# الرياضيات

## الصف العاشر - دليل المُعلِّم

### الفصل الدراسي الثاني

10


فريق التأليف

د. عـمـر محمـد أبوغليـون (رئيسًا)

يوسف سليمان جرادات
نـور محـــمد حســان
إبراهيـم عقله القـادري



الناشر: المركز الوطني لتطوير المناهج

يسر المركز الوطني لتطوير المناهج استقبال آرائكم وملحوظاتكم على هذا الدليل عن طريق العناوين الآتية:

06-5376262 / 237 06-5376266 P.O.Box: 2088 Amman 11941

@nccdjor feedback@nccd.gov.jo www.nccd.gov.jo

قـررت وزارة التربيـة والتعليـم اسـتخدام هـذا الدليـل في مـدارس المملكـة الأردنية الهاشـمية جميعها، بنـاء على قـرار المجلس الأعـلى للمركز الوطنـي لتطوير المناهـج في جلسـته رقـم (2022/5)، تاريـخ 2022/7/21 م، وقـرار مجلس التربية والتعليم رقـم (2022/78)، تاريـخ 2022/12/28 م، بدءًا مـن العام الدراسي 2023/2022 م.


- Prepared Originally in English for the National Center for Curriculum Development. Amman - Jordan
- Translated to Arabic, adapted, customised and published by the National Center for Curriculum Development. Amman - Jordan

**ISBN: 978 - 9923 - 41 - 121 - 6**

المملكة الأردنية الهاشمية
رقم الإيداع لدى دائرة المكتبة الوطنية
(2020/10/4565)

372.7

الأردن. المركز الوطني لتطوير المناهج

دليل المعلم: الرياضيات: الصف العاشر/ المركز الوطني لتطوير المناهج.- عمان: المركز، 2020

ج2 (224) ص.

ر.إ.: 2020/10/4565

**الواصفات: / تدريس الرياضيات / / المقررات الدراسية/ / التعليم الاعدادي/**

يتحمل المؤلف كامل المسؤولية القانونية عن محتوى مصنفه ولا يعبّر هذا المصنف عن رأي دائرة المكتبة الوطنية.


British Library Cataloguing -in- Publication Data
A catalogue record for this publication is available from the Library.

**الطبعة الأولى (التجريبية)**

1443 هـ / 2022 م

# المقدمة

يسرُّ المركز الوطني لتطوير المناهج أنْ يُقدِّم للمُعلِّمين والمُعلِّمات هذه الطبعة من دليل المُعلِّم للصف العاشر، آملًا أنْ تكون لهم مُرشِدًا وداعمًا في تدريس الطلبة وتقويمهم، بما يُحقِّق الأهداف المنشودة من تدريس كتب الرياضيات المُطوَّرة.

يحتوي دليل المُعلِّم على جميع المصادر التي تَلزم المُعلِّم/ المُعلِّمة، بَدْءًا بالنسخ المُصغَّرة من كتابي الطالب والتمارين، وانتهاءً بإجابات ما ورد فيهما من تدريبات ومسائل؛ ما يُغْني عن حمل هذين الكتابين إلى الغرفة الصفية. استُهِلَّ الدليل بالصفحات التي تحمل عنوان (أهلًا بك في مناهج الرياضيات المُطوَّرة)، وتعرض العناصر الرئيسة في كلٍّ من كتابي الطالب والتمارين ودليل المُعلِّم، وتُبيِّن النهج المُعتمَد في كلٍّ منها بطريقة مُبسَّطة؛ لذا يجدر بالمُعلِّم/ المُعلِّمة قراءة هذه الصفحات بِتَرَوٍّ وتدبُّرٍ قبل البَدْء باستعمال الدليل.

روعي في إعداد الدليل تقديم خطة واضحة لسير الدرس، بَدْءًا بمرحلة التمهيد، ومرورًا بمراحل الاستكشاف، والتدريس، والتدريب، والإثراء، وانتهاءً بمرحلة الختام، إلى جانب إرشادات تساعد المُعلِّم/ المُعلِّمة على التخطيط الزمني للمهام في كل مرحلة، وتوظيف مختلف أدوات التدريس والتقويم التي يتضمَّنها المنهاج المُطوَّر.

يُقدِّم الدليل أيضًا مقترحات لتنويع التعليم، تساعد المُعلِّم/ المُعلِّمة على التعامل مع الطلبة كافةً، على اختلاف مستوياتهم الدراسية وأنماط تعلُّمهم؛ انسجامًا مع الاتجاهات العالمية الحديثة في تعلُّم الرياضيات وتعليمها. ولأنَّ الموضوعات الرياضية بعضها مبني على بعض؛ فقد قدَّم الدليل نتاجات التعلُّم السابق ونتاجات التعلُّم اللاحق في بداية كل وحدة، فضلًا عن أدوات تشخيص ومعالجة مناسبة، تساعد المُعلِّم/ المُعلِّمة على معالجة الضعف لدى الطلبة، وتهيئتهم للتعلُّم الحالي. يضاف إلى ذلك أنَّ تعرُّف المُعلِّم/ المُعلِّمة جميع الموضوعات الرياضية التي سوف يدرسها الطلبة في صفوف لاحقة (التعلُّم اللاحق) يُوفِّر لهما تصوُّرًا كافيًا عنها، ويجعل تخطيط الدروس أكثر دِقَّةً.

ونحن إذ نُقدِّم الطبعة الأولى (التجريبية) من هذا الدليل، فإنّا نُؤمِّل أنْ ينال إعجاب زملائنا من المُعلِّمين والمُعلِّمات، ويجعل تعليم الرياضيات أكثر متعةً وسهولةً، ونَعِدُ بأنْ نستمرَّ في تحسين الدليل في ضوء ما يصلنا من ملاحظات.

**المركز الوطني لتطوير المناهج**

# قائمةُ المحتوياتِ

# قائمةُ المحتوياتِ

# أهلًا بك

## في مناهج الرياضيات المُطوَّرة


عزيـزي المُعلِّـم/ المُعلِّمـة، يسـرُّنا فـي هـذه المُقدِّمـة أنْ نُبيِّـن لكما الأسـس العلميـة والتربوية التـي قامـت عليهـا مناهـج الرياضيات المُطـوَّرة بطريقة مُبسَّـطة، وذلـك بعرض بعـض العناصر مـن كتـاب الطالـب، وكتاب التماريـن، ودليل المُعلِّـم، التي تتجلّـى فيها تلك الجوانـب العلمية والتربويـة بوضـوح. ونحـن إذ نعـرض هـذه المُقدِّمـة فإنّـا نأمـل أنْ تكـون مُعينًا لكمـا على فهم كيفيـة اسـتعمال المناهج المُطـوَّرة، وتوظيفهـا بصورة صحيحة داخـل غرفة الصـف، بما يُحقِّق الفائـدة المنشـودة منها.

**تتناول المُقدِّمة الجوانب الآتية:**

1. خطة الخطوات الست لتدريس الرياضيات.
2. أنواع التقويم وأدواته.
3. تعزيز لغة الرياضيات وإثراؤها.
4. بعض استراتيجيات التعلُّم:
   - التعلُّم القائم على المشاريع.
   - التعلُّم باستعمال التكنولوجيا.
5. مهارات التفكير العليا.
6. الوصول إلى الطلبة كافةً.

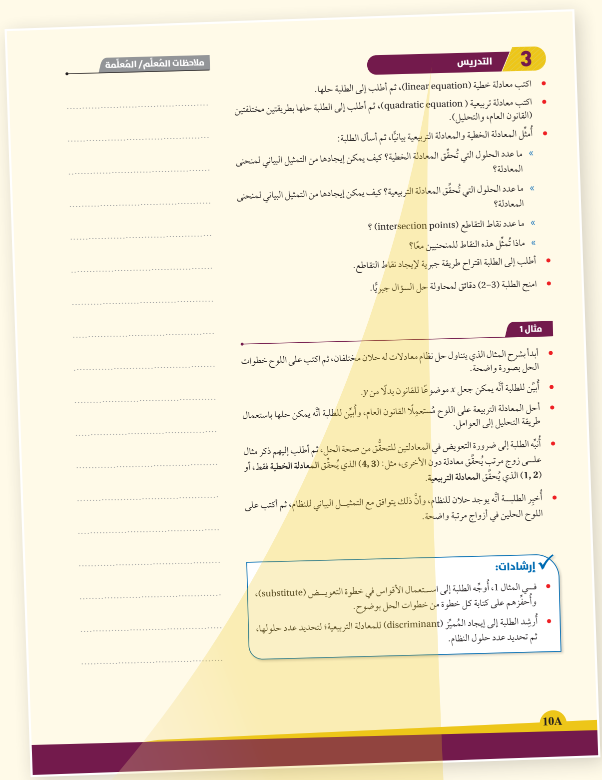
سنُقدِّم لكما أيضًا -في نهاية هذه المُقدِّمة- بعض استراتيجيات التدريس الشائعة؛ لتكون مرجعًا، ومُعينًا لكما عند التخطيط لتقديم الدروس.

## 1 خطة الخطوات الست لتدريس الرياضيات:

يُقدِّم دليل المُعلِّم خطة واضحة لسير الدرس، تحوي ست خطوات (مراحل)، هي: التهيئة، والاستكشاف، والتدريس، والتدريب، والإثراء، والختام. وتتضمَّن كل خطوة من هذه الخطوات مقترحات وإرشادات تساعد المُعلِّم/ المُعلِّمة، على تقديم الدرس بنجاح.


### 1 التهيئة

تهدف هذه المرحلة إلى تهيئة الطلبة لموضوع الدرس، ولكن دون ذكر لأيٍّ من أفكاره، وتوجد مقترحات في دليل المُعلِّم تُعينك على تقديم التهيئة بنجاح في بند (التهيئة). قد يحوي هذا البند نشاطًا مبنيًّا على معرفة الطلبة السابقة؛ لذا قد يرصد المُعلِّم/ المُعلِّمة في أثناء هذه المرحلة بعض الأخطاء المفاهيمية ويُصحِّحها قبل بدء الدرس.




### 2 الاستكشاف

تهدف هذه المرحلة إلى إثارة فضول الطلبة لموضوع الدرس، ولكن دون تقديم معلومات جاهزة لهم؛ إذ يتعيَّن عليك عزيزي المُعلِّم/ عزيزتي المُعلِّمة في هذه المرحلة أداء دور المُيسِّر، وذلك بتوجيه الطلبة إلى قراءة المسألة الواردة في بند (مسألة اليوم) من كتاب الطالب، ومنحهم وقتًا كافيًا لدراستها والتفكير فيها، ثم الطلب إليهم الإجابة عن الأسئلة المقترحة في بند (مسألة اليوم) من دليل المُعلِّم. ليس شرطًا أنْ يتمكَّن الطلبة من الإجابة عن هذه الأسئلة بصورة صحيحة؛ لذا سأقبل إجاباتهم، ثم أنظر فيها لاحقًا بعد انتهاء الدرس، وأتأكَّد أنَّهم سيجيبون إجابة صحيحة عنها، علمًا بأنَّ تمارين بعض الدروس تُحيل الطلبة إلى المسألة في بند (أستكشف)؛ لحلها في نهاية الدرس.

### 3 التدريس

من المُتوقَّع أنْ تؤدي مرحلة (الاستكشاف) إلى حدوث حالة من عدم التوازن في المفاهيم لدى الطلبة، فتبدأ مرحلة (التعلُّم) في إعادة التوازن لديهم، بحيث يتمكَّنون من تكوين خبرات مشتركة مُحدَّدة تساعدهم على إدراك المفاهيم، وإتقان العمليات والمهارات. تستغرق هذه المرحلة كثيرًا من وقت الدرس؛ فهي تشمل تقديم فقرات الشرح، وأمثلة الدرس جميعها؛ لذا يتعيَّن عليَّ الاستعانة بالإرشادات الواردة في فقرة (التدريس) من دليل المُعلِّم، لأتمكَّن من تنفيذ هذه المرحلة المهمة بنجاح.

## 4 التدريب

فـي هذه المرحلــة يتدرَّب الطلبــة على أنواع مختلفة من المسائل المجرَّدة والحياتية في بند (أتدرَّب و أحُلّ المسائل) وبند (مهارات التفكير العليا) داخل غرفة الصف؛ لترسـيخ المفاهيم الجديدة، وزيــادة الطلاقة الإجرائية لديهم. قد يُكمِل الطلبة هذه المرحلة في المنزل. وكذلك التدريبــات والمســائل الواردة فــي الصفحة المقابلة للدرس في كتاب التمارين.

## 5 الإثراء

تُعَدُّ توسـعة المفاهيم والعمليات والمهارات الهدف الأسـاس لهذه المرحلة، ويتمثَّل ذلك في إشـراك الطلبــة في مهام تتضمَّــن مفاهيم وعمليات أوسـع وأكثـر عمقًـا. تُوفِّر مناهج الرياضيــات المُطــوَّرة للمُعلِّــم/ المُعلِّمــة مصادر عِدَّة لإثراء الطلبة ذوي المسـتوى فوق المُتوسِّـط، منها بند الإثراء أو التوسُّع في دليل المُعلِّم، الذي يحوي مسـألةً، أو نشاطًا صفيًّا، أو نشاطًا حاسوبيًّا، إضافةً إلى مشروع الوحدة الذي يثري معرفة الطلبة بموضوعات الوحدة.

## 6 الختام

هـي المرحلـة الأخيـرة مـن مراحـل تقديـم الـدرس، التـي تهـدف إلى تجميـع الأفـكار المختلفـة التـي تضمَّنهـا الـدرس، ثم عرضهـا بصورة مترابطـة، فضـلًا عـن اشـتمالها علـى مقترحـات تسـاعد المُعلِّـم/ المُعلِّمـة علـى تقديـم هـذه المرحلـة بنجـاح.

## 2 أنواع التقويم وأدواته:

التقويم جزء لا يتجزَّأ من عملية التعلُّم؛ فهو يُواكِب جميع خطواتها، ويضمن استمرارها وصولًا إلى تحقيق الهدف. يُعرَّف التقويم بأنَّه عملية تُستعمَل فيها معلومات من مصادر مُتعدِّدة للوصول إلى حكم عن تحصيل الطلبة الدراسي. وقد أبرزت مناهج الرياضيات المُطوَّرة ثلاثة أنواع مختلفة من التقويم، هي: **التقويم التشخيصي، والتقويم التكويني، والتقويم الختامي**.

الوحدةُ 5: الاقترانات — أستعدُّ لدراسةِ الوحدةِ

أختبرُ معلوماتي قبلَ البدءِ بدراسةِ الوحدةِ، وفي حالِ عدمِ تأكُّدي منَ الإجابةِ أستعينُ بالمراجعةِ.

**إيجادُ صورةِ عددٍ في الاقترانِ.**

إذا كانَ $f(x) = 3x-2$، وَ $g(x) = x^2 - 2x - 3$، فأَجِدُ كلًّا ممّا يأتي:

1) $g(0)$ 2) $f(2)$ 3) $f(-3)$ 4) $g(-4)$

مثالٌ: إذا كانَ $g(x) = 2x^2 + 5x + 4$، فأَجِدُ $g(-2)$

| | |
|---|---|
| قاعدةُ الاقترانِ | $g(x) = 2x^2 + 5x + 4$ |
| بتعويضِ $x = -2$ | $g(-2) = 2(-2)^2 + 5(-2) + 4$ |
| بالتبسيطِ | $= 8 - 10 + 4 = 2$ |

**تبسيطُ المقاديرِ الجبريةِ.**

أكتبُ كلًّا ممّا يأتي في أبسطِ صورةٍ:

1) $-3(2x - 2y - 4)$ 2) $(4a + b) + 2(a - 3b)$ 3) $5x^2(2x - 5)$ 4) $(x - 3)^2 + 11x$

مثالٌ: أكتبُ $-2a(3a - 2b - 5) + 5a^2$ في أبسطِ صورةٍ.

| | |
|---|---|
| المقدارُ الأصليُّ | $-2a(3a - 2b - 5) + 5a^2$ |
| خاصيةُ التوزيعِ | $= -2a(3a) - 2a(-2b) - 2a(-5) + 5a^2$ |
| بالتبسيطِ | $= -6a^2 + 4ab + 10a + 5a^2$ |
| بجمعِ الحدودِ المتشابهةِ | $= -a^2 + 4ab + 10a$ |

**التعبيرُ عنْ مُتغيِّرٍ بدلالةِ الآخرِ.**

أَجِدُ قيمةَ $x$ بدلالةِ $y$ في كلٍّ ممّا يأتي:

1) $y = 4x - 7$ 2) $y = 3 - 5x$ 3) $y = x^2 - 5$ 4) $y = \frac{1}{2x - 1}$

6

### أ التقويم التشخيصي:

يهدف هذا النوع من التقويم إلى تحديد مدى امتلاك الطلبة المعرفةَ السابقة اللازمة لدراسة الموضوع الجديد؛ ما يساعد المُعلِّم/ المُعلِّمة على تحديد ما يَلزم الطلبة من معالجات تتمثَّل في مصادر التعلُّم الإضافية. تحتوي مناهج الرياضيات المُطوَّرة على أداة تقويم تشخيصي في بداية كل وحدة، وهي موجودة في كتاب التمارين بعنوان (أستعد لدراسة الوحدة).

### ب التقويم التكويني:

يحدث هذا النوع من التقويم في أثناء عملية التدريس، ويهدف إلى متابعة تعلُّم الطلبة أوَّلًا بأوَّل، والتأكُّد أنَّ العملية التعليمية التعلُّمية تسير في اتجاه تحقيق أهدافها المنشودة، وأنَّه لا يوجد انحراف عن مسارها؛ ما يساعد المُعلِّم/ المُعلِّمة على اتخاذ القرارات الصحيحة، مثل: الاستمرار في عملية التدريس، أو التعديل عليها، أو النظر فيها من جديد. من أدوات التقويم التكويني: الأسئلة الشفوية، والملاحظات غير الرسمية، والاختبارات القصيرة.

الوحدةُ 1

الخُطْوَةُ 3 أحلُّ المعادلةَ الناتجةَ باستعمالِ التحليلِ:

| | |
|---|---|
| بالتحليلِ | $(x+1)(x-2) = 0$ |
| خاصيةُ الضربِ الصفريِّ | $x + 1 = 0$ or $x - 2 = 0$ |
| بحلِّ المعادلتَينِ | $x = -1$ or $x = 2$ |

الخُطْوَةُ 4 أُعوِّضُ قيمةَ $x$ لإيجادِ قيمةِ $y$:

الحالةُ الأولى: عندما $x = -1$:

| | |
|---|---|
| | $y = x - 1$ |
| بتعويضِ $x = -1$ في المعادلةِ الخطِّيةِ | $y = -1 - 1 = -2$ |

الحَلُّ الأوَّلُ: $(x, y) = (-1, -2)$.

لِلتحقُّقِ منْ صِحَّةِ الحَلِّ الأوَّلِ، أُعوِّضُ الزوجَ المُرتَّبَ $(-1, -2)$ في كلٍّ منَ المعادلةِ الخطِّيةِ والتربيعيةِ:

| | |
|---|---|
| بالتعويضِ في المعادلةِ الخطِّيةِ | $x - y = -1 - (-2) = 1$ ✓ |
| بالتعويضِ في المعادلةِ التربيعيةِ | $x^2 + y^2 = (-1)^2 + (-2)^2 = 1 + 4 = 5$ ✓ |

الحالةُ الثانيةُ: عندما $x = 2$:

| | |
|---|---|
| بتعويضِ $x = 2$ في المعادلةِ الخطِّيةِ | $y = 2 - 1 = 1$ |

الحَلُّ الثاني: $(x, y) = (2, 1)$.

لِلتحقُّقِ منْ صِحَّةِ الحَلِّ الثاني، أُعوِّضُ الزوجَ المُرتَّبَ $(2, 1)$ في كلٍّ منَ المعادلةِ الخطِّيةِ والتربيعيةِ:

| | |
|---|---|
| بالتعويضِ في المعادلةِ الخطِّيةِ | $x - y = 2 - 1 = 1$ ✓ |
| بالتعويضِ في المعادلةِ التربيعيةِ | $x^2 + y^2 = (2)^2 + (1)^2 = 4 + 1 = 5$ ✓ |

أتذكَّرُ: توجدُ طرائقُ عِدَّةٌ لِحَلِّ معادلةٍ تربيعيةٍ، منْها: التحليلُ إلى العواملِ، والقانونُ العامُّ.

إرشادٌ: يجبُ تعويضُ الحَلِّ في كلتا معادلتَي النظامِ؛ لكيلا يكونَ الحَلُّ غيرَ صحيحٍ، بحيثُ يُحقِّقُ إحدى المعادلتَيْنِ منْ دونِ الأُخرى.

أتحقق من فهمي

أَحُلُّ نظامَ المعادلاتِ الآتيَ، ثمَّ أَتحقَّقُ منْ صِحَّةِ الحَلِّ: (2, 8), (-9, 30)

$2x + y = 12$

$y = x^2 + 5x - 6$

يوجدُ حَلّانِ لنظامِ المعادلاتِ في المثالِ السابقِ. ولكنْ، هلْ يوجدُ نظامُ معادلاتٍ لهُ حَلٌّ واحدٌ؟ لمعرفةِ الإجابةِ، أدرسُ المثالَ الآتيَ.

11

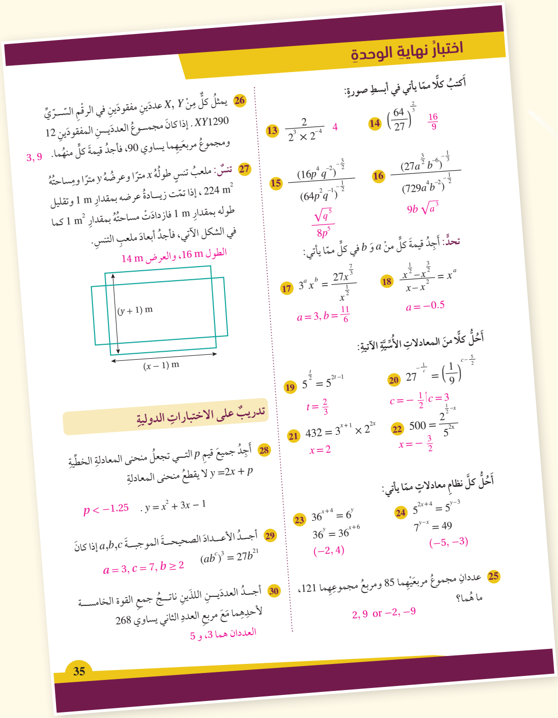
تحتوي مناهج الرياضيات المُطوَّرة على أدوات للتقويم التكويني في كل درس، تتمثَّل في مسائل بند (أتحقَّق من فهمي) التي تلي كل مثال.

**أتحقق من فهمي**

**أَحُلُّ نظامَ المعادلاتِ الآتيَ، ثمَّ أَتحقَّقُ منْ صِحَّةِ الحَلِّ:** (2, 8), (-9, 30)

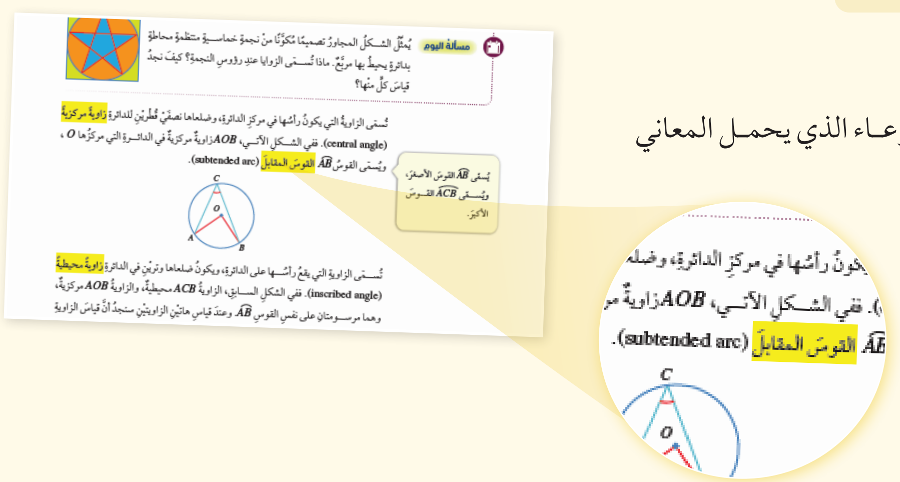
$$2x + y = 12$$

$$y = x^2 + 5x - 6$$




## ج التقويم الختامي:

يأتي هذا التقويم في نهاية عملية التدريس، أو في نهاية الوحدة الدراسية. وهو يساعد المُعلِّم/ المُعلِّمة على تحديد الطلبة الذين أتقنوا حدًّا مُعيَّنًا من المهام المنوطة بهم في أثناء تدريس وحدة دراسية، أو فصل دراسي. تُوفِّر المناهج المُطوَّرة للمُعلِّم/ المُعلِّمة أداة للتقويم الختامي في كل وحدة، تتمثَّل في بند (اختبار الوحدة) الذي يحوي مسائل مُتنوِّعة تشمل نتاجات الوحدة كلها.




## 3 تعزيز لغة الرياضيات وإثراؤها:

تُعَدُّ المصطلحات إحدى ركائز تعلُّم الرياضيات؛ فهي الوعاء الذي يحمل المعاني الرياضية، وينقلها بين المسائل والسياقات المختلفة.

ولهذا أبرزت مناهج الرياضيات المُطوَّرة المصطلحات الرياضية التي يتعرَّفها الطلبة أوَّل مرَّة، وميَّزتها بلون مختلف داخل نصوص الشرح، وأوردت مرادفاتها من اللغة الإنجليزية بُغْيَةَ إثراء معرفة الطلبة.

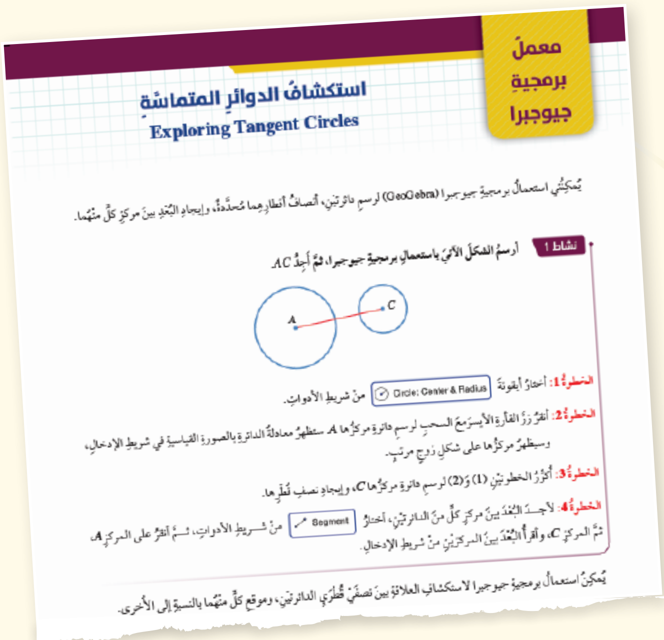

## 4 بعض استراتيجيات التعلُّم:

### أ التعلُّم القائم على المشاريع.

يُعَدُّ التعلُّم القائم على المشاريع أحد أساليب التعلُّم الحديثة التي تدمج بين المعرفة والفعل؛ إذ يدرس الطلبة معارف المناهج الدراسية الأساسية، ثم يُطبِّقونها في حلِّ مشكلات حقيقية وصولًا إلى نتائج قابلة للتطبيق. تساعد هذه الطريقة الطلبة على تنمية قدراتهم ومهاراتهم؛ فهي تراعي الفروق الفردية بينهم، وتُنمّي لديهم الثقة بالنفس، وتُحفِّزهم على الإبداع، والتواصل، والابتكار، وتحمُّل المسؤولية، وتُعِدُّهم للحياة، وتحثُّهم على العمل والإنتاج.

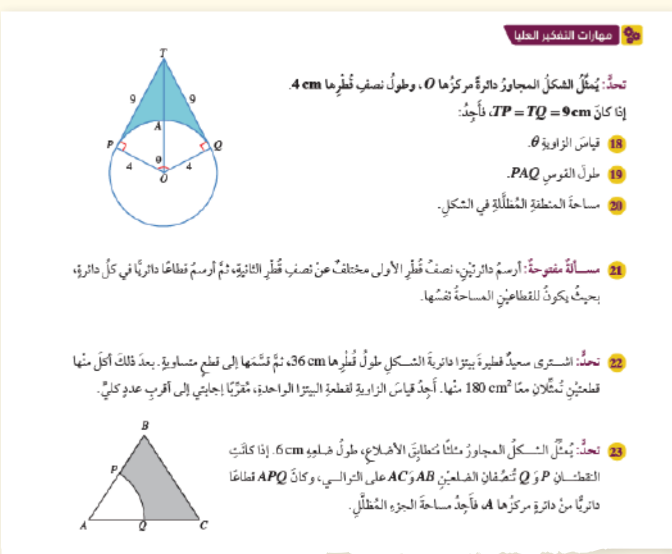
## ب التعلُّم باستعمال التكنولوجيا.

تُسهِم التكنولوجيا إسهامًا فاعلًا في تعلُّم الرياضيات؛ فهي تُوفِّر تمثيلات بصرية للمفاهيم الرياضية بصورة تفاعلية تزيد من رغبة الطلبة في التعلُّم، وتساعد على استكشاف المفاهيم الجديدة. إنَّ توافر الأدوات التكنولوجية يساعد الطلبة على التأمُّل والتحليل والتفكير بدلًا من إضاعة أوقاتهم في إجراء الحسابات الرتيبة.




تمنح أدلة المُعلِّم في مناهج الرياضيات المُطوَّرة فرصة توظيف عدد من البرمجيات التعليمية في تدريس الطلبة؛ سواء أكان ذلك في المدرسة، أم في المنزل.

## 5 مهارات التفكير العليا:




تهدف **مهارات التفكير العليا** إلى تحدّي قدرات الطلبة في مجال التفسير، والتحليل، ومعالجة المعلومات؛ لذا، فهي تُنمّي قدراتهم على التأمُّل، والتفكير، والاستقصاء، واكتشاف العلاقات.

تمنح مناهج الرياضيات المُطوَّرة الطلبة فرصة لتطوير مهارات التفكير العليا في كل درس، بطرحها مسائل مرتبطة بنتاجات الدرس؛ إذ يحوي بند (مهارات التفكير العليا) عددًا من المسائل ضمن العناوين الآتية:

**تبرير:** يتطلَّب حلُّ هذه المسائل تبرير خطوات الحلِّ جميعها.

**تحدٍّ:** تتضمَّن هذه المسائل أفكارًا غير مألوفة تُمثِّل تحدِّيًا للطلبة.

**مسألة مفتوحة:** يوجد لهذه المسألة عدد من الحلول الصحيحة، وليس حلًّا واحدًا فقط.

**أكتشف الخطأ:** يتعيَّن على الطلبة في هذا النوع من المسائل تحديد الخطأ في إجابة معطاة؛ ما يُحتِّم عليهم إدراك مفاهيم الدرس بصورة عميقة.

**أيُّها مختلف:** يتعيَّن على الطلبة في هذا النوع من المسائل تحليل عدد من الخيارات المعطاة، ثم تحديد خيار واحد فقط مختلف عن البقية.

**ما السؤال:** يُعطى الطلبة في هذا النوع من المسائل إجابة لمسألة ما، ثم يُطلَب إليهم كتابة هذه المسألة.

# 6 الوصول إلى الطلبة كافةً:

تراعي مناهج الرياضيات المُطوَّرة تكافُؤ الفرص بين الطلبة، وخصوصية كل طالب/ طالبة (التمايز)، وتسـاعد كُلًّا منهم على تجاوز عثراته، وتعزيز مناحي تفوُّقه.

يُمكِـن للمُعلِّم/ للمُعلِّمة تحقيق التمايز عن طريق أربعة عناصر رئيسة، هي:

**المحتوى:** يُقصَد بذلك ما يحتاج الطالب/ الطالبة إلى تعلُّمه، وكيفية الحصول على المعلومة. من الأمثلة على تحقيق التمايز في المحتوى: تقديم الأفكار باستعمال الوسائل السمعية والبصرية والمحسوسة.

**الأنشطة:** كل ما يشارك فيه الطالب/ الطالبة من أنشطة؛ للتمكُّن من فهم المحتوى، أو إتقان المهارة. من الأمثلة على تحقيق التمايز في هذا العنصر: استعمال الأنشطة المُتدرِّجة التي يشارك فيها جميع الطلبة، ويكون تقدُّمهم فيها مُتبايِنًا من حيث المستوى، ومنح الطلبة ذوي المستوى دون المتوسط وقتًا إضافيًّا لإنجاز المهام.

**المُنتَجات:** مشاريع يتعيَّن على الطلبة تنفيذها؛ للتدرُّب على ما تعلَّموه في الوحدة، وتوظيفه في حياتهم، والتوسُّع فيه. من الأمثلة على تحقيق التمايز في المُنتَجات: السماح للطلبة بالعمل وحدهم، أو في مجموعات صغيرة لابتكار مُنتَجاتهم الخاصة وَفق ميولهم.

**بيئة التعلُّم:** يُقصَد بها عناصر البيئة الصفية جميعها. من الأمثلة على تحقيق التمايز في بيئة التعلُّم: التحقُّق من وجود أماكن في غرفة الصف، يُمكِن للطلبة العمل فيها بهدوء، ومن دون إلهاء. وكذلك وجود أماكن أُخرى تُسهِّل العمل التعاوني بين الطلبة.

**تنويع التعليم:**

- أطلب إلى الطلبة ذوي المسـتوى دون المتوسـط حل معادلة خطية فقط أو معادلة تربيعيـة بيانيًّا باسـتعمال برمجية جيوجبـرا، في خطوة أولى، وأتـدرَّج معهم في خطوات التطبيق حتى يتمكنوا من حل النظام المُبيَّن في النشاط.
- أُوجِّه الطلبة إلى البحث في شـبكة الإنترنت عن الاسـتعمالات الممكنة لبرمجية جيوجبرا، ثم كتابة تقرير عن ذلـك، وقراءته أمام زملائهم؛ تعزيزًا لمهارتي البحث والتواصل لديهم.

# استراتيجيات تدريس إضافية

عزيزي المُعلِّم/ عزيزتي المُعلِّمة، إنَّ مناهج الرياضيات المُطوَّرة تساعدكما على تطبيق أحدث استراتيجيات التدريس، بما تحويه من عناصر مُنظَّمة في كتاب الطالب، ومقترحات، وإرشادات مناسبة للتدريس في دليل المُعلِّم، علمًا بأنَّ مسألة تطبيقها متروكة لكما؛ إذ يُمكِن لكلٍّ منكما اختيار ما يناسبه من طرائق التدريس داخل غرفة الصف؛ فأنتما أكثر علمًا بأحوال غرفة الصف، والوسائل والتجهيزات المتوافرة في المدرسة.

**في ما يأتي بعض استراتيجيات التدريس الإضافية التي قد تساعد المُعلِّم/ المُعلِّمة على تقديم الدروس:**

## التعلُّم المقلوب:

نموذج تربوي يهدف إلى استعمال التقنيات الحديثة وشبكة الإنترنت على نحوٍ يسمح للمُعلِّم/ للمُعلِّمة بإعداد الدرس عن طريق مقاطع الفيديو، أو الملفات الصوتية، أو غير ذلك من الوسائط؛ ليطَّلِع عليها الطلبة في منازلهم (تظلُّ متاحة لهم على مدار الوقت)، باستعمال حواسيبهم، أو هواتفهم الذكية، أو أجهزتهم اللوحية قبل الحضور إلى غرفة الصف. في حين يُخصَّص وقت اللقاء الصفي في اليوم التالي لتطبيق المفاهيم والمحتوى العام الذي شاهدوه، وذلك في صورة سلسلة من أنشطة التعلُّم النشط، والأنشطة الاستقصائية، والأنشطة التجريبية، وحلِّ المسائل الرياضية، والعمل بروح الفريق، وتقييم التقدُّم في سير العمل.

## بطاقة الخروج:

أسلوب يتضمَّن مهمة قصيرة يُنفِّذها الطلبة في مرحلة ختام الدرس. وفيه يجيب الطلبة عن أسئلة قصيرة مُحدَّدة مكتوبة في بطاقات صغيرة، ثم يجمع المُعلِّم/ المُعلِّمة البطاقات لقراءة الإجابات، ثم التعليق عليها في الحصة التالية، في ما يُمثِّل تغذية راجعة يُستنَد إليها في الحصة اللاحقة.

## رفع اليد (إشارة الصمت):

أسلوب يُستعمَل لإدارة الصف. وفيه يرفع المُعلِّم/ المُعلِّمة اليد، فيستجيب الطلبة برفع أيديهم، وإنهاء مناقشاتهم فورًا. تُعَدُّ هذه الاستراتيجية طريقة فاعلة وسريعة للفت انتباه الطلبة، ويُمكِن استخدامها في بداية الحصة، أو للإعلان عن انتهاء النشاط. تجدر الإشارة إلى أنَّ رفع المُعلِّم/ المُعلِّمة اليد يجب أنْ يُقابَل باستجابات ثلاث: رفع جميع الطلبة أيديهم من دون استثناء، والتزامهم الصمت التام، والإصغاء.

## الرؤوس المُرقَّمة:

أسلوب يُستعمَل لإدارة الصف، وتوزيع المسؤوليات. وهو يهدف إلى إبقاء الطلبة في وضع استعداد دائم، عن طريق الاختيار العشوائي لمشاركاتهم وإجابتهم عن الأسئلة. ففي العمل الجماعي يكون لكل طالب/ طالبة في المجموعة رقم خاص، وعندما يسعى المُعلِّم/ المُعلِّمة إلى الحصول على إجابة سؤال بصورة عشوائية، فإنَّ الطالب/ الطالبة يختار رقمًا من دون أنْ يعرف زميله/ زميلتها، فيجيب الطالب/ الطالبة عن السؤال، وقد يساعده/ يساعدها على الإجابة أفراد المجموعة.

## أنا أُفكِّر، نحن نُفكِّر:

أسلوب يُستعمَل لتطوير تفكير الطلبة ضمن مجموعات. وفيه تُعِدُّ كل مجموعة ورقة تتضمَّن جدولًا من عمودين؛ عنوان الأوَّل: (أنا أُفكِّر)، وعنوان الثاني: (نحن نُفكِّر). ثم يطرح المُعلِّم/ المُعلِّمة سؤالًا يجيب عنه الطلبة بصورة فردية في العمود الأوَّل، ثم يُناقِش الطلبة إجاباتهم للاتفاق على إجابة واحدة تُكتَب في العمود الثاني، ويُمكِن تغيير الورقة عند الحاجة. يساعد هذا الأسلوب الطلبة على التفكير في الموضوع، وتأمُّل التغيُّر في تفكيرهم نتيجة التحدُّث إلى الآخرين.

## الألواح الصغيرة:

أسلوب يُستعمَل للتقويم. وفيه يُمسِك كل طالب/ طالبة بلوح صغير (يُمكِن أنْ يُصنَع من قطعة كرتون مقوًّى، أو قطعة خشب صغيرة يُكتَب عليها بالطبشور، أو قطعة كرتون عليها لاصق شفّاف يُكتَب عليها بقلم اللوح الأبيض)، ثم يطرح المُعلِّم/ المُعلِّمة سؤالًا يجيب عنه الطلبة بالكتابة على اللوح، ثم رفعه إلى أعلى؛ ليتمكَّن المُعلِّم/ المُعلِّمة من مشاهدة الإجابات بسهولة. يُسهِم هذه الأسلوب في زيادة مشاركة الطلبة؛ لأنَّهم يجيبون جميعًا في الوقت نفسه من دون إحداث فوضى، ويُسهِم أيضًا في التقويم التكويني؛ إذ يُلاحِظ المُعلِّم/ المُعلِّمة نسبة إجابات الطلبة الصحيحة.

الوحدة

5

# الاقتراناتُ

# Functions

## مُخطَّط الوحدة

| اسم الدرس | النتاجات | المصطلحات | المصادر والأدوات | عدد الحصص |
|---|---|---|---|---|
| أستعد لدراسة الوحدة | | | • كتاب التمارين. | 1 |
| الدرس 1: اقترانات كثيرات الحدود. | • تعرُّف الاقتران كثير الحدود، ودرجته، ومعاملاته.<br>• تمثيل الاقتران كثير الحدود بيانيًّا، وإيجاد مجاله ومداه.<br>• تطبيق عمليات الجمع والطرح والضرب على الاقترانات كثيرات الحدود.<br>• حل مسائل حياتية عن الاقترانات كثيرات الحدود. | وحيد الحد.<br>كثير الحدود.<br>الدرجة.<br>الصورة القياسية لكثير الحدود.<br>كثير الحدود الصفري.<br>المعامل الرئيس.<br>المجال.<br>المدى. | • جهاز الحاسوب.<br>• برمجية جيوجبرا.<br>• الآلة الحاسبة.<br>• ورق رسم بياني. | 3 |
| الدرس 2: قسمة كثيرات الحدود والاقترانات النسبية. | • إيجاد ناتج قسمة كثير حدود على كثير حدود آخر.<br>• تعرُّف الاقترانات النسبية، وإيجاد مجالها ومداها.<br>• تمثيل الاقترانات النسبية بيانيًّا، وإيجاد خطوط التقارب.<br>• حل مسائل حياتية عن القسمة والاقترانات النسبية. | خوارزمية القسمة.<br>اقتران المقلوب.<br>الاقتران النسبي.<br>خط التقارب الأفقي.<br>خط التقارب الرأسي. | • جهاز الحاسوب.<br>• برمجية جيوجبرا.<br>• الآلة الحاسبة.<br>• ورق رسم بياني. | 3 |
| الدرس 3: تركيب الاقترانات. | • تعرُّف مفهوم الاقتران المُركَّب، وشرط تركيب اقترانين.<br>• حساب قيمة الاقتران المُركَّب لعدد معطى.<br>• إيجاد قاعدة اقتران مُركَّب عُلِمت قاعدتا مُركَّبتيه.<br>• حل مسائل حياتية عن تركيب الاقترانات. | تركيب الاقترانات.<br>الاقتران المُركَّب.<br>المُركَّبتان. | • جهاز الحاسوب.<br>• الآلة الحاسبة. | 3 |
| الدرس 4: الاقتران العكسي. | • تعرُّف الاقتران العكسي.<br>• إيجاد الاقتران العكسي لاقتران واحد لواحد، وتحديد مجاله ومداه.<br>• حل مسائل حياتية عن الاقتران العكسي. | العلاقة العكسية.<br>الاقتران العكسي.<br>اقتران واحد لواحد.<br>اختبار الخط الأفقي.<br>الاقتران المحايد.<br>الاقتران الجذري. | • جهاز الحاسوب.<br>• برمجية جيوجبرا.<br>• الآلة الحاسبة.<br>• ورق رسم بياني. | 2 |
| الدرس 5: المتتاليات. | • كتابة الحد التالي في متتالية معطاة باستعمال العلاقة بين حدودها.<br>• كتابة حدود متتالية عُلِم حدها العام.<br>• استنتاج قاعدة الحد العام لمتتاليات خطية، وتربيعية، وتكعيبية.<br>• حل مسائل حياتية عن المتتاليات. | المتتالية.<br>الحد.<br>الحد العام. | • جهاز حاسوب.<br>• آلة حاسبة. | 3 |
| عرض نتائج المشروع. | | | • جهاز الحاسوب. | 1 |
| اختبار الوحدة. | | | | 2 |
| مجموع الحصص: | | | | 18 |

# الوحدة 5

## نظرة عامة على الوحدة:

تعرَّف الطلبة سابقًا مفهوم الاقتران، والاقترانات الثابتة، والخطية، والتربيعية، وتعلَّموا كيفية تمثيلها بيانيًّا، وإيجاد مجالها ومداها وأصفارها. وكذلك تعلَّموا جمع المقادير الجبرية، وطرحها، وضربها، وتحليل العبارة الثلاثية، والفرق بين مربعين، ومجموع مكعبين، والفرق بينهما. وتعلَّموا أيضًا المتتاليات الخطية، والتربيعية، والتكعيبية، ووصف الحد العام لكلٍّ منها. سيتعلَّم الطلبة في هذه الوحدة الاقتران كثير الحدود، ودرجته، ومعاملاته، وصورته القياسية والعامة، وتمثيله بيانيًّا، وإيجاد مجاله ومداه وأصفاره بالتحليل إلى العوامل، وتطبيق عمليات الجمع والطرح والقسمة على كثيرات الحدود، والاقتران النسبي، وإيجاد مجاله ومداه، وتمثيله بيانيًّا، وإيجاد خطوط تقارب منحناه. سيتعلَّم الطلبة أيضًا تركيب الاقترانات، والاقتران العكسي، وإيجاد المجال والمدى للاقتران المُركَّب والاقتران العكسي، والعلاقة بين الاقتران ومعكوسه. وكذلك سيتعلَّمون المتتاليات بوصفها اقترانًا، وإيجاد حدها العام.

الوحدةُ 5

الاقتراناتُ

Functions

ما أهميةُ هذهِ الوحدةِ؟

تُستعمَلُ الاقتراناتُ لنمذجةِ التطبيقاتِ الحياتيةِ بصورةٍ رياضيةٍ تُسهِّلُ فهمَها. فمثلًا، تُستعمَلُ بعضُ أنواعِ الاقتراناتِ لوصفِ العلاقةِ بينَ أسعارِ السلعِ والكمياتِ المبيعةِ منْها. سأتعرَّفُ في هذهِ الوحدةِ أنواعًا عديدةً منَ الاقتراناتِ والمتتالياتِ ذاتِ الاستعمالاتِ الحياتيةِ الكثيرةِ.

تعلَّمْتُ سابقًا:

- ✓ الاقتراناتِ الخطِّيَةَ، والتربيعيةَ، وتمثيلَها بيانيًّا.
- ✓ إيجادَ القيمةِ العظمى أوِ القيمةِ الصغرى للاقترانِ التربيعيِّ.
- ✓ تكوينَ معادلاتٍ تربيعيةٍ، وحلَّها.
- ✓ جمعَ مقاديرَ جبريةٍ، وطرحَها، وضربَها.
- ✓ المتتالياتِ الخطِّيةَ، والتربيعيةَ، وكتابةَ حدودِها.

سأَتعلَّمُ في هذهِ الوحدةِ:

- ◄ الاقتراناتِ كثيراتِ الحدودِ، وخصائصَها، وتمثيلَها بيانيًّا.
- ◄ جمعَ كثيراتِ الحدودِ، وطرحَها، وضربَها، وقسمتَها.
- ◄ الاقتراناتِ النسبيةَ، ومجالَها، ومداها.
- ◄ تركيبَ الاقتراناتِ، والاقترانَ العكسيَّ، والاقترانَ الجذريَّ.
- ◄ استنتاجَ قاعدةِ الحدِّ العامِّ لمتتالياتٍ تربيعيةٍ، وتكعيبيةٍ.

6

## الترابط الرأسي بين الصفوف

**سابقًا**

### الصف التاسع

- تعرُّف المقادير الجبرية، وتحليلها إلى عواملها الأولية.
- وصف الاقترانات التربيعية، وتمثيلها بيانيًّا، وإيجاد مجالها ومداها وأصفارها.
- وصف الحد العام لمتتاليات خطية وتربيعية وتكعيبية، والتعبير عنه بمقدار جبري.

### الصف العاشر

- تعرُّف كثيرات الحدود، وتمثيلها بيانيًّا، وإيجاد مجالها ومداها وأصفارها.
- تطبيق عمليات الجمع والطرح والضرب والقسمة على كثيرات الحدود.
- تعرُّف الاقترانات النسبية، وإيجاد مجالها ومداها وخطوط تقارب منحنياتها، وتمثيلها بيانيًّا.
- إيجاد نتيجة تركيب اقترانين، ومجال الاقتران المُركَّب ومداه.
- إيجاد معكوس الاقتران، وتحديد المجال والمدى لكلٍّ من الاقتران ومعكوسه.
- تعرُّف الاقترانات الجذرية، وإيجاد مجالها ومداها.
- وصف الحد العام لمتتاليات.

**لاحقًا**

### الصف الحادي عشر العلمي

- تمثيل الاقترانات الأسية والاقترانات اللوغاريتمية والاقترانات المُتفرِّعة، واستنتاج الخصائص الأساسية لكلٍّ منها .
- اكتشاف المتتاليات والمتسلسلات الحسابية والهندسية، وإيجاد حدها العام ومجموع (n) من حدودها.
- إيجاد مجموع متسلسلات هندسية لانهائية تقاربية.
- إدخال أوساط حسابية وهندسية بين عددين.

# مشروعُ الوحدةِ

## نمذجةُ علاقاتٍ باستعمالِ كثيراتِ الحدودِ

**فكرةُ المشروعِ** جمعُ بياناتٍ عنِ العلاقةِ بينَ مُتغيِّرَيْنِ في أحدِ المجالاتِ الحياتيةِ، ونمذجتُها باستعمالِ اقترانٍ كثيرِ الحدودِ.

**الموادُّ والأدواتُ** جهازُ حاسوبٍ، شبكةُ إنترنتْ، برمجيةُ إكسل (Microsoft Excel).

**خطواتُ تنفيذِ المشروعِ:**

1. أختارُ أنا وأفرادُ مجموعتي مُتغيِّرَيْنِ لجمعِ بياناتٍ حولَهُما، مثلَ: تكلفةِ إنتاجِ سلعةٍ مُعيَّنةٍ، وعددِ الوحداتِ المُنتَجةِ، أوْ عددِ ساعاتِ النهارِ في إحدى المدنِ في أيامٍ مختلفةٍ منَ العامِ، أوْ أيِّ مُتغيِّرَيْنِ آخرَيْنِ.
2. أجمعُ البياناتِ، ثمَّ أُدوِّنُها في جدولٍ منْ عمودَيْنِ، بحيثُ يحوي العمودُ الأولُ قيمَ المُتغيِّرِ $x$، ويحوي العمودُ الثاني القيمَ المُناظِرةَ للمُتغيِّرِ $y$ (يجبُ جمعُ ما لا يقلُّ عنْ 15 زوجًا).

| | A | B |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 10.9 |
| 2 | 2 | 11.5 |
| 3 | 3 | 11.9 |
| 4 | 4 | 12.3 |
| 5 | 5 | 11.6 |
| 6 | 6 | 10.8 |
| 7 | 7 | 11 |
| 8 | 8 | 10.3 |
| 9 | 9 | 10 |
| 10 | 10 | 9.3 |
| 11 | 11 | 8.7 |
| 12 | 12 | 9.2 |
| 13 | 13 | 9.6 |
| 14 | 14 | 10 |
| 15 | 15 | 10.2 |

3. أستعملُ برمجيةَ إكسل لتمثيلِ الأزواجِ المُرتَّبةِ بيانيًّا، وإيجادِ اقترانٍ كثيرِ الحدودِ الأفضلِ تمثيلًا لها باتباعِ الخطواتِ الآتيةِ:
   - أُدخِلُ البياناتِ في عمودَيْنِ متجاورَيْنِ ضمنَ صفحةِ إكسل، وأُظلِّلُ العمودَيْنِ، ثمَّ أختارُ (مُخطَّطاتٌ) منْ تبويبةِ (إدراجٌ)، وأنقرُ (مُبعثَرٌ)، ثمَّ أختارُ المُخطَّطَ الذي يُبيِّنُ مجموعةَ نقاطٍ منفصلةٍ، فيظهرُ مُخطَّطٌ بيانيٌّ.
   - أنقرُ بزرِّ الفأرةِ الأيمنِ إحدى النقاطِ، ثمَّ أختارُ أيقونةَ (إضافةُ خطِّ اتجاهٍ) منَ القائمةِ المُنسدِلةِ، فيظهرُ مستقيمٌ يتوسَّطُ النقاطَ، وتظهرُ خياراتُ التنسيقِ جانبًا، فأنقرُ المُربَّعَ أمامَ أيقونةِ (عرضُ المعادلةِ في المُخطَّطِ)، لتظهرَ معادلةُ المستقيمِ التي هيَ قاعدةُ الاقترانِ كثيرِ الحدودِ المطلوبِ.
   - إذا لاحظْتُ أنَّ المستقيمَ أوِ المنحنى الظاهرَ لا يُناسِبُ النقاطَ، فإنَّني أستطيعُ تغييرَ نوعِهِ؛ إذْ يُمكِنُني مثلًا اختيارُ مُتعدِّدِ الحدودِ (أيْ كثيرِ الحدودِ)، واختيارُ الترتيبِ (أيْ درجةِ كثيرِ الحدودِ) المناسبِ.
   - عندما أحصلُ على المستقيمِ أوِ المنحنى الأنسبِ للنقاطِ أكتبُ قاعدةَ الاقترانِ.
4. أَجِدُ مجالَ الاقترانِ، ومداهُ، وأصفارَهُ، ونقاطَ القيمِ القصوى المحليةِ لهُ.
5. أَجِدُ الاقترانَ العكسيَّ (إنْ وُجِدَ)، وأَجِدُ مجالَهُ، ومداهُ، وأُحدِّدُ فائدتَهُ، ودلالاتِهِ في سياقِ موضوعِ البحثِ.

**عرضُ النتائجِ:**

أُعِدُّ معَ أفرادِ مجموعتي عرضًا تقديميًّا (بوربوينت) نُبيِّنُ فيهِ خطواتِ العملِ في المشروعِ والنتائجَ التي توصَّلْنا إليْها مُوضَّحةً بالصورِ والرسومِ، ثمَّ نعرضُهُ أمامَ الزملاءِ في مختبرِ الحاسوبِ.

7

## أداة تقييم المشروع

| الرقم | المعيار | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | اختيار متغيرين مناسبين من واقع الحياة يدلان على سعة الأفق والابتكار. | | | |
| 2 | جمع البيانات بطريقة علمية موثوقة. | | | |
| 3 | المشاركة الفاعلة لجميع أفراد المجموعة. | | | |
| 4 | دقة الحسابات المتوقعة باستعمال النموذج. | | | |
| 5 | مراعاة أنْ يكون التقرير المكتوب كاملًا، ومنظمًا، ويحوي رسومًا توضيحيةً. | | | |
| 6 | اتصاف العرض التقديمي بالوضوح والشمول. | | | |

1 إنجاز المهمة بوجود أكثر من خطأ.
2 إنجاز المهمة بوجود خطأ بسيط.
3 إنجاز المهمة بصورة صحيحة من دون خطأ.

## مشروع الوحدة: نمذجة علاقات حياتية باستعمال كثيرات الحدود.

**هدف المشروع:** يهدف مشروع الوحدة إلى نمذجة العلاقة بين متغيرين من الحياة اليومية باقتران كثير حدود، واستعمال النموذج للتنبؤ بقيمة أحد المتغيرين بافتراض معلومية الآخر، وتعرُّف خصائص هذا النموذج، وتعيين مجاله ومداه، وإيجاد معكوسه إنْ أمكن.

### خطوات تنفيذ المشروع:

- أُعرِّف الطلبة بالمشروع وأهميته في تعلُّم موضوعات الوحدة.
- أُوزِّع الطلبة إلى مجموعات (ثلاثية، أو رباعية)، ثم أطلب إلى أفراد كل مجموعة أنْ يُوزِّعوا الأدوار بينهم، ويختاروا مُقرِّرًا لهم.
- أطلب إلى أفراد كل مجموعة إعداد المشروع، ثم كتابة تقرير مُفصَّل عنه، وبيان دور كلٍّ منهم في إنجازه.
- أُوجِّه أفراد المجموعات إلى اختيار متغيرين من واقع الحياة، مثل: العمر بالسنوات، والطول بالسنتيمترات لأفراد تتراوح أعمارهم بين سنة و15 سنة؛ وطول عظمة العضد، وطول الجسم لمجموعة متنوعة من الأشخاص.
- أُبيِّن لأفراد المجموعات معايير تقييم المشروع، وأعرض عليهم أداة التقييم، مُنوِّهًا بأنَّه يمكنهم طرح أيِّ استفسارات عن المشروع في أثناء دراستهم هذه الوحدة.
- أُذكِّر أفراد المجموعات بأهمية إنجاز المشروع عند الانتهاء من دراسة هذه الوحدة.

### عرض النتائج:

- أطلب إلى أفراد كل مجموعة المشاركة في عرض جزء من نتائج المشروع (تكمن أهمية هذه الخطوة في تعزيز مهارات الطلبة التكنولوجية، ومهاراتهم الحياتية، مثل: التواصل، والتعاون).
- أُوضِّح للطلبة أهمية اشتمال التقرير على الصعوبات التي واجهتهم، وكيفية التغلُّب عليها، والمعلومات الجديدة التي تعرَّفوها، ومقترحاتهم عن كيفية تطوير المشروع؛ تعزيزًا لمهارات حل المشكلات لديهم.
- أطلب إلى الطلبة تدوين تقييمهم الذاتي للمشروع، وأُنبِّههم إلى إمكانية الاستعانة بأداة التقييم المجاورة.
- أطلب إلى الطلبة التصويت على المشروع الأفضل.

## التقويم القبلي (التشخيصي):

- أُوظِّف بند (أستعد لدراسة الوحدة) في كتاب التمارين والأنشطة العملية؛ لمساعدة الطلبة على تذكّر المعرفة السابقة اللازمة لدراسة هذه الوحدة.
- أُوجِّه الطلبة إلى حل الأسئلة، ثم أتجوَّل بينهم، وأُشجِّع الطلبة الذين يواجهون صعوبة في حل أيٍّ سؤال على قراءة المثال المقابل له.
- إذا واجه بعض الطلبة صعوبة في حل الأسئلة، فأستعين بالمسائل الإضافية الآتية:

» إذا كان $f(x) = 2x + 5$، فأجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي:

1. $f(0)$ $5$
2. $f(3)$ $11$
3. $f(-1)$ $3$

» أكتب كلًّا ممّا يأتي في أبسط صورة:

4. $3(2x-5) + 4x$ $10x - 15$
5. $4a(2a^2 + 5ab^3 + 2)$ $8a^3 + 20a^2b^3 + 8a$
6. $(3x^2 - 4x) + (7x + 5)$ $3x^2 + 3x + 5$

» أجد $x$ بدلالة $y$ في كلٍّ ممّا يأتي:

7. $y = x + 4$ $x = y - 4$
8. $y = 5x$ $x = \frac{y}{5}$
9. $y = 4x + 3$ $x = \frac{(y-3)}{4}$

» أجد الحدين التاليين في كلٍّ ممّا يأتي:

10. $2, 4, 6, 8, \ldots.$ $10, 12$
11. $40, 35, 30, 25, \ldots.$ $20, 15$



أختبرُ معلوماتي قبلَ البدءِ بدراسةِ الوحدةِ، وفي حالِ عدمِ تأكُّدي منَ الإجابةِ أستعينُ بالمراجعةِ.

### • إيجادُ صورةِ عددٍ في الاقترانِ.

إذا كانَ $f(x) = 3x - 2$، وَ $g(x) = x^2 - 2x - 3$، فأَجِدُ كلًّا ممّا يأتي:

1. $g(0)$ $-3$
2. $f(2)$ $4$
3. $f(-3)$ $-11$
4. $g(-4)$ $21$

**مثالٌ:** إذا كانَ $g(x) = 2x^2 + 5x + 4$، فأَجِدُ $g(-2)$

| | |
|---|---|
| قاعدةُ الاقترانِ | $g(x) = 2x^2 + 5x + 4$ |
| بتعويضِ $x = -2$ | $g(-2) = 2(-2)^2 + 5(-2) + 4$ |
| بالتبسيطِ | $= 8 - 10 + 4 = 2$ |

### • تبسيطُ المقاديرِ الجبريةِ.

أكتبُ كلًّا ممّا يأتي في أبسطِ صورةٍ:

1. $-3(2x - 2y - 4)$ $-6x + 6y + 12$
2. $(4a + b) + 2(a - 3b)$ $6a - 5b$
3. $5x^2(2x - 5)$ $10x^3 - 25x^2$
4. $(x - 3)^2 + 11x$ $x^2 + 5x + 9$

**مثالٌ:** أكتبُ $-2a(3a - 2b - 5) + 5a^2$ في أبسطِ صورةٍ.

| | |
|---|---|
| المقدارُ الأصليُّ | $-2a(3a - 2b - 5) + 5a^2$ |
| خاصيةُ التوزيعِ | $= -2a(3a) - 2a(-2b) - 2a(-5) + 5a^2$ |
| بالتبسيطِ | $= -6a^2 + 4ab + 10a + 5a^2$ |
| بجمعِ الحدودِ المتشابهةِ | $= -a^2 + 4ab + 10a$ |

### • التعبيرُ عنْ مُتغيِّرٍ بدلالةِ الآخرِ.

أَجِدُ قيمةَ $x$ بدلالةِ $y$ في كلٍّ ممّا يأتي:

1. $y = 4x - 7$ $x = \frac{y+7}{4}$
2. $y = 3 - 5x$ $x = \frac{3-y}{5}$
3. $y = x^2 - 5$ $\pm\sqrt{y+5}$
4. $y = \frac{1}{2x-1}$ $x = \frac{1}{2}(\frac{1}{y} + 1) = \frac{1+y}{2y}$

6



تُستعمَلُ الصيغةُ: $F = \frac{9}{5}C + 32$ لتحويلِ درجةِ الحرارةِ منْ مقياسِ سيلسيوس C إلى مقياسِ فهرنهايت F.

5. أُحوِّلُ $40°$ C إلى مقياسِ فهرنهايت F. $104°F$
6. أُحوِّلُ $86°$ F إلى مقياسِ سيلسيوس C. $30°C$

**مثالٌ:** أَجِدُ قيمةَ $x$ بدلالةِ $y$ في كلٍّ ممّا يأتي:

a) $y = 3x - 8$

| | |
|---|---|
| المعادلةُ الأصليةُ | $y = 3x - 8$ |
| بإضافةِ 8 إلى الطرفيْنِ | $y + 8 = 3x$ |
| بقسمةِ الطرفيْنِ على 3 | $\frac{y+8}{3} = x$ |

b) $y = \frac{3}{2-x}$

| | |
|---|---|
| المعادلةُ الأصليةُ | $y = \frac{3}{2-x}$ |
| بضربِ الطرفيْنِ في $(2-x)$ | $y(2-x) = 3$ |
| | $2y - yx = 3$ |
| بطرحِ $2y$ منَ الطرفيْنِ، وضربِ الطرفيْنِ في $-1$ | $yx = 2y - 3$ |
| بقسمةِ الطرفيْنِ على $y$ | $x = \frac{2y-3}{y}$ |

### • إيجادُ حدودٍ متتاليةٍ.

أَجِدُ الحدَّيْنِ التالييْنِ للمتتالياتِ الآتيةِ:

1. $4, 7, 10, 13, \ldots.$ $16, 19$
2. $100, 94, 88, 82, \ldots.$ $76, 70$
3. $3, 6, 11, 18, \ldots.$ $27, 38$

**مثالٌ:** أَجِدُ الحدَّيْنِ التالييْنِ للمتتاليةِ: $2, 7, 12, 17, \ldots$

أُلاحِظُ أنَّ كلَّ حدٍّ يزيدُ على الحدِّ الذي يسبقُهُ بمقدارٍ ثابتٍ هوَ 5:

$7-2 = 12 - 7 = 17 - 12 = 5$

إذنْ، الحدّانِ التاليانِ هما: $17 + 5 = 22$ , $22 + 5 = 27$

7

الدرسُ 1

# اقتراناتُ كثيراتِ الحدودِ
## Polynomial Functions

**فكرةُ الدرسِ** تعرُّفُ الاقتراناتِ كثيراتِ الحدودِ، وتمثيلُها بيانيًّا، وإجراءُ عملياتِ الجمعِ والطرحِ والضربِ عليْها، وحلُّ مسائلَ عنْها.

**المصطلحاتُ** وحيدُ الحدِّ، كثيرُ الحدودِ، المعاملُ الرئيسُ، الدرجةُ، الصورةُ القياسيةُ لكثيرِ الحدودِ، كثيرُ الحدودِ الصفريُّ، المجالُ، المدى.

**مسألةُ اليومِ** يُنتِجُ مصنعٌ ثُريّاتٍ عددُها $x$ ثُريّا أسبوعيًّا، حيثُ $350 \geq x \geq 0$، ويبيعُ الواحدةَ منْها بسعرِ $(150 - 0.3x)$ دينارًا. إذا كانَتْ تكلفةُ إنتاجِ $x$ مِنَ الثُّريّاتِ هيَ $(6300 + 60x - 0.1x^2)$ دينارًا، فأَجِدُ ربحَ المصنعِ منْ إنتاجِ $x$ ثُريّا أسبوعيًّا وبيعِها.

الاقترانُ **وحيدُ الحدِّ** (monomial) بمُتغيِّرٍ واحدٍ هوَ اقترانٌ قاعدتُهُ ناتجُ ضربِ عددٍ حقيقيٍّ، يُسمّى المعاملَ، في مُتغيِّرٍ أُسُّهُ عددٌ صحيحٌ غيرُ سالبٍ. والجدولُ الآتي يعرضُ بعضَ الأمثلةِ على وحيدِ الحدِّ، وأُسِّهِ، ومعاملِهِ:

| وحيدُ الحدِّ | $3x^2$ | $-\frac{1}{2}x^5$ | $\sqrt{7}x^3$ | $x$ | $9$ |
|---|---|---|---|---|---|
| الأُسُّ | 2 | 5 | 3 | 1 | 0 |
| المعاملُ | 3 | $-\frac{1}{2}$ | $\sqrt{7}$ | 1 | 9 |

الاقترانُ **كثيرُ الحدودِ** (polynomial) بمُتغيِّرٍ واحدٍ هوَ اقترانٌ يتكوَّنُ منْ وحيدِ حدٍّ واحدٍ، أوْ مجموعِ عِدَّةِ اقتراناتٍ وحيدةِ الحدِّ بمُتغيِّرٍ واحدٍ. ومنْ أمثلتِهِ الاقتراناتُ الآتيةُ:

$g(x) = -3x^2 + 1.5x^4 - 3$ $\quad f(x) = x^2 + 4x - 5$ $\quad f(x) = 3x - 4$ $\quad f(x) = 2$

**مفهومٌ أساسيٌّ** **الصورةُ العامةُ لكثيرِ الحدودِ**

الصورةُ العامةُ لكثيرِ الحدودِ:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x^1 + a_0$$

حيثُ: $n$: عددٌ صحيحٌ غيرُ سالبٍ.

$a_n , a_{n-1} , a_{n-2} , \dots, a_1 , a_0$ : أعدادٌ حقيقيةٌ تُسمّى معاملاتِ حدودِ كثيرِ الحدودِ.

8

# الدرس 1

## نتاجات الدرس

- تعرُّف كثير الحدود وصورته القياسية، وتعيين درجته ومعاملاته وأصفاره.
- تمثيل كثيرات الحدود بيانيًّا، وتعيين مجالها ومداها.
- تطبيق عمليات الجمع والطرح والضرب على كثيرات الحدود.
- حل مسائل حياتية تتعلّق بكثيرات الحدود.

## المواد والأدوات:

برمجية جيوجبرا، ورق رسم بياني، آلة حاسبة.

## التعلُّم القبلي:

- حساب قيمة الاقتران لقيم معلومة للمتغير المستقل.
- تمثيل المعادلات بيانيًّا.
- ضرب حد جبري في آخر، وكتابة الناتج في أبسط صورة.

