجد $A\sim\begin{bmatrix}1&1&-1\\2&-3&5\\1&-1&1\end{bmatrix}$

نجري التحويل $R_3-R_1\to R_3$ ثم $R_2-2R_1\to R_2$ نجد $A\sim\begin{bmatrix}1&1&-1\\0&-5&7\\0&-2&2\end{bmatrix}$

نجري التحويل $R_3-\frac{2}{5}R_2\to R_3$ نجد : $A\sim\begin{bmatrix}\boxed{1}&1&-1\\0&\boxed{-5}&7\\0&0&\boxed{-\frac{4}{5}}\end{bmatrix}$

نلاحظ أن $r=3,n=3$، أي $r=n$، ولجملة المعادلات المفروضة حل وحيد هو الحل الصفري.

4.2.2 طريقة غاوس لحل جملة m معادلة خطية ذات n مجهولاً:

تعتمد طريقة غاوس على المبرهنة الآتية:

مبرهنة: إذا كانت H المصفوفة الموسّعة لجملة معادلات خطية وكانت H' مصفوف مدرجة مكافئة للمصفوفة H فإنّ جملة المعادلات الخطية الموافقة للمصفوفة H' تكافئ جملة المعادلات الخطية الموافقة للمصفوفة H.

الخوارزمية الآتية توضح طريقة غاوس لحل جملة المعادلات الخطية $A \cdot X = B$:

- نرد المصفوفة الموسّعة $H = [A \,\vdots\, B]$ إلى الشكل المدرج H'.
- نحصي العناصر الرائدة في المصفوفة المدرّجة المكافئة للمصفوفة A وليكن r.
- نحصي العناصر الرائدة في المصفوفة H' وليكن r'.
- إذا كان $r \neq r'$، (عندها يظهر في المصفوفة H' سطر يكافئ المعادلة $c = 0$، حيث c عدد غير معدوم، وتكون الجملة مستحيلة ومجموعة الحلول تساوي $\varnothing$ في هذه الحالة.)
- إذا كان $r = r'$ عندئذ نكتب جملة المعادلات الموافقة للمصفوفة الموسعة H'.
- نحل جملة المعادلات الناتجة بطريقة التعويض (من الأدنى باتجاه الأعلى). فنحصل على حلول الجملة المعطاة حيث تكون وحيدة الحل عندما $r = r' = n$، أو يكون لها عدد غير منته من الحلول في حالة $r = r' < n$، ونحلها بدلالة $n - r$ مجهولاً اختيارياً.

مثال 1 ابحث عن حل جملة المعادلات: $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 2x - y = 5 \\ 3x + y = 5 \end{cases}$

الحل: المصفوفة الموسعة للجملة $H \sim \left[\begin{array}{cc:c} 1 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & 5 \end{array}\right]$

نجري كلاً من التحويلين $R_2 - 2R_1 \to R_2$ ثمّ $R_3 - 3R_1 \to R_3$، فنجد: $H \sim \left[\begin{array}{cc:c} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -5 & -5 \\ 0 & -5 & -10 \end{array}\right]$

نجري التحويل $-R_2 + R_3 \to R_3$ نجد: $H \sim \left[\begin{array}{cc:c} \boxed{1} & 2 & 5 \\ 0 & \boxed{-5} & -5 \\ 0 & 0 & \boxed{-5} \end{array}\right]$

إذن $r = 2$ و $r' = 3$ والجملة مستحيلة الحل، لاحظ في الجملة معادلة من الشكل $0 = -5$ وهي مستحيلة الحل ومجموعة حلولها خالية $S = \varnothing$.

ملاحظة: بافتراض وجود حل (x, y) للجملة، نستنتج بجمع المعادلتين الثانية والثالثة أن $x = 2$، وبالتعويض في الثانية نستنتج أنّ $y = -1$، ولكن $(x, y) = (2, -1)$ ليس حلاً للمعادلة الأولى، فهذه الجملة متناقضة. لا حلول لها. هذا يتفق مع دراستنا السابقة.

مثال 2 حل جملة المعادلات الخطية الآتية :
$$\begin{cases} 2x - y + 4z = -3 \\ x - 2y - 10z = -6 \\ 3x + 4z = 7 \end{cases}$$

بطريقة غاوس.

الحل:

نكتب المصفوفة الموسّعة للجملة: $H = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 4 & -3 \\ 1 & -2 & -10 & -6 \\ 3 & 0 & 4 & 7 \end{array}\right]$

نجري التحويل $R_1 \leftrightarrow R_2$ نجد: $H \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -10 & -6 \\ 2 & -1 & 4 & -3 \\ 3 & 0 & 4 & 7 \end{array}\right]$

نجري التحويل $-2R_1 + R_2 \to R_2$ ثم $-3R_1 + R_3 \to R_3$ نجد: $H \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -10 & -6 \\ 0 & 3 & 24 & 9 \\ 0 & 6 & 34 & 25 \end{array}\right]$

نجري التحويل $\frac{1}{3}R_2 \to R_2$ نجد: $H \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -10 & -6 \\ 0 & 1 & 8 & 3 \\ 0 & 6 & 34 & 25 \end{array}\right]$

نجري التحويل $-6R_2 + R_3 \to R_3$ نجد: $H \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -10 & -6 \\ 0 & 1 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & -14 & 7 \end{array}\right]$

نجري التحويل $-\frac{1}{14}R_3 \to R_3$ نجد: $H \sim \left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & -2 & -10 & -6 \\ 0 & \boxed{1} & 8 & 3 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -\frac{1}{2} \end{array}\right]$

نلاحظ أن $r = r' = n = 3$ فللجملة حل وحيد.

الجملة المكافئة هي

$$\begin{aligned} x - 2y - 10z &= -6 \\ y + 8z &= 3 \\ z &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

نعوض قيمة z في المعادلة الثانية فنجد $y+8\left(-\frac{1}{2}\right)=3$ ومنه $y=7$.

ثم نعوض قيمتي z و y في المعادلة الأولى فنجد $x-2(7)-10\left(\frac{-1}{2}\right)=-6$ ومنه $x=3$.

ومجموعة الحلول هي:

$$S=\left\{\left(3,7,-\frac{1}{2}\right)\right\}$$

مثال 3 حل جملة المعادلات الآتية:

$$\begin{cases} -3x-5y+36z=10 \\ -x+7z=5 \\ x+y-10z=-4 \end{cases}$$

الحل: نكتب المصفوفة الموسعة :

$$H=\left[\begin{array}{ccc|c} -3 & -5 & 36 & 10 \\ -1 & 0 & 7 & 5 \\ 1 & 1 & -10 & -4 \end{array}\right]$$

نجري التحويل: $R_3 \leftrightarrow R_1$ نجد:

$$H\sim\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -10 & -4 \\ -1 & 0 & 7 & 5 \\ -3 & -5 & 36 & 10 \end{array}\right]$$

نجري التحويلين $R_1+R_2\rightarrow R_2$ و $R_3+3R_1\rightarrow R_3$ فنجد:

$$H\sim\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -10 & -4 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 6 & -2 \end{array}\right]$$

نجري التحويل: $R_3+2R_2\rightarrow R_3$ فنجد :

$$H\sim\left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & -10 & -4 \\ 0 & \boxed{1} & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

نلاحظ أن $r=r'=2$ و $n=3$ ، إذن $r=r'<n$ فللجملة عدد غير منتهٍ من الحلول بعدد يساوي $n-r=1$ من المجاهيل الكيفية،

الجملة المكافئة هي

$$\begin{cases} (1) \quad x+y-10z=-4 \\ (2) \quad y-3z=1 \end{cases}$$

نحلها بطريقة التعويض بدلالة مجهول اختياري وليكن z. كما يأتي: من (2) نجد : $y=3z+1$ ،

وبالتعويض في (1) نجد: $x=7z-5$. إذن مجموعة الحلول هي:

$$S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x=7z-5, y=3z+1\}$$
$$=\{(7z-5,3z+1,z) : z\in\mathbb{R}\}$$

مثال 4 حل جملة المعادلات الخطية:

$$\begin{cases} 2x+y-2z=-7 \\ x+y+z=-1 \\ -2y-z=-3 \end{cases}$$

الحل:

نشكل المصفوفة الموسعة لهذه الجملة $H=\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -2 & -7 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & -3 \end{array}\right]$

نجري التحويل $R_2 \leftrightarrow R_1$ فنجد: $H\sim\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & -7 \\ 0 & -2 & -1 & -3 \end{array}\right]$

نجري التحويل $R_2-2R_1\to R_2$ فنجد: $H\sim\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -4 & -5 \\ 0 & -2 & -1 & -3 \end{array}\right]$

ثم نجري التحويل: $R_3-2R_2\to R_3$ فنجد $H\sim\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & 7 & +7 \end{array}\right]$

نجري التحويل $\frac{1}{7}R_3\to R_3$ فنجد: $H\sim\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$

نلاحظ أن $r=r'=n=3$ ، فللجملة المفروضة حل وحيد، والجملة المكافئة هي

$$\begin{aligned} x+y+z&=-1 \\ -y-4z&=-5 \\ z&=1 \end{aligned}$$

نعوض $z=1$ في المعادلة الثانية فنجد $y=1$ ثم نعوض قيمتا y و z في الأولى لنجد $x=-3$. ومنه مجموعة الحلول : $S=\{(-3,1,1)\}$.

مثال 5 حل جملة المعادلات الخطية:
$$\begin{cases} x+y+z+2w=1 \\ x+2y+z+w=1 \\ x+y+2z+w=1 \\ 2x+y+z+w=1 \end{cases}$$

الحل: نشكل المصفوفة الموسّعة ثم نوجد المصفوفة المدرجة المكافئة لها:

$$H=\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

نجري على التوالي التحويلات $R_2-R_1\to R_2$ ثم $R_3-R_1\to R_3$ ثم $R_4-2R_1\to R_4$، فنجد:

$$H\sim\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -3 & -1 \end{array}\right]$$

نجري التحويل $R_4+R_2\to R_4$ فنجد:

$$H\sim\left[\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -4 & -1 \end{array}\right]$$

نجري التحويل $R_4+R_3\to R_4$ فنجد:

$$H\sim\left[\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-5} & -1 \end{array}\right]$$

الجملة المكافئة هي
$$\begin{cases} x+y+z+2w=1 \\ y-w=0 \\ z-w=0 \\ -5w=-1 \end{cases}$$

نلاحظ $r=r'=n=4$، فللجملة المفروضة حلٌ وحيد.

نحلها بطريقة التعويض، فنجد مجموعة الحلول: $S=\left\{\left(\frac{1}{5},\frac{1}{5},\frac{1}{5},\frac{1}{5}\right)\right\}$

ملاحظة: يمكن حل الجملة المدروسة في المثال (5) كما يأتي: بجمع المعادلات الأربع طرفاً إلى طرف نجد $\frac{4}{5} = x + y + z + w$ ، فإذا طرحنا هذه المعادلة من الأولى وجدنا $w = \frac{1}{5}$، ثُم إذا طرحناها من الثانية وجدنا $y = \frac{1}{5}$، وإذا طرحناها من الثالثة وجدنا $z = \frac{1}{5}$، ولا يبقى للمتغير x إلاّ أن يساوي $\frac{1}{5}$.

مثال 6 حل جملة المعادلتين: $\begin{cases} x + 2y - z = -1 \\ -2x - 4y + 2z = 2 \end{cases}$

الحل: المصفوفة الموسّعة للجملة: $H = \left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & -1 & -1 \\ -2 & -4 & 2 & 2 \end{array}\right]$

نجري التحويل: $R_2 + 2R_1 \to R_2$ ، فنجد : $H \sim \left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

نلاحظ أن $r = r' = 1 < n$، فللجملة عدد غير منته من الحلول بعدد $n - r = 2$ من المجاهيل الاختيارية.

والجملة المكافئة هي $x + 2y - z = -1$ نحلها بدلالة مجهولين اختياريين. مثلاً $x = -2y + z - 1$،

ومجموعة الحلول هي : $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x = -2y + z - 1\}$

مثال 7 ابحث عن حل جملة المعادلتين الآتيتين: $\left.\begin{array}{r} x - y + z = 2 \\ 2x - 2y + 2z = 5 \end{array}\right\}$

الحل: لنحل الجملة بطريقة غاوس:

المصفوفة الموسعة $H = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 2 & 5 \end{array}\right]$

نجري التحويل $R_2 - 2R_1 \to R_2$ فنجد $H \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$.

في الجملة المكافئة توجد المعادلة المتناقضة $0 = 1$ فالجملة مستحيلة الحل.

ملاحظة :

عند حل جملة المعادلات غير المتجانسة $A \cdot X = B$ إذا كان $m < n$ فالجملة لها عدد غير منته من الحلول أو مستحيلة. (لاحظ المثالين 1 و 3 السابقين).

مثال 8 حل الجملة المتجانسة:

$$\begin{aligned} x + 2y &= 0 \\ 2x - y &= 0 \\ x + y &= 0 \end{aligned}$$

الحل: المصفوفة الموسّعة $H = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$

نجري التحويلين $R_2 - 2R_1 \to R_2$ و $R_3 - R_1 \to R_3$ فنجد: $H \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{array}\right]$

نجري التحويل: $R_3 - \frac{1}{5}R_2 \to R_3$ نجد : $H \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ و منه $n = r = 2$ ، لها حل وحيد

هو الحل الصفري $x = 0$ و $y = 0$ و منه مجموعة الحل هي $S = \{(0,0)\}$

مثال 9 ابحث عن حل جملة المعادلات: $\begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ 2x + y + z = 0 \\ 3x + 2y - z = 0 \end{cases}$

الحل: المصفوفة الموسّعة $H = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right]$

نجري التحويلين: $R_2 - 2R_1 \to R_2$ ثم $R_3 - 3R_1 \to R_3$

تعلّم:
الجملة المتجانسة ليست مستحيلة الحل
- لها حل وحيد هو الحل الصفري .
- أو لها عدد غير منته من الحلول .

فنجد:

$$H \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & 0 \end{array}\right]$$

نجري التحويل: $R_3 - R_2 \to R_3$ نجد: $H \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

نلاحظ أنَّ $r = 2 < n$ ، لذلك لها عدد غير منتهٍ من الحلول بعدد يساوي $n - r = 1$ مجهولاً اختيارياً، وليكن z.

الجملة المكافئة:

$$\begin{aligned} x + y - 2z &= 0 \quad (1) \\ -y + 5z &= 0 \quad (2) \end{aligned}$$

نحلها بالتعويض من (2) نجد $y = 5z$ نعوضها في (1) فنجد $x + 5z - 2z = 0$ ومنه: $x = -3z$.

إذن مجموعة الحلول هي:

$$\begin{aligned} S &= \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = -3z, y = 5z\right\} \\ &= \left\{(-3z, 5z, z) : z \in \mathbb{R}\right\} \end{aligned}$$

تمرينات

1 لتكن المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0,5 \\ -3 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ أوجد مصفوفة مدرّجة مُكافئة.