## 1 التهيئة

- أُذكِّر الطلبة بالعلاقة، والاقتران، والفرق بينهما، والرمز المستخدم للاقتران. بعد ذلك أكتب الاقتران: $f(x) = 3x + 5$، ثم أطلب إليهم إيجاد كلٍّ ممّا يأتي: $f(0), f(2), f(-3)$
- أطلب إلى الطلبة تمثيل المعادلة: $y = f(x) = 2x - 3$ بيانيًّا، ثم أُناقِشهم في مقطعي الخط البياني من المحورين (المقطع $x$ والمقطع $y$) وما يُمثِّلانه في هذه المعادلة.
- أطلب إلى الطلبة تبسيط كلٍّ ممّا يأتي: $(2x^2y^3)(3xy^2), (2xy^3)(-2.5y^4)$

## ملاحظات المُعلِّم/ المُعلِّمة

## 2 الاستكشاف

- أُوجِّه الطلبة إلى قراءة المسألة في بند (مسألة اليوم)، ثم أسألهم:
  - » إذا أنتج المصنع 100 ثريا، فما سعر بيع الثريا الواحدة؟ 120 دينارًا.
  - » ما تكلفة إنتاج 100 ثريا؟ 11300 دينار.
  - » كيف أجد ربح المصنع من إنتاج عدد من الثريات وبيعها؟ بطرح تكلفة الإنتاج من ثمن بيع الثريات.
  - » ما ربح المصنع من إنتاج 100 ثريا وبيعها؟ 700 دينار.
- أستمع لإجابات الطلبة من دون تقديم تغذية راجعة لهم.

## 3 التدريس

- أُوضِّح للطلبة مفهوم وحيد الحد، وكثير الحدود، ورمز الاقتران وقراءته، وأذكر أمثلة على ذلك.
- أُناقِش الطلبة في الصورة العامة للاقتران كثير الحدود، والتسميات المتعلقة بكثيرات الحدود.
- أُشجِّع الطلبة على ذكر أمثلة على كثيرات الحدود، وأمثلة على غير كثيرات الحدود.

### مثال 1

- أُشارِك الطلبة في حل المثال 1 الذي يُبيِّن طريقة تحديد إذا كان الاقتران المعطى يُمثِّل كثير حدود أم لا، وتحديد الدرجة وبعض المعاملات إنْ كان كثير حدود.

### مثال إضافي

- أُحـدِّد إذا كان كلٌّ ممّا يأتي كثير حدود أم لا. وإذا كان كثير حدود، فأكتبه بالصورة القياسية، ثم أُحدِّد المعامل الرئيس، والدرجة، والحد الثابت:

**a)** $f(x) = x^4 - 3x^3 + \sqrt[3]{x} + 6$ لا.

**b)** $h(x) = 5x^2 - 3x^5 + 4x + 7$

نعم، كثير حدود، صورته القياسية:
$h(x) = -3x^5 + 5x^2 + 4x + 7$، ومعامله الرئيس: $-3$، ودرجته 5، وحده الثابت 7

**c)** $g(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2}{x-3}$ لا.

إذا كانَ $a_n \neq 0$ ، فإنَّهُ يُسمّى **المعاملَ الرئيسَ** (leading coefficient)، و**درجةُ** (degree) كثيرِ الحدودِ ($n$) هيَ أكبرُ أُسٍّ للمُتغيِّرِ في جميعِ حدودِهِ، ويُسمّى $a_0$ الحدَّ الثابتَ.

يكـونُ كثيرُ الحدودِ مكتوبًا **بالصورةِ القياسـيةِ** (standard form) إذا كانَتْ حدودُهُ مكتوبةً بترتيبٍ تنازليٍّ منْ أكبرِها درجةً إلى أصغرِ درجةً.

كثيرُ الحدودِ الذي جميعُ معاملاتِهِ أصفارٌ يُسمّى **كثيرَ الحدودِ الصفريَّ** (zero polynomial)، وهوَ $f(x) = 0$، وليسَ لهُ درجةٌ، ويُمثِّلُهُ المحورُ $x$ في المستوى الإحداثيِّ.

### مثال 1

**أُحـدِّدُ إذا كانَ كلٌّ ممّـا يأتـي كثيـرَ حـدودٍ أمْ لا. وفـي حـالِ كانَ كثيرَ حـدودٍ أكتبُـهُ بالصورةِ القياسـيةِ، ثـمَّ أُحـدِّدُ المعامـلَ الرئيـسَ، والدرجةَ، والحـدَّ الثابتَ:**

1) $f(x) = -4 + 6x - 2x^3 + x^2$

كثيرُ حدودٍ، درجتُهُ 3، وصورتُهُ القياسيةُ هيَ:

$$f(x) = -2x^3 + x^2 + 6x - 4$$

معاملهُ الرئيسُ $-2$، وحدُّهُ الثابتُ $-4$

2) $g(x) = 2x^2 + \frac{1}{x}$

ليسَ كثيرَ حدودٍ؛ لأنَّ أُسَّ المُتغيِّرِ في الحدِّ الثاني هوَ $-1$

3) $h(x) = \sqrt{x} + 7$

ليسَ كثيرَ حدودٍ؛ لأنَّ أُسَّ المُتغيِّرِ في الحدِّ الأولِ هوَ $\frac{1}{2}$

4) $k(x) = \frac{3x^2 - 5}{4} + 2x$

كثيرُ حدودٍ، درجتُهُ 2، وصورتُهُ القياسيةُ هيَ: $k(x) = \frac{3}{4}x^2 + 2x - \frac{5}{4}$

معاملهُ الرئيسُ $\frac{3}{4}$، وحدُّهُ الثابتُ $-\frac{5}{4}$

**أتذكَّرُ**

لأيِّ عددٍ حقيقيٍّ $a \neq 0$ ، فإنَّ: $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

وإذا كانَ $a$ مرفوعًا للقوَّةِ السالبةِ في المقامِ، فإنَّ: $\frac{1}{a^{-n}} = a^n$

**أتحقق من فهمي**

**أُحدِّدُ إذا كانَ كلٌّ ممّا يأتي كثيرَ حدودٍ أمْ لا. وفي حالِ كانَ كثيرَ حدودٍ أكتبُهُ بالصورةِ القياسيةِ، ثمَّ أُحدِّدُ المعاملَ الرئيسَ، والدرجةَ، والحدَّ الثابتَ:** أنظر الهامش.

a) $h(x) = 9 - 5x + \sqrt{2}\,x^5$

b) $f(x) = \frac{3x+5}{x^2+2} + 2x$

c) $g(x) = 2x(3-x)^3$

d) $r(x) = \frac{x^3}{6} - 7x^5 + 2\pi$



**إجابة سؤال بند (أتحقق من فهمي):**

a) كثيـــر حدود، صورته القياســية: $h(x) = \sqrt{2}\,x^5 - 5x + 9$، ودرجته 5، ومعامله الرئيس $\sqrt{2}$، وحده الثابت 9

b) ليس كثير حدود.

c) كثيـــر حدود، صورته القياســية: $f(x) = -2x^4 + 18x^3 - 54x^2 + 54x$، ودرجته 4، ومعامله الرئيس $-2$، وحده الثابت 0

d) كثير حدود، صورته القياسية: $r(x) = -7x^5 - \frac{1}{6}x^3 + 2\pi$، ودرجته 5، ومعامله الرئيس 7، وحده الثابت $2\pi$

## التقويم التكويني:

- أُوجِّه الطلبة إلــى حل التدريب في بنــد (**أتحقق من فهمي**) بعد كل مثال.
- أختار بعض الإجابــات التي تحوي أخطاء مفاهيمية، ثم أُناقِشــها على اللوح، ولا أذكر اسم الطالب الذي أخطأ في الإجابة؛ تجنبًا لإحراجه.

**أخطــاء مفاهيميــة:** قــد يُخطِئ بعض الطلبة فــي تحديد المعامل الرئيــس، فيكتبون أكبر معاملات كثير الحدود أو معامل أول حد؛ لذا أُذكِّرهم أنَّ المعامل الرئيس هو معامل الحد الأكبر درجة بعد تبسيط الاقتران.

### مثال 2

- أُناقِش الطلبة في خطــوات تمثيل كثير الحدود بيانيًّا، وأُشــارِكهم في حل المثال 2 الــذي يُبيِّن كيفية تمثيل كثيــر الحدود بيانيًّا، وإيجاد مجالــه ومداه وأصفاره، مُبيِّنًا لهم أنَّ أصفار الاقتران هي الإحداثيات $x$ لنقاط تقاطــع المنحنى مع المحــور $x$، وأنَّ الناتج في هذه الطريقــة يكون أحيانًا قيمة تقريبية لعدم دقة الرســم، وأنَّــه يمكــن إيجاد الأصفــار جبريًّا بحــل المعادلة $f(x) = 0$ بالطرائق التي تعلَّموها، وبخاصة التحليل إلى العوامل.

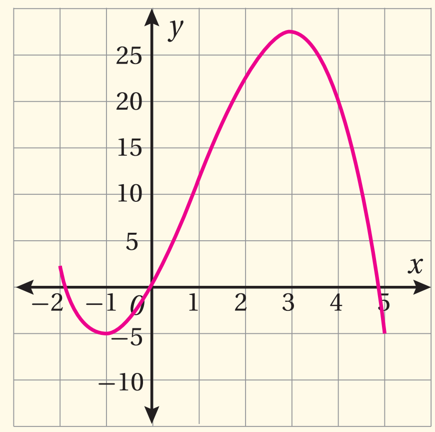
## مثال إضافي

- أُمثِّل بيانيًّا كلًّا ممّا يأتي، مُحدِّدًا مجاله ومداه وأصفاره:

a) $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 9x \,, -2 \leq x \leq 5$

مجاله: $-2 \leq x \leq 5$    مداه: $-5 \leq y \leq 27$

أصفاره: $-1.9, 0, 4.9$ تقريبًا.

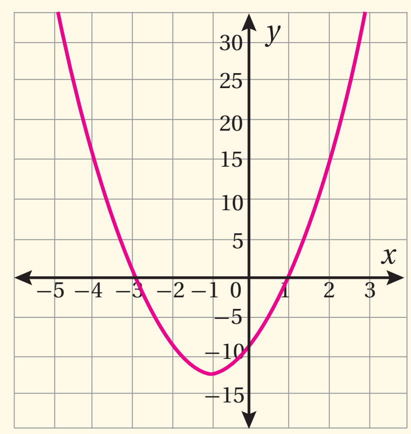



b) $f(x) = 3(x + 1)^2 - 12$

مجاله: مجموعة الأعداد الحقيقية.

مداه: $y \geq -12$

أصفاره: $-3, 1$




### تعزيز اللغة ودعمها:

أُكرِّر المصطلحات الرياضية المستخدمة في الدرس باللغتين العربية والإنجليزية، مُحفِّزًا الطلبة على استعمالها، مثل: الاقتران function، وكثير الحدود polynomial، والدرجة degree، والمعامل الرئيس leading coefficient، والمجال domain، والمدى range.

**مجالُ** (domain) أيِّ اقترانٍ هوَ مجموعةُ القيمِ التي يأخذُها المُتغيِّرُ $x$، **ومداهُ** (range) هوَ مجموعةُ القيمِ التي يأخذُها المُتغيِّرُ $y$.

لتمثيلِ الاقترانِ كثيرِ الحدودِ $f(x)$ بيانيًّا، أُكوِّنُ جدولَ قيمٍ أُحدِّدُ فيهِ قيمَ المُتغيِّرِ $x$، وأحسبُ قيمَ $f(x)$، وأُعيِّنُ النقاطَ $(x, f(x))$ في المستوى الإحداثيِّ، وأَصِلُ بينَها بمنحنى متصلٍ.

**أتعلَّمُ**

**مجالُ** كثيرِ الحدودِ هوَ مجموعةُ الأعدادِ الحقيقيةِ، أوْ مجموعةٌ جزئيةٌ منها تُحدَّدُ في نصِّ السؤالِ، **ومداهُ** هوَ مجموعةُ الأعدادِ الحقيقيةِ، أوْ مجموعةٌ جزئيةٌ منها تُحدَّدُ منْ جدولِ قيمِ الاقترانِ، أوْ منْ دراسةِ التمثيلِ البيانيِّ للاقترانِ.

### مثال 2

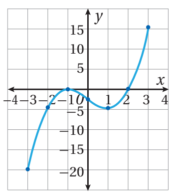
**أُمثِّلُ بيانيًّا كلَّ اقترانٍ ممّا يأتي، مُحدِّدًا مجالَهُ ومداهُ:**

1 $f(x) = x^3 - 3x - 2, \; -3 \leq x \leq 3$

**الخطوةُ 1:** أُنشِئُ جدولَ قيمٍ.

| $x$ | $-3$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ | $3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y = f(x)$ | $-20$ | $-4$ | $0$ | $-2$ | $-4$ | $0$ | $16$ |
| $(x, y)$ | $(-3, -20)$ | $(-2, -4)$ | $(-1,0)$ | $(0, -2)$ | $(1, -4)$ | $(2, 0)$ | $(3, 16)$ |

**الخطوةُ 2:** أُعيِّنُ النقاطَ التي تُمثِّلُ الأزواجَ $(x, y)$ في المستوى الإحداثيِّ، وأَصِلُ بينَها بمنحنى متصلٍ كما في الشكلِ المجاورِ.




مجالُ هذا الاقترانِ هوَ مجموعةُ قيمِ $x$ الحقيقيةِ، حيثُ: $-3 \leq x \leq 3$ ، أوِ الفترةُ $[-3, 3]$، ومداهُ: $-20 \leq y \leq 16$، أوِ الفترةُ $[-20, 16]$.

يُظهِرُ الشكلُ أنَّ أصفارَ هذا الاقترانِ هي: $-1, 2$

**أتعلَّمُ**

أَجِدُ أصفارَ الاقترانِ مِنَ التمثيلِ البيانيِّ بإيجادِ مقاطعهِ مِنْ محورِ $x$.

2 $f(x) = x^2 - 4x, \, , -1 \leq x \leq 4$

هذا اقترانٌ تربيعيٌّ على الصورةِ $f(x) = ax^2 + bx + c$، حيثُ $a = 1, b = -4, c = 0$، ومنحنى $f(x)$ قطعٌ مكافئٌ يمكنُ تمثيلُه بيانيًا كما يأتي:

- بما أنَّ $a > 0$، فمنحنى القطعِ المُكافِئِ مفتوحٌ للأعلى، وَيُمَثِّلُ الرأسُ نقطتَهُ الصُّغرى.



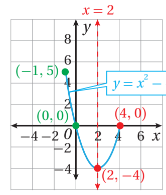
### إرشادات للمُعلِّم / للمُعلِّمة

المجال العاطفي لا يقل أهمية عن المجال المعرفي؛ لذا لا يجب أنْ أقول لأحد الطلبة: "إجابتك خطأ"، بل أقول له: "لقد اقتربت من الإجابة الصحيحة، فمَنْ يستطيع إعطاء إجابة أُخرى؟"، أو أقول له: "هذه إجابة صحيحة لغير هذا السؤال".

- مُعادلةُ محورِ تَّماثُلِ القطعِ المُكافِئِ هي:

$$x = -\frac{b}{2a} = 2$$

- إحداثيّا الرأسِ هُما: $(2, -4)$
- نقطةُ تقاطعِ منحنى الاقترانِ معَ المحورِ $y$، هِيَ: $(0, 0)$
- النقطةُ $(-1, 5)$ هيَ نقطـةُ بدايةِ منحنى الاقترانِ، وتقعُ في الجانبِ نفسِـهِ الذي يقعُ فيهِ المقطـعُ $y$ منْ محورِ التماثُلِ (يسـارَ محورِ التماثلِ)، أمّا النقطـةُ $(4, 0)$ فهيَ نقطةُ نهايةِ منحنى الاقترانِ وتقعُ يمينَ محورِ التماثلِ.
- أُمثِّلُ الرأسَ والنقاطَ الثلاثَ في المسـتوى الإحداثيِّ، وأصلُ بينَها بمنحنًى متّصلٍ كما في الشكلِ المجاورِ.




مجـالُ هذا الاقترانِ هـوَ مجموعةُ قيـمِ $x$ الحقيقيّةُ حيثُ: $-1 \le x \le 4$؛ أي الفتـرةُ $[-1, 4]$، ومداهُ $-4 \le x \le 5$، أيِ الفترةُ $[-4, 5]$.

يظهرُ في الشكلِ أنَّ أصفارَ هذا الاقترانِ هي: 0, 4

**أتحقق من فهمي** أُمثِّلُ بيانيًّا كلَّ اقترانٍ ممّا يأتي، مُحدِّدًا مجالَهُ ومداهُ:

a) $f(x) = 2x^3 - 16, -3 \le x \le 3$ أنظر الهامش.

b) $f(x) = -0.5x^2 + 3x + 3.5, -3 \le x \le 9$

**أتذكّر**

مُعادلـةُ محـورِ التَّماثُلِ لمنحنى الاقترانِ التربيعيِّ $f(x) = ax^2 + bx + c$، حيثُ $a \ne 0$ هي:

$$x = -\frac{b}{2a}$$

وإحداثيّا رأسِهِ هما: $\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$.

**أُفكِّرُ**

مـا الفـرقُ بيـنَ الفترةِ $[-4, 5]$ والفتـرةِ $(-4, 5)$؟

### جمعُ كثيراتِ الحدودِ

لجمعِ كثيراتِ الحدودِ، أُجمِّعُ الحدودَ المتشابهةَ التي لها الدرجةُ نفسُها، وأجمعُ معاملاتِها.

**مثال 3**

إذا كانَ $f(x) = 2x^2 - 5x^3 + 4x - 9, g(x) = 7x^3 + 6x + 4$، فأَجِدُ $f(x) + g(x)$.

$f(x)+g(x) = (2x^2 - 5x^3 + 4x - 9) + (7x^3 + 6x + 4)$ بتعويضِ $f(x)$، وَ $g(x)$

$= 2x^2 + (-5x^3 + 7x^3) + (4x + 6x) + (-9 + 4)$ بتجميعِ الحدودِ المتشابهةِ

$= 2x^2 + 2x^3 + 10x - 5$ بجمعِ المعاملاتِ

$= 2x^3 + 2x^2 + 10x - 5$ بكتابةِ الناتجِ بالصورةِ القياسيةِ



## تنويع التعليم:

أطلب إلى الطلبة من ذوي المســتوى فوق المتوسط كتابة كثيري حدود $f(x), g(x)$، بحيث إنَّ:

**a)** درجة $(f(x) + g(x))$ أصغر من درجة $f(x)$.

**b)** درجة $(f(x) + g(x))$ تساوي درجة $f(x)$.

**c)** درجة $(f(x) + g(x))$ أكبر من درجة $f(x)$.

ثم أطلــب إليهم كتابــة ملاحظاتهم علــى درجة مجموع اقترانين كثيري حدود.

## إجابة سؤال بند (أتحقق من فهمي):

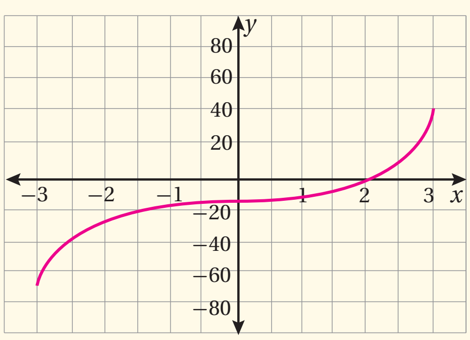
**a)**

| $x$ | $-3$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ | $3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y = f(x)$ | $-70$ | $-32$ | $-18$ | $-16$ | $-14$ | $0$ | $38$ |

المجال: $-3 \le x \le 3$

المدى: $-70 \le y \le 38$

له صفر واحد هو: 2



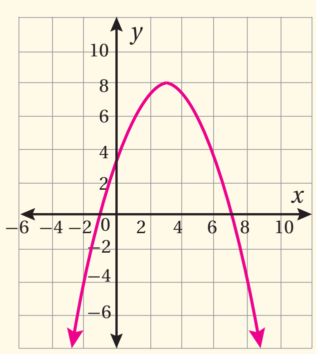

**b)**

| $x$ | $-2$ | $-1$ | $1$ | $3$ | $7$ | $8$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y = f(x)$ | $-4.5$ | $0$ | $6$ | $8$ | $0$ | $-4.5$ |

المجال: جميع الأعداد الحقيقية.

المدى: الأعداد الحقيقية التي لا تزيد على 8؛ أي $y \le 8$ ، أو الفترة $(-\infty, 8]$.

له صفران، هما: $-1$، و 7



## المثالان 3 و 4

- أُناقِش الطلبة في حـل المثالين 3 و 4، مُوضِّحًا جمع كثيري حـدود بالطريقـة الأفقية بتجميـع الحدود المتشابهة التي لها الدرجة نفسها ثم جمع معاملاتها، والطريقة العمودية بترتيب الحدود المتشـابهة تحت بعضها، ثم جمع معاملاتهـا. بعد ذلك أُنبِّههم إلى أنَّ المتغير يبقى كما هو بدرجته نفسـها في الجمع وفي الطرح.

## مثال إضافي

- إذا كان $f(x)=12x+1-2x^2, h(x)=6x^2+4x+12$، فأجد كلًّا ممّا يأتي:

**a)** $f(x)+h(x)$ $4x^2+16x+13$

**b)** $h(x)-f(x)$ $8x^2-8x+11$

---

أتحقق من فهمي أنظر الهامش.

إذا كانَ $f(x)=3x^2+8x^3+2x+13, g(x)=-4x^3+6x^2-5$، فأَجِدُ $f(x)+g(x)$.

**أتعلَّمُ**

النظيرُ الجمعيُّ للاقترانِ $f(x)$ هوَ $-f(x)$، وينتجُ مِنْ عكسِ إشاراتِ معاملاتِ حدودِ $f(x)$.

### طرحُ كثيراتِ الحدودِ

لإيجادِ ناتجِ طرحِ اقترانيْنِ، أُحوِّلُ عمليةَ الطرحِ إلى جمعِ النظيرِ الجمعيِّ للمطروحِ، ثمَّ أجمعُ كما في المثالِ السابقِ.

يُمكِنُنِي أنْ أجِدَ ناتجَ جمعِ اقترانيْنِ باستعمالِ الطريقةِ العموديةِ، وذلكَ بترتيبِ الحدودِ المتشابهةِ بعضِها تحتَ بعضٍ، ثمَّ جمعِ المعاملاتِ.

**مثال 4**

إذا كانَ $f(x)=2x^2-5x-3, g(x)=6x-7x^2-8$، فأَجِدُ $f(x)-g(x)$.

$f(x)-g(x)=2x^2-5x-3-(+6x-7x^2-8)$ بتعويضِ $f(x)$، وَ $g(x)$

$=2x^2-5x-3+(-6x+7x^2+8)$ بتغييرِ الطرحِ إلى جمعٍ، وتغييرِ إشاراتِ المطروحِ

بترتيبِ الحدودِ المتشابهةِ بعضِها تحتَ بعضٍ

$$\begin{array}{r} 2x^2-5x-3 \\ +\,7x^2-6x+8 \\ \hline 9x^2-11x+5 \end{array}$$

بجمعِ المعاملاتِ

أتحقق من فهمي أنظر الهامش.

إذا كانَ $f(x)=5x^3-12x^2+3x+20, g(x)=x^3+6x^2-14$، فأَجِدُ $g(x)-f(x)$.

### ضربُ كثيراتِ الحدودِ

لضربِ كثيراتِ الحدودِ، أستعملُ خاصيةَ توزيعِ الضربِ على الجمعِ. يُمكِنُنِي أيضًا استعمالُ الطريقةِ العموديةِ.



---

**إجابة سؤال بند (أتحقق من فهمي 3):**

$f(x)+g(x)=4x^3+9x^2+2x+8$

**إجابة سؤال بند (أتحقق من فهمي 4):**

$g(x)-f(x)=-4x^3+18x^2-3x-34$

### مثال 5

أَجِدُ ناتجَ ضربِ $f(x) \,.\, g(x)$ في كلٍّ ممّا يأتي:

**1** $f(x) = 3x^3 , g(x) = 2x^2 - 5x - 4$

| | |
|---|---|
| $f(x).g(x) = 3x^3\,(2x^2 - 5x - 4)$ | بتعويضِ $f(x)$، وَ $g(x)$ |
| $= 3x^3(2x^2) + 3x^3\,(-5x) + 3x^3(-4)$ | بتوزيعِ الضربِ على الجمعِ |
| $= (3\times2)(x^3.x^2) + (3\times-5)(x^3.x) + (3\times-4)x^3$ | خاصيةُ التجميعِ |
| $= 6x^5 - 15x^4 - 12x^3$ | بالتبسيطِ |

**2** $f(x) = 3x^4 - 5x^2 + x - 5, g(x) = 4x^2 - 7$

| | |
|---|---|
| $3x^4 - 5x^2 + x - 5$ | بترتيبِ الاقترانيْنِ عموديًّا |
| $(\times)\; 4x^2 - 7$ | |
| $12x^6 - 20x^4 + 4x^3 - 20x^2$ | بضربِ $4x^2$ في حدودِ $f$ |
| $(+)\quad -21x^4 \quad + 35x^2 - 7x + 35$ | بضربِ $-7$ في حدودِ $f$ |
| $12x^6 - 41x^4 + 4x^3 + 15x^2 - 7x + 35$ | بجمعِ الحدودِ المتشابهةِ |

**أتذكَّرُ**

أُطبِّقُ قاعدةَ ضربِ القوى عندَ ضربِ الحدودِ الجبريةِ:

$a^m \times a^n = a^{m+n}$

**أتحقق من فهمي**

أَجِدُ ناتجَ ضربِ $f(x) \,.\, g(x)$ في كلٍّ ممّا يأتي: أنظر الهامش.

a) $f(x) = 5x^2 + 4, g(x) = 7x + 6$

b) $f(x) = 2x^3 + x - 8, g(x) = 5x^2 + 4x$

**تطبيقٌ فيزيائيٌّ: اقترانُ الموقعِ**

إذا تحرّكَ جسمٌ في مسارٍ مستقيمٍ وعبّرْنا عنْ موقعِهِ المتغيِّرِ على ذلكَ المسارِ بالإحداثيِّ $(s)$ للنقطةِ التي يكونُ عندَها الجسمُ، فإنّنا نحصلُ على اقترانٍ يربطُ موقعَ الجسمِ $s(t)$ بالزمنِ $(t)$ يُسمّى اقترانَ الموقعِ (position function).



**إجابة سؤال بند (أتحقق من فهمي 5):**

a) $35x^3 + 30x^2 + 28x + 24$

b) $10x^5 + 8x^4 + 5x^3 - 36x^2 - 32x$

## مثال 5

- أُناقِش الطلبة في ضرب كثيرات الحدود بالطريقتين الأفقية والعمودية، مُذكِّرًا إيّاهم بجمع الأسس عند ضرب قوى لها الأساس نفسه، وأُشارِكهم في حل المثال.

## مثال إضافي

- أجد ناتج ضرب $f(y) \cdot g(y)$ إذا كان:

$f(y) = y^2 - 7y + 5 \,,\, f(y) = y^2 - y - 3$

$f(y) \cdot g(y) = y^4 - 8y^3 + 9y^2 + 16y - 15$

## تنويع التعليم:

أعرض طريقة ضرب كثيري حدود باستعمال جدول، وذلك بكتابة أحد الاقترانين فوق الجدول، وكتابة الآخر إلى يساره، ووضع نواتج ضرب الحدود داخل خلايا الجدول، ثم جمع النواتج داخل الجدول قطريًّا.

يُوضِّح الجدول التالي طريقة ضرب: $(2x^2 - 3x - 2)(x^2 + 4x + 3)$.

| | $x^2$ | $+4x$ | $+3$ |
|---|---|---|---|
| $2x^2$ | $2x^4$ | $+8x^3$ | $+6x^2$ |
| $-3x$ | $-3x^3$ | $-12x^2$ | $-9x$ |
| $-2$ | $-2x^2$ | $-8x$ | $-6$ |

$(2x^2 - 3x - 2)(x^2 + 4x + 3)$

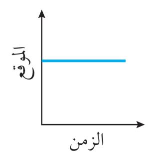
$= 2x^4 + (+8x^3 - 3x^3) + (+6x^2 - 12x^2 - 2x^2) + (-9x - 8x) + (-6)$

$= 2x^4 + 5x^3 - 8x^2 - 17x - 6$

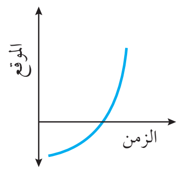
## مثال 6

- أُناقِش الطلبة في مفهوم اقتران الموقع، وكيفية تحديد الموقع في لحظة ما، وإيجــاد الوقت الذي يكون فيه الجسم في موقع معلوم، ثم أُشارِكهم في حل فقرات المثال.

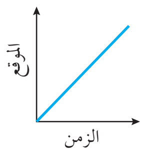
إذا كانتْ ســرعةُ الجســمِ ثابتةً فإنَّ اقترانَ الموقعِ يكونُ خطيًّا (منحناهُ مستقيمٌ)، أمّا إذا كانتْ ســرعتُهُ ليســتْ ثابتةً فإنَّ اقترانَ الموقعِ لا يكونُ خطيًّا، فقدْ يكونُ كثيرَ حــدودٍ مثلًا أو اقترانًا دائريًّا. ويعني وجودُ قيمةٍ ســالبةٍ لاقترانِ الموقعِ عندَ لحظةٍ ما أنَّ الجسمَ يقعُ في الجهةِ السالبةِ منْ نقطةِ الأصلِ عندَ تلكَ اللّحظةِ.



جسمٌ لا يتحرّكُ



جسمٌ يتحرّكُ بسرعةٍ غيرِ ثابتةٍ



جسمٌ يتحرّكُ بسرعةٍ ثابتةٍ

**أتعلّمْ**

إذا كانَ منحنــى اقترانِ الموقعِ-الزمــنِ ليــس مســتقيمًا فــإنَّ ذلكَ لا ينفي أنَّ الجســمَ يتحرّكُ في مسارٍ مستقيمٍ، ذلكَ أنّ المنحنــى لا يمثــلُ المســارَ الــذي يتحرّكُ عليهِ الجسمُ، بلْ إزاحتَهُ عنْ نقطةِ الأصــلِ التي تتغيّرُ بمرورِ الزمنِ.

### مثال 6

**يمثـلُ الاقتـرانُ $s(t) = 3t^2 - 24t + 36$ موقعَ جسـمٍ يتحرّكُ في مسـارٍ مسـتقيمٍ، حيثُ $s$ موقعُ الجسـمِ بالأمتارِ بعـدَ $t$ ثانيةً.**

**1 أحدّدُ موقعَ الجسمِ لحظةَ بدءِ الحركةِ.**

بدأَ الجســمُ الحركةَ عندَ $t = 0$، ولتحديدِ موقعِهِ عندَ تلــكَ اللحظةِ أعوّضُ $t = 0$ في اقترانِ الموقعِ كما يأتي:

$s(t) = 3t^2 - 24t + 36$ اقترانُ الموقعِ

$s(0) = 3(0)^2 - 24(0) + 36$ بتعويضِ $t = 0$

$= 36$ بالتبسيطِ

إذنْ، موقعُ الجسمِ لحظةَ بدءِ الحركةِ يساوي 36 m في الجهةِ الموجبةِ منْ نقطةِ الأصلِ.

**2 أحدّدُ موقعَ الجسمِ بعدَ 5 ثوانٍ منْ بدءِ الحركةِ.**

لتحديدِ موقعِ الجسمِ بعدَ 5 ثوانٍ منْ بدءِ الحركةِ أعوّضُ $t = 5$ في اقترانِ الموقعِ كما يأتي:

$s(t) = 3t^2 - 24t + 36$ اقترانُ الموقعِ

$s(5) = 3(5)^2 - 24(5) + 36$ بتعويضِ $t = 5$

$= -9$ بالتبسيطِ

إذنْ، موقعُ الجسمِ بعدَ 5 ثوانٍ منْ بدءِ الحركةِ يساوي 9 m في الجهةِ السالبةِ منْ نقطةِ الأصلِ.

**3** **متى يكونُ الجسمُ عندَ نقطةِ الأصلِ؟**

يكونُ الجسمُ عندَ نقطةِ الأصلِ عندَما تكونُ قيمةُ اقترانِ الموقعِ صفرًا. أحلُّ المعادلةَ $s(t) = 0$ لأحدّدَ قيمةَ $t$

| | |
|---|---|
| $3t^2 - 24t + 36 = 0$ | أكتبُ المعادلةَ |
| $t^2 - 8t + 12 = 0$ | بقسمةِ طرَفي المعادلةِ على 3 |
| $(t-2)(t-6) = 0$ | بالتحليلِ إلى العواملِ |
| $t-2 = 0 \quad \text{or} \quad t-6 = 0$ | خاصيةُ الضربِ الصفريِّ |
| $t = 2 \quad \text{or} \quad t = 6$ | بحلِّ كلِّ مُعادلةٍ |

إذنْ، يكونُ الجسمُ عندَ نقطةِ الأصلِ في لحظتيْنِ زمنيّتيْنِ هُما: بَعدَ ثانيتينِ وبعدَ 6 ثوانٍ منْ بدْءِ حركتِهِ.

**4** **هلْ يعودُ الجسمُ إلى النقطةِ التي بدأَ الحركةَ منْها؟**

حتّى يعودَ الجسمُ إلى النقطةِ التي بدأَ الحركةَ منها وهيَ 36 m في الجهةِ الموجبةِ منْ نقطةِ الأصلِ (كما أوجدْنا في الفرعِ الأوّلِ) يجبُ أنْ يكونَ للمعادلةِ $s(t) = 36$ حلٌّ واحدٌ (أوْ أكثرُ).

| | |
|---|---|
| $3t^2 - 24t + 36 = 36$ | أكتبُ المعادلةَ |
| $3t^2 - 24t = 0$ | بطرحِ 36 منْ كلا الطرفينِ |
| $t^2 - 8t = 0$ | بقسمةِ الطرفينِ على 3 |
| $t(t-8) = 0$ | بإخراجِ $t$ عاملًا مشتركًا |
| $t = 0 \quad \text{or} \quad t-8 = 0$ | خاصيةُ الضّربِ الصّفريِّ |
| $t = 0 \quad \text{or} \quad t = 8$ | بحلِّ كلِّ مُعادلةٍ |

الزمنُ $t = 0$ يعني لحظةَ بدءِ حركةِ الجسمِ، لذلكَ فإنَّ الجسمَ يعودُ إلى النقطةِ التي بدأَ منها الحركةَ مرّةً واحدةً فقطْ، وذلكَ بعدَ 8 ثوانٍ منْ بدْءِ حركتِهِ.

**أتحقق من فهمي**

**يمثّلُ الاقترانُ $s(t) = t^3 - 7t^2 + 10t$ موقعَ جسمٍ يتحرّكُ في مسارٍ مستقيمٍ، حيثُ $s$ موقعُ الجسمِ بالأمتارِ بعدَ $t$ ثانيةً.** أنظر الهامش.

a) أحدّدُ موقعَ الجسمِ لحظةَ بدءِ الحركةِ.

b) أحدّدُ موقعَ الجسمِ بعدَ 3 ثوانٍ منْ بدءِ الحركةِ.

c) متى يكونُ الجسمُ عندَ نقطةِ الأصلِ؟

d) هلْ يعودُ الجسمُ إلى النقطةِ التي بدأَ الحركةَ منها؟

15

**إجابة سؤال بند (أتحقق من فهمي 6):**

a) $t = 0 \Longrightarrow s(0) = 0$

إذن، موقع الجسم عند بدء حركته هو نقطة الأصل $s = 0$

b) $t = 3 \Longrightarrow s(3) = 3^3 - 7(3^2) + 10(3) = -6 \text{ m}$

c) $s(t) = 0 \Longrightarrow t^3 - 7t^2 + 10t = 0$

$t(t^2 - 7t + 10) = 0$

$t(t-2)(t-5) = 0 \Longrightarrow t = 0, t = 2, t = 5$

إذن، يكون الجسم عند نقطة الأصل لحظة بدء حركته؛ أيْ عندما $t = 0$، وأيضًا بعد ثانيتين من بدء حركته، وبعد 5 ثوانٍ من بدء حركته.

d) يبدأ الجسم حركته من نقطة الأصل $s = 0$، ويعود إليها بعد ثانيتين من بدء حركته، وبعد 5 ثوانٍ من بدء حركته.

## مثال إضافي

يتحرَّك جُسَيْم في مسار مستقيم، ويعطى موقعه $s$ (بالأمتار) بعد زمن قدره $t$ ثانية بالمعادلة الآتية:

$s(t) = t^3 - 6t^2 + 10t + 60$:

a) أُحدِّد موقع الجُسَيْم بعد 6 ثوانٍ من بدء الحركة.

120 m

b) أجد الزمن الذي يكون فيه موقع الجُسَيْم 68 m.

بعد 4 ثوانٍ من بدء الحركة.

c) هل يعود هذا الجُسَيْم إلى النقطة التي بدأ الحركة منها؟

لا، لا يعود إليها؛ لأنَّه لا يوجد حل للمعادلة: $t^3 - 6t^2 + 10t = 0$ سوى $t = 0$.

## 4 التدريب

- أُوجِّه الطلبة إلى قراءة الأسئلة في بند (**أتدرب وأحل المسائل**)، ثم أطلب إليهم حلها (يمكن الطلب إليهم حل الأسئلة ذات الأرقام الزوجية(18–2) ضمن مجموعات).
- إذا واجه بعض الطلبة صعوبة في حل أي مسألة، فأطلب إليهم مراجعة أمثلة الدرس.

### أخطاء مفاهيمية:

قد يظن بعض الطلبة أنَّ الاقتران في السؤال 2 كثير حدود بسبب إمكانية اختصار العامل $x$ من البسط والمقام، فيتحول إلى: $f(x) = 5x+2$؛ لذا نبِّههم إلى أنَّ القسمة لا تصح إلا إذا كان المقسوم عليه لا يساوي صفرًا. وإذا أرادوا كتابة هذا الاقتران بالصورة المختصرة: $f(x) = 5x + 2$، فيجب عليهم الإشارة عنده إلى أنَّ $x \neq 0$

### الواجب المنزلي:

- أطلب إلى الطلبة أنْ يحلوا في البيت جميع المسائل الواردة في الصفحة 8 من كتاب التمارين، مُحدِّدًا لهم المسائل التي يمكنهم حلها في نهاية كل حصة بحسب ما يُقدَّم من أمثلة الدرس وأفكاره.
- يمكن أيضًا إضافة المسائل التي لم يحلها الطلبة داخل غرفة الصف إلى الواجب البيتي.

---

### أتدرب وأحل المسائل

1 إلى 18 أنظر ملحق الإجابات.

أُحدِّدُ إذا كانَ كلٌّ ممّا يأتي كثيرَ حدودٍ أمْ لا. وفي حالِ كانَ كثيرَ حدودٍ أكتبُهُ بالصورةِ القياسيةِ، ثمَّ أُحدِّدُ المعاملَ الرئيسَ، والدرجةَ، والحدَّ الثابتَ:

1. $f(x) = 4 - x$
2. $g(x) = \dfrac{5x^2 + 2x}{x}$
3. $h(x) = 3x(4x-7) + 2x - 12$
4. $L(x) = 3x^2 + 5.3x^3 - 2x$
5. $j(t) = \sqrt{7}\, t - 16t^2$
6. $k(x) = 5x^{\frac{3}{2}} + 2x - 1$
7. $f(x) = 13(2)^x + 6$
8. $f(y) = y^3(4 - y^2)^2$

أُمثِّلُ كلَّ اقترانٍ ممّا يأتي بيانيًّا، مُحدِّدًا مجالَهُ ومداهُ:

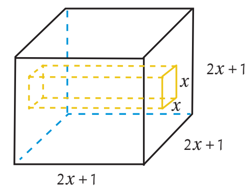
9. $f(x) = x^2 - 3x - 4,\ -1 \leq x \leq 5$
10. $f(x) = -4x^2 + 8x + 3,\ 0 \leq x \leq 3$
11. $y = 2x^3 - 6x + 4,\ -2 \leq x \leq 3$
12. $y = 3x^2 - x^3 + 9x - 4,\ -3 \leq x \leq 4$

إذا كانَ $f(x) = 2x+1,\ g(x) = 5x^2 - 2x^3 + 4,\ h(x) = x^4 - 5x^2 + 3x - 6$، فأَجِدُ كلًّا ممّا يأتي بالصورةِ القياسيةِ:

13. $h(x) + g(x)$
14. $g(x) - h(x)$
15. $f(x) \cdot h(x)$
16. $x(f(x)) + h(x)$
17. $(f(x))^2 - g(x)$
18. $h(x) - x(g(x))$

يُمثّلُ الاقترانُ $s(t) = t^3 - 3t^2 + 2t - 6$ موقعَ جسمٍ يتحرّكُ في مسارٍ مستقيمٍ، حيثُ $s$ موقعُ الجسمِ بالأمتارِ بعدَ $t$ ثانيةً.

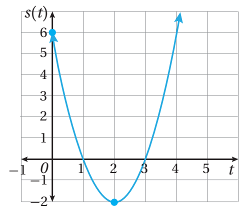
19. أحدّدُ موقعَ الجسمِ لحظةَ بدءِ الحركةِ. $-6$ m
20. أحدّدُ موقعَ الجسمِ بعدَ 4 ثوانٍ منْ بدءِ الحركةِ. 18 m
21. متى يكونُ الجسمُ عندَ نقطةِ الأصلِ؟ بعد 3 ثوانٍ من بدء الحركة.
22. هلْ يعودُ الجسمُ إلى النقطةِ التي بدأَ الحركةَ منها؟ نعـم، يعود إليها بعد ثانية واحدة من بدء الحركة، وبعد ثانيتين من بدء الحركة.




**23** **هندسةٌ:** مكعبٌ منَ الخشبِ، طولُ ضلعِهِ $(2x + 1)$ cm، حُفِرَ فيهِ تجويفٌ مقطعُهُ مُربَّعٌ، طولُ ضلعِهِ $x$ cm، وهوَ يمتدُّ منْ أحدِ الأوجهِ إلى الوجهِ المقابلِ. أكتبُ بالصورةِ القياسيةِ الاقترانَ الذي يُمثِّلُ حجمَ الجزءِ المُتبقّي منَ المكعبِ. أنظر ملحق الإجابات.

**24** أَحُلُّ المسألةَ الواردةَ في بدايةِ الدرسِ. أنظر ملحق الإجابات.

### مهارات التفكير العليا




**تبريرٌ: يظهرُ في الشكلِ المجاورِ منحنى اقترانِ الموقعِ لجسمٍ يتحركُ في مسارٍ مستقيمٍ، حيثُ $s$ الموقعُ بالأمتارِ و $t$ الزمنُ بالثواني. أستعملُ الشكلَ للإجابةِ عنِ الأسئلةِ الآتيةِ مبرِّرًا إجابتي:**

**25** ما الفترةُ (الفتراتُ) الزمنيّةُ التي يكونُ فيها الجسمُ في الجهةِ الموجبةِ منْ نقطةِ الأصلِ؟ $[0, 1) \cup (3, \infty)$

**26** أحدِّدُ الموقعَ الابتدائيَّ للجسمِ. 6 m

**27** ما أبعدُ موقعٍ للجسمِ عن نقطةِ الأصلِ وهو في الجهة السالبة منها؟ $-2$ m

28 إلى 30 أنظر ملحق الإجابات.

**28** **مسألةٌ مفتوحةٌ:** أكتبُ كثيريْ حدودٍ، أحدُهُما ذو حدَّيْنِ، والآخرُ ثلاثيُّ الحدودِ، بحيثُ يكونُ ناتجُ ضربِهِما اقترانًا ذا حدَّيْنِ.

**29** **تحدٍّ:** أَجِدُ أصفارَ الاقترانِ: $f(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$.

**30** **تبريرٌ:** إذا كانَ $f, g$ كثيريْ حدودٍ، فأكتبُ العلاقةَ بينَ درجةِ كلٍّ منْهُما ودرجةِ كثيرِ الحدودِ $h$ الناتجِ منْ جمعِهِما، وطرحِهِما، وضربِهِما، مُبرِّرًا إجابتي.



## مهارات التفكير العليا

- أُوجِّه الطلبة إلى قراءة الأسئلة في بند (**مهارات التفكير العليا**)، ثم أطلب إليهم حلها ضمن مجموعات ثنائية، وكتابة مُبرِّر للإجابة، وأمنحهم وقتًا كافيًا لنقد مُبرِّرات بعضهم.
- أُوجِّه أفراد المجموعات في أثناء حل السؤال 25 إلى كتابة أيِّ مقدار ذي حدين، ثم البحث عن مقدار ثلاثي الحدود؛ شرط أنْ تكون 4 من نواتج الضرب متناظرة بالنسبة إلى عملية الجمع، فيكون مجموعها صفرًا، ويبقى حدان من ناتج ضرب المقدارين.
- أُوجِّه أفراد المجموعات في أثناء حل السؤال 26 إلى البحث عن طريقة لتحليل مقدار ذي 4 حدود.

## 5 الإثراء

- أطرح على الطلبة المسألة الآتية:

### نظرية الأعداد:

يعطى مجموع مربعات أول $n$ من الأعداد الطبيعية بالاقتران:

$$F(n) = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$$

**a)** أجد قيمة $F(5), F(10)$

**b)** أَصِف ما تُمثِّله كلٌّ من القيمتين في الفقرة $a$.

**c)** أجد مجموع: $1 + 4 + 9 + 16 + \dots + 400$

## 6 الختام

- أطلب إلى الطلبة وصف طرائق مختلفة لتصنيف كثيرات الحدود، ثم إعداد قائمة تتضمَّن ما يجب مراعاته عند جمع كثيرات الحدود وطرحها وضربها.

### تعليمات المشروع:

- أطلب إلى الطلبة اختيار متغيرين من الحياة اليومية، والبدء بجمع البيانات حولهما.
- أُذكِّر الطلبة بضرورة تدوين قيمة المتغير الأول (المستقل) مع قيمة المتغير الثاني (التابع) المناظرة لها، وذلك في العمود المقابل لها في الجدول، مُوضِّحًا معنى المتغير المستقل والمتغير التابع.

# الدرس 2

## قسمةُ كثيراتِ الحدودِ والاقتراناتُ النسبيةُ
## Dividing Polynomials and Rational Functions

**فكرةُ الدرسِ** إيجادُ ناتجِ قسمةِ اقترانٍ كثيرِ الحدودِ على آخرَ، وتعرُّفُ الاقتراناتِ النسبيةِ، وإيجادُ مجالِها، ومداها، وتمثيلُها بيانيًّا.

**المصطلحاتُ** الاقترانُ المقلوبُ، الاقترانُ النسبيُّ، خطُّ التقاربِ الأفقيِّ، خطُّ التقاربِ الرأسيِّ.

**مسألةُ اليومِ** بركةُ سباحةٍ على شكلِ متوازي مستطيلاتٍ، حجمُها $3x^4-3x^3-33x^2+54x$ وحدةً مكعبةً، ومِساحةُ قاعدتِها $3x^2-6x$؛ أجدُ ارتفاعَها.

إنَّ قسمةَ كثيرِ حدودٍ على آخرَ تُشبِهُ كثيرًا عمليةَ قسمةِ عددٍ كليٍّ على آخرَ؛ إذْ تُتَّبَعُ الخطواتُ نفسُها في كلتا الحالتيْنِ. يُمكِنُ قسمةُ كثيرِ الحدودِ $f(x)$ على كثيرِ الحدودِ $h(x) \neq 0$ إذا كانَتْ درجةُ $f(x)$ أكبرَ منْ أوْ تساوي درجةَ $h(x)$. لقسمةِ كثيرِ حدودٍ على آخرَ، أكتبُ المقسومَ والمقسومَ عليْهِ بالصورةِ القياسيةِ. وإذا كانَتْ إحدى قوى المُتغيِّرِ في المقسومِ مفقودةً، فإنّي أُضيفُها في موقعِها، وأكتبُ معاملَها 0، ثمَّ أُنفِّذُ خطواتِ القسمةِ كما في المثالِ الآتي.

**مثال 1**

**أَجِدُ ناتجَ قسمةِ $f(x) = 2x^3 + 24x - 15$ على $g(x) = x + 5$، وباقيَها.**

$$
\begin{array}{r l}
 2x^2 - 10x + 74 & \text{بقسمةِ } 2x^3 \text{ على } x\text{، وكتابةِ النتيجةِ } 2x^2 \text{ فوقَ الحدِّ المشابهِ} \\
x+5\,\big)\;2x^3 + 0x^2 + 24x - 15 & \\
(-)\;2x^3 + 10x^2 \qquad\qquad & \text{بضربِ المقسومِ عليْهِ } (x+5) \text{ في } 2x^2 \\
-10x^2 + 24x \qquad & \text{بالطرحِ، وإضافةِ الحدِّ } (24x) \\
(-)\;-10x^2 - 50x \qquad & \text{بقسمةِ } -10x^2 \text{ على } x\text{، وكتابةِ النتيجةِ } -10x \text{ فوقَ الحدِّ المشابهِ، ثمَّ ضربِ المقسومِ عليْهِ } (x+5) \text{ في } -10x \\
74x - 15 & \text{بالطرحِ، وإضافةِ الحدِّ } (-15) \\
(-)\;74x + 370 & \text{بقسمةِ } 74x \text{ على } x\text{، وكتابةِ النتيجةِ } 74 \text{ فوقَ الحدِّ الثابتِ، وضربِ المقسومِ عليْهِ } (x+5) \text{ في } 74 \\
-385 & \text{بالطرحِ}
\end{array}
$$

**إرشادٌ**
تتوقفُ عمليةُ قسمةِ كثيراتِ الحدودِ عندما تصبحُ درجةُ باقي القسمةِ أقلَّ منْ درجةِ المقسومِ عليهِ.



# الدرس 2

## نتاجات الدرس

- قسمة اقتران كثير حدود على كثير حدود آخر.
- تعرُّف الاقترانات النسبية، وإيجاد مجالها ومداها.
- إيجاد خطوط التقارب (إنْ وُجِدت) لمنحنى الاقتران النسبي.
- تمثيل اقترانات نسبية بيانيًّا.
- حل مسائل حياتية عن قسمة الاقترانات والاقترانات النسبية.

## التعلُّم القبلي:

- قسمة القوى وتبسيط مقادير جبرية كسرية.
- تحليل مقادير جبرية إلى عواملها.
- حل معادلات خطية وتربيعية.

## 1 التهيئة

- أُراجِع الطلبة في قوانين الأسس، ثم أطلب إليهم تبسيط ما يأتي:

$$x^5 \div x^2 \qquad \frac{6x^3}{2x} \qquad \frac{12x^4}{4x^2} \qquad \frac{6x^3+8x^2}{2x^2}$$

» أطلب إلى الطلبة حل المعادلات الآتية:

a) $3x - 2 = 10$

b) $2 - 4x = 0$

c) $x^2 - 6x + 9 = 0$

d) $3x^2 - 5x + 2 = 0$

ملاحظات المُعلِّم/ المُعلِّمة

## 2 الاستكشاف

- أُوجِّه الطلبة إلى قراءة المسألة في بند (**مسألة اليوم**)، ثم أسألهم:
  » ما متوازي المستطيلات؟ مجسم ثلاثي الأبعاد ذو 6 أوجه مستطيلة الشكل، وأوجهه المتقابلة متوازية ومتطابقة، وأوجهه المتجاورة متعامدة.
  » أذكر بعض الأمثلة على متوازي المستطيلات. غرفة الصف، الكتاب، علبة المناديل، صندوق الشاحنة.
  » كيف أجد حجمه؟ بضرب طوله في عرضه في ارتفاعه، أو بضرب مساحة قاعدته في ارتفاعه.
  » إذا علم حجم متوازي مستطيلات وطول اثنين من أبعاده، فكيف أجد بعده الثالث؟ بقسمة الحجم على ناتج ضرب البعدين المعلومين.
- أستمع لإجابات الطلبة من دون تقديم تغذية راجعة لهم.

## 3 التدريس

- أطلب إلى الطلبة استعمال القسمة الطويلة لإيجاد ناتج: $695 \div 21$
- أُوضِّح لهم أنَّه يتعيَّن اتباع الخطوات نفسها عند قسمة $6x^2 +9x +5$ على $2x + 1$
- أسألهم:
  » كيف يمكن قسمة $9x^2 + 9x + 2$ على $3x + 2$ باستعمال قسمة الأعداد الكلية؟

### مثال 1

- أُناقِش الطلبة في خطوات قسمة كثير حدود على كثير حدود آخر باستعمال القسمة الطويلة المعروضة في المثال، وأُنبِّههم إلى أنَّه يجب كتابة المقسوم والمقسوم عليه بالصورة القياسية وإضافة 0 في موقع أيِّ قوة مفقودة في أيٍّ منهما.

### مثال إضافي

- أجد ناتج قسمة $f(x) = 6x^3 - 3x^2 +23$ على $h(x) = 2x + 3$ وباقيها.

الناتج: $3x^2 -6x +9$، والباقي $-4$

### التقويم التكويني:

- أُوجِّه الطلبة إلى حل التدريب في بند (**أتحقق من فهمي**) بعد كل مثال.
- أختار بعض الإجابات التي تحوي أخطاء مفاهيمية، ثم أُناقِشها على اللوح، ولا أذكر اسم الطالب الذي أخطأ في الإجابة؛ تجنبًا لإحراجه.

### أخطاء مفاهيمية:

قد يغفل بعض الطلبة عن كتابة المقسوم والمقسوم عليه بالصورة القياسية، أو وضع 0 في موقع أيِّ قوة مفقودة؛ لذا أُؤكِّد هذين الأمرين لتجنب الوقوع في الخطأ.

## تنويع التعليم:

إذا واجه الطلبة من ذوي المســتوى دون المتوسط صعوبة في الحفاظ على تركيزهم في أثناء تنفيذ الخطوات المتتابعة للقسمة الطويلة، فأُحفِّزهم على مقارنة نتيجة كل خطوة مع زملائهم، وبذلك يمكنهم طرح الأسئلة واكتشاف الأخطاء قبل الانتهاء من حل المسألة.



إذنْ، ناتجُ القسمةِ هوَ: $2x^2 - 10x + 74$، والباقي $-385$، ويُمكِنُ كتابةُ ذلكَ كما يأتي:

$$\frac{2x^3 + 24x - 15}{x + 5} = 2x^2 - 10x + 74 + \frac{-385}{x + 5},\ x \neq -5$$

**أتحقَّقُ منْ صحَّةِ الحلِّ:**

$$\begin{aligned}(x+5)(2x^2-10x+74)+(-385) &= 2x^3-10x^2 + 74x + 10x^2 - 50x + 370 - 385\\ &= 2x^3 + (-10+10)x^2 + (74-50)x - 15\\ &= 2x^3 + 24x - 15 \ ✓\end{aligned}$$

**أتذكَّر**

يُمكِنُ التحقُّقُ منْ صحَّةِ القسـمةِ بضربِ الناتجِ فـي المقسـومِ عليْـهِ، وإضافـةِ الباقـي. فإذا كانَتِ النتيجةُ مسـاويةً للمقسـومِ كانَ الحـلُّ صحيحًا.

**أتحقق من فهمي**

**أَجِدُ ناتجَ قسمةِ $f(x) = 4x^4 - 7x^3 + 12x - 25$ على $h(x) = x - 4$ وباقِيها.** أنظر الهامش.

ألاحظُ في المثالِ السابقِ أنَّ درجةَ ناتجِ القسمةِ ($2x^2 - 10x + 74$) مساويةٌ للفرقِ بينَ درجتَي المقسومِ ($2x^3 + 24x - 15$) والمقسومِ عليهِ ($x+5$)، وهذا يقودُ إلى النتيجةِ الآتيةِ.

**نتيجةٌ**

عنـدَ قسـمةِ كثيـرِ حـدودٍ علـى كثيـرِ حـدودٍ آخـرَ تكـونُ درجـةُ ناتـجِ القسـمةِ مسـاويةً للفـرقِ بيـنَ درجتَـي المقسـومِ والمقسـومِ عليـهِ.

**الاقتراناتُ النسبيةُ** (rational functions) هي اقتراناتٌ يُمكِنُ كتابتُها بصورةِ نسبةٍ بينَ كثيريْ حدودٍ، مثلُ $\frac{f(x)}{g(x)}$ ؛ شرطَ أنْ: $g(x) \neq 0$ . ومنَ الأمثلةِ عليْها:

$$y = \frac{x+4}{2x^3 - 5x^2 - 3x} \quad , \quad h(x) = \frac{x+2}{x^2 - 9} \quad , \quad q(x) = \frac{1}{x}$$

مجالُ الاقترانِ النسـبيِّ هو مجموعةُ الأعدادِ الحقيقيةِ باسـتثناءِ الأعـدادِ التي تجعلُ المقامَ يساوي صفرًا (أصفار المقام).

### مثال 2

**أَجِدُ مجالَ كلِّ اقترانٍ نسبيٍّ ممَّا يأتي:**

1) $q(x) = \frac{x+2}{x^2 - 9}$

مجالُ هذا الاقترانِ هوَ جميعُ الأعدادِ الحقيقيةِ باستثناءِ قيمِ $x$ التي تجعلُ $x^2 - 9 = 0$

$x^2 = 9$ بإضافةِ 9 إلى الطرفيْنِ

$x = \pm 3$ بأخذِ الجذرِ التربيعيِّ للطرفيْنِ

**أتذكَّر**

يُمكِنُ اسـتعمالُ قاعدةِ تحليلِ الفرقِ بينَ مُربَّعيْنِ لتحليلِ $x^2 - 9 = 0$



### إجابة سؤال بند (أتحقق من فهمي 1):

الناتج:

$4x^3 + 9x^2 + 36x + 156$ ، والباقي: 599

### مثال 2

- أُناقِش الطلبة في مفهوم الاقتران النسبي، وأذكر أمثلة عليه، مُوضِّحًا أنَّه لا يوجد للاقتران النسبي قيمة عندما يكون مقامه صفرًا؛ لأنَّ القسمة على الصفر غير معرفة، ولذلك يكون مجاله جميع الأعداد الحقيقية باستثناء أصفار مقامه. بعد ذلك أُشارِك الطلبة في حل المثال 2 الذي يُبيِّن كيفية تعيين مجال الاقتران النسبي.

### مثال إضافي

- أجد مجال كلٍّ ممّا يأتي:

a) $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ $\{x | x \neq 2\}$

b) $g(x) = \frac{3}{x^2 - 16}$ $\{x | x \neq -4, x \neq 4\}$

c) $h(x) = \frac{2x - 6}{x^2 + 25}$ جميع الأعداد الحقيقية

إذنْ، مجالُ هذا الاقترانِ هوَ جميعُ الأعدادِ الحقيقيةِ باستثناءِ $3$, $-3$، ويُكتَبُ كمجموعةٍ على الصورة الآتيةِ: $\{x \mid x \neq \pm 3\}$

**2** $y = \dfrac{x+4}{2x^3 - 5x^2 - 3x}$

مجالُ هذا الاقترانِ هوَ جميعُ الأعدادِ الحقيقيةِ باستثناءِ قيمِ $x$ التي تجعلُ $2x^3 - 5x^2 - 3x = 0$

| | |
|---|---|
| بإخراجِ $x$ عاملٍ مشتركٍ | $x(2x^2 - 5x - 3) = 0$ |
| بتحليلِ العبارةِ التربيعيةِ | $x(2x+1)(x-3) = 0$ |
| خاصيةُ الضربِ الصفريِّ | $x = 0 \ , \ 2x+1 = 0 \ , \ x-3 = 0$ |
| بحلِّ المعادلاتِ | $x = 0, x = \frac{-1}{2}, x = 3$ |

إذنْ، مجالُ هذا الاقترانِ هوَ جميعُ الأعدادِ الحقيقيةِ باستثناءِ $0, 3, \frac{-1}{2}$، أوْ $\{x \mid x \neq 0, x \neq 3, x \neq \frac{-1}{2}\}$

**أُفكِّرُ**

هلْ مجالُ الاقترانِ $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x+3}$ يساوي مجالَ الاقترانِ $g(x) = x - 3$؟

**أتحقق من فهمي**

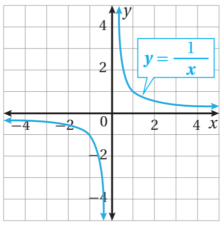
**أجِدُ مجالَ كلِّ اقترانٍ نسبيٍّ ممّا يأتي:** أنظر الهامش.

a) $h(x) = \dfrac{x^3 + 8}{x^2 - 5x + 6}$ b) $y = \dfrac{x^2 - 4}{6x - 3x^2}$

معظمُ الاقتراناتِ النسبيّةِ منحنياتُها غيرُ متّصلةٍ، بمعنى: أنها تحتوي قفزاتٍ أوْ انقطاعاتٍ أو ثقوبٍ، ويحدثُ ذلكَ عندَ أصفارِ المقامِ.

أحدُ المواقعِ التي لا يكونُ عندَها منحنى الاقترانِ متّصلًا هوَ **خطُّ التقاربِ** (asymptote)؛ وهوَ مستقيمٌ يقتربُ منهُ منحنى الاقترانِ كُلّما ازدادتْ القيمةُ المطلقةُ لأحدِ المتغيّرينِ $x$ أو $y$.

في الشكلِ المجاورِ كلٌّ منَ المحورِ $x$ والمحورِ $y$ هوَ خطُّ تقاربٍ لمنحنى الاقترانِ $y = \frac{1}{x}$، وألاحظُ أنَّ مُنحنى الاقترانِ يقتربُ كثيرًا منْ خطَّيِ التقاربِ، لكنّهُ لا يلمسُهما.




**أتعلّمُ**

يُسمّى الاقترانُ $f(x) = \frac{1}{x}$ اقترانَ المقلوبِ وهوَ أبسطُ الاقتراناتِ النسبيّةِ، ومنهُ تتولّدُ اقتراناتٌ نسبيةٌ كثيرةٌ.



## تعزيز اللغة ودعمها:

أُكرِّر المصطلحات الرياضية المستخدمة في الدرس باللغتين العربية والإنجليزية، مُحفِّزًا الطلبة على استعمالها، مثل: الاقتران النسبي rational function، واقتران المقلوب reciprocal function، وخط التقارب الرأسي vertical asymptote، وخط التقارب الأفقي horizontal asymptote.

## اقتران المقلوب

أُناقِش الطلبة في تمثيل الاقترانات النسبية بيانيًّا، مُوضِّحًا لهم مفهوم خطوط التقارب الرأسية والأفقية، وكيفية إيجادها، ثم أُناقِشهم في خصائص اقتران المقلوب.

### إجابة سؤال بند (أتحقق من فهمي 2):

**a)** مجال $h(x)$ هو جميع الأعداد الحقيقية باستثناء 2 و3؛ أيْ $\{x \mid x \neq 2, x \neq 3\}$.

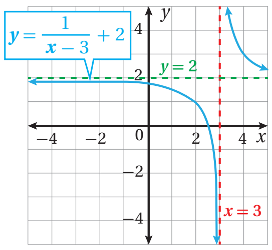
**b)** مجال هذا الاقتران هو جميع الأعداد الحقيقية باستثناء 0 و2 ؛ أيْ $\{x \mid x \neq 0, x \neq 2\}$.

## مثال 3

- أُوضِّح مفهــوم خطوط التقــارب وكيفيــة إيجادها لاقترانات نســبية بسيطة مقامها خطي، وأُشارِك الطلبة في حل فرعي المثال.



بالنّظرِ إلــى مُنحنى الاقترانِ $y = \frac{1}{(x-3)} + 2$ في الشكلِ المجاورِ ألاحظُ وجودَ خطِّ تقاربٍ رأسيٍّ عنــدَ صفرِ المقامِ $x = 3$ وخطِّ تقــاربٍ أُفقيٍّ عندَ $y = 2$، ويقودُنا ذلكَ إلــى القاعدةِ الآتيةِ لتحديدِ خطوطِ التقاربِ الرأسيّةِ والأفقيّةِ.




**خطوطُ التّقارُبِ الرأسيّةِ والأفقيّةِ**

**مفهومٌ أساسيٌّ**

**خطُّ التقاربِ الرأسيِّ:** يكونُ للاقترانِ النسبيِّ الذي على صورةِ $f(x) = \frac{a}{(x-b)} + c$ خطُّ تقاربٍ رأسيٍّ عندَ صفرِ المقامِ هوَ المستقيمُ $x = b$

**خطُّ التقاربِ الأفقيِّ:** يكونُ للاقترانِ النسبيِّ الذي علــى صورةِ $f(x) = \frac{a}{(x-b)} + c$ خطُّ تقاربٍ أفقيٍّ هوَ المستقيمُ $y = c$

### مثال 3

أجدُ خطوطَ التقاربِ لكلِّ اقترانٍ ممّا يأتي:

1) $f(x) = \frac{2}{x-3} + 5$

بمقارنةِ هذا الاقترانِ معَ الصيغةِ $f(x) = \frac{a}{(x-b)} + c$؛ ألاحظُ أنَّ $c = 5$ و $b = 3$

إذنْ، خطُّ التقاربِ الرأسيِّ هوَ المستقيمُ $x = 3$، وخطُّ التقاربِ الأفقيِّ هوَ المستقيمُ $y = 5$

2) $g(x) = \frac{7x}{x+4}$

قاعــدةُ هذا الاقترانِ تختلفُ ظاهريًّــا عنِ الصيغةِ $f(x) = \frac{1}{(x-b)} + c$، لكنّهُما متشــابهتانِ، ويمكنُ تحويلُ قاعدةِ الاقترانِ إلى الصيغةِ الأُخرى بقســمةِ البســطِ على المقامِ باســتعمالِ القسمةِ الطويلةِ كما يظهرُ جانبًا.

$$\begin{array}{r} 7 \\ x+4 \overline{) \; 7x \qquad} \\ (-)\; 7x + 28 \\ \hline -28 \end{array}$$

إذنْ، $g(x) = 7 - \frac{28}{x+4}$

بمقارنةِ هذا الاقترانِ معَ الصيغةِ $f(x) = \frac{a}{(x-b)} + c$؛ ألاحظُ أنَّ $c = 7$ و $b = -4$

إذنْ، خطُّ التقاربِ الرأسيِّ هوَ المستقيمُ $x = -4$، وخطُّ التقاربِ الأفقيِّ هوَ المستقيمُ $y = 7$



## إرشادات للمُعلِّم/ للمُعلِّمة

أُبيِّن للطلبة أنَّــه يوجد للاقتران النســبي $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ خط تقارب أفقي واحد على الأكثر. فإذا كانت درجة البســط أكبر من درجة المقام فلا يوجد خط تقارب أفقي، وإذا تســاوت درجتا البســط والمقام فــإنَّ خط التقارب الأفقي يكون المســتقيم $y = \frac{a_n}{b_n}$، حيث $a_n$ المعامل الرئيس للبســط، و $b_n$ المعامل الرئيس للمقام. وإذا كانت درجة البسط أصغر من درجة المقام كان خط التقارب الأفقي هو المستقيم $y = 0$.

أُبيِّن لهم أيضًا أنَّه قد يوجد للاقتران النسبي الذي ليس لبسطه ومقامه عوامل مشــتركة عِدَّة خطوط تقارب رأســية تبعًا لأصفار مقامه، وأنَّه قد لا يوجد له خطوط تقارب رأســية إذا لم يكــن لمقامه أصفار، وأنَّــه لا يمكن أنْ يقطع منحناه خط التقارب الرأسي.

## أتحقق من فهمي

أجدُ خطوطَ التقاربِ لكلِّ اقترانٍ ممّا يأتي: أنظر الهامش.

a) $f(x) = 2 + \frac{9}{x+1}$　b) $h(x) = \frac{1}{x} - 3$　c) $j(x) = \frac{4x+11}{x-5}$

لتمثيلِ الاقتراناتِ النسبيّةِ بيانيًّا؛ أجدُ خطوطَ التقاربِ، وأرسمُها أولًا، ثمّ أُكوّنُ جدولَ قيمٍ باختيارِ قيمِ $x$ على يمينِ خطِّ التقاربِ الرأسيِّ وعلى يسارِهِ، وأعيّنُ النقاطَ في المُستوى الإحداثيِّ.

### أتعلَّم

إذا لَمْ توجدْ عواملُ مشتركةٌ بينَ بسطِ الاقترانِ النسبيِّ ومقامِهِ، فإنَّهُ توجدُ خطوطُ تقاربٍ رأسيةٌ عندَ أصفارِ مقامِهِ جميعِها.

### مثال 4

أَجِدُ خطوطَ التقاربِ للاقترانِ $f(x) = \frac{5}{x-3} + 2$ وأُمثِّلُهُ بيانيًّا، وأَجِدُ مجالَهُ، ومداهُ.

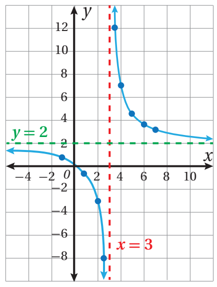
**الخطوةُ 1:** أَجِدُ خطوطَ التقاربِ لمنحنى الاقترانِ.

خطُّ التقاربِ الرأسيِّ هوَ المستقيمَ $x = 3$، وخطُّ التقاربِ الأفقيِّ هوَ المستقيمَ $y = 2$

**الخطوةُ 2:** أُنشِئُ جدولَ قِيَمٍ باختيارِ بعضِ القيمِ حولَ ($x=3$)؛ لأنَّ الاقترانَ غيرُ مُعرَّفٍ عندَ 3:

| $x$ | −1 | 0 | 1 | 2 | 2.5 | 3.5 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 0.75 | 0.33 | −0.5 | −3 | −8 | 12 | 7 | 4.5 | 3.67 | 3.25 |

**الخطوةُ 3:** أرسمُ خطَّي التقاربِ، ثمَّ أُعيِّنُ النقاطَ $(x, y)$ في المستوى الإحداثيِّ، وأَصِلُ بينَ النقاطِ إلى يمينِ المستقيمِ $x = 3$ بمنحنى أمدُّهُ بمحاذاةِ خطَّي التقاربِ، ثمَّ أَصِلُ بينَ النقاطِ إلى يسارِ المستقيمِ $x = 3$ بمنحنى أمدُّهُ بمحاذاةِ خطَّي التقاربِ، فينتجُ الشكلُ المجاورُ.




المجالُ هوَ جميعُ الأعدادِ الحقيقيةِ ما عدا 3، أوْ $\{x \mid x \neq 3\}$.

المدى هوَ جميعُ الأعدادِ الحقيقيةِ ما عدا 2، أوْ $\{y \mid y \neq 2\}$.

## أتحقق من فهمي

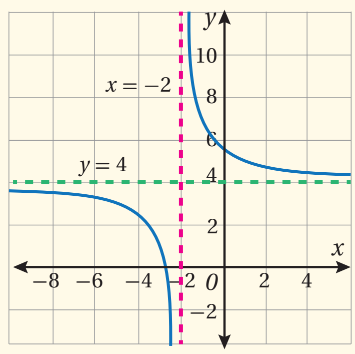
أَجِدُ خطوطَ التقاربِ للاقترانِ $f(x) = \frac{3}{x+2} + 4$ وأُمثِّلُهُ بيانيًّا، وأَجِدُ مجالَهُ، ومداهُ. أنظر الهامش.



### إجابة سؤال بند (أتحقق من فهمي 4):

له خط تقارب رأسي هو $x = -2$، وخط تقارب أفقي هو $y = 4$.

| $x$ | −8 | −6 | −4 | −3 | −2.5 | −1.5 | −1 | 0 | 1 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y=f(x)$ | 3.5 | 3.25 | 2.5 | 1 | −2 | 10 | 7 | 5.5 | 5 | 4.5 |




المجال: جميع الأعداد الحقيقية باستثناء −2؛ أيْ $\{x \mid x \neq -2\}$.

المدى: جميع الأعداد الحقيقية باستثناء 4؛ أيْ $\{y \mid y \neq 4\}$.

## مثال 4

- أُشارِك الطلبة في حل المثال 4 الذي يُوضِّح خطوات تمثيل اقتران نسبي بسيط بيانيًّا.

## مثال إضافي

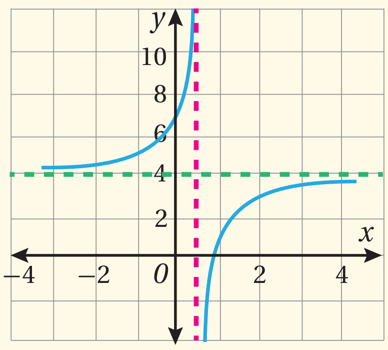
- أجد خطوط التقارب للاقتران: $g(x) = \frac{-3}{2x-1} + 4$، وأُمثِّله بيانيًّا، ثم أجد مجاله ومداه.

له خط تقارب رأسي هو المستقيم $x = 0.5$، وخط تقارب أفقي هو المستقيم $y = 4$.

| $x$ | −2 | −1 | 0 | 0.25 | 0.75 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y = (x)$ | 4.6 | 5 | 7 | 10 | −2 | 1 | 3 | 3.4 |

المجال: $\{x \mid x \neq 0.5\}$.

المدى: $\{y \mid y \neq 4\}$.




**إرشاد:** أُوجِّه الطلبة إلى استعمال ورق الرسم البياني لتمثيل الاقترانات بصورة دقيقة ومرتبة، مُنبِّهًا إيّاهم إلى اختيار قيم للمتغير $x$ على جانبي كل خط تقارب رأسي.

### إجابة سؤال بند (أتحقق من فهمي 3):

a) خط التقارب الرأسي هو $x = -1$، والأفقي هو $y = 2$.

b) خط التقارب الرأسي هو $x = 0$، والأفقي هو $y = -3$.

c) خط التقارب الرأسي هو $x = 5$، والأفقي هو $y = 4$.

تحتوي منحنياتُ بعضِ الاقترانات النسبيَّة فجواتٍ (ثقوب) تُعبِّرُ عن القِيمِ التي لا يكونُ الاقترانُ مُعرّفًا عندَها.

**مفهومٌ أساسيٌّ** — **فجواتُ منحنى الاقترانِ النسبيِّ**

إذا كانَ $f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}$، حيثُ $q(x) \neq 0$، وكانَ $x - c$ عاملًا مُشتركًا لكلٍّ منْ $p(x)$ وَ $q(x)$، فإنَّ مُنحنى $f(x)$ يحتوي فجوةً عندَ $x = c$

**مثال 5**

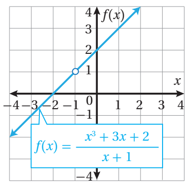
أُمثِّلُ الاقترانَ $f(x) = \frac{x^2+3x+2}{x+1}$ بيانيًّا.

أختصرُ العواملَ المشتركةَ بينَ البسطِ والمقامِ.

$$f(x) = \frac{x^2+3x+2}{x+1} = \frac{(x+2)(x+1)}{x+1} \quad \text{أُحلِّلُ البسطَ}$$

$$= \frac{(x+2)\cancel{(x+1)}}{\cancel{x+1}} = x+2 \quad \text{أختصرُ العاملَ المشتركَ } (x+1)$$

إذن؛ التمثيلُ البيانيُّ للاقترانِ $f(x)=\frac{x^2+3x+2}{x+1}$ هوَ ذاتُهُ التمثيلُ البيانيُّ للاقترانِ $f(x) = x+2$ معَ وجودِ فجوةٍ (دائرةٍ صغيرةٍ مُفرَّغةٍ) في المنحنى عندَ $x = -1$ كما يظهرُ في الشكلِ المجاورِ.




**أتحقق من فهمي**

أُمثِّلُ كلًّا من الاقترانينِ الآتيينِ بيانيًّا: أنظر الهامش.

a) $f(x) = \frac{x^2-5x+6}{x-2}$ b) $f(x) = \frac{x^4+3x^2}{x^2}$

**أتدرب وأحل المسائل**

أَجِدُ ناتجَ القسمةِ والباقيَ في كلٍّ ممّا يأتي:

1) $(x^2+5x-1) \div (x-1)$ الناتج: $x+6$، والباقي: 5

2) $(3x^2+23x+14) \div (x+7)$ الناتج: $3x+2$، والباقي: 0

3) $(x^3-3x^2+5x-6) \div (x-2)$ الناتج: $x^2-x+3$، والباقي: 0

4) $(9x^3-9x^2+17x+6) \div (3x-1)$ الناتج: $3x^2-2x+5$، والباقي: 11

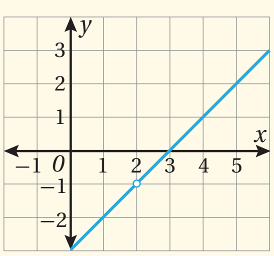
5) $(-6x^3+x^2+4) \div (2x-3)$ الناتج: $-3x^2-4x-6$، والباقي: $-14$

6) $(8x^4+2x^3-14x^2+2) \div (4x^2+x-1)$ الناتج: $2x^2-3$، والباقي: $3x-1$

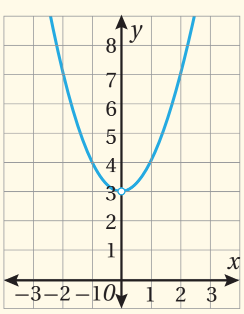


## إجابة سؤال بند (أتحقق من فهمي 5):

**a)**



**b)**



## مثال 5

- أُناقِش الطلبة في الحالة التي لا يكون فيها للمنحنى خط تقارب رأسي عند أحد أصفار مقامه إذا كان هذا العدد يجعل البسط أيضًا صفرًا، ويكون في المنحنى فجوة أو ثقب عند هذا العدد. أُبيِّن للطلبة أنَّه ينبغي في هذه الحالة تبسيط الاقتران باختصار العامل المشترك بين بسطه ومقامه، ثم أتتبَّع الخطوات التي ذكرت سابقًا لتمثيل الاقتران بيانيًّا. أُناقِش الطلبة في المثال وأُشارِكهم في حله.

## مثال إضافي

- أُمثِّل الاقتران: $f(x) = \frac{2x^2-3x+1}{2x^2-x}$ بيانيًّا.

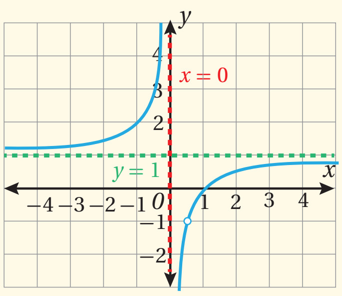
الإجابة: هذا الاقتران غير معرف عند 0 و $\frac{1}{2}$ (أصفار المقام)، ويمكن تبسيطه بالتحليل كما يأتي:

$$f(x) = \frac{(2x-1)(x-1)}{x(2x-1)} = \frac{(x-1)}{x}$$

$$= 1 - \frac{1}{x}, x \neq \frac{1}{2}$$

ويتبين أنَّ له خط تقارب رأسيًّا هو $x = 0$، وخط تقارب أفقيًّا هو $y = 1$، وفي منحناه ثقب مقابل $x = \frac{1}{2}$.

وهذا هو تمثيله البياني:




## 4 التدريب

- أُوجِّه الطلبة إلى قراءة الأسئلة في بند **(أتدرب وأحل المسائل)**، ثم أطلب إليهم حلها (يمكن الطلب إليهم حل الأسئلة ذات الأرقام الزوجية (2–12) ضمن مجموعات.
- إذا واجه بعض الطلبة صعوبة في حل أيِّ مسألة، أطلب إليهم مراجعة أمثلة الدرس.

أَجِدُ مجالَ كلٍّ منَ الاقتراناتِ الآتيةِ: أنظر ملحق الإجابات.

7) $f(x) = \frac{3x-6}{2x}$　8) $h(x) = \frac{2x-8}{2x^2-3x+1}$　9) $g(x) = \frac{2x^2-8}{x^2+9}$

أَجِدُ خطوطَ التقاربِ لكلِّ اقترانٍ ممّا يأتي، وأُمثِّلُهُ بيانيًّا، وأَجِدُ مجالَهُ، ومداهُ: أنظر ملحق الإجابات.

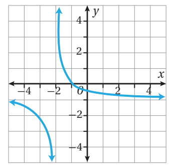
10) $f(x) = \frac{2}{x-3}$　11) $h(x) = \frac{-2}{(x-1)^2}$　12) $g(x)= \frac{4}{x+2} - 1$

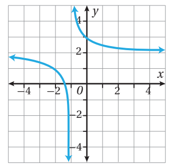
أُمثِّلُ كلًّا منَ الاقتراناتِ الآتيةِ بيانيًّا: أنظر ملحق الإجابات.

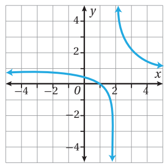
13) $f(x) = \frac{x^2+3x-4}{x+4}$　14) $f(x) = \frac{-x^2+x^3}{x^3}$　15) $f(x) = \frac{3x^4+6x^3+3x^2}{x^2+2x+1}$

أُعيِّنُ لكلٍّ منَ الاقتراناتِ النسبيّةِ الآتيةِ رمزَ التمثيلِ البيانيِّ المناسبِ لهُ:

16) $f(x) = \frac{1}{x+1} + 2$ B　17) $h(x) = \frac{1}{x-2} + 1$ C　18) $g(x) = \frac{1}{x+2} - 1$ A

A



B



C



### مهارات التفكير العليا

19) **تبريرٌ:** مِساحةُ ورقةٍ مستطيلةٍ تساوي $(3x^3+14x^2+ax+8)$ وحداتٍ مُربَّعةً، وطولُها يساوي $(x+2)^2$ وحدةً. أَجِدُ قيمةَ $a$ مُبرِّرًا إجابَتي. أنظر ملحق الإجابات.

20) **أيُّها لا ينتمي:** أُحدِّدُ فيما يأتي الاقترانَ المختلفَ عنِ الاقتراناتِ الثلاثةِ الأُخرى، مُبرِّرًا إجابتي: أنظر ملحق الإجابات.

| | | | |
|---|---|---|---|
| $f(x) = \frac{3}{x+5}$ | $g(x) = \frac{5}{x+2}$ | $h(x) = \frac{9}{x^2+1}$ | $l(x) = \frac{7}{x^2-9}$ |

21) **مسألةٌ مفتوحةٌ:** أكتبُ قاعدةَ اقترانٍ نسبيٍّ يكونُ لتمثيلِهِ البيانيِّ خطُّ تقاربٍ أفقيٍّ هوَ: $y = 3$، وخطّا تقاربٍ رأسيانِ هما: $x = -2, x = 7$. أنظر ملحق الإجابات.



## الواجب المنزلي:

- أطلب إلى الطلبة أنْ يحلوا في البيت جميع المسائل الواردة في الصفحة التاسعة من كتاب التمارين، مُحدِّدًا لهم المسائل التي يمكنهم حلها في نهاية كل حصة بحسب ما يُقدَّم من أمثلة الدرس وأفكاره.
- يمكن أيضًا إضافة المسائل التي لم يحلها الطلبة داخل غرفة الصف إلى الواجب البيتي.
- في اليوم التالي، أَطَّلِع على حلول الطلبة، وأُناقِشهم في أيِّ صعوبات واجهوها في أثناء الحل.

## مهارات التفكير العليا

- أُوجِّه الطلبة إلى قراءة الأسئلة في بند (**مهارات التفكير العليا**)، ثم أطلب إليهم حلها ضمن مجموعات ثنائية، وكتابة مُبرِّر للإجابة، وأمنحهم وقتًا كافيًا لنقد مُبرِّرات بعضهم.

## 5 الإثراء

- أطرح على الطلبة المسألة الآتية:
  - » إذا كان $(x-1)$ أحد عوامل الاقتران $f(x) = x^3-2x^2-19x+20$، فما مجموع مربعات أصفار $f(x)$؟ 42

## 6 الختام

- أطلب إلى الطلبة إعداد قائمة تتضمَّن الخطوات التي يتبعونها في قسمة كثير حدود على كثير حدود آخر، ويُطبِّقونها في قسمة $f(x) = 3x^2 + 6x^4 - 28x - 10$ على $h(x) = 2x^2 + 5$.

## تعليمات المشروع:

- اطلب إلى الطلبة الانتهاء من جمع البيانات عن المتغيرين اللذين اختاروهما.
- أُذكِّر الطلبة بضرورة توثيق مصدر معلوماتهم.

# الدرس 3

## نتاجات الدرس

- تعرُّف مفهوم تركيب الاقترانات وشــرطه، والاقتران المُركَّب.
- حســاب قيم اقتران مُركَّب عند قيــم معلومة للمتغير المستقل.
- إيجاد قاعدة الاقتران المُركَّب.
- إيجاد مُركَّبتي اقتران مُركَّب.
- حل مسائل حياتية عن تركيب الاقترانات.

## التعلُّم القبلي:

- حســاب قيمة اقتران معطى عند قيــم معلومة للمتغير المستقل.
- ضرب مقادير جبرية وتبسيطها.
- تحديد مجال الاقتران كثير الحدود والاقتران النسبي.

## 1 التهيئة

- أكتب على اللوح :

$f(x) = 3x^2 -2x+1,\ g(x) = 4 -3x,$

$h(x) = \dfrac{x}{2x-6}$، ثم أطلب إلى الطلبة تحديد مجال كلٍّ من هذه الاقترانات، وإيجاد كلٍّ ممّا يأتي:

1) $f(1)$ $2$ 2) $f(-2)$ $17$

3) $g(3)$ $-5$ 4) $h(2)$ $-1$

مجال $f, g$ هو مجموعــة الأعداد الحقيقية، ومجال $h$ هو مجموعة الأعداد الحقيقية باستثناء 3

- أطلب إلى الطلبة تبسيط المقدارين الآتيين:

a) $3(2x+1)^2 -5(2x+1) + 4$

$12x^2+2x+2$

b) $2x(x^2 + 5x) -3(x^3- 5x^2 +4)$

$-x^3 +25x^2 -12$

---

# الدرس 3

# تركيبُ الاقتراناتِ

# Composition of Functions

**فكرةُ الدرسِ** تعرُّفُ مفهومِ الاقترانِ المُركَّبِ، وشــرطِ تركيبِ اقترانيْنِ، وإيجادُ قيمتِهِ لعددٍ مُعطى، وإيجادُ قاعدةِ اقترانٍ مُركَّبٍ إذا عُلِمَتْ قاعدتا مُركَّبتيْهِ.

**المصطلحاتُ** تركيبُ الاقتراناتِ، الاقترانُ المُركَّبُ، المُركِّبتانِ.

**مسألةُ اليومِ** عندما تسقطُ قطرةُ ماءِ المطرِ على بحيرةٍ تتكوَّنُ موجةٌ دائريةٌ يتزايدُ طولُ نصفِ قُطْرِها بالنســبةِ إلى الزمنِ وَفقَ الاقترانِ: $r(t) = 25\sqrt{t+2}$، حيثُ $r$ نصفُ القُطْرِ بالســنتيمتراتِ، وَ $t$ الزمنُ بالدقائقِ. أَجِدُ مِساحةَ الموجةِ عندما $t = 2$.

تعلَّمْتُ ســابقًا أنَّهُ يُمكِنُ اســتعمالُ أيِّ اقترانيْنِ، مثــلِ $f(x) = x^2, g(x) = 2x-1$، لتكوينِ اقتراناتٍ جديدةٍ، وذلكَ بإجراءِ عملياتِ جمعٍ، أوْ طرحٍ، أوْ ضربٍ، أوْ قســمةٍ عليْهِما كما في الأمثلةِ الآتيةِ:

$(f+g)(x)= x^2 + 2x - 1$ $(f-g)(x) = x^2 - 2x + 1$

$(f \cdot g)(x) = x^2(2x - 1)$ $(\frac{f}{g})(x) = \dfrac{x^2}{2x-1}$

ويمكنُ أيضًا تكوينُ اقترانٍ جديدٍ منَ الاقترانيْنِ $f$، وَ $g$ عنْ طريقِ دمجِهِما، بحيثُ تكونُ مخرجةُ أحدِهِما مدخلةً للآخرِ.

وتُسمّى عمليةُ الدمجِ هذهِ **تركيبَ الاقتراناتِ** (functions composition)، ويُسمّى الاقترانُ الناتجُ **الاقترانَ المُركَّبَ** (composite function).

يُمكِنُ تركيبُ الاقترانيْنِ $g(x)$ أ $f(x)$ بطريقتيْنِ، هما:

1) تطبيقُ $g$ أولًا، ثمَّ تطبيقُ $f$ على نتيجةِ $g$، ويُرمَزُ إلى ذلكَ بالرمزِ $(f\circ g)$.

2) تطبيقُ $f$ أولًا، ثمَّ تطبيقُ $g$ على نتيجةِ $f$، ويُرمَزُ إلى ذلكَ بالرمزِ $(g\circ f)$.

**لغة الرياضيات**

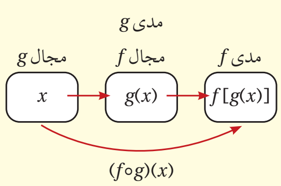
يُقرَأُ $(f\circ g)$ كما يلي: $f$ بعدَ $g$

ويُقرَأُ $(g\circ f)$ كما يلي: $g$ بعدَ $f$

**مفهومٌ أساسيٌّ** **تركيبُ الاقتراناتِ**

إذا كانَ $f(x)$ و $g(x)$ اقترانينِ، وكانَ مدى $g(x)$ يقعُ ضمنَ مجالِ $f(x)$ فإنَّ الاقترانَ المُركّبَ $(f\circ g)(x)$ يُعطى كما يأتي:

$$(f\circ g)(x) = f(g(x))$$



## 2 الاستكشاف

- أُوجِّه الطلبة إلى قراءة المسألة في بند (**مسألة اليوم**)، ثم أسألهم:
  - » ما طول نصف قطر الموجة بعد 7 دقائق من سقوط قطرة المطر على البحيرة؟ 75 cm
  - » كيف تحسب مساحة الموجة؟ باستعمال صيغة مساحة الدائرة: $A = \pi r^2$
  - » كيف تحسب مســاحة الموجة بعد عِدَّة دقائق من ســقوط قطرة الماء على البحيرة؟ بإيجاد طول نصف قطرها $r$ أولًا، ثم تعويضه في صيغة المساحة.
- أستمع لإجابات الطلبة من دون تقديم تغذية راجعة لهم.

## 3 التدريس

- أكتــب الاقترانين: $f(x) = x-2 \,, g(x) = 4 + 2x$، ثم أطلب إلى الطلبة إيجاد قيمة $f$ للأعداد: 2, 3, 5, 9، ثم كتابة النتائج في عمودين كما يأتي:

$$\begin{array}{ccc} & f & \\ 2 & \rightarrow & 0 \\ 3 & \rightarrow & 1 \\ 5 & \rightarrow & 3 \\ 9 & \rightarrow & 7 \end{array}$$

- أطلب إلى الطلبة إيجاد قيمة $g$ للأعداد الناتجة من $f$، ثم كتابة النتائج كما في المُخطَّط الآتي:

$$\begin{array}{ccccc} & f & & g & \\ 2 & \rightarrow & 0 & \rightarrow & 4 \\ 3 & \rightarrow & 1 & \rightarrow & 6 \\ 5 & \rightarrow & 3 & \rightarrow & 10 \\ 9 & \rightarrow & 7 & \rightarrow & 18 \\ & & g \circ f & & \end{array}$$

- أُبيِّن للطلبة أنَّ النتيجة النهائية الأولى 4 تُمثِّل قيمة $g$ لِـ $f(2)$، وأنَّها تُكتَب في صورة $g(f(2)) = 4$، أو $(g \circ f)(2) = 4$ ، وهكذا الحال لبقية النتائج.
- أُوضِّح للطلبة أنَّ عملية تعويض قيمة اقتران في اقتران آخر تســمى تركيب الاقترانات، وأنَّه عند تعويــض $f(x)$ مكان $x$ في معادلة $g(x)$ ينتج الاقتران المُركَّــب $(g \circ f)(x)$ الذي هو $g(f(x))$ ، وأنَّــه عند تعويض قيمة $g(x)$ في معادلة $f(x)$ ينتــج $(f \circ g)(x)$ ، وأنَّ هذين الاقترانين المُركَّبين يكونان غالبًا مختلفين.

### مثال 1

- أُناقِــش الطلبة في تعريــف تركيب اقترانين، وطريقتي التركيب، وشــروطه، مُبيِّنًــا أنَّه إذا كانت الاقترانات كثيرات حدود، ومجالها ومداها الأعداد الحقيقية، فإنَّه يمكن تركيبها بالطريقتين. بعد ذلك أُشارِك الطلبة في حل المثال، مُوضِّحًا خطوتي الحل في كل فقرة.

### التقويم التكويني:

- أُوجِّه الطلبة إلى حل التدريب في بند (**أتحقق من فهمي**) بعد كل مثال.
- أختار بعض الإجابات التي تحوي أخطاء مفاهيمية، ثم أُناقِشها على اللوح، ولا أذكر اسم الطالب الذي أخطأ في الإجابة؛ تجنبًا لإحراجه.

**ملاحظات المُعلِّم/ المُعلِّمة**

....................................................

....................................................

....................................................

....................................................

....................................................

....................................................

....................................................

....................................................

....................................................

....................................................

....................................................

....................................................

....................................................

### ! أخطاء مفاهيمية:

قد يجد بعــض الطلبة قيمــة $(g \circ f)(x)$ ببدء التعويض في $g(x)$ أولًا، ثم تعويض النتيجة فــي $f(x)$؛ لذا أُنبِّههــم إلى البدء من أقصــى اليمين، بتعويض $x$ في معادلة $f(x)$، ثم تعويض الناتج في معادلة $g(x)$.

## مثال إضافي

- إذا كان $f(x) = 3x^2 + 1,\ g(x) = \dfrac{2x}{x-1}$، فأجد ما يأتي:

a) $(f \circ g)(2)$   $49$

b) $(g \circ f)(2)$   $\dfrac{13}{6}$

c) $(f \circ g)(5)$   $19.75$

## تعزيز اللغة ودعمها:

أُكرِّر المصطلحات الرياضية المستخدمة في الدرس باللغتين العربية والإنجليزية، مُحفِّزًا الطلبة على استعمالها، مثل: تركيب الاقترانات composition of functions، والاقتران المُركَّب composite function، والمُركِّبة component.

## مثال 2

- أُناقِش الطلبة في كيفية تعويض مقدار جبري من اقتران في معادلة اقتران آخر للتعبير عن تركيبهما جبريًّا، مُوضِّحًا الخطوات المتبعة في المثال، وتبسيط المقدار الناتج إلى أبسط صورة.

## مثال إضافي

- إذا كان $f(x) = \sqrt{2x+10},\ g(x) = 4x + 1$، فأجد $(f \circ g)(x)$، ثم أجد $(f \circ g)(3)$ بطريقتين.

$(f \circ g)(x) = \sqrt{8x+12}\ ,\ (f \circ g)(3) = \sqrt{8(3)+12}$

$= \sqrt{36} = 6$

$(f \circ g)(3) = f(g(3)) = f(13) = \sqrt{2(13)+10}$

$= \sqrt{36} = 6$

### مثال 1

إذا كانَ $f(x) = x^2,\ g(x) = x + 4$، فأَجِدُ:

**1** $(g \circ f)(3)$

$(g \circ f)(3) = g(f(3))$   $(g \circ f)(3)$ تعني $g$ لِـ $f(3)$؛ أيْ $f$، ثمَّ $g$

$= g(3^2)$   بتعويضِ $x = 3$ في معادلةِ $f$

$= g(9)$   بالتبسيطِ

$= 9 + 4 = 13$   بتعويضِ $x = 9$ في معادلةِ $g$، والتبسيطِ

**2** $(g \circ f)(-2)$

$(g \circ f)(-2) = g(f(-2))$   $(g \circ f)(-2)$ تعني $g$ لِـ $f(-2)$؛ أيْ $f$، ثمَّ $g$

$= g((-2)^2)$   بتعويضِ $x = -2$ في معادلةِ $f$

$= g(4)$   بالتبسيطِ

$= 4 + 4 = 8$   بتعويضِ $x = 4$ في معادلةِ $g$، والتبسيطِ

**3** $(f \circ g)(5)$

$(f \circ g)(5) = f(g(5))$   $(f \circ g)(5)$ تعني $f$ لِـ $g(5)$؛ أيْ $g$، ثمَّ $f$

$= f(5+4)$   بتعويضِ $x = 5$ في معادلةِ $g$

$= f(9)$   بالتبسيطِ

$= 9^2 = 81$   بتعويضِ $x = 9$ في معادلةِ $f$، والتبسيطِ

**أتحقق من فهمي**

إذا كانَ $h(x) = \sqrt{x},\ j(x) = 2x + 1$ ، فأَجِدُ كلًّا ممّا يأتي: أنظر الهامش.

a) $(h \circ j)(4)$   b) $(j \circ h)(4)$   c) $(h \circ h)(16)$   d) $(j \circ j)(-8)$

يُمكِنُ إيجادُ قاعدةِ الاقترانِ المُركَّبِ بدلالةِ المُتغيِّرِ $x$، ثمَّ حسابِ قيمةِ الاقترانِ المُركَّبِ عندَ أيِّ قيمةٍ عدديةٍ معطاةٍ.

### مثال 2

إذا كانَ $f(x) = 3x + 5,\ g(x) = 2x^2 - 6$، فأَجِدُ قاعدةَ كلٍّ منْ: $(f \circ g)(x)$، وَ $(g \circ f)(x)$، ثمَّ أَجِدُ $(f \circ g)(-2)$، وَ $(g \circ f)(0)$.

$(f \circ g)(x) = f(g(x))$   تعريفُ الاقترانِ المُركَّبِ



### إجابة سؤال بند (أتحقق من فهمي 1):

a) 3   b) 5   c) 2   d) −29

### إرشادات للمُعلِّم/ للمُعلِّمة

المجال العاطفي لا يقل أهمية عن المجال المعرفي؛ لذا لا يجب أنْ أقول لأحد الطلبة: "إجابتك خطأ"، بل أقول له: "لقد اقتربت من الإجابة الصحيحة، فمَنْ يستطيع إعطاء إجابة أُخرى؟"، أو أقول له: "هذه إجابة صحيحة لغير هذا السؤال".

| | |
|---|---|
| بتعويضِ $g(x) = 2x^2 - 6$ | $= f(2x^2 - 6)$ |
| بتعويضِ $(2x^2 - 6)$ مكانَ $x$ في معادلةِ $f$ | $= 3(2x^2 - 6) + 5$ |
| بالتبسيطِ | $(f \circ g)(x) = 6x^2 - 13$ |
| بتعويضِ $x = -2$، والتبسيطِ | $(f \circ g)(-2) = 6(-2)^2 - 13 = 11$ |
| تعريفُ الاقترانِ المُركَّبِ | $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ |
| بتعويضِ $f(x) = 3x + 5$ | $= g(3x+5)$ |
| بتعويضِ $(3x + 5)$ مكانَ $x$ في معادلةِ $g$ | $= 2(3x+5)^2 - 6$ |
| بتربيعِ $(3x + 5)$ | $= 2(9x^2 + 30x + 25) - 6$ |
| بالتبسيطِ | $(g \circ f)(x) = 18x^2 + 60x + 44$ |
| بتعويضِ $x = 0$، والتبسيطِ | $(g \circ f)(0) = 18(0)^2 + 60(0) + 44 = 44$ |

**أتحقق من فهمي**

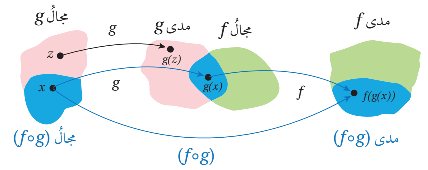
إذا كانَ $f(x) = x^2 + 4x, g(x) = 2 - 3x$، فأَجِدُ قاعدةَ كلٍّ منْ: $(f \circ g)(x)$، وَ $(g \circ f)(x)$، ثمَّ أَجِدُ $(f \circ g)(3)$، وَ $(g \circ f)(-1)$. أنظر الهامش.

**أُفكِّرُ**

هلْ تُحقِّقُ عمليةُ تركيبِ الاقتراناتِ الخاصيةَ التبديليةَ؟

### مجالُ الاقترانِ المُركّبِ

يتكوَّنُ مجالُ $(f \circ g)(x)$ منْ مجموعةِ قيمِ $x$ منْ مجالِ $g$ التي تكونُ قيمُ $g(x)$ لها موجودةً في مجالِ $f$. ولذلكَ تُستثنى منْ مجالِ $(f \circ g)(x)$ قيمِ $x$ التي لا يكونُ الاقترانُ $g$ معرّفًا عندَها (ليستْ ضمنَ مجالِ $g$)، وقيمُ $x$ التي لا يكونُ $f(g(x))$ معرّفًا عندَها ($g(x)$ ليستْ ضمنَ مجالِ $f$).




**مثال 3**

إذا كانَ $g(x) = \frac{9}{x-3}, f(x) = \frac{6}{x-2}$؛ فأجدُ مجالَ $(f \circ g)(x)$.

مجالُ الاقترانِ $g(x)$ هوَ مجموعةُ الأعدادِ الحقيقيّةِ باستثناءِ قيمِ $x$ التي تجعلُ المقامَ صفرًا.

| | |
|---|---|
| بمساواةِ المقامِ معَ الصفرِ | $x - 3 = 0$ |
| بطرحِ 3 منَ الطرفينِ | $x = 3$ |



### إجابة سؤال بند (أتحقق من فهمي 2):

$(f \circ g)(x) = (2-3x)^2 + 4(2-3x) = 9x^2 - 24x + 12$

$(f \circ g)(3) = 21$

$(g \circ f)(x) = 2 - 3(x^2 + 4x) = -3x^2 - 12x + 2$

$(g \circ f)(-1) = 11$

**إرشاد:** أُوجِّه الطلبة إلى التحقُّق من صحة الإجابة عند إيجاد قاعدة الاقتران المُركَّب، بحساب قيمة الاقتران المُركَّب لعدد ما بالتعويض في القاعدة، واستعمال تعريف الاقتران المُركَّب، ومقارنة النتيجتين، فإذا تساوتا كانت القاعدة صحيحة.

## تنويع التعليم

- أُوزِّع الطلبة إلى مجموعات ثنائية، ثم أطلب إلى كل ثنائي أنْ يكتبا اقترانين؛ كل على حدة، ثم العمل معًا لإيجاد ناتج تركيبهما، والتحقُّق من صحته.

## مثال 3

- أُناقِش الطلبة في فكرة مجال الاقتران المُركَّب، مُبيِّنًا أنَّه يتكوَّن من مجموعة جزئية من مجال الاقتران الذي يُطبَّق أولًا، نتيجتها موجودة في مجال الاقتران الذي يُطبَّق ثانيًا. بعد ذلك أُبيِّن أنَّه في معظم الحالات يكون مجال الاقتران المُركَّب هو كل الأعداد الحقيقية من دون استثناء عندما يكون الاقترانان كثيري حدود، وأنَّه ينبغي التحقُّق من المجال إذا كان أحد الاقترانين أو كلاهما نسبيًّا، أو اقترانًا جذريًّا. بعد ذلك أُناقِش الطلبة في طريقة تحديد مجال الاقتران المُركَّب في المثال، وأُشارِكهم في حله.

## مثال إضافي

- أجد مجال $(f \circ g)(x)$ في الحالتين الآتيتين:

1) $f(x) = x^2 - 3x + 5, g(x) = \frac{x+4}{2x-6}$

2) $f(x) = \frac{x}{x-5}, g(x) = \frac{1}{3x+1}$

الإجابة:

1) $\{x | x \neq 3\}$ 2) $\{x | x \neq -\frac{1}{3}, x \neq -\frac{4}{15}\}$

## مثال 4

- أُوضِّح للطلبة كيفية تفكيك اقتران معطى إلى اقترانين بسيطين ينتج من تركيبهما الاقتران المعطى، ثم أُخبِرهم أنَّه يوجد في حالات عِدَّة أكثر من طريقة لكتابة اقترانين ينتج من تركيبهما الاقتران المعطى. بعد ذلك أُناقِش الطلبة في حلِّ المثال، ثم أطلب إليهم البحث عن إجابة أُخرى.

## مثال إضافي

- أجد الاقترانين $f(x), g(x)$ بحيث يمكن التعبير عن $h(x) = 2 + \sqrt{x^2 + 9}$ في صورة $h(x) = f(g(x))$.

إجابة محتملة:

$g(x) = x^2 + 9, f(x) = 2 + \sqrt{x}$

---

مجالُ الاقترانِ $f(x)$ هوَ مجموعةُ الأعدادِ الحقيقيّةِ باستثناءِ قيمِ $x$ التي تجعلُ $x - 2 = 0$، أي $x = 2$، ولذلكَ تُستثنَى قيمُ $x$ التي تجعلُ $g(x) = 2$

| | |
|---|---|
| $\frac{9}{x-3} = 2$ | بمساواةِ $g(x)$ معَ 2 |
| $9 = 2(x-3)$ | بضربِ الطرفينِ في $(x-3)$ |
| $9 = 2x - 6$ | بالتوزيعِ |
| $15 = 2x$ | بإضافةِ 6 للطّرفينِ |
| $7.5 = x$ | بقسمةِ الطرفينِ على 2 |

إذنْ؛ مجالُ $(f \circ g)(x)$ هوَ مجموعةُ الأعدادِ الحقيقيّةِ باستثناءِ 3 أ 7.5، أيْ: $\{x: x \neq 3$ أ $x \neq 7.5\}$.

### أتحقق من فهمي

**أجدُ مجالَ $(g \circ f)(x)$ للاقترانين في المثالِ 3 أعلاهُ.** أنظر الهامش.

يُمكِنُ النظرُ إلى كثيرٍ منَ الاقتراناتِ بوصفِها اقتراناتٍ مُركَّبةً، وإيجادُ اقترانيْنِ بسيطيْنِ يُكافِئُ تركيبُهُما الاقترانَ المُركَّبَ، عندئذٍ يكونُ الاقترانانِ البسيطانِ **مُركَّبتَيِ الاقترانِ المُركَّبِ** (components of the composite function).

فمثلًا، يُمكِنُ اعتبارُ الاقترانِ $f(x) = \sqrt{4x^2 + 9}$ اقترانًا مُركَّبًا، ومُركَّبتاهُ هما: $g(x) = 4x^2 + 9$، $h(x) = \sqrt{x}$، ويكونُ $f(x) = (h \circ g)(x)$.

**إرشادٌ**

قدْ لا تكونُ القيودُ على مجالِ الاقتراناتِ واضحةً بعدَ إجراءِ عمليةِ تركيبِ الاقتراناتِ وتبسيطِها؛ لذا منَ المُهمِّ الانتباهُ إلى مجالِ الاقترانيْنِ قبلَ تركيبِهِما.

### مثال 4

**أَجِدُ الاقترانيْنِ $f(x)$، وَ $g(x)$، بحيثُ يُمكِنُ التعبيرُ عنْ كلٍّ منَ الاقترانيْنِ الآتييْنِ بالصورةِ $h(x) = f(g(x))$**

**1** $h(x) = \frac{1}{x+3}$

أفترِضُ أنَّ $f(x) = \frac{1}{x}$، $g(x) = x + 3$. وبذلكَ، فإنَّ:

| | |
|---|---|
| $f(g(x)) = f(x+3)$ | بتعويضِ $g(x) = x + 3$ |
| $= \frac{1}{x+3} = h(x)$ | بتعويضِ $x+3$ مكانَ $x$ في معادلةِ $f$ |



---

**إجابة سؤال بند (أتحقق من فهمي 3):**

$\{x | x \neq 2, x \neq 4\}$

منهاجي
متعة التعليم الهادف

**2** $h(x) = (2+x^2)^{10}$

أفترضُ أنَّ $f(x) = x^{10}$, $g(x) = 2 + x^2$ . وبذلكَ، فإنَّ:

$f(g(x)) = f(2+x^2)$    بتعويضِ $g(x) = 2 + x^2$

$= (2+x^2)^{10} = h(x)$    بتعويضِ $2+x^2$ في معادلةِ $f$

**أتحقق من فهمي**

أجِدُ الاقترانيْنِ $f(x)$، وَ $g(x)$، بحيثُ يُمكِنُ التعبيرُ عنْ كلٍّ منَ الاقترانيْنِ الآتييْنِ بالصورةِ $h(x) = f(g(x))$ أنظر الهامش.

a) $h(x) = 4x^2 - 1$

b) $h(x) = \frac{2}{(x+2)^2} + 5$

يُمكِنُ استعمالُ فكرةِ الاقتراناتِ المُركَّبةِ في مواقفَ حياتيةٍ كثيرةٍ، مثلِ: التجارةِ، والصناعةِ، وغيرِهما.

### مثال 5: من الحياة

**صناعةٌ:** وجدَ مديرُ مصنعٍ للأثاثِ أنَّ تكلفةَ إنتاجِ $q$ منْ خزاناتِ الكتبِ في فترةِ العملِ الصباحيةِ بالدينارِ هيَ: $C(q) = q^2 + 2q + 800$ . إذا كانَ عددُ خزاناتِ الكتبِ التي يُمكِنُ إنتاجُها في $t$ ساعةً في الفترةِ الصباحيةِ هيَ: $q(t) = 20t, 0 \leq t \leq 5$، فما تكلفةُ الإنتاجِ بدلالةِ $t$؟ كمْ دينارًا تكلفةُ الإنتاجِ في نهايةِ ساعةِ العملِ الرابعةِ؟

لإيجادِ تكلفةِ الإنتاجِ بدلالةِ $t$، أُعوِّضُ قيمةَ $q(t)$ في معادلةِ التكلفةِ، فأُكوِّنُ اقترانًا مُركَّبًا هوَ $(C\circ q)(t)$:

$(C\circ q)(t) = C(20t)$    تعريفُ الاقترانِ المُركَّبِ

$= (20t)^2 + 2(20t) + 800$    بتعويضِ $20t$ مكانَ $q$ في معادلةِ التكلفةِ

$= 400t^2 + 40t + 800$    بالتبسيطِ

تكلفةُ الإنتاجِ في نهايةِ ساعةِ العملِ الرابعةِ هيَ : $(C\circ q)(4)$

$(C\circ q)(4) = 400(16) + 40(4) + 800 = 7360$

إذنْ، تكلفةُ الإنتاجِ في نهايةِ ساعةِ العملِ الرابعةِ هيَ: 7360 دينارًا.



### إجابة سؤال بند (أتحقق من فهمي 4):

إجابة محتملة:

a) $f(x) = x^2 - 1$ , $g(x) = 2x$ , أو $f(x) = 4x - 1$, $g(x) = x^2$

إجابة محتملة:

b) $f(x) = \frac{2}{x} + 5$ , $g(x) = (x+2)^2$ ، أو $f(x) = \frac{2}{x^2} + 5$ , $g(x) = x + 2$

### مثال 5: من الحياة

- أُناقِش الطلبة في حل المثال 4 الذي يُبيِّن توظيف تركيب الاقترانات في موقف حياتي، ثم أطلب إليهم تفسير الاقترانين المعطيين في المسألة، ومدلول الاقتران الناتج من تركيبهما. بعد ذلك أسألهما عن حساب التكلفة من دون كتابة اقتران مُركَّب.

### مثال إضافي

**تجارة:** أعلن محل لبيع الأجهزة الكهربائية عن خصم قيمته 15% على جميع الأجهزة. يريد خليل أنْ يشتري ثلاجة من هذا المحل، ولديه قسيمة من المصنع تُخوِّله الحصول على خصم 25 دينارًا من ثمن الثلاجة:

**a)** أكتب اقترانين $f, g$ يُمثِّل أحدهما ما سيدفعه خليل لشراء ثلاجة ثمنها $x$ دينارًا مستفيدًا من الخصم المعلن، ويُمثِّل الآخر ما سيدفعه مستفيدًا من القسيمة.

$f(x) = x - 25$ , $g(x) = x - 0.15x = 0.85x$

**b)** أكتب قاعدة كلٍّ من $(g\circ f)(x)$, $(f\circ g)(x)$، مُفسِّرًا دلالاتهما، ومُحدِّدًا أيهما أفضل لخليل.

ما سيدفعه خليل مستفيدًا من القسيمة أولًا، ثم الخصم المعلن: $(g\circ f)(x) = 0.85x - 21.25$.

ما سيدفعه خليل مستفيدًا من الخصم المعلن أولًا، ثم القسيمة: $(f\circ g)(x) = 0.85x - 25$.

الأفضل لخليل هو $(f\circ g)(x)$؛ لأنَّه سيدفع أقل بمقدار 3.75 دنانير.

## 4 التدريب

- أُوجِّه الطلبة إلى قراءة الأسئلة في بند (**أتدرب وأحل المسائل**)، ثم أطلب إليهم حل الأسئلة (10−1)، وأُتابِعهم في هذه الأثناء.
- أختار بعض الأخطاء التي وقع فيها الطلبة من دون ذكر أسمائهم؛ تجنبًا لإحراجهم، ثم أُناقِشهم فيها.

## تعليمات المشروع

أُوجِّه الطلبة إلى البدء بتنفيذ الخطوة 3 من المشروع، بتمثيل البيانات التي جمعوها باستعمال برمجية Excel ، وإيجاد قاعدة الاقتران المناسب للبيانات.

## الواجب المنزلي:

- أطلب إلى الطلبة أنْ يحلوا في البيت الأسئلة ذات الأرقام الزوجية من 12 إلى 22، إضافةً إلى الأسئلة ذات الأرقام الفردية في الصفحة العاشرة من كتاب التمارين.
- في اليوم التالي، أَطّلِع على حلول الطلبة، وأُناقِشهم في أيِّ صعوبات واجهوها في أثناء الحل. أُناقِشهم أيضًا في الأسئلة الباقية من الدرس.

**معلومةٌ**

الكلفن وحدةٌ لقياسِ درجةِ الحرارةِ، اعتُمِدَتْ في النظامِ الدوليِّ، ورُمِزَ إليْها بالرمزِ $(K)$، وقدْ سُمِّيَتْ بهذا الاسمِ نسبةً إلى الفيزيائيِّ اللورد كلفن.

**أتحقق من فهمي**

**قياسٌ:** يُحوِّلُ الاقترانُ $C(F) = \frac{5}{9}(F-32)$ درجاتِ الحرارةِ منَ المقياسِ الفهرنهايتيِّ $F$ إلى مقياسِ سيلسيوس $C$. ويُحوِّلُ الاقترانُ $K(C) = C + 273$ درجاتِ الحرارةِ منْ مقياسِ سيلسيوس إلى مقياسِ كلفن $K$. أكتبُ الاقترانَ الذي يُحوِّلُ درجةَ الحرارةِ منَ المقياسِ الفهرنهايتيِّ إلى مقياسِ كلفن، ثمَّ أَجِدُ درجةَ الحرارةِ على مقياسِ كلفن التي تُقابِلُ 86 درجةً فهرنهايتيةً. أنظر الهامش.

**أتدرب وأحل المسائل**

إذا كانَ $f(x) = x + 7, g(x) = \frac{x}{2}$، فأَجِدُ كلًّا ممّا يأتي:

1) $(f\circ g)(4)$ $9$
2) $(g\circ f)(4)$ $5.5$
3) $(g\circ g)(-2)$ $-\frac{1}{2}$
4) $(f\circ f)(3)$ $17$

إذا كانَ $c(x) = x^3, d(x) = 2x-3$، فأَجِدُ كلًّا ممّا يأتي:

5) $(c\circ d)(3)$ $27$
6) $(d\circ c)(5)$ $247$
7) $(c\circ d)(x)$ $(c\circ d)(x) = (2x-3)^3$
8) $(d\circ c)(x)$ $(d\circ c)(x) = 2x^3 - 3$

أَجِدُ مجالَ $(f\circ g)(x)$ في كلٍّ ممّا يأتي: أنظر الهامش.

9) $f(x) = \frac{2x}{x-3}, g(x) = \frac{1}{x-5}$
10) $f(x) = \frac{1}{2x-2}, g(x) = \frac{5}{x+7}$

11) إذا كانَ $a(x) = x + 4, b(x) = x-7$، فأُثبِتُ أنَّ $(a\circ b)(x) = (b\circ a)(x)$. أنظر ملحق الإجابات.

12) إذا كانَ $f(x) = 2^x, g(x) = 3x + 4$، فأَجِدُ $(f\circ g)(x)$، ثمَّ أَجِدُ قيمةَ $(f\circ g)(-3)$. أنظر ملحق الإجابات.

13) إذا كانَ $f(x) = \frac{1}{x-4}, g(x) = 2x-10$، فأَجِدُ $(g\circ f)(x)$ بصورةِ كسرٍ واحدٍ، ثمَّ أُعيِّنُ مجالَهُ. أنظر ملحق الإجابات.

إذا كانَ $f(x) = x+1, g(x) = x^2-7$، فأُعبِّرُ عنْ كلٍّ ممّا يأتي بصورةِ اقترانٍ مُركَّبٍ، مُعتمِدًا الاقترانيْنِ $f, g$:

14) $x^2 - 6$ $(f\circ g)(x)$
15) $x^2 + 2x - 6$ $(g\circ f)(x)$

أَجِدُ اقترانيْنِ $f(x)$، وَ $g(x)$، بحيثُ يُمكِنُ التعبيرُ عنْ كلٍّ منَ الاقترانيْنِ الآتييْنِ بالصورةِ $h(x) = f(g(x))$:

16) $h(x) = \frac{4}{3-\sqrt{4+x^2}}$ أنظر ملحق الإجابات.
17) $h(x) = (\frac{1}{2x-3})^3$ أنظر ملحق الإجابات.

30

### إجابة سؤال بند (أتحقق من فهمي 5):

$$(K\circ C)(F) = K(\tfrac{5}{9}(F-32)) = \tfrac{5}{9}(F-32) + 273$$

$$(K\circ C)(86) = \tfrac{5}{9}(86-32) + 273 = 303K$$

### إجابات الأسئلة:

9) $\{x | x \neq 5, x \neq \frac{16}{3}\}$

10) $\{x | x \neq -7, x \neq -2\}$

الوحدةُ 5

18 إذا كانَ $f(x)=\sqrt{x-2}\,,\ x\ge 2,\ g(x)=\frac{2}{3-x}\,,\ x>3$، فهلْ يُمكِنُ تكوينُ $(f\circ g)(x)$؟ أُبرِّرُ إجابتي.

أنظر ملحق الإجابات.

19 أَحُلُّ المسألةَ الواردةَ في بدايةِ الدرسِ. أنظر ملحق الإجابات.

**يُعطى عددُ خلايا البكتيريا في أحدِ الأطعمةِ المُبرَّدةِ في الثلّاجةِ بالاقترانِ: $N(T)=23T^2-56T+1,\ 3<T<33$، حيثُ T درجةُ حرارةِ الطعامِ. عندَ إخراجِ الطعامِ منَ الثلّاجةِ تُعطى درجةُ حرارتِهِ بالاقترانِ: $T(t)=5t+1.5$، حيثُ $t$ الزمنُ بالساعاتِ:**

20 أكتبُ الاقترانَ: $(N\circ T)(t)$. (20–23) أنظر ملحق الإجابات.

21 أَجِدُ الزمنَ الذي يصلُ عندهُ عددُ خلايا البكتيريا إلى 6752 خليةً، مُقرِّبًا إجابتي إلى منزلتيْنِ عشريتيْنِ.

22 إذا كانَ $f(x)=ax+b,\ a>0$، وكانَ $(f\circ f)(x)=16x-15$، فأَجِدُ قيمةَ كلٍّ منْ $a$، وَ$b$.

23 أَجِدُ $(f\circ g\circ h)(x)$ في أبسطِ صورةٍ، علمًا بأنَّ: $h(x)=x+3\ ,\ f(x)=x^2+1,\ g(x)=\frac{1}{x}$.

### مهارات التفكير العليا

(24–27) أنظر ملحق الإجابات.

24 **أكتشفُ الخطأَ:** وجدَتْ كلٌّ منْ هدى ووفاءَ ناتجَ $(f\circ g)(x)$، حيثُ: $f(x)=x^2-6x-5,\ g(x)=x^2+5$. أُحدِّدُ إذا كانَتْ إجابةُ أيٍّ منْهُما صحيحةً، مُبرِّرًا إجابتي.

وفاءُ

$$\begin{aligned}(f\circ g)(x)&=f(g(x))\\&=(x^2+5)^2-6x^2-5\\&=x^4+10x^2+25-6x^2-5\\&=x^4+4x^2+20\end{aligned}$$

هدى

$$\begin{aligned}(f\circ g)(x)&=f(g(x))\\&=(x^2+5)^2-6(x^2+5)-5\\&=x^4+10x^2+25-6x^2-30-5\\&=x^4+4x^2-10\end{aligned}$$

25 **مسألةٌ مفتوحةٌ:** أكتبُ اقترانيْنِ $f$، وَ $g$ بحيثُ يكونُ $(f\circ g)(x)=x^2-4x+7$.

26 **تحدٍّ:** إذا كانَ $g(x)=\frac{1}{x+2}\ ;\ f(x)=\frac{1}{x-3}$، فما قاعدةُ $(f\circ g)(x)$؟ ما مجالُهُ؟

27 **تحدٍّ:** إذا كانَ $f(x)=\frac{2x-2}{x-4}$، وكانَ $g(x)=\frac{2x-1}{3}$، فأَحُلُّ المعادلةَ $(f\circ g)(x)=-4$.



### مهارات التفكير العليا

- أُوجِّه الطلبة إلى قراءة الأسئلة في بند (**مهارات التفكير العليا**)، ثم أطلب إليهم حلها ضمن مجموعات ثنائية، وكتابة مُبرِّر للإجابة، وأمنحهم وقتًا كافيًا لنقد مُبرِّرات بعضهم.
- أُرشِد الطلبة إلى إكمال المربع في الاقتران الوارد في السؤال 28

## 5 الإثراء

- أطرح على الطلبة الأسئلة الآتية:
  » إذا كان $f(x)=3x-7$، وكان $(f\circ g)(x)=4x^2+11$، فما قاعدة $g(x)$؟
  $g(x)=\frac{4}{3}x^2+6$
  » إذا كان $f(x)=\sqrt{3x}$، وكان $(g\circ f)(x)=18x+7$، فما قاعدة $g(x)$؟
  $g(x)=6x^2+7$
  » إذا كان $f(x)=\frac{2+3x}{2x-6}\,,\ g(x)=\frac{1}{x}$، فما مجال كلٍّ من $(f\circ g)(x)$، و $(g\circ f)(x)$؟
  مجال $(f\circ g)(x)$ هو جميع الأعداد الحقيقية باستثناء 0 و $\frac{1}{3}$
  مجال $(g\circ f)(x)$ هو جميع الأعداد الحقيقية باستثناء 3 و $\frac{-2}{3}$

## 6 الختام

- أطلب إلى الطلبة البحث في مكتبة المدرسة أو شبكة الإنترنت عن أمثلة تطبيقية على تركيب الاقترانات، ثم كتابة مثال واقعي عن تركيب الاقترانات.

# الدرس 4

## نتاجات الدرس

- تعرُّف العلاقة العكسية، والاقتران العكسي.
- إيجاد الاقتران العكسي، وتحديد مجاله ومداه.
- تعرُّف الاقتران الجذري، وتحديد مجاله ومداه.
- تمثيل الاقتران واحــد لواحد واقترانه العكســي في المستوى الإحداثي نفسه، وتعرُّف العلاقة بينهما.

## التعلُّم القبلي:

- تمييز العلاقة والاقتران.
- تغيير موضوع القانون.

## 1 التهيئة

- أسأل الطلبة عن العلاقة والاقتران والفرق بينهما.
- أكتب العلاقتين الآتيتين، ثم أسأل الطلبة عن المجال والمدى لكلٍّ منهما، وأيهما اقتران:

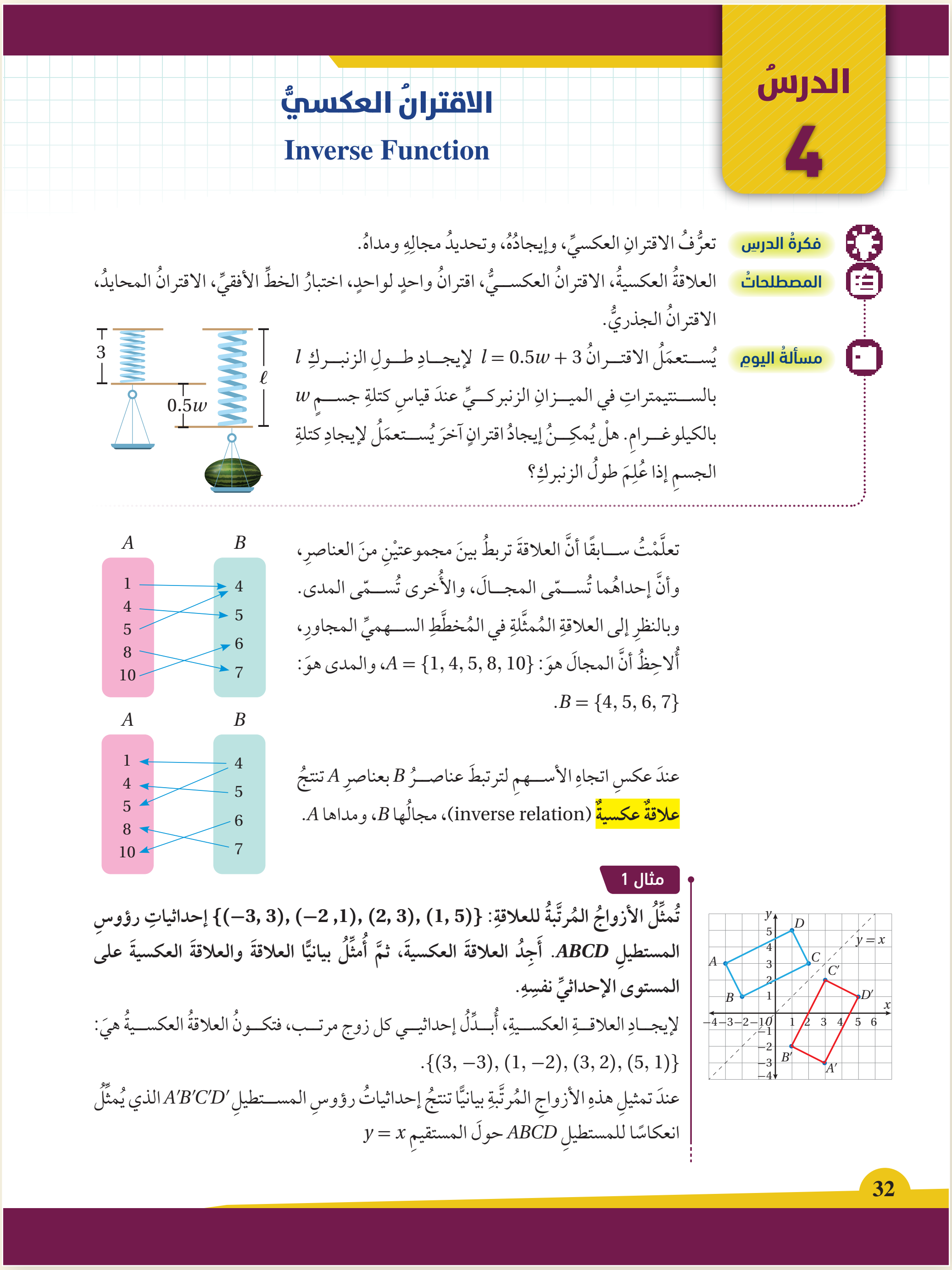
**1)** $\{(1, 3), (3, 5), (3, 6), (4, 8)\}$

**2)** $\{(-2, 4), (-1, 1), (0,0), (1,1), (2,4)\}$

- أطلــب إلى الطلبة إيجاد قيمــة $x$ بدلالة $y$ في كلٍّ ممّا يأتي:

**1)** $y = 2x - 5$ $\qquad x = \dfrac{y+5}{2}$

**2)** $y = \dfrac{3y+4}{5}$ $\qquad x = \dfrac{5y-4}{3}$



الدرس 4

## الاقترانُ العكسيُّ
## Inverse Function

**فكرةُ الدرسِ** تعرُّفُ الاقترانِ العكسيِّ، وإيجادُهُ، وتحديدُ مجالِهِ ومداهُ.

**المصطلحاتُ** العلاقةُ العكسيةُ، الاقترانُ العكســيُّ، اقترانُ واحدٍ لواحدٍ، اختبارُ الخطِّ الأفقيِّ، الاقترانُ المحايدُ، الاقترانُ الجذريُّ.

**مسألةُ اليومِ** يُســتعمَلُ الاقتــرانُ $l = 0.5w + 3$ لإيجــادِ طــولِ الزنبــركِ $l$ بالســنتيمتراتِ في الميــزانِ الزنبركــيِّ عندَ قياسِ كتلةِ جســمٍ $w$ بالكيلوغــرامِ. هلْ يُمكِــنُ إيجادُ اقترانٍ آخرَ يُســتعمَلُ لإيجادِ كتلةِ الجسمِ إذا عُلِمَ طولُ الزنبركِ؟



تعلَّمْتُ ســابقًا أنَّ العلاقةَ تربطُ بينَ مجموعتيْنِ منَ العناصرِ، وأنَّ إحداهُما تُســمّى المجــالَ، والأُخرى تُســمّى المدى. وبالنظرِ إلى العلاقةِ المُمثَّلةِ في المُخطَّطِ الســهميِّ المجاورِ، أُلاحِظُ أنَّ المجالَ هوَ: $A = \{1, 4, 5, 8, 10\}$، والمدى هوَ: $B = \{4, 5, 6, 7\}$.



عندَ عكسِ اتجاهِ الأســهمِ لترتبطَ عناصــرُ $B$ بعناصرِ $A$ تنتجُ **علاقةٌ عكسيةٌ** (inverse relation)، مجالُها $B$، ومداها $A$.

**مثال 1**

**تُمثِّلُ الأزواجُ المُرتَّبةُ للعلاقةِ: $\{(-3, 3), (-2, 1), (2, 3), (1, 5)\}$ إحداثياتِ رؤوسِ المستطيلِ $ABCD$. أَجِدُ العلاقةَ العكسيةَ، ثمَّ أُمثِّلُ بيانيًّا العلاقةَ والعلاقةَ العكسيةَ على المستوى الإحداثيِّ نفسِهِ.**

لإيجــادِ العلاقــةِ العكســيةِ، أُبــدِّلُ إحداثيــي كل زوج مرتــب، فتكــونُ العلاقةُ العكســيةُ هيَ: $\{(3, -3), (1, -2), (3, 2), (5, 1)\}$.

عندَ تمثيلِ هذهِ الأزواجِ المُرتَّبةِ بيانيًّا تنتجُ إحداثياتُ رؤوسِ المســتطيلِ $A'B'C'D'$ الذي يُمثِّلُ انعكاسًا للمستطيلِ $ABCD$ حولَ المستقيمِ $y = x$



32

## 2 الاستكشاف

- أُوجِّه الطلبة إلى قراءة المسألة في بند (**مسألة اليوم**)، ثم أسألهم:
  - » لماذا يستطيل الزنبرك عندما تُعلَّق به كتلة؟ لأنَّ قوة الجاذبية تشد الكتلة إلى الأسفل، فيزداد طول الزنبرك.
  - » إذا عُلِّق بالميزان مادة كتلتها 4 kg، فما طول الزنبرك؟ 5 cm
  - » كيف تُحسَب كتلة جسم عُلِّق بهذا الميزان فأصبح طول الزنبرك 7 cm؟ ما كتلته؟ بتعويض 7 بدل $l$ في المعادلة وحلها لإيجاد $w$. كتلته 8 kg
- أستمع لإجابات الطلبة من دون تقديم تغذية راجعة لهم.

## 3 التدريس

- أُوضِّح للطلبة مفهوم العلاقة العكسية التي تنتج بعكس اتجاه الأسهم في المخطط السهمي، أو بتبديل الإحداثيين في الأزواج المرتبة التي تُمثِّل العلاقة. فإذا كان $(a, b)$ موجودًا في العلاقة $R$، فإنَّ $(b, a)$ يكون موجودًا في العلاقة العكسية للعلاقة $R$.

### مثال 1

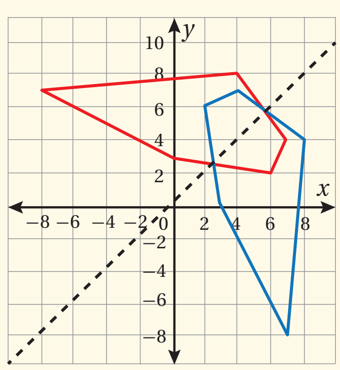
- أُناقِش الطلبة في حل المثال 1 الذي يُبيِّن كيفية إيجاد العلاقة العكسية لعلاقة مكتوبة بصورة أزواج مرتبة، وتمثيل العلاقة ومعكوسها في المستوى البياني نفسه، ومقارنة التمثيلين البيانيين أحدهما بالآخر، مُذكِّرًا إيّاهم بالانعكاس حول مستقيم.

### مثال إضافي

- تُمثِّل العلاقة $\{(2, 6), (3, 0), (4, 7), (7, -8), (8, 4)\}$ رؤوس مضلع خماسي. أجد العلاقة العكسية، وأُمثِّل العلاقتين في المستوى الإحداثي نفسه.

العلاقة العكسية هي:

$\{(-8, 7), (0, 3), (4, 8), (6, 2), (7, 4)\}$، وهي تُمثِّل انعكاسًا لرؤوس المضلع حول المستقيم $y = x$.




ملاحظات المُعلِّم/ المُعلِّمة

........................................
........................................
........................................
........................................
........................................
........................................
........................................
........................................
........................................
........................................
........................................
........................................
........................................
........................................
........................................
........................................
........................................
........................................

- أُوضِّح للطلبة أنَّه يمكننا إيجاد معكوس للاقتران مثلما نجد معكوسًا للعلاقة. غير أنَّ معكوس الاقتران $f(x)$ لا يكون اقترانًا إلا إذا كان كل عنصر في مدى الاقتران $f$ مرتبطًا بعنصر واحد فقــط من مجاله؛ فلا يمكن أنْ يرتبط عنصــران من المجال بعنصر واحد من المدى. ويســمى الاقتران الذي يُحقِّق هذه الخصيصة اقتران واحد لواحد، ويكون معكوســه هو الاقتران العكسي $f^{-1}(x)$.
- أُوجِّــه الطلبة إلى تأمُّــل المُخطَّطين الســهميين في الصفحة 33، ثم رسم معكوس كلٍّ منهما، ثم أسألهم:
  » أيُّ المعكوسين هو اقتران؟
- أُوضِّــح للطلبة اختبار الخط الأفقي؛ لكي يتمكَّنوا من تمييز اقتران واحد لواحد.



**أتحقق من فهمي**

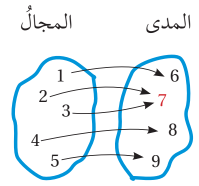
تُمثِّلُ الأزواجُ المُرتَّبةُ للعلاقةِ: $\{(4,3), (-4,3), (1,-3)\}$ إحداثياتِ رؤوسِ المثلثِ $ABC$. أَجِدُ العلاقةَ العكسيةَ، ثمَّ أُمثِّلُ بيانيًّا العلاقةَ والعلاقةَ العكسيةَ على المستوى الإحداثيِّ نفسِهِ. أنظر الهامش.

**رموزٌ رياضيةٌ**

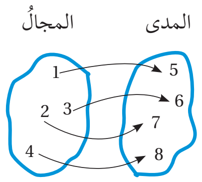
يُقرأُ الرمزُ $f^{-1}(x)$ الاقترانَ العكسيَّ للاقترانِ $f(x)$.