2 حلّ كل جملة مما يأتي:

a) $\begin{cases} x + 2y = 7 \\ 2x - 3y = -7 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x + y = 1 \\ x + 2y = -3 \\ 4x + 3y = -2 \end{cases}$

3 حلّ كل جملة مما يأتي:

a) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 9 \\ 2x - y + z = 8 \\ 3x - z = 3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + 2y + 3z + 4w = 5 \\ x + 3y + 5z + 7w = 11 \\ x - z - 2w = -6 \end{cases}$

4 حلّ كل جملة مما يأتي:

a) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ -x + 3y + 2z = 0 \\ 2x + y - 2z = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y + z + w = 0 \\ x + w = 0 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases}$

5 حلّ جملة المعادلات الآتية:

a) $\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x - y = 7 \end{cases}$

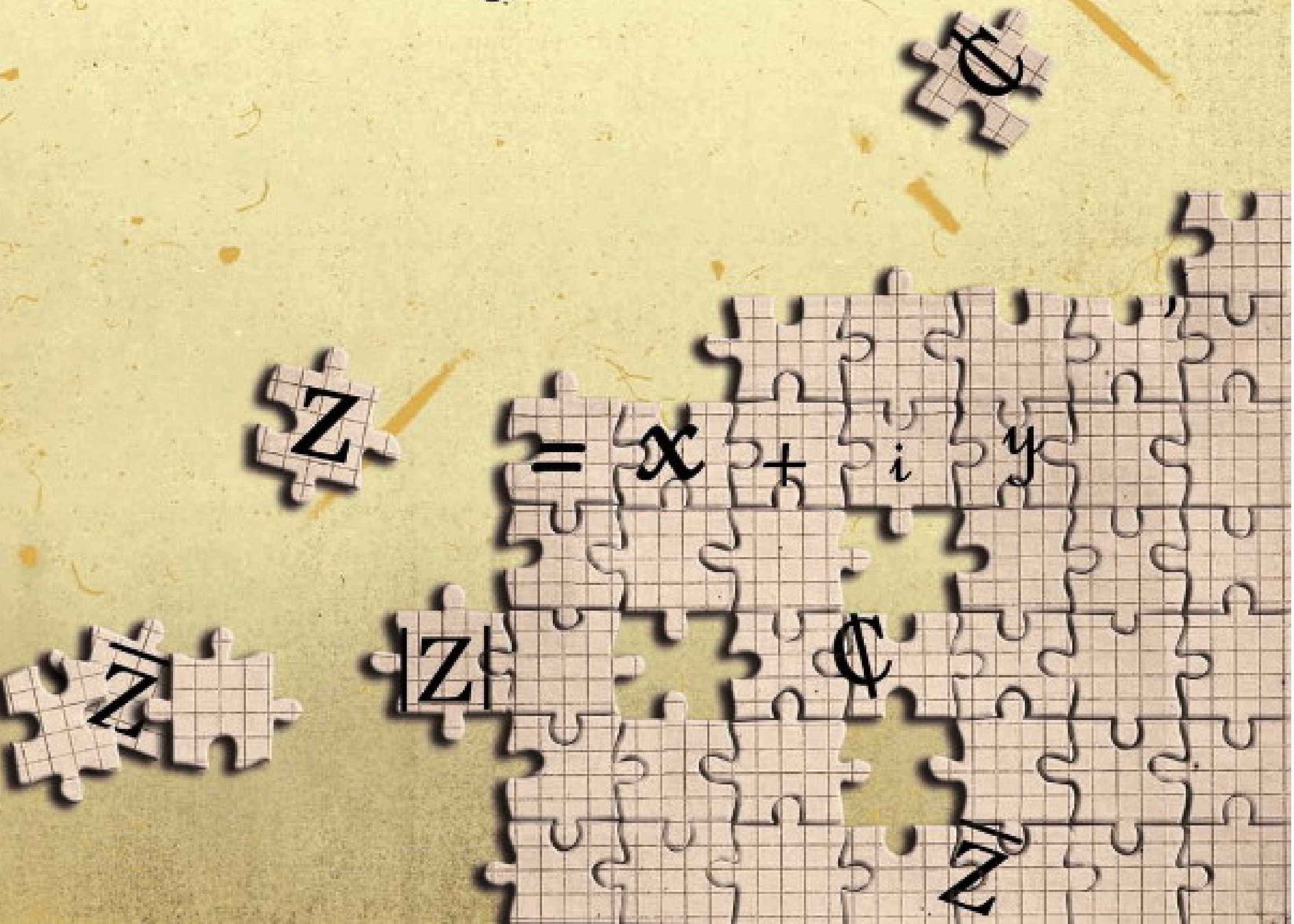
b) $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x - 2y + z = 0 \\ 2x + y - z = 7 \end{cases}$

6 مزارع يملأ حوض مبيد أعشاب سعته 500 ليتر من ثلاثة صنابير : الأول ماء تكلفة الليتر منه 1 ليرة والثاني مبيد أعشاب تكلفة الليتر منه 200 ليرة والصنبور الثالث مبيد أعشاب نوع آخر تكلفة الليتر منه 250 ليرة، إذا علمت أنّ المزارع دفع 1595 ل س وأن نسبة مجموع كمية المبيدين إلى الماء تساوي $\frac{1}{99}$. احسب عدد الليترات من كل نوع.

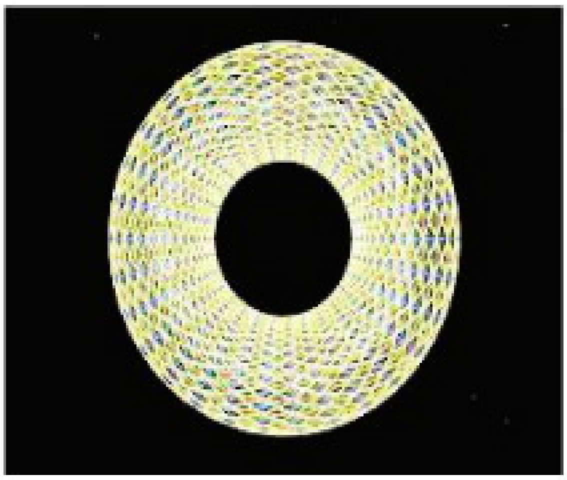
3

الأعداد المركبة

- تحليل كثيرات الحدود في ع إلى عوامل خطية بأمثال حقيقية
- التمثيل الهندسي للأعداد المركبة
- الصيغة الأسية للعدد المركب



تحليل كثيرات الحدود في   إلى عوامل خطية بأمثال حقيقية



- تعرفت سابقاً الشكل الجبري للعدد المركب z هو: $z = x + iy$ حيث $x , y \in \mathbb{R}$
- رمزنا مجموعة الأعداد المركبة بـ $\mathbb{C}$ حيث: $i^2 = -1$ وَ i الوحدة التخيلية

وَ $i , 2i , 3i , -3i , \sqrt{2}\, i , ...$ أعداد تخيلية بحتة

- القوى الطبيعية لـ i هي:

$$i^2 = -1 , i^3 = -i , i^4 = 1, i^5 = i , i^6 = -1, i^7 = -i , i^8 = 1,....$$

وبالتالي نجد : $n \in \mathbb{N}$: $i^{4n} = 1 , \ i^{4n+1} = i \ , i^{4n+2} = -1 , \ i^{4n+3} = -i$

- مرافق العدد العقدي $z = x + iy$ هو $\overline{z} = x - iy$ عندئذٍ :

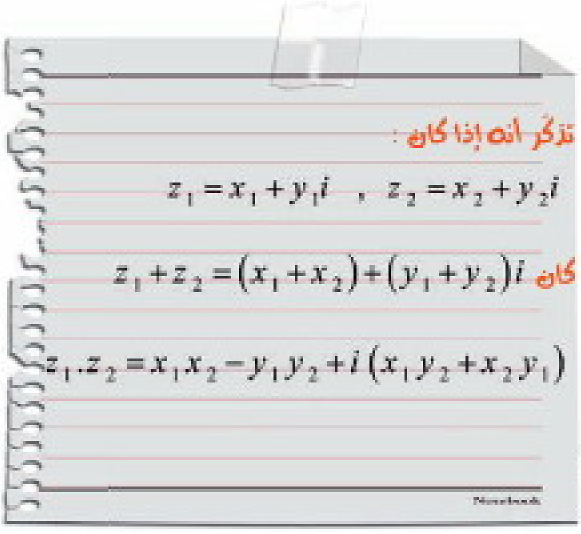
$$z \cdot \overline{z} = x^2 + y^2$$

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

و هي طويلة العدد المركب Z

مثال ليكن $z_1 = 2 + i \ , \ z_2 = 2 - i$

1. اوجد $z_1 + z_2 , z_1 - z_2 , z_1 \cdot z_2$
2. بين أن $\overline{z_1} = z_2$ وأوجد $\dfrac{z_1}{z_2}$
3. أوجد $|z_1| , |z_2|$ ماذا تلاحظ ؟



الحل:

1) $z_1 + z_2 = (2 + 2) + (-1 + 1) i = 4$

$z_1 - z_2 = (2 - 2) + (+i + i) = 2i$

$z_1 \cdot z_2 = (2 + i).(2 - i) = 4 + 1 + (-2 + 2) i = 5$

2) $z_1 = 2 + i \Rightarrow \overline{z_1} = 2 - i = z_2$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2+i}{2-i} = \frac{(2+i)^2}{(2-i)\cdot(2+i)} = \frac{(2+i)^2}{5} = \frac{4-1+4i}{5} = \frac{3}{5} + \frac{4}{5} i$$

3) $|z_2| = \sqrt{5}$, $|z_1| = \sqrt{5}$ نلاحظ أن $|z_1| = |\bar{z}_1|$ ((للعددين المترافقين الطويلة ذاتها))

تدريب أثبت صحة ما يأتي:

1) يكون z عدداً حقيقياً إذا وفقط إذا كان $\bar{z} = z$

2) يكون z عدداً تخيلياً بحتاً إذا وفقط إذا كان $\bar{z} = -z$

3) إذا كان $|z| = 1$ فإن $\bar{z} = \frac{1}{z}$

1.1.3 تحليل كثيرات الحدود في $\mathbb{C}$ إلى عوامل خطية بأمثال

أولاً ـ المعادلة التربيعية من الشكل $z^2 = \beta \ : \ \beta \in \mathbb{R}$

1) $\beta \geq 0$ للمعادلة حلان هما $z_1 = \sqrt{\beta} \quad , \quad z_2 = -\sqrt{\beta}$

2) $\beta < 0$ فيكون $-\beta > 0$ و تُكتب المعادلة عندئذٍ بالشكل $z^2 = -\beta \cdot i^2$

للمعادلة في هذه الحالة حلان هما $z_1 = \sqrt{-\beta} \cdot i \quad , \quad z_2 = -\sqrt{-\beta} \cdot i$

مثال 1) للمعادلة $z^2 = 8$ حلان هما $z_1 = 2\sqrt{2} \quad , \quad z_2 = -2\sqrt{2}$

2) لحل المعادلة $z^2 + 8 = 0$ نكتب $z^2 = -8 = 8 \cdot i^2$ و يكون لها حلان هما

$$z_1 = \sqrt{8} \cdot i = 2\sqrt{2} \cdot i \quad , \quad z_2 = -\sqrt{8} \cdot i = -2\sqrt{2} \cdot i$$

ثانياً ـ المعادلة التربيعية من الشكل $a z^2 + b z + c = 0$ حيث a و b و c أعداد حقيقة

و $a \neq 0$.

للحل نحسب مميز المعادلة $\Delta = b^2 - 4a \cdot c$. ونميز الحالات الآتية:

① إذا كان $\Delta > 0$ كان للمعادلة جذران: $z_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ و $z_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$.

② إذا كان $\Delta = 0$ كان للمعادلة جذر مضاعف: $z_1 = \frac{-b}{2a}$.

③ وإذا كان $\Delta < 0$ كان للمعادلة جذران: $z_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ و $z_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$

وهما جذران عقديان مترافقان وغير حقيقيين.

مثال لتكن المعادلة: $z^2 + 4z + 29 = 0$

الحل هنا $\Delta = -100$ و $\sqrt{-\Delta} = 10$. إذن جذرا المعادلة هما

$$\begin{cases} z_1 = \dfrac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \dfrac{-4 + 10i}{2} = -2 + 5i \\ z_2 = \dfrac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \dfrac{-4 - 10i}{2} = -2 - 5i \end{cases}$$

طريقة ثانية: يمكن الحل باستخدام الاتمام الى مربع كامل :

$$\begin{aligned} z^2 + 4z + 29 &= (z + 2)^2 + 25 \\ &= (z + 2)^2 - 25i^2 \\ &= (z + 2 - 5i)(z + 2 + 5i) \end{aligned}$$

ونستنتج مجدداً أن جذري المعادلة هما $-2 + 5i$ و $-2 - 5i$.

نشاط حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2 - 2z + 3 = 0$

طريقة أولى هنا $\Delta = -8$ و $\sqrt{-\Delta} = 2\sqrt{2}$. إذن

$$\begin{cases} z_1 = \dfrac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \dfrac{2 - 2\sqrt{2}i}{2} = 1 - \sqrt{2}i \\ z_2 = \dfrac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \dfrac{2 + 2\sqrt{2}i}{2} = 1 + \sqrt{2}i \end{cases}$$

طريقة ثانية: بالإتمام الى مربع كامل نكتب :

$$z^2 - 2z + 3 = z^2 - 2z + 1 - 1 + 3 = (z - 1)^2 + 2$$

$$= (z - 1)^2 - \left(\sqrt{2}i\right)^2 = \left(z - 1 - \sqrt{2}i\right).\left(z - 1 + \sqrt{2}i\right)$$

ونستنتج أن جذري المعادلة هما: $z_1 = 1 - \sqrt{2}i$ ، $z_2 = 1 + \sqrt{2}i$

تدريب حل في $\mathbb{C}$ كلاً من المعادلات الآتية:

1] $9z^2+4=0$, 2] $z^2-2z+2=0$, 3] $z^2+3z+6=0$

نتائـــــج:

1) في حالة a و b و c أعداد حقيقية حيث $a \neq 0$ للمعادلة $az^2+bz+c=0$.

- في حالة $\Delta > 0$، جذران حقيقيان هما $z_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ و $z_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$.
- وجذر مضاعف هو $z_1=z_2=\frac{-b}{2a}$ في حالة $\Delta=0$.

ولها في حالة $\Delta<0$ جذران مركبان مترافقان $(z_1=\overline{z_2})$ هما $z_1=\frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ و $z_2=\frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$. في مثل هذه الحالة، عند معرفة أحد جذري المعادلة، يمكن معرفة الجذر الآخر مباشرة، بأخذ مرافق الجذر الأول.

2) إذا كان z_1 , z_2 جذري المعادلة $az^2+bz+c=0$ كان :

$$az^2+bz+c=a(z-z_1)(z-z_2)$$

$$=az^2-(z_1+z_2)z+z_1\cdot z_2$$

ومنه $z_1+z_2=\frac{-b}{a}$ و $z_1\cdot z_2=\frac{c}{a}$

مثال حلل كثير الحدود z^2+2z+3 إلى جداء عوامل من الدرجة الأولى

الحل: نحل المعادلة $z^2+2z+3=0$، نحسب المميز فنجد $\Delta=-8<0$، إذن جذرا كثير الحدود z^2+2z+3 هما

$$z_1=\frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}=\frac{-2-2\sqrt{2}i}{2}=-1-\sqrt{2}i$$

$$z_2=\frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}=\frac{-2+2\sqrt{2}i}{2}=-1+\sqrt{2}i$$

فيكون :

$$z^2+2z+3=(z+1+\sqrt{2}i)(z+1-\sqrt{2}i)$$

ويمكننا أيضاً التحليل بالإتمام الى مربع كامل نجد :

$$z^2+2z+3=(z+1)^2+2$$
$$=(z+1)^2-2i^2$$
$$=(z+1-\sqrt{2}i)(z+1+\sqrt{2}i)$$

مثال 2 حل كثير الحدود : $4z^2-12z+13$

الحل :

$$\Delta=144-16\cdot 13=-64$$
$$z_1=\frac{12+8i}{8}=\frac{3+2i}{2}=\frac{3}{2}+i$$
$$z_2=\frac{12-8i}{8}=\frac{3-2i}{2}=\frac{3}{2}-i=\overline{z_1}$$
$$4z^2-12z+13=4\cdot\left(z-\frac{3}{2}-i\right)\cdot\left(z-\frac{3}{2}+i\right)=(2z-3-2i)\cdot(2z-3+2i)$$

مثال 3

1) تحقق أن $z_1=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ جذر للمعادلة $z^2+z+1=0$ ، ثم اوجد الجذر الأخر z_2

2) اكتب z^2+z+1 على شكل جداء عوامل .

الحل : نعوض $z_1=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ في المعادلة نجد :

$$\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2+\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)+1=\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{3}}{2}i-\frac{3}{4}-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i+1=0$$

محققة ، ومنه نستنتج ان $z_1=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ جذر للمعادلة $z^2+z+1=0$

و منه الجذر الثاني $z_2=\overline{z_1}=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

و بالتالي نجد: $z^2+z+1=\left(z+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(z+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

تدريب حل في $\mathbb{C}$ كلاً من كثيرات الحدود الآتية إلى عوامل خطية من الدرجة الأولى:

1] $81z^4+16$ 4] z^3-1

2] z^2+2z+4 5] z^3+1

3] z^2+2z+2 6] $4z^3+25$

2.1.3 الجذران التربيعيان للعدد المركب $z=a+bi$ بالشكل الجبري

تعريف: نقول إن ω جذر تربيعي للعدد المركب $z=a+bi$ إذا و فقط إذا كان $\omega^2=z$

خاصة : ليكن ω جذراً تربيعياً للعدد z. عندئذٍ تكون المجموعة $\{\omega,-\omega\}$ هي مجموعة جميع الجذور التربيعية للعدد z.

في الحقيقة، إذا كان t جذراً تربيعياً للعدد z، كان $0=t^2-z=t^2-\omega^2=(t-\omega)(t+\omega)$ إذن إما أن يكون $t=\omega$ أو يكون $t=-\omega$.

لنبحث عن الجذور التربيعية للعدد $z=a+bi$

لنتأمّل عدداً $z=a+bi$. ولنبحث عن جذر تربيعي ω للعدد z، مكتوب بالشكل الجبري $\omega=x+yi$ حيث x و y عددان حقيقيان.

المساواة $\omega^2=z$ تكافئ $(x+yi)^2=a+bi$ ومنه $x^2-y^2+2xyi=a+bi$.

ونستنتج أن $x^2-y^2=a$ و $2xy=b$

ولتسهيل حل هذه الجملة من المعادلات، يمكن أن نستفيد من معادلة ثالثة، تنتج من كون المساواة $\omega^2=z$ تقتضي أن يكون $|z|=|\omega|^2$ أي: $x^2+y^2=\sqrt{a^2+b^2}$. فتؤول مسألة إيجاد x و y إلى حل الجملة:

$$x^2-y^2=a \qquad (1)$$

$$x^2+y^2=\sqrt{a^2+b^2} \qquad (2)$$

$$xy=\frac{b}{2} \qquad (3)$$

المعادلة (2) تنتج من (1) و (3). ولكن إيجاد كل من x^2 و y^2 من المعادلتين (1) و (2) أيسر، وعندها نجد بالإشارة للمقدار x، و بالإشارة للمقدار y، ولكن ليست جميع الإشارات مناسبة لأن إشارة الجداء xy يجب أن تتفق مع إشارة b استناداً إلى المعادلة (3) التي تستعملها فقط لتعيين الإشارات المناسبة وللتحقق من صحة الحسابات.

مثال 1 أوجد الجذرين التربيعيين للعدد المركب : $z=3+4i$

الحل: نفترض أن $\omega=x+yi$ جذر تربيعي للعدد المركب z عندئذ :

$$x^2 - y^2 = 3 \qquad (1)$$
$$x^2 + y^2 = 5 \qquad (2)$$
$$xy = 2 \qquad (3)$$

بالحل المشترك لجملة المعادلتين (1) و (2)نجد $x^2 = 4$ومن ثَم $x \in \{-2,2\}$. ثُم نستنتج أنَّ $y^2 = 1$ ومنه $y \in \{-1,1\}$. ولكن من المعادلة (3) لدينا $xy > 0$، فيجب أن يكون للمقدارين x و y الإشارة نفسها. إذن $(x, y) = (2,1)$ أو $(x, y) = (-2,-1)$.

فالجذران التربيعيان للعدد $z = 3 + 4i$ هما : $\omega_1 = 2 + i$ و $\omega_2 = -2 - i$.

مثال 2 أوجد الجذرين التربيعيين للعدد المركب : $z = 4 - 2\sqrt{5}\, i$

الحل: نفترض أنَّ $\omega = x + yi$ جذر تربيعي للعدد المركب z عندئذ بالاستفادة من المساواتين : $(x + iy)^2 = z$ و $x^2 + y^2 = |z|$ نستنتج أنَّ

$$x^2 - y^2 = 4 \qquad (1)$$
$$x^2 + y^2 = 6 \qquad (2)$$
$$xy = -\sqrt{5} \qquad (3)$$

بجمع (1) و (2)نجد $2x^2 = 10$ ، أحد حلول هذه المعادلة هو $x = \sqrt{5}$، نعوّض هذه النتيجة في (3) فنستنتج أنّ $y = -1$.

إذن، أحد الجذرين التربيعيين للعدد المفروض z هو $\omega_1 = \sqrt{5} - i$. ونعلم أنّه عندئذ يكون الجذر التربيعي الآخر $\omega_2 = -\omega_1 = -\sqrt{5} + i$.

تدريب أوجد الجذرين التربيعيين لكل من الأعداد الآتية :

1. $z = 1 + i$
2. $z = 1 - \sqrt{3}\, i$
3. $z = 2i$
4. $z = 1 - 4\sqrt{5}\, i$
5. $z = 5 - 12i$
6. $z = 32i$

تمرينات

1 أثبت أن

$a)\ \dfrac{(1-i)^2}{1+i}+\dfrac{(1-i)^2}{1-i}=-2$ $\quad b)\ \dfrac{1}{(1-i)^2}+\dfrac{1}{(2+i)^2}=\dfrac{8}{25}i$ $\quad c)\ (1-i)(1-i^2)(1-i^3)=4$

حل في $\mathbb{C}$ كلاً من المعادلات الآتية :

$a)\ z^2+4z+5=0$ $\qquad b)\ z^2=-12$

$c)\ 2z^2-5z+13=0$ $\qquad d)\ 4z^2+25=0$

2 حلل في $\mathbb{C}$ كلاً من كثيرات الحدود الآتية إلى عوامل خطية من الدرجة الأولى

$a)\ z^2+z+1$ $\qquad b)\ 2z^2+z+\dfrac{1}{2}$

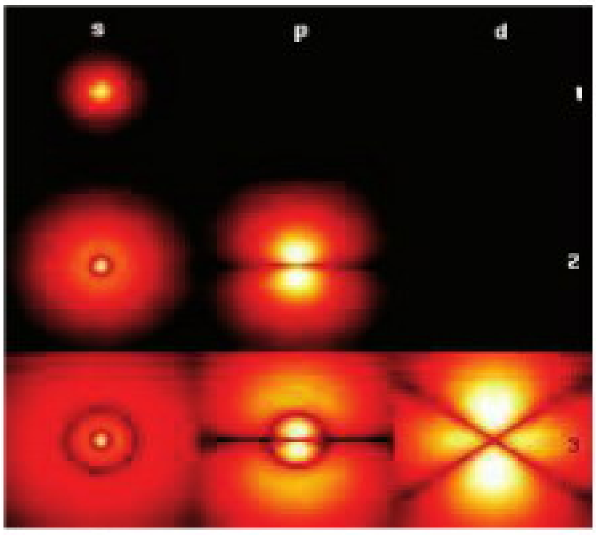
$c)\ 3z^2+z+\dfrac{1}{2}$ $\qquad d)\ 8z^3+27$

3 في كل من الحالات الآتية، أوجد معادلة من الشكل : $az^2+bz+c=0$ حيث a,b,c أعداد حقيقية والعدد z_1 جذرٌ لها.

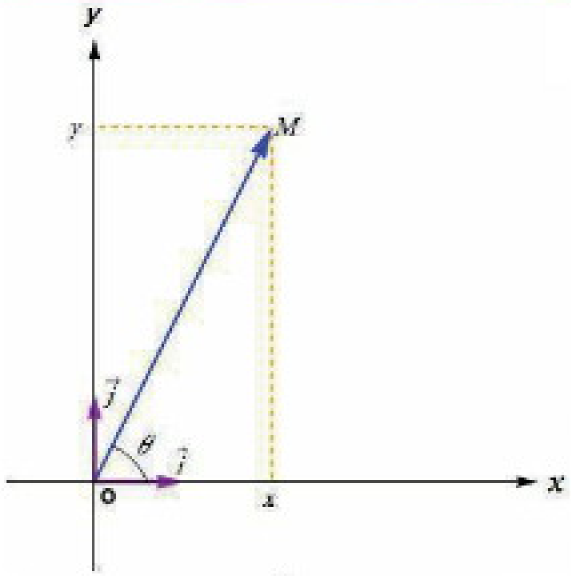
$1)\ z_1=i$ $\qquad 2)\ z_1=5-i$ $\qquad 3)\ z_1=\dfrac{\sqrt{2}+3i}{4}$

4 إذا كان $2+i$ هو أحد جذري المعادلة $z^2-bz+5=0$ حيث $b\in\mathbb{R}$ أوجد b.

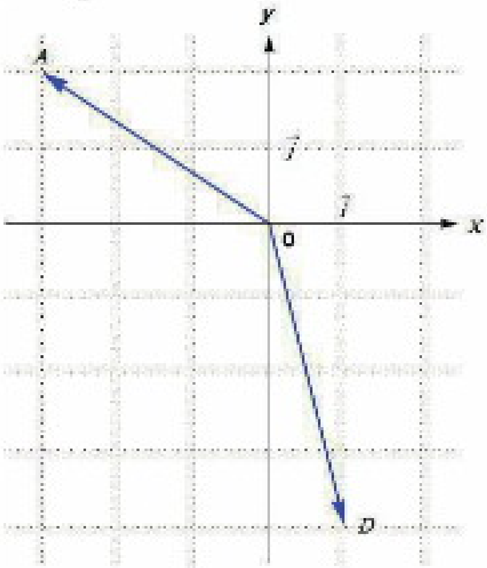
التمثيل الهندسي للأعداد المركبة



1.2.3 صورة العدد المركب:



في مستوٍ $\mathcal{P}$ محدّث بمعلم متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$، يمكن أن نقرن كل نقطة $M(x, y)$ بعدد مركب $z = x + yi$ وفق التقابل: $M(x, y) \mapsto z = x + iy$. وبالعكس يمكن أن نقرن بكل عدد مركب $z = x + yi$ النقطة $M(x, y)$ من $\mathcal{P}$، تُسمى النقطة $M(x, y)$ صورة العدد المركب $z = x + yi$، ونرمّز ذلك $M(z)$.



- في مستوٍ محدّث بالمعلم المتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$، يقابل النقطة $M(x, y)$ من هذا المستوي متجه الموضع $\overrightarrow{OM}$، حيث يكون $\overrightarrow{OM} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j}$
و يمكن القول إنّ العدد المركب $z = x + yi$ يقابله المتجه $\overrightarrow{OM} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j}$، يُسمى المتجه $\overrightarrow{OM}$ صورة العدد المركب z، و نسمي $\overrightarrow{OM}$ ممثل العدد المركب z

مثلاً :

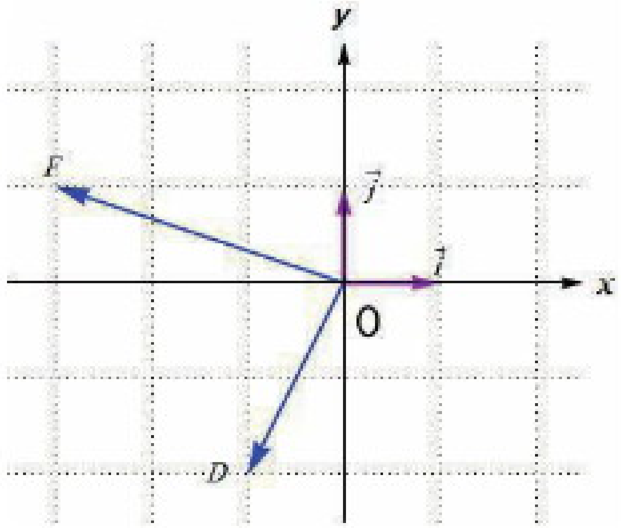
العدد المركب	$z_1 = 2 - 3i$	$z_2 = 1$	$z_3 = i$	$z_4 = 1 - 4i$
صورته كنقطة	$A(-3,2)$	$B(1,0)$	$C(0,1)$	$D(1,-4)$
صورته كمتجه	$OA = -3i + 2j$	$OB = i$	$OC = j$	$OD = i - 4j$

مثال

إن النقطتين F , D المحددتين على الشكل المجاور :

هما صورتا العددين المركبين:

$-3 + i$, $-1 - 2i$ على الترتيب



2.2.3 المستوي العقدي(المركب)

صورة كل عدد مركب $z = x + 0i$ هي نقطة $N(x,0)$ من المحور $x'x$، و بالعكس كل نقطة $N(x,0)$ من محور الفواصل هي صورة لعدد مركب من الشكل $z = x + 0i$ ، لذلك نسمي محور الفواصل المحور الحقيقي .