الاقتراناتُ هيَ نوعٌ خاصٌّ منَ العلاقاتِ؛ لأنَّ لها خاصيةً لا تُحقِّقُها جميعُ العلاقاتِ؛ فهيَ تربطُ كلَّ عنصرٍ في المجالِ بعنصرٍ واحدٍ فقطْ في المــدى. وبما أنَّ كلَّ اقترانٍ هوَ علاقةٌ فإنَّهُ يُمكِنُ إيجادُ علاقةٍ عكسيةٍ للاقترانِ (معكوسُ الاقترانِ)، فإذا كانَ المعكوسُ اقترانًا أيضًا سُمِّيَ **اقترانًا عكسيًّا** (inverse function). ويُرمَزُ إلى الاقترانِ العكسيِّ للاقترانِ $f(x)$ بالرمزِ $f^{-1}(x)$.

يُمكِــنُ تحديدُ إذا كانَ معكــوسُ الاقترانِ $f(x)$ يُمثِّلُ اقترانًا أمْ لا بالنظرِ إلى $f(x)$ نفسِــهِ؛ فإذا ارتبطَ كلُّ عنصرٍ في المدى بعنصرٍ واحدٍ فقطْ في المجالِ كانَ المعكوسُ اقترانًا، عندئذٍ يُسمّى $f(x)$ **اقترانَ واحدٍ لواحدٍ** (one to one function).

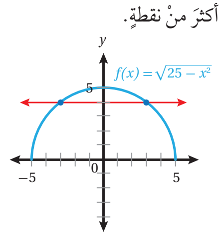


اقترانٌ ليسَ واحدًا لواحدٍ.

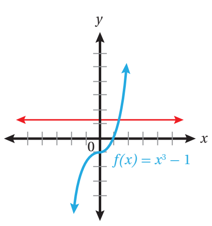


اقترانٌ واحدٍ لواحدٍ.

يُمكِنُ أيضًا استعمالُ طريقةٍ تُســمّى **اختبارَ الخطِّ الأفقيِّ** (horizontal line test)؛ للتحقُّقِ منْ أنَّ الاقترانَ هوَ واحدٌ لواحدٍ، وذلكَ برســمِ أيِّ خطٍّ أفقيٍّ، والتأكُّدِ أنَّهُ لا يقطعُ منحنى $f(x)$ في أكثرَ منْ نقطةٍ.



اقترانٌ ليسَ واحدًا لواحدٍ.

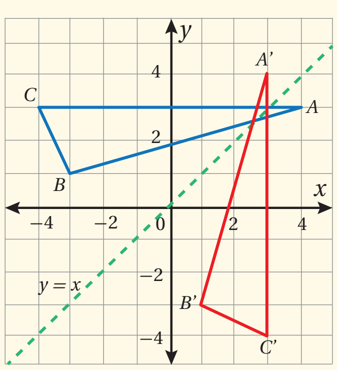


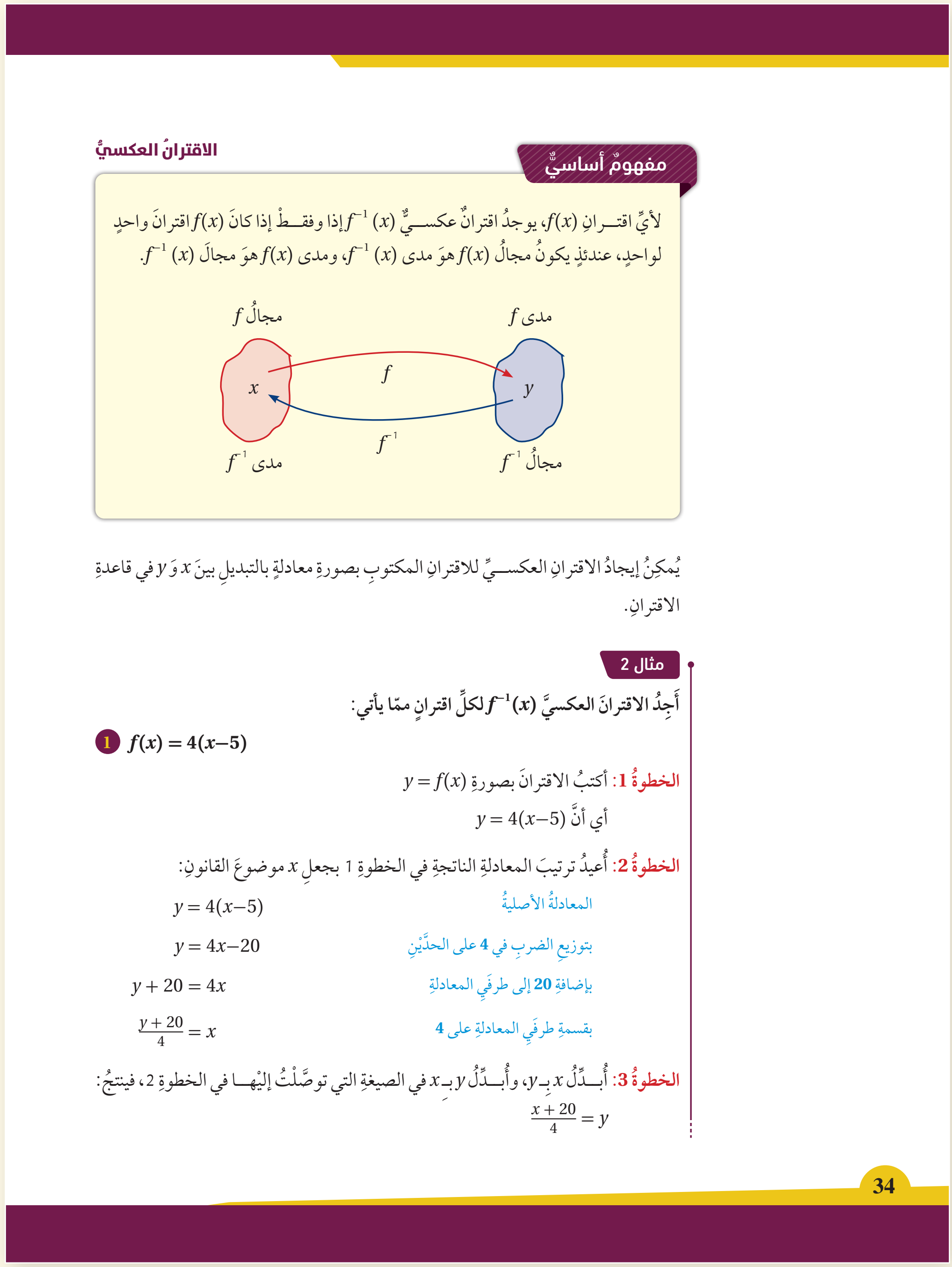
اقترانٌ واحدٍ لواحدٍ.



## إجابة سؤال بند (أتحقق من فهمي 1):

العلاقة العكسية هي: $\{(3, 4), (3, -4), (-3, 1)\}$، وهي تُمثِّل انعكاسًا لرؤوس المثلث حول المستقيم $y = x$.





الاقترانُ العكسيُّ

**مفهومٌ أساسيٌّ**

لأيِّ اقترانٍ $f(x)$، يوجدُ اقترانٌ عكسيٌّ $f^{-1}(x)$ إذا وفقط إذا كانَ $f(x)$ اقترانَ واحدٍ لواحدٍ، عندئذٍ يكونُ مجالُ $f(x)$ هوَ مدى $f^{-1}(x)$، ومدى $f^{-1}(x)$ هوَ مجالَ $f(x)$.



يُمكِنُ إيجادُ الاقترانِ العكسيِّ للاقترانِ المكتوبِ بصورةِ معادلةٍ بالتبديلِ بينَ $x$ وَ $y$ في قاعدةِ الاقترانِ.

**مثال 2**

**أَجِدُ الاقترانَ العكسيَّ $f^{-1}(x)$ لكلِّ اقترانٍ ممّا يأتي:**

1) $f(x) = 4(x-5)$

**الخطوةُ 1:** أكتبُ الاقترانَ بصورةِ $y = f(x)$

أي أنَّ $y = 4(x-5)$

**الخطوةُ 2:** أُعيدُ ترتيبَ المعادلةِ الناتجةِ في الخطوةِ 1 بجعلِ $x$ موضوعَ القانونِ:

| | |
|---|---|
| $y = 4(x-5)$ | المعادلةُ الأصليةُ |
| $y = 4x-20$ | بتوزيعِ الضربِ في 4 على الحدَّيْنِ |
| $y + 20 = 4x$ | بإضافةِ 20 إلى طرفَيِ المعادلةِ |
| $\frac{y+20}{4} = x$ | بقسمةِ طرفَيِ المعادلةِ على 4 |

**الخطوةُ 3:** أُبدِّلُ $x$ بـِ $y$، وأُبدِّلُ $y$ بـِ $x$ في الصيغةِ التي توصَّلْتُ إليْها في الخطوةِ 2، فينتجُ:

$\frac{x+20}{4} = y$

34

## مثال 2

- أُوضِّح للطلبة خطوات إيجاد الاقتران العكسي لاقتران عُلِمت معادلته كما في المثال.
- أكتب على اللوح بعض الأعداد، ثم أطلب إلى الطلبة تعويضها في $f(x)$، وتعويض الأعداد الناتجة في الاقتران العكسي $f^{-1}(x)$، وملاحظة العلاقة بين الاقتران ومعكوسه.

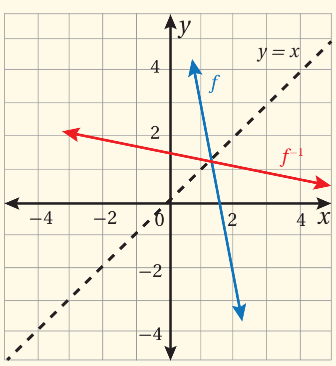
إذا كان $f(a) = b$، فإنَّ $f^{-1}(b) = a$.

- أُوضِّح لهم أيضًا أنَّه لرسم الاقتران العكسي من التمثيل البياني للاقتران، يجب اختيار بعض النقاط، وتبديل ترتيب إحداثي كلٍّ منها، وتعيين النقاط الجديدة في المستوى الإحداثي، ورسم المنحنى (أو المستقيم) المار بها.

## مثال إضافي

- أجد الاقتران العكسي للاقتران: $f(x) = 7 - 5x$، ثم أُمثِّل $f(x), f^{-1}(x)$ في المستوى الإحداثي نفسه.

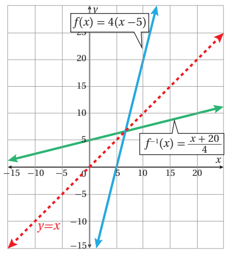
$$f^{-1}(x) = \frac{7-x}{5}$$




## التقويم التكويني:

- أُوجِّه الطلبة إلى حل التدريب في بند (**أتحقق من فهمي**) بعد كل مثال.
- أختار بعض الإجابات التي تحوي أخطاء مفاهيمية، ثم أُناقِشها على اللوح، ولا أذكر اسم الطالب الذي أخطأ في الإجابة؛ تجنبًا لإحراجه.

**الخطوةُ 4:** أكتبُ $f^{-1}(x)$ مكانَ $y$، فيكونُ الناتجُ قاعدةَ الاقترانِ العكسيِّ $f^{-1}(x)$.

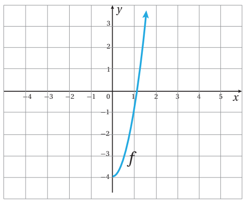



أكتبُ $f^{-1}(x)$ مكانَ $y$، فينتجُ:

$$f^{-1}(x) = \frac{x+20}{4}$$

عندَ تمثيلِ كلٍّ منْ $f(x)$ وَ $f^{-1}(x)$ في المستوى الإحداثيِّ نفسِهِ، أُلاحِظُ أنَّ التمثيلَ البيانيَّ للاقترانِ $f^{-1}(x)$ هوَ انعكاسٌ للتمثيلِ البيانيِّ للاقترانِ $f(x)$ حولَ المستقيمِ $y = x$

**2** $f(x) = 3x^2 - 4, x \geq 0$



باستعمالِ اختبارِ الخطِّ الأفقيِّ، أَجِدُ أنَّ $f(x)$ هوَ اقترانٌ واحدٍ لواحدٍ عندما $x \geq 0$؛ لذا فإنَّ لهُ اقترانًا عكسيًّا.

**الخطوةُ 1:** أكتبُ الاقترانَ بصورةِ $y = 3x^2 - 4$

**الخطوةُ 2:** أُعيدُ ترتيبَ المعادلةِ الناتجةِ في الخطوةِ 1 بجعلِ $x$ موضوعَ القانونِ:

المعادلةُ الأصليةُ $\quad y = 3x^2 - 4$

بإضافةِ 4 إلى طرفَيِ المعادلةِ $\quad y + 4 = 3x^2$

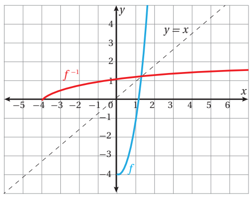
بقسمةِ طرفَيِ المعادلةِ على 3 $\quad \frac{y+4}{3} = x^2$

$x > 0 \quad \sqrt{\frac{y+4}{3}} = x$

**الخطوةُ 3:** أُبدِّلُ $x$ بـ $y$، وأُبدِّلُ $y$ بـ $x$، فينتجُ: $y = \sqrt{\frac{x+4}{3}}$

**الخطوةُ 4:** أكتبُ $f^{-1}(x)$ مكانَ $y$،

فينتجُ: $f^{-1}(x) = \sqrt{\frac{x+4}{3}}$




عندَ تمثيلِ كلٍّ منْ $f(x)$ وَ $f^{-1}(x)$ في المستوى الإحداثيِّ نفسِهِ، أُلاحِظُ أنَّ التمثيلَ البيانيَّ للاقترانِ $f^{-1}(x)$ هوَ انعكاسٌ للتمثيلِ البيانيِّ للاقترانِ $f(x)$ حولَ المستقيمِ $y = x$

**معلومةٌ**

بوجهٍ عامٍّ، لا يوجدُ للاقترانِ التربيعيِّ اقترانٌ عكسيٌّ؛ لأنَّهُ ليسَ اقترانَ واحدٍ لواحدٍ. ولكنْ إذا اختُزِلَ مجالُهُ بالفترةِ التي يكونُ فيها اقترانَ واحدٍ لواحدٍ، كانَ لهُ عندئذٍ اقترانٌ عكسيٌّ.

**رموزٌ رياضيةٌ**

يدلُّ الرمزُ $f^{-1}(x)$ على الاقترانِ العكسيِّ للاقترانِ $f$، أمّا الرمزُ $\frac{1}{f(x)}$ فيدلُّ على مقلوبِ الاقترانِ $f$.



## تعزيز اللغة ودعمها:

أُكرِّر المصطلحات الرياضية المستخدمة في الدرس باللغتين العربية والإنجليزية، مُحفِّزًا الطلبة على استعمالها، مثل: العلاقة العكسية inverse relation، والاقتران العكسي inverse function، واقتران واحد لواحد one to one function، والاقتران الجذري radical function، والاقتران المحايد identity function.

## مثال 3

- أُناقِش الطلبة في النتيجــة الخاصة بتركيب اقتران مع الاقتران العكســي له، وكيفية توظيفها لتحديد إذا كان كلٌّ من اقترانين معطيين يُمثِّل اقترانًا عكسيًّا للآخر أم لا، بناءً على المثال 3.

### أتحقق من فهمي

أَجِدُ الاقترانَ العكسيَّ لكلٍّ منَ الاقترانيْنِ الآتييْنِ: أنظر الهامش.

a) $h(x) = 7x + 5$

b) $g(x) = x^2 + 2, x \geq 0$

مِنْ خصائصِ أيِّ اقترانيْنِ مُتعاكِسيْنِ أنَّ كلًّا منْهُما يَعكسُ أثرَ الآخرِ؛ لذا ينتجُ منْ تركيبِهِما الاقترانُ الذي يُبْقي كلَّ عنصرٍ في مجالِهِما على حالِهِ، وهوَ **الاقترانُ المحايدُ** (identity function) الذي يربطُ كلَّ عنصرٍ بنفسِهِ، وقاعدتُهُ هيَ: $f(x) = x$

### نتيجةٌ

**يكونُ $f^{-1}(x)$ الاقترانَ العكسيَّ للاقترانِ $f(x)$، إذا وفقط إذا كانَ:**

$(f \circ f^{-1})(x) = x$ لجميعِ قيمِ $x$ في مجالِ $f^{-1}(x)$ وَ $(f^{-1} \circ f)(x) = x$ لجميعِ قيمِ $x$ في مجالِ $f(x)$.

**إرشادٌ**

تعني جملةُ (إذا وفقط إذا) أنَّ العبارةَ صحيحةٌ في الاتجاهيْنِ.

تُستعمَلُ النتيجةُ السابقةُ لإثباتِ أنَّ كلًّا منَ اقترانيْنِ معلوميْنِ هوَ اقترانٌ عكسيٌّ للآخرِ، وللتحقُّقِ منْ صحَّةِ الحلِّ عندَ إيجادِ الاقترانِ العكسيِّ.

### مثال 3

**أُثبِتُ أنَّ كلًّا منَ الاقترانيْنِ $f(x) = \frac{x+5}{3}$ وَ $g(x) = 3x - 5$ هوَ اقترانٌ عكسيٌّ للآخرِ بإيجادِ $(f \circ g)(x)$، وَ $(g \circ f)(x)$.**

$(f \circ g)(x) = f(g(x))$ تعريفُ الاقترانِ المُركَّبِ

$= f(3x - 5)$ بتعويضِ $g(x) = 3x - 5$

$= \frac{(3x-5)+5}{3}$ بتعويضِ $3x - 5$ مكانَ $x$ في معادلةِ $f(x)$

$= \frac{3x + (-5+5)}{3}$ بالتجميعِ

$(f \circ g)(x) = x$ بالتبسيطِ

$(g \circ f)(x) = g(f(x))$ تعريفُ الاقترانِ المُركَّبِ



### إجابة سؤال بند (أتحقق من فهمي 2):

a) $f^{-1}(x) = \frac{x-5}{7}$

b) $g^{-1}(x) = \sqrt{x-2}, x \geq 2$

$= g(\frac{x+5}{3})$ بتعويضِ $f(x) = \frac{x+5}{3}$

$= 3(\frac{x+5}{3})-5$ بتعويضِ $\frac{x+5}{3}$ مكانَ $x$ في معادلةِ $g(x)$

$= x+5-5$ باختصارِ العاملِ 3 منَ البسطِ والمقامِ

$(g\circ f)(x) = x$ بالتبسيطِ

إذنْ، كلٌّ منَ الاقترانيْنِ $f(x)$ وَ $g(x)$ هوَ اقترانٌ عكسيٌّ للآخرِ؛ لأنَّ $(f\circ g)(x)=(g\circ f)(x)=x$.

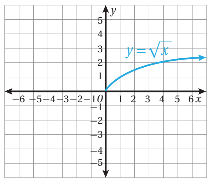
**أتحقق من فهمي** أنظر الهامش.

**أُثبِتُ أنَّ كلًّا منَ الاقترانيْنِ $f(x)= 4x-8$ وَ $g(x) = \frac{x}{4}+2$ هوَ اقترانٌ عكسيٌّ للآخرِ.**

نتجَ في المثالِ الثاني الاقترانُ العكسيُّ $f^{-1}(x) = \sqrt{\frac{x+4}{3}}$ الذي يحوي جذرًا تربيعيًّا لمقدارٍ جبريٍّ، وهوَ نوعٌ خاصٌّ منَ الاقتراناتِ يُسمّى **الاقترانَ الجذريَّ** (radical function)، مثلَ:

$f(x) = \frac{\sqrt{x-x^3}}{\sqrt[3]{1-x}}$ $\quad f(x) = \sqrt[4]{\frac{1}{x}}$ $\quad f(x) = \sqrt[3]{\frac{x+12}{8}}$ $\quad f(x) = \sqrt{5+x^2}$

إذا كانَ دليلُ الجذرِ فرديًّا مثلَ: $\sqrt[5]{\ }$ , $\sqrt[3]{\ }$ كانَ مجالُ الاقترانِ الجذريِّ جميعَ الأعدادِ الحقيقيةِ. ومداهُ جميعَ الأعدادِ الحقيقيةِ. أمّا إذا كانَ دليلُهُ زوجيًّا مثلَ: $\sqrt[4]{\ }$ , $\sqrt{\ }$ ، فإنَّ مجالَهُ يكونُ مجموعةَ الأعدادِ التي تجعلُ المقدارَ تحتَ رمزِ الجذرِ عددًا غيرَ سالبٍ؛ لأنَّ الجذورَ الزوجيةَ للأعدادِ السالبةِ ليسَتْ حقيقيةً، ويكونُ مداهُ مجموعةً منَ الأعدادِ الحقيقيةِ غيرِ السالبةِ. فمثلًا، $f(x)=\sqrt{x}$ مجالُهُ $x \geq 0$ ، ومداهُ $y \geq 0$، وتمثيلُهُ البيانيُّ كما في الشكلِ الآتي:




**أتعلَّمُ**

يمكنُني أنْ أمثِّلَ الاقترانَ الجذريَّ بيانيًّا بإنشاءِ جدولِ قيمٍ أفترضُها للمُتغيّرِ $x$ منْ مجالِ الاقترانِ، وأعوّضُها في قاعدةِ الاقترانِ لأجدَ قيمَ $y$، وأعيّنُ النقاطَ في المستوى الإحداثيِّ، وأرسمُ المنحَنى الذي يمرُّ بها.



## مثال إضافي

- أُثبِت أنَّ كلًّا من الاقتــران: $f(x)= 4x^2-1, x \geq 0$ والاقتران: $g(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x+1}\ , x \geq -1$ هو اقتران عكسي للآخر.

$(f\circ g)(x) = 4(\frac{1}{2}\sqrt{x+1}\ )^2 - 1$

$= 4(\frac{1}{4})(x+1)-1 = x$

$(g\circ f)(x) = \frac{1}{2}\sqrt{(4x^2-1)+1} = \frac{1}{2}\sqrt{4x^2}$

$= \frac{1}{2}\ (2x) = x$

إذن، كل مــن $f(x), g(x)$ اقتــران عكســي للآخر؛ لأن $(g\circ f)(x) = (f\circ g)(x) = x$

## إجابة سؤال بند (أتحقق من فهمي 3):

$g(x) = \frac{x}{4} + 2$

$f(x) = 4x - 8$

$(f\circ g)\ \ (x) = 4\left(\frac{x}{4} + 2\right) - 8$

$= x + 8 - 8 = x$

$(g\circ f)\ (x) = \frac{4x-8}{4} + 2$

$= \frac{4x}{4} + \frac{8}{4} + 2$

$x - 2 + 2 = x$

### مثال 4

**أَجِدُ مجالَ الاقترانِ $f(x)=\sqrt{2x-6}$ ومداهُ، ثمَّ أَجِدُ الاقترانَ العكسيَّ لهُ.**

مجالُ هذا الاقترانِ هوَ قيمُ $x$ التي تجعلُ $2x-6 \geq 0$:

| | |
|---|---|
| أكتبُ المتباينةَ | $2x-6 \geq 0$ |
| بإضافةِ 6 إلى الطرفيْنِ | $2x-6+6 \geq 0+6$ |
| بالتبسيطِ | $2x \geq 6$ |
| بقسمةِ الطرفيْنِ على 2 | $x \geq 3$ |

إذنْ، مجالُ $f(x)$ هوَ $x \geq 3$، أوِ الفترةُ $[3, \infty)$، ومداهُ جميعُ الأعدادِ الحقيقيةِ منْ قيمتِهِ عندَ 3 فصاعدًا؛ لأنَّ المقصودَ بالجذرِ هنا هوَ الجذرُ الموجبُ. فالمدى هوَ $y \geq 0$، أوِ الفترةُ $[0, \infty)$ .

لإيجادِ الاقترانِ العكسيِّ، أكتبُ الاقترانَ بصورةِ $y=\sqrt{2x-6}$ ، ثمَّ أَحُلُّ المعادلةَ لإيجادِ $x$ بدلالةِ $y$:

| | |
|---|---|
| المعادلةُ الأصليةُ | $y=\sqrt{2x-6}$ |
| بتربيعِ الطرفيْنِ | $y^2=2x-6$ |
| بإضافةِ 6 إلى الطرفيْنِ | $y^2+6=2x$ |
| بقسمةِ الطرفيْنِ على 2 | $\frac{y^2+6}{2}=x$ |

بإبدالِ $y$ بـ $x$ ، وَ $x$ بـ $y$ في المعادلةِ الناتجةِ، فإنَّهُ ينتجُ: $y=\frac{x^2+6}{2}$

أكتبُ $f^{-1}(x)$ مكانَ $y$، فينتجُ: $f^{-1}(x)=\frac{x^2+6}{2}$

يكونُ مجالُ $f^{-1}(x)$ هوَ مدى $f(x)$؛ أيْ مجالُهُ الفترةُ $[0, \infty)$، ومداهُ هوَ مجالُ $f(x)$؛ أيِ الفترةُ $[3, \infty)$.

**أتذكَّرُ**

عملياتُ الجمعِ، والطرحِ، والضربِ في عددٍ موجبٍ لا تُغيِّرُ اتجاهَ رمزِ المتباينةِ. أمّا الضربُ في عددٍ سالبٍ فيعكسُ اتجاهَ رمزِ المتباينةِ.

**أتذكَّرُ**

مجالُ الاقترانِ العكسيِّ $f^{-1}(x)$ هوَ مدى الاقترانِ $f$ .

**أتحقق من فهمي**

**أَجِدُ مجالَ $g(x)=\sqrt{3x+12}-2$ ومداهُ، ثمَّ أَجِدُ الاقترانَ العكسيَّ لهُ.** أنظر الهامش.

تتطلَّبُ بعضُ المسائلِ الحياتيةِ استعمالَ مفهومِ الاقترانِ العكسيِّ لحلِّها. فإذا عُلِمَ طولُ نصفِ قُطْرِ كرةٍ أمكنَ إيجادُ حجمِها بالتعويضِ المباشرِ في قانونِ حسابِ حجمِ الكرةِ: $V(r)=\frac{4}{3}r^3\pi$ . ولكنْ إذا عُلِمَ الحجمُ، وطُلِبَ إيجادُ طولِ نصفِ القُطْرِ، فيجبُ تغييرُ الصيغةِ الخاصةِ بإيجادِ الحجمِ $V$ إلى صيغةٍ أُخرى لإيجادِ $r$، وهنا يبرزُ مفهومُ الاقترانِ العكسيِّ.

**إرشادٌ**

لا يُستعمَلُ رمزُ الاقترانِ العكسيِّ $f^{-1}(x)$ في المسائلِ العمليةِ، وإنَّما يُستعمَلُ رمزٌ مثلُ $r=r(V)$ الذي يُعبِّرُ عنْ نصفِ القُطْرِ بدلالةِ الحجمِ.

38

**إجابة سؤال بند (أتحقق من فهمي 4):**

مجال $g(x)$ هو الأعداد الحقيقية التي لا تقل عن $-4$؛ أيْ $\{x|x \geq -4\}$ ، أو الفترة $[-4, \infty)$.

ومداه الأعداد الحقيقية التي لا تقل عن $-2$ ؛ أيْ $\{y|y \geq -2\}$، أو الفترة $[-2, \infty)$.

$$g^{-1}(x)=\frac{(x+2)^2-12}{3}, x \geq -2$$

## مثال 4

- أُوضِّح للطلبة مفهوم الاقتران الجذري ومجاله ومداه، ثم أُناقِشهم في المثال 4، مُذكِّرًا إيّاهم بخصائص علاقة التباين ($\leq$، $\geq$، $<$، $>$).
- أُوضِّح لهم أيضًا كيفية حل المعادلة التي تحوي جذورًا عند إيجاد الاقتران العكسي لاقتران جذري.

## مثال إضافي

- أجد المجال والمدى والاقتران العكسي لكلٍّ من الاقترانين الآتيين:

**a)** $g(x)=2+\sqrt{9-3x}$

**b)** $h(x)=\sqrt[3]{4x-15}$

a) المجال: $x \leq 3$ أو الفترة $(-\infty, 3]$، والمدى $y \geq 2$ أو الفترة $[2, \infty)$, $x \geq 2$, $g^{-1}=$.

$$g^{-1}(x)=\frac{9-(x-2)^2}{3}, x \geq 2$$

b) المجال: جميع الأعداد الحقيقية، والمدى: جميع الأعداد الحقيقية.

$$h^{-1}(x)=\frac{x^3+15}{4}$$

## إرشادات للمُعلِّم/ للمُعلِّمة

أُوضِّح للطلبة كيف يُوظَّف الاقتران العكسي في مسائل عملية بحيث يصبح المتغير المستقل تابعًا، والمتغير التابع مستقلًّا. فالاقتران الذي يربط محيط مربع بطول ضلعه هو $p(s)=4s$، والاقتران العكسي له هو $s(p)=\frac{p}{4}$، فينتج طول الضلع بدلالة المحيط.

أُوضِّح للطلبة أيضًا اختلاف خطوات إيجاد الاقتران العكسي في المسائل العملية عنها في الطريقة السابقة؛ إذ لا يُبدَّل المتغيران لأنَّهما مسميان لكميات معينة خاصة، ولا يستعمل رمز الاقتران العكسي.

## مثال 5: من الحياة

- أُناقِش الطلبة في خطوات حل المثال 5 الذي يشير إلى اســتعمال مفهوم الاقتران العكسي في موقف عملي حياتي.

## مثال إضافي

- دفع مصطفى مبلغ 1385 دينارًا تكلفة لبضاعة اشتراها شـاملة ضريبة المبيعـات بنسـبة 12%، ودفع مبلغ 13 دينارًا أجرة شحن:

a) أكتب اقترانًا يُعبِّر عـن التكلفة $C$ بدلالة ثمن البضاعة الأصلي $p$. $C(p) = 1.12p + 13$

b) أكتب اقترانًا يُعبِّر عـن الثمن الأصلي بدلالة التكلفة. $p(C) = \dfrac{C - 13}{1.12}$

c) ما الثمـن الأصلي للبضاعة التي اشـتراها مصطفى؟ 1225 دينارًا.



### مثال 5: من الحياة

**فيزياءُ: سـقطَ جسمٌ ساكنٌ منَ ارتفاعِ 200 m عنْ سـطحِ الأرضِ، فكانَ موقعُه $s$ بالنسبةِ إلى الأرضِ بالأمتارِ بعدَ $t$ ثانيةً منْ سقوطِهِ يعطى بالاقتران $s(t) = 200 - 4.9t^2$. أُعبِّرُ عنْ الزمن $t$ بصورةِ اقترانٍ بدلالةِ الموقعِ $s$، ثمَّ أَجِدُ الزمنَ الذي يكونُ عنده موقعُ الجسمِ 50 m فقطْ.**

إنَّ التعبيـرَ عنْ $t$ بدلالةِ $s$ يعني إيجادَ الاقترانِ العكسـيِّ للاقترانِ $s(t)$. ولأنَّ الزمنَ $t$ لا يكونُ سالبًا؛ فإنَّ مجالَ $s(t)$ هوَ $t \geq 0$، وفيهِ يكونُ $s(t)$ اقترانَ واحدٍ لواحدٍ، ولهُ اقترانٌ عكسيٌّ.

**الخطوةُ 1:** أكتبُ الاقترانَ بصورةِ $s = 200 - 4.9t^2$

**الخطوةُ 2:** أجعلُ $t$ موضوعَ القانونِ.

$s = 200 - 4.9t^2$ المعادلةُ الأصليةُ

$s - 200 = -4.9t^2$ بطرحِ **200** منْ طرفَي المعادلةِ

$\dfrac{s-200}{-4.9} = t^2$ بقسمةِ طرفَي المعادلةِ على **−4.9**

$\dfrac{200-s}{4.9} = t^2$ بضربِ البسطِ والمقامِ في **−1**

$\sqrt{\dfrac{200-s}{4.9}} = t$ بأخذِ الجذرِ التربيعيِّ الموجبِ للطرفيْنِ

إذنْ، الاقترانُ الذي يُعبِّرُ عنِ الزمنِ بدلالةِ الموقعِ هوَ: $t(s) = \sqrt{\dfrac{200-s}{4.9}}$

$t(50) = \sqrt{\dfrac{200-50}{4.9}}$ بتعويضِ **$s = 50$**

$\approx 5.53$ باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ

إذنْ، يكونُ موقعُ الجسمِ 50 m بعدَ مُضِيِّ 5.53 ثوانٍ تقريبًا منْ لحظةِ سقوطِهِ.

كتلةُ رأسِ الطفلِ حديثِ الولادةِ تساوي رُبْعَ كتلةِ جسمِهِ تقريبًا.

### أتحقق من فهمي

**يرتبطُ محيطُ الرأسِ $C$ للطفلِ بطولِهِ $S$ (كلا القياسيْنِ بالسنتيمترِ) عنْ طريقِ الاقترانِ: $H(C) = 2.15C - 26.75$** أنظر الهامش.

a) أكتبُ اقترانًا يُعبِّرُ عنْ محيطِ الرأسِ $C$ بدلالةِ طولِ الطفلِ $H$.

b) أَجِدُ محيطَ رأسِ طفلٍ طولُهُ 66 cm



### إجابة سؤال بند (أتحقق من فهمي 5):

a) $C(H) = \dfrac{H + 26.75}{2.15}$

b) $C \approx 43.1$ cm

## أتدرب وأحل المسائل

(1–4) أنظر ملحق الإجابات.

أُحدِّدُ الاقترانَ الذي لهُ اقترانٌ عكسيٌّ في كلٍّ ممّا يأتي، مُبرِّرًا إجابتي، ثمَّ أكتبُ الاقترانَ العكسيَّ (إنْ وُجِدَ):

**1** $f = \{(2, 6), (-3, 6), (4, 9), (1, 10)\}$

**2** $h = \{(0, 0), (1, 1), (2, 16), (3, 81)\}$

**3** $f: A \to B$

$4 \to 7$, $5 \to 9$, $7 \to 13$, $8 \to 15$

**4** $g: C \to D$

$-3 \to 3$, $3 \to 3$, $-7 \to 7$, $6 \to 6$

إذا كانَ $f(x) = 3(\frac{x}{2} + 4)$، فأَجِدُ قيمةَ كلٍّ ممّا يأتي:

**5** $f(-2)$ $9$

**6** $f(4)$ $18$

**7** $f^{-1}(9)$ $-2$

**8** $f^{-1}(18)$ $4$

أَجِدُ الاقترانَ العكسيَّ لكلٍّ منَ الاقتراناتِ الآتيةِ:

**9** $f(x) = x + 7$ $f^{-1}(x) = x - 7$

**10** $f(x) = 8x$ $f^{-1}(x) = \frac{x}{8}$

**11** $f(x) = \frac{x}{2} + 6$ $f^{-1}(x) = 2(x-6)$

**12** $f(x) = \frac{3x - 6}{5}$ $f^{-1}(x) = \frac{5x + 6}{3}$

**13** $f(x) = 4x^3$ $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{\frac{x}{4}}$

**14** $g(x) = 4 + \sqrt{6-3x}, x \leq 2$ $g^{-1}(x) = \frac{6-(x-4)^2}{3}, x \geq 4$

**15** $g(x) = \frac{8-3x}{5x}, x \neq 0$

$g^{-1}(x) = \frac{8}{5x+3}, x \neq \frac{-3}{5}$

**16** $j(x) = (x-2)^2 + 4, x \geq 2$ $f^{-1}(x) = 2 + \sqrt{x-4}, x \geq 4$

**17** أُثبِتُ أنَّ كلًّا منَ الاقترانيْنِ $f(x), g(x)$ هوَ اقترانٌ عكسيٌّ للآخرِ:

$f(x) = (x+3)^2 + 2, x \geq -3, g(x) = -3 + \sqrt{x - 2}, x \geq 2$ أنظر ملحق الإجابات.

**18** أُثبِتُ أنَّ $f(x) = \frac{x}{x - 1}, x \neq 1$ هوَ اقترانٌ عكسيٌّ لنفسِهِ. أنظر ملحق الإجابات.

**19** **صناعةٌ**: إذا كانَ $C(x)$ يُمثِّـلُ التكلفةَ $C$ بالدنانيرِ لإنتاجِ $x$ وحدةً منْ مصابيحِ الإنارةِ، فماذا يُمثِّلُ المقدارُ $C^{-1}(23000)$؟

عدد المصابيح التي يُمكِن إنتاجها بمبلغ قدره 23000 دينار.



## 4 التدريب

- أُوجِّه الطلبة إلى قراءة الأسـئلة في بند (**أتدرب وأحل المســائل**)، ثم أطلب إليهم حل الأســئلة (12–1)، وأُتابِعهم في هذه الأثناء.
- أختار بعض الأخطاء التي وقع فيها الطلبة من دون ذكر أسمائهم؛ تجنبًا لإحراجهم، ثم أُناقِشهم فيها.

**إرشاد:** أتحقَّق من إجابة السؤالين 7 و8 من دون إيجاد قاعدة الاقتران العكسي؛ إذ يجب أنْ يفهم الطلبة العلاقة بين الاقتران والاقتران العكسي له، فإذا كان $f(a) = b$ فإنَّ $f^{-1}(b) = a$ تلقائيًّا.

**ملحوظة:** هذان الســؤالان مرتبطان بالسؤالين 5 و6 على التوالي.

## الواجب المنزلي:

- أطلب إلى الطلبة أنْ يحلوا في البيت جميع المســائل الواردة في الصفحة الحادية عشرة من كتاب التمارين، مُحدِّدًا لهم المسائل التي يمكنهم حلها في نهاية كل حصة بحسب ما يُقدَّم من أمثلة الدرس وأفكاره.
- يمكن أيضًا إضافة المسائل التي لم يحلها الطلبة داخل غرفة الصف إلى الواجب البيتي.
- في اليوم التالي، أَطَّلِع على حلول الطلبة، وأُناقِشـهـم في أيِّ صعوبات واجهوها في أثناء الحل.

## تنويع التعليم

بعد حل السؤال 18، أطلب إلى الطلبة البحث عن اقترانات أُخرى تكون عكسية لنفسها.

من الإجابات المحتملة:

$f(x) = \frac{1}{x}$ ، $f(x) = \frac{a}{x}$ ، حيث $a$ عدد حقيقي.

$f(x) = a - x$، حيث $a$ عدد حقيقي، وغيره.

## مهارات التفكير العليا

- أُوجِّه الطلبة إلى قراءة الأسئلة في بند (**مهارات التفكير العليا**)، ثم أطلب إليهم حلها ضمن مجموعات ثنائية، وكتابة مُبرِّر للإجابة، وأمنحهم وقتًا كافيًا لنقد مُبرِّرات بعضهم.
- في السؤال 28، يتعيَّن على الطلبة إيجاد الاقتران المُركَّب والاقتران العكسي للاقتران $g(x)$، ثم القيمة $g^{-1}(34)$، ثم مساواتهما، وحل المعادلة التربيعية الناتجة، والانتباه أنَّ $x$ موجبة. أسألهم:

» كيف يمكن إيجاد $g^{-1}(34)$ من دون إيجاد الاقتران العكسي؟

## 5 الإثراء

- أطرح على الطلبة المسألة الآتية:

» إذا كان $f(x) = 5-3x$، وكان $g(x)=\dfrac{2x-3}{7}$، فأجد كلًّا ممّا يأتي، مُدوِّنًا استنتاجي:

$(f\circ g)(x)$, $(f\circ g)^{-1}(x)$, $(f^{-1}\circ g^{-1})(x)$, $(g^{-1}\circ f^{-1})(x)$

## 6 الختام

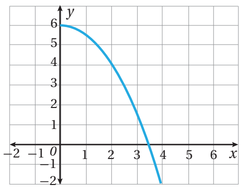
- أطلب إلى كل طالب أنْ يكتب على ورقة اقترانًا والاقتران العكسي له، واقترانًا ليس له اقتران عكسي، واقترانًا عكسيًّا لنفسه، ثم يُسلِّمني الورقة عند الخروج من الصف.

## تعليمات المشروع:

- أُوجِّه الطلبة إلى متابعة تنفيذ الخطوتين 4 و5 من المشروع.
- أُذكِّر الطلبة بأنَّ موعد عرض نتائج المشروع قريب؛ لذا يتعيَّن عليهم وضع اللمسات النهائية على المشروع، والتأكُّد أنَّ عناصر المشروع جميعها موجودة يوم العرض.



**20** أرسمُ منحنى الاقترانِ العكسيِّ للاقترانِ $f$ المجاورِ في المستوى الإحداثيِّ نفسِهِ، مُعيِّنًا المجالَ والمدى لكلٍّ منْ $f$ وَ $f^{-1}$. 20–28 (أنظر ملحق الإجابات).




**21** أَجِدُ الاقترانَ العكسيَّ للاقترانِ:
$f(x) = x^2-2x+5\ ,\ -3 \le x \le 1$، ثمَّ أُمثِّلُ $f(x)$ وَ $f^{-1}(x)$ بيانيًّا في المستوى الإحداثيِّ نفسِهِ.
(إرشادٌ: أكتبُ $f(x)$ بصورةِ $(x+b)^2+c$ باستعمالِ إكمالِ المربعِ).

**22** **كيمياءُ:** في دورقٍ 100 mL منْ أحدِ المحاليلِ، منْها 25 mL منْ حامضِ الهيدروكلوريكِ. إذا أُضيفَ إلى الدورقِ $n$ mL منْ محلولٍ مُشابِهٍ، تركيزُ الحامضِ فيهِ 60%، فإنَّ تركيزَ الحامضِ في الدورقِ يُعطى بالاقترانِ: $C(n) = \frac{25+0.6n}{100+n}$. أُعبِّرُ عنْ $n$ بصورةِ اقترانٍ بدلالةِ التركيزِ $C$، ثمَّ أَجِدُ عددَ المِلّيلتراتِ $n$ التي يجبُ إضافتُها ليصبحَ تركيزُ الحامضِ في الدورقِ 50%

**23** أَحُلُّ المسألةَ الواردةَ في بدايةِ الدرسِ.

**24** تُعطى مِساحةُ السطحِ الكليةُ $A$ للأسطوانةِ التي نصفُ قُطْرِ قاعدتِها $r$، وارتفاعُها 40 cm بالاقترانِ:

$A(r) = 2\pi r^2 + 80\,\pi r$. أُعبِّرُ عنْ نصفِ القُطْرِ $r$ بصورةِ اقترانٍ بدلالةِ المِساحةِ $A$، ثمَّ أَجِدُ طولَ نصفِ قُطْرِ قاعدةِ أسطوانةٍ مِساحةُ سطحِها الكليةُ $2000\ cm^2$

**25** أَجِدُ الاقترانَ العكسيَّ للاقترانِ $f(x)=\sqrt[3]{x}$، ثمَّ أُمثِّلُ $f(x)$ , $f^{-1}(x)$ بيانيًّا في المستوى الإحداثيِّ نفسِهِ.

### مهارات التفكير العليا

**26** **تبريرٌ:** إذا كانَ للاقترانِ $f(x)$ اقترانٌ عكسيٌّ، وكانَ لهُ صفرٌ عندما $x = 4$، فما الذي يُمكِنُ استنتاجُهُ عنْ منحنى $f^{-1}(x)$؟

**27** **مسألةٌ مفتوحةٌ:** أكتبُ قاعدةَ اقترانٍ واحدٍ لواحدٍ والاقترانَ العكسيَّ لهُ، ثمَّ أُثبِتُ أنَّ كلًّا منْهُما اقترانٌ عكسيٌّ للآخرِ.

**28** **تحدٍّ:** إذا كانَ $f(x) = x^2+3$، وَ $g(x) = 5x-1$، وَ $x > 0$، فأَحُلُّ المعادلةَ: $(f\circ g)(x) = g^{-1}(34)$.



### إرشادات:

- في معرض مناقشة الطلبة في السؤال 20، أسألهم:

» كيف يمكن رسم منحنى الاقتران العكسي من التمثيل البياني للاقتران؟

- أستمع لإجابات الطلبة. وفي حال لم يتوصَّلوا إلى إجابة صحيحة، فأُذكِّرهم بالعلاقة بين منحنى الاقتران والاقتران العكسي، وربط ذلك بالمثال 1، وتمثيل العلاقة والعلاقة العكسية.

### تنبيه:

عند حل السؤال 24، أُوجِّه الطلبة إلى إكمال المربع؛ لكتابة المساحة بصورة مشابهة لتلك التي وردت في السؤال 21

# الدرس 5

## نتاجات الدرس

- كتابة الحد التالي في متتالية معطاة باستعمال العلاقة بين حدودها.
- كتابة حدود متتالية إذا عُلِم حدها العام.
- استنتاج قاعدة الحد العام لمتتاليات خطية، وتربيعية، وتكعيبية.
- حل مسائل حياتية عن المتتاليات.

## التعلُّم القبلي:

- إكمال متتاليات خطية وتربيعية وتكعيبية معطاة بعض حدودها.
- التعبير عن الحد العام لمتتاليات خطية وتربيعية وتكعيبية بمقدار جبري.
- تصنيف المتتاليات إلى خطية، وتربيعية، وتكعيبية.

## 1 التهيئة

- أكتب على اللوح المتتاليات الآتية:

**1)** 1, 5, 9, 13, ...

**2)** 1, 4, 9, 16, ...

**3)** 2, 9, 28, 65, ...

- أطلب إلى الطلبة كتابة الحدود الثلاثة التالية في كل متتالية.
- أطلب إلى الطلبة كتابة الحد العام لكل متتالية.
- أطلب إلى الطلبة تصنيف المتتاليات إلى خطية، وتربيعية، وتكعيبية بحسب حدها العام.

---

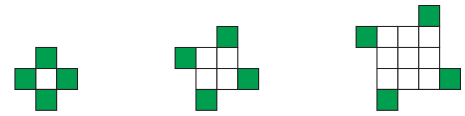
## الدرس 5

# المتتالياتُ
# Sequences

**فكرةُ الدرسِ** استنتاجُ قاعدةِ الحدِّ العامِّ لمتتالياتٍ تربيعيةٍ، وتكعيبيةٍ.

**المصطلحاتُ** المتتاليةُ، الحدُّ، الحدُّ العامُّ.

**مسألةُ اليومِ** تبيّنُ النماذجُ الآتيةُ أوّلَ 3 حدودٍ منْ نمطٍ هندسيٍّ. أستعملُ النمطَ لأكملَ الجدولَ أدناه:



النموذجُ (3)    النموذجُ (2)    النموذجُ (1)

| النموذجُ | 1 | 2 | 3 | 4 | $n$ |
|---|---|---|---|---|---|
| عددُ المربعاتِ البيضاءِ | 1 | 4 | 9 | | |
| عددُ المربعاتِ الخضراءِ | 4 | 4 | 4 | | |

تُعَدُّ **المتتاليةُ** (sequence) اقترانًا مجالُهُ مجموعةُ الأعدادِ الصحيحةَ الموجبةَ، أوْ مجموعةٌ جزئيةٌ منْها، ومداهُ مجموعةٌ جزئيةٌ منْ مجموعةِ الأعدادِ الحقيقيةِ.

**مراجعةُ مفهومٍ** **المتتاليةُ**

**المتتاليةُ** هيَ مجموعةٌ منَ الأعدادِ تَتْبَعُ ترتيبًا مُعيّنًا، ويُسمّى كلُّ عددٍ فيها **حدًّا** (term).

**مثال 1**

**أَجِدُ الحدودَ الثلاثةَ التاليةَ لكلِّ متتاليةٍ ممّا يأتي:**

**1** **2 , 5 , 8 , 11 , ...**

بطرحِ أيِّ حدَّيْنِ متتاليَيْنِ، أَجِدُ أنَّ كلَّ حدٍّ يزيدُ على الحدِّ السابقِ بمقدارِ 3، إذنْ تتزايدُ المتتاليةُ بمقدارِ 3، والحدودُ الثلاثةُ التاليةُ هيَ:

$$2 \underbrace{,}_{+3} 5 \underbrace{,}_{+3} 8 \underbrace{,}_{+3} 11 \underbrace{,}_{+3} 14 \underbrace{,}_{+3} 17 \underbrace{,}_{+3} 20, \ldots$$

**أتذكَّرُ** قدْ تنتجُ المتتاليةُ منْ إضافةِ عددٍ ثابتٍ لحدودِها، أوْ منْ ضربِ حدودِها في عددٍ ثابتٍ، أوْ منْ كلتا العمليتيْنِ معًا.

## 2 الاستكشاف

- أُوجِّه الطلبة إلى قراءة المسألة في بند (**مسألة اليوم**)، ثم أسألهم:
  » كيف يمكن التعبير عن تطور النماذج في النمط الهندسي؟ بصيغة جبرية.
  » هل يُمثِّل تطور نماذج النمط الهندسي متتالية؟ لماذا؟ نعم، لأنَّها تتبع ترتيب ما.
  » أيكم يُكمِل الجدول بعدد المربعات البيضاء والخضراء؟ $4, 16$
  » أيكم يستطيع كتابة الحد العام للمربعات البيضاء والخضراء؟ $4, n^2$
  » هل هذه المتتالية خطية، أم تربيعية، أم تكعيبية، أم غير ذلك؟ تربيعية.
- قد لا يتمكَّن الطلبة من إيجاد الحد العام، ولكن سؤالهم عنها سيثير فضولهم عن موضوع الدرس.
- أستمع لإجابات الطلبة من دون تقديم تغذية راجعة لهم، ثم أسألهم كل مرة:
  » مَنْ يُؤيِّد الإجابة؟
  » مَنْ لديه إجابة أُخرى؟
  » أذكرها.

وذلك لتعزيز مهارات التواصل واحترام الـــرأي والرأي الآخر لديهم. بعد ذلك أُخبِر الطلبة أنَّهم سيتعرَّفون هذا النوع من المتتاليات في الدرس، ثم أكتب العنوان على اللوح.

## 3 التدريس

- أُوضِّح للطلبة أنَّ المتتالية تتكوَّن من حدود، لكلٍّ منها رتبة تُمثِّل ترتيب الحد في المتتالية.
- أُخبِر الطلبة أنَّ المتتاليـــة اقتران مجاله مجموعة الأعداد الطبيعية، أو مجموعة جزئية منها، ومداه مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية.

### مثال 1

- أُوضِّح للطلبة أنَّه يمكن وصف المتتالية وكتابة الحدود التالية عن طريق الحدود الأولى للمتتالية.
- أُذكِّر الطلبة بأنَّ المتتاليات الثلاث الأولى قد درسوها سابقًا.
- أكتب حدود المتتالية في الفرع الرابع على اللوح، ثم أُحلِّلها إلى عواملها الأولية.
- أطلب إلى أحد الطلبة أنْ يكتب كل حد من حدود المتتالية في صورة $\left(\frac{1}{3}\right)^n$.

**إرشاد:**
قد يؤدي تنظيم حـــدود المتتالية في جدول إلى فهم الطلبـــة الموضوع بصورة أفضل، وبخاصة الطلبة من ذوي المستوى دون المتوسط.

**ملاحظات المُعلِّم/ المُعلِّمة**

........................................

## مثال إضافي

- أجد الحدود الثلاثة التالية لكل متتالية ممّا يأتي:

1) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$

2) 0.1 , 0.01 , 0.001 , 0.0001 ...

الحل:

1) $\frac{1}{32}, \frac{1}{64}, \frac{1}{128}, \ldots$

2) 0.00001 , 0.000001 , 0.0000001 , ...

## التقويم التكويني:

- أُوجِّه الطلبة إلـى حل التدريب في بنـد (**أتحقق من فهمي**) بعد كل مثال (فرديًّا، أو ضمن مجموعات).
- أتجوَّل بين الطلبة مُرشِدًا، ومُساعِدًا، ومُوجِّهًا، وأُقدِّم لهم التغذية الراجعة.
- أختار بعض الإجابـات التي تحوي أخطاء مفاهيمية، ثم أُناقِشـها على اللوح، ولا أذكر اسم الطالب الذي أخطأ في الإجابة؛ تجنبًا لإحراجه.



**2** 3 , 6 , 12 , 24 , ...

بقسـمةِ أيِّ حدَّيْنِ متتاليَيْنِ، أَجِدُ أنَّ الحصولَ على أيِّ حدٍّ يكونُ بضربِ الحدِّ السابقِ لهُ في 2، إذنْ تتضاعفُ المتتاليةُ بمقدارِ 2، والحدودُ الثلاثةُ التاليةُ هيَ:

$$3 \xrightarrow{\times 2} 6 \xrightarrow{\times 2} 12 \xrightarrow{\times 2} 24 \xrightarrow{\times 2} 48 \xrightarrow{\times 2} 96 \xrightarrow{\times 2} 192, \ldots$$

**3** 80 , 73 , 66 , 59 , ...

بطـرحِ أيِّ حدَّيْنِ متتاليَيْنِ، أَجِـدُ أنَّ كلَّ حدٍّ ينقصُ عنِ الحدِّ السـابقِ بمقدارِ 7، إذنْ تتناقصُ المتتاليةُ بمقدارِ 7، والحدودُ الثلاثةُ التاليةُ هيَ:

$$80 \xrightarrow{-7} 73 \xrightarrow{-7} 66 \xrightarrow{-7} 59 \xrightarrow{-7} 52 \xrightarrow{-7} 45 \xrightarrow{-7} 38, \ldots$$

**4** $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \ldots$

بقسمةِ أيِّ حدَّيْنِ متتاليَيْنِ، أَجِدُ أنَّ كلَّ حدٍّ يساوي $\frac{1}{3}$ مضروبًا في الحدِّ السابقِ لهُ، إذنْ تتضاءلُ المتتاليةُ بمقدارِ $\frac{1}{3}$، والحدودُ الثلاثةُ التاليةُ هيَ:

$$\frac{1}{3} \xrightarrow{\times\frac{1}{3}} \frac{1}{9} \xrightarrow{\times\frac{1}{3}} \frac{1}{27} \xrightarrow{\times\frac{1}{3}} \frac{1}{81} \xrightarrow{\times\frac{1}{3}} \frac{1}{243} \xrightarrow{\times\frac{1}{3}} \frac{1}{729} \xrightarrow{\times\frac{1}{3}} \frac{1}{2187}, \ldots$$

**أتذكَّر**

يُمكِـنُ التعبيـرُ عـنِ المتتاليةِ:

$\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \ldots$

في صورةِ:

$\frac{1}{3} = (\frac{1}{3})^1$

$\frac{1}{9} = (\frac{1}{3})^2$

$\frac{1}{27} = (\frac{1}{3})^3$

$\frac{1}{81} = (\frac{1}{3})^4$

**أتحقق من فهمي**

أَجِدُ الحدودَ الثلاثةَ التاليةَ لكلِّ متتاليةٍ ممّا يأتي: أنظر الهامش.

a) $\frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \frac{9}{2}, \frac{11}{2}, \ldots$

b) 5 , 10 , 20 , 40 , ...

c) 150 , 141 , 132 , 123 , ...

d) 400, 200, 100, 50, ...



### إجابة سؤال بند (أتحقق من فهمي 1):

a) $\frac{13}{2}, \frac{15}{2}, \frac{17}{2}, \ldots$

b) 80 , 160 , 320 , ...

c) 114 , 105 , 96 , ...

d) 25 , 12.5 , 6.25 , ...

تعلَّمْتُ في صفوفٍ سابقةٍ **الحدَّ العامَّ** ($n^{th}$ term) لمتتاليةٍ، الـذي يُمثِّلُ العلاقةَ بينَ أيِّ حدٍّ ورُتبتِهِ ($n$)، ويُرمَزُ إليْهِ بالرمزِ $T(n)$. يُسهِّلُ الحدُّ العامُّ إيجادَ أيِّ حدٍّ في المتتاليةِ باستعمالِ رُتبتِهِ، مثلِ الحدِّ الذي رُتبتُهُ خمسونَ مثلًا. ويُمكِنُ تصنيفُ المتتاليةِ اعتمادًا على حدِّها العامِّ إلى خطِّيةٍ، وتربيعيةٍ، وتكعيبيةٍ، وغيرِ ذلكَ.

**أتذكَّرُ**

رتبةُ الحدِّ هيَ ترتيبُ موقعِهِ بالنسبةِ إلى الحدودِ الأُخرى في المتتاليةِ.

## مثال 2

**أُبيِّنُ إذا كانَ المقدارُ الجبريُّ المُعطى بجانبِ كلِّ متتاليةٍ ممّا يأتي يُمثِّلُ حدًّا عامًّا لها أمْ لا، ثمَّ أُصنِّفُ المتتالياتِ إلى خطِّيةٍ، أوْ تربيعيةٍ، أوْ تكعيبيةٍ، ثمَّ أَجِدُ الحدَّ الخامسَ والسبعينَ في كلٍّ منْها:**

**1** $4 , 7 , 10 , 13 , \dots , 3n + 1$

أُعوِّضُ رُتبَ بعضِ الحدودِ في المقدارِ الجبريِّ المُعطى للتأكُّدِ أنَّها تنتجُ منَ الحدِّ العامِّ:

**أتذكَّرُ**

ناتجُ تعويضِ رتبةِ أيِّ حدٍّ في صيغةِ الحدِّ العامِّ يُساوي الحدَّ نفسَهُ.

| رُتبةُ الحدِّ | | | | الحدُّ |
|---|---|---|---|---|
| $n = 1$ | $\times 3$ | 3 | $+1$ | 4 |
| $n = 2$ | $\times 3$ | 6 | $+1$ | 7 |
| $n = 3$ | $\times 3$ | 9 | $+1$ | 10 |
| $n = 4$ | $\times 3$ | 12 | $+1$ | 13 |

إذنْ، المقدارُ الجبريُّ المُعطى يُمثِّلُ الحدَّ العامَّ للمتتاليةِ، وهيَ خطِّيةٌ؛ لأنَّ الحدَّ العامَّ خطِّيٌّ.

لإيجادِ الحدِّ الخامسِ والسبعينَ، أُعوِّضُ $n = 75$ في قاعدةِ الحدِّ العامِّ:

$$3(75) + 1 = 226$$

**2** $4 , 7 , 12 , 19 , \dots , n^2 + 3$

أُعوِّضُ للتأكُّدِ أنَّ الحدودَ تنتجُ منَ الحدِّ العامِّ:

| رُتبةُ الحدِّ | | | | الحدُّ |
|---|---|---|---|---|
| $n = 1$ | $(1)^2$ | 1 | $+3$ | 4 |
| $n = 2$ | $(2)^2$ | 4 | $+3$ | 7 |
| $n = 3$ | $(3)^2$ | 9 | $+3$ | 12 |
| $n = 4$ | $(4)^2$ | 16 | $+3$ | 19 |



## مثال 2

- أُخبِرِ الطلبة أنَّه يمكن إكمال حدود المتتالية إذا عُلِم حدها العام الذي يربط كل حد برتبته.
- أُوضِّح للطلبة كيف يمكن إيجاد الحد من رتبته إذا عُلِمت قاعدة الحد العام للمتتالية، مُقدِّمًا مزيدًا من الأمثلة؛ للتأكُّد أنَّ الطلبة يمتلكون المهارة المطلوبة.
- أُخبِر الطلبة بأهمية وجود علاقة تربط بين الحد ورتبته؛ وذلك لإيجاد أيِّ حد من دون حاجة إلى إيجاد الحدود جميعها، وصولًا إلى الحد المطلوب.

### أخطاء مفاهيمية:

- قد يُخطِئ بعض الطلبة ذوو المستوى دون المتوسط في التعويض بالحد العام للمتتالية بدءًا بالصفر؛ لذا أُخبِرهم أنَّ المتتالية هي اقتران مجاله مجموعة الأعداد الطبيعية، أو مجموعة جزئية منها.

### إرشاد:

- أُذكِّر الطلبة بمجموعة الأعداد الطبيعية التي تُمثِّل الأعداد الصحيحة الموجبة.

إذنْ، المقدارُ الجبريُّ المُعطى يُمثِّلُ الحدَّ العامَّ للمتتاليةِ، وهيَ تربيعيةٌ؛ لأنَّ الحدَّ العامَّ تربيعيٌّ.

أُعوِّضُ $n = 75$ في الحدِّ العامِّ لإيجادِ الحدِّ الخامسِ والسبعينَ:

$$(75)^2 + 3 = 5628$$

**3** $2 , 9 , 28 , 65 , \dots , n^3 + 1$

أُعوِّضُ للتأكُّدِ أنَّ جميعَ الحدودِ تنتجُ منَ الحدِّ العامِّ:

| رُتبةُ الحدِّ | | | | الحدُّ |
|---|---|---|---|---|
| $n = 1$ | $(1)^3$ | 1 | $+1$ | 2 |
| $n = 2$ | $(2)^3$ | 8 | $+1$ | 9 |
| $n = 3$ | $(3)^3$ | 27 | $+1$ | 28 |
| $n = 4$ | $(4)^3$ | 64 | $+1$ | 65 |

إذنْ، المقـدارُ الجبـريُّ المُعطى يُمثِّلُ الحدَّ العـامَّ للمتتاليةِ، وهيَ تكعيبيـةٌ؛ لأنَّ الحدَّ العامَّ تكعيبيٌّ. أُعوِّضُ $n = 75$ في الحدِّ العامِّ لإيجادِ الحدِّ الخامسِ والسبعينَ:

$$(75)^3 + 1 = 421876$$

**أتحقق من فهمي** أنظر الهامش.

**أُبيِّنُ إذا كانَ المقـدارُ الجبـريُّ المُعطى بجانبِ كلِّ متتاليةٍ ممّا يأتي يُمثِّلُ حـدًّا عامًّا لها أمْ لا، ثـمَّ أُصنِّـفُ المتتاليـاتِ إلى خطِّيةٍ، أوْ تربيعيـةٍ، أوْ تكعيبيةٍ، ثمَّ أَجِـدُ الحدَّ الخامسَ والسبعينَ في كلٍّ منْها:**

a) $1 , 3 , 5 , 7, \dots , 2n-1$

b) $0 , 3 , 8 , 15 , \dots , n^2 - 1$

c) $1.5 , 8.5 , 27.5 , 64.5 , \dots , n^3 + 0.5$

يُمكِنُ إيجادُ الحدِّ العامِّ للمتتالياتِ الخطِّيةِ والتربيعيةِ والتكعيبيةِ بملاحظةِ العلاقةِ بينَ الحدودِ ورُتَبِها.



## إرشادات للمُعلِّم/ للمُعلِّمة

أُرشِـد الطلبة إلى اسـتخدام الآلة الحاسـبة إذا لزم الأمر.

## مثال إضافي

- أُبيِّن للطلبـة إذا كان المقدار الجبري المعطى بجانب المتتاليـة الآتية يُمثِّل حدًّا عامًّا لهـا أم لا، ثم أُصنِّف المتتاليـة إلى خطية، أو تربيعيـة، أو تكعيبية، ثم أجد الحد الخامس والأربعين:

$$5 , 5 , 5 , 5 , \dots \; T(n) = 5$$

الحل:

1) $T(45) = 5$ الحد العــام يُمثِّل المتتالية، وهي خطية، وتُعَدُّ اقترانًا ثابتًا.

## أخطاء مفاهيمية:

- قد يُخطِئ بعض الطلبة من ذوي المسـتوى دون المتوسط أحيانًا عند إيجاد الحد العاشر – مثلًا– بمضاعفة الحد الخامس؛ لذا أُصحِّح لهم ذلك.

## إجابة سؤال بند (أتحقق من فهمي 2):

a) الحد العام يُمثِّل المتتالية، وهي متتالية خطية.

b) الحد العام يُمثِّل المتتالية، وهي متتالية تربيعية.

c) الحد العام يُمثِّل المتتالية، وهي متتالية تكعيبية.

## مثال 3

- أُذكِّر الطلبة بأنَّ قاعدة الحد العام للمتتالية مذكورة في المثـال 2، وأنَّ هذا المثال يشـرح كيفية إيجاد قاعدة الحد العام لمتتاليات خطية، وتربيعية، وتكعيبية.
- أُناقِـش الطلبة في حل المثـال 3، مُوضِّحًا لهم كيفية إيجاد الحد العام باسـتخدام المقادير الجبرية، وذلك باسـتخدام المتغير $n$ للدلالة على رتبة الحد، والرمز $T(n)$ للدلالة على الحد نفسه.

## مثال إضافي

- أجد الحد العام لكل متتالية ممّا يأتي:

**1)** $5 , 9 , 13 , 17 , \ldots$

**2)** $3 , 8 , 15 , 24 \ldots$

**3)** $0 , 6 , 24 , 60 \ldots$

الحل:

**1)** $4n + 1$

**2)** $n^2 + 2n$

**3)** $n^3 - n$

- أكتب على اللوح قاعدة الحد العام لكل فروع المثال 3، ثم أطلب إلى أحد الطلبـة إيجاد أول أربعة حدود للمتتاليـة الأولـى، بتعويض الأعـداد 1,2,3,4، ثم أطلب إلى ثلاثة طلبـة آخرين إيجاد أول أربعة حدود للمتتاليات الثانية، والثالثة؛ للتأكُّد أنَّ كل حد عام يُمثِّل متتاليته.
- أُناقِش الطلبة في مزيد من الأمثلـة؛ حتى يتقنوا كتابة الحـد العام للمتتالية باسـتخدام المقاديـر الجبرية، وإيجاد الحدود المطلوبة بالتعويض في القاعدة.
- أُوجِّه الطلبة في هذه الأثناء، مُقدِّمًا لهم التغذية الراجعة المناسبة.

### مثال 3

**أَجِدُ الحدَّ العامَّ لكلِّ متتاليةٍ ممّا يأتي:**

**1** $5 , 12 , 19 , 26 , 33 , \ldots$

أُلاحِظُ أنَّ حدودَ المتتاليةِ تتزايدُ بمقدارِ 7:

$$5 \underbrace{,}_{+7} 12 \underbrace{,}_{+7} 19 \underbrace{,}_{+7} 26 \underbrace{,}_{+7} 33 , \ldots$$

يُمكِـنُ مبدئيًّا التعبيرُ عـنِ المتتاليةِ بالحدِّ $7n$؛ لأنَّ تزايدَ حـدودِ المتتاليةِ بمقدارِ 7 في كلِّ مـرّةٍ يُذكِّرُني بحقائقِ ضـربِ العددِ 7، ولكنْ عندَ تعويـضِ $n = 1$ ينتجُ العددُ 7، وهوَ أكبرُ منَ الحدِّ الأولِ بـ 2؛ لذا أطـرحُ العددَ 2 منْ $7n$ ، وبذلكَ يصبحُ الحدُّ العامُّ: $T(n) = 7n - 2$.

**2** $5 , 8 , 13 , 20 , 29 , \ldots$

أُلاحِظُ أنَّ الفرقَ بينَ كلِّ حدَّيْنِ متتاليَيْنِ غيرُ ثابتٍ. إذنْ، المتتاليةُ غيرُ ناتجةٍ منْ جمعِ (أوْ طـرحِ) عددٍ ثابتٍ لحدودِها. أُلاحِظُ أيضًا أنَّ المتتاليةَ غيرُ ناتجةٍ منْ ضربِ حدودِها في عددٍ ثابتٍ.

أُفسِّرُ المتتاليةَ عنْ طريقِ تربيعِ رُتبةِ كلِّ حدٍّ:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| مربعاتُ رتبِ الحدودِ | $n^2$ … 25 | 16 | 9 | 4 | 1 |
| الحدودُ | ? … 29 | 20 | 13 | 8 | 5 |

بالنظـرِ إلى ناتجِ تربيعِ رُتبةِ كلِّ حدٍّ، أُلاحِظُ أنَّهُ إذا أُضيفَ 4 إلى مُربَّعِ رُتبةِ الحدِّ تنتجُ المتتاليةُ المطلوبةُ. وبذلكَ، فإنَّ الحدَّ العامَّ هوَ: $T(n)= n^2 + 4$

**3** $0 , 7 , 26 , 63 , 124 , \ldots$

أُلاحِظُ أنَّ الفرقَ بينَ كلِّ حدَّيْنِ متتاليَيْنِ غيرُ ثابتٍ.

إذنْ، المتتاليةُ غيرُ ناتجةٍ منْ جمعِ (أوْ طرحِ) عددٍ ثابتٍ لحدودِها.

أُلاحِظُ أيضًا أنَّ المتتاليةَ غيـرُ ناتجةٍ منْ ضربِ حدودِها في عددٍ ثابتٍ، وأنَّها غيرُ ناتجةٍ منْ تربيعِ كلِّ حدٍّ. أُفسِّرُ المتتاليةَ عنْ طريقِ تكعيبِ رُتبةِ كلِّ حدٍّ:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| مربعاتُ رتبِ الحدودِ | $n^3$ … 125 | 64 | 27 | 8 | 1 |
| الحدودُ | ? … 124 | 63 | 26 | 7 | 0 |

46

### إرشاد:

قد يتمكَّن بعض الطلبة من التعبير عن الحد العام لفظيًّا، من دون القدرة على التعبير عنه بالرموز؛ لذا أُسـاعِد هؤلاء الطلبة على إتقـان مهارة التعبير عن المقادير الجبرية باسـتعمال الرموز. فمثلًا، ثلاثة أضعاف عدد مضاف إليه 5 هي $3x + 5$

أُلاحِظُ أنَّهُ عندَ طرحِ 1 منْ مكعبِ رُتبةِ كلِّ حدٍّ تنتجُ المتتاليةُ المطلوبةُ.

وبذلكَ، فإنَّ الحدَّ العامَّ هوَ: $T(n) = n^3 - 1$

**أتحقق من فهمي**

**أَجِدُ الحدَّ العامَّ لكلِّ متتاليةٍ ممّا يأتي:** أنظر الهامش.

**a)** $8 , 15 , 22 , 29 , 36 , \ldots$

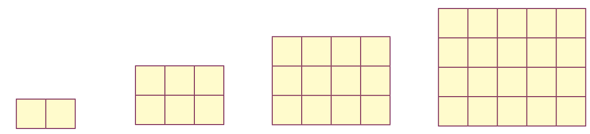
**b)** $4 , 7 , 12 , 19 , 28 , \ldots$

**c)** $-1, 6, 25, 62, 123, \ldots$

تظهرُ المتتالياتُ أيضًا في كثيرٍ منَ الأنماطِ الهندسيةِ.

**مثال 4**

**في ما يأتي نمطٌ هندسيٌّ يُمثِّلُ عددُ المُربَّعاتِ في نماذجِهِ متتاليةً. أَجِدُ الحدَّ العامَّ لهذهِ المتتاليةِ.**



النموذجُ (4). النموذجُ (3). النموذجُ (2). النموذجُ (1).

بالنظرِ إلى النمطِ، أُلاحِظُ أنَّ عددَ المُربَّعاتِ يُشكِّلُ المتتاليةَ الآتيةَ: $2, 6, 12, 20, \ldots$

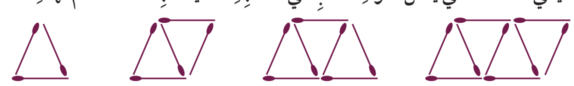
بالنظرِ إلى الحدودِ الأولى منَ المتتاليةِ، أُلاحِظُ أنَّ كلَّ حدٍّ فيها يساوي حاصلَ ضربِ عرضِ المُستطيلِ في طولِهِ:

$$\underset{1\times2}{2}\ ,\ \underset{2\times3}{6}\ ,\ \underset{3\times4}{12}\ ,\ \underset{4\times5}{20}\ ,\ \ldots$$

إذنْ، الحدُّ العامُّ هوَ: $T(n) = n(n + 1) = n^2 + n$

**أتحقق من فهمي** أنظر الهامش.

**في ما يأتي نمطٌ هندسيٌّ يُمثِّلُ أعوادِ الثقابِ في نماذجِهِ متتاليةً. أَجِدُ الحدَّ العامَّ لهذهِ المتتاليةِ.**



النموذجُ (4). النموذجُ (3). النموذجُ (2). النموذجُ (1).



### إجابة سؤال بند (أتحقق من فهمي 3):

**a)** $7n + 1$ **b)** $n^2 + 3$ **c)** $n^3 - 2$

### إجابة سؤال بند (أتحقق من فهمي 4):

$T(n) = 2n + 1$

## تعزيز اللغة ودعمها:

أُكرِّر المصطلحات الرياضية المستخدمة في الدرس باللغتين العربية والإنجليزية، مُحفِّزًا الطلبة على استعمالها، مثل: المتتالية Sequence، والحد term، والحد العام $n^{th}$ term.

## إرشادات:

- يُعَدُّ إيجاد الحد العام من أصعب التحديات التي يواجهها الطلبة؛ لذا أكتب خطوات الحل على نحوٍ مرتب ومتسلسل ومفهوم.
- أجعل الطلبة يعتادون على تحليل حدود المتتاليات إلى العوامل الأولية بوصف ذلك خطوة أُولى لإيجاد الحد العام.

## مثال 4

- أُناقِش الطلبة في حل المثال 4 على اللوح، وأتدرَّج معهم في إيجاد قاعدة الحد العام للمتتالية التي يُشكِّلها عدد المربعات في النمط الهندسي الوارد في المثال، وذلك باتباع ما يأتي:
  - » تحليل الحدود إلى العوامل الأولية.
  - » ملاحظة ناتج ضرب رتبة الحد نفسه في رتبة الحد الذي يليه.

## تنويع التعليم:

أُوضِّح للطلبة أنه يمكن حل المثال 4 بطريقة أُخرى، وذلك بتمثيل كل حد بأنه عدد المربعات الأفقية مضروبًا في عدد المربعات العمودية.

## 4 التدريب

- أُوجِّه الطلبة إلى قراءة الأسـئلة في بند (**أتدرب وأحل المسائل**)، ثم أطلب إليهم حلها.
- أتجوَّل بين الطلبة مُرشِدًا، ومُساعِدًا، ومُوجِّهًا، وأُقدِّم لهم التغذية الراجعة.
- إذا واجــه بعض الطلبــة صعوبة في حل أيِّ مســألة، فأختار طالبًا تمكَّن من حل المسألة، وأطلب إليه كتابة حله على اللوح.

## الواجب المنزلي:

- أطلب إلى الطلبة أنْ يحلوا في البيت جميع المســائل الواردة في الصفحة الثانية عشــرة من كتاب التمارين، مُحدِّدًا لهم المســائل التي يمكنهم حلها في نهاية كل حصة بحسب ما يُقدَّم من أمثلة الدرس وأفكاره.
- يمكن أيضًا إضافة المسائل التي لم يحلها الطلبة داخل غرفة الصف إلى الواجب البيتي.
- في اليوم التالي، أَطَّلِع على حلول الطلبة، وأُناقِشــهم في أيِّ صعوبات واجهوها في أثناء الحل.

### أتدرب وأحل المسائل

أَجِدُ الحدودَ الثلاثةَ التاليةَ للمتتالياتِ الآتيةِ:

1) $6, 11, 16, 21, \ldots$
$26, 31, 36$

2) $-1, 6, 13, 20, \ldots$
$27, 34, 41$

3) $\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \frac{9}{2}, \ldots$
$5.5, 6.5, 7.5$

4) $-8, -7, -6, -5, \ldots$
$-4, -3, -2$

5) $-2, 1, 6, 13, \ldots$
$22, 33, 46$

6) $4, 16, 36, 64, \ldots$
$100, 144, 196$

7) $3, 9, 27, 81, \ldots$
$243, 729, 2187$

8) $3, 8, 18, 38, \ldots$
$78.158, 318$

9) $128, 64, 32, 16, \ldots$
$8, 4, 2$

أَجِدُ أولَ خمسةِ حدودٍ لكلِّ متتاليةٍ مُعطى حدُّها العامُّ في ما يأتي، ثمَّ أُصنِّفُها إلى متتاليةٍ خطِّيةٍ، أوْ تربيعيةٍ، أوْ تكعيبيةٍ:

10) $n + 3$
4,5,6,7,8 : خطية.

11) $3n - 1$
2,5,8,11,14 : خطية.

12) $4n + 5$
9,13,17,21,25 : خطية.

13) $n^2 - 1$
0, 3, 8, 15, 24 : تربيعية.

14) $n^2 + 2$
3,6,11,18,27 : تربيعية.

15) $200 - n^2$
199,196,191,184,175 تربيعية.

16) $n^3 + 1$
2,9,28,65,126 : تكعيبية.

17) $\frac{n^3}{2}$
0.5,4,13.5,32,62.5 : تكعيبية.

18) $3n^3 - 1$
2,23,80,191,374 : تكعيبية.

أَجِدُ الحدَّ العامَّ لكلِّ متتاليةٍ ممّا يأتي:

19) $21, 24, 27, 30, 33, \ldots$
$T(n) = 3n + 18$

20) $1, 9, 17, 25, 33, \ldots$
$T(n) = 8n - 7$

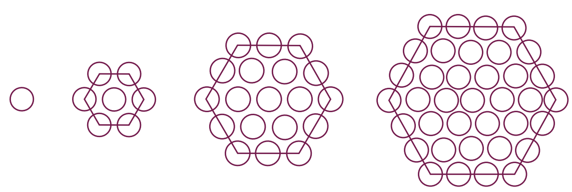
21) $10, 13, 18, 25, 34, \ldots$
$T(n) = n^2 + 9$

22) $-\frac{5}{2}, -1, \frac{3}{2}, 5, \frac{19}{2}, \ldots$
$T(n) = 0.5n^2 - 3$

23) $6, 13, 32, 69, 130, \ldots$
$T(n) = n^3 + 5$

24) $1, 15, 53, 127, 249, \ldots$
$T(n) = 2n^3 - 1$

25) أَجِدُ عددَ الدوائرِ في النموذجِ الخامسِ منَ النمطِ الهندسيِّ الآتي:



(1) (2) (3) (4)

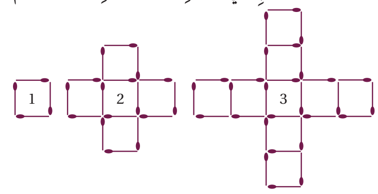
الحد العام لهذه المتتالية هو: $T(n) = 3n^2 - 3n + 1$

عدد دوائر النموذج الخامس هو 61

48

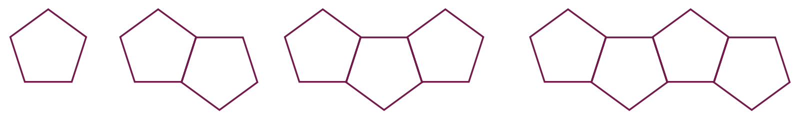
في ما يأتي نمطٌ هندسيٌّ يُمثِّلُ عددَ أعوادِ الثقابِ في نماذجِهِ متتاليةً، أَجِدُ الحدَّ العامَّ لهذهِ المتتاليةِ.

$T(n) = 4n - 3$




26 أكملُ الجدولَ الآتي بالاعتماد على نماذجِ النمطِ الهندسيِّ أدناهُ: 26–29 (أنظر ملحق الإجابات).

| النموذجُ | (1) | (2) | (3) | (4) |
|---|---|---|---|---|
| المحيطُ | 5 | 8 | | |



(1) (2) (3) (4)

27 أجدُ محيطَ نموذجٍ يحتوي $n$ مِنَ الأشكالِ الخماسيّةِ.

28 أجدُ محيطَ نموذجٍ يحتوي 50 شكلًا خُماسيًّا.

29 ما أكبرُ عددٍ من الأشكالِ الخُماسيّةِ التي يمكنُ استعمالُها لعملِ نموذجٍ محيطُهُ أقلُّ منْ 1000cm ؟

### مهارات التفكير العليا

30 **تحـدٍّ**: إذا كانَ الحدُّ العامُّ للمتتاليةِ: $6, 16, 30, 48, 70, \ldots$ هوَ: $T(n) = an + bn^2$ ، حيثُ $a, b$ عددانِ حقيقيانِ، فأَجِدُ قيمَ $a, b$. $a = 4, b = 2$

31 **تحدٍّ**: أَجِدُ أولَ ثلاثةِ حدودٍ لمتتاليةٍ خطِّيةٍ، إذا كانَ مجموعُ هذهِ الحدودِ 12، وحاصلُ ضربِها 28 $1, 4, 7$

32 **مسألةٌ مفتوحةٌ**: أَجِدُ ثلاثَ متتالياتٍ تبدأُ بـ 1، بحيثُ تكونُ الأولى خطِّيةً، والثانيةُ تربيعيةً، والثالثةُ تكعيبيةً.

$T(n) = 2n - 1$ خطية ، $T(n) = 2n^2 - 1$ تربيعية، $T(n) = 2n^3 - 1$ تكعيبية،

تُقبَل أي ثلاث متتاليات تبدأ بالعدد 1، وتكون الأولى خطية، والثانية تربيعية، والثالثة تكعيبية.



## مهارات التفكير العليا

- أُشرِك الطلبة كافةً في حل هذه المسائل؛ لتنمية مهارات التفكير العليا لديهم.
- أتذكَّر أنَّه ليس شرطًا أنْ يتمكَّن الطلبة كافةً من حل المسائل جميعها، وإنَّما يتعيَّن عليهم أنْ يحاولوا حلها.
- أطلب إلى الطلبة حل المسائل في بند (**مهارات التفكر العليا**) ضمن مجموعات، ثم أطلب إلى أفراد بعضها توضيح كيفية توصُّلهم إلى الحل في كل مسألة، وأمنح بقية الطلبة فرصة نقد حلول زملائهم وتقويمها.
- أُحفِّز الطلبة على تبرير حلولهم.

## 5 الإثراء

- أُوجِّه الطلبة إلى البحث في شبكة الإنترنت أو مكتبة المدرسة عن تطبيقات حياتية للمتتاليات، مثل المثال الوارد في بند الاستكشاف بداية الدرس.
- أُوجِّه الطلبة إلى البحث عن أسماء بعض المتتاليات المشهورة، وذكر تطبيق حياتي عليها، مثل متتالية فيبوناشي $(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots)$؛ إذ يُعَدُّ عدد الحلزونات الظاهرة في أثناء نمو زهرة الكاميليا من أفضل التطبيقات على هذه المتتالية.
- أُنبِّه الطلبة على ضرورة توثيق المعلومة دائمًا.

## 6 الختام

- أطرح على الطلبة الأسئلة الآتية:
  - » ما مجال المتتاليات؟
  - » ما مداها؟
  - » ما العلاقة بين المتتاليات والاقترانات؟
  - » أيُّهما تُعَدُّ حالة خاصة من الأُخرى: الاقترانات من المتتاليات أم المتتاليات من الاقترانات؟ لماذا؟

## التقويم الختامي:

- أُراجِع الطلبة في الأفكار الأساسية لدروس الوحدة.
- أُوزِّع الطلبة إلـــى مجموعات، ثم أطلب إلى أفراد كل مجموعة حل جزء من الأســئلة، ثم عرض إجاباتهم أمام الزملاء.
- أختار بعض الأســئلة ليحلها الطلبة واجبًا منزليًّا، ثم أُناقِشهم في إجاباتها في اليوم التالي.
- أَلفِت انتباه الطلبة إلى أنَّ الأســئلة (26–23) وردت ضمن الاختبارات الدولية، أو هي مسائل مشابهة لها.

**ملحوظـة:** تُخصَّــص حصتان (90 دقيقــة) للإجابة عن أسئلة الاختبار.

## اختبارُ نهايةِ الوحدةِ

**أَضعُ دائرةً حولَ رمزِ الإجابةِ الصحيحةِ في ما يأتي:**

1 الحدُّ العامُّ ($T_n$) للمتتاليةِ: $11, 20, 35, 56, \ldots$ هوَ:

a) $T_n = n^2 + 6n + 4$ b) $T_n = 3n^2 + 8$

c) $T_n = 2n^2 + 9$ d) $T_n = n^2 + 4n + 6$

2 إذا كانَ $f(x) = 3x^2 + 5x + 7$، فإنَّ قيمةَ $f(-2)$ هيَ:

a) $-22$ b) $-15$

c) 9 d) 29

3 إذا كانَ $f(x)=2x^3-4x^2+6,\ g(x)=5x^2-7x+4$، فإنَّ ناتجَ $f(x)-g(x)$ هوَ:

a) $2x^3 - 9x^2 + 7x + 2$

b) $2x^3 + x^2 + 7x + 10$

c) $-3x^3 + 3x^2 + 13x - 4$

d) $-3x^3 - 4x^2 + 7x - 2$

4 إذا كانَ $g(x)$ كثيرَ حدودٍ منَ الدرجةِ السادسةِ، وَ $h(x)$ كثيــرَ حدودٍ منَ الدرجةِ الثانيةِ، فإنَّ درجةَ ناتجِ قســمةِ $g(x)$ على $h(x)$ هيَ:

a) الأولى. b) الثالثةُ.

c) الرابعةُ. d) الثامنةُ.

5 إذا كانَ $f(x) = 3x - 5,\ h(x) = x^2 - 2$، فــإنَّ قيمةَ $(h \circ f)(3)$ هيَ:

a) 4 b) 7

c) 14 d) 16

6 إذا كانَ $f(x) = 8 - 2x$، فإنَّ قيمةَ $f^{-1}(4)$ هيَ:

a) 0 b) $-6$ c) $-2$ d) 2

7 خطُّ التقاربِ الأفقـيِّ للاقترانِ $r(x) = \frac{3}{4-3x} + 7$ هوَ:

a) $y = 0$ b) $y = 7$

c) $y = 4$ d) $y = -1$

8 الحدُّ العاشرُ في المتتاليةِ $0, 2, 6, 12, 20, \ldots$ هوَ:

a) 90 b) 95

c) 97 d) 99

9 مجالُ الاقترانِ $f(x) = \frac{x-3}{x^2-3x-10}$ هوَ:

a) $\{x \mid x \neq -2, x \neq 3, x \neq 5\}$

b) $\{x \mid x \neq -5, x \neq 2\}$

c) $\{x \mid x \neq 5\}$

d) $\{x \mid x \neq -2, x \neq 5\}$

10 إذا كانَ $f(x)=2x^2-4x+1,\ g(x)=6x^3-7x+3$، فأَجِدُ $x^2 f(x) + g(x)$ $2x^4 + 2x^3 + x^2 - 7x + 3$

11 إذا كانَ $h(x) = 3x^2 - 4x,\ j(x) = 4x^3 + 2x + 5$، فأَجِدُ $h(x) \cdot j(x)$ $12x^5 - 16x^4 + 6x^3 + 7x^2 - 20x$

12 أَقْسِمُ $(8x^3 + 12x - 5)$ على $(2x + 3)$

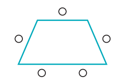
$8x^3 + 12x - 5 = 4x^2 - 6x + 15 + \frac{-50}{2x+3}$

13 أَجِدُ خطوطَ التقاربِ لمنحنى الاقترانِ $f(x) = \frac{4}{2-x}$، ثمَّ أُمثِّلُهُ بيانيًّا، مُحدِّدًا مجالَهُ، ومداهُ.

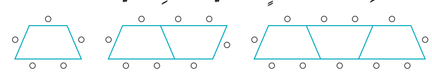
أنظر ملحق الإجابات.

## اختبارُ نهايةِ الوحدةِ

يوجدُ في قاعةِ طعامِ إحدى المدارسِ طاولاتٌ على شكلِ شبهِ منحرفٍ. وكلُّ طاولةٍ تتَّسِعُ لخمسةِ طلبةٍ كما في الشكلِ الآتي:



لاحظَ مُشرِفُ القاعةِ أنَّ عددَ الطلبةِ يتغيَّرُ تبعًا لعددِ الطاولاتِ المُلاصِقِ بعضُها لبعضٍ كما في الشكلِ الآتي:



1 2 3

14 أملأُ الفراغَ بما هوَ مناسبٌ في الجدولِ الآتي:

| عددُ الطاولاتِ المُتلاصِقةِ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| عددُ الطلبةِ | 5 | 8 | 11 | 14 | 17 |

15 أَجِدُ الحدَّ العامَّ. $T(n) = 3n + 2$

16 ما عددُ الطلبةِ الذينَ يُمكِنُهُمُ الجلوسُ حولَ 13 طاولةً مُتلاصِقةً؟ 41

17 تنوي إدارةُ المدرسةِ عملَ حفلٍ لـ 200 طالبٍ. كمْ طاولةً مُتلاصِقةً تَلزمُ لذلكَ؟ 66 طاولة.

إذا كانَ $f(x) = 4x - 3,\ g(x) = \frac{1}{x+1} + 2,\ x \neq -1$، فأَجِدُ: (18–21) أنظر ملحق الإجابات.

18 $g^{-1}(x)$

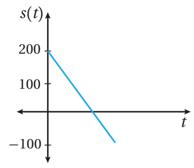
19 $(f \circ f)(x)$

20 $(g \circ f)(x)$

21 أَجِدُ الاقترانَ العكسيَّ للاقترانِ $f(x) = \sqrt{4-x}$، مُحدِّدًا المجالَ والمدى لكلٍّ منْ: $f(x)$، وَ $f^{-1}(x)$.

### تدريبٌ على الاختباراتِ الدوليةِ

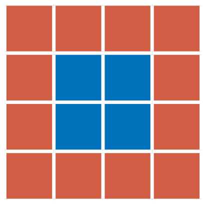
يظهرُ في الشكلِ المجاورِ منحنى اقترانِ الموقعِ $s(t)$ لجسمٍ يتحرّكُ في مسارٍ مستقيمٍ، حيثُ $s$ الموقعُ بالمترِ و $t$ الزمنُ بالثانيةِ.



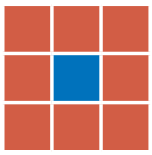

22 إذا وصلَ الجسمُ إلى الموقعِ $s = -100$ بعدَ 6 ثوانٍ منْ بدءِ حركتِهِ، فأكتبُ قاعدةَ الاقترانِ $s(t)$.
$s(t) = -50t + 200$

23 ما الزمنُ الذي استغرَقَهُ الجسمُ منذُ بدءِ حركتِهِ حتّى وصلَ إلى نقطةِ الأصلِ؟ 4 ثوانٍ.

رتَّبَتْ فدوى بطاقاتٍ حمراءَ وزرقاءَ كما في الشكليْنِ الآتيينِ:



الشكلُ (2).



الشكلُ (1).

24 إذا استمرَّ هذا النمطُ، فما عددُ البطاقاتِ الحمراءِ في الشكلِ $n$؟ عدد البطاقات الحمراء في الشكل رقم $n$ هو: $4n+4$

25 ما عددُ البطاقاتِ الزرقاءِ فيهِ؟ عدد البطاقات الزرقاء في الشكل نفسه هو: $n^2$

26 استعملَتْ فدوى 64 بطاقةً لتكوينِ أحدِ أشكالِ هذا النمطِ. كمْ عددُ كلٍّ منَ البطاقاتِ الحمراءِ والزرقاءِ المُستعمَلةِ؟ عدد البطاقات الزرقاء هو: 36
عدد البطاقات الحمراء هو: 28



## إرشادات للمُعلِّم/ للمُعلِّمة

قد يحل بعض الطلبة السؤال 24 بصورة مختلفة، وذلك بملاحظة أنَّ عدد البطاقات كلها يساوي $(n+2)^2$، وأنَّ عدد البطاقات الزرقاء يساوي $n^2$، فيكون عدد البطاقات الحمراء هو $(n+2)^2 - n^2$؛ لذلك أُوضِّح للطلبة أنَّ هاتين الصيغتين متكافئتان، وأنَّه يمكن التفكير في حل أيِّ مسألة بطرائق مختلفة متعددة.

## تدريب على الاختبارات الدولية

يتقدَّم طلبة الصف الرابع والصف الثامن في المدارس الأردنية إلى اختبار (TIMSS) كل أربع سنوات. ويهدف هذا الاختبار إلى قياس مستوى تقدُّم الطلبة في التحصيل الدراسي في مادتي الرياضيات والعلوم. ولهذا الاختبار أهمية في تقييم جودة التعليم في الأردن مقارنةً بالدول الأُخرى التي يتقدَّم طلبتها لهذا الاختبار، والمساعدة على رسم السياسة التربوية على المستوى الوطني بما يخدم تطوير النظام التربوي، والارتقاء بنوعية مخرجاته.

يتقدَّم أيضًا طلبة الصف العاشر في الأردن لاختبار البرنامج الدولي لتقييم أداء الطلبة PISA)

The Program for International Students Assessment: في مجالات القراءة، والرياضيات، والعلوم. وفي ما يخصُّ الرياضيات، فإنَّ المعرفة الرياضية – وَفق هذا البرنامج– يُعبَّر عنها بمدى قدرة الفرد على صياغة الرياضيات، وتوظيفها، وتفسيرها في أوضاع مختلفة؛ إذ تتضمَّن القدرة على التفكير الرياضي، واستعمال المفاهيم والإجراءات والحقائق والأدوات لوصف الظواهر، والتنبُّؤ بها، وتسعى لمساعدة صانعي القرارات وراسمي السياسات التربوية في الدول المشاركة على تحديد معايير حقيقية وواقعية لأداء أنظمتها التربوية، وتُعِينهم على تقييم النجاحات أو الإخفاقات، علمًا بأنَّ الأردن يشارك في دورات هذه الدراسات والبرامج بانتظام منذ مطلع تسعينيات القرن العشرين الميلادي؛ لذا يتعيَّن عليك عزيزي المُعلِّم/ عزيزتي المُعلِّمة تحفيز الطلبة على الاهتمام بحل هذه الأسئلة، والمشاركة في الدراسات وبرامج التقييم الدولية بكل جدية، وتضمين الاختبارات المدرسية مثل نوعية هذه الأسئلة.

# كتاب التمارين

## الدرسُ 1
## اقتراناتُ كثيراتِ الحدودِ
## Polynomial Functions

الوحدةُ 5: الاقتراناتُ

أُحدِّدُ إذا كانَ كلٌّ ممّا يأتي كثيرَ حدودٍ أمْ لا، مُحدِّدًا الدرجةَ والمعاملَ الرئيسَ والحدَّ الثابتَ لكلِّ كثيرِ حدودٍ، ثمَّ أكتبُهُ بالصورةِ القياسيةِ: (1–8) أنظر ملحق الإجابات.

1. $h(x) = 3x^2 + 2x^{-1} + 5$
2. $g(x) = 3\frac{1}{5}x^2 - 5x^3 + 7x - 1$
3. $f(x) = \frac{8(3-2x)}{5}$
4. $j(x) = \sqrt{x^2 + 16} - 4x$

أُمثِّلُ بيانيًّا كلًّا ممّا يأتي، مُحدِّدًا مجالَهُ ومداهُ:

5. $f(x) = 2x^3 - 5, -2 \le x \le 3$
6. $r(x) = -x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 5, -2 \le x \le 2$
7. $g(x) = 12 - 4x - x^2$
8. $h(x) = (2x-5)^2 - 10$

إذا كانَ $f(x) = 2x^2 - 4x^3 + 5x - 1$، وَ $g(x) = x^3 + 5x^2 - 7$، وَ $h(x) = 2x - 4$، فأَجِدُ ناتجَ ما يأتي:

9. $f(x) + g(x)$ $\quad -3x^3 + 7x^2 + 5x - 8$
10. $f(x) - g(x)$ $\quad -5x^3 - 3x^2 + 5x + 6$
11. $g(x) - x(h(x))$ $\quad x^3 + 3x^2 + 4x - 7$
12. $h(x) \cdot f(x)$ $\quad -8x^4 + 20x^3 + 2x^2 - 22x + 4$
13. $(h(x))^2 + f(x)$ $\quad -4x^3 + 6x^2 - 11x + 15$
14. $f(x) \cdot g(x)$ $\quad -4x^6 - 18x^5 + 15x^4 + 52x^3 - 19x^2 - 35x + 7$
15. هلِ العددُ $-2$ صفرٌ للاقترانِ $h(x) = -x^4 - 5x^3 + 7x - 10$؟ أُبرِّرُ إجابتي.
نعم؛ لأنَّ $f(-2) = -16 + 40 - 14 - 10 = 0$
16. أَجِدُ أصفارَ الاقترانِ $g(x) = (x-1)^3 - 3(x-1)^2$
$(x-1)^2(x-1-3) = 0 \Rightarrow x = 1, x = 4$

يمثِّلُ الاقترانُ $s(t) = 2t^3 - 21t^2 + 60t + 3$ موقعَ جسمٍ يتحرّكُ في مسارٍ مستقيمٍ، حيثُ $s$ موقعُ الجسمِ بالأمتارِ بعدَ $t$ ثانيةً.

17. أحدّدُ موقعَ الجسمِ لحظةَ بدءِ الحركةِ. 3 m
18. أحدّدُ موقعَ الجسمِ بعدَ ثانيتينِ منْ بدءِ الحركةِ. 55 m
19. متى يكونُ الجسمُ عندَ نقطةِ الأصلِ؟ لا يكون الجسم عند نقطة الأصل أبدًا.
20. هلْ يعودُ الجسمُ إلى النقطةِ التي بدأَ الحركةَ منْها؟
لا، لا يعود إليها؛ لأنَّه لا يوجد حل للمعادلة: $2t^3 - 21t^2 + 60t = 0$ سوى $t = 0$.



## الدرسُ 2
## قسمةُ كثيراتِ الحدودِ والاقتراناتِ النسبيةِ
## Dividing Polynomials and Rational Functions

الوحدةُ 5: الاقتراناتُ

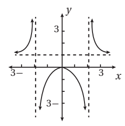
أَجِدُ ناتجَ قسمةِ $f(x)$ على $h(x)$ وباقيها في كلٍّ ممّا يأتي:

1. $f(x) = 2x^3 - 4x^2 - 12x + 5; h(x) = x + 4$ $\quad$ الناتج $2x^2 - 12x + 36$، والباقي $-139$
2. $f(x) = 4x^4 - 6x^3 - 9x + 12; h(x) = 2x^2 - 5x + 2$ $\quad$ الناتج $2x^2 + 2x + 3$، والباقي $2x + 6$
3. أَجِدُ قيمةَ $k$ بحيثُ يكونُ باقي قسمةِ $f(x) = 4x^3 - 8x^2 + 7x + k$ على $h(x) = 2x + 1$ هوَ 8
4. أَجِدُ قيمةَ $c$ بحيثُ يكونُ $h(x) = x - 3$ أحدَ عواملِ $g(x) = 2x^4 - 5x^3 + cx - 18$ $\quad$ (3–6) أنظر ملحق الإجابات.

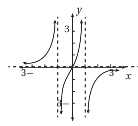
أَجِدُ خطوطَ التقاربِ لكلِّ اقترانٍ ممّا يأتي، وأُمثِّلُهُ بيانيًّا، ثمَّ أَجِدُ مجالَهُ ومداهُ:

5. $f(x) = 4 + \frac{2}{x-1}$
6. $h(x) = -\frac{3}{x+2} + 5$

أَجِدُ المجالَ والمدى وخطوطَ التقاربِ لكلٍّ منَ الاقترانيْنِ المُمثَّليْنِ بيانيًّا في ما يأتي:

7.



(7–10) أنظر ملحق الإجابات.

8.



أَجِدُ المجالَ والمدى لكلٍّ ممّا يأتي:

9. $g(x) = \frac{1}{(x-3)^2} + 5$
10. $j(x) = \frac{4}{(x+2)^2} + 3$

نُقِلَتْ فصيلةٌ نادرةٌ منَ الحشراتِ إلى محميةٍ خاصةٍ لمنعِ انقراضِها. وقدْ بلغَ عددُ أفرادِ هذهِ الفصيلةِ بعدَ $t$ شهرًا منْ نقلِها $P(t) = \frac{72(1+0.6t)}{3+0.02t}$: $\quad$ (11–13) أنظر ملحق الإجابات.

11. كمْ كانَ عددُ الحشراتِ عندَ نقلِها إلى المحميةِ؟
12. كمْ سيبلغُ عددُها بعدَ 30 شهرًا منْ نقلِها؟
13. بعدَ كمْ شهرٍ سيصلُ عددُها إلى 558 حشرةً؟



## الدرسُ 3
## تركيبُ الاقتراناتِ
## Composition of Functions

الوحدةُ 5: الاقتراناتُ

أَجِدُ قيمةَ كلٍّ ممّا يأتي، مُستعمِلًا القيمَ المُبيَّنةَ في الجدوليْنِ الآتيينِ:

| $x$ | −3 | −2 | −1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | 8 | 3 | 0 | −1 | 0 | 3 | 8 |

| $x$ | −3 | −2 | −1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | −7 | −5 | −3 | −1 | 3 | 5 | 7 |

1. $(f \circ g)(1)$ $\quad -1$
2. $(f \circ g)(-2)$ $\quad 7$
3. $(g \circ f)(1)$ $\quad 8$
4. $(g \circ f)(0)$ $\quad 0$
5. $(g \circ g)(-1)$ $\quad -1$
6. $(f \circ f)(-1)$ $\quad -7$

إذا كانَ $f(x) = 2x + 1$، وَ $g(x) = 3x - 4$، فأَجِدُ:

7. $(f \circ g)(2)$ $\quad 5$
8. $(f \circ g)(0)$ $\quad -7$
9. $(f \circ g)(8)$ $\quad 41$
10. $(g \circ f)(1)$ $\quad 5$
11. $(f \circ g)(x)$ $\quad 6x - 7$
12. $(g \circ f)(x)$ $\quad 6x - 1$

إذا كانَ $k(x) = \frac{1}{x+1}$، وَ $h(x) = \frac{2}{x}$، فأَجِدُ:

13. $(h \circ k)(3)$ $\quad 8$
14. $(k \circ h)(3)$ $\quad \frac{3}{5}$
15. $(h \circ h)(6)$ $\quad 6$
16. $(k \circ k)(-3)$ $\quad 2$
17. $(k \circ h)(x)$
18. $(h \circ k)(x)$

(17–23) أنظر ملحق الإجابات.

أَجِدُ اقترانيْنِ $f(x)$، وَ $g(x)$، بحيثُ يكونُ $h(x) = (g \circ f)(x)$ في كلٍّ ممّا يأتي:

19. $h(x) = x^6 + 1$
20. $h(x) = 4(x+1)^2$
21. $h(x) = 2x^2 - 20x + 50$
22. $h(x) = \sqrt{2x^2 - 4} + 7$
23. يرتبطُ سعرُ سلعةٍ مُعيَّنةٍ وعددُ الوحداتِ المبيعةِ منْها بالعلاقةِ $0 \le x \le 400$ ، $p = 100 - \frac{x}{4}$، حيثُ $p$ السعرُ بالدينارِ، وَ $x$ عددُ الوحداتِ المبيعةِ. إذا كانَتِ التكلفةُ $C$ بالدنانيرِ لإنتاجِ $x$ وحدةً هيَ $C = \frac{4\sqrt{x}}{0.5} + 600$، فأَجِدُ التكلفةَ $C$ في صورةِ اقترانٍ نسبةً إلى السعرِ $p$، ثمَّ أَجِدُ التكلفةَ إذا كانَ سعرُ الوحدةِ الواحدةِ 19 دينارًا.

# كتاب التمارين

## الدرسُ 4
## الاقترانُ العكسيُّ
## Inverse Function



إذا كانَ $g(x) = 80 - \frac{100}{1+x}$، فأَجِدُ كلًّا ممّا يأتي:

1. $g(9)$ 70
2. $g(4)$ 60
3. $g^{-1}(70)$ 9
4. $g^{-1}(60)$ 4

5. إذا كانَ $f(x)$ اقترانَ واحدٍ لواحدٍ، وَ $f(3) = 8$، فماذا يُستنتَجُ منْ هذهِ المعطياتِ؟
يمكن استنتاج أنَّ $f^{-1}(8) = 3$

6. إذا كانَ $f(x)$ يُمثِّلُ عددَ الوحداتِ المُنتَجةِ في $x$ ساعةَ عملٍ لمُنتَجٍ مُعيَّنٍ، فماذا يُمثِّلُ المقدارُ $f^{-1}(2540)$؟
عدد ساعات العمل التي ينتج فيها 2540 وحدة.

أَجِدُ الاقترانَ العكسيَّ $f^{-1}(x)$ لكلٍّ ممّا يأتي، مُحدِّدًا مجالَهُ ومداهُ: (7–16) أنظر ملحق الإجابات.

7. $f(x) = 3x - 5$
8. $f(x) = 4 - 7x$
9. $f(x) = x^2 + 3, x \geq 0$
10. $f(x) = 5 - 9x^2, x \geq 0$
11. $f(x) = \frac{x}{2x+6}$
12. $f(x) = \frac{x}{8-4x}$
13. $f(x) = \sqrt{2x-1} + 3$
14. $f(x) = \sqrt{3x+2} - 5$
15. $f(x) = \sqrt[3]{3x-2} - 1$
16. $f(x) = \sqrt[3]{3-4x} + 1$

أُبيِّنُ إذا كانَ كلٌّ منَ الاقترانينِ $f(x)$، وَ $h(x)$ اقترانًا عكسيًّا للآخرِ أمْ لا:

17. $f(x) = 2x - 5, h(x) = 5x + 2$
18. $f(x) = \frac{2x}{3x+5}, \ h(x) = \frac{5x}{2-3x}$

(17–21) أنظر ملحق الإجابات.

19. أَجِدُ الاقترانَ العكسيَّ للاقترانِ $f(x) = \sqrt{6+3x}$، ثمَّ أُمثِّلُ $f(x)$، وَ $f^{-1}(x)$ في المستوى الإحداثيِّ نفسِهِ.

20. هندسةٌ: تُعطى مِساحةُ الدائرةِ بالاقترانِ $A(r) = \pi r^2$، حيثُ $A$ المِساحةُ، وَ $r$ نصفُ القُطْرِ. أُعبِّرُ عنْ $r$ في صورةِ اقترانٍ نسبةً إلى المِساحةِ $A$، ثمَّ أَجِدُ طولَ نصفِ قُطْرِ دائرةٍ مِساحتُها $250 \text{ cm}^2$

21. فيزياءُ: يُعطى زمنُ الدورةِ $T$ ثانيةً لبندولٍ بسيطٍ بالاقترانِ $T(\ell) = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{9.8}}$، حيثُ $\ell$ طولُ البندولِ بالأمتارِ. أُعبِّرُ عنْ $\ell$ في صورةِ اقترانٍ نسبةً إلى الزمنِ $T$، ثمَّ أَجِدُ طولَ بندولٍ زمنُ دورتِهِ 3 s



## الدرسُ 5
## المتتالياتُ
## Sequences



أكتبُ الحدودَ الثلاثةَ التاليةَ لكلِّ متتاليةٍ ممّا يأتي:

1. $4, 6, 8, 10, \ldots$ 12,14,16
2. $3, 30, 300, 3000, \ldots$ 30000,300000,3000000
3. $1, 4, 9, 16, \ldots$ 25,36,49
4. $2, 4, 8, 16, \ldots$ 32,64,128
5. $3, 10, 17, 24, \ldots$ 31,38,45
6. $0, 4, 18, 48, \ldots$ 100,180,294

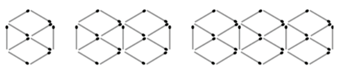
أُصنِّفُ المتتالياتِ الآتيةَ إلى خطِّيةٍ، وتربيعيةٍ، وتكعيبيةٍ، ثمَّ أَجِدُ الحدودَ الثلاثةَ الأولى والحدَّ العشرينَ لكلٍّ منْها:

7. $T(n) = 3n + 1$ خطية. 4, 7, 10 $T(20) = 61$
8. $T(n) = 2n^2 + 1$ تربيعية. 3, 9, 19 $T(20) = 801$
9. $T(n) = 5n^3 + 2$ تكعيبية. 7, 42, 137 $T(20) = 40002$
10. $T(n) = n(n^2 + 1)$ تكعيبية. 2, 10, 30 $T(20) = 8020$

أَجِدُ الحدَّ العامَّ لكلِّ متتاليةٍ ممّا يأتي:

11. $6, 11, 16, 21, 26, \ldots$ $T(n) = 5n+1$
12. $-4, 3, 22, 59, 120, \ldots$ $T(n) = n^3 - 5$
13. $0, 3, 8, 15, \ldots$ $T(n) = n^2 - 1$
14. $5, 11, 21, 35, 53, \ldots$ $T(n) = 2n^2 + 3$

في ما يأتي نمطٌ هندسيٌّ يُمثِّلُ عددُ أعوادِ الثقابِ فيهِ متتاليةً:



1 2 3

15. أرسمُ النموذجَ الرابعَ في هذا النمطِ. أنظر ملحق الإجابات.
16. أَجِدُ عددَ أعوادِ الثقابِ اللازمةِ لبناءِ النموذجِ رقمِ 20 في هذا النمطِ. 181
17. ما أكبرُ مجموعةٍ منَ النماذجِ يُمكِنُ بناؤُها باستعمالِ 100 عودٍ منَ الثقابِ؟ 11

الدرس 1:

1) كثير حدود، صورتـه القياسـية: $f(x) = -x + 4$، ودرجته: 1، ومعامله الرئيس: $-1$، وحده الثابت: 4

2) ليس كثيـر حدود؛ لأنَّ فيه عاملًا أسـه سـالب ($x$ الموجودة في المقام).

3) كثير حـدود، صورتـه القياسـية: $h(x) = 12x^2 - 19x - 12$، ودرجته: 2، ومعامله الرئيس: 12، وحده الثابت: $-12$

4) كثيـر حدود، صورتـه القياسـية: $L(x) = 5.3x^3 + 3x^2 - 2x$، ودرجته: 3، ومعامله الرئيس: 5.3، وحده الثابت: 0

5) كثير حدود، صورته القياسية: $j(x) = -16t^2 + \sqrt{7}\,t$، ودرجته: 2، ومعامله الرئيس: $-16$، وحده الثابت: 0

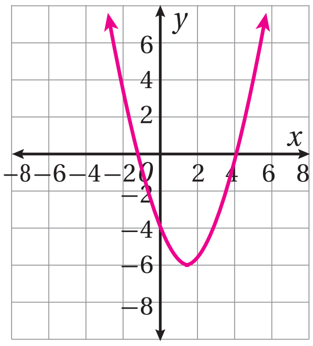
6) ليس كثير حدود؛ لأنَّ فيه أسًّا كسريًّا.

7) ليس كثير حدود؛ لأنَّ الأس فيه متغير، فهو اقتران أسي.

8) كثيـر حـدود، صورتـه القياسـية: $f(y) = y^7 - 8y^5 + 16y^3$، ودرجته: 7، ومعامله الرئيس: 1، وحده الثابت: 0

9)

| $x$ | $-2$ | 0 | 1.5 | 3 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $y = f(x)$ | 6 | $-4$ | $-6.25$ | $-4$ | 6 |

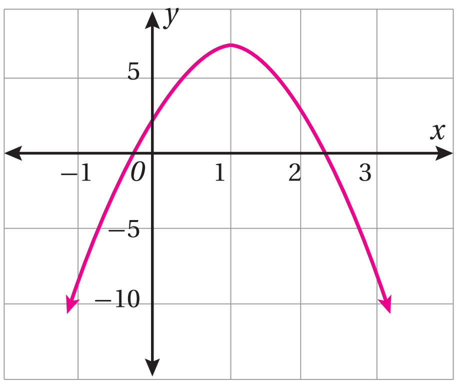


المجال: جميع الأعداد الحقيقية.

المدى: $y \geq -6.25$، أو الفترة $[-6.25, \infty)$.

10)

| $x$ | $-1$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|
| $y = f(x)$ | $-9$ | 3 | 7 | 3 | $-9$ |

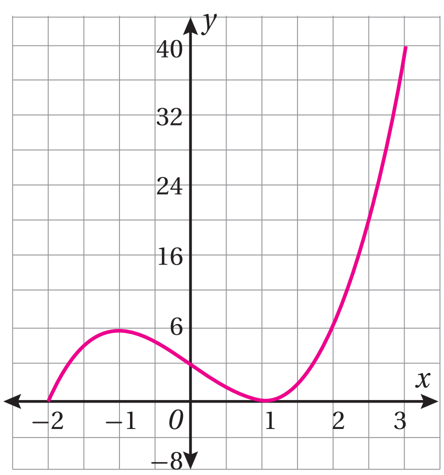


المجال: جميع الأعداد الحقيقية.

المدى: $y \leq 7$، أو الفترة $(-\infty, 7]$.

11)

| $x$ | $-2$ | $-1$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 0 | 8 | 4 | 0 | 8 | 40 |



المجال: $-2 \le x \le 3$ ، أو الفترة $[-2, 3]$.

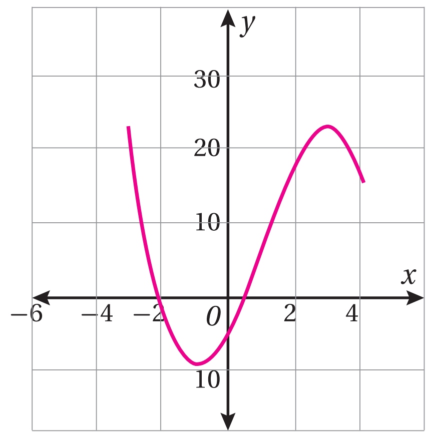
المدى: $0 \le y \le 40$، أو الفترة $[0, 40]$.

**12)**

| $x$ | $-3$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ | $3$ | $4$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | $23$ | $-2$ | $-9$ | $-4$ | $7$ | $18$ | $23$ | $16$ |

المجال: $-3 \le x \le 4$ ، أو الفترة $[-3, 4]$.

المدى: $-9 \le y \le 23$، أو الفترة $[-9, 23]$.




**13)** $h(x) + g(x) = x^4 - 2x^3 + 3x - 2$

**14)** $g(x) - h(x) = -x^4 - 2x^3 + 10x^2 - 3x + 10$

**15)** $f(x) \cdot h(x) = 2x^5 + x^4 - 10x^3 + x^2 - 9x - 6$

**16)** $x(f(x)) + h(x) = x^4 - 3x^2 + 4x - 6$

**17)** $(f(x))^2 - g(x) = 2x^3 - x^2 + 4x - 3$

**18)** $h(x) - x(g(x)) = 3x^4 - 5x^3 - 5x^2 - x - 6$

**23)** حجم ما تبقى من المكعب يساوي حجم المكعب الأصلي مطروحًا منه حجم التجويف.

حجم المكعب الأصلي هو $(2x+1)^3$ ، وحجم التجويف هو $x^2(2x+1)$.

إذا كان حجم الجزء المتبقي هو $R(x)$، فإنَّ:

$R(x) = (2x+1)^3 - x^2(2x+1)$

$= 8x^3 + 12x^2 + 6x + 1 - (2x^3 + x^2) = 6x^3 + 11x^2 + 6x + 1$

**24)** $P(x) = -0.2x^2 + 90x - 6300$

**28)** إجابة محتملة:

$f(x) = 2x - 1,\ h(x) = 4x^2 + 2x + 1$

$f(x) \cdot h(x) = (2x-1)(4x^2 + 2x + 1)$

$= 8x^3 + 4x^2 + 2x - 4x^2 - 2x - 1$

$= 8x^3 - 1$

**29)** لإيجاد الأصفار، تُحَل المعادلة: $f(x) = 0$

$$x^3 - x^2 - 4x + 4 = 0$$
$$(x^3 - x^2) - (4x - 4) = 0$$
$$x^2(x-1) - 4(x-1) = 0$$
$$(x-1)(x^2 - 4) = 0$$
$$(x-1)(x-2)(x+2) = 0$$
$$x = 1, x = 2, x = -2$$

إذن، أصفار هذا الاقتران هي: $-2$ ، $2$ ، $1$

**30)** إذا كانت درجة $f$ أكبر من درجة $g$، فإنَّ درجة كلٍّ من $f+g, f-g$ تساوي درجة $f$؛ أي الدرجة العليا. أمّا إذا كانت درجة $f$ تساوي درجة $g$، فإنَّ درجة كلٍّ من $f+g, f-g$ تساوي درجة كلٍّ منهما، أو تقل عنها؛ لأنَّ ناتج جمع المعاملين الرئيسين قد يكون صفرًا. وأمّا درجة $f \cdot g$ فإنَّها تساوي دائمًا مجموع درجتي الاقترانين $f, g$.

## الدرس 2:

**7)** المجال: جميع الأعداد الحقيقية باستثناء 0؛ أيْ $\{x | x \neq 0\}$.

**8)** المجال: جميع الأعداد الحقيقية باستثناء 1 و $\frac{1}{2}$ ؛ أيْ $\{x | x \neq \frac{1}{2}, x \neq 1\}$.

**9)** المجال: جميع الأعداد الحقيقية.

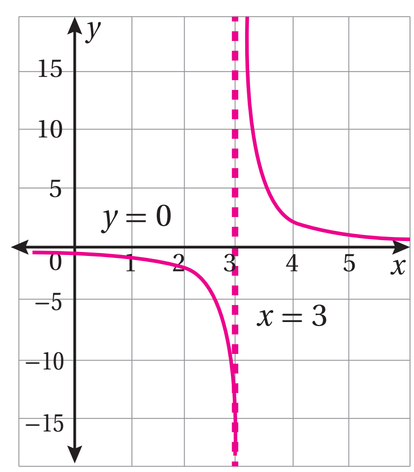
**10)**

| $x$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ | $2.8$ | $3.2$ | $3.5$ | $4$ | $6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y = f(x)$ | $-0.5$ | $-0.67$ | $-1$ | $-2$ | $-10$ | $10$ | $4$ | $2$ | $0.67$ |

له خط تقارب رأسي هو $x = 3$، وخط تقارب أفقي هو $y = 0$.

المجال: جميع الأعداد الحقيقية باستثناء 3؛ أيْ $\{x \mid x \neq 3\}$.

المدى: جميع الأعداد الحقيقية باستثناء 0؛ أيْ $\{y \mid y \neq 0\}$.



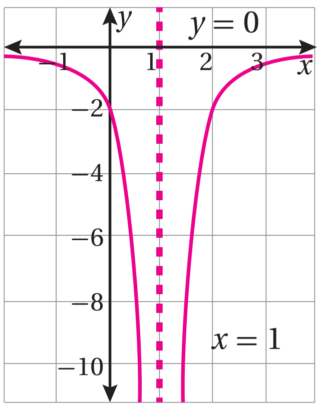

**11)**

| $x$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $0.5$ | $1.5$ | $2$ | $3$ | $4$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y = h(x)$ | $-0.22$ | $-0.5$ | $-2$ | $-8$ | $8$ | $-2$ | $-0.5$ | $-0.22$ |

له خط تقارب رأسي هو $x = 1$، وخط تقارب أفقي هو $y = 0$.

المجال: جميع الأعداد الحقيقية باستثناء 1؛ أيْ $\{x \mid x \neq 1\}$.

المدى: جميع الأعداد الحقيقية السالبة؛ أيْ $\{y \mid y < 0\}$.

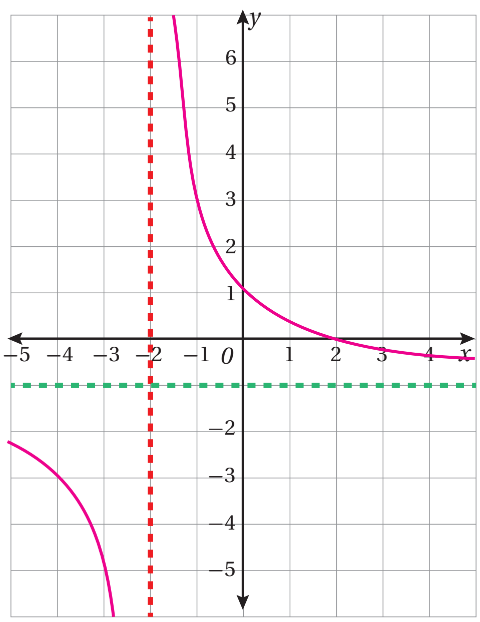



**12)** له خط تقارب رأسي هو $x = -2$ ، وخط تقارب أفقي هو $y = -1$.

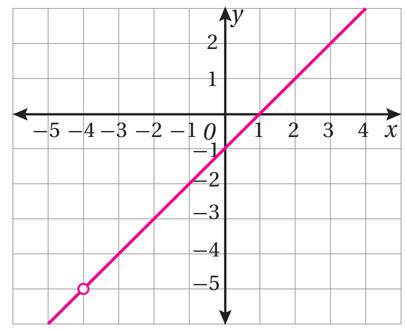
| $x$ | $-4$ | $-3$ | $-2.5$ | $-1.5$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | $-3$ | $-5$ | $-9$ | $1$ | $-3$ | $-1$ | $-0.33$ | $0$ |

المجال: جميع الأعداد الحقيقية باستثناء $-2$؛ أيْ $\{x | x \neq -2\}$.

المدى: جميع الأعداد الحقيقية باستثناء $-1$؛ أيْ $\{y | y \neq -1\}$.

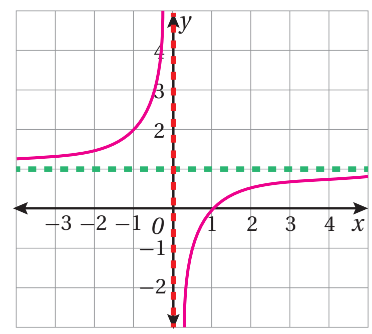


**13)** يُبسَّط هذا الاقتران إلى $f(x) = x-1, x \neq -4$؛ فتمثيله البياني هو نفس تمثيل $y = x-1$، إلا أنَّ فيه ثقبًا مقابل $x = -4$ كما يظهر في الرسم البياني الآتي:

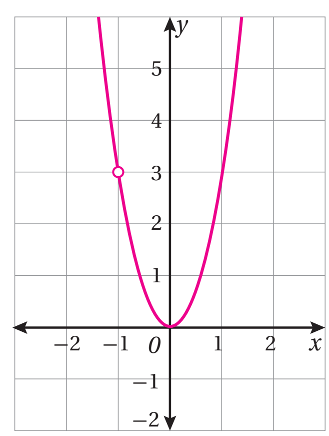


**14)** يُبسَّط هذا الاقتران إلى $f(x) = -\frac{1}{x} + 1$

وعليه، فإنَّ له خط تقارب رأسيًّا هو $x = 0$، وخط تقارب أفقيًّا هو $y = 1$، وهذا هو تمثيله البياني:



**15)** يُبسَّط هذا الاقتران إلى $f(x) = 3x^2 , x \neq -1$؛ فتمثيله البياني هو نفس تمثيل $y = 3x^2$، إلا أنَّ فيه ثقبًا مقابل $x = -1$ كما يظهر في الرسم البياني الآتي:



**19)** عرض هذه الورقة $(x + 2)^2$، وهو أحد عاملي مساحتها. فإذا قسمت المساحة على $(x + 2)^2$، كان الباقي صفرًا.

باقي قسمة المساحة على $(x + 2)^2$، أو $(x^2+4x+4)$ هو $(a-20)x$. وبمساواته بالصفر، فإنَّ $a = 20$.

$$
\begin{array}{r|l}
 & 3x + 2 \\
\hline
x^2 + 4x + 4 & 3x^3 + 14x^2 + ax + 8 \\
 & (-)\ 3x^3 + 12x^2 + 12x \\
\hline
 & 2x^2 + (a-12)x + 8 \\
 & (-)\ 2x^2 + 8x + 8 \\
\hline
 & (a-20)x
\end{array}
$$

**20)** الاقتران المختلف هو $h(x) = \frac{9}{x^2 + 1}$؛ إذ ليس لمقامه أصفار، وليس له خطوط تقارب رأسية. أمّا مقامات الاقترانات الأُخرى فلها صفر واحد أو أكثر؛ أيْ إنَّ لها خط تقارب رأسيًّا واحدًا على الأقل.

**21)** إجابة محتملة:

$f(x) = \frac{1}{x^2 + 5x - 14} + 3$، أو $f(x) = \frac{ax + b}{x^2 + 5x - 14} + 3$،

حيث $a$ و $b$ عددان حقيقيان؛ شرط أنْ يكون صفر المقدار $ax + b$ لا يساوي 7 أو $-2$

## الدرس 3:

**11)** $(a \circ b)(x) = a(x-7) = x - 7 + 4 = x - 3$

$(b \circ a)(x) = b(x+4) = x + 4 - 7 = x - 3$

$(a \circ b)(x) = (b \circ a)(x) = x - 3$

**12)** $(f \circ g)(x) = f(3x + 4) = 2^{3x+4}$

$(f \circ g)(-3) = 2^{3(-3)+4} = 2^{-5} = \frac{1}{32}$

**13)** $(g \circ f)(x) = 2(\frac{1}{x-4}) - 10 = \frac{2}{x-4} - 10\ (\frac{x-4}{x-4})$

$= \frac{2 - 10x + 40}{x - 4}$

$= \frac{42 - 10x}{x - 4}$

مجال هذا الاقتران هو جميع الأعداد الحقيقية باستثناء 4؛ أيْ $\{x | x \neq 4\}$.

16) ستتنوع إجابات الطلبة.

إجابة محتملة:

$g(x) = 4 + x^2$ , $f(x) = \frac{4}{3-\sqrt{x}}$،

أو $g(x)=\sqrt{4+x^2}$ , $f(x) = \frac{4}{3-x}$، وغيرها.

17) ستتنوع إجابات الطلبة.

إجابة محتملة:

$g(x) = \frac{1}{2x-3}$ , $f(x) = x^3$،

أو $g(x)= 2x-3$ , $f(x) = \frac{1}{x^3}$، وغيرها.

18) مدى $g(x)$ هو جميع الأعداد الحقيقية السالبة، وهي غير موجودة في مجال $f(x)$؛ لأنَّ مجال $f(x)$ هو الأعداد الحقيقية التي لا تقل عن 2، فلا يمكن تكوين $(f\circ g)(x)$.

19) عندما يكون $t = 2$ طول نصف قطر الموجة:

$$r(2) = 25\sqrt{2+2}$$
$$= 50 \text{ cm}$$

مساحة الموجة تساوي $\pi(50)^2$، أو $7854 \text{ cm}^2$ تقريبًا.

20)

$$(N\circ T)(t) = N(T(t)) = 23(5t+1.5)^2 - 56(5t+1.5)+1$$
$$= 575t^2 + 65t - 31.25$$

21) الزمن الذي يكون عنده عدد خلايا البكتيريا 6752 خلية هو حل المعادلة الآتية:

$$575t^2 + 65t - 31.25 = 6752$$
$$575t^2 + 65t - 6783.25 = 0$$
$$t = \frac{-65 \pm \sqrt{65^2 + 4(575)(6783.25)}}{2(575)}$$
$$t = 3.38,\ t = -3.49$$

الإجابة السالبة مرفوضة (لا يكون الزمن سالبًا).

إذن، يكون عدد خلايا البكتيريا 6752 خلية بعد 3.38 h من لحظة إخراج الطعام من الثلاجة.

22) $a = 4, b = -3$

23) $(f\circ g\circ h)(x) = f(g(x+3))$

$$= f\left(\frac{1}{x+3}\right) = \left(\frac{1}{x+3}\right)^2 + 1 = \frac{x^2+6x+10}{(x+3)^2}$$

24) إجابة هدى صحيحة. عوَّضت وفاء $x^2$ مكان $x$ في الحد الثاني من قاعدة $f(x)$، ونسيت 5

25) ستتنوع إجابات الطلبة.

إجابة محتملة:

$$f(x) = x^2 + 3 ,\ g(x) = x-2$$

26) $(f\circ g)(x) = f\left(\frac{1}{x+2}\right) = \frac{1}{\frac{1}{x+2} - 3} = 1 \div \left(\frac{1}{x+2} - 3\right)$

$$= 1 \div \frac{1-3(x+2)}{x+2} = 1\times \frac{x+2}{-3x-5} = -\frac{x+2}{3x+5}$$

مجاله هو مجال $g(x)$ باستثناء الأعداد التي تجعل المقام يساوي 0؛ أيْ $x = -\frac{5}{3}$، فمجاله هو جميع الأعداد الحقيقية باستثناء $-2$ و $-\frac{5}{3}$؛ أيْ $\{x \mid x \neq -2, x \neq = -\frac{5}{3}\}$.

27) $(f\circ g)(x) = f\left(\frac{2x-1}{3}\right) = \frac{2\left(\frac{2x-1}{3}\right)-2}{\frac{2x-1}{3} - 4}$

$$= \frac{\frac{4x-8}{3}}{\frac{2x-13}{3}} = \frac{4x-8}{2x-13}$$

$$(f\circ g)(x) = \frac{4x-8}{2x-13} = -4 \Rightarrow 4x-8 = -8x+52 \Rightarrow x = 5$$

## الدرس 4:

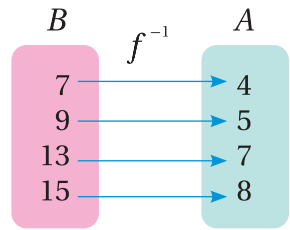
1) لا يوجد له اقتران عكسي؛ لأنَّه ليس اقتران واحد لواحد.

الزوجان الأول والثاني فيهما المسقط الثاني نفسه 6

2) يوجد له اقتران عكسي؛ لأنَّه اقتران واحد لواحد.

$$h^{-1} = \{(0, 0), (1, 1), (16, 2), (81, 3)\}$$

**3)** يوجد له اقتران عكسي؛ لأنَّه اقتران واحد لواحد.




**4)** لا يوجد له اقتران عكسي؛ لأنَّه ليس اقتران واحد لواحد.

العنصران $-3$ و $3$ لهما الصورة نفسها

**17)** $(f\circ g)(x) = (-3+\sqrt{x-2}+3)^2 + 2 = x-2+2 = x$

$(g\circ f)(x) = -3+\sqrt{(x+3)^2+2-2} = -3+(x+3) = x$

إذن، كلٌّ من الاقترانين $f(x), g(x)$ هو اقتران عكسي للآخر.

**18)** $y = \dfrac{x}{x-1}$

$xy-y = x \Rightarrow xy-x = y \Rightarrow x(y-1) = y$

$x = \dfrac{y}{y-1}$

$y = \dfrac{x}{x-1} \Rightarrow f^{-1}(x) = \dfrac{x}{x-1} = f(x)$

يمكن إثبات أنَّ $f(x)$ هو اقتران عكسي لنفسه ببيان أنَّ:

$(f\circ f)(x) = x$

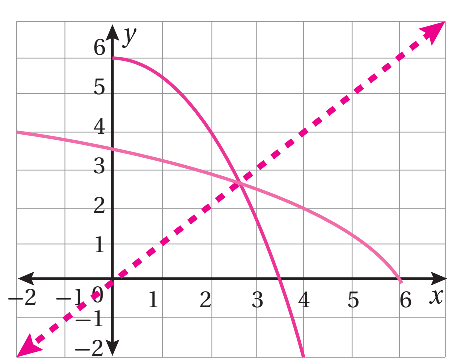
$(f\circ f)(x) = f(f(x)) = \dfrac{\frac{x}{x-1}}{\frac{x}{x-1}-1} = \dfrac{x}{x-1} \div \left(\dfrac{x}{x-1}-1\right) =$

$= \dfrac{x}{x-1} \div \dfrac{x-(x-1)}{x-1} = \dfrac{x}{x-1} \div \dfrac{1}{x-1} = \dfrac{x}{x-1} \times \dfrac{x-1}{1} = x$

**20)** رسم المستقيم $y = x$، ثم تعيين صور بعض النقاط بالانعكاس حول المستقيم $y = x$، مثل: $(0, 6)$ وانعكاسها $(6, 0)$، والنقطة $(4, -2)$ وانعكاسها $(-2, 4)$، والنقطة $(2, 4)$ وانعكاسها $(4, 2)$، ثم الوصل بينها بخط متصل، فينتج الشكل التالي.

مجال $f(x)$: $0 \le x \le 4$ ، ومداه: $-2 \le x \le 6$

مجال $f^{-1}(x)$: $-2 \le x \le 6$، ومداه: $0 \le y \le 4$



**21)**

$f(x) = x^2-2x+5 = x^2-2x+1+4 = (x-1)^2+4\ ,\ -3 \le x \le 1$

$y = (x-1)^2+4$

$y-4 = (x-1)^2$

$-\sqrt{y-4} = x-1$

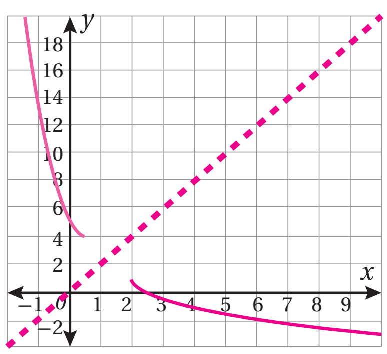
(أُخِذ الجذر السالب لأنَّ التركيز هنا هو على الجزء الأيسر من القطع المكافئ).

$1-\sqrt{y-4} = x$

$y = 1-\sqrt{x-4}$

$f^{-1}(x) = 1-\sqrt{x-4}$

مجال $f^{-1}(x)$: $4 \le x \le 20$، ومداه: $-3 \le y \le 1$



**22)**

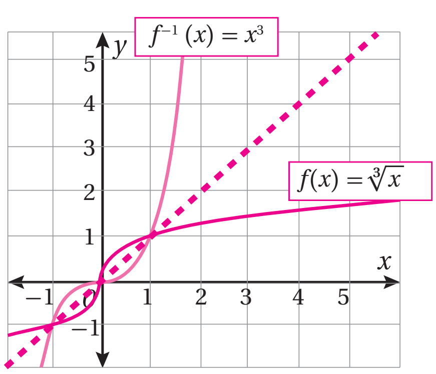
$n(C) = \dfrac{100C-25}{0.6-C}\ ;\ n(0.5) = \dfrac{100(0.5)-25}{0.6-0.5} = \dfrac{25}{0.1} = 250\text{ mL}$

**23)** نعم؛ فالاقتران العكسي يُبيِّن كتلة الجسم بدلالة طول الزنبرك، وهو: $w = 2(l-3)$

**24)** $r(A) = -20+\sqrt{\dfrac{A+800\pi}{2\pi}}\ ;$

$r(2000) = -20+\sqrt{\dfrac{2000+800\pi}{2\pi}} \approx 6.8\text{ cm}$

**25)** $f^{-1}(x) = x^3$



**26)** بما أن للاقتران $f(x)$ صفرًا عندما $x = 3$، فإن منحنى $f(x)$ يمر بالنقطة $(3, 0)$؛ لذا فإن منحنى الاقتران العكسي $f^{-1}(x)$ يمر بالنقطة $(0, 3)$.

**27)** ستتنوع إجابات الطلبة.

إجابة محتملة:

$$g(x) = 9x + 7 ,\ g^{-1}(x) = \frac{x-7}{9}$$

$$(g\circ g^{-1})(x) = g(\frac{x-7}{9}) = 9(\frac{x-7}{9})+7 = x-7+7 = x$$

$$(g^{-1}\circ g)(x) = g^{-1}(9x+7) = \frac{9x+7-7}{9} = \frac{9x}{9} = x$$

إذن، كلٌّ من الاقترانين $g(x)$ وَ $g^{-1}(x)$ هو اقتران عكسي للآخر.