- صورة كل عدد مركب $z = 0 + yi$ هي نقطة $E(0,y)$ من محور التراتيب ، وعلى العكس كل نقطة $E(0,y)$ من محور التراتيب هي صورة لعدد مركب من الشكل $z = 0 + yi$ ، لذلك نسمي من محور التراتيب المحور التخيلي .
- نسمي المستوي المعيّن بهذين المحورين المستوي المركب.

3.2.3 الأعداد المركبة وصورها كمتجهات في المستوي:

الأعداد المركبة وصورها كمتجهات في المستوي:

ليكن العددان $z_1 = x_1 + i\,y_1$, $z_2 = x_2 + i\,y_2$.

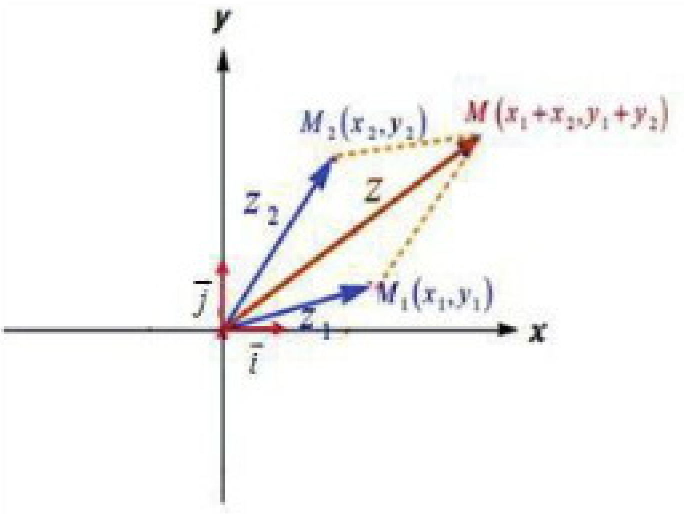
اكتب في المستوي (o, i, j) كلاً من:

1) OM_1 ، OM_2 صورتي z_1, z_2 على الترتيب .

2) OM صورة $z_1 + z_2$. ماذا تستنتج ؟

3) OM' صورة $z_1 - z_2$. ماذا تستنتج ؟

4) ON صورة $\alpha \cdot z_1$ حيث $\alpha \in \mathbb{R}$. ماذا تستنتج؟



الحل:

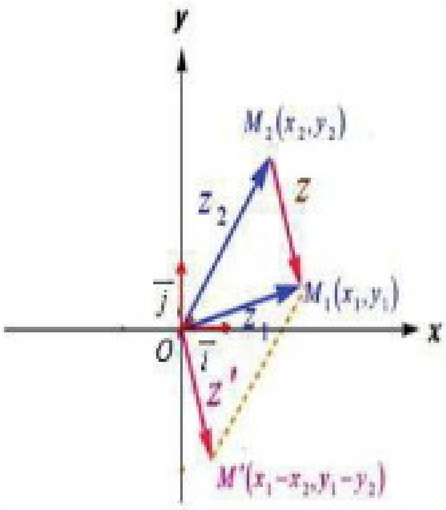
1) $OM_1(x_1, y_1)$ صورة العدد المركب $z_1 = x_1 + iy_1$ و $OM_2(x_2, y_2)$ صورة العدد المركب $z_2 = x_2 + iy_2$

كما في الشكل المجاور.

2) العدد $z = z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i \cdot (y_1 + y_2)$ صورته

$$OM = (x_1 + x_2)i + (y_1 + y_2)j$$

نجد أنَّ : $OM = OM_1 + OM_2$ أي: صورة مجموع عددين يساوي مجموع صورتيهما. ونستنتج أنه يمكن أن نمثل عملية جمع عددين مركبين بعملية جمع متجهين في المستوي وذلك حسب قاعدة متوازي الأضلاع في جمع المتجهات.



3) إن: $z' = z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i \cdot (y_1 - y_2)$

$$OM' = (x_1 - x_2)i + (y_1 - y_2)j$$

نجد أنَّ: $OM' = OM_1 - OM_2$ هو صورة العدد المركب $z = z_1 - z_2$.

و نستنتج أنه يمكن أن نمثل عملية طرح عدد مركب من آخر، بعملية طرح متجه من آخر في المستوي.

4) $\alpha \cdot z_1 = \alpha x_1 + i\alpha y_1$ صورته $ON = (\alpha x_1)i + (\alpha y_1)j$ نجد أنَّ $ON = \alpha \cdot OM_1$ هو صورة العدد المركب $\alpha \cdot z_1$.

و نستنتج أنه يمكن أن نمثل عملية ضرب عدد حقيقي بعدد مركب، بعملية ضرب عدد حقيقي بمتجه في المستوي.

❖ مما سبق نجد أنه يمكن نقل عمليات على الأعداد المركبة إلى المتجهات الممثلة لهذه الأعداد في المستوي.

❖ ليكن العددان $z_1 = x_1 + iy_1$ و $z_2 = x_2 + iy_2$،وصورتاهما OM_1 و OM_2 بالترتيب، في المستوي $(O, \vec{i}, \vec{j})$. نجد: $z_1 \cdot \overline{z_2} = (x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2) + i\,(x_1 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_1)$

نعلم أنَ الشرط اللازم والكافي لتوازي OM_1 و OM_2 هو $x_1 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_1 = 0$ وهو يكتب على الشكل: $\operatorname{Im}(z_1 \cdot \overline{z_2}) = 0$.

ونعلم أن الشرط اللازم والكافي لتعامد OM_1 و OM_2 هو $x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 = 0$ وهو يكتب على الشكل: $\operatorname{Re}(z_1 \cdot \overline{z_2}) = 0$.

تدريب

1) إذا كان $z_1 = 4 - 2i$, $z_2 = 1 + 2i$ ، مثّل هندسياً كلاً من هذين العددين ثم مثّل في الشكل ذاته كلاً من الأعداد المركبة الآتية: $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $2z_1$, $-3z_2$

2) إذا كان $z = 4 + 2i$, مثّل هندسياً العدد z ثم مثل في الشكل ذاته الأعداد المركبة الآتية:

$\overline{z}$, $-z$

4.2.3 الأعداد المركبة وصورها كنقاط في المستوي

الأعداد المركبة وصورها كنقاط في المستوي

ليكن العددان $z_1 = x_1 + iy_1$ و $z_2 = x_2 + iy_2$،وصورتاهما OM_1 و OM_2 بالترتيب، في المستوي $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

طول القطعة المستقيمة M_1M_2 يعطى بالعلاقة $M_1M_2 = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

وهو نفسه طويلة العدد $z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i \cdot (y_1 - y_2)$ أي: $M_1M_2 = |z_1 - z_2|$

مثال 1 عيّن مجموعة نقاط المستوي $M(z)$، صور الأعداد المركبة z التي تحقق $|z - 2| = 3$

الحل: لتكن M_0 النقطة $M(2)$ صورة العدد لمركب 2. عندئذ تعبّر المساواة $|z - 2| = 3$ عن أنّ $M(z)M_0 = 3$ أي إنّ بُعد النقطة $M(z)$ عن M_0 يساوي 3. فالمجموعة المطلوبة هي نقاط الدائرة التي مركزها $M_0(2,0)$ ونصف قطرها يساوي 3.

مثال 2 إذا كانت $M(z)$ صورة العدد المركب z.ماذا تمثل مجموعة النقاط $M(z)$في المستوي التي تحقق الأعداد المركبة z التي تمثلها المساواة $|z - 6 - i| + |z - 2 - i| = 20$؟

الحل:

ليكن $z_1 = 2 + i$ و $z_2 = 6 + i$. ولتكن صورتاهما النقطتان M_1 و M_2 بالترتيب. تكتب المعادلة المعطاة على الشكل $|z - z_1| + |z - z_2| = 20$ ما يعني أن: $MM_1 + MM_2 = 20$

ومجموعة النقاط M في المستوي التي مجموع بعديها عن النقطتين M_1 و M_2 يساوي مقداراً ثابتاً (20) هي نقاط القطع الناقص الذي محرقاه $F_1 = M_1$ و $F_2 = M_2$ وطول محوره الكبير $2a = 20$

مثال 3

إذا كانت $M(z)$ صورة العدد المركب z. ماذا تمثل مجموعة النقاط $M(z)$ في المستوي التي تحقق الأعداد المركبة z التي تمثلها المساواة: $|z - 1 + 2i| = |z - 3 - 5i|$

الحل:

ليكن $z_1 = 1 - 2i$ و $z_2 = 3 + 5i$ ولتكن صورتاهما النقطتين M_1 و M_2 بالترتيب.

تكتب المعادلة المعطاة على الشكل $|z - z_1| = |z - z_2|$ ما يعني أن: $MM_1 = MM_2$ ومجموعة النقاط M في المستوي التي تبعد البعد نفسه عن النقطتين M_1 و M_2 هي مجموعة نقاط محور القطعة المستقيمة M_1M_2.

تدريب

1) إذا كانت $M(x, y)$ صورة العدد المركب $z = x + iy$ أوجد المعادلة الديكارتية لمجموعة النقط M في كلِ حالةٍ مما يأتي:

$a)\ |z - 2 + i| = |z - 1 - 3i|$

$b)\ (z + \bar{z})^2 + (z - \bar{z})^2 = 4$

$c)\ |iz - 1| = |z + 2|$

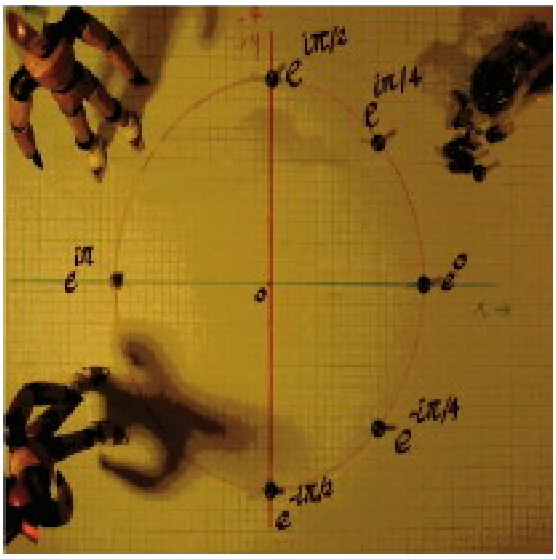
$d)\ |iz + 3 - 2i| = 5$

2) إذا كانت $M(x, y)$ صورة العدد المركب $z = x + iy$، عين مجموعة النقط $M(x, y)$ التي تحقق $z \cdot \bar{z} = 4$، ثم استنتج المنطقة من المستوي الذي تنتمي إليها مجموعة النقاط $N(x, y)$ التي تحقق العلاقة $z \cdot \bar{z} \le 4$ (هنا N صورة العدد Z)

3) إذا كانت $M(x,y)$ صورة العدد المركب $z = x + iy$ ، لتكن $\mathcal{H}$ مجموعة النقاط $M(z)$ في المستوي التي تقع على القطع الزائد الذي محرقاه $F_1 = (0,-1)$ و $F_2 = (8,0)$ ، والبعد بين ذروتيه يساوي 10. عبّر عن $\mathcal{H}$ مستعملاً المفهوم الهندسي للعدد المركب.

4) ليكن العدد المركب $z = x + iy$ الذي صورته $M(x,y)$ في المستوي ترسم قطعاً زائداً $\mathcal{H}$ متساوي الساقين معادلته $x^2 - y^2 = 4$.اكتب معادلة $\mathcal{H}$ مستعملاً رمز العدد المركب.

الصيغة الأسية للعدد المركب



1.3.3 الشكل الأسي لعدد مركب طويلته تساوي الواحد

ليكن العدد المركب $u = x + iy$ طويلته تساوي الواحد $|u| = 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$, يوجد عدد حقيقي θ يحقق $x = \cos\theta$ و $y = \sin\theta$ ونستطيع كتابته على الشكل:

$u = \cos\theta + i\sin\theta$.

إذا كان θ عدداً حقيقياً رمزنا إلى العدد المركب $u = \cos\theta + i\sin\theta$ بالرمز $e^{i\theta}$ ونسميه الشكل الأسي للعدد المركب u.

ملاحظات ونتائج: $e^{i(-\theta)} = e^{-i\theta} = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta)$

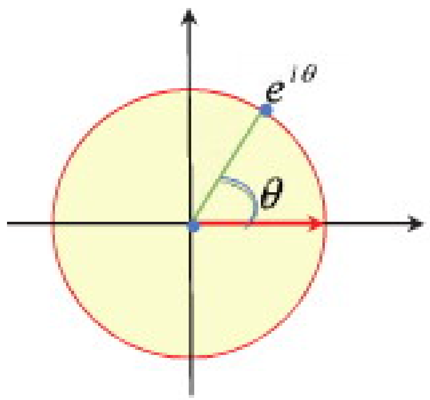
- $\sin\theta = \mathrm{Im}\left(e^{i\theta}\right)$ ، $\cos\theta = \mathrm{Re}\left(e^{i\theta}\right)$
- في الحالة الخاصة $\theta = 0$ نجد $e^{0} = \cos 0 + i\sin 0 = 1$
- من أجل أي عدد حقيقي θ فإن $e^{i(-\theta)} = e^{-i\theta} = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta)$

  ومنه $e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$ أي $e^{-i\theta} = \overline{\left(e^{i\theta}\right)}$
- بما أن كل عدد مركب طويلته الواحد يتساوى مقلوبه ومرافقه($|z| = 1 \Leftrightarrow \bar{z} = \frac{1}{z}$) ومنه نجد

  $$\frac{1}{e^{i\theta}} = \overline{\left(e^{i\theta}\right)} = e^{-i\theta}$$
- $-e^{i\theta} = -\cos\theta - i\sin\theta = \cos(\theta + \pi) + i\sin(\theta + \pi) = e^{i(\theta+\pi)}$

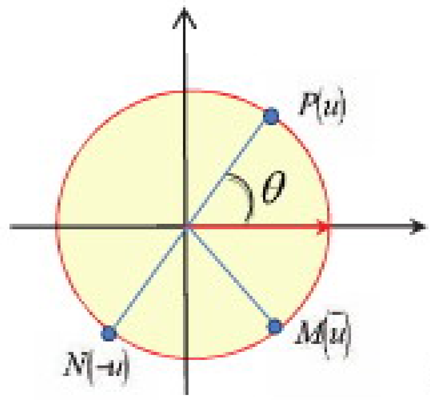
2.3.3 التمثيل الهندسي للعدد المركب $u=e^{i\theta}$

تمثيل هندسي



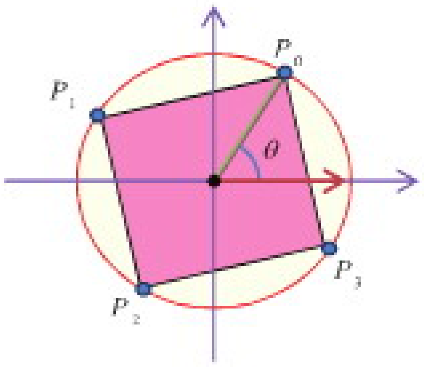
نمثل العدد $u=e^{i\theta}$ في المستوي المحدث بمعلم متجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$ بنقطة $P(u)$ على دائرة نصف قطرها يساوي الواحد ومركزها مبدأ الإحداثيات O (دائرة الوحدة) بحيث يصنع نصف القطر OP مع المتّجه $\vec{i}$ زاوية قياسها θ.

- النقطة الممثلة للعدد $\bar{u}=e^{-i\theta}$ ولتكن $M(\bar{u})$ هي نقطة مناظرة للنقطة $P(u)$ بالنسبة للمحور $x'x$
- بينما النقطة الممثلة للعدد $-u=e^{i(\theta+\pi)}$ ولتكن $N(-u)$ هي نظيرة النقطة $P(u)$ بالنسبة إلى مبدأ الإحداثيات.



أمثلة:

- $e^{2\pi i}=1$, $e^{\frac{\pi}{2}i}=i$, $e^{\pi i}=-1$, $e^{\frac{3\pi}{2}i}=-i$
- $u=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$ يكافئ $u=e^{i\frac{\pi}{6}}$
- $-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i=e^{i\frac{3\pi}{4}}$
- $-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i=e^{i\frac{4\pi}{3}}$
- $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i=e^{-i\frac{\pi}{6}}$
- $e^{i\frac{7\pi}{6}}=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$
- $e^{-i\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$
- $e^{i\frac{2\pi}{3}}=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$



- النقاط P_k الممثلة للأعداد $z_k = e^{i\left(\theta+\frac{k\pi}{2}\right)}$ حيث $k \in \{0,1,2,3\}$ تشكل رؤوساً لمربع يتقاطع قطراه في مبدأ الإحداثيات.

ونسمي الأعداد التي تمثلها هذه النقاط بالأعداد التشاركية.

- وعموماً النقاط P_k الممثلة للأعداد $z_k = e^{i\left(\theta+\frac{2\pi k}{n}\right)}$ حيث $k \in \{0,1,2,\dots,n-1\}$ تشكل رؤوساً لمضلع منتظم ذي n ضلعاً مرسوم في دائرة الوحدة.

دستورا أويلر $Euler$:

نستطيع كتابة النسب المثلثية لكل عدد حقيقي θ باستعمال الأعداد المركبة كما يلي:

$$e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta \quad ,e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

فنجد بالجمع $\cos\theta = \dfrac{e^{+i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ ثم بالطرح نجد $\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$ وهما دستورا أويلر

3.3.3 الجداء و القسمة

أياً كان العددان الحقيقيان θ، φ كان

$$\begin{aligned} e^{i\theta}\cdot e^{i\varphi} &= (\cos\theta + i\sin\theta)\cdot(\cos\varphi + i\sin\varphi)\\ &= (\cos\theta\cdot\cos\varphi - \sin\theta\cdot\sin\varphi) + i\,(\sin\theta\cdot\cos\varphi + \cos\theta\cdot\sin\varphi)\\ &= \cos(\theta+\varphi) + i\sin(\theta+\varphi) = e^{i(\theta+\varphi)}\end{aligned}$$

ومنه الدستور $\forall\, \theta,\varphi \in \mathbb{R} : e^{i\theta}\cdot e^{i\varphi} = e^{i(\theta+\varphi)}$

أياً كان العددان الحقيقيان θ، φ كان $\dfrac{e^{i\theta}}{e^{i\varphi}} = e^{i\theta}\cdot\dfrac{1}{e^{i\varphi}} = e^{i\theta}\cdot e^{-i\varphi} = e^{i\theta - i\varphi} = e^{i(\theta-\varphi)}$

نتائج

- في حالة $\theta = \varphi$ نستنتج من $e^{i\theta}\cdot e^{i\varphi} = e^{i(\theta+\varphi)}$ أن $\left(e^{i\theta}\right)^2 = e^{2i\theta}$
- يمكن تعميم قاعدة الرفع إلى أس طبيعي لتصبح $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{i\theta n}$ أياً كان n من $\mathbb{N}$. ونبرهن بالاستقراء الرياضي كما يلي:

في حالة n من $\mathbb{N}$، لتكن $E(n)$ التالية: $\forall\,\theta \in \mathbb{R}, \left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$.

عندما $n = 0$، لدينا اصطلاحاً $\left(e^{i\theta}\right)^0 = 1 = e^{i0}$ فالخاصة $E(0)$ صحيحة.

عندما $n=1$ الخاصة $E(1)$ صحيحة وضوحاً : $\left(e^{i\theta}\right)^{1}=e^{i\theta}$. ولقد أثبتنا صحة الخاصة $E(2)$ في النقطة السابقة.

لنفترض صحة الخاصة $E(k)$ عند عدد طبيعي k. أي $\left(e^{i\theta}\right)^{k}=e^{ik\theta}$، عندها

$$\left(e^{i\theta}\right)^{k+1}=\left(e^{i\theta}\right)^{k}\cdot e^{i\theta}=e^{ik\theta}\cdot e^{i\theta}=e^{i(k\theta+\theta)}=e^{i(k+1)\theta}$$

إذن $E(k+1)$ صحيحة أيضاً. فنكون قد أثبتنا صحة $E(n)$ أياً كانت قيمة n من $\mathbb{N}$.

- تبقى القاعدة $\left(e^{i\theta}\right)^{n}=e^{in\theta}$ صحيحة في حالة $n\in\mathbb{Z}$ لأنه عندما $n<0$ يكون $-n>0$ ويمكن أن نكتب:

$$\left(e^{i\theta}\right)^{n}=\left(\frac{1}{e^{i\theta}}\right)^{-n}=\left(e^{i(-\theta)}\right)^{-n}=e^{i(-\theta)(-n)}=e^{i\theta n}$$

وتكتب هذه النتيجة بشكل مكافئ هو دستور دوموافر

دستور دوموافر:

أياً كانت θ من $\mathbb{R}$، وأياً كانت n من $\mathbb{Z}$، كان $(\cos\theta+i\sin\theta)^{n}=\cos n\theta+i\sin n\theta$

مثال 1

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2}\right)^{24}=\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)^{24}$$

$$=\cos\left(24\times\frac{-\pi}{6}\right)+i\sin\left(24\times\frac{-\pi}{6}\right)=\cos(-4\pi)+i\sin(-4\pi)$$

$$=1+0\cdot i=1$$

مثال 2

$$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{24}=\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)^{22}$$

$$=\cos\left(22\times\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(22\times\frac{3\pi}{4}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}+16\pi\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}+16\pi\right)$$

$$=0+1\cdot i=i$$

4.3.3 تطبيقات الأعداد المركبة في المثلثات

- تمكننا الأعداد المركبة من إيجاد النسب المثلثية لمضاعفات زاوية بدلالة النسب المثلثية للزاوية.

مثال 3 اكتب النسب المثلثية للزاوية 2θ بدلالة النسب المثلثية للزاوية θ

الحل: نكتب دستور دوموافر: $(\cos\theta+i\sin\theta)^{2}=\cos 2\theta+i\sin 2\theta$

باستعمال دستور ثنائي الحد في الطرف الأيسر من المساواة نجد:

$$\cos 2\theta + i \sin 2\theta = \cos^2 \theta + 2i \cos\theta \sin\theta + i^2 \sin^2 \theta$$

$$= \left(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta\right) + i\left(2\cos\theta \sin\theta\right)$$

بمساواة الجزأين الحقيقيين في طرفي المساواة نجد $\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$

ثم نساوي بين الجزأين التخيليين نجد $\sin 2\theta = 2\cos\theta \sin\theta$

لإيجاد عبارة $\tan 2\theta$ ننطلق من النسبتين السابقتين نستنتج أن:

$$\tan 2\theta = \frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta} = \frac{2\cos\theta \sin\theta}{\cos^2\theta - \sin^2\theta}$$

وبقسمة البسط والمقام على $\cos^2\theta$ نجد $\tan 2\theta = \dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$

مثال 4 اكتب النسب المثلثية للزاوية 4θ بدلالة النسب المثلثية للزاوية θ

الحل: نكتب دستور دوموافر: $(\cos\theta + i\sin\theta)^4 = \cos 4\theta + i \sin 4\theta$

باستعمال دستور ثنائي الحد في الطرف الأيسر من المساواة نجد:

$$\cos 4\theta + i \sin 4\theta = \cos^4\theta + 4i\cos^3\theta \sin\theta + 6i^2\cos^2\theta \sin^2\theta + 4i^3 \cos\theta \sin\theta^3 + i^4 \sin^4\theta$$

$$= \left(\cos^4\theta - 6\cos^2\theta \sin^2\theta + \sin^4\theta\right) + i\left(4\cos^3\theta \sin\theta - 4\cos\theta \sin^3\theta\right)$$

بمساواة الجزأين الحقيقيين في طرفي المساواة :

$$\cos 4\theta = \cos^4\theta - 6\cos^2\theta \sin^2\theta + \sin^4\theta$$

بالإفادة من العلاقة $\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$ نجد:

$$\cos 4\theta = 1 - 8\cos^2\theta + 8\cos^4\theta$$

نساوي بين الجزأين التخيليين في طرفي المساواة

$$\sin 4\theta = 4\cos^3\theta \sin\theta - 4\cos\theta \sin^3\theta$$

وبالأسلوب السابق نفسه نجد $\sin 4\theta = 4\sin\theta\left(2\cos^3\theta - \cos\theta\right)$

لإيجاد عبارة $\tan 4\theta$ ننطلق من النسبتين السابقتين نستنتج أن:

$$\tan 4\theta = \frac{\sin 4\theta}{\cos 4\theta} = \frac{4\cos^3\theta \sin\theta - 4\cos\theta \sin^3\theta}{\cos^4\theta - 6\cos^2\theta \sin^2\theta + \sin^4\theta}$$

وبقسمة البسط والمقام على $\cos^4\theta$ نجد:

$$\tan 4\theta = \frac{4\tan\theta - 4\tan^3\theta}{1 - 6\tan^2\theta + \tan^4\theta}$$

- تمكننا الأعداد المركبة من تحويل نسب مثلثية من الشكل $\sin^n \theta$، أو من الشكل $\cos^n \theta$ إلى عبارة خطية لمضاعفات الزاوية θ كما في المثال الآتي

مثال 5 اكتب $\cos^3 \theta$ على شكل مجموع نسب مثلثية لمضاعفات الزاوية θ

$$\cos^3 \theta = \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right)^3$$

باستعمال منشور ثنائي الحد نجد

$$\cos^3 \theta = \frac{1}{8}\left(e^{3i\theta} + 3e^{2i\theta}e^{-i\theta} + 3e^{i\theta}e^{-2i\theta} + e^{-3i\theta}\right)$$

$$\cos^3 \theta = \frac{1}{8}\left[\left(e^{3i\theta} + e^{-3i\theta}\right) + 3\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right)\right]$$

وباستعمال دستور أويلر للعودة إلى النسب المثلثية نجد:

$$\cos^3 \theta = \frac{1}{8}[2\cos 3\theta + 6\cos\theta] = \frac{1}{4}\cos 3\theta + \frac{3}{4}\cos\theta$$

مثال 6 اكتب $\sin^6 \theta$ على شكل مجموع نسب مثلثية لمضاعفات الزاوية θ. ثم أوجد $\int \sin^6 x\,dx$ اعتماداً على ما تجده

الحل: نعتمد على دستور أويلر ونرفع للقوة السادسة

$$\sin^6 \theta = \left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}\right)^6 = \frac{1}{-64}\left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right)^6$$

باستعمال دستور ثنائي الحد نجد

$$\sin^6 \theta = \frac{-1}{64}(e^{6i\theta} - 6e^{5i\theta}e^{-i\theta} + 15e^{4i\theta}e^{-2i\theta} - 20e^{3i\theta}e^{-3i\theta}$$
$$+ 15e^{2i\theta}e^{-4i\theta} - 6e^{i\theta}e^{-5i\theta} + e^{-6i\theta})$$

$$= \frac{-1}{64}(e^{6i\theta} - 6e^{4i\theta} + 15e^{2i\theta} - 20 + 15e^{-2i\theta} - 6e^{-4i\theta} + e^{-6i\theta})$$

$$= \frac{-1}{64}\left[\left(e^{6i\theta} + e^{-6i\theta}\right) - 6\left(e^{4i\theta} + e^{-4i\theta}\right) + 15\left(e^{2i\theta} + 15e^{-2i\theta}\right) - 20\right]$$

باستعمال دستور أويلر مرة أخرى نجد

$$\sin^6 \theta = \frac{-1}{64}(2\cos 6\theta - 12\cos 4\theta + 30\cos 2\theta - 20)$$

$$= \frac{-1}{32}(\cos 6\theta - 6\cos 4\theta + 15\cos 2\theta - 10)$$

والآن لنجد التكامل $\int \sin^6 x\,dx$ بتعويض $\sin^6$ مما سبق

$$\int \sin^6 x\,dx = \frac{-1}{32}\int (\cos 6x - 6\cos 4x + 15\cos 2x - 10)\,dx$$
$$= \frac{-1}{32}\left(\frac{1}{6}\sin 6x + \frac{6}{4}\sin 4x - \frac{15}{2}\sin 2x - 10x\right) + C$$

تدريب

1) اكتب النسب المثلثية للزاوية 3θ بدلالة النسب المثلثية للزاوية θ

2) اكتب $\cos^4\theta$ بشكل مجموع نسب مثلثية لمضاعفات الزاوية θ. واعتماداً على ما تجده أوجد $\int \cos^4 x\,dx$

3) اكتب $\cos^4\theta \sin^2\theta$ بشكل مجموع نسب مثلثية لمضاعفات الزاوية θ. واعتماداً على ما تجده أوجد $\int \cos^4 x \sin^2 x\,dx$

مبرهنة ليكن θ عدداً حقيقياً. إنّ مجموعة حلول المعادلة $e^{i\varphi} = e^{i\theta}$ ، (بالمجهول φ) هي $\{\theta + 2\pi k : k \in \mathbb{Z}\}$

في الحقيقة لو ضربنا طرفي المساواة $e^{i\theta} = e^{i\varphi}$ بالعدد $e^{-i\varphi} \neq 0$ استنتجنا أن $e^{i(\theta-\varphi)} = 1$ وهذا يكافئ $\{\cos(\theta-\varphi) = 1$ و $\sin(\theta-\varphi) = 0\}$ أي إنّ $\varphi - \theta$ هو مضاعف صحيح للعدد 2π وهي النتيجة المطلوبة.