**28)** $x = 0.6$

## الدرس 5:

**26)**

| النموذج | (1) | (2) | (3) | (4) |
|---|---|---|---|---|
| المحيط | 5 | 8 | 11 | 14 |

**27)** الحد العام لهذه المتتالية هو: $T(n) = 3n + 2$

محيط النموذج الذي يحوي $n$ من الأشكال الخماسية هو: $(3n+2)$ cm، حيث طول ضلع الخماسي 1 cm

**28)** محيط النموذج الذي يحوي 50 شكلًا خماسيًّا هو:

$3(50) + 2 = 152$ cm

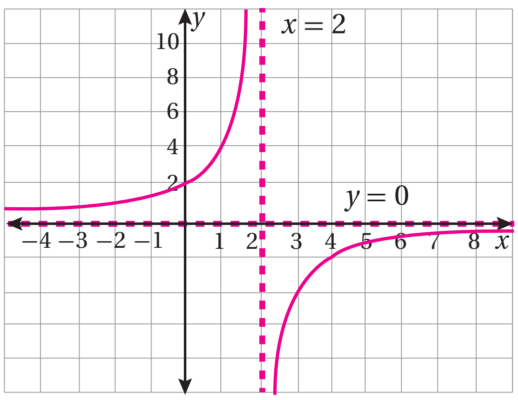
**29)** $3n + 2 = 1000 \Longrightarrow 3n = 998 \Longrightarrow n = 332.3$

إذن، أكبر عدد من الأشكال الخماسية المستعملة في نموذج محيطه أقل من 1000 cm هو 332 شكلًا.

## اختبار نهاية الوحدة:

**13)** لهذا الاقتران خط تقارب رأسي هو $x = 2$، وخط تقارب أفقي هو $y = 0$.

| $x$ | $-1$ | 0 | 1 | 1.5 | 2.5 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y = f(x)$ | 1.33 | 2 | 4 | 8 | $-8$ | $-4$ | $-2$ | $-1.33$ |




المجال: جميع الأعداد الحقيقية باستثناء 2؛ أيْ $\{x|x \neq 2\}$.

المدى: جميع الأعداد الحقيقية باستثناء 0؛ أيْ $\{y|y \neq 0\}$.

**18)** $g^{-1}(x) = \frac{1}{x-2} - 1 ,\ x \neq 2$

**19)** $(f\circ f)(x) = 16x - 15$

**20)** $(g\circ f)(x) = \frac{1}{4x-2} + 2$

**21)** $f^{-1}(x) = -x^2 + 4, x \geq 0$

مجال $f(x)$ هو $x \leq 4$ أو الفترة $(-\infty, 4]$، ومداه هو $y \geq 0$ أو الفترة $[0, \infty)$.

مجال $f^{-1}(x)$ هو $x \geq 0$ أو الفترة $[0, \infty)$، ومداه هو $y \leq 4$ أو الفترة $(-\infty, 4]$.

## إجابات أسئلة كتاب التمارين، الدرس 1:

**1)** ليس كثير حدود؛ لأنَّ أس المتغير $x$ في الحد الثاني سالب.

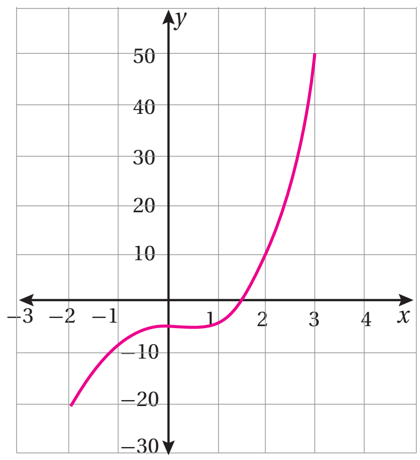
**2)** كثير حدود، درجته: 3، ومعامله الرئيس: $-5$، وحده الثابت: $-1$، وصورته القياسية: $f(x) = -5x^3 + 3\frac{1}{5}x^2 + 7x - 1$

**3)** كثير حدود، درجته: 1، ومعامله الرئيس: $-\frac{16}{5}$، وحده الثابت: $\frac{24}{5}$، وصورته القياسية: $f(x) = -\frac{16}{5}x + \frac{24}{5}$

**4)** ليس كثير حدود؛ لأنَّه يحوي مقدارًا جذريًّا.

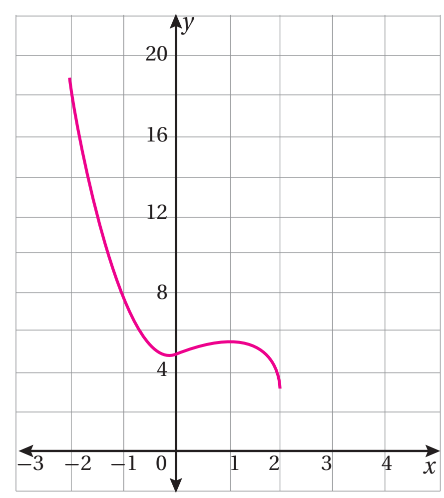
**5)** المجال: $\{x|-2\leq x \leq 3\}$.

المدى: $\{y|-21\leq y \leq 49\}$.



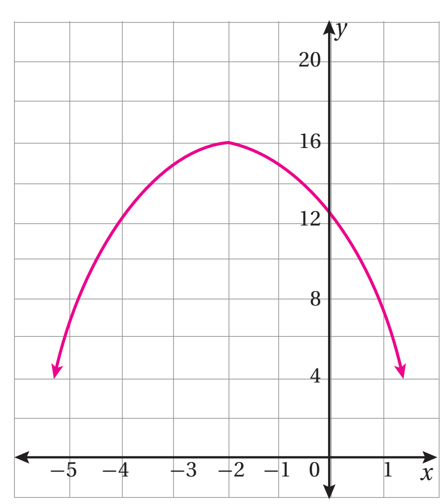

**6)** المجال: $\{x \mid -2 \leq x \leq 2\}$.

المدى: $\{y \mid 3 \leq y \leq 19\}$.



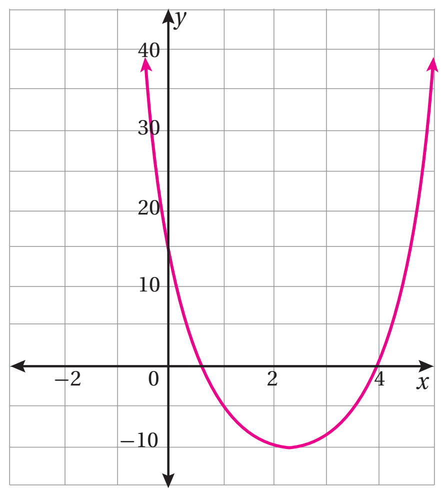

**7)** المجال: جميع الأعداد الحقيقية.

المدى: $\{y \mid y\leq 16\}$، أو $(-\infty, 16]$.




**8)** المجال: جميع الأعداد الحقيقية.

المدى: $\{y \mid y\geq -10\}$، أو $[-10, \infty)$.




### إجابات أسئلة كتاب التمارين، الدرس 2:

**3)** باقي القسمة هو $(k-6)$:

$k-6 = 8 \Rightarrow k = 14$

**4)** باقي القسمة هو $3c + 9$، ويجب أنْ يكون الباقي صفرًا:

$3c + 9 = 0$

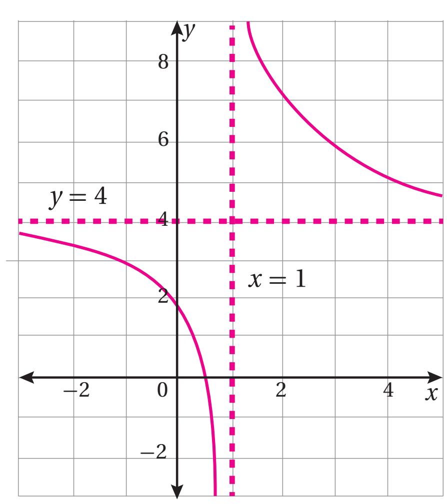
$3c = -9 \Rightarrow c = -3$

**5)** له خط تقارب رأسي هو $x = 1$،

وله خط تقارب أفقي هو $y = 4$.

المجال: $\{x \mid x \neq 1\}$.

المدى: جميع الأعداد الحقيقية باستثناء 4؛ أيْ $\{y \mid y \neq 4\}$.

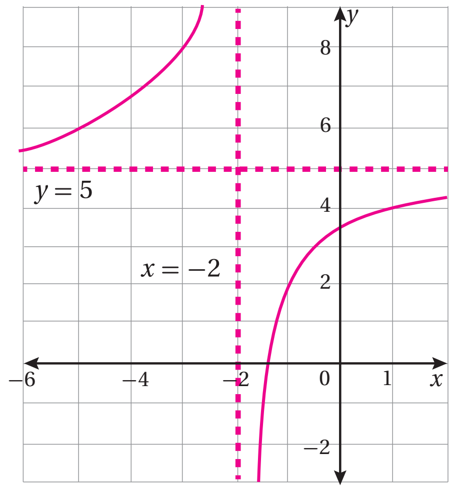


6) له خط تقارب رأسي هو $x = -2$

وله خط تقارب أفقي هو $y = 5$

المجال: $\{x \mid x \neq -2\}$

المدى: جميع الأعداد الحقيقية باستثناء 5 أي $\{y|y \neq 5\}$




7) المجال: جميع الأعداد الحقيقية باستثناء $-2, 2$؛

أيْ $\{x|x \neq -2, x \neq 2\}$.

المدى: جميع الأعداد الحقيقية باستثناء $[0, 1)$؛

أيْ $(-\infty, 0]$، أو $(1, \infty)$.

له خطا تقارب رأسيان، هما: $x = -2, x = 2$.

له خط تقارب أفقي هو $y = 1$.

8) المجال: جميع الأعداد الحقيقية باستثناء $-1, 1$؛

أيْ $\{x|x \neq -1, x \neq 1\}$.

المدى: جميع الأعداد الحقيقية.

له خطا تقارب رأسيان، هما: $x = -1, x = 1$.

له خط تقارب أفقي هو $y = 0$.

9) المجال: جميع الأعداد الحقيقية باستثناء 3؛ أيْ $\{x|x \neq 3\}$.

المدى: جميع الأعداد الحقيقية التي تزيد على 5 ؛ أيْ $\{y|y > 5\}$، أو الفترة $(5, \infty)$.

10) المجال: جميع الأعداد الحقيقية باستثناء $-2$، أيْ $\{x \mid x \neq -2\}$.

المدى: جميع الأعداد الحقيقية التي تزيد على 3، أيْ $\{y|y > 3\}$، أو الفترة $(3, \infty)$.

**11)**

$$P(0) = \frac{72(1 + 0.6(0))}{3 + 0.02(0)} = 24$$

**12)**

$$P(30) = \frac{72(1 + 0.6(30))}{3 + 0.02(30)} = 380$$

**13)** $\frac{72(1 + 0.6t)}{3 + 0.02t} = 558 \Rightarrow 588(3+0.02t) = 72(1+0.6t)$

$1674+11.16t = 72+ 43.2t$

$1602 = 32.04t \Rightarrow t = 50$

إذن، يكون عدد الحشرات 558 بعد 50 شهرًا من نقلها إلى المحمية.

## إجابات أسئلة كتاب التمارين، الدرس 3:

**17)** $k \circ h(x) = k\left(\frac{2}{x}\right) = \frac{1}{\frac{2}{x} + 1}$

$$\frac{1}{\frac{2+x}{x}} = \frac{x}{2+x}$$

**18)** $h \circ k(x) = h\left(\frac{1}{x+1}\right)$

$$= \frac{2}{\frac{1}{x+1}} = 2 \times \frac{x+1}{1} = 2x + 2$$

19) تتنوع الإجابات. إجابة محتملة: $f(x)= x^6 ; g(x) = x +1$، أو $f(x) = x^3 ; g(x) = x^2 +1$، وغيرها.

20) تتنوع الإجابات. إجابة محتملة: $f(x)= x+ 1 ; g(x) = 4x^2$،

أو $f(x)= 2x+2 ; g(x)= x^2$، وغيرها.

21) تتنوع الإجابات. إجابة محتملة: $f(x) = x- 5 ; g(x) = 2x^2$،

أو $f(x) = (x-5)^2 ; g(x) = 2x$.

22) تتنوع الإجابات. إجابة محتملة:

$f(x)= 2x^2- 4 ; g(x) = \sqrt{x} + 7$،

أو $f(x)= 2x^2 ; g(x)= \sqrt{x -4} +7$.

**23)** $x = 4(100 - p) \Rightarrow C(p)= \frac{8\sqrt{(100-p)}}{0.5} + 600$

$C(19) = 744$

## إجابات أسئلة كتاب التمارين، الدرس 4:

7) $f^{-1}(x) = \dfrac{x+5}{3}$

مجاله ومداه هما جميع الأعداد الحقيقية.

8) $f^{-1}(x) = \dfrac{4-x}{7}$

مجاله ومداه هما جميع الأعداد الحقيقية.

9) $f^{-1}(x) = \sqrt{x-3}$

مجاله $[3, \infty)$، ومداه الأعداد الحقيقية غير السالبة أو $[0, \infty)$.

10) $f^{-1}(x) = \dfrac{\sqrt{5-x}}{3}$

مجاله $(-\infty, 5]$، ومداه الأعداد الحقيقية غير السالبة أو $[0, \infty)$.

11) $f^{-1}(x) = \dfrac{6x}{1-2x}$

مجالــه $\{x \mid x \neq \frac{1}{2}\}$، ومداه الأعداد الحقيقية باســتثناء $-3$، أو $\{y|y \neq -3\}$.

12) $f^{-1}(x) = \dfrac{8x}{1+4x}$

مجالــه $\{x \mid x \neq \frac{-1}{4}\}$، ومداه الأعداد الحقيقية باســتثناء 2، أو $\{y \mid y \neq 2\}$.

13) $f^{-1}(x) = \dfrac{x^2-6x+10}{2}$

مجاله جميــع الأعداد الحقيقية التي لا تقل عــن 3؛ أيْ $[3, \infty)$، ومداه الأعداد الحقيقية التي لا تقل عن $\frac{1}{2}$؛ أيْ $[\frac{1}{2}, \infty)$.

14) $f^{-1}(x) = \dfrac{x^2+10x+23}{3}$

مجاله جميع الأعداد الحقيقية التي لا تقل عن $-5$؛ أيْ $[-5, \infty)$، ومداه الأعداد الحقيقية التي لا تقل عن $\frac{-2}{3}$؛ أيْ $[\frac{-2}{3}, \infty)$.

15) $f^{-1}(x) = \dfrac{(x+1)^3+2}{3}$

مجاله ومداه جميع الأعداد الحقيقية.

16) $f^{-1}(x) = \dfrac{3-(x-1)^3}{4}$

مجاله ومداه جميع الأعداد الحقيقية.

17) $(f \circ h)(x) = 2(5x+2)-5 = 10x-1 \neq x$

لا يكون أيٌّ منهما اقترانًا عكسيًّا للآخر.

18) $(f \circ h)(x) = \dfrac{2\left(\dfrac{5x}{2-3x}\right)}{3\left(\dfrac{5x}{2-3x}\right)+5}$

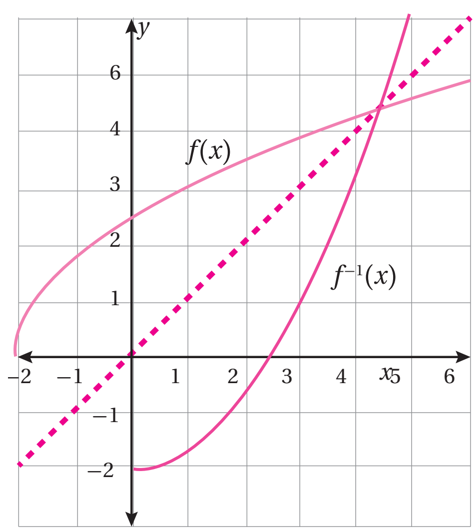
$= \dfrac{10x}{2-3x} \div \dfrac{15x+10-15x}{2-3x}$

$= \dfrac{10x}{2-3x} \times \dfrac{2-3x}{10} = x$

وأيضًا: $(h \circ f)(x) = x$

إذن، كلٌّ من $f(x), h(x)$ هو اقتران عكسي للآخر.

19) $f^{-1}(x) = \dfrac{x^2-6}{3}$



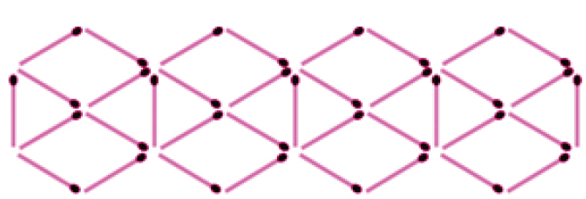

20) $r(A) = \sqrt{\dfrac{A}{\pi}}$

$r(250) = \sqrt{\dfrac{250}{\pi}} \approx 8.92$ cm

21) $l(T) = \dfrac{9.8\,T^2}{4\pi^2}$

$l(3) = \dfrac{9.8\,(3)^2}{4\pi^2} \approx 2.23$ m

## إجابات أسئلة كتاب التمارين، الدرس 5:

17) 

الوحدة
6

# المشتقاتُ
# Derivatives

## مُخطَّط الوحدة

| اسم الدرس | النتاجات | المصطلحات | المصادر والأدوات | عدد الحصص |
|---|---|---|---|---|
| أستعد لدراسة الوحدة | | | • كتاب التمارين. | 1 |
| معمل برمجية جيوجبرا: استكشاف ميل مماس المنحنى. | • وصف التغير في قيمة ميل المماس من نقطة إلى أُخرى على منحنى كثير الحدود. | | • جهاز الحاسوب.<br>• برمجية جيوجبرا. | 1 |
| الدرس 1: تقدير ميل المنحنى. | • إيجاد ميل مماس مرسومًا عند نقطة على منحنى الاقتران.<br>• رسم مماس، وتقدير ميله عند نقطة على منحنى الاقتران.<br>• كتابة معادلة المماس.<br>• تقدير السرعة اللحظية عند نقطة على منحنى المسافة – الزمن. | القاطع.<br>المماس.<br>نقطة التماس.<br>الميل.<br>معادلة المماس.<br>السرعة اللحظية.<br>التسارع اللحظي. | • جهاز حاسوب.<br>• برمجية جيوجبرا.<br>• الآلة الحاسبة.<br>• ورق رسم بياني. | 3 |
| الدرس 2: الاشتقاق. | • تعرُّف مفهوم مشتقة كثير الحدود.<br>• إيجاد مشتقة كثيرات الحدود باستعمال القوانين.<br>• إيجاد الميل باستعمال المشتقة.<br>• إيجاد السرعة اللحظية والتسارع اللحظي باستعمال المشتقة. | المشتقة.<br>كثير الحدود.<br>الميل. | • جهاز الحاسوب.<br>• برمجية جيوجبرا.<br>• الآلة الحاسبة.<br>• ورق رسم بياني. | 3 |
| الدرس 3: القيم العظمى والقيم الصغرى. | • تعرُّف النقاط الحرجة.<br>• إيجاد القيم العظمى والقيم الصغرى لكثيرات الحدود.<br>• حل مسائل حياتية عن القيم العظمى والقيم الصغرى لكثيرات الحدود. | النقطة الحرجة.<br>القيمة العظمى.<br>القيمة الصغرى.<br>الميل.<br>المشتقة | • جهاز الحاسوب.<br>• برمجية جيوجبرا.<br>• الآلة الحاسبة.<br>• ورق رسم بياني. | 3 |
| عرض نتائج المشروع. | | | | 1 |
| اختبار الوحدة. | | | | 2 |
| مجموع الحصص: | | | | 14 |

# الوحدة 6

## نظرة عامة على الوحدة:

تعرَّف الطلبة سابقًا مفهوم الاقتران، وكيفية تمثيله بيانيًّا، وإيجاد مجاله ومداه وأصفاره. وكذلك تعرَّفوا مفهوم القاطع، وكيفية إيجاد ميل المستقيم ومعادلته. سيتعلَّم الطلبة في هذه الوحدة إيجاد ميل منحنى اقتران عند نقطة التماس مع مستقيم مرسوم، وتقدير ميل منحنى اقتران عن طريق رسم المماس، وتقدير السرعه اللحظية. وكذلك إيجاد الميل باستعمال الاشتقاق، وحساب السرعة والتسارع اللحظي، فضلًا عن تعرُّف مفهوم النقاط الحرجة، والقيم الصغرى، والقيم العظمى، وكيفية إيجادها، وحل مسائل حياتية عنها.


الوحدةُ 6

المشتقاتُ

Derivatives

ما أهميةُ هذهِ الوحدةِ؟

يُستعمَلُ الاشتقاقُ لإيجادِ الميلِ عندَ أيِّ نقطةٍ على المنحنى؛ ما يُسهِّلُ الحساباتِ في كثيرٍ منَ التطبيقاتِ العلميةِ والحياتيةِ التي يُمكِنُ نمذجتُها باستعمالِ الاقتراناتِ. ومنْ ذلكَ، حسابُ سرعةِ سيّارةٍ عندَ لحظةٍ ما، وحسابُ أعلى ارتفاعٍ تبلغُهُ كرةٌ عندَ ركلِها إلى الأعلى.

تعلَّمْتُ سابقًا:

- ✓ تعريفَ المماسِّ، والقاطعِ، ونقطةِ التماسِّ.
- ✓ حسابَ ميلِ المستقيمِ.
- ✓ معادلةَ الخطِّ المستقيمِ.
- ✓ منحنى المسافةِ – الزمنِ، ومنحنى السرعةِ – الزمنِ.

سأتعلَّمُ في هذهِ الوحدةِ:

- ◄ تقديرَ ميلِ المنحنى عنْ طريقِ رسمِ المماسِّ.
- ◄ إيجادَ المشتقةِ الأولى لكثيراتِ الحدودِ.
- ◄ إيجادَ القيمِ العظمى والصغرى لكثيراتِ الحدودِ.
- ◄ حلَّ مسائلَ حياتيةٍ عنِ القيمِ العظمى والصغرى.

52

## الترابط الرأسي بين الصفوف

### سابقًا

#### الصف التاسع

- تمثيل بعض الاقترانات بيانيًّا.
- تفسير منحنى المسافة – الزمن.
- تفسير منحنى السرعة – الزمن.
- إيجاد ميل المستقيم ومعادلته.
- تعرُّف القاطع، والمماس، ونقطة التماس.

#### الصف العاشر

- إيجاد ميل منحنى مماسه مرسوم.
- تقدير ميل المنحنى عن طريق رسم المماس.
- اشتقاق كثيرات الحدود.
- إيجاد الميل باستعمال الاشتقاق.
- إيجاد السرعة والتسارع اللحظي.
- إيجاد النقاط الحرجة والقيم الصغرى والقيم العظمى.
- حل مسائل حياتية.

### لاحقًا

#### الصف الحادي عشر العلمي

- تعرُّف النهايات.
- إيجاد مشتقة $x^n$ (لأيِّ عدد نسبي $n$).
- إيجاد مشتقة عِدَّة أنواع من الاقترانات.
- استعمال قاعدة السلسلة لإيجاد مشتقة تركيب اقترانين.
- إيجاد النقاط الحرجة واستعمالها لرسم منحنى الاقتران.
- تعرُّف القيم القصوى المحلية والمطلقة.

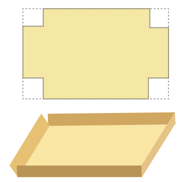
## مشروعُ الوحدةِ

# عملُ صندوقٍ حجمُهُ أكبرُ ما يُمكِنُ

**فكرةُ المشروعِ** حسابُ أكبرِ حجمٍ ممكنٍ لصندوقٍ باستعمالِ المشتقةِ.

**الموادُّ والأدواتُ** ورقتانِ منَ الكرتونِ المُقوّى مستطيلتا الشكلِ منَ المقاسِ نفسِهِ، مسطرةٌ، مقصٌّ، برمجيةُ جيوجبرا.

### خطواتُ تنفيذِ المشروعِ:



1. أقصُّ أربعةَ مُربَّعاتٍ متطابقةٍ.
2. أُطبِقُ الأطرافَ بعضَها على بعضٍ، فينتجُ صندوقٌ على شكلِ متوازي مستطيلاتٍ، مفتوحٌ منَ الأعلى.
3. أحسبُ حجمَ الصندوقِ، بقياسِ كلٍّ منَ الطولِ، والعرضِ، والارتفاعِ باستعمالِ المسطرةِ. هلْ يُمكِنُ عملُ صندوقٍ أكبرَ حجمًا باستعمالِ ورقةٍ منَ المقاسِ نفسِهِ؟
4. أُعيدُ الخطواتِ السابقةَ، ولكنْ بطريقةٍ جبريةٍ، وافتراضِ أنَّ طولَ ضلعِ المُربَّعِ المقصوصِ منْ كلِّ زاويةٍ يساوي $x$، وأكتبُ ثلاثةَ مقاديرَ جبريةٍ تُمثِّلُ الطولَ والعرضَ والارتفاعَ، ثمَّ أستعملُها لإيجادِ حجمِ الصندوقِ بدلالةِ $x$.
5. أكتبُ اقترانًا يمثلُ حجمَ الصندوقِ $V(x)$.
6. أستعملُ المشتقةَ لإيجادِ قيمةِ $x$ التي يكونُ عندَها الحجمُ أكبرَ ما يُمكِنُ.
7. أُمثِّلُ اقترانَ الحجمِ بيانيًّا باستعمالِ برمجيةِ جيوجبرا.
8. أتحقَّقُ منَ النقطةِ التي يكونُ عندَها الحجمُ أكبرَ ما يُمكِنُ باستعمالِ برمجيةِ جيوجبرا، وذلكَ بالضغطِ على أيقونةِ Extremum منْ شريطِ الأدواتِ، ثمَّ نقرِ المنحنى، فتظهرُ إحداثياتُ نقاطِ القيمِ القصوى على يسارِ الشاشةِ.

### عرضُ النتائجِ:

**أُعِدُّ معَ أفرادِ مجموعتي عرضًا تقديميًّا أُبيِّنُ فيهِ:**

1. النتائجَ التي توصَّلَ إليْها كلُّ فردٍ في المجموعةِ.
2. بعضَ الصعوباتِ التي واجهَتْها المجموعةُ في أثناءِ العملِ بالمشروعِ، وكيفَ تجاوزَتْها.
3. مقترحًا لتطبيقٍ حياتيٍّ أوْ علميٍّ تُستعمَلُ فيهِ فكرةُ المشروعِ.



## أداة تقييم المشروع

| الرقم | المعيار | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | توثيق أفراد المجموعة مصادر المعلومات التي تعرَّفوها. | | | |
| 2 | تعبير أفراد المجموعة عن حجم الصندوق جبريًّا. | | | |
| 3 | إيجاد أفراد المجموعة أكبر حجم للصندوق، وتحقُّقهم من صحة الحل. | | | |
| 4 | المشاركة الفاعلة لجميع أفراد المجموعة. | | | |
| 5 | مراعاة أنْ يكون التقرير المكتوب كاملًا، ومنظمًا، ويحوي رسومًا توضيحيةً. | | | |
| 6 | اتصاف العرض التقديمي بالوضوح والشمول. | | | |

1 إنجاز المهمة بوجود أكثر من خطأ.
2 إنجاز المهمة بوجود خطأ بسيط.
3 إنجاز المهمة بصورة صحيحة من دون خطأ.

## مشروع الوحدة: عمل صندوق حجمه أكبر ما يمكن.

**هدف المشروع:** يهدف مشروع الوحدة إلى ربط الرياضيات بالحياة، وتنمية مهارات التفكير والتجربة العلمية في أذهان الطلبة، بإيجاد أكبر حجم ممكن لصندوق مصنوع من قطعة ورقية مستطيلة الشكل.

### خطوات تنفيذ المشروع:

- أُعرِّف الطلبة بالمشروع وأهميته في تعلُّم موضوعات الوحدة.
- أُوزِّع الطلبة إلى مجموعات، يتكوَّن كلٌّ منها من (5–7) طلبة، ثم أطلب إلى أفراد كل مجموعة أنْ يُوزِّعوا الأدوار بينهم، ويختاروا مُقرِّرًا لهم.
- أذكر للطلبة المواد والأدوات اللازمة لتنفيذ المشروع، مثل: جهاز الحاسوب، وبرمجية جيوجبرا، والورق المقوى، والمقص، والمسطرة، فضلًا عن بيان عناصر المُنتَج النهائي المطلوب منهم، مُؤكِّدًا لهم أهمية توثيق خطوات تنفيذ المشروع باستمرار، وتعزيزه بالصور المناسبة. أُذكِّر الطلبة بإمكانية استعمال خاصية طباعة الشاشة (print screen) الموجودة على لوحة المفاتيح في جهاز الحاسوب؛ لتوثيق خطوات التنفيذ المُتعلِّقة بجهاز الحاسوب وبرمجية جيوجبرا.
- أُوضِّح للطلبة معايير تقييم أعمالهم، مستعينًا بسُلَّم التقدير.
- أُبيِّن للطلبة الأوقات التي يمكن فيها تنفيذ خطوات المشروع. فمثلًا، تُنفَّذ الخطوات (1-4) بعد الانتهاء من الدرس الأول، وتُنفَّذ الخطوة (5) بعد الدرس الثاني، وتُنفَّذ الخطوات (6-8) بعد الدرس الثالث.
- عند انتهاء الوحدة، أُحدِّد وقتًا مناسبًا لعرض النتائج التي توصَّل إليها الطلبة، وأُناقِشهم فيها.

### عرض النتائج:

- أطلب إلى أفراد كل مجموعة المشاركة في عرض جزء من نتائج المشروع (تكمن أهمية هذه الخطوة في تعزيز مهارات الطلبة التكنولوجية، ومهاراتهم الحياتية، مثل: التواصل، والتعاون).
- أَلفِت انتباه الطلبة إلى ضرورة استعمال التكنولوجيا في عرض نتائج المشروع، وإعداد عرض تقديمي يحوي صورًا لمراحل التنفيذ.
- أُوضِّح للطلبة أهمية اشتمال التقرير على الصعوبات التي واجهتهم، وكيفية التغلُّب عليها، والمعلومات الجديدة التي تعرَّفوها، ومقترحاتهم عن كيفية تطوير المشروع؛ تعزيزًا لمهارات حل المشكلات لديهم.
- أطلب إلى الطلبة تدوين تقييمهم الذاتي للمشروع، وأُنبِّههم إلى إمكانية الاستعانة بأداة التقييم المجاورة.
- أطلب إلى طلبة الصف التصويت على المشروع الأفضل.

## الوحدةُ 6: المشتقاتُ

### أستعدُّ لدراسةِ الوحدةِ

أختبرُ معلوماتي قبلَ البدءِ بدراسةِ الوحدةِ، وفي حالِ عدمِ تأكُّدي منَ الإجابةِ أستعينُ بالمراجعةِ.

**إيجادُ ميلِ المستقيمِ.**

أَجِدُ ميلَ المستقيمِ المارِّ بالنقطتيْنِ في كلٍّ ممّا يأتي:

1. $(4, 2), (5, 6)$ 4
2. $(3, 6), (-2, 6)$ 0

**مثالٌ: أَجِدُ ميلَ المستقيمِ المارِّ بالنقطتيْنِ: (1, 2)، وَ(3, 4).**

صيغةُ ميلِ المستقيمِ $m$: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$(x_1, y_1) = (1, 2), (x_2, y_2) = (3, 4)$: $m = \frac{4-2}{3-1} = 1$

**حَلُّ المعادلاتِ الخطِّيةِ.**

أَحُلُّ كلًّا منَ المعادلاتِ الخطِّيةِ الآتيةِ:

1. $5x + 5 = 4 - 7x$ $x = -\frac{1}{12}$
2. $2(1 - 2x) = 8x - 3$ $x = \frac{5}{12}$
3. $3(4x - 2) = 8(x + 6)$ $x = 13.5$

**مثالٌ: أَحُلُّ المعادلةَ الخطِّيةَ $3x + 5 = x - 3$**

| | |
|---|---|
| المعادلةُ الأصليةُ | $3x + 5 = x - 3$ |
| بطرحِ $x$ منَ الطرفيْنِ | $2x + 5 = -3$ |
| بطرحِ 5 منَ الطرفيْنِ | $2x = -8$ |
| بقسمةِ الطرفيْنِ على 2 | $x = -4$ |

**حَلُّ المعادلاتِ التربيعيةِ.**

أَحُلُّ كلًّا منَ المعادلاتِ التربيعيةِ الآتيةِ:

1. $x^2 - 3x + 2 = 0$ $x = 2, x = 1$
2. $x^2 + 6x + 9 = 0$ $x = -3$
3. $x^2 - 4x + 7 = 0$ لا توجد إجابات حقيقية.

**مثالٌ: أَحُلُّ المعادلةَ التربيعيةَ $x^2 + x - 6 = 0$**

أَحُلُّ هذهِ المعادلةَ باستعمالِ التحليلِ إلى العواملِ:

| | |
|---|---|
| | $x^2 + x - 6 = 0$ |
| بالتحليلِ إلى العواملِ | $(x + 3)(x - 2) = 0$ |
| خاصيةُ الضربِ الصفريِّ | $x + 3 = 0, x - 2 = 0$ |
| بحَلِّ المعادلتيْنِ الناتجتيْنِ | $x = -3, \quad x = 2$ |

13

## الوحدةُ 6: المشتقاتُ

### أستعدُّ لدراسةِ الوحدةِ

إذنْ، حَلُّ المعادلةِ هوَ: $x_1 = -3, x_2 = 2$

يُمكِنُ أيضًا حَلُّ المعادلةِ باستعمالِ القانونِ العامِّ.

**أَجِدُ قيمَ المعاملاتِ: $a = 1, b = 1, c = -6$**

| | |
|---|---|
| القانونُ العامُّ | $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ |
| بالتعويضِ، والتبسيطِ | $= \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2}$ |
| | $x_1 = \frac{-1-5}{2}, x_2 = \frac{-1+5}{2}$ |

إذنْ، حَلُّ المعادلةِ هوَ: $x_1 = -3, x_2 = 2$

**إيجادُ ناتجِ ضربِ المقاديرِ الجبريةِ.**

أكتبُ كلًّا ممّا يأتي في أبسطِ صورةٍ:

1. $8x(3x - 2)$ $24x^2 - 16x$
2. $(x - 6)(x + 4)$ $x^2 - 2x - 24$
3. $(x - 7)(x + 7)$ $x^2 - 49$

**مثالٌ: أكتبُ كلًّا ممّا يأتي في أبسطِ صورةٍ:**

**1) $(x - 3)(x + 4)$**

| | |
|---|---|
| بتوزيعِ الضربِ | $(x - 3)(x + 4) = x^2 - 3x + 4x - 12$ |
| بالتبسيطِ | $= x^2 + x - 12$ |

**2) $(x + 1)(x - 1)$**

| | |
|---|---|
| بتوزيعِ الضربِ على الجمعِ | $(x + 1)(x - 1) = x(x - 1) + 1 \times (x - 1)$ |
| بتوزيعِ الضربِ على الطرحِ | $= x^2 - x + x - 1$ |
| بجمعِ الحدودِ المتشابهةِ | $= x^2 - 1$ |

**حسابُ محيطِ الدائرةِ ومِساحتِها.**

أَجِدُ المحيطَ والمِساحةَ للدائرةِ المُعطى نصفُ قُطْرِها في كلٍّ ممّا يأتي:

1. $r = 5\,cm$ $C = 10\pi\ cm$, $A = 25\pi\ cm^2$
2. $r = 7\,cm$ $C = 14\pi\ cm$, $A = 49\pi\ cm^2$
3. $r = 8\,cm$ $C = 16\pi\ cm$, $A = 64\pi\ cm^2$

**مثالٌ: أَجِدُ المحيطَ والمِساحةَ للدائرةِ التي نصفُ قُطْرِها 3 cm:**

| | |
|---|---|
| صيغةُ محيطِ الدائرةِ | $C = 2\pi r$ |
| بتعويضِ طولِ نصفِ القُطْرِ، والتبسيطِ | $= 2\pi(3) = 6\pi\ cm$ |
| صيغةُ مِساحةِ الدائرةِ | $A = \pi r^2$ |
| بتعويضِ طولِ نصفِ القُطْرِ، والتبسيطِ | $= \pi(3)^2 = 9\pi\ cm^2$ |

14

## التقويم القبلي (التشخيصي):

- أستعمل صفحة (أستعد لدراسة الوحدة) في كتاب التمارين والأنشطة العملية؛ لمساعدة الطلبة على تذكُّر المعرفة السابقة اللازمة لدراسة هذه الوحدة، مثل: حل المعادلات الخطية والتربيعية، وإيجاد ميل مستقيم باستعمال نقطتين واقعتين عليه، وضرب المقادير الجبرية، وحساب محيط الدائرة ومساحتها التي عُلِم نصف قطرها.
- أُوجِّه الطلبة إلى حل الأسئلة، ثم أتجوَّل بينهم، وأحثُّ الطلبة الذين يواجهون صعوبة في حل أيِّ سؤال على قراءة المثال المقابل له.
- أختار سؤالًا واجه الطلبة صعوبة في حله، ثم أكتب على اللوح بعض الحلول المختلفة، ثم أسألهم: أيُّ الحلول صحيح؟ أيُّها غير صحيح؟ أُبرِّر إجابتي.

## إرشادات للمُعلِّم / للمُعلِّمة

لتحديد عدد حلول المعادلة التربيعية، أُذكِّر الطلبة بمُميِّز المعادلة وحالاته الثلاث:

- المُميِّز > 0، إذن، يوجد حلان حقيقيان.
- المُميِّز = 0، إذن، يوجد حلان متماثلان (حل واحد حقيقي).
- المُميِّز < 0، إذن، لا توجد حلول حقيقية.

# معمل برمجية جيوجبرا

## التعلُّم القبلي:

- تمثيـل كثيرات الحـدود بيانيًّـا باسـتعمال برمجية جيوجبرا.
- تعيين نقطة متحركة على التمثيل البياني لكثير الحدود.

### إرشادات للمُعلِّم/ للمُعلِّمة

يمكن تحميل برمجية جيوجبرا المجانية وتثبيتها على أجهزة الحاسـوب في مختبر المدرسـة، وتحديثها باستمرار عن طريق الرابط الإلكتروني:
**https://www.geogebra.org/download**

## 1 التهيئة

- أتوجَّه مع الطلبة إلى مختبر الحاسوب في المدرسة.
- أُوزِّع الطلبة إلى مجموعات ثنائية، بحيث يكون أحد الطالبين في كل مجموعة محيطًا بمهارات الحاسوب.
- أطلب إلى الطلبة تشـغيل أجهزة الحاسـوب، وفتح برمجية جيوجبرا.
- أُعـرِّف الطلبـة بمزايا برمجيـة جيوجبـرا الجبرية والهندسـية. فمثلًا، يمكن استعمال هذه البرمجية في حل المعادلات، ورسـم التمثيل البياني للاقترانات، ورسم المماس عند نقطة على اقتران، وقياس الزوايا.

## 2 التدريس

- أُوضِّح للطلبـة كيفية تنفيذ النشـاط، ثم أطلب إليهم تنفيذه بأنفسهم.
- أطلب إلى أفـراد المجموعات تطبيـق الخطوات على التوالي، وأتجوَّل بينهم مُرشِدًا ومُساعِدًا ومُوجِّهًا، وأتأكَّد أنَّ كل فرد في المجموعة قد تمكَّن من تنفيذ النشاط.
- أُناقِش الطلبة في النقاط التي يكون عندها ميل الاقتران موجبًا، أو سـالبًا، أو صفرًا، ثم أطرح عليهم السؤالين الآتيين:
  » هل يُؤثِّر اتجاه المماس في إشارة الميل؟
  » هل يمكن إيجاد علاقة بيـن المماس والمحور $x$ الموجب؟

---

معملُ برمجيةِ جيوجبرا

## استكشافُ ميلِ مماسِّ المنحنى
## Exploring the Slope of The Tangent

يُمكِنُني استعمالُ برمجيةِ جيوجبرا لوصفِ التغيُّرِ في قيمةِ ميلِ المماسِّ منْ نقطةٍ إلى أُخرى على منحنى كثيرِ حدودٍ.

نشاطٌ

**أُمثِّلُ الاقترانَ $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$ بيانيًّا باستعمالِ برمجيةِ جيوجبرا، ثمَّ أرسمُ مماسًّا عندَ نقطةٍ مُتحرِّكةٍ على منحناهُ، واصفًا التغيُّرَ في قيمةِ ميلِ المماسِّ.**

الخطوةُ 1: أُمثِّلُ منحنى الاقترانِ بيانيًّا باتباعِ الآتي:

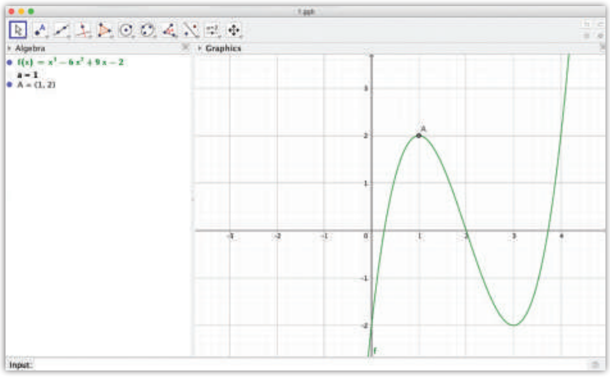
- أكتبُ $f(x)=$ في شريطِ الإدخالِ، ثمَّ أكتبُ قاعدةَ الاقترانِ بنقرِ المفاتيحِ الآتيةِ:

| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| x | $\square^{\blacksquare}$ | 3 | − | 6 | x | $\square^2$ | + | 9 | x | − | 2 | ↵ |

الخطوةُ 2: أُحدِّدُ نقطةً مُتحرِّكةً $A$ على منحنى الاقترانِ باتباعِ الآتي:

- أكتبُ $a = 1$ في شريطِ الإدخالِ، ثمَّ أنقرُ زرَّ ↵ .
- أكتبُ $A = (a, f(a))$ في شريطِ الإدخالِ، ثمَّ أنقرُ زرَّ ↵ .

يُمكِنُني تغييرُ موقعِ النقطةِ $A$ على منحنى الاقترانِ بنقرِها باستمرارٍ، ثمَّ تحريكِها.






### إرشادات للمُعلِّم/ للمُعلِّمة

- توفيـرًا للوقت، ولكيلا يضطر الطلبة إلى اسـتعمال كتبهم في أثناء تنفيذ النشاط؛ أسـتعمل جهاز العرض (إنْ توافر) فـي المختبر لعرض صـور من كتاب الطالـب عن معمل برمجية جيوجبرا، ويمكنني وضع الصور في ملف العرض التقديمي (powerpoint).
- أُذكِّـر الطلبة أنَّـه يمكنهم تنزيـل برمجيـة جيوجبرا على هواتفهـم الذكية من متجر الهاتف، فضلًا عن وجود العديد مـن البرمجيات والآلات الحاسـبة البيانيـة التي يمكنهم استعمالها.

## تنويع التعليم:

- أطلب إلى الطلبة من ذوي المستوى دون المتوسط تمثيل معادلة خطية أو تربيعية بيانيًّا باستعمال برمجية جيوجبرا، ثم أتدرَّج معهم في الخطوات حتى يتمكّنوا من تنفيذ النشاط.
- أُوجِّه الطلبة إلى البحث في شبكة الإنترنت عن الاستعمالات الممكنة لبرمجية جيوجبرا، وأُحفِّزهم على تبادل الخبرات المُتعلِّقة بالمهارات التي تعلَّموها؛ تعزيزًا لمهارتي البحث والتواصل لديهم.

## 3 التدريب

- أُوجِّه الطلبة إلى حل أسئلة بند (أتدرب) الوارد ذكرها في معمل برمجية جيوجبرا، بعد الانتهاء من تنفيذ النشاط مباشرةً؛ بتطبيق ما تعلّموه من مهارات باستعمال البرمجية.
- أختار بعض الأخطاء التي وقع فيها الطلبة – من دون ذكر أسمائهم؛ تجنبًا لإحراجهم–، ثم أُناقِش طلبة الصف فيها.

## الواجب المنزلي:

- أطلب إلى الطلبة أنْ يحلوا في البيت الأسئلة التي لم يتمكّنوا من حلها في غرفة الصف.
- في اليوم التالي، أَطّلِع على حلول الطلبة، وأُناقِشهم في أيِّ صعوبات واجهوها في أثناء الحل.

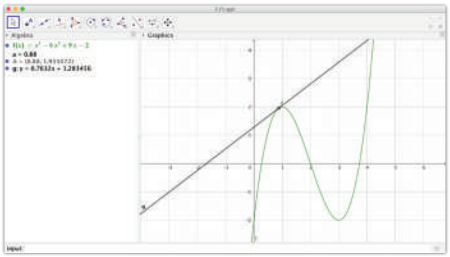
## 4 الإثراء

- أطلب إلى الطلبة تمثيل عِدَّة اقترانات بيانيًّا، وإيجاد النقاط التي يكون عندها الميل صفرًا، ومحاولة تفسير ذلك.
- أطلب إلى الطلبة مقارنة إجاباتهم بعضها ببعض، وأُحفِّز الطلبة من ذوي المستوى فوق المتوسط على مساعدة بقية زملائهم.
- أُوضِّح للطلبة أنَّه يمكنهم توثيق المهام المنوطة بهم باستعمال برمجية جيوجبرا عن طريق التقاط صور لشاشة الحاسوب باستعمال مفتاح (PrtScr)، أو من تبويب (Edit) في برمجية جيوجبرا باختيار (Graphics view to clipboard)، أو من لوحة المفاتيح بالضغط على أزرار (Ctrl+shift+C) معًا، ثم عمل لصق (paste) بالضغط على أزرار (Ctrl+shift+V) في الموضع المطلوب من الملف المراد توثيق المهمة فيه.



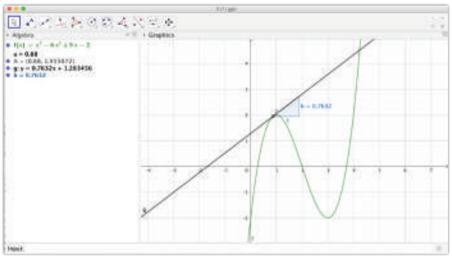
**الخطوةُ 3:** أرسمُ مماسًّا للمنحنى عندَ النقطةِ $A$.

- أكتبُ Tangent $(A, f)$ في شريطِ الإدخالِ، ثمَّ أنقرُ زرَّ ↵ .
- ألاحِظُ أنَّ برمجيةَ جيوجبرا تُسمّي المماسَّ $g$ بصورةٍ تلقائيةٍ.



**الخطوةُ 4:** أجِدُ ميلَ المماسِّ عندَ النقطةِ $A$.

- أكتبُ Slope(g) في شريطِ الإدخالِ، ثمَّ أنقرُ زرَّ ↵ .



**الخطوةُ 5:** أُحرِّكُ النقطةَ $A$، مُلاحِظًا التغيُّرَ في قيمةِ الميلِ، ثمَّ أُجيبُ عنِ الأسئلةِ الآتيةِ:

- متى يكونُ ميلُ المماسِّ موجبًا؟
- متى يكونُ ميلُ المماسِّ سالبًا؟
- متى يكونُ ميلُ المماسِّ صفرًا؟

**أتدرب**

أُمثِّلُ كلًّا منَ الاقتراناتِ الآتيةِ بيانيًّا باستعمالِ برمجيةِ جيوجبرا، ثمَّ أرسمُ مماسًّا لكلٍّ منها عندَ نقطةٍ مُتحرِّكةٍ، واصفًا التغيُّرَ في قيمةِ ميلِ المماسِّ: (1–4) أنظر ملحق الإجابات.

1) $f(x) = (x-1)^2 + 3$

2) $h(x) = 3 - 2x - x^2$

3) $f(x) = x^4 - 2x^3 - 4x + 3$

4) $h(x) = \frac{2}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 - 3x + 2$



## إرشادات للمُعلِّم/ للمُعلِّمة

يمكن إعادة توزيع الطلبة في المجموعات قبل البدء بحل أسئلة بند (أتدرب)؛ لكي يتبادلوا الخبرات فيما بينهم.

## تعليمات المشروع:

- أُخبِر الطلبة أنَّه يمكنهم الاستفادة من برمجية جيوجبرا لتنفيذ الخطوتين 7 و8 في المشروع.

## 5 الختام

- أُوجِّه الطلبة إلى كتابة كثير حدود من الدرجة الثانية أو أكثر، ثم إمراره إلى زميله في المجموعة؛ لتمثيله بيانيًّا باستعمال برمجية جيوجبرا، وإيجاد ثلاث نقاط يكون عندها الميل موجبًا، وسالبًا، وصفرًا.
- أطلب إلى كل طالب أنْ يتحقَّق من حل زميله.

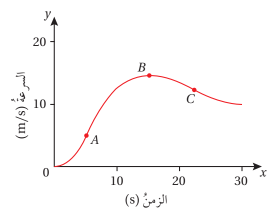
# الدرسُ 1

# تقديرُ ميلِ المنحنى
## Estimating Slope

**فكرةُ الدرسِ** تقديرُ ميلِ المنحنى.

**المصطلحاتُ** السرعةُ اللحظيةُ، التسارعُ اللحظيُّ.

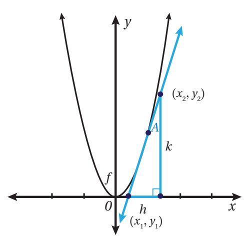
**مسألةُ اليومِ** يُمثِّلُ الشكلُ المجاورُ سرعةَ سيّارةٍ في 30 ثانيةً.




- هلْ يُمكِنُ إيجادُ تسارعِ السيّارةِ عندَ النقاطِ $A, B, C$؟
- عندَ أيِّ النقاطِ يكونُ التسارعُ موجبًا؟
- عندَ أيِّ النقاطِ يكونُ التسارعُ سالبًا؟
- عندَ أيِّ النقاطِ يكونُ التسارعُ صفرًا؟

تعلَّمْتُ سابقًا كيفيةَ حسابِ ميلِ المستقيمِ، فهلْ يُمكِنُ إيجادُ ميلِ منحنى ليسَ مستقيمًا؟

إنَّ ميلَ المنحنى عندَ نقطةٍ واقعةٍ عليْهِ يساوي ميلَ المماسِّ عندَ تلكَ النقطةِ؛ لذا، فإنَّ ميلَ المنحنى يختلفُ منْ نقطةٍ إلى أُخرى عليْهِ كما في النشاطِ المذكورِ آنفًا قبلَ الدرسِ.



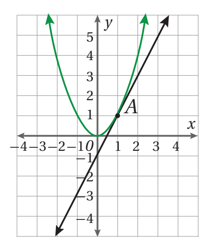

**أفكِّرُ**
لماذا يكونُ ميلُ المستقيمِ ثابتًا عندَ أيِّ نقطةٍ عليْهِ؟

لإيجادِ ميلِ منحنى عندَ نقطةٍ ما، أرسمُ مماسًّا عندَ تلكَ النقطةِ، ثمَّ أجدُ ميلَ المماسِّ باستعمالِ إحداثياتِ نقطتيْنِ تقعانِ عليْهِ: $(x_1, y_1)$ , $(x_2, y_2)$، وذلكَ بالتعويضِ في صيغةِ ميلِ المستقيمِ.

$$m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{k}{h} \text{، حيثُ: } x_2-x_1 \neq 0$$

**مثال 1**

يُمثِّلُ المستقيمُ في الشكلِ المجاورِ مماسًّا لمنحنى الاقترانِ $y = x^2$ عندَ النقطةِ $A(1, 1)$.
أَجِدُ ميلَ منحنى الاقترانِ عندَ النقطةِ $A$.






# الدرس 1

## نتاجات الدرس

- إيجاد ميل مماس مرسوم عند نقطة على منحنى الاقتران.
- رسم مماسّ، وتقدير ميله عند نقطة على منحنى الاقتران.
- كتابة معادلة المماس.
- تقدير السرعة اللحظية عند نقطة على منحنى المسافة–الزمن.

## التعلُّم القبلي:

- تعرُّف القاطع، والمماس، ونقطة التماس.
- إيجاد ميل مستقيم.
- كتابة معادلة الخط المستقيم.
- تفسير منحنى المسافة – الزمن، ومنحنى السرعة – الزمن.

## 1 التهيئة

- أُمهِّد للموضوع بسؤال الطلبة عن تعريف القاطع والمماس ونقطة التماس، ثم أطلب إليهم رسم أمثلة توضيحية لكلٍّ منها على اللوح. أسألهم أيضًا عن قانون ميل المستقيم الذي درسوه سابقا، ثم أكتبه على اللوح.
- أكتب على اللوح المثالين الآتيين، ثم أطلب إلى الطلبة إيجاد الميل بين النقطتين في كلٍّ منهما:

**a)** $A(6, 2), B(8, 10)$

**b)** $C(5, 4), D(9, -10)$

- أطرح على الطلبة السؤال الآتي:

» لماذا ظهرت إشارة الميل موجبة في الفرع $a$، وسالبة في الفرع $b$؟

- أطلب إلى الطلبة إيجاد معادلة المستقيم في المثال السابق، مُذكِّرًا إيّاهم بصيغ معادلة الخط المستقيم.

## 2 الاستكشاف

- أُوجِّه الطلبة إلى قراءة المسألة في بند (**مسألة اليوم**)، ثم أسألهم:
  » ماذا يسمى هذا المنحنى؟ منحنى السرعة – الزمن.
  » ما التسارع؟ التغير في السرعة.
  » هل يمكن حساب التسارع المتوسط بين نقطتين على المنحنى؟ نعم.
  » كيف يمكن حساب ذلك؟ بقسمة فرق السرعة على فرق الزمن بين النقطتين.
  » هل يختلف التسارع من نقطة إلى أُخرى على هذا المنحنى؟ نعم.
- أستمع لإجابات الطلبة من دون تقديم تغذية راجعة لهم، ثم أسألهم:
  » مَنْ يُؤيِّد الإجابة؟
  » مَنْ لديه إجابة أُخرى؟
  » أذكرها.

وذلك لتعزيز مهارات التواصل واحترام الـرأي والرأي الآخر لديهم. بعد ذلك أُوضِّح لهم أنَّهم سـيتعرَّفون في هذا الدرس ما يُمكِّنهم من الإجابة عن هذه المسـألة ومسائل مشابهة، ثم أكتب العنوان على اللوح.

### تعزيز اللغة ودعمها:

أُكرِّر المصطلحات الرياضية المسـتخدمة في الـدرس باللغتين العربية والإنجليزيـة، وأُحفِّز الطلبة على اسـتعمالها، مثل: الميل (Slope)، والمماس (Tangent)، والسـرعة (velocity)، والتسارع (acceleration).

## 3 التدريس

أشـرح على اللوح كيفية إيجاد الميل لمماس مرسوم عند نقطة على منحنى الاقتران، مستعينًا بالتمثيل البياني الوارد في كتاب الطالب بداية الدرس.

### مثال 1

- أرسم التمثيل البياني الوارد في هذا المثال على اللوح، مُحدِّدًا عليه المماس بصورة دقيقة.
- أُخبِر الطلبة أنَّه يمكن إيجاد ميل المماس بتطبيق قانون ميل المسـتقيم لأيِّ نقطتين واقعتين على المماس.
- أُعيد حساب ميل المماس، ولكن باستعمال نقطتين أُخريين لإثبات أنَّ قيمة الميل لا تتغيَّر بغض النظر عن النقطتين المُحدَّدتين على المماس.
- أسأل الطلبة عن سبب ظهور إشارة الميل موجبة، وأُرشِدهم إلى أنَّ الزاوية التي يصنعها المماس مع المحور $x$ الموجب حادة.

### أخطاء مفاهيمية:

- في أثناء شـرح المثال الأول، قد لا يُميِّز بعض الطلبة من ذوي المستوى دون المتوسط بين الزاوية الحادة والزاوية المنفرجة؛ لذا أُوضِّح لهم مفهوم كلٍّ منهما.

### ملاحظات المُعلِّم/ المُعلِّمة

.........................................

.........................................

.........................................

.........................................

.........................................

.........................................

.........................................

.........................................

.........................................

.........................................

### المفاهيم العابرة:

أُعزِّز وعي الطلبة بالقضايا الإنسانية (تقدير العلم والعلمـاء) عن طريـق حوار أُديره مـع الطلبة، وأُخبِرهم فيه أنَّهم يدرسـون الآن فرعًا من فروع الرياضيات يسـمى التفاضل، وأنَّ هذا الفرع قد طُوِّر في القرن السـابع عشـر الميلادي على يد نيوتن في إنجلترا، ثم ليبنز في ألمانيا؛ للمساعدة على وصف حركة الكواكب للأغراض الفلكية.

أُوجِّه الطلبة إلـى البحث في مصـادر المعرفة المناسبة عن ثلاثة علماء مشهورين بإسهاماتهم فـي علم التفاضـل، ثم كتابة مقـال من صفحة واحدة عنهم. بعد ذلك أختار أفضل 3 مقالات، ثم أعرضها على لوحة فـي الصف، أو ممرات المدرسة.

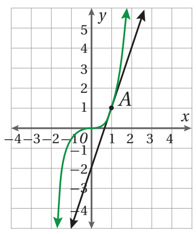
أُحدِّدُ نقطتيْنِ على المماسِّ منَ الرسمِ: $B(0, -1)$ وَ $C(2, 3)$، ثمَّ أحسبُ الميلَ:

$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ صيغةُ الميلِ

$= \frac{3-(-1)}{2-0}$ بالتعويضِ

$= 2$ بالتبسيطِ

إذنْ، ميلُ منحنى الاقترانِ عندَ النقطةِ $A$ هوَ 2



**أتحقق من فهمي**

**يُمثِّلُ المستقيمُ في الشكلِ المجاورِ مماسًّا لمنحنى الاقترانِ $y = x^3$ عندَ النقطةِ $A(1, 1)$.**

**أجِدُ ميلَ منحنى الاقترانِ عندَ النقطةِ $A$.**

أنظر الهامش.

إذا لمْ يكنِ المماسُّ مرسومًا عندَ النقطةِ التي يُرادُ إيجادُ ميلِ المنحنى عندَها، فإنَّهُ يُرسَمُ باستعمالِ المسطرةِ. وبما أنَّ الرسمَ اليدويَّ ليسَ دقيقًا، فإنَّ ميلَ المماسِّ المرسومِ قدْ يختلفُ قليلًا عنِ القيمةِ الدقيقةِ لميلِ المنحنى، عندئذٍ يكونُ الناتجُ قيمةً تقريبيةً لميلِ المنحنى.

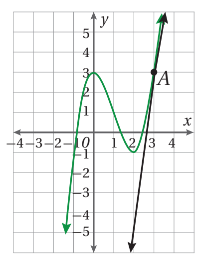
**إرشادٌ**

أستعملُ شبكةَ المُربَّعاتِ لتمثيلِ المنحنياتِ بيانيًّا بدقةٍ.

**مثال 2**

**أُقدِّرُ ميلَ منحنى الاقترانِ $y = x^3 - 3x^2 + 3$ عندَ كلِّ نقطةٍ ممّا يأتي:**

**1** **النقطةُ $A(3, 3)$.**



**الخطوةُ 1:** أرسمُ مماسًّا للمنحنى عندَ النقطةِ $A(3, 3)$ باستعمالِ المسطرةِ.

**الخطوةُ 2:** أُحدِّدُ نقطتيْنِ على المماسِّ $A(3, 3)$, $C(2, -5)$، ثمَّ أجِدُ الميلَ.

$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ صيغةُ الميلِ

$= \frac{-5-3}{2-3}$ بالتعويضِ

$= 8$ بالتبسيطِ

إذنْ، ميلُ منحنى الاقترانِ عندَ النقطةِ $A$ هوَ 8 تقريبًا.

**أتعلَّمُ**

يكونُ ميلُ المنحنى عندَ نقطةٍ عليهِ موجبًا إذا صنعَ مماسُّ المنحنى عندَ تلكَ النقطةِ زاويةً حادةً معَ اتجاهِ محورِ $x$ الموجبِ.



## إجابة سؤال بند (أتحقق من فهمي 1):

$m = 3$

## إرشادات للمُعلِّم/ للمُعلِّمة

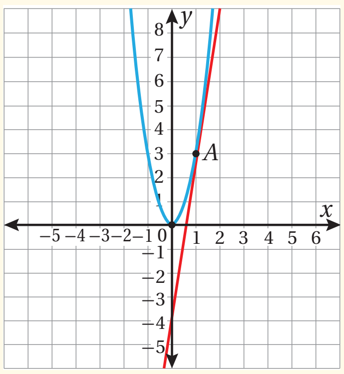
- أُوجِّه الطلبة إلى استعمال الورق البياني لرسم التمثيل البياني للاقتران.
- أُخبِر الطلبة أنَّه يمكن استعمال برمجية جيوجبرا في المثال الثاني لعمل تمثيل بياني ومماس دقيق.

**تنبيه:** رُسِم المماس بصورة تقريبية في المثال الثاني؛ لذا أقبل من الطلبة الإجابات التقريبية للميل.

**تنبيه:** في أثناء شرح المثال الأول، لا أقبل من الطلبة إجابات تقريبية للميل؛ لأنَّ المماس مرسوم بصورة دقيقة.

## مثال إضافي

- يُمثِّل المستقيم في الشكل التالي مماسًّا لمنحنى الاقتران $y = 3x^2$ عند النقطة $A(1, 3)$. أجد ميل منحنى الاقتران عند النقطة $A$.



ميل منحنى الاقتران عند النقطة $A$ هو: 6

## التقويم التكويني:

- أُوجِّه الطلبة إلى حل التدريب في بند (**أتحقق من فهمي**) بعد كل مثال (فرديًّا، أو ضمن مجموعات).
- أتجوَّل بين الطلبة مُرشِدًا، ومُساعِدًا، ومُوجِّهًا، وأُقدِّم لهم التغذية الراجعة.
- أختار بعض الإجابات التي تحوي أخطاء مفاهيمية، ثم أُناقِشها على اللوح، ولا أذكر اسم الطالب الذي أخطأ في الإجابة؛ تجنبًا لإحراجه.

## مثال 2

- أرسم على اللوح التمثيل البياني للاقتران، ثم أرسم مماسًّا تقريبيًّا عند النقطة $A(3, 3)$.
- أُحدِّد أيَّ نقطتين على المماس، ثم أجد الميل.
- أُخبِر الطلبة أنَّ المماس غير مرسوم بدقة؛ ما يعني أنَّ قيمة الميل غير دقيقة.

## مثال 2

- في الفرع الثاني من المثال الثاني، أسأل الطلبة:
  » ما سبب ظهور إشارة الميل سالبة؟
- أستمع لإجابات الطلبة، ثم أُناقِشهم فيها، مُبيِّنًا أنَّ المماس كوَّن زاوية منفرجة مع المحور $x$ الموجب.
- أُخبِر الطلبة أنَّه يمكن استعمال قيمة الميل للنقطة $B(1, 1)$ وأيِّ نقطة واقعة على المماس لكتابة معادلة المماس.
- أُذكِّر الطلبة أنَّ الصيغة العامة لمعادلة الخط المستقيم هي: $y = ax + b$، حيث تُمثِّل $a$ الميل، و $b$ المقطع $y$ للخط المستقيم.

### إرشادات للمُعلِّم/ للمُعلِّمة

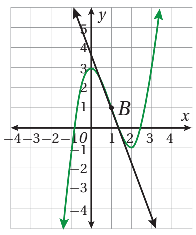
قيمة الميل في الفرع الأول من المثال الثاني هي 9، وقيمة الميل في الفرع الثاني هي $-3$، ولكن أقبل إجابات الطلبة القريبة من ذلك.

**تنبيه:** أُوضِّح للطلبة أنَّ الميل لا يكون معروفًا إذا كان المماس موازيًا لمحور الصادات؛ لأنَّ فرق الصادات بين أيِّ نقطتين واقعتين على المماس يساوي صفرًا.

---

**2** النقطةُ $B(1, 1)$.

أرسمُ مماسًّا للمنحنى عندَ النقطةِ $B$، ثمَّ أُحدِّدُ نقطتيْنِ عليْهِ $B(1, 1), E(0, 3.8)$، ثمَّ أجِدُ الميلَ:



$m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ صيغةُ الميلِ

$= \frac{1-3.8}{1-0}$ بالتعويضِ

$= -2.8$ بالتبسيطِ

إذنْ، ميلُ منحنى الاقترانِ عندَ النقطةِ $B$ هوَ $-2.8$

**3** أكتبُ معادلةَ المماسِّ المارِّ بالنقطةِ $B(1, 1)$

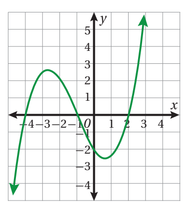
$y - b = m(x-a)$ معادلةُ المماسِّ

$y - 1 = -2.8(x-1)$ بتعويضِ النقطةِ $B(1, 1)$ وَ $m = -2.8$

$y = 3.8 - 2.8x$ بالتبسيطِ

**أتحقق من فهمي**

أُقدِّرُ ميلَ منحنى الاقترانِ المُمثَّلِ بيانيًّا في الشكلِ المجاورِ عندَ كلٍّ منَ النقطتيْنِ: $A(-4, 0), B(0,-2)$.



أنظر الهامش.

**أتعلَّم**
يكونُ ميلُ المنحنى عندَ نقطةٍ عليْهِ سالبًا إذا صنعَ مماسُّ المنحنى عندَ تلكَ النقطةِ زاويةً منفرجةً معَ اتجاهِ محورِ $x$ الموجبِ.

**أفكِّر**
متى يكونُ ميلُ المنحنى صفرًا؟

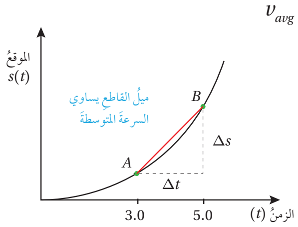
**أتذكَّر**
معادلةُ المماسِّ المارِّ بالنقطةِ $(a, b)$ هيَ: $y - b = m(x-a)$

تعرَّفْتُ سابقًا أنَّ منحنى الموقعِ – الزمنِ يكونُ مستقيمًا عندَ الحركةِ بسرعةٍ ثابتةٍ، وأنَّهُ لا يكونُ مستقيمًا عندَ الحركةِ بسرعةٍ مُتغيِّرةٍ. ويمكنُ حسابُ السرعةِ المتوسطةِ $\bar{v}$ لجسمٍ مُتحرِّكٍ في فترةٍ زمنيةٍ، وذلكَ بقسمةِ التغيُّرِ في الموقعِ $\Delta s$ على التغيُّرِ في الزمنِ $\Delta t$:

$$v_{avg} = \bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

**رموز رياضية**
يُرمَزُ إلى التغيُّرِ في قيمةِ $s$ بالرمزِ $\Delta s$

بالنظرِ إلى منحنى الموقعِ – الزمنِ المجاورِ لجسمٍ يتحرك في مسار مستقيم يتبيَّنُ أنَّ السرعةَ المتوسطةَ منَ اللحظةِ $t = 3$ إلى اللحظةِ $t = 5$ تساوي ميلَ القاطعِ الذي يمرُّ بالنقطتيْنِ $A$ وَ $B$ على المنحنى.






---

**أخطاء مفاهيمية:** في المثال الثاني، قد يعتقد بعض الطلبة من ذوي المستوى دون المتوسط أنَّ الميل هو الفرق بين قيمتي $y$؛ لذا أُرشِدهم إلى أنَّ الميل هو ظل الزاوية التي يُكوِّنها المستقيم مع محور $x$ الموجب، وأنَّه يساوي الفرق بين قيمتي $y$ مقسومًا على الفرق بين قيمتي $x$، مُوضِّحًا ذلك بالرسم.