5.3.3 الشكل الأسي لعدد مركب

كل عدد مركب غير معدوم z يقابله عدد طويلته تساوي الواحد هو $\frac{z}{|z|}$ (تحقق من ذلك)، فيوجد عدد حقيقي θ يحقق $\frac{z}{|z|} = e^{i\theta}$ وهذا يمكننا من كتابة العدد المركب غير المعدوم z بالشكل: $z = |z|e^{i\theta}$ وإذا رمزنا $r = |z| > 0$ كان $z = re^{i\theta}$ ، وهو الشكل الأسي للعدد المركب.
ونسمي θ زاوية العدد المركب.

نتائج:

- استناداً إلى المبرهنة السابقة، تتحقق المساواة $r_1e^{i\theta_1} = r_0e^{i\theta_0}$ ، إذا وفقط إذا كان $r_1 = r_0$ و $\theta_1 \in \{\theta_0 + 2\pi k : k \in \mathbb{Z}\}$
- وكذلك، إذا كانت θ_0 زاوية للعدد المركب غير المعدوم z ، كان كل عدد حقيقي θ من المجموعة $\{\theta_0 + 2\pi k : k \in \mathbb{Z}\}$ أيضاً زاوية للعدد المركب z.
- يمكن كتابة كل عدد مركب $z = x + iy$ غير معدوم بالشكل $z = re^{i\theta}$ حيث

$$e^{i\theta}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+i\,\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad \text{و} \quad r=|z|=\sqrt{x^2+y^2}$$

إذن بحسب تعريف $e^{i\theta}$ تتعيّن θ من العلاقتين

نجد $\cos\theta=\frac{x}{|z|}$ و $\sin\theta=\frac{y}{|z|}$

أمثلة:

- العدد المركّب $z=\sqrt{2}+\sqrt{2}\,i$ يكتب على الشكل الأسي بعد معرفة طويلته و زاويته حيث

$$r=|z|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{2+2}=2$$

$\cos\theta=\frac{x}{|z|}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ و $\sin\theta=\frac{y}{|z|}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ومنه $\theta=\frac{\pi}{4}$ زاوية للعدد المركب z وشكله الأسي $z=2e^{i\frac{\pi}{4}}$

- لكتابة العدد المركب $z=-2\sqrt{3}+2i$ على الشكل الأسي نتعرف طويلته و زاويته

$$r=|z|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{12+4}=4$$

$\cos\theta=\frac{x}{|z|}=\frac{-\sqrt{3}}{2}$ ، $\sin\theta=\frac{y}{|z|}=\frac{1}{2}$ و منه $\theta=\frac{5\pi}{6}$ زاوية للعدد المركب z وشكله الأسي $z=4e^{i\frac{5\pi}{6}}$

- العدد المركّب $z=-5-5i$ بالشكل الأسي $z=5\sqrt{2}\,e^{i\frac{5\pi}{4}}$
- العدد المركّب $z=3\sin\alpha+(3\cos\alpha)i$ حيث α عدد حقيقي، يُكتَب بالشكل الأسي

$$z=3e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}$$

- ليكن العدد المركّب $z=-2\sin\theta+2i\cos\theta$، حيث θ عدد حقيقي، نلاحظ أنّ

$$z=2i\left(\cos\theta+i\sin\theta\right)=2e^{i\frac{\pi}{2}}\cdot e^{i\theta}=2e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}$$

- العدد المركّب 0 يكتب $0=0\times e^{i\theta}$ حيث θ أي عدد حقيقي، فليس له زاوية محددة

جداء وقسمة عددين مركبين بالشكل الأسي:

ليكن العددان المركبان غير المعدومين $z_1=r_1e^{i\theta}$ ، $z_2=r_2e^{i\varphi}$

لنحسب الجداء $z_1\cdot z_2$:

$$z_1\cdot z_2=r_1e^{i\theta}\cdot r_2e^{i\varphi}=r_1r_2\left(e^{i\theta}\cdot e^{i\varphi}\right)=r_1r_2e^{i(\theta+\varphi)}$$

وحاصل القسمة ينتج كما يأتي:

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1e^{i\theta}}{r_2e^{i\varphi}}$$

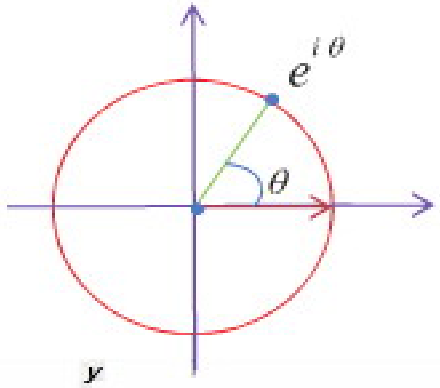
$$=\frac{r_1}{r_2}\,\frac{e^{i\theta}e^{-i\varphi}}{e^{i\varphi}e^{-i\varphi}}=\frac{r_1}{r_2}\cdot\frac{e^{i(\theta-\varphi)}}{1}=\frac{r_1}{r_2}\,e^{i(\theta-\varphi)}$$

نتيجة:

إذا كان العدد المركب غير الصفري $z=re^{i\theta}$, وكان $n\in\mathbb{Z}$, كان $z^n=r^ne^{in\theta}$

تمثيل هندسي:

نمثل العدد المركب $z=re^{i\theta}$ في المستوي المحدث بمعلم متجانس (O,i,j) بنقطة $P(z)$ على دائرة نصف قطرها يساوي r ومركزها مبدأ الإحداثيات O بحيث يصنع نصف القطر OP مع المتجه i زاوية قياسها θ .

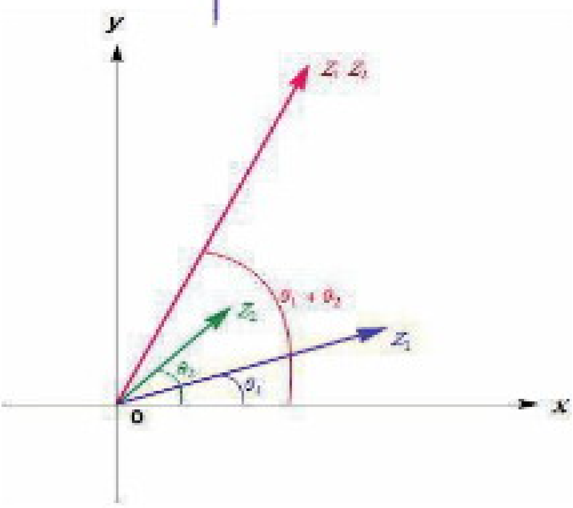


ليكن العددان المركبان غير المعدومين

$z_2=r_2e^{i\varphi}$, $z_1=r_1e^{i\theta}$

نمثل العدد $z=z_1\cdot z_2=r_1r_2e^{i(\theta+\varphi)}$

كما في الرسم.



مثال 1 ليكن العدد $z=\dfrac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{\sqrt{3}+i}$

اكتبه بالشكل الجبري ثم بالشكل الأسي ثُم استنتج النسب المثلثية للزاوية $\dfrac{\pi}{12}$

الحل: لكتابة العدد z بالشكل الجبري نضرب البسط والمقام بمرافق المقام

$$z=\frac{\left(\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}-i\right)}{\left(\sqrt{3}+i\right)\cdot\left(\sqrt{3}-i\right)}=\frac{\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)+i\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)}{3+1}$$

$$=\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)+i\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)\qquad\ldots\ldots(1)$$

لدينا

$$\sqrt{3}+i=2e^{i\frac{\pi}{6}} \quad ، \quad \sqrt{2}+i\sqrt{2}=2e^{i\frac{\pi}{4}}$$

ومنه (2)........

$$z=\frac{2e^{i\frac{\pi}{4}}}{2e^{i\frac{\pi}{6}}}=e^{i\frac{\pi}{12}}$$

بمقارنة (1) و (2) نجد $\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ ، $\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

مثال 2 ليكن العدد $z=\frac{1+i\sqrt{3}}{1+i}$ اوجد $(z)^{48}$

الحل: البسط $1+i\sqrt{3}=2e^{i\frac{\pi}{3}}$، والمقام $1+i=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ ومنه

$$z^{48}=\left(\frac{2e^{i\frac{\pi}{3}}}{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}\right)^{48}=\left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}\right)^{48}=2^{24}\cdot e^{i4\pi}=2^{24}$$

مثال 3

ليكن العدد المركب $z=1+e^{2i\theta}$ حيث θ عدد حقيقي يحقق $\theta\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$.

لكتابته بالشكل الأسي: نأخذ عاملاً مشتركاً خارج قوسين

$$1+e^{2i\theta}=e^{i\theta}\left(e^{-i\theta}+e^{i\theta}\right)$$

ونستعمل دستور أويلر فنجد

$$1+e^{2i\theta}=2\cos(\theta)e^{i\theta}$$

وهو الشكل الأسي للعدد z لأن $\cos\theta>0$ في حالة $\theta\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$.

تدريب

1) اكتب يأتي بالشكل الجبري:

- $(1+i)^{48}+(1-i)^{48}$
- $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{16}-\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{8}$
- $\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{24}+\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)^{36}$
- $\left(1+i\sqrt{3}\right)^{2013}$

2) اكتب كلاً من الأعداد المركبة الآتية بالصيغة الأسية :

$$5, -2, -i, 1+i, 3-2i, -\sqrt{5}-i\sqrt{15}, -\sqrt{6}+i\sqrt{2}, \frac{2}{1+i\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{6}}{1+i}$$

5.3.3 الجذور من المرتبة n لعدد مركب

نقصد بالجذور من المرتبة n لعدد المركب $z_0 = r_0 e^{i\theta_0}$ مجموعة الأعداد المركبة التي تحقق $z^n = z_0$.

فإذا كان العدد $z = re^{i\theta}$ أحد هذه الجذور كان $r^n e^{in\theta} = r_0 e^{i\theta_0}$ ومنه $r^n = r_0$ و وُجِدَ $k \in \mathbb{Z}$ بحيث $n\theta = \theta_0 + 2\pi k$ وبقول آخر: $r = \sqrt[n]{r_0}$ ويوجد $k \in \mathbb{Z}$ بحيث $\theta = \frac{\theta_0}{n} + \frac{2\pi k}{n}$.

فتصبح الصيغة العامة للجذر

$$z = \omega_k = \sqrt[n]{r_0}\, e^{i\left(\frac{\theta_0}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right)}$$

وهنا نجعل k يأخذ فقط القيم $0, 1, 2, \dots, n-1$ لأن القيم الأخرى له تكرر الجذور نفسها.

ملاحظة :

في حالة مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$، لا يقبل العدد -1 جذوراً تربيعيّة، ولقد جرى توسيع الأعداد الحقيقية إلى $\mathbb{C}$ عن طريق ضم العدد i الذي يمثّل جذراً تربيعياً للعدد -1. تبيّن لنا دراستنا السابقة أننا كنا موفقين جداً بإجراء هذا التوسيع، فقد أصبح لجميع المعادلات من الدرجة الثانية، مهما كانت إشارة مميزها، جذوراً في $\mathbb{C}$، وصار لكل عدد عقدي جذوراً من أية مرتبة نريد. بل يمكننا إثبات المبرهنة الأساسيّة في الجبر، التي تنص على أنّ كل كثير حدود غير ثابت أمثاله من $\mathbb{C}$ يقبل في $\mathbb{C}$ عدداً من الجذور يساوي درجته (قد يكون بعض هذه الجذور مضاعفاً).

مثال لإيجاد الجذور التكعيبية للعدد المركب $z = -4\sqrt{2} + 4\sqrt{2}\,i$ نكتبه بالشكل الأسي:

$r = \sqrt{\left(-4\sqrt{2}\right)^2 + \left(4\sqrt{2}\right)^2} = 8$ ، $\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{-\sqrt{2}}{2}$ ، $\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ومنه $\theta = \frac{3\pi}{4}$ ونكتب

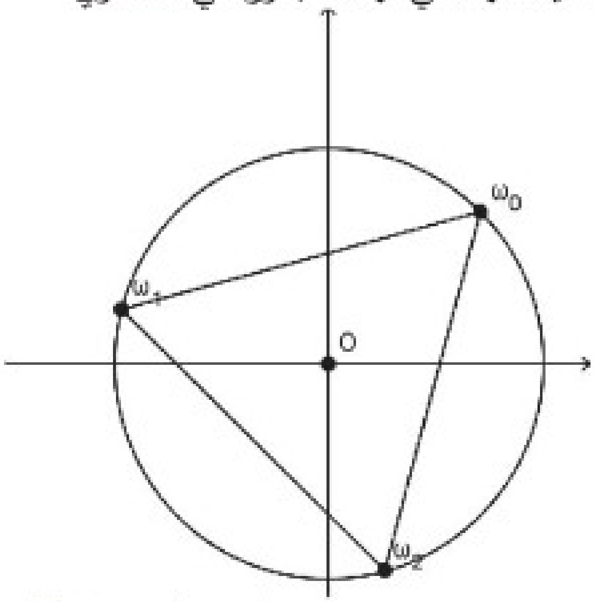
$z = 8e^{i\frac{3\pi}{4}}$ وتكون جذوره التكعيبية $\sqrt[3]{8}\, e^{i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi k}{3}\right)}$ حيث $k \in \{0, 1, 2\}$

عند $k = 0$ يكون $\omega_0 = 2e^{i\frac{\pi}{4}}$

عند $k = 1$ يكون $\omega_1 = 2e^{i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3}\right)} = 2e^{i\frac{11\pi}{12}}$

عند $k = 2$ يكون $\omega_2 = 2e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{4\pi}{3}\right)} = 2e^{i\frac{19\pi}{12}}$

والشكل الآتي يوضح التمثيل الهندسي لهذه الجذور في المستوي



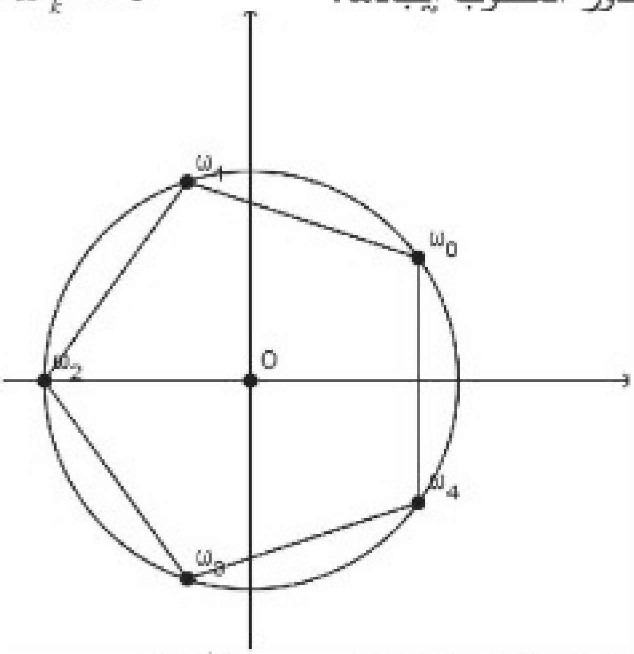
(لاحظ أن المضلع الذي رؤوسه النقاط التي تمثل الجذور الثلاثة هي رؤوس مضلع منتظم).

مثال حل المعادلة $z^5 + 1 = 0$ في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$

بكتابة المعادلة على الشكل $z^5 = -1$ تؤول المسألة إلى حساب الجذور من المرتبة الخامسة للعدد -1

نكتب العدد -1 على الشكل $e^{i\pi}$ فتكون الجذور المطلوب إيجادها: $\omega_k = e^{i\left(\frac{\pi}{5}+\frac{2\pi k}{5}\right)}$ حيث

$k \in \{0,1,2,3,4\}$



عند $k = 0$ يكون $\omega_0 = e^{i\frac{\pi}{5}}$

عند $k = 1$ يكون $\omega_1 = e^{i\frac{3\pi}{5}}$

عند $k = 2$ يكون $\omega_2 = e^{i\pi} = -1$

عند $k = 3$ يكون $\omega_3 = e^{i\frac{7\pi}{5}}$

عند $k = 4$ يكون $\omega_4 = e^{i\frac{9\pi}{5}}$

من الرسم: ما نوع الخماسي $ABCDE$، والنقاط A, B, C, D, E صور الأعداد $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5$ على الترتيب؟

مثال إذا كانت $\omega_0,\omega_1,\dots,\omega_{n-1}$ الجذور من المرتبة n والمختلفة للعدد 1، أثبت أنّ:

$$\omega_0+\omega_1+\omega_2+\dots+\omega_{n-1}=0$$

جذور الواحد هي مجموعة الأعداد $\omega_k=e^{\frac{2i\pi}{n}k}$ حيث $k\in\{0,1,2,\dots,n-1\}$ فإذا رمزنا بالرمز q إلى العدد $\omega_1=e^{\frac{2i\pi}{n}}$ لاحظنا استناداً إلى علاقة دوموافر أن $q^k=e^{\frac{2i\pi}{n}k}=\omega_k$، فالمجموع المطلوب هو مجموع حدود متتالية هندسيّة كما يأتي:

$$\omega_0+\omega_1+\cdots+\omega_{n-1}=1+q+q^2+\cdots+q^{n-1}=\frac{1-q^n}{1-q}$$

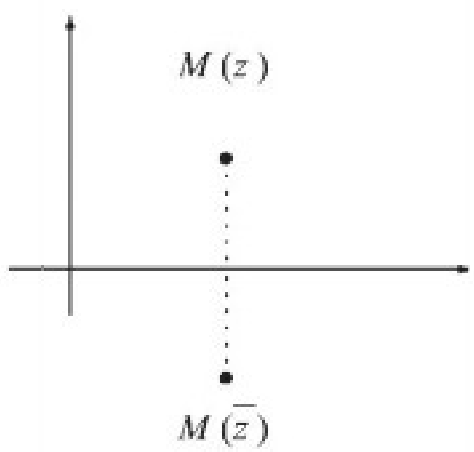
ولكن $q^n=1$ لأنّ q هو جذر من المرتبة n للعدد 1. وهذا يُثبتُ الخاصة المطلوبة.

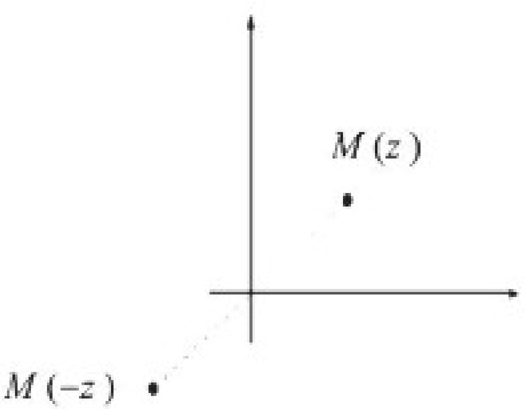
تدريب ليكن العدد المركب z: $z=-8+8\sqrt{3}i$

1) اكتب z بالشكل الأسي
2) أوجد الجذرين التربيعيين للعدد z ومثّل صورتيهما
3) أوجد الجذور من المرتبة الرابعة للعدد z ومثّل صورها

7.3.3 تطبيقات الأعداد المركبة في الهندسة المستوية

- للعددين z و $\bar{z}$ صورتان في المستوي العقدي $M(z)$ و $M(\bar{z})$ متناظرتان بالنسبة للمحور $x'x$
- للعددين z و $-z$ صورتان في المستوي العقدي $M(z)$ و $M(-z)$





_ لتكن النقطة A صورة العدد المركب z_A والنقطة B صورة العدد المركب z_B عندئذ النقطة M منتصف القطعة المستقيمة AB تمثّل العدد $\frac{z_A+z_B}{2}$

ـ لتكن النقاط C ، B ، A في المستوي العقدي والتي تمثل الأعداد z_A ، z_B ، z_C.

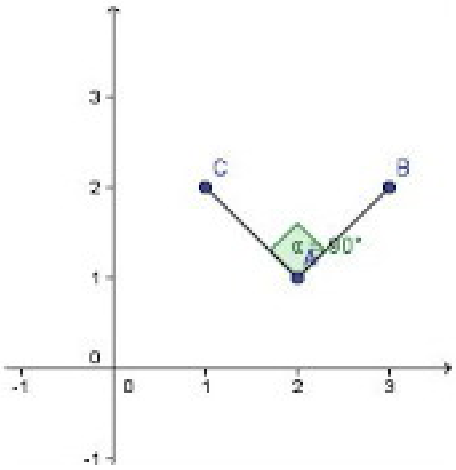
زاوية العدد $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$ هي الفرق بين زاوية العدد $z_B - z_A$ و زاوية العدد $z_C - z_A$ فهي تعبر عن الزاوية $B\hat{A}C$

> **نتيجة:** الشرط اللازم والكافي لتكون النقاط C ، B ، A على استقامة واحدة أن يكون العدد $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$ حقيقياً. والشرط اللازم والكافي ليتعامد AB مع AC، أنْ يكون العدد $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$ تخيُلياً بحتاً غير صفري

مثال لتكن الأعداد المركبة الآتية: $z_1 = 2 + i \ , z_2 = 3 + 2i \ , z_3 = 1 + 2i$

لتكن النقاط $A(z_1), B(z_2), C(z_3)$ في المستوي العقدي الممثلة للأعداد z_1, z_2, z_3

أثبت أن المثلث ABC قائم



الحل: الشرط اللأزم والكافي ليتعامد AB مع AC، أنْ يكون العدد $\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1}$ تخيلياً بحتاً غير صفري

$$\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} = \frac{3 + 2i - (2 + i)}{1 + 2i - (2 + i)} = \frac{1 + i}{-1 + i}$$

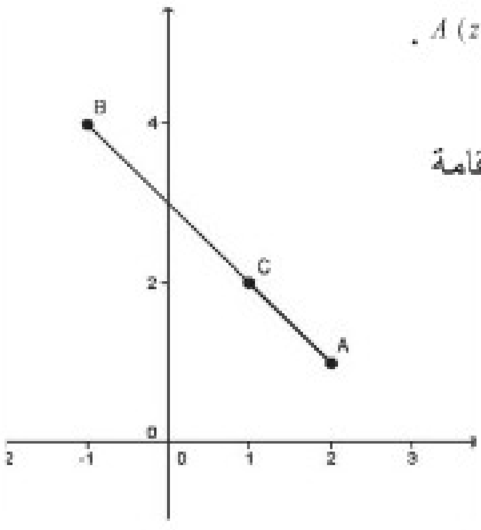
$$= \frac{(1 + i)\cdot(-1 - i)}{(-1 + i)\cdot(-1 - i)} = \frac{-1 - 2i + 1}{2} = -i$$

وبما أن الناتج عدد تخيُلي بحت فالمثلث ABC قائم في A

مثال لتكن الأعداد المركبة الآتية $z_1 = 2 + i \ , z_2 = -1 + 4i \ , z_3 = 1 + 2i$

لتكن النقاط الممثلة لها في المستوي العقدي $A(z_1), B(z_2), C(z_3)$.

أثبت أن النقاط C ، B ، A على استقامة واحدة



الحل: الشرط اللازم والكافي لتكون النقاط C ، B ، A على استقامة واحدة أن يكون العدد $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$ حقيقياً

$$\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} = \frac{-1 + 4i - (2 + i)}{1 + 2i - (2 + i)} = \frac{-3 + 3i}{-1 + i}$$

$$= \frac{(-3 + 3i)\cdot(-1 - i)}{(-1 + i)\cdot(-1 - i)} = \frac{6 - 3i + 3i}{2} = 3$$

وبما أن الناتج عدد حقيقي فالنقاط $A\ ,\ B\ ,\ C$ على استقامة واحدة

مثال لتكن الأعداد المركبة التالية $z_1 = 1-i\ ,\ z_2 = 1+i\ ,\ z_3 = 1+ie^{i\theta}$ مع $\theta \in]0,\pi[$ ، ولتكن النقاط $A(z_1), B(z_2), M(z_3)$ صورها في المستوي العقدي.

1) أثبت أن AB قطر للدائرة المارة برؤوس المثلث AMB.

2) إذا كانت M' هي صورة العدد iz_3، أثبت أن النقاط الثلاثة $B\ ,\ M\ ,\ M'$ على استقامة واحدة.

الحل:

1) لنثبت أن المثلث AMB قائم في M ، لدينا

$$\frac{z_M - z_B}{z_M - z_A} = \frac{ie^{i\theta} - i}{ie^{i\theta} + i} = \frac{e^{i\theta} - 1}{e^{i\theta} + 1} = \frac{e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}}\right)}{e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{i\frac{\theta}{2}} + e^{-i\frac{\theta}{2}}\right)}$$

$$= \frac{2i\sin\frac{\theta}{2}}{2\cos\frac{\theta}{2}} = i\tan\frac{\theta}{2}$$

وبما أن الناتج عدد تخيُّلي بحت فالمثلث AMB قائم في M ومنه يتمُّ المطلوب.

طريقة ثانية: لتكن O' منتصف AB عندئذ العدد ω الذي يمثّل O' هو $\omega = \frac{z_A + z_B}{2} = 1$ ،

ونلاحظ أنّ $|O'M| = |1 + ie^{i\theta} - 1| = |ie^{i\theta}| = |i|\cdot|e^{i\theta}| = 1$.

إذن M تقع على الدائرة التي قطرها AB، والمثلث AMB قائم في M .

2) $z_{M'} = iz_3 = i\left(1 + ie^{i\theta}\right) = -e^{i\theta} + i$

لدينا $\frac{z_3 - z_2}{z_{M'} - z_2} = \frac{ie^{i\theta} - i}{-e^{i\theta} - 1} = \frac{i(e^{i\theta} - 1)}{i^2(e^{i\theta} + 1)}$ نستفيد من الطلب السابق فيكون

$\frac{z_3 - z_2}{z_{M'} - z_2} = \frac{1}{i}\left(i\cdot\tan\frac{\theta}{2}\right) = \tan\frac{\theta}{2}$ وهو عدد حقيقي فالنقاط الثلاثة على استقامة واحدة.

تمرينات

1) اكتب بالشكل الجبري $x + iy$ كلاً من الأعداد العقدية الآتية:

$$\left(\frac{\sqrt{3}-i}{1+i\sqrt{3}}\right)^{9} \text{ و } \left(\frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i}+\frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i}-1\right)^{11} \text{ و } \frac{1+iy}{2y+i(y^{2}-1)}$$ حيث $y \in \mathbb{R}$.

2) أثبت أن العددين $(1+i)^{8}$ و $\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{2012}$ حقيقيان

3) اكتب العدد المركب $z = \frac{1+i\tan(t)}{1-i\tan(t)}$ حيث $t \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ بالشكل الأسي $[r,\theta]$.

4) اكتب بأبسط صيغة ممكنة: $\frac{(\cos 2\theta + i\sin 2\theta)^{5}}{(\cos 3\theta + i\sin 3\theta)^{3}}$

5) اكتب كلاً مما يأتي بأبسط صيغة ممكنة:

$a)\ \left(\cos\frac{3\pi}{8}+i\sin\frac{3\pi}{8}\right)^{4} \qquad b)\ \left(\cos\frac{7\pi}{12}+i\sin\frac{7\pi}{12}\right)^{-3}$

6) أوجد الجذور التكعيبية للعدد المركب $z = 8 - 8i$

7) أوجد الجذور التكعيبية لكل عدد مركب مما يأتي : -8 , $8i$, $z = 4\sqrt{2}(1+i)$

8) اكتب بالشكل الجبري كلاً مما يأتي : $(1-i)^{5}$, $\left(\sqrt{3}+i\right)^{9}$

9) مثّل هندسياً كلاً من الأعداد المركبة الآتية ومرافقاتها:

$z_1 = 2 + i \quad , \quad z_2 = -1 + 3i \quad , \quad z_3 = 2 + 2i$

10) أوجد الجذور التكعيبية للعدد 1 وبرهن أن أحد الجذرين التخيُليين مربع للآخر, وإذا كانت ω_1 , ω_2 , ω_3 هي الجذور التكعيبية، برهن أن $\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 0$.

11) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $z^{2} - 3z + 9 = 0$.

12) ليكن z عدد مركب طويلته الواحد برهن صحة كلٌ ممّا يأتي:

- $\frac{2}{1-z} = 1 + i\cot\frac{\theta}{2}$ بافتراض $z \neq 1$
- $\frac{z^{2}-1}{z^{2}+1} = i\tan\theta$ بافتراض $z \notin \{-i,+i\}$

13) أوجد عدداً $\omega \in \mathbb{C}$ يحقق المعادلة $\omega^{2} = 5 + 12i$. ثُمّ حل بطريقة الإتمام إلى مربع كامل المعادلة $z^{2} + 2(1+i)z - 5(1+2i) = 0$.