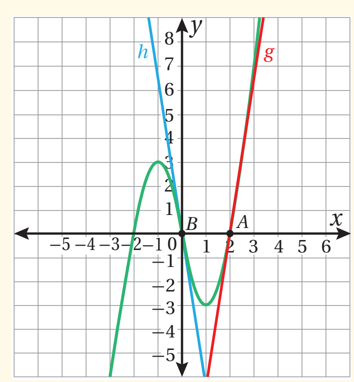
**إجابة سؤال بند (أتحقق من فهمي 2):**

الميل عند النقطة $A(-4, 0)$ هو 4.5 (أقبل من الطلبة الإجابات القريبة من ذلك).

الميل عند النقطة $B(0, -2)$ هو $-1.5$ (أقبل من الطلبة الإجابات القريبة من ذلك).

## مثال إضافي

- أُقدِّر ميل منحنى الاقتران: $y = x^3-4x$ عند كلٍّ من النقطتين: $A(2, 0), B(0, 0)$.



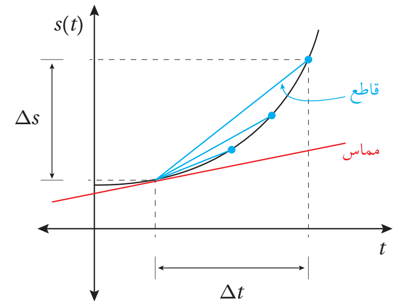
الميل عند النقطة $A$ هو 8 (أقبل من الطلبة الإجابات القريبة من ذلك).

الميل عند النقطة $B$ هو $-4$ (أقبل من الطلبة الإجابات القريبة من ذلك).

لكنَّ السـرعةَ المتوسـطةَ لا تُقـدِّمُ معلوماتٍ كافيـةً في كثيرٍ مـنَ المواقفِ، مثـلِ تحديدِ سـرعةِ سـيّارةٍ لحظةَ مرورِها أمامَ الـرادارِ واتجاهِ حركتِهـا؛ فتَلزَمُ عندئذٍ **السـرعةُ اللحظيةُ** (instantaneous velocity) التي يُمكِنُ إيجادُها بتقليصِ الفترةِ الزمنيةِ للسرعةِ المتوسطةِ حتـى تصبحَ نقطةً (لحظةً) كما في الشـكلِ الآتـي، فيصبحُ القاطعُ الذي يمـرُّ بنقطتيْنِ على المنحنى مماسًا لهُ عندَ نقطةٍ واحدةٍ.

**رموزٌ رياضيّةٌ**

يشيرُ الرمزُ $v$ إلى السرعةِ المتجهةِ، التي تسـمى اختصارًا في هذا الكتابِ (السـرعةَ)، بينَما يشيرُ الرمـزُ $v_s$ إلى السـرعةِ القياسيةِ.




بما أنَّ ميلَ المماسِّ يساوي ميلَ المنحنى عندَ نقطةِ التماسِّ، فإنَّ السرعةَ اللحظيةَ عندَ لحظةٍ ما تساوي ميلَ منحنى اقترانِ الموقعِ – الزمنِ عندَ تلكَ اللحظةِ.

**مثال 3**

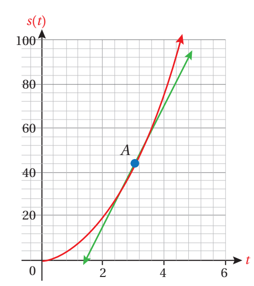
**يُمثِّلُ الاقترانُ $s(t) = 4.9t^2$ موقعَ جسمٍ يتحركُ في مسارٍ مستقيمٍ، حيثُ $s$ موقعُ الجسمِ بالأمتـارِ بعـدَ $t$ ثانيةً. أقدرُ سـرعةَ الجسـمِ بعدَ 3 ثـوانٍ من بـدءِ الحركةِ.**

**رموزٌ رياضيّةٌ**

يشيرُ الرمزُ $\bar{v}$ إلى سرعةِ الجسـمِ المتوسطةِ في فتـرةٍ زمنيّـةٍ مـا، مثل $[t_1, t_2]$.

**الخطوةُ 1:** أُعـوِّضُ $t = 3$ بالاقتـرانِ لتحديدِ موقعِ الجسـمِ بعـدَ 3 ثـوانٍ، فتنتـجُ النقطـةُ $A(3, 44.1)$ التي تُمثِّلُ نقطةَ التماسِّ.

**الخطوةُ 2:** أُمثِّـلُ منحنـى الاقتـرانِ $s(t) = 4.9t^2$ بيانيًّا، ثـمَّ أرسـمُ المماسَّ عنـدَ النقطةِ $A(3, 44.1)$.






**أخطاء مفاهيمية:**

قد يخلط بعض الطلبة ذوو المستوى دون المتوسط بين السرعة المتوسطة والسرعة اللحظية؛ لذا أُوضِّح لهم الفرق بينهما.

## مثال 3

- أُوضِّح للطلبة الفرق بين منحنى الموقع– الزمن الذي يستعمل لحساب السرعة المتوسطة (ميل القاطع) والسرعة اللحظية (الميل عند نقطة واقعة على المنحنى)، ومنحنى السرعة– الزمن الذي يستعمل لحساب التسارع المتوسط (ميل القاطع) والتسارع اللحظي (الميل عند نقطة واقعة على المنحنى).
- أُمثِّل بيانيًّا الاقتران المعطى في المثال 3، ثم أرسم مماسًّا تقريبيًّا عند النقطة $A(3, 44.1)$، مُوضِّحًا للطلبة أنَّ السرعة اللحظية عند نقطة هي ميل المماس لمنحنى الموقع– الزمن عند تلك النقطة.
- أُخبِر الطلبة أنَّه ليس سهلًا رسم المماس في المثال 3.
- أُثير فضول الطلبة للبحث عن طريقة أُخرى لإيجاد الميل على نحوٍ أسهل وأدق.

**تنبيه:** أَلفِت انتباه الطلبة إلى أنَّ منحنى الموقع – الزمن الوارد في المثال الثالث قد درسوه في مبحث الفيزياء.

## مثال إضافي

- يُمثِّل الاقتران: $s(t) = 2t^2 - 1$ موقع جسم يتحرك في مسار مستقيم، حيث $s$ موقع الجسم بالمتر بعد $t$ ثانية من بدء حركته. أُقدِّر السرعة اللحظية بعد ثانيتين.

أقبل من الطلبة الإجابات القريبة من الإجابة الصحيحة: 8 m/s

## 4 التدريب

- أُوجِّه الطلبة إلى قراءة الأسـئلة في بند (**أتدرب وأحل المسائل**)، ثم أطلب إليهم حلها.
- أتجوَّل بين الطلبة مُرشِدًا، ومُساعِدًا، ومُوجِّهًا، وأُقدِّم لهم التغذية الراجعة.
- إذا واجـه بعض الطلبـة صعوبة في حل أيِّ مسـألة، فأختار طالبًا تمكَّن من حل المسألة، وأطلب إليه كتابة حله على اللوح.

**الخطوةُ 3:** أُحدِّدُ النقطتينِ $A(3, 44.1)$ وَ $B(2, 16)$ على المماسِّ، ثمَّ أسـتعملُهُما لحسابِ الميلِ.

صيغةُ الميلِ $m = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1}$

بالتعويضِ $= \frac{44.1 - 16}{3 - 2}$

بالتبسيطِ $= 28.1$

إذنْ، ميلُ منحنى الاقترانِ عندَ النقطةِ $A(3, 44.1)$ هوَ 28.1 تقريبًا. ومنْهُ، فإنَّ سـرعةَ الجسمِ اللحظيةِ بعدَ 3 ثوانٍ هيَ 28.1 m/s

**أفكِّرُ**

إنَّ حسابَ السرعةِ اللحظيةِ برسمِ المماسِّ وتحديدِ نقطتَيْنِ عليْهِ أمرٌ صعبٌ، فهلْ توجدُ طريقةٌ أسهلُ وأدقُّ لحسابِ الميلِ؟

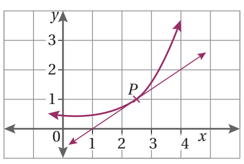
**أتحقق من فهمي**

**يُمثِّلُ الاقترانُ $s(t) = t^2 + t$ موقعَ جسـمٍ يتحرّكُ في مسـارٍ مسـتقيمٍ، حيثُ $s$ موقعُ الجسمِ بالأمتارِ بعدَ $t$ ثانيةً. أُقدِّرُ السرعةَ اللحظيةَ بعدَ 5 ثوانٍ.** أنظر الهامش.

**أتدرب وأحل المسائل**

1 يُمثِّلُ المستقيمُ في الشكلِ المجاورِ مماسًّا لمنحنى اقترانٍ عندَ النقطةِ $P(2.5, 1)$.

أَجِدُ ميلَ منحنى الاقترانِ عندَ النقطةِ $P$. $m = \frac{2}{3}$

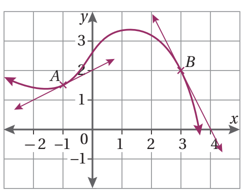



2 في الشكلِ المجاورِ، رُسِمَ مماسّانِ لمنحنى اقترانٍ عندَ النقطتيْنِ $A(-1, 1.5)$ وَ $B(3, 2)$.

أَجِدُ ميلَ منحنى الاقترانِ عندَ كلٍّ منْ $A$ وَ $B$.

الميل عند $A$ هو: $\frac{1}{2}$

الميل عند $B$ هو: $-2$




60

## الواجب المنزلي:

- أطلب إلى الطلبة أنْ يحلوا في البيت جميع المسـائل الـواردة في الصفحة الخامسـة عشـرة مـن كتاب التمارين، مُحدِّدًا لهم المسـائل التـي يمكنهم حلها في نهاية كل حصة بحسـب ما يُقدَّم من أمثلة الدرس وأفكاره.
- يمكن أيضًا إضافة المسائل التي لم يحلها الطلبة داخل غرفة الصف إلى الواجب البيتي.
- في اليوم التالي، أَطَّلِع على حلول الطلبة، وأُناقِشـهم في أيِّ صعوبات واجهوها في أثناء الحل.

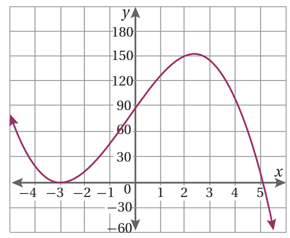
### إجابة سؤال بند (أتحقق من فهمي 3):

السرعة بعد 5 ثوانٍ هي 11 m/s (أقبل من الطلبة الإجابات القريبة من ذلك).

3 أُقدِّرُ ميلَ منحنى الاقترانِ المُبيَّنِ جانبًا عندَ النقطةِ $(2, 150)$، والنقطةِ $(4.5, 60)$.

الميل عند $(2, 150)$ هو: 15

الميل عند $(4.5, 60)$ هو: $-75$



أستعملُ جدولَ القيمِ الآتي للإجابةِ عن الأسئلةِ (7 – 4):

| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 2 | 1.5 | 2 | 3.5 | 6 |

4 أُمثِّلُ منحنى الاقترانِ $f(x)$ بيانيًّا في الفترةِ $0 \le x \le 4$ أنظر ملحق الإجابات.

5 أرسمُ مماسًّا لمنحنى الاقترانِ عندَ النقطةِ $(3, 3.5)$. أنظر ملحق الإجابات.

6 أُقدِّرُ ميلَ منحنى الاقترانِ عندَ النقطةِ $(3, 3.5)$. 1.9 تقريبًا.

7 ما إحداثياتُ النقطةِ التي يكونُ ميلُ المنحنى عندَها صفرًا؟ $(1, 1.5)$

أُكملُ جدولَ قيمِ الاقترانِ $f(x) = 0.1x^3$ الآتي، ثمَّ أستعملُهُ لحلِّ المسائلِ (10–8):

| $x$ | 0 | 0.5 | 1 | 1.5 | 2 | 2.5 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $0.1x^3$ | 0 | 0.01 | 0.1 | 0.3375 | 0.8 | 1.5625 | 2.7 |

8 أرسمُ منحنى الاقترانِ $f(x)=0.1x^3$ في الفترةِ $0 \le x \le 3$ أنظر ملحق الإجابات.

9 أرسمُ مماسًّا لمنحنى الاقترانِ عندَ النقطةِ $(2, 0.8)$. أنظر ملحق الإجابات.

10 أُقدِّرُ ميلَ منحنى الاقترانِ عندَ النقطةِ $(2, 0.8)$. 1.2 تقريبًا.

أُقدِّرُ ميلَ منحنى كلِّ اقترانٍ ممّا يأتي:

11 $y = 4x^2 + 1$ عندَ النقطةِ $(1, 5)$. أيُّ إجابة قريبة من 8

12 $y = 3 + 2x^2$ عندَ النقطةِ $(-1, 5)$. أيُّ إجابة قريبة من $-4$

13 $y = 1 - x^2$ عندَ النقطةِ $(-1, 0)$. أيُّ إجابة قريبة من 2

14 $y = 5x^3 + 1$ عندَ النقطةِ $(0, 1)$. 0

15 $y = 9 - x^2$ عندَ النقطةِ $(2, 5)$. أيُّ إجابة قريبة من $-4$

16 $y = 8 - 2x$ عندَ النقطةِ $(1, 6)$. $-2$



## مهارات التفكير العليا

- أُشرِكُ الطلبة كافةً في حل هذه المسائل؛ لتنمية مهارات التفكير العليا لديهم.
- أتذكَّر أنَّه ليس شرطًا أنْ يتمكَّن الطلبة كافةً من حل المسائل جميعها، ولكن يجب عليهم أنْ يحاولوا حلها.
- أطلب إلى الطلبة – ضمن مجموعات– حل المسائل في بند (مهارات التفكير العليا)، ثم أطلب إلى أفراد بعضها بيان كيفية توصُّلهم إلى الحل في كل مسألة، وأمنح الآخرين فرصة نقد إجابات زملائهم وتقويمها.
- أُحفِّز الطلبة على تبرير إجاباتهم.

## 5 الإثراء

- أُوجِّه الطلبة إلى البحث في شبكة الإنترنت أو مكتبة المدرسة عن تطبيقات حياتية للميل عند نقطة على المنحنى، مثل الرادار الذي يرصد سرعة السيارة لحظة مرورها أمامه.
- أُؤكِّد للطلبة وجوب توثيق المعلومة دائمًا.

### تعليمات المشروع:

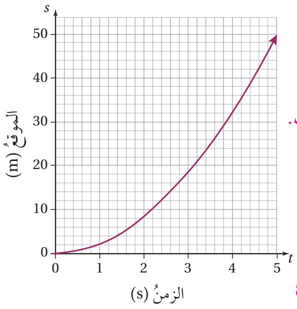
- أطلب إلى الطلبة البدء بتنفيذ الخطوات (4–1) من المشروع.
- أُوجِّه الطلبة إلى تنظيم إجراءاتهم وتوثيقها بنسخ صورة (print screen) للشاشة في كل خطوة.

## 6 الختام

- أطرح على الطلبة الأسئلة الآتية:
  » ما الفرق بين القاطع والمماس؟
  » ما تعريف نقطة التماس؟
  » هل يمكن رسم المماس بدقة؟
  » متى تكون قيمة الميل موجبةً أو سالبةً أو صفرًا؟

---

**درّاجاتٌ ناريةٌ:** بدأَتْ درّاجةٌ ناريةٌ الحركةَ منْ وضعِ السكونِ في مسارٍ مستقيمٍ. ويُبيِّنُ المنحنى المجاورُ موقعَ الدراجةِ خلالَ أوّلِ 5 ثوانٍ منْ بدءِ حركتِها:




17 أرسمُ نسخةً منَ المنحنى، مستعينًا بالجدولِ الآتي: أنظر ملحق الإجابات.

| $t$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $s(t)$ | 0 | 2 | 8 | 18 | 32 | 50 |

18 أرسمُ مماسًّا للمنحنى عندما $t = 2$. أنظر ملحق الإجابات.

19 أُقدِّرُ سرعةَ الدرّاجةِ بعدَ ثانيتيْنِ منْ بدءِ الحركةِ. أيُّ إجابة قريبة من 8 m/s

20 أُقدِّرُ سرعةَ الدرّاجةِ بعدَ 4 ثوانٍ من بدء الحركة. أنظر ملحق الإجابات.

21 أحسبُ السرعةَ المتوسّطةَ $\overline{v}$ للدراجةِ في الفترةِ الزمنيّةِ $[1, 3]$. 8 m/s

**سيّاراتٌ:** أرادَ مهندسٌ أنْ يدرسَ سرعةَ سيّارةٍ تتحركُ في مسارٍ مستقيمٍ وفي اتّجاهٍ واحدٍ، فسجَّلَ موقعَ السيارة بالنسبة لنقطة انطلاقها في لحظات زمنية محددة كما في الجدولِ الآتي، ثمَّ استعملَ القوانين الفيزيائية المتعلقة بالقوى المؤثرة على السيارة لكتابة معادلة جبرية تمثل العلاقة بين موقع السيارة والزمن على النحو الآتي: $s(t) = at + bt^2$، حيثُ $a$ وَ $b$ عددانِ ثابتانِ:

| الزمنُ $t$ (ثانيةٌ) | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| الموقعُ $s$ (مترٌ) | 0 | 5 | 12 | 21 | 32 |

22 أرسمُ منحنى اقترانِ الموقعِ – الزمنِ $s(t)$.

23 أُقدِّرُ السرعةَ عندما $t = 3$.

24 أجِدُ قيمةَ كلٍّ منْ: $a$ وَ $b$.

(25–22) أنظر ملحق الإجابات.

25 **فيزياءُ:** يمثِّلُ الاقترانُ $s(t) = 3t - t^2$ موقعَ جسمٍ يتحركُ في مسارٍ مستقيمٍ، حيثُ $s$ الموقعُ بالمترِ، و $t$ الزمنُ بالثانيةِ. أُقدِّرُ سرعةَ الجسمِ عندما $t = 2$.

**مهاراتُ التفكيرِ العليا**

26 **تبريرٌ:** أُقدِّرُ ميلَ منحنى الاقترانِ $f(x) = x^2 - 6x - 16$ عندَ كلٍّ منَ النقاطِ الآتيةِ، مُبرِّرًا إجابتي:

- نقطتا تقاطعِ المنحنى معَ محورِ $x$.
- نقطةُ تقاطعِ المنحنى معَ محورِ $y$.

أنظر ملحق الإجابات.

27 **مسألةٌ مفتوحةٌ:** أكتبُ قاعدةَ اقترانٍ منَ الدرجةِ الثانيةِ، ثمَّ أُمثِّلُهُ بيانيًّا، مُقدِّرًا ميلَهُ عندَ نقطتيْنِ مُتعاكستيْنِ عليْهِ: $(a,b), (-a, b)$. أنظر ملحق الإجابات.

62

---

**إرشاد:** في السؤال 26:

- أُخبِر الطلبة أنَّ المقصود بالنقطتين المتعاكستين اللتين ورد ذكرهما في السؤال هو النقطتان المتقابلتان على جانبي محور التماثل.
- أكتب على اللوح بعض الأمثلة على ذلك، مثل: $(1, 2)$, $(-1, 2)$ على منحنى $y = x^2$.

# الدرس 2

# الدرس 2

## الاشتقاقُ

## Differentiation

**فكرةُ الدرسِ** إيجادُ مشتقةِ كثيراتِ الحدودِ.

**المصطلحاتُ** المشتقةُ.

**مسألةُ اليومِ** يُمثِّلُ الاقترانُ $s(t) = 80t - 5t^2$ موقعَ منطادٍ بالنسبةِ إلى سطحِ الأرضِ بالمترِ بعدَ $t$ ثانيةً منْ إطلاقِهِ. ما سرعةُ المنطادِ بعدَ 10 ثوانٍ منْ إطلاقِهِ؟

تعرَّفْتُ في الدرسِ السابقِ كيفيةَ إيجادِ الميلِ أوْ تقديرِهِ، وهيَ طريقةٌ ليسَتْ سهلةً، وتحتاجُ إلى دقةٍ عندَ رسمِ المماسِّ. سأتعرَّفُ في هذا الدرسِ طريقةً جبريةً أسهلَ لإيجادِ ميلِ منحنى الاقترانِ عندَ نقطةٍ عليهِ منْ دونِ حاجةٍ إلى رسمِ المماسِّ.

عندَ إيجادِ ميلِ منحنى الاقترانِ $y = x^2$ عندَ نقاطٍ مختلفةٍ عليْهِ باستعمالِ طريقةِ ميلِ المماسِّ التي تعرَّفْتُها سابقًا، وتنظيمِ القيمِ في الجدولِ الآتي، سألاحِظُ أنَّ ميلَ المنحنى عندَ أيِّ نقطةٍ $(x, y)$ يساوي قيمةَ $x$ مضروبةً في العددِ 2؛ أيْ إنَّ الميلَ $m$ يساوي $2x$

| $(x, y)$ | $(-2, 4)$ | $(-1, 1)$ | $(0, 0)$ | $(1, 1)$ | $(3, 9)$ | $(4, 16)$ | $(5, 25)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $m$ | $-4=-2\times2$ | $-2=-1\times2$ | $0=0\times2$ | $2=1\times2$ | $6=3\times2$ | $8=4\times2$ | $10=5\times2$ |

وبالمثلِ، سأجدُ أنَّ ميلَ منحنى الاقترانِ $f(x) = x^3$ عندَ أيِّ نقطةٍ $(x, y)$ على منحناهُ هوَ $m = 3x^2$.

بوجهٍ عامٍّ، فإنَّ ميلَ منحنى الاقترانِ $f(x) = x^n$ عندَ أيِّ نقطةٍ $(x, y)$ عليْهِ هوَ $m = nx^{n-1}$.

**مشتقةُ** (derivative) الاقترانِ $f(x)$ عندَ نقطةٍ واقعةٍ على منحناهُ هيَ ميلُ المنحنى عندَ تلكَ النقطةِ، ويُرمَزُ إليْها بالرمزِ $f'(x)$.

**رموزٌ رياضيةٌ**

تُستعمَلُ الرموزُ $\frac{dy}{dx}, f'(x), y'$ للتعبيرِ عنْ مشتقةِ الاقترانِ $y = f(x)$

**مفهومٌ أساسيٌّ** — **مشتقةُ اقترانِ القوةِ**

- **بالكلماتِ:** عندَ اشتقاقِ الاقترانِ $f(x)=x^n$، فإنَّ أس $x$ في المشتقةِ يكونُ أقلَّ بواحدٍ منْ أس $x$ في الاقترانِ الأصليِّ، وإنَّ معاملَ $x$ في المشتقةِ يساوي أس $x$ في الاقترانِ الأصليِّ.
- **بالرموزِ:** إذا كانَ $f(x) = x^n$، حيثُ $n$ عددٌ صحيحٌ غيرُ سالبٍ، فإنَّ $f'(x) = nx^{n-1}$.

63

### نتاجات الدرس

- تعرُّف مفهوم مشتقة كثير الحدود.
- إيجاد مشتقة كثيرات الحدود باستعمال القوانين.
- إيجاد الميل باستعمال المشتقة.
- إيجاد السرعة اللحظية والتسارع اللحظي باستعمال المشتقة.

### التعلُّم القبلي:

- تقدير ميل المنحنى على نقطة واقعة عليه.
- تقدير السرعة اللحظية والتسارع اللحظي.

## 1 التهيئة

- أُذكِّر الطلبة بما تعلَّموه في الدرس السابق، ثم أكتب على اللوح السؤال الآتي:

» يُمثِّل الاقتران: $s(t) = 16t - 2t^2$، موقع جسم يتحرك في مسار مستقيم، حيث $s$ موقع الجسم بالأمتار بعد $t$ ثانية من بدء حركته. ما سرعة هذا الجسم بعد ثانيتين من بدء حركته؟

- أُدير حوارًا بين الطلبة عن طريقة إيجاد هذه السرعة وَفق الطريقة المتبعة في الدرس السابق.
- أُوجِّه الطلبة إلى حل السؤال ضمن مجموعات، وأُتابِعهم في أثناء ذلك.

## 2 الاستكشاف

- أُوجِّه الطلبة إلى قراءة المسألة في بند (**مسألة اليوم**)، ثم أسألهم:
  - » ما موقع المنطاد بعد مرور 10 ثوانٍ على إطلاقه؟ 300 m
  - » كيـف يمكن إيجاد سـرعة المنطاد بعد مرور 10 ثوانٍ على إطلاقه؟ برسـم منحنى الموقع-الزمن، ورسم مماس عندما $t = 10$، وحساب ميله.
  - » هل توجد طريقة أُخرى أسهل وأكثر دقة لإيجاد السرعة؟ نعم.
- أستمع لإجابات الطلبة من دون تقديم تغذية راجعة لهم، ثم أسألهم:
  - » مَنْ يُؤيِّد الإجابة؟
  - » مَنْ لديه إجابة أُخرى؟
  - » أذكرها.

وذلك لتعزيز مهارات التواصل واحترام الـرأي والرأي الآخر لديهم. بعد ذلك أُوضِّح لهم أنَّهم سيتعرَّفون في هذا الدرس طريقة سهلة لحساب الميل والسرعة والتسارع، ثم أكتب العنوان على اللوح.

### تعزيز اللغة ودعمها:

أُكرِّر المصطلحات الرياضية المستخدمة في الدرس باللغتين العربية والإنجليزية، وأُحفِّز الطلبة على استعمالها، مثل: كثير الحدود (polynomial)، والمشتقة (derivative)، والميل (slope).

## 3 التدريس

- أُوظِّف الشرح الوارد بداية الدرس من كتاب الطالب في إيجاد ميل منحنى الاقتران: $y = x^2$ عند عِدَّة نقاط واقعه عليه، واستنتاج قاعدة مشتقة اقتران القوة.

### إرشادات للمُعلِّم/ للمُعلِّمة

أُخبِر الطلبة بوجود عِدَّة رموز للمشـتقة يمكن العثور عليها في الكتـب المرجعية، أو المواقع الإلكترونية المتخصصة، ومن هذه الرموز: $y', (f(x)), \frac{d}{dx}, \frac{dy}{dx}$.

**تنبيه:** قد لا يُميِّز بعض الطلبة من ذوي المسـتوى دون المتوسط اقتران كثير الحدود من غيره؛ لذا أُوضِّح لهم ذلك.

**أخطـاء مفاهيمية:** قد يعتقد بعض الطلبة من ذوي المسـتوى دون المتوسـط أنَّ المماس يُرسَـم للدائرة فقط؛ لذا أَلفِـت انتباههم إلى ذلك بتعريف الممـاس والقاطع ونقطة التماس.

### ملاحظات المُعلِّم/ المُعلِّمة

.........................................

.........................................

.........................................

.........................................

.........................................

.........................................

.........................................

.........................................

.........................................

.........................................

### المفاهيم العابرة:

أُؤكِّد للطلبة أهمية المفاهيم العابرة للمواد حيثما ورد ذكرها في كتاب الطالب، أو كتاب التمارين والأنشطة العملية. ففي بند (**مسألة اليوم**)، أُعزِّز الوعـي بالقضايا الإنسـانية (الهواية) عن طريق حوار أُديره مع الطلبة عن أهمية الهواية، وتأثيرها في الطاقة الإيجابية وزيادة درجة السعادة لديهم، ثم أسألهم:

- » ما هواياتك المفضلة؟
- » بماذا تشعر عند ممارسة هواياتك؟
- » أيكم لديه هوايات أُخرى؟
- » أذكرها (إنْ وُجِدت).

### مثال 1

أَجِدُ مشتقةَ كلِّ اقترانٍ ممّا يأتي:

**1** $f(x) = x^8$

$f'(x) = 8x^{8-1}$ قانونُ مشتقةِ القوةِ

$f'(x) = 8x^7$ بالتبسيطِ

**2** $f(x) = x^5$

$f'(x) = 5x^{5-1}$ قانونُ مشتقةِ القوةِ

$f'(x) = 5x^4$ بالتبسيطِ

**أتحقق من فهمي**

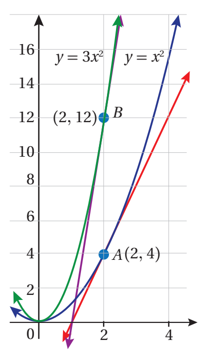
أَجِدُ مشتقةَ كلِّ اقترانٍ ممّا يأتي: أنظر الهامش.

a) $f(x) = x^7$ b) $f(x) = x^{11}$

مِنَ المعلومِ أنَّ قيمَ $y$ للاقترانِ $f(x) = 3x^2$ تساوي 3 أمثالِ قيمِ $y$ التي تُناظِرُها للاقترانِ $g(x) = x^2$. وعليهِ، فإنَّ ميلَ منحنى الاقترانِ $f(x) = 3x^2$ عندَ النقطةِ $(2, 12)$ يساوي 3 أمثالِ ميلِ منحنى الاقترانِ $g(x) = x^2$ عندَ النقطةِ $(2, 4)$.

وهذا يعني أنَّ مشتقةَ $(3x^2)$ تساوي 3 أمثالِ مشتقةِ $(x^2)$؛ أيْ $(3\times 2x)$.

بوجهٍ عامٍّ، فإنَّ مشتقةَ الاقترانِ $f(x)= ax^n$، حيثُ $a$ عددٌ حقيقيٌّ، هيَ $f'(x)= a \times nx^{n-1}$.




**مفهومٌ أساسيٌّ** — مشتقةُ مضاعفاتِ القوّةِ ومشتقةُ الثابتِ

- **مشتقةُ مضاعفاتِ القوةِ:** إذا كانَ $f(x) = ax^n$، حيثُ $n$ عددٌ صحيحٌ غيرُ سالبٍ، فإنَّ $f'(x) = anx^{n-1}$.
- **مشتقةُ الثابتِ:** إذا كانَ $f(x) = c$، حيثُ $c$ عددٌ حقيقيٌّ، فإنَّ $f'(x) = 0$؛ أيْ إنَّ مشتقةَ الاقترانِ الثابتِ تساوي صفرًا.

**أفكّرُ**

هلْ يمكنُ استنتاجُ قاعدةٍ لمشتقةِ الاقترانِ الخطيِّ؟

64

### تنبيه:

لا أطلب إلى الطلبة اشتقاق اقتران فيه أس سالب أو أس كسري؛ لأنَّ المطلوب منهم فقط في هذه المرحلة هو تعرُّف اشتقاق كثير الحدود.

**إجابة سؤال بند (أتحقق من فهمي 1):**

a) $f'(x) = 7x^6$ b) $f'(x) = 11x^{10}$

## مثال 1

- أستعمل هذا المثال لتوضيح قاعدة اشتقاق اقتران القوة.
- أكتب على اللوح أمثلة أُخرى لترسيخ فهم الطلبة للقاعدة.

## التقويم التكويني:

- أُوجِّه الطلبة إلى حل التدريب في بند (**أتحقق من فهمي**) بعد كل مثال (فرديًّا، أو ضمن مجموعات).
- أتجوَّل بين الطلبة مُرشِدًا، ومُساعِدًا، ومُوجِّهًا، وأُقدِّم لهم التغذية الراجعة.
- أختار بعض الإجابات التي تحوي أخطاء مفاهيمية، ثم أُناقِشها على اللوح، ولا أذكر اسم الطالب الذي أخطأ في الإجابة؛ تجنُّبًا لإحراجه.

## مثال إضافي

- أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

1) $f(x) = x^{25}$ $f'(x) = 25x^{24}$

2) $f(x) = x^{77}$ $f'(x) = 77x^{76}$

## إرشادات للمُعلِّم / للمُعلِّمة

- في المثال الأول، قد ينسى الطلبة من ذوي المستوى دون المتوسط طرح واحد من الأس؛ لذا أُذكِّرهم دائمًا بذلك.
- قد ينسى الطلبة من ذوي المستوى دون المتوسط ضرب القوة في المعامل عند اشتقاق مضاعفات القوة؛ لذا أُذكِّرهم دائمًا بذلك.
- قد يخلط الطلبة من ذوي المستوى دون المتوسط عند شرح قاعدة مشتقة مضاعفات القوة بين المنحنيين؛ لأنَّهما رُسِما معًا؛ لذا أرسم كلًّا منهما وحده، ثم أدمجهما في المستوى الإحداثي نفسه.

## مثال 2

- أُوظِّف الشرح الوارد في كتاب الطالب، والمقارنة بين ميل منحنى الاقتران: $g(x) = x^2$ وميل منحنى الاقتران: $f(x) = 3x^2$ عند عِدَّة نقاط واقعة عليهما لها الإحداثي $x$ نفسه؛ في استنتاج قاعدة مشتقة مضاعفات القوة، مُبيِّنًا أنَّ ميل المماس عند $A$ هو 2، وأنَّ ميل المماس عند $B$ هو 6
- يمكن استعمال برمجية جيوجبرا لتوضيح قاعدة مشتقة مضاعفات القوة، وقاعدة مشتقة الثابت.
- أستعمل هذا المثال لتوضيح قاعدة مشتقة مضاعفات القوة، وقاعدة مشتقة الثابت.

**! أخطاء مفاهيمية:** في المثال الثاني، قد يُخطِئ الطلبة من ذوي المستوى دون المتوسط في الاشتقاق؛ بنسيان الضرب في المعامل (في حال وجود معامل غير 1)؛ لذا أَلفِت انتباههم إلى ذلك.

## مثال إضافي

- أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

1) $f(x) = -2x^8$ $\quad f'(x) = -16x^7$

2) $f(x) = 9x$ $\quad f'(x) = 9$

3) $f(x) = -1$ $\quad f'(x) = 0$



### مثال 2

أَجِدُ مشتقةَ كلِّ اقترانٍ ممّا يأتي:

1) $f(x) = 2x^4$

$f'(x) = 2(4x^{4-1})$ قانونُ مشتقةِ مضاعفِ القوةِ

$f'(x) = 8x^3$ بالتبسيطِ

2) $f(x) = \frac{1}{4}x^3$

$f'(x) = \frac{1}{4}(3x^{3-1})$ قانونُ مشتقةِ مضاعفِ القوةِ

$f'(x) = \frac{3}{4}x^2$ بالتبسيطِ

3) $f(x) = -2x$

$f'(x) = -2(x^{1-1})$ قانونُ مشتقةِ مضاعفِ القوةِ

$f'(x) = -2$ بالتبسيطِ

4) $f(x) = 4$

$f'(x) = 0$ قانونُ مشتقةِ الثابتِ

**أتذكَّرُ**

ميلُ الاقترانِ الثابتِ يساوي صفرًا.

**أتحقق من فهمي**

أَجِدُ مشتقةَ كلِّ اقترانٍ في ما يأتي: أنظر الهامش.

a) $f(x) = 5x^{12}$ b) $f(x) = -7x^8$

c) $f(x) = 0.5x^6$ d) $f(x) = -11$

**مفهومٌ أساسيٌّ** مشتقةُ المجموعِ ومشتقةُ الفرقِ

- **بالكلماتِ:** مشتقةُ مجموعِ كثيرَيِ الحدودِ تساوي مجموعَ مشتقتَيْهِما، ومشتقةُ الفرقِ بينَ كثيرَيِ الحدودِ تساوي الفرقَ بينَ مشتقتَيْهِما.
- **بالرموزِ:** إذا كانَ $f(x) = g(x) \pm h(x)$، حيثُ $g(x)$ وَ $h(x)$ كثيرا حدودٍ، فإنَّ $f'(x) = g'(x) \pm h'(x)$.



### إجابة سؤال بند (أتحقق من فهمي 2):

a) $f'(x) = 60x^{11}$ b) $f'(x) = -56x^7$

c) $f'(x) = 3x^5$ d) $f'(x) = 0$

### مثال 3

أَجِدُ مشتقةَ كلِّ اقترانٍ ممّا يأتي:

**إرشادٌ:** أستعملُ قواعدَ الاشتقاقِ المناسبةَ لإيجادِ المشتقةِ.

**1** $f(x) = x^2 - 6x$

$f'(x) = 2x^{2-1} - 6x^{1-1}$ قانونُ مشتقةِ مضاعفاتِ القوى

$f'(x) = 2x - 6$ بالتبسيطِ

**2** $f(x) = 5x^7 + 3x^4 - \frac{3}{2} x^2 + 8$

$f'(x) = 5(7x^{7-1}) + 3(4x^{4-1}) - \frac{3}{2}(2x^{2-1}) + 0$ قانونُ مشتقةِ مضاعفاتِ القوى

$f'(x) = 35x^6 + 12x^3 - 3x$ بالتبسيطِ

**أتحقق من فهمي**

أَجِدُ مشتقةَ كلٍّ منَ الاقترانيْنِ الآتييْنِ: أنظر الهامش.

**a)** $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 4x - 1$ **b)** $g(x) = 9x - 7x^5 - 6 + \sqrt{3}\,x^2$

أُلاحِظُ منَ الأمثلةِ السابقةِ أنَّ مشتقةَ الاقترانِ هيَ اقترانٌ جديدٌ يُمثِّلُ قيمةَ ميلِ منحنى الاقترانِ الأصليِّ عندَ قيمٍ مختلفةٍ؛ لذا يُمكِنُ إيجادُ ميلِ منحنى الاقترانِ عندَ أيِّ نقطةٍ عليْهِ، بتعويضِ الإحداثيِّ $x$ لتلكَ النقطةِ في اقترانِ المشتقةِ.

### مثال 4

إذا كانَ $f(x) = 3x^2 - 18x + 5$، فأستعملُ المشتقةَ لإيجادِ كلٍّ ممّا يأتي:

**1** ميلُ منحنى $f(x)$ عندَ النقطةِ $(1, -10)$.

$f(x) = 3x^2 - 18x + 5$ الاقترانُ الأصليُّ

$f'(x) = 6x - 18$ باشتقاقِ الاقترانِ

$f'(1) = 6(1) - 18$ بتعويضِ قيمةِ $x = 1$

$= -12$ بالتبسيطِ

إذنْ، ميلُ منحنى الاقترانِ $f(x)$ عندَ النقطةِ $(1, -10)$ هوَ $-12$

**أتعلَّمُ:** يُستعمَلُ الرمزُ $f'(a)$ للتعبيرِ عنْ مشتقةِ $f(x)$ عندما $x = a$.

66

## إرشادات للمُعلِّم/ للمُعلِّمة

أُثبِت للطلبة بعد شرح المثال الثالث أنَّ مشتقة الاقتران الثابت تساوي صفرًا، وذلك برسم التمثيل البياني لاقتران ثابت، وإيجاد الميل عند عِدَّة نقاط واقعة عليه.

**تنبيه:** قد يواجه بعض الطلبة صعوبة في فهم المثال الثالث؛ لذا أطلب إليهم اشتقاق كل حد وحده، ثم جمع المشتقات لكتابة مشتقة الاقتران كاملة.

**إجابة سؤال بند (أتحقق من فهمي 3):**

**a)** $f'(x) = x + 4$

**b)** $g'(x) = 9 - 35x^4 + 2\sqrt{3}x$

### مثال 3

- أستعمل صندوق (مفهوم أساسي) لشرح قاعدة اشتقاق مجموع كثيري حدود، ومشتقة الفرق.
- أستعمل هذا المثال لتوضيح قاعدة مشتقة المجموع، ومشتقة الفرق.
- أكتب على اللوح أمثلة أُخرى لترسيخ فهم الطلبة للقاعدة.

### مثال إضافي

- أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

**1)** $f(x) = 3 - 4x^2$ $f'(x) = -8x$

**2)** $f(x) = x^3 - 2x^2 + 5x - 1$

$f'(x) = 3x^2 - 4x + 5$

### مثال 4 الفرع 1

- أُذكِّر الطلبة أنَّ ميل منحنى الاقتران عند نقطة عليه هو مشتقة الاقتران عند تلك النقطة، مستعينًا بالشرح الوارد في بداية الدرس.
- أجد ميل منحنى الاقتران باستعمال المشتقة.
- أُقدِّر الميل برسم المماس إنْ توافر وقت لذلك.
- أُقارِن بين طريقة تقدير الميل وإيجاد الميل باستعمال المشتقة من حيث دقة الناتج، وصعوبة الحل، والوقت المُستغرَق في ذلك.

**تنبيه:** لا أقبل إجابات الطلبة التقريبية عند إيجاد الميل باستعمال المشتقة.

## مثال 4 الفرع 2

- أرسم التمثيل البياني للاقتران الوارد في هذا المثال.
- أُوضِّح للطلبة النقاط التي يساوي عندها الميل صفرًا، مستعينًا بالنشاط الوارد في بداية الوحدة.
- أُذكِّر الطلبة بأنَّ الميل يساوي صفرًا عندما يكون المماس موازيًا للمحور $x$.
- أشرح للطلبة الطريقة الجبرية لإيجاد النقاط التي يساوي عندها الميل صفرًا، ثم أُقارِن ذلك بالإجابة الناتجة من التمثيل البياني للاقتران.

## مثال إضافي

إذا كان: $f(x) = x^3 - 2x^2 - 15x + 6$، فأجد كلًّا ممّا يأتي باستعمال المشتقة:

1. ميل منحنى $f(x)$ عند النقطة $A(-2, 20)$.
2. قيم $x$ التي يساوي عندها ميل منحنى الاقتران صفرًا.
3. قيم $x$ التي يساوي عندها ميل منحنى الاقتران 5

1) $m = 5$

2) $x = 3, x = -\frac{5}{3}$

3) $x = -2, x = \frac{10}{3}$

## مثال 5: من الحياة

- أُذكِّر الطلبة أنّه يمكن إيجاد السرعة باستعمال منحنى الموقع- الزمن.
- أُنبِّه الطلبة إلى أنَّ القيمة تُمثِّل السرعة اللحظية، لا السرعة المتوسطة.
- أُخبِر الطلبة أنَّ اقتران التسارع هو مشتقة اقتران السرعة.
- أُوضِّح للطلبة أنَّ قيمة التسارع موجبة بسبب تزايد السرعة.



2 قيمةُ $x$ التي يكونُ عندها ميلُ منحنى الاقترانِ صفرًا.

| | |
|---|---|
| بمساواةِ المشتقةِ بالصفرِ | $f'(x) = 0$ |
| بتعويضِ قيمةِ المشتقةِ | $6x - 18 = 0$ |
| بجمعِ 18 للطرفيْنِ | $6x = 18$ |
| بقسمةِ الطرفيْنِ على 6 | $x = 3$ |

إذنْ، قيمةُ $x$ التي يكونُ عندها ميلُ منحنى الاقترانِ صفرًا هيَ $x = 3$ .

### أتحقق من فهمي

إذا كانَ $f(x) = 5x^2 + 25x - 9$، فأستعملُ المشتقةَ لإيجادِ كلٍّ ممّا يأتي: أنظر الهامش.

a) ميلُ منحنى $f(x)$ عندما $x = -2$.

b) قيمةُ $x$ التي يكونُ عندها ميلُ منحنى الاقترانِ صفرًا.

تعرَّفْتُ سابقًا أنَّ ميلَ منحنى الموقعِ – الزمنِ في لحظةٍ ما (عندَ نقطةٍ مُحدَّدةٍ) يساوي السرعةَ اللحظيةَ عندَ تلكَ النقطةِ، وبصورةٍ مشابهةٍ فإنَّ ميلَ منحنى السرعةِ– الزمنِ في لحظةٍ ما يساوي التسارعَ اللحظيَّ.

أستطيعُ الآنَ إيجادَ كلٍّ منَ السرعةِ اللحظيةِ، والتسارعِ اللحظيِّ باستعمالِ المشتقةِ بسهولةٍ منْ دونِ حاجةٍ إلى تقديرِ ميلِ المنحنى باستعمالِ المماسِّ كما في الدرسِ السابقِ.

**معلومةٌ**

السرعةُ اللحظيةُ تساوي مشتقةَ اقترانِ الموقعِ عندَ لحظةٍ ما. التسارعُ اللحظيُّ يساوي مشتقةَ اقترانِ السرعةِ عندَ لحظةٍ ما.

### مثال 5: من الحياة

**يُمثِّلُ الاقترانُ $s(t) = 0.6t^3 - 1.5t - 0.9$ موقعَ جسمٍ يتحركُ في مسارٍ مستقيمٍ، حيثُ $s$ موقعُ الجسمِ بالأمتارِ بعدَ $t$ ثانيةً:**

1 أَجِدُ سرعةَ الجسمِ بعدَ 3 ثوانٍ منْ بَدءِ حركتِهِ.

السرعةُ هيَ مشتقةُ اقترانِ الموقعِ. أفترضُ أنَّ اقترانَ السرعةِ هوَ $v(t)$.

إذنْ، $v(t) = s'(t)$.

المطلوبُ هوَ $v(3) = s'(3)$، التي تُمثِّلُ السرعةَ اللحظيةَ عندما $t = 3$.

| | |
|---|---|
| مشتقةُ اقترانِ الموقعِ | $s'(t) = 1.8t^2 - 1.5$ |
| تعريفُ اقترانِ السرعةِ | $v(t) = s'(t) = 1.8t^2 - 1.5$ |
| بتعويضِ $t = 3$ | $v(3) = s'(3) = 1.8(3)^2 - 1.5$ |
| بالتبسيطِ | $= 14.7 \text{ m/s}$ |

إذنْ، سرعةُ الجسمِ بعدَ 3 ثوانٍ منْ بَدءِ حركتِهِ هيَ 14.7 m/s

**أتذكّرُ**

يرمزُ للثواني بالرمزِ s وهوَ الحرفُ الأولُ منْ كلمةِ second وتعني ثانيةً.



### إجابة سؤال بند (أتحقق من فهمي 4):

a) $m = 5$ b) $x = -2.5$

2 أَجِدُ تسارعَ الجسمِ بعدَ 5 ثوانٍ منْ بَدءِ حركتِهِ.

التسارعُ هوَ مشتقةُ اقترانِ السرعةِ. أفترضُ أنَّ اقترانَ التسارعِ هوَ $a(t)$.

إذنْ، $a(t) = v'(t)$.

المطلوبُ هوَ $a(5) = v'(5)$، التي تُمثِّلُ التسارعَ عندما $t = 5$.

$$a(t) = v'(t) = 3.6t$$ مشتقةُ اقترانِ السرعةِ

$$a(5) = 3.6(5)$$ بتعويضِ $t = 5$

$$= 18$$ بالتبسيطِ

إذنْ، تسارعُ الجسمِ بعدَ 5 ثوانٍ منْ بَدءِ حركتِهِ هوَ $18\ m/s^2$

**أتعلَّمُ**

تكونُ قيمةُ التسارعِ صفرًا إذا كانَتِ السرعةُ ثابتةً.

**أتحقق من فهمي**

**يُمثِّلُ الاقترانُ $s(t) = 2.5t^2 + 0.1t - 0.3$ موقعَ جسمٍ يتحركُ في مسارٍ مستقيمٍ، حيثُ $s$ موقعُ الجسمِ بالأمتارِ بعدَ $t$ ثانيةً. أَجِدُ سرعةَ الجسمِ وتسارعَهُ عندما $t = 3$.** أنظر الهامش.

**أتدرب وأحل المسائل**

أَجِدُ مشتقةَ كلٍّ منَ الاقتراناتِ الآتيةِ:

1 $f(x) = -7$ $f'(x) = 0$

2 $g(x) = 3x^9$ $g'(x) = 27x^8$

3 $r(x) = -5x^2$ $r'(x) = -10x$

4 $i(x) = x^4 - 3x$ $i'(x) = 4x^3 - 3$

5 $v(x) = x^2 + x + 1$ $v'(x) = 2x + 1$

6 $t(x) = 6 - 2x + x^2$ $t'(x) = -2 + 2x$

أَجِدُ قيمةَ $f'(-2)$ في كلٍّ ممّا يأتي:

7 $f(x) = \frac{3}{5}x^3 + x^4 - 2x + 7$ $-26.8$

8 $f(x) = x^{99} + \sqrt{2}\,x$ $3.137435236 \times 10^{31}$

9 $f(x) = \frac{7\pi}{18}$ $0$

10 أَجِدُ النقطةَ التي يكونَ عندها ميلُ منحنى الاقترانِ $f(x) = 2x^2 - 10$ هوَ 12 $x = 3$

**يُمثِّلُ الاقترانُ $s(t) = t^3 - 6t + 3$ موقعَ جسمٍ يتحركُ في مسارٍ مستقيمٍ، حيثُ $s$ موقعُ الجسمِ بالأمتارِ بعدَ $t$ ثانيةً:**

11 أَجِدُ الاقترانَ $v(t)$ الذي يُمثِّلُ سرعةَ الجسمِ في أيِّ لحظةٍ ($t$ ثانيةً). $v(t) = 3t^2 - 6$

12 أَجِدُ سرعةَ الجسمِ عندما $t = 3$. $21\ m/s$

13 أَجِدُ الزمنَ $t$ عندما تكونُ السرعةُ $6\ m/s$ $t = 2$

14 أَجِدُ الاقترانَ $a(t)$ الذي يُمثِّلُ تسارعَ الجسمِ، حيثُ $t$ الزمنُ بالثانيةِ. $a(t) = 6t$

15 أَجِدُ تسارعَ الجسمِ عندما $t = 5$. $30\ m/s^2$



**إجابة سؤال بند (أتحقق من فهمي 5):**

السرعة: $15.1\ m/s$

التسارع: $5\ m/s^2$

**تنبيه:** في أثناء شرح المثال الخامس، لا أذكر للطلبة أنَّ التسارع هو المشتقة الثانية لاقتران المسافة؛ لأنَّهم لا يعرفون ذلك في هذه المرحلة.

## 4 التدريب

- أُوجِّه الطلبة إلى قراءة الأسئلة في بند (**أتدرب وأحل المسائل**)، ثم أطلب إليهم حلها.
- أتجوَّل بين الطلبة مُرشِدًا، ومُساعِدًا، ومُوجِّهًا، وأُقدِّم لهم التغذية الراجعة.
- إذا واجه بعض الطلبة صعوبة في حل أيِّ مسألة، فأختار طالبًا تمكَّن من حل المسألة، وأطلب إليه كتابة حله على اللوح.

### الواجب المنزلي:

- أطلب إلى الطلبة أنْ يحلوا في البيت جميع المسائل الواردة في الصفحة السادسة عشرة من كتاب التمارين، مُحدِّدًا لهم المسائل التي يمكنهم حلها في نهاية كل حصة بحسب ما يُقدَّم من أمثلة الدرس وأفكاره.
- يمكن أيضًا إضافة المسائل التي لم يحلها الطلبة داخل غرفة الصف إلى الواجب البيتي.
- في اليوم التالي، أَطَّلِع على حلول الطلبة، وأُناقِشهم في أيِّ صعوبات واجهوها في أثناء الحل.

## مهارات التفكير العليا

- أُشرِك الطلبة كافةً في حل هذه المسائل؛ لتنمية مهارات التفكير العليا لديهم.
- أتذكَّر أنَّه ليس شرطًا أنْ يتمكَّن الطلبة كافةً من حل المسائل جميعها، ولكن يجب عليهم أنْ يحاولوا حلها.
- أطلب إلى الطلبة -ضمن مجموعات- حل المسائل في بند (**مهارات التفكير العليا**)، ثم أطلب إلى أفراد بعضها بيان كيفية توصُّلهم إلى الحل في كل مسألة، وأمنح الآخرين فرصة نقد إجابات زملائهم وتقويمها.
- أُحفِّز الطلبة على تبرير إجاباتهم.
- أُنبِّه الطلبة عند حل السؤال 29 إلى أنَّ النقطة المعطاة تُحقِّق معادلة المنحنى، وأنَّ المشتقة عندئذٍ تساوي صفرًا، وأنَّه يمكنهم تكوين معادلتين بالمتغيرين $a,b$ وحلهما.
- أُوجِّه الطلبة عند حل السؤال 30 إلى إيجاد الزمن الذي يكون عنده موقع القذيفة 980 m ثم حساب سرعة القذيفة في تلك اللحظة.

## 5 الإثراء

- أُوجِّه الطلبة إلى البحث في شبكة الإنترنت أو مكتبة المدرسة عن تطبيقات حياتية للمشتقات.
- أُؤكِّد للطلبة وجوب توثيق المعلومة دائمًا.

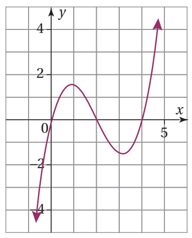
### تعليمات المشروع:

- أطلب إلى الطلبة البدء بتنفيذ الخطوة 5 من المشروع.
- أُوجِّه الطلبة إلى تنظيم إجراءاتهم وتوثيقها بنسخ صورة (print screen) للشاشة في كل خطوة.
- أُتابِع أفراد المجموعات في أثناء تنفيذ مشروع الوحدة، وأُزوِّدهم بتغذية راجعة وإرشادات لتحسينه.

## 6 الختام

- أطرح على الطلبة الأسئلة الآتية:
  » ما الفرق بين تقدير الميل برسم المماس وإيجاد الميل باستعمال المشتقة؟
  » أيهما أدق؟
  » متى يساوي ميل الماس صفرًا؟
  » هل يستحيل أحيانًا رسم المماس؟






**يُمثِّلُ الشكلُ المجاورُ منحنى الاقترانِ $f(x) = 0.5x^3 - 3x^2 + 4x$:**

16) أَجِدُ $f'(x)$. $f'(x) = 1.5x^2 - 6x + 4$

17) أَجِدُ ميلَ منحنى الاقترانِ عندَ نقاطِ تقاطعِهِ معَ محورِ $x$.

17) $f'(0) = 4$, $f'(2) = -2$, $f'(4) = 4$,

18) أُحدِّدُ على المنحنى النقطةَ التي يساوي عندها الميلُ 0.5 $x = 2+\sqrt{2}$ , $x = 2-\sqrt{2}$

$x = \frac{6+2\sqrt{6}}{3}$ , $x = \frac{6-2\sqrt{6}}{3}$

19) أَجِدُ معادلةَ مماسٍّ منحنى الاقترانِ $f(x)=3x^3+2$ عندَ النقطةِ التي يكونُ إحداثيُّ $x$ لها 1 $y - 5 = 9(x-1)$

**تقعُ النقطةُ $P(-2, b)$ على منحنى الاقترانِ $g(x) = 3x^3 - x^2 - 7x + 4$:**

20) أَجِدُ قيمةَ $b$. $b = -10$

21) أَجِدُ قيمةَ $x$ التي يكونُ عندها ميلُ منحنى الاقترانِ صفرًا. $x = 1$ , $x = -\frac{7}{9}$

**إذا كانَتْ قيمةُ الميلِ عندما $x = 2$ لمنحنى المعادلةِ $y = x^3 - 2ax$ ، حيثُ $a$ عددٌ ثابتٌ، هيَ $-12$**

22) أَجِدُ قيمةَ الثابتِ $a$. $a = 12$

23) أَجِدُ قيمةَ ميلِ المنحنى عندما $x = 4$. 24

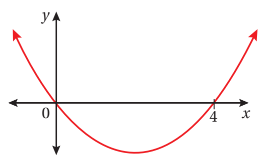
**أَجِدُ $f'(x)$ في كلٍّ ممّا يأتي:**

26) $f(x) = (x+3)(x-3)$
$f'(x) = 2x$

25) $f(x) = (x+2)(x+5)$
$f'(x) = 2x + 7$

24) $f(x) = 2x\,(x+1)$
$f'(x) = 4x + 2$

27) يُبيِّنُ الشكلُ المجاورُ التمثيلَ البيانيَّ للاقترانِ $f(x) = kx\,(x-4)$، حيثُ $k$ عددٌ حقيقيٌّ. أَجِدُ قيمةَ $k$ إذا كانَ ميلُ المنحنى عندَ النقطةِ $(4, 0)$ هوَ 2 $k = 0.5$




### مهارات التفكير العليا

28) **تبريرٌ:** أُثبِتُ وجودَ نقطتيْنِ على منحنى الاقترانِ $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 5x + 4$، تكونُ عندَهُما مشتقةُ الاقترانِ تساوي 4، ثمَّ أَجِدُ إحداثيَّيْ هاتيْنِ النقطتيْنِ، مُبرِّرًا إجابتي. أنظر ملحق الإجابات.

29) **تحدٍّ:** أَجِدُ قيمَ $a, b$ إذا كانَ ميلُ منحنى الاقترانِ $y = ax^3 + bx^2 + 5$ عندَ النقطةِ $(2, -3)$ هوَ صفرًا.
أنظر ملحق الإجابات.

30) **تحدٍّ:** أُطلِقَتْ قذيفةٌ منْ سطحِ الأرضِ رأسيًّا إلى الأعلى، فكانَ موقعُها بالنسبةِ لسطحِ الأرضِ $s$ بالمترِ بعدَ $t$ ثانيةً منْ إطلاقِها $s(t) = -4.9t^2 + 147t$ . ما سرعةُ القذيفةِ عندَما يكونُ موقعُها 980 m فوقَ سطحِ الأرضِ؟
أنظر ملحق الإجابات.



**تنبيه على سؤال:** أُوجِّه الطلبة إلى فك الأقواس أولًا في الأسئلة (26–24)، ثم اشتقاق الاقترانات الناتجة، ثم أُنبِّههم إلى تعديل الموقع في السؤال 30 ليصبح 980 m.

# الدرس 3

# القيمُ العظمى والقيمُ الصغرى

## Maximum and Minimum Values

**فكرةُ الدرسِ** إيجادُ القيمِ العظمى والقيمِ الصغرى المحليةِ لكثيراتِ الحدودِ.

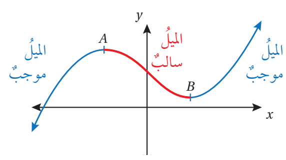
**المصطلحاتُ** نقطةٌ حرجةٌ، قيمةٌ عظمى، قيمةٌ صغرى.

**مسألةُ اليومِ** تُمثِّلُ المعادلةُ $s = -16t^2 + 75t + 2.5$ الموقعَ (بالقدمِ) الذي تصله كرةٌ بعدَ ركلِها رأسيًّا لأعلى، حيثُ $t$ الزمنُ بالثانيةِ. ما أعلى موقعٍ تصلُهُ الكرةُ؟

**لغةُ الرياضياتِ**

يشيرُ مصطلحُ (النقطةُ الحرجةُ) إلى النقطةِ $(x, y)$، ويشيرُ مصطلحُ (القيمةُ الحرجةُ) إلى الإحداثيِّ $x$ للنقطةِ الحرجةِ.

تُسمّى النقطةُ التي يكونُ عندها ميلُ منحنى كثيرِ الحدودِ صفرًا **النقطةَ الحرجةَ** (critical point). في الشكلِ المجاورِ، $A$ وَ $B$ نقطتانِ حرجتانِ؛ لأنَّ ميلَ المنحنى عندَ كلٍّ منهُما صفرٌ.




تُسمّى القيمةُ $d$ في النقطةِ $A(c, d)$ التي إشارةُ ميلِ المنحنى عنْ يسارِها موجبةٌ، وعنْ يمينِها سالبةٌ، **القيمةَ العظمى المحليةَ** (local maximum)؛ لأنَّها أكبرُ منَ القيمِ المجاورةِ لها. وتُسمّى القيمةُ $h$ في النقطةِ $B(e, h)$ التي إشارةُ ميلِ المنحنى عنْ يسارِها سالبةٌ، وعنْ يمينِها موجبةٌ، **القيمةَ الصغرى المحليةَ** (local minimum)؛ لأنَّها أصغرُ منَ القيمِ المجاورةِ لها.

**أتعلَّمُ**

يمكنُ استعمالُ برمجيةِ جيوجبرا لإيجادِ القيمِ العظمى والقيمِ الصغرى، وذلكَ باختيارِ Extremum منْ شريطِ الأدواتِ، ثمَّ نقرِ المنحنى، فتظهرُ إحداثياتُ نقاطِ القيمِ القصوى على يسارِ الشاشةِ.

**مثال 1**

**أستعملُ المشتقةَ لإيجادِ القيمِ العظمى المحليّةِ والقيمِ الصغرى المحليّةِ للاقترانِ $f(x) = x^3 - 12x + 4$ (إنْ وُجِدَتْ).**

**الخطوةُ 1:** أجدُ القيمَ الحرجةَ؛ أيْ قيمَ $x$ التي ميلُ المنحنى عندها صفرٌ.

$f'(x) = 3x^2 - 12$ مشتقةُ الاقترانِ

$3x^2 - 12 = 0$ بمساواةِ المشتقةِ بالصفرِ

$3x^2 = 12$ بجمعِ 12 للطرفيْنِ

$x^2 = 4$ بقسمةِ الطرفيْنِ على 3

$x = \pm 2$ بأخذِ الجذرِ التربيعيِّ للطرفيْنِ

إذنْ، توجدُ نقطتانِ حرجتانِ لمنحنى الاقترانِ عندما $x = -2$ وَ $x = 2$؛ لأنَّ مشتقةَ الاقترانِ تساوي صفرًا عندَ هاتيْنِ النقطتيْنِ.

70

# الدرس 3

## نتاجات الدرس

- إيجاد القيم العظمى والقيم الصغرى لكثيرات الحدود.
- حل مسائل حياتية عن القيم العظمى والقيم الصغرى لكثيرات الحدود.

## التعلُّم القبلي:

- تعرُّف القطع المكافئ، وإيجاد رأس القطع المكافئ.
- إيجاد مشتقة كثيرات الحدود.
- إيجاد الميل باستعمال المشتقة.

## 1 التهيئة

- أكتب على اللوح أيَّ اقتران تربيعي، مثل: $f(x) = x^2 - 2x + 1$
- أسأل الطلبة عن أقل قيمة ممكنة لـ $f(x)$ قد تنتج عند التعويض في الاقتران.
- أسأل الطلبة عن إحداثيات رأس القطع المكافئ.
- أرسم على اللوح التمثيل البياني للاقتران التربيعي، ثم أسألهم:
  - » ما أقل قيمة للاقتران؟
- أطرح على الطلبة السؤال الآتي:
  - » هل توجد طريقة جبرية لمعرفة أقل قيمة وأكبرها لـ $f(x)$؟

## ملاحظات المُعلِّم/ المُعلِّمة

## 2 الاستكشاف

- أُوجِّه الطلبة إلى قراءة المسألة في بند (**مسألة اليوم**)، ثم أسألهم:
  - » ما شكل المسار الذي تسلكه الكرة؟ قطع مكافئ.
  - » ماذا يحدث لسرعة الكرة بعد ركلها؟ تتناقص سرعة الكرة حتى تصل إلى الصفر، ثم تهبط إلى الأرض.
  - » كيف يمكن معرفة أعلى موقع تصله الكرة هندسيًّا؟ برسم منحنى الموقع-الزمن، وملاحظة أعلى موقع من الرسم.
  - » هل توجد طريقة جبرية لمعرفة أعلى موقع تصله الكرة؟ نعم.
  - » كيف يمكن الاستفادة من درس الاشتقاق في معرفة أعلى موقع؟ عن طريق إيجاد سرعة الكرة بالاشتقاق، ثم جعل السرعة صفرًا لإيجاد الزمن وتعويضه بمعادلة المسافة.
- أستمع لإجابات الطلبة من دون تقديم تغذية راجعة لهم، ثم أسألهم:
  - » مَنْ يُؤيِّد الإجابة؟
  - » مَنْ لديه إجابة أُخرى؟
  - » أذكرها.

وذلك لتعزيز مهارات التواصل واحترام الرأي والرأي الآخر لديهم. بعد ذلك أُوضِّح لهم أنَّهم سيتعرَّفون في هذا الدرس ما يُمكِّنهم من الإجابة عن هذه المسألة ومسائل مشابهة، ثم أكتب العنوان على اللوح.

### تعزيز اللغة ودعمها:

أُكرِّر المصطلحات الرياضية المستخدمة في الدرس باللغتين العربية والإنجليزية، وأُحفِّز الطلبة على استعمالها، مثل: المشتقة (derivative)، والميل (slope)، والنقطة الحرجة (critical point)، والقيمة الصغرى (minimum)، والقيمة العظمى (maximum).

## 3 التدريس

- أُوظِّف الشرح الوارد قبل المثال الأول من كتاب الطالب في توضيح معنى النقاط الحرجة، وكيفية إيجاد القيم العظمى والقيم الصغرى.

### مثال 1

- أستعمل المشتقة لإيجاد النقطتين اللتين يساوي عندهما الميل صفرًا، مُبيِّنًا للطلبة أنَّهما نقطتان حرجتان.
- أختبر إشارة الميل (المشتقة) حول كل نقطة، ثم أُصنِّفها إلى عظمى وصغرى باستعمال جدول الإشارات.
- أستعمل التمثيل البياني لتصنيف النقاط الحرجة إلى عظمى وصغرى، بوصف ذلك طريقةً بديلةً عن الإشارات.

**إرشادٌ**

إذا لمْ تتغيّرْ إشارةُ المشتقّةِ منْ مُوجبةٍ إلى سالبةٍ أوْ العكسِ حولَ النقطةِ الحرجةِ؛ فلا يكونُ للاقترانِ قيمةٌ عُظمى ولا صُغرى عندَ تلكَ النقطةِ.

**أُفكّرُ**

لماذا لا توجدُ قيمٌ عظمى وقيمٌ صغرى للاقترانِ الثابتِ؟
لماذا لا توجدُ قيمٌ عظمى وقيمٌ صغرى للاقترانِ الخطّيِّ الذي مجالُهُ مجموعةُ الأعدادِ الحقيقيةِ؟

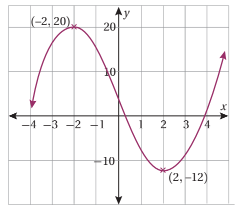
**الخطوةُ 2:** لتحديدِ أيُّ النقاطِ الحرجةِ يوجدُ عندها قيمةٌ عظمى أوْ قيمةٌ صغرى للاقترانِ، أختبرُ إشارةَ ميلِ المنحنى حولَ كلٍّ منْهُما، وذلكَ بتعويضِ بعضِ القيمِ القريبةِ منْها.

| $x$ | $1.9$ | $2$ | $2.1$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-1.17$ | $0$ | $1.23$ |
| إشارةُ الميلِ | سالبةٌ | | موجبةٌ |

| $x$ | $-2.1$ | $-2$ | $-1.9$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $1.23$ | $0$ | $-1.17$ |
| إشارةُ الميلِ | موجبةٌ | | سالبةٌ |

تتغيّرُ إشارةُ ميلِ المنحنى حولَ $x = -2$ منْ موجبةٍ إلى سالبةٍ؛ لذا توجدُ قيمةٌ محليّةٌ عظمى عندما $x = -2$، هيَ $f(-2) = 20$، وتتغيّرُ إشارةُ ميلِ المنحنى حولَ $x = 2$ منْ سالبةٍ إلى موجبةٍ؛ لذا توجدُ قيمةٌ محليّةٌ صغرى عندما $x = 2$، هيَ $f(2) = -12$.

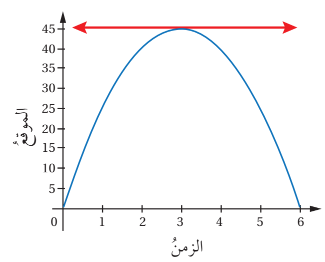
**طريقةٌ بديلةٌ:** يُمكِنُ أيضًا تحديدُ إذا كانَ يوجدُ عندَ النقطةِ الحرجةِ قيمةٌ عظمى أوْ قيمةٌ صغرى للاقترانِ بتمثيلِ منحنى الاقترانِ بيانيًّا. فعندَ تمثيلِ منحنى الاقترانِ $f(x)$ بيانيًّا في الشكلِ المجاورِ، فإنَّ النقطةَ $(-2, 20)$ تبدو أعلى منَ النقاطِ المجاورةِ لها على المنحنى، وبذلكَ تساوي القيمةُ العظمى 20، وتبدو النقطةُ $(2, -12)$ أخفضَ منَ النقاطِ المجاورةِ لها ، وبذلكَ تساوي القيمةُ الصغرى $-12$




**أتحقق من فهمي** أنظر الهامش.

**أَجِدُ القيمَ العظمى والقيمَ الصغرى المحليّةَ للاقترانِ $g(x) = 2x^3 - 6x - 15$ (إنْ وُجِدَتْ).**

يُمثِّلُ الإحداثيُّ $y$ للنقطةِ التي يتغيَّرُ عندها اتجاهُ حركةِ الجسمِ منَ الصعودِ إلى الهبوطِ قيمةً عظمى لمنحنى الموقعِ – الزمنِ؛ لأنَّ مشتقةَ المنحنى عندَ تلكَ النقطةِ تساوي صفرًا (المماسُّ أفقيٌّ)؛ لذا يُمكِنُ استعمالُ المشتقةِ لتحديدِ النقطةِ التي يبلغُ عندها الجسمُ أعلى موقعٍ.