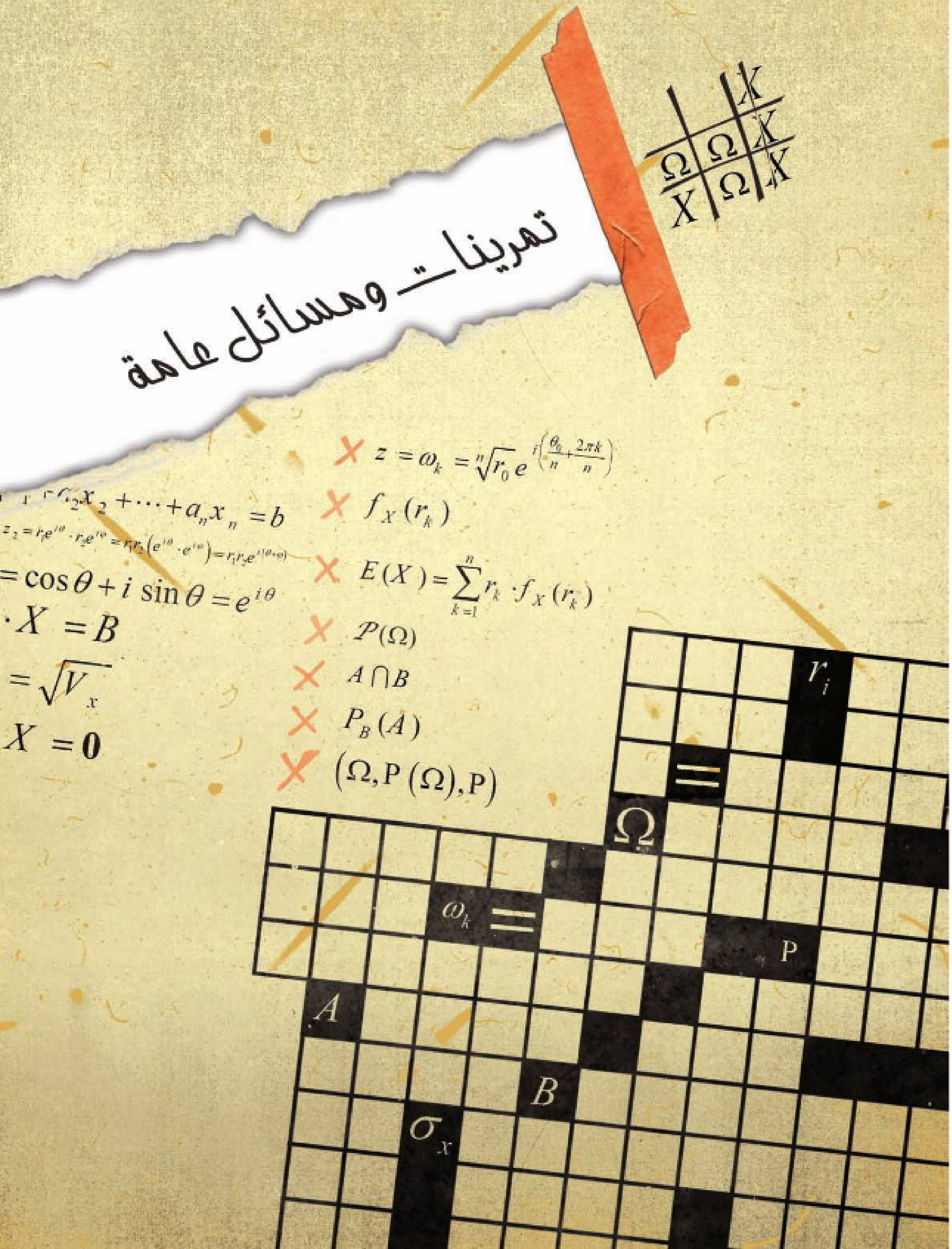
14) أوجد عدداً $\omega \in \mathbb{C}$ يحقق المعادلة $\omega^2 = 1 - i\sqrt{3}$. ثُمّ حل بطريقة الإتمام إلى مربع كامل المعادلة $z^2 + 2(1-2i)z - 4 + i(\sqrt{3} - 4) = 0$.

15) ليكن العددان المركبان $z_1 = 1 + i, z_2 = \sqrt{3} + i$.

1) اكتب كلاً من z_1, z_2 بالشكل الأسي

2) اكتب بالشكل الجبري وبالشكل الأسي $z = \frac{z_1}{z_2}$ ثم استنتج قيمة كلٍّ من $\sin\frac{\pi}{12}, \cos\frac{\pi}{12}$

تمرينات ومسائل عامة



الاحتمالات:

1 إذا كان A و B حدثين في الفضاء الاحتمالي الموافق لتجربة عشوائية، وكان :

$$P(A')=\frac{2}{5} \text{ و } P(B)=\frac{1}{5} \text{ و } P(A\cap B)=\frac{1}{10}$$

احسب كلاً من $P(A'\cap B')$ و $P(A\setminus B)$ و $P(A\cup B)$.

2 إذا كان A و B حدثين في الفضاء الاحتمالي الموافق لتجربة عشوائية، وكان :

$$P(A)=\frac{3}{8} \text{ و } P(B)=\frac{5}{8} \text{ و } P(A\cup B)=\frac{3}{4}$$

احسب كلاً من $P_B(A)$ و $P_A(B)$ و $P_{B'}(A')$ و $P_{A'}(B')$.

3 يحوي صندوق 8 بطاقات متماثلة ومرقمة كما يأتي :

$3, 3, 3, 3, 2, 2, 0, 0$ نسحب عشوائياً من الصندوق بطاقتين بالتتالي دون إعادة :

1) إذا علمنا أن مجموع رقمي البطاقتين المسحوبتين أكبر تماماً من 4 ، فما احتمال أن يكون مجموع رقميهما عدداً زوجياً ؟
2) إذا علمنا أن البطاقتين المسحوبتين تحملان الرقم ذاته فما احتمال أن يكون هذا الرقم هو 3 ؟
3) إذا علمنا أن البطاقتين المسحوبتين تحملان رقمين مختلفين، فما احتمال أن يكون مجموع رقميهما عدداً زوجياً ؟
4) نعرف متغيّراً عشوائياً X يدل على مجموع رقمي البطاقتين المسحوبتين ، اكتب مجموعة قيم المتغير العشوائي X واكتب جدول توزيعه ثم احسب توقعه الرياضي .

4 يشتري أحد المحلات 70% من قطع الغيار التي يحتاجها من المصنع A ويشتري 30% منها من المصنع B. نفترض أنّ نسبة الإنتاج المعيب في المصنع A هي 5%، وفي المصنع B هي 8%. نختار عشوائياً قطعة غيار من المحل.

a. أوجد احتمال أن تكون القطعة معيبة ؟

b. إذا كانت القطعة معيبة، فما احتمال أن تكون من إنتاج المصنع B ؟

5 مغلف يحتوي 8 بطاقات متماثلة مرقمة بالأعداد 2 , 2 , 2 , 1 , 1 , 0 , 0 ,0,0

نسحب من المغلف بطاقتين بالتتالي مع إعادة البطاقة المسحوبة .

1) إذا علمت أن مجموع رقمي البطاقتين يساوي 2 ما احتمال أن يكون رقم إحدى البطاقتين المسحوبتين يساوي 1؟

2) نعرف متغيراً عشوائياً X يدل على مجموع رقمي البطاقتين المسحوبتين ، اكتب مجموعة قيم المتغير العشوائي X واكتب جدول توزيعه ثم احسب توقعه الرياضي .

6 يملك معمل لصناعة أجهزة الهاتف الخليوي، ثلاث آلات A و B و C تنتج هذه الآلات على التوالي 60% و 30% و 10% من الانتاج الكلي للمعمل. نفترض أنّ نسبة أجهزة الهاتف الخليوي المعيبة التي تنتجها هذه الآلات هي على التوالي 2% و 3% و 2% . اختير جهاز بطريقة عشوائية ووجد أنه معيب فما احتمال أن يكون هذا الجهاز من انتاج الآلة A.

7 يحوي كيس 28 بطاقة متماثلة كتب عليها جميع الأحرف الهجائية (حرف واحد لكل بطاقة) يسحب شخص 4 بطاقات بالتتالي دون إعادة ليشكل منها كلمة على أن يكون الحرف الأول من الكلمة حرف البطاقة المسحوبة أولاً وهكذا ...

1) ما احتمال أن يحصل على كلمة تبدأ بالحرف (د).

2) ما احتمال أن يحصل على كلمة تقرأ دمشق.

3) ما احتمال أن يحصل على كلمة حروفها هي الحروف المكونة لكلمة دمشق.

8 ينتج معمل مصابيح كهربائية بواسطة ثلاث آلات A , B , C بحيث:

- الآلة A تنتج 20% من الإنتاج و 5% من المصابيح المصنوعة غير صالحة.
- الآلة B تنتج 30% من الإنتاج و 4% من المصابيح المصنوعة غير صالحة.
- الآلة C تنتج 50% من الإنتاج و 1% من المصابيح المصنوعة غير صالحة

نختار عشوائياً مصباحاً كهربائياً .

1) ما احتمال أن يكون المصباح غير صالح ومصنوع بـ A .

2) ما احتمال أن يكون المصباح غير صالح ومصنوع بـ B .

3) ما احتمال أن يكون المصباح غير صالح ومصنوع بـ C .

9 في احدى كليات العلوم. كانت نسبة طلاب اختصاص الرياضيات 40% ونسبة طلاب اختصاص الفيزياء 60% ونسبة الطلبة الذين يملكون سيارات خاصة بين طلاب الرياضيات 10% وبين طلاب الفيزياء 15%. اخترنا عشوائياً أحد الطلبة.

a. أوجد احتمال أن يكون للطالب سيارة خاصة ؟

b. إذا كان للطالب سيارة خاصة فما احتمال أن يكون اختصاصه الرياضيات ؟

10 يحوي مغلف سبع بطاقات متماثلة مرقمة بالأعداد $\{1,2,3,4,5,6,7\}$. نسحب من المغلف عشوائياً ثلاث بطاقات بالتتالي دون إعادة والمطلوب :

a. ما احتمال ظهور البطاقة ذات الرقم 2 بين البطاقات المسحوبة ؟

b. إذا علمت أن مجموع أرقام البطاقات الثلاث المسحوبة فردي ، ما احتمال أن تكون البطاقة ذات الرقم 2 بينها ؟

11 ثلاثة صناديق متشابهة يحتوي الأول على 10 كرات، 7 منها بيضاء والباقي من اللون الأسود ويحتوي الثاني على 5 كرات، 4 منها بيضاء والباقي من اللون الأسود، ويحتوي الثالث على 5 كرات اثنتان منها بيضاء والباقي من اللون الأسود، اختير صندوق من الصناديق الثلاثة بشكل عشوائي أوجد :

a. احتمال سحب كرة بيضاء.

b. إذا كانت الكرة المسحوبة بيضاء فما هو احتمال أن تكون من الصندوق الثالث؟

الإحصاء:

12 محل تجاري يعمل فيه سبعة عمال، الجدول الآتي يمثل مقدار المبيعات بالليرة السورية لكل عامل ومدة خبرته بالسنوات :

مقدار المبيعات x	50	30	70	60	20	80	90
مدة الخبرة y	4	2	5	3	1	5	12

1) احسب معامل الارتباط بين المبيعات ومدة الخبرة .

2) أوجد معادلة الانحدار .

3) عامل لديه خبرة 9 سنوات . فكم تُقدر قيمة مبيعاته ؟

13 الجدول الآتي يبين أوزان 8 رياضيين بالكيلوغرام، والزمن الذي يستغرقه كل منهم في قطع مسافة 2 كيلومتر مشياً بالدقائق.

الوزن	68	65	55	73	80	75	66	70
الزمن	30	32	35	26	32	23	30	24

1) احسب كلاً من المقادير $\bar{x},\sigma_x,\bar{y},\sigma_y,\sigma_{xy}$.

2) ارسم سحابة انتشار العينة.

3) احسب معامل الارتباط r_{xy}، وبيّن نوعه.

عيّن معادلة مستقيم انكفاء العيّنة وارسمه مع سحابة الانتشار على الشكل نفسه.

المصفوفات وجمل المعادلات الخطية:

14 أوجد المصفوفة المدرجة المكافئة لكل من المصفوفات الآتية:

$$A=\begin{pmatrix}1&1&-4&0&-4\\1&-1&-2&-2&-2\\1&-3&0&-4&0\\0&1&-1&1&-1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2&-4&3&1&4&5\\3&-5&1&0&8&2\\1&-2&3&1&1&5\\-1&2&3&1&-5&5\end{pmatrix},C=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\5&4&3&2&1\\1&1&1&1&1\\3&4&5&6&7\end{pmatrix}$$

15 حل جملة المعادلات الخطية الآتية:

$$\begin{aligned}5x-2y+z&=1\\ y+z&=0\\ x+6y-3z&=4\end{aligned}$$

16 أثبت أن لجملة المعادلات الآتية:

$$\begin{aligned}x+y+z&=5\\ 2x-2y+3z&=4\\ 3x-y+4z&=9\end{aligned}$$

عدداً غير منتهٍ من الحلول. ثم أوجد مجموعة الحل.

17 أثبت أن جملة المعادلات الآتية:

$$\begin{aligned}2x-3y+2z&=1\\ 4x-6y+4z&=3\\ x+y-z&=2\end{aligned}$$

مستحيلة الحل.

18 أثبت أن لجملة المعادلات الآتية

$$\begin{aligned}x+2y+z&=5\\ 2x-y+3z&=7\\ -2x+y-5z&=-11\end{aligned}$$

حلاً وحيداً أوجده.

الأعداد المركبة:

19 عيِّن مجموعة النقاط M الممثلة للعدد z في كل من الحالات الآتية :

$a)\ e^{i\frac{\pi}{3}}\cdot\bar{z}\in\mathbb{R}$ $\qquad$ $b)\ \dfrac{e^{i\frac{\pi}{3}}}{z}\in\mathbb{R}^{*}\ ;z\neq 0$

20 عيِّن مجموعة النقاط حتى تكون النقاط الممثلة بالأعداد $1\,,z^{2}\,,\dfrac{1}{z^{2}}$ على استقامة واحدة (حيث $z\neq 0$)

21 حلّ المعادلات الآتية:

$a)\ z^{2}-z+2=0$ $\qquad$ $b)\ z^{2}+z+1=0$

22 أثبت أنه إذا كان A عدد مركب طويلته تساوي 1 فإن جميع جذور المعادلة $\left(\dfrac{1+ix}{1-ix}\right)^{m}=A$ حقيقية.

23 تحقّق من صحة المتطابقة الآتية:

$$z^{4}+4=(z-1-i)(z-1+i)(z+1+i)(z+1-i)$$

24 اكتب $\cos^{6}\theta$ بشكل مجموع نسب مثلثية من مضاعفات الزاوية θ واعتماداً على ما وجدته أوجد $\int\cos^{6}\theta dx$.

25 ليكن العددان المركبان $z_{1}=1+i\ ,z_{2}=1+\sqrt{3}i$ والمطلوب:

1) أوجد $z_{1}.z_{2}$ بالشكل الجبري، ثم بالشكل الأسي.

2) استنتج كلاً من $\cos\dfrac{7\pi}{12}\ ,\ \sin\dfrac{7\pi}{12}$