## أخطاء مفاهيمية:

- قد يخلط الطلبة من ذوي المستوى دون المتوسط بين مفهوم النقطة الحرجة والقيمة العظمى والقيمة الصغرى؛ لذا أُبيِّن لهم الفرق بينها، مُذكِّرًا إيّاهم أنَّ كل نقاط القيم القصوى هي نقاط حرجة، وأنَّ كل نقطة حرجة ليست نقطة قيمة قصوى؛ إذ يجب أنْ تتغيَّر إشارة المشتقة (الميل) حول النقطة الحرجة لتكون نقطة قيمة قصوى.
- قد يُخطِئ بعض الطلبة في اختبار الإشارة حول النقطة الحرجة عند تصنيفها إلى عظمى وصغرى بالتعويض في الاقتران؛ لذا أُصحِّح لهم ذلك، مُبيِّنًا أنَّه يجب التعويض في المشتقة التي تُمثِّل الميل.

**إجابة سؤال بند (أتحقق من فهمي 1):**

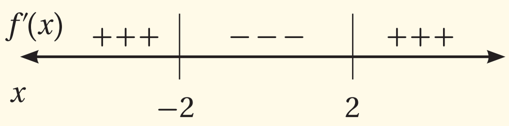
له قيمة عظمى عند $x = -1$ هي $f(-1) = -11$.

وله قيمة صغرى عند $x = 1$ هي $f(1) = -19$.

## تنويع التعليم:

يمكن اختبار إشارة المشتقة حول النقاط الحرجة في المثال الأول باستعمال خط الأعداد وحساب المشتقة عند عدد واحد في كل قسم من الأقسام التي قُسِّم إليها خط الأعداد لتحديد إشارتها:

$$f'(-3) = 3(-3)^2 - 12 = 27 - 12 = 15,$$
$$f'(0) = 3(0)^2 - 12 = 0 - 12 = -12,$$
$$f'(3) = 3(3)^2 - 12 = 27 - 12 = 15$$




## تنبيه:

- في هذا الدرس، يتعيَّن على الطلبة معرفة القيم العظمى والقيم الصغرى من دون تصنيفها إلى محلية ومطلقة؛ فلا أذكر لهم ذلك.
- لا أذكر للطلبة النقطة التي لا تكون عندها مشتقة الاقتران موجودة بوصفها نقطةً حرجةً؛ لأنَّ المطلوب منهم فقط في هذه المرحلة هو كثير الحدود.

## إرشادات للمُعلِّم / للمُعلِّمة

بعد شرح المثال الأول، أُثبِت للطلبة أنَّه لا توجد قيم عظمى وقيم صغرى للاقتران الثابت والاقتران الخطي، وذلك بحل مثال على كلٍّ منهما على اللوح، مستعينًا برسم التمثيل البياني لكل اقتران.

## التقويم التكويني:

- أُوجِّه الطلبة إلى حل التدريب في بند (**أتحقق من فهمي**) بعد كل مثال (فرديًّا، أو ضمن مجموعات).
- أتجوَّل بين الطلبة مُرشِدًا، ومُساعِدًا، ومُوجِّهًا، وأُقدِّم لهم التغذية الراجعة.
- أختار بعض الإجابات التي تحوي أخطاء مفاهيمية، وأكتبها على اللوح مع الإجابة الصحيحة، ثم أسألهم: أيُّ الحلول صحيح؟ أيُّها غير صحيح؟ أُبرِّر إجابتي.

## مثال إضافي

- أجد القيم العظمى والقيم الصغرى للاقتران: $f(x) = 3x^2 - x$ (إنْ وُجِدت) باستعمال المشتقة.

القيمة الصغرى للاقتران عندما $x = 0$ هي $f(0) = 0$،
والقيمة العظمى له عندما $x = 2$ هي $f(2) = 4$.

## مثال 2: من الحياة

- أوظِّف التمثيل البياني الوارد بعد المثال الأول من كتاب الطالب في توضيح أقصى ارتفاع قد يصل إليه الجسم قبل البدء بشرح المثال الثاني.
- أُناقِش الطلبة في المثال الثاني؛ باشتقاق الاقتران، ومساواة المشتقة بالصفر، وإيجاد النقطة الحرجة، واختبار إشارة المشتقة حولها للتأكُّد أنَّها عظمى، ثم التعويض في الاقتران لإيجاد أقصى ارتفاع تصله الكرة.

## تنويع التعليم:

يمكن شرح المثال الثاني عن طريق رسم التمثيل البياني للاقتران، وإيجاد أكبر قيمة تُمثِّل أقصى ارتفاع تصله الكرة.

## إرشادات للمُعلّم / للمُعلِّمة

أستعمل برمجية جيوجبرا لإيجاد القيم العظمى والقيم الصغرى بنقر أيقونة Extremum، ونقر المنحنى بعد رسم منحنى الاقتران.

### مثال 2: من الحياة

**يُمثِّلُ الاقترانُ $s(t) = 1 + 25t - 5t^2$ موقعَ كرةٍ بالنسبةِ لسطحِ الأرضِ بالمترِ بعدَ $t$ ثانيةً منْ ركلِها رأسيًّا لأعلى:**

**1** أَجِدُ سرعةَ الكرةِ بعدَ 3 ثوانٍ منْ ركلِها.

يُمثِّلُ الاقترانُ المُعطى $s(t)$ موقعَ الكرةِ. ومنَ المعلومِ أنَّ مشتقةَ اقترانِ الموقعِ تساوي اقترانَ السرعةِ. لإيجادِ سرعةِ الكرةِ بعدَ 3 ثوانٍ، أُعوِّضُ $t = 3$ في $s'(t)$:

$s(t) = 1 + 25t - 5t^2$ اقترانُ الموقعِ

$s'(t) = 25 - 10t$ مشتقةُ اقترانِ الموقعِ

$s'(3) = 25 - 10(3)$ بتعويضِ $t = 3$ في $s'(t)$

$= -5$ بالتبسيطِ

إذنْ، سرعةُ الكرةِ بعدَ 3 ثوانٍ هيَ $-5$ m/ s

**أتعلَّم**

سرعةُ الكرةِ هيَ $5$ m/s، والإشارةُ السالبةُ تدلُّ على أنَّ الكرةَ غيَّرَتِ اتجاهَ حركتِها، وأخذَتْ تهبطُ نحوَ الأرضِ.

**2** أَجِدُ أقصى ارتفاعٍ تصلُهُ الكرةُ.

يُمثِّلُ أقصى ارتفاعٍ تصلُ إليْهِ الكرةُ قيمةً عظمى لاقترانِ الموقعِ $s(t)$.

لإيجادِ القيمةِ العظمى، أُحدِّدُ القيمَ التي تُحقِّقُ المعادلةَ $s'(t) = 0$:

$s'(t) = 25 - 10t$ مشتقةُ اقترانِ الموقعِ

$25 - 10t = 0$ بمساواةِ المشتقةِ بالصفرِ

$25 = 10t$ بجمعِ $10t$ للطرفيْنِ

$t = 2.5$ بقسمةِ الطرفيْنِ على 10

تتغيَّرُ إشارةُ ميلِ المنحنى منْ موجبةٍ إلى سالبةٍ؛ لذا توجدُ قيمةٌ عظمى عندما $t = 2.5$

| $t$ | 2.5 |
|---|---|
| إشارةُ الميلِ | + + + 0 − − − |

**أتعلَّم**

بما أنَّ مشتقةَ اقترانِ الموقعِ هيَ اقترانُ السرعةِ، فإنَّ القيمَ التي تساوي عندها مشتقةُ اقترانِ الموقعِ صفرًا هيَ القيمُ التي تنعدمُ عندها السرعةُ.

إذنْ، تصلُ الكرةُ أقصى ارتفاعٍ عندما $t = 2.5$ s، وقيمتُهُ هيَ $s(2.5)$:

$s(2.5) = 1 + 25(2.5) - 5(2.5)^2$ بتعويضِ $t = 2.5$ في $s(t)$

$= 32.25$ بالتبسيطِ

إذنْ، أقصى ارتفاعٍ تصلُهُ الكرةُ هوَ 32.25 m

**أتحقق من فهمي**

**يُمثِّلُ الاقترانُ $s(t) = 20t - 5t^2$ موقعَ حجرٍ بالنسبةِ إلى سطحِ الأرضِ بالمترِ بعدَ $t$ ثانيةً منْ قذفِهِ رأسيًّا لأعلى:** أنظر الهامش.

a) أَجِدُ سرعةَ الحجرِ بعدَ ثانيتيْنِ منْ قذفِهِ.

b) أَجِدُ أقصى ارتفاعٍ يصلُهُ الحجرُ.



### إجابة سؤال بند (أتحقق من فهمي 2):

a) 0 m/s

b) 20 m

## مثال إضافي

يُمثِّل الاقتران: $s(t) = 6 + 4t - t^2$ موقع كرة بالنسبة إلى سطح الأرض بالمتر بعد $t$ ثانية من ركلها:

**1** أجد سرعة الكرة بعد ثانية واحدة من ركلها.

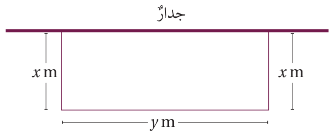
2 m/s

**2** أجد أعلى موقع تصله الكرة.

10 m

إذا مثَّل الاقترانُ $f(x)$ مِساحةَ منطقةٍ ما، فإنَّ القيمةَ الكبرى للمِساحةِ تساوي القيمةَ العظمى للاقترانِ، والقيمةَ الصغرى للمِساحةِ تساوي القيمةَ الصغرى للاقترانِ.

### مثال 3: من الحياة




**جدارٌ: لدى مُزارِعٍ 32 m منَ السياجِ، أرادَ أنْ يُسيِّجَ بِهِ حظيرةً مستطيلةً، طولُها $y$ مترًا، وعرضُها $x$ مترًا، بجانبِ جدارٍ يكونُ أحدَ أضلاعِ هذهِ الحظيرةِ:**

**1 أُبيِّنُ أنَّ الاقترانَ $A(x) = x(32-2x)$ يُمثِّلُ مِساحةَ الحظيرةِ.**

طولُ السياجِ 32 m؛ لذا، فإنَّ $x + y + x = 32$

إذنْ، طولُ الحظيرةِ $y = 32-2x$، ومِساحتُها $x(32-2x)$ مترًا مُربَّعًا.

**2 أَجِدُ $A'(x)$.**

$A(x) = x(32-2x)$ اقترانُ المِساحةِ

$A(x) = 32x-2x^2$ بتوزيعِ الضربِ على الطرحِ

$A'(x) = 32-4x$ مشتقةُ اقترانِ المِساحةِ

**3 أستعملُ المشتقةَ لإيجادِ قيمةِ $x$ التي تجعلُ مِساحةَ الحظيرةِ أكبرَ ما يُمكِنُ.**

لإيجادِ قيمةِ $x$، أحُلُّ المعادلةَ $A'(x) = 0$:

$32 - 4x = 0$ بمساواةِ المشتقةِ بالصفرِ

$32 = 4x$ بجمعِ $4x$ للطرفيْنِ

$x = 8$ بقسمةِ الطرفيْنِ على 4

أَجِدُ أكبرَ مِساحةٍ ممكنةٍ للحظيرةِ.

أُعوِّضُ قيمةَ $x = 8$ بالاقترانِ الذي يُمثِّلُ مِساحةَ الحظيرةِ.

$A(8) = 8(32-2(8))$ بتعويضِ $x = 8$ في $A(x)$

$= 128$ بالتبسيطِ

إذنْ، أكبرُ مِساحةٍ للحظيرةِ $128\ m^2$، وهيَ تنتجُ عندما يكونُ عرضُ الحظيرةِ 8 m، وطولُها 16 m

**أتذكَّرُ**

تُسمّى قيمُ $x$ التي تُحقِّقُ المعادلةَ $f'(x) = 0$ قيمًا حرجةً لمنحنى الاقترانِ $f(x)$.

**تنبيهٌ**

تتغيَّرُ إشارةُ ميلِ المنحنى منْ موجبةٍ إلى سالبةٍ منْ يسارِ إلى يمينِ $x = 8$؛ لذا توجدُ قيمةٌ عظمى عندما $x = 8$

| $x$ | 8 |
|---|---|
| إشارةُ الميلِ | + + 0 − − |



### مثال 3: من الحياة

- أُخبِر الطلبةَ أنَّه توجد عِدَّة تطبيقات للقيم العظمى والقيم الصغرى، غير السرعة والتسارع، مثل إيجاد أكبر مساحة.
- أُبيِّن للطلبة أنَّ الاقتران المعطى يُمثِّل المساحة عن طريق إيجاد العلاقة بين الأبعاد والمحيط.
- أُوضِّح للطلبة أنَّ المساحة تكون أكبر ما يمكن عند نقطة القيمة العظمى لاقتران المساحة.
- أُؤكِّد للطلبة أنَّه يجب اختبار إشارة المشتقة حول النقطة الحرجة؛ لتصنيفها إلى عظمى وصغرى.

### الإثراء:

أُوجِّه الطلبة إلى البحث في شبكة الإنترنت عن أمثلة حياتية مشابهة للمثال الثالث.

### مثال إضافي

لدى مُزارِع 36 m من السياج، أراد أنْ يُسيِّج به حظيرة مستطيلة، طولها $y$ مترًا، وعرضها $x$ مترًا:

1 أُبيِّن أنَّ الاقتران: $A(x) = x(18-x)$ يُمثِّل مساحة الحظيرة.

$2x + 2y = 36 \Rightarrow y = 18-x$

$A(x) = x(18-x)$

2 جد $A'(x)$

$A(x) = 18x - x^2$

$A'(x) = 18 - 2x$

3 أستعمل المشتقة لإيجاد قيمة $x$ التي تجعل مساحة الحظيرة أكبر ما يمكن.

$x = 9\ m$

## 4 التدريب

- أُوجِّه الطلبة إلى قراءة الأسـئلة في بند (**أتدرب وأحل المسائل**)، ثم أطلب إليهم حلها.
- أتجوَّل بين الطلبة مُرشِدًا، ومُساعِدًا، ومُوجِّهًا، وأُقدِّم لهم التغذية الراجعة.
- إذا واجـه بعض الطلبـة صعوبة في حل أيِّ مسـألة، فأختار طالبًا تمكَّن من حل المسألة، وأطلب إليه كتابة حله على اللوح.

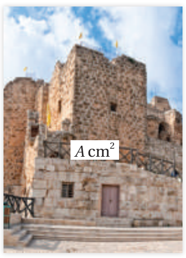
## الواجب المنزلي:

- أطلب إلى الطلبة أنْ يحلوا في البيت جميع المسـائل الواردة في الصفحة السابعة عشرة من كتاب التمارين، مُحدِّدًا لهم المسـائل التي يمكنهم حلها في نهاية كل حصة بحسب ما يُقدَّم من أمثلة الدرس وأفكاره.
- يمكن أيضًا إضافة المسائل التي لم يحلها الطلبة داخل غرفة الصف إلى الواجب البيتي.
- في اليوم التالي، أَطَّلِع على حلول الطلبة، وأُناقِشـهم في أيِّ صعوبات واجهوها في أثناء الحل.

---

**أتحقق من فهمي**

يُبيِّنُ الشكلُ المجاورُ صورةً مستطيلةَ الشكلِ، محيطُها 72 cm، ومساحتُها $A\ \text{cm}^2$: أنظر الهامش.




a) أُبيِّنُ أنَّ الاقترانَ $A(x) = 36x - x^2$ يُمثِّلُ مساحةَ الصورة.

b) أجِدُ $A'(x)$.

c) أستعملُ المشتقةَ لإيجادِ قيمةِ $x$ التي تجعلُ مساحةَ الصورةِ أكبرَ ما يُمكِنُ.

d) أجِدُ أكبرَ مساحةٍ ممكنةٍ للصورة.

بنى عزُّ الدينِ أسامةُ قلعةَ عجلونَ (أحدُ قادةِ صلاحِ الدينِ الأيوبيِّ)، وذلكَ عامَ 1184م/580هـ. تمتازُ هذهِ القلعةُ بمتانةِ بنائِها، وموقعِها الاستراتيجيِّ المُطِلِّ.

**أتدرب وأحل المسائل**

(1−10) أنظر ملحق الإجابات.

أستعملُ المشتقةَ لإيجادِ القيمِ العظمى والقيمِ المحليّةِ الصغرى لكلٍّ منَ الاقتراناتِ الآتيةِ (إنْ وُجِدَتْ):

1) $f(x) = x^2 - 4x + 3$

2) $f(x) = x^2 + 6x - 3$

3) $f(x) = 1 + 5x - x^2$

4) $f(x) = x^3 + 1.5x^2 - 18x$

5) $f(x) = 18x^2 - x^4$

6) $f(x) = 2x^3 - 6x + 4$

7) $f(x) = x^3 - 12x - 4$

8) $f(x) = 2x^3 + 7$

9) $f(x) = x^3 - 2x + 4$

10) $f(x) = x^3 + x^2 - 8x + 54$

يُمثِّلُ الاقترانُ $h(t) = 1.2 + 19.6t - 4.9t^2$ ارتفاعَ سهمٍ عنْ سطحِ الأرضِ بالمترِ بعدَ $t$ ثانيةً منْ إطلاقِهِ:

11) أجِدُ سرعةَ السهمِ بعدَ 3 ثوانٍ. $-9.8$ m/s

12) أستعملُ المشتقةَ لإيجادِ أقصى ارتفاعٍ يصِلُهُ السهمُ. 20.8 m

13) يُمثِّلُ الاقترانُ $A(x) = x(50 - x)$ مساحةَ مستطيلٍ، حيثُ $x$ الطولُ بالمترِ. ما أكبرُ مساحةٍ ممكنةٍ للمستطيلِ؟ $625\ \text{m}^2$

74

---

**إجابة سؤال بند (أتحقق من فهمي 3):**

a) $2x + 2y = 72 \Rightarrow y = 36 - x$

$A(x) = x(36 - x) = 36x - x^2$

b) $A'(x) = 36 - 2x$

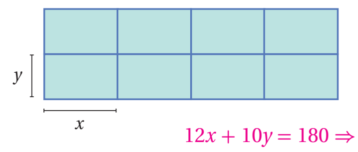
c) 18

d) $324\ \text{cm}^2$

منهاجي
متعة التعليم الهادف

14 للاقترانِ $f(x) = 3x^4 - 10x^3 + 6x^2 + 3$ ثلاثُ نقاطٍ حرجةٍ. أَجِدُ إحداثياتِ هذهِ النقاطِ، مُصنِّفًا إيّاها إلى عظمى، وصغرى محليةٍ. $(0, 3)$: صغرى، $(0.5, 3.4375)$: عظمى، $(2, -5)$: صغرى.

15 أَجِدُ قيمةَ الثابتِ $k$ إذا كانَ للاقترانِ $f(x) = x^2 + \frac{1}{k}x$ قيمةٌ حرجةٌ عندما $x = 3$. $k = -\frac{1}{6}$




**لدى مُزارِعٍ 180 m منَ الشِّباكِ، أرادَ أنْ يصنعَ منْها حظائرَ لأغنامِهِ، طولُ كلٍّ منْها $x$ مترًا، وعرضُها $y$ مترًا كما في الشكلِ المجاورِ:**

16 أُبيِّنُ أنَّ العلاقةَ بينَ $x$ وَ$y$ هيَ $y = 18 - 1.2x$ $12x + 10y = 180 \Rightarrow y = 18 - 1.2x$

17 أُبيِّنُ أنَّ الاقترانَ $A(x) = 144x - 9.6x^2$ يُمثِّلُ المِساحةَ الكليةَ للحظائرِ.

$$A(x) = 2(18 - 1.2x)(4x) = 144x - 9.6x^2$$

18 أستعملُ المشتقةَ لإيجادِ قيمةِ $x$ التي تجعلُ المِساحةَ الكليةَ للحظائرِ أكبرَ ما يُمكِنُ. $x = 7.5$

19 أَجِدُ أكبرَ مِساحةٍ كليةٍ ممكنةٍ للحظائرِ. $540\ m^2$

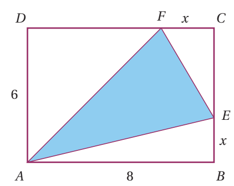
20 **برهانٌ:** أُثبِتُ أنَّ الاقترانَ $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 4x - 5$ ليسَ لهُ قيمٌ حرجةٌ. $f'(x) = 6x^2 + 6x + 4$

لا توجد حلول حقيقية لهذه المعادلة؛ لأنَّ مُميِّزها سالب.

### مهارات التفكير العليا

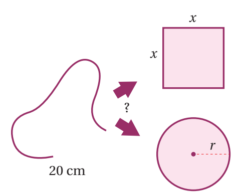
21 **تبريرٌ:** أَجِدُ قيمتَي الثابتيْنِ $a, b$ إذا كانَ للاقترانِ $f(x) = x^2 + ax + b$ قيمةٌ حرجةٌ عندَ النقطةِ $(1, 3)$، ثمَّ أُحدِّدُ نوعَ القيمةِ الحرجةِ، مُبرِّرًا إجابتي. أنظر ملحق الإجابات.

**يُبيِّنُ الشكلُ المجاورُ المثلثَ $AFE$ الذي تقعُ رؤوسُهُ على أضلاعِ المستطيلِ $ABCD$:**




22 اعتمادًا على القياساتِ المعطاةِ في الشكلِ، أُبيِّنُ أنَّ الاقترانَ $H(x) = 24 - 4x + \frac{1}{2}x^2$ يُمثِّلُ مِساحةَ المثلثِ $AFE$. أنظر ملحق الإجابات.

23 أستعملُ المشتقةَ لإيجادِ قيمةِ $x$ التي تجعلُ مِساحةَ المثلثِ $AFE$ أصغرَ ما يُمكِنُ. $x = 4$




24 **تحدٍّ:** سلكٌ طولُهُ 20 cm، يُرادُ قصُّهُ لعملِ مُربَّعٍ ودائرةٍ. أُحدِّدُ موقعَ القصِّ بحيثُ يكونُ مجموعُ مِساحتَي المُربَّعِ والدائرةِ أصغرَ ما يُمكِنُ. أنظر ملحق الإجابات.

75

### مهارات التفكير العليا

- أُشرِك الطلبة كافةً في حل هذه المسائل؛ لتنمية مهارات التفكير العليا لديهم.
- أتذكَّر أنَّه ليس شرطًا أنْ يتمكَّن الطلبة كافةً من حل المسائل جميعها، ولكن يجب عليهم أنْ يحاولوا حلها.
- أطلب إلى الطلبة – ضمن مجموعات- حل المسائل في بند (**مهارات التفكر العليا**)، ثم أطلب إلى أفراد بعضها بيان كيفية توصُّلهم إلى الحل في كل مسألة، وأمنح الآخرين فرصة نقد إجابات زملائهم وتقويمها.
- أُحفِّز الطلبة على تبرير إجاباتهم.

## 5 الإثراء

- أطرح على الطلبة السؤال الآتي:
  - » مجموع عدد مع ثلاثة أمثال عدد آخر أصغر منه يساوي 45. أجد العددين بحيث يكون ناتج ضرب مربع العدد الصغير في العدد الكبير أكبر ما يمكن.
    10,15

### تعليمات المشروع:

- أطلب إلى الطلبة البدء بتنفيذ الخطوات (8-6) من المشروع.
- أُوجِّه الطلبة إلى تنظيم إجراءاتهم وتوثيقها بنسخ صورة (print screen) للشاشة في كل خطوة.
- أُخبِر الطلبة بموعد عرض مشروع الوحدة.

## 6 الختام

- أطرح على الطلبة السؤالين الآتيين:
  - » ما الفرق بين النقطة الحرجة والقيمة العظمى والقيمة الصغرى؟
  - » ما الخطوات الواجب اتباعها لإيجاد القيم العظمى والقيم الصغرى لاقتران؟
- أطلب إلى الطلبة حل السؤال الوارد في بند (**مسألة اليوم**).

## اختبارُ نهايةِ الوحدةِ

أَضعُ دائرةً حولَ رمزِ الإجابةِ الصحيحةِ في ما يأتي:

1. ميلُ منحنى الاقترانِ $f(x) = 3x - 1$ عندَ النقطةِ $x = 5$ هوَ:

   a) 3　　b) $\frac{1}{3}$

   c) $-1$　　d) 0

2. إذا كانَ $f(x) = x(2x + 1)$، فإنَّ $f'(x)$ يساوي:

   a) $x$　　b) $2x + 1$

   c) $2x^2 + x$　　d) $4x + 1$

3. قيمةُ $x$ التي عندَها قيمةٌ عظمى للاقترانِ $f(x) = (x-2)(x-3)^2$ هيَ:

   a) $-\frac{7}{3}$　　b) $-\frac{5}{2}$

   c) $\frac{7}{3}$　　d) $\frac{5}{2}$

4. إذا مثَّلَ الاقترانُ $s(t) = t^2$ موقعَ جسمٍ يتحركُ في مسارٍ مستقيمٍ، حيثُ $s$ موقعُ الجسمِ بالأمتارِ بعدَ $t$ ثانيةً، فإنَّ سرعةَ الجسمِ بوحدةِ m/s عندما $t = 1$ هيَ:

   a) 0　　b) 1

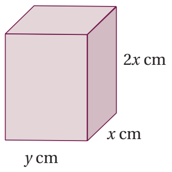
   c) 2　　d) 4

5. إذا كانَ $h(x) = 2x^2 + x$، فأجِدُ $h'(x)$، ثمَّ أُبيِّنُ أنَّ $x(1 + h'(x)) = 2h(x)$. أنظر ملحق الإجابات.

6. إذا وقعَتِ النقطةُ $P(-1, c)$ على منحنى الاقترانِ $f(x) = 5x^2 + 2$، فأجِدُ قيمةَ $c$، ثمَّ أُحدِّدُ إذا كانَ الميلُ موجبًا أوْ سالبًا عندَ النقطةِ $P$. $c = 7$
   الميل سالب.

7. أَجِدُ معادلةَ مماسِّ منحنى الاقترانِ $f(x) = 4x^3 + 2$ عندَ النقطةِ التي إحداثيُّ $x$ لها $-1$
   أنظر ملحق الإجابات.

يُبيِّنُ الشكلُ المجاورُ قالبًا يُستعمَلُ لصنعِ لَبِنِ البناءِ، وتبلغُ مِساحةُ سطحِهِ الكليةُ $600\ \text{cm}^2$:




8. أُبيِّنُ أنَّ الاقترانَ $V(x) = 200x - \frac{4}{3}x^3$ يُمثِّلُ حجمَ القالبِ.
   أنظر ملحق الإجابات.

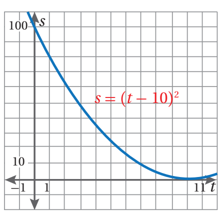
9. أستعملُ المشتقةَ لإيجادِ قيمةِ $x$ التي تجعلُ الحجمَ أكبرَ ما يُمكِنُ. $x = \sqrt{50}$

10. أَجِدُ أكبرَ حجمٍ ممكنٍ للقالبِ. $942.8\ \text{cm}^3$

11. يُمثِّلُ الاقترانُ $s(t) = t^2 + 1$ موقعَ جسمٍ يتحركُ في مسارٍ مستقيمٍ، حيثُ $s$ موقعُ الجسمِ بالأمتارِ بعدَ $t$ ثانيةً. أَجِدُ السرعةَ بعدَ ثانيتيْنِ، ثمَّ أَجِدُ الزمنَ $t$ عندما تبلغُ السرعةُ 6 m/s
    4 m/s　　$t = 3$ s

أطلقَتْ سيّارةٌ سُمَيَّةَ جرسَ إنذارٍ لتعبئةِ الوَقودِ، فتحركت في مسارٍ مستقيمٍ نحو محطةِ الوَقودِ.

يُمثِّلُ المنحنى في الشكلِ المجاورِ العلاقةَ بينَ موقعِ السيارةِ بالأمتارِ $(s)$ بالنسبةِ إلى الزمنِ $(t)$ بالثواني:




12. أَجِدُ سرعةَ السيّارةِ بعدَ ثانيتيْنِ منَ انطلاقِ جرسِ تعبئةِ الوَقودِ. $-16$ m/s

13. أَجِدُ سرعةَ السيّارةِ بعدَ 10 ثوانٍ. 0 m/s

76

### التقويم الختامي:

- أُراجِعِ الطلبة في الأفكار الأساسية لدروس الوحدة.
- أُوزِّع الطلبة إلى مجموعات، ثم أطلب إلى أفراد كل مجموعة حل جزء من الأسئلة، ثم عرض إجاباتهم أمام الزملاء.
- أختار بعض الأسئلة ليحلها الطلبة واجبًا منزليًّا، ثم أُناقِشهم في إجاباتها في اليوم التالي.
- أَلفِت انتباه الطلبة إلى أنَّ الأسئلة (31–35) وردت ضمن الاختبارات الدولية، أو هي مسائل مشابهة لها.

## اختبارُ نهايةِ الوحدةِ

أَجِدُ مشتقةَ كلٍّ منَ الاقتراناتِ الآتيةِ:

14 $f(x) = 2\pi^3$　15 $f(x) = x^8$

16 $f(x) = -3x^4$　17 $f(x) = x$

18 $f(x) = 1-2x$　19 $f(x) = 4-5x^2 + x^3$

(14–19) أنظر ملحق الإجابات.

أستعملُ المشتقةَ لإيجادِ القيمِ العظمى والقيمِ الصغرى لكلٍّ منَ الاقتراناتِ الآتيةِ (إنْ وُجِدَتْ):

20 $f(x) = 17$　21 $f(x) = 5x + 4$

22 $f(x) = x^2-5x + 6$　23 $f(x)=2x^3-4x^2+2x+1$

(20–23) أنظر ملحق الإجابات.

24 تُمثِّلُ العلاقةُ $s(t) = 0.6t^3 - 1.5t - 0.9$ موقعَ جسمٍ يتحركُ في مسارٍ مستقيمٍ، حيثُ $s$ موقعُ الجسمِ بالأمتارِ بعدَ $t$ ثانيةً. ما الزمنُ الذي تساوي عندَهُ السرعةُ 14.7m/s؟
$t = 3$ s

25 أَجِـدُ قيمةَ الثابتِ $k$ إذا كانَ للاقترانِ $f(x) = kx - x^3$ نقطةٌ حرجةٌ عندما $x = -1$
$k = 3$

اعتمادًا على التمثيلِ البيانيِّ الآتي:



26 أُحدِّدُ الفترةَ (الفتراتِ) التي يكونُ عندها ميلُ المنحنى موجبًا. الفترتان: $(-\infty, -2)$، و $(2, \infty)$

27 أُحدِّدُ الفترةَ (الفتراتِ) التي يكونُ عندها ميلُ المنحنى سالبًا. $(-2, 2)$

28 أُحدِّدُ النقطـةَ (النقاطَ) التي يكونُ عندها ميلُ المنحنى صفرًا. النقطتان: $(-2, 35)$، و $(2, 7)$

29 إذا كانَ المستقيمُ في الشكلِ المجاورِ هوَ منحنى الاقترانِ $f(x)$، فأَجِدُ $f'(x)$.



$f'(x) = m$

ميل هذا المستقيم هو: $m = \frac{2-0}{0-6} = \frac{-1}{3}$

### تدريبٌ على الاختباراتِ الدوليةِ

أضعُ دائرةً حولَ رمزِ الإجابةِ الصحيحةِ في ما يأتي:

30 جميعُ قيمِ $x$ التي عندها قيمٌ عظمى أوْ قيمٌ صغرى محليةٌ للاقترانِ $f(x) = 3x^5 - 5x^3 + 15$ هيَ:

a) $-1, 0, 1$　b) $-1, 0$

c) $0, 1$　d) $-1, 1$

31 عددُ النقاطِ الحرجةِ للاقترانِ $f(x) = (x-3)^2$ هوَ:

a) 0　b) 1　c) 2　d) 3

يُمثِّلُ الشكلُ المجاورُ منحنى الاقترانِ $f(x) = x^3-12x + 17$ الذي لهُ قيمةٌ عظمى عندَ النقطةِ $A$، وقيمةٌ صغرى عندَ النقطةِ $C$، ويقطعُ محورَ $y$ عندَ النقطةِ $B$:

32 أَجِدُ $f'(x)$. $f'(x) = 3x^2 - 12$

33 أَجِدُ ميلَ منحنى الاقترانِ $f(x)$ عندَ النقطةِ $B$. $-12$

34 أَجِدُ إحداثيَّيْ كلٍّ منَ النقطتيْنِ $A$ وَ $C$.
$A = (-2, 33)$
$B = (2, 1)$

77

## تدريب على الاختبارات الدولية

يتقدَّم طلبة الصف الرابع والصف الثامن في المدارس الأردنية إلى اختبار (TIMSS) كل أربع سنوات. ويهدف هذا الاختبار إلى قياس مستوى تقدُّم الطلبة في التحصيل الدراسي في مادتي الرياضيات والعلوم. ولهذا الاختبار أهمية في تقييم جودة التعليم في الأردن مقارنةً بالدول الأُخرى التي يتقدَّم طلبتها لهذا الاختبار، والمساعدة على رسم السياسة التربوية على المستوى الوطني بما يخدم تطوير النظام التربوي، والارتقاء بنوعية مخرجاته.

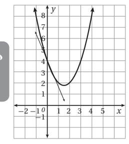
يتقدَّم أيضًا طلبة الصف العاشر في الأردن لاختبار البرنامج الدولي لتقييم أداء الطلبة PISA)

The Program for International Students Assessment: في مجالات القراءة، والرياضيات، والعلوم. وفي ما يخصُّ الرياضيات، فإنَّ المعرفة الرياضية – وَفق هذا البرنامج– يُعبَّر عنها بمدى قدرة الفرد على صياغة الرياضيات، وتوظيفها، وتفسيرها في أوضاع مختلفة؛ إذ تتضمَّن القدرة على التفكير الرياضي، واستعمال المفاهيم والإجراءات والحقائق والأدوات لوصف الظواهر، والتنبُّؤ بها، وتسعى لمساعدة صانعي القرارات وراسمي السياسات التربوية في الدول المشاركة على تحديد معايير حقيقية وواقعية لأداء نظمها التربوية، وتُعِينهم على تقييم النجاحات أو الإخفاقات، علمًا بأنَّ الأردن يشارك في دورات هذه الدراسات والبرامج بانتظام منذ مطلع تسعينيات القرن العشرين الميلادي؛ لذا يتعيَّن عليك عزيزي المُعلِّم/ عزيزتي المُعلِّمة تحفيز الطلبة على الاهتمام بحل هذه الأسئلة، والمشاركة في الدراسات وبرامج التقييم الدولية بكل جدية، وتضمين الاختبارات المدرسية مثل نوعية هذه الأسئلة.

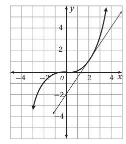
# كتاب التمارين

## الدرسُ 1
## تقديرُ ميلِ المنحنى
## Estimating Slope

الوحدةُ 6: المشتقاتُ



1 يُمثِّلُ المستقيمُ في الشكلِ المجاورِ مماسًّا لمنحنى الاقترانِ $y = x^2 - 3x + 4$ عندَ النقطةِ $A(0, 4)$. أُقدِّرُ ميلَ منحنى الاقترانِ عندَ النقطةِ $A$. $-2.6$، أو إجابة قريبة منها.



2 يُمثِّلُ المستقيمُ في الشكلِ المجاورِ مماسًّا لمنحنى الاقترانِ $y = \frac{1}{8}x^3$ عندَ النقطةِ $A(2, 1)$. أُقدِّرُ ميلَ منحنى الاقترانِ عندَ النقطةِ $A$.
$m = \frac{3}{2}$

3 أُقدِّرُ ميلَ منحنى الاقترانِ $y = x^3 - 3x + 1$ عندَ النقطةِ $(2, 3)$.
أنظر رسوم الطلبة، وأقبل الإجابات القريبة من 9

4 أُقدِّرُ ميلَ منحنى الاقترانِ $y = 4x - 3x^2$ عندَ النقطةِ $(2, -4)$.
أنظر رسوم الطلبة، وأقبل الإجابات القريبة من $-8$

5 يُمثِّلُ الاقترانُ $s(t) = 40t - 16t^2$ موقعَ جسمٍ يتحركُ في مسارٍ مستقيمٍ، حيثُ $s$ موقعُ الجسمِ بالمترِ، وَ $t$ الزمنُ بالثواني. أُقدِّرُ سرعةَ الجسمِ اللحظيةَ بعدَ ثانيتيْنِ. أنظر رسوم الطلبة، وأقبل الإجابات القريبة من $-24$

**أرسمُ منحنى الاقترانِ $f(x)$ في الفترةِ $-2 \le x \le 2$ باستعمالِ جدولِ القيمِ المجاورِ:**

| $x$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $-7$ | $-2$ | $1$ | $2$ | $1$ |

6 أرسمُ مماسًّا لمنحنى الاقترانِ عندَ النقطةِ $(2, 1)$. أنظر ملحق الإجابات.

7 أُقدِّرُ ميلَ منحنى الاقترانِ عندَ النقطةِ $(2, 1)$. $-2$ (أقبل إجابات الطلبة القريبة من ذلك).

8 ما إحداثياتُ النقطةِ التي يكونُ ميلُ المنحنى عندَها صفرًا؟ $(1, 2)$

**أرسمُ منحنى الاقترانِ $f(x)$ في الفترةِ $-1 \le x \le 3$ باستعمالِ جدولِ القيمِ المجاورِ:**

| $x$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ | $3$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $4$ | $1$ | $0$ | $1$ | $4$ |

9 أرسمُ مماسًّا لمنحنى الاقترانِ عندَ النقطةِ $(2, 1)$. أنظر ملحق الإجابات.

10 أُقدِّرُ ميلَ منحنى الاقترانِ عندَ النقطةِ $(2, 1)$. 2 (أقبل إجابات الطلبة القريبة من ذلك).

11 ما إحداثياتُ النقطةِ التي يكونُ ميلُ المنحنى عندَها صفرًا؟ $(1, 0)$

15

## الدرسُ 2
## الاشتقاقُ
## Differentiation

الوحدةُ 6: المشتقاتُ

أَجِدُ مشتقةَ كلِّ اقترانٍ ممّا يأتي:

1 $f(x) = -\frac{7}{3}$ $f'(x) = 0$

2 $f(x) = \frac{8}{5}$ $f'(x) = 0$

3 $f(x) = -6x$ $f'(x) = -6$

4 $f(x) = 3.2x$ $f'(x) = 3.2$

5 $f(x) = 3x^{41}$ $f'(x) = 123x^{40}$

6 $f(x) = -x^{64}$ $f'(x) = -64x^{63}$

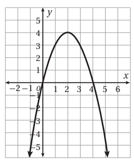
7 $f(x) = x^3 - 4x^2 + 3$ $f'(x) = 3x^2 - 8x$

8 $f(x) = 7x^3 + 6x^2 - x$ $f'(x) = 21x^2 + 12x - 1$

9 $f(x) = (x + 4)(x - 2)$ $f'(x) = 2x + 2$

10 $f(x) = (x - 5)^2$ $f'(x) = 2x - 10$

**أستعملُ التمثيلَ البيانيَّ لمنحنى الاقترانِ $f(x) = 4x - x^2$ في الشكلِ المجاورِ للإجابةِ عنِ الأسئلةِ الآتيةِ:**



11 أَجِدُ $f'(x)$. $f'(x) = 4 - 2x$

12 أَجِدُ ميلَ منحنى الاقترانِ عندَ نقطتَيْ تقاطعِهِ معَ محورِ $x$
الميل عند $(0, 0)$ هو: 4، وعند $(4, 0)$ هو: $-4$

13 أُحدِّدُ على المنحنى النقطةَ التي يكونُ عندَها الميلُ 1 $(1.5, 3.75)$

14 أُحدِّدُ على المنحنى النقطةَ التي يكونُ عندَها الميلُ $-2$ $(3, 3)$

**أَجِدُ قيمةَ $f'(-1)$ في كلٍّ ممّا يأتي:**

15 $f(x) = x^2 - 3x + 1$ $f'(-1) = -5$

16 $f(x) = x^3 - x^2 - 2$ $f'(-1) = 5$

17 أَجِدُ النقطةَ التي يكونُ عندَها ميلُ منحنى $f(x) = x^2 - 5x + 6$ يساوي $-9$ $(-2, 20)$

**إذا كانَ $f(x) = x^2 + 5x + 7$، فأستعملُ المشتقةَ لإيجادِ كلٍّ ممّا يأتي:**

18 ميلُ المنحنى $f(x)$ عندَما $x = 2$ 9

19 قيمةُ $x$ التي يكونُ عندَها ميلُ منحنى $f(x)$ يساوي 0 $-2.5$

20 تُمثِّلُ العلاقةُ $s(t) = 2t^3 - 5t^2 + 3t + 4$ الموقعَ (بالمترِ) لجسمٍ يتحركُ في مسارٍ مستقيمٍ، حيثُ $t$ الزمنُ بالثواني.
أَجِدُ سرعةَ الجسمِ عندَما $t = 2$ 7 m/s

21 إذا كانَ $f(x) = ax^n + b$، حيثُ $a$، وَ $b$ عددانِ حقيقيانِ، وَ $n$ عددٌ صحيحٌ غيرُ سالبٍ، فأَجِدُ $f'(x)$ $f'(x) = nax^{n-1}$

16

## الدرسُ 3
## القيمُ العظمى والقيمُ الصغرى
## Maximum and Minimum Values

الوحدةُ 6: المشتقاتُ

أَجِدُ القيمَ العظمى والقيمَ الصغرى لكلٍّ منَ الاقتراناتِ الآتيةِ (إنْ وُجِدَتْ): (1–10) أنظر ملحق الإجابات.

1 $f(x) = 2$

2 $f(x) = -3$

3 $f(x) = 2x - 1$

4 $f(x) = 5x + 3$

5 $f(x) = x^2 + 2x + 1$

6 $f(x) = x^2 - 8x + 7$

7 $f(x) = x^3 - 6x^2 + 5$

8 $f(x) = x^3 + 6x^2 - 15x$

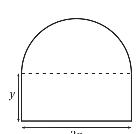
9 $f(x) = x^3(4 - x)$

10 $f(x) = (x + 1)(x - 2)$

11 أَجِدُ قيمةَ الثابتِ $k$، علمًا بأنَّ للاقترانِ $f(x) = kx^2 + x$ قيمةً حرجةً عندَما $x = 1$ $k = -0.5$

12 أَجِدُ العددَيْنِ الموجبَيْنِ اللذيْنِ مجموعُهُما 150، وحاصلُ ضربِهِما أكبرُ ما يُمكِنُ. $x = 75, y = 75$

13 يُمثِّلُ الاقترانُ $A(x) = x(9 - x)$ مِساحةَ غرفةٍ مستطيلةٍ في مُخطَّطٍ أَعدَّتْهُ المهندسةُ شفاءُ، حيثُ $x$ الطولُ بالمترِ.
أَجِدُ أكبرَ مِساحةٍ ممكنةٍ للغرفةِ. $20.25\ m^2$




**يُمثِّلُ الشكلُ المجاورُ حديقةً محيطُها 80 m، وهيَ على شكلِ مستطيلٍ طولُهُ $2x$ مترًا، وعرضُهُ $y$ مترًا، وبجانبِهِ نصفُ دائرةٍ:**

أنظر ملحق الإجابات.

14 أُبيِّنُ أنَّ الاقترانَ $A(x) = 80x - (2 + \frac{\pi}{2})x^2$ يُمثِّلُ مِساحةَ الحديقةِ.

15 أستعملُ المشتقةَ لإيجادِ قيمةِ $x$ التي تجعلُ مِساحةَ الحديقةِ أكبرَ ما يُمكِنُ. $x = 11.202$

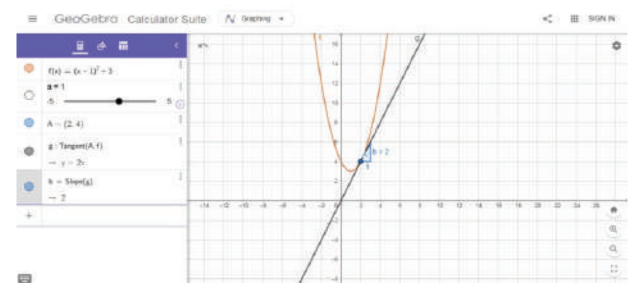
16 أَجِدُ أكبرَ مِساحةٍ ممكنةٍ للحديقةِ. $448.08\ m^2$

17 أَجِدُ قيمتَيِ الثابتيْنِ $a, b$ إذا كانَ للاقترانِ $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + ax + b$ قيمةٌ حرجةٌ عندَ النقطةِ $(-4, -3)$، ثمَّ أُحدِّدُ نوعَ القيمةِ الحرجةِ، مُبرِّرًا إجابتي. أنظر ملحق الإجابات.

17

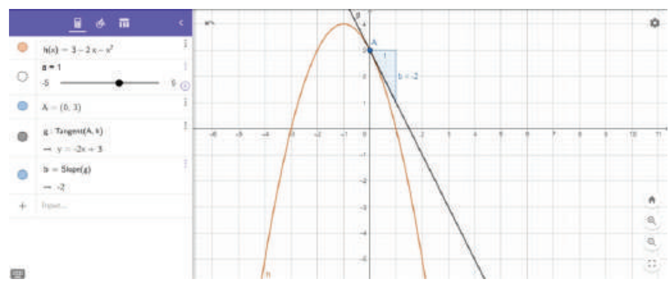
## معمل برمجية جيوجبرا:

(1



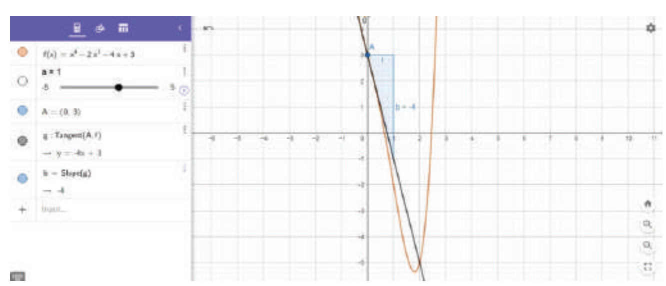
يكون الميل سالبًا لكل $x < 1$، وصفرًا عندما $x = 1$، وموجبًا لكل $x > 1$

(2



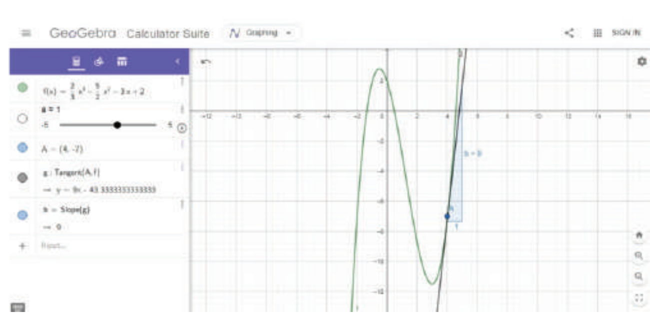
يكون الميل موجبًا لكل $x < -1$، وصفرًا عندما $x = -1$، وسالبًا لكل $x > -1$

(3



يكون الميل سالبًا لكل $x < 1.81$، وصفرًا عندما $x = 1.81$، وموجبًا لكل $x > 1.81$

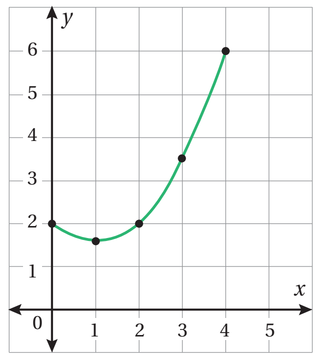
(4



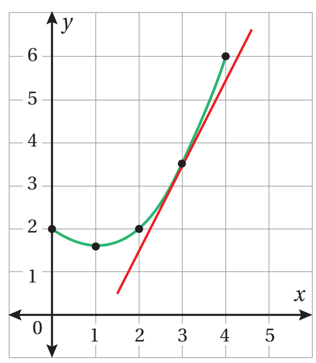
يكون الميل سالبًا لكل $-0.5 < x < 3$، وصفرًا عندما $x = -0.5$، و $x = 3$، وموجبًا لكل $x > 3$، ولكل $x < -0.5$

## الدرس 1:

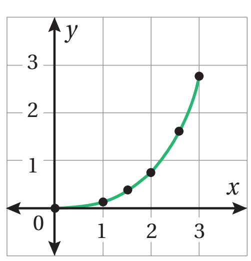
(4



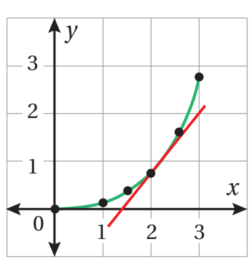

(5



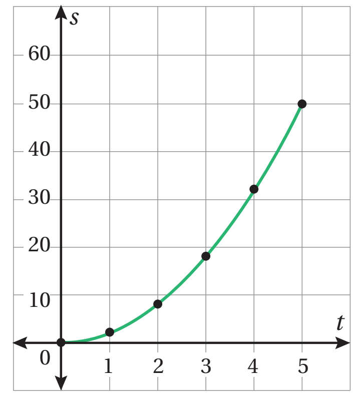

(8



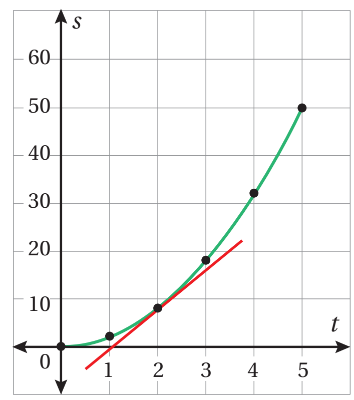

(9



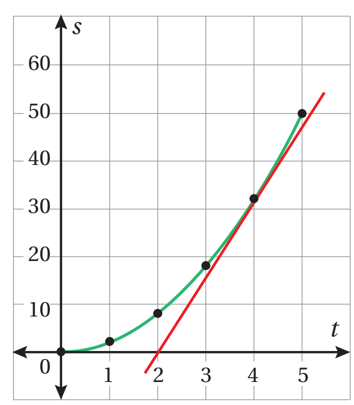
17)




18)

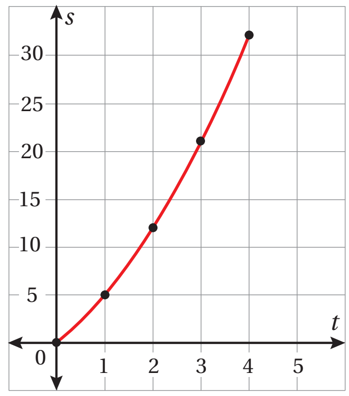



20)

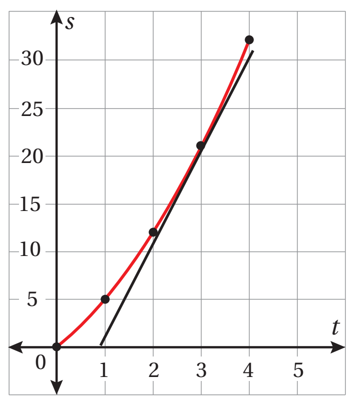



السرعة بعد 4 ثوانٍ هي: $16 \text{ m/s}$

22)




23)




السرعة عندما $t = 3$ هي $10.5 \text{ m/s}$ تقريبًا.

24) $s(1) = 5 \Longrightarrow a + b = 5 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$

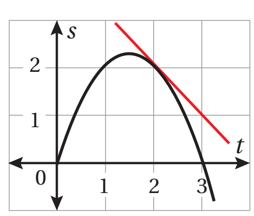
$s(2) = 12 \Longrightarrow 2a + 4b = 12 \Longrightarrow a + 2b = 6 \ldots\ldots(2)$

بطـرح المعادلة (1) مـن المعادلة (2)، فـإنَّ $b = 1$، وبتعويض $b = 1$ في المعادلة (1)، فإنَّ $a = 4$.

25) أرسم المنحنى ومماسًّا عند $(2, 2)$، مُقدِّرًا ميله.

(أقبل من الطلبة أيَّ إجابة قريبة من $-1$).

سرعة الجسم هي $1 \text{ m/s}$ تقريبًا عكس اتجاه حركته في البداية.



26) أنظر رسوم الطلبة.

يتقاطع المنحنى مع المحور $x$ عند $(8, 0)$ و $(-2, 0)$، وميله عند $(8, 0)$ هو 10 (أقبل إجابات الطلبة القريبة)، حيث يصنع المماس عندها زاوية حادة مع المحور $x$، وميله عند $(-2, 0)$ هو $-10$ (أقبل إجابات الطلبة القريبة)، حيث يصنع المماس عندها زاوية منفرجة مع المحور $x$، ويتقاطع المنحنى مع المحور $y$ عند $(0, -16)$، وميله عندها هو $-6$ (أقبل إجابات الطلبة القريبة)، حيث يصنع المماس عندها زاوية منفرجة مع المحور $x$.

27) أنظر رسوم الطلبة.

أقبل إجابات الطلبة التي تُمثِّل اقترانًا من الدرجة الثانية ومماسين عند نقطتين متقابلتين ومتعاكستين حول محور تماثل المنحنى.

سيختار معظم الطلبة الاقتران: $f(x) = x^2$ لسهولته؛ لذا أُحفِّزهم إلى ذكر أمثلة غيره.

## الدرس 2:

28) $f'(x) = x^2 - 5$

$$x^2 - 5 = 4 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3$$

وبتعويض قيم $x$ في الاقتران، أجد الإحداثي $y$:

$$f(-3)= 10, f(3) = -2$$

إذن، النقطتان هما: $(-3, 10), (3, -2)$.

29) $y' = 3ax^2 + 2bx$

النقطة $(2, -3)$ واقعة على المنحنى، فتُحقِّق معادلته، إذن:

$$8a + 4b + 5 = -3 \Rightarrow 8a + 4b = -8$$

والميل عندئذٍ هو صفر؛ أيْ إنَّ:

$$3a(2)^2 + 2b(2) = 0 \Rightarrow 12a + 4b = 0$$

بحل هاتين المعادلتين، أجد أنَّ:

$a = 2$، و $b = -6$

30) $s(t) = -4.9t^2 + 147t = 980$

$$\Rightarrow t^2 - 30t + 200 = 0$$

$$\Rightarrow (t-20)(t-10) = 0 \Rightarrow t = 20, t = 10$$

$$v(t) = s'(t) = -9.8t + 147$$

$$v(10) = -98 + 147 = 49 \text{ m/s}$$

$$v(20) = -196 + 147 = -49 \text{ m/s}$$

## الدرس 3:

1) $(2, -1)$: صغرى.

2) $(-3, -12)$: صغرى.

3) $(2.5, 7.25)$: عظمى.

4) $(-3, 40.5)$: عظمى.

$(2, -22)$: صغرى.

5) $(0, 0)$: صغرى.

$(-3, 81)$: عظمى.

$(3, 81)$: عظمى.

6) $(-1, 8)$: عظمى.

$(1, 0)$: صغرى.

7) $(-2, 12)$: عظمى.

$(2, -20)$: صغرى.

8) لا توجد قيم عظمى وقيم صغرى.

9) $(-\sqrt{\frac{2}{3}}, 5.09)$: عظمى.

$(\sqrt{\frac{2}{3}}, 2.9)$: صغرى.

10) $(-2, 66)$: عظمى.

$(\frac{4}{3}, 47.48)$: صغرى.

21) $f'(x) = 2x + a$

$$f'(1) = 2x + a = 0 \Rightarrow a = -2$$

$$f(1) = 1 - 2 + b = 3 \Rightarrow b = 4$$

توجد عند النقطة $(1, 3)$ قيمة صغرى؛ لأنَّ إشارة المشتقة تتغيَّر من سالبة إلى موجبة من يسار $x = 1$ إلى يمينه، حيث إنَّ $f'(0) = -2, f'(2) = 2$

22) $H(x)=48-\left[\left(\frac{1}{2}(x)(6-x)\right)+\left(\frac{1}{2}(8)(x)\right)+\left(\frac{1}{2}(6)(8-x)\right)\right]$

$$H(x)=48-\left(3x-\frac{1}{2}x^2+4x+24-3x\right)=24-4x+\frac{1}{2}x^2$$

24) $A_1 = x^2$ مساحة المربع.

$d_1 = 4x$ محيط المربع.

$A_2 = \pi r^2$ مساحة الدائرة.

$d_2 = 2\pi r$ محيط الدائرة.

$$4x + 2\pi r = 20 \Rightarrow x = \frac{20-2\pi r}{4}$$

$$A = x^2 + \pi r^2$$

$$= \left(\frac{20-2\pi r}{4}\right)^2 + \pi r^2$$

$$= \left(\frac{1}{4}\pi^2 + \pi\right) r^2 - 5\pi r + 25$$

$$A' = \left(\frac{1}{2}\pi^2 + 2\pi\right) r - 5\pi$$

$$\left(\frac{1}{2}\pi^2 + 2\pi\right) r - 5\pi = 0 \Rightarrow r \approx 1.4$$

$$\Rightarrow x \approx 2.8$$

موقع القص يكون تقريبًا على بُعْد 11.2 cm من طرف السلك. يُكوِّن هذا الجزء مربعًا، ويُكوِّن الجزء الآخر دائرة محيطها 8.8 cm

## اختبار نهاية الوحدة:

5) $h'(x) = 4x + 1$

$x(1 + 4x + 1) = 4x^2 + 2x = 2h(x)$

7) $f'(x) = 12x^2 \Rightarrow f'(-1) = 12$

$m = 12 \qquad f(-1) = -2$

معادلة المماس هي:

$y + 2 = 12(x + 1) \Rightarrow y = 12x + 10$

8) $2(xy) + 2(2xy) + 2(2x^2) = 600 \Rightarrow y = \frac{100}{x} - \frac{2}{3}x$

$$V(x) = \left(\frac{100}{x} - \frac{2}{3}x\right)(x)(2x)$$

$$= 200x - \frac{4}{3}x^3$$

14) $f'(x) = 0$

15) $f'(x) = 8x^7$

16) $f'(x) = -12x^3$

17) $f'(x) = 1$

18) $f'(x) = -2$

19) $f'(x) = -10x + 3x^2$

20) لا توجد قيم عظمى وقيم صغرى.

21) لا توجد قيم عظمى وقيم صغرى.

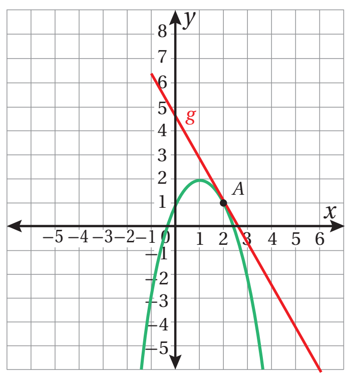
22) $(2.5, -0.25)$: صغرى.

23) $(\frac{1}{3}, 1.296)$: عظمى.

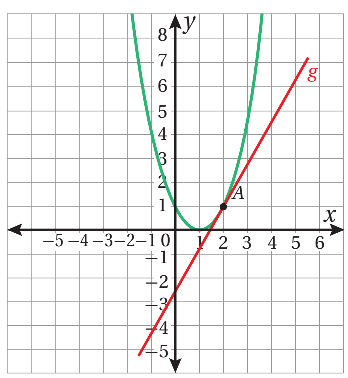
$(1, 1)$: صغرى.

## إجابات أسئلة كتاب التمارين، الدرس 1:

6)




9)




## إجابات أسئلة كتاب التمارين، الدرس 3:

1) لا توجد قيم صغرى وقيم عظمى.

2) لا توجد قيم صغرى وقيم عظمى.

3) لا توجد قيم صغرى وقيم عظمى.

4) لا توجد قيم صغرى وقيم عظمى.

5) له قيمة صغرى عندما $x = -1$، هي: 0

6) له قيمة صغرى عندما $x = 4$، هي: $-9$

7) له قيمة عظمى عندما $x = 0$، هي: 5

له قيمة صغرى عندما $x = 4$، هي: $-27$

8) له قيمة عظمى عندما $x = -5$، هي: 100

له قيمة صغرى عندما $x = 1$، هي: $-8$

9) له قيمة عظمى عندما $x = 3$، هي: 27

10) له قيمة صغرى عندما $x = 0.5$، هي: $-2.25$

14) $2x + 2y + \pi x = 80 \Rightarrow y = 40 - \frac{\pi}{2} x - x$

$$A(x) = 2xy + \frac{1}{2} \pi x^2$$
$$= 2x \left(40 - \frac{\pi}{2} x - x\right) + \frac{1}{2} \pi x^2$$
$$= 80x - \pi x^2 - 2x^2 + \frac{1}{2} \pi x^2$$
$$= 80x - \frac{\pi}{2} x^2 - 2x^2 = 80x - \left(\frac{\pi}{2} + 2\right) x^2$$

17) $a = 2, b = 1$

قيمة صغرى؛ لأنَّ إشـــارة المشـــتقة تتغيَّر من ســـالبة قبل $-4$ إلى موجبة بعدها، حيث:

$$f'(-5) = -0.5, f'(-2) = 1$$

# الوحدة 7

# المتجهاتُ
# Vectors

## مُخطَّط الوحدة

| اسم الدرس | النتاجات | المصطلحات | المصادر والأدوات | عدد الحصص |
|---|---|---|---|---|
| أستعد لدراسة الوحدة | | | • كتاب التمارين. | 1 |
| الدرس 1: المتجهات في المستوى الإحداثي. | • تعرُّف المتجه، وكتابته بالصورة الإحداثية، وتمثيله في المستوى الإحداثي.<br>• إيجاد مقدار المتجه، وتحديد اتجاهه.<br>• إيجاد السرعة المتجهة. | المتجه.<br>المركبة الأفقية.<br>المركبة الرأسية.<br>الصورة الإحداثية.<br>الوضع القياسي.<br>السرعة المتجهة. | • برمجية جيوجبرا.<br>• الآلة الحاسبة.<br>• لوح المستوى الإحداثي، أو ورق رسم بياني. | 3 |
| الدرس 2: جمع المتجهات وطرحها. | • التمييز بين المتجهات المتساوية، والمتجهات المتوازية، ومعكوس المتجه، والتعبير عنها بالرموز.<br>• حل مسائل عن جمع المتجهات، وطرحها، وضربها في عدد حقيقي هندسيًّا وجبريًّا.<br>• تعرُّف المتجه الصفري.<br>• إيجاد محصلة متجهين أو أكثر هندسيًّا وجبريًّا في مواقف رياضية وحياتية. | المتجهان المتساويان.<br>المتجهان المتوازيان.<br>معكوس المتجه.<br>المحصلة. | • برمجية جيوجبرا.<br>• الآلة الحاسبة.<br>• لوح المستوى الإحداثي، أو ورق رسم بياني. | 3 |
| الدرس 3: الضرب القياسي. | • إيجاد ناتج الضرب القياسي لمتجهين.<br>• تعرُّف العلاقة بين الضرب القياسي ومقدار المتجه.<br>• إيجاد قياس الزاوية بين متجهين.<br>• حساب مقدار الشغل الناتج من تأثير قوة في تحريك جسم ما مسافة محددة. | الضرب القياسي.<br>الشغل. | • برمجية جيوجبرا.<br>• الآلة الحاسبة.<br>• لوح المستوى الإحداثي، أو ورق رسم بياني. | 3 |
| عرض نتائج المشروع. | | | | 1 |
| اختبار الوحدة. | | | | 2 |
| مجموع الحصص: | | | | 13 |

# الوحدة 7

## نظرة عامة على الوحدة:

تعلَّم الطلبة المتجهات في مبحث الفيزياء، ومثَّلوها بصورة هندسية. سيتعلَّم الطلبة في هذه الوحدة كيفية كتابة المتجه بالصورة الإحداثية، وتمثيله في المستوى الإحداثي، وإيجاد مقداره واتجاهه، وسيتعلَّمون أيضًا جمع المتجهات وطرحها وضربها في عدد حقيقي، ويُفسِّرون دلالة ذلك في مسائل حياتية. وكذلك سيتعلَّمون الضرب القياسي للمتجهات، وإيجاد الزاوية بين متجهين، وحساب الشغل، وحل مسائل حياتية عنها.

الوحدةُ 7

المتجهاتُ

Vectors

**ما أهميةُ هذهِ الوحدةِ؟**

لفهمِ تأثيرِ قوةٍ ما في جسمٍ، يجبُ تحديدُ كلٍّ منْ مقدارِ هذهِ القوةِ، واتجاهِها، في ما يُعرَفُ بالمتجهِ. في هذهِ الوحدةِ، سأتعلَّمُ كثيرًا عنِ المتجهاتِ وتطبيقاتِها الحياتيةِ، منْ مثلِ تحديدِ تأثيرِ الرياحِ في حركةِ السفنِ الشراعيةِ.

**تعلَّمْتُ سابقًا:**

✓ حلَّ المعادلاتِ الخطِّيةِ بمُتغيِّرَيْنِ.

✓ إيجادَ المسافةِ بينَ نقطتَيْنِ في المستوى الإحداثيِّ.

✓ إيجادَ إحداثيَّيْ نقطةِ منتصفِ قطعةٍ مستقيمةٍ.

✓ النسبَ المثلثيةَ للزوايا ضمنَ الدورةِ الكاملةِ.

**سأتعلَّمُ في هذهِ الوحدةِ:**

◂ المتجهاتِ، وكيفيةَ تمثيلِها على المستوى الإحداثيِّ.

◂ جمعَ المتجهاتِ، وطرحَها، وضربَها القياسيَّ.

◂ التفسيرَ الهندسيَّ للمتجهاتِ، وبعضَ التطبيقاتِ الحياتيةِ عليْها.

◂ إيجادَ قياسِ الزاويةِ بينَ متجهيْنِ.

78

## الترابط الرأسي بين الصفوف

**سابقًا**

### الصف التاسع

- حل معادلات خطية بمتغيرين.
- حل معادلات تربيعية بمتغير واحد.
- إيجاد المسافة بين نقطتين في المستوى الإحداثي.
- إيجاد إحداثيي نقطة منتصف قطعة مستقيمة.
- إيجاد النسب المثلثية للزوايا الحادة.

### الصف العاشر

- إيجاد النسب المثلثية للزوايا ضمن الدورة الكاملة.
- تعرُّف المتجهات، وتمثيلها في المستوى الإحداثي.
- جمع المتجهات، وطرحها، وضربها القياسي.
- التفسير الهندسي للمتجهات.
- إيجاد قياس الزاوية بين متجهين.
- إيجاد محصلة متجهين أو أكثر.
- حل مسائل حياتية.

**لاحقًا**

### الصف الثاني عشر العلمي

- استعمال الصورة القياسية للمتجهات $(xi + yj, xi + yj + zk)$ لجمع متجهين، أو طرحهما، أو ضرب متجه في ثابت، وتفسير هذه العمليات هندسيًّا.
- استعمال متجه الوحدة، ومتجه الموقع، ومتجه الإزاحة.
- كتابة معادلة مستقيم عُلِم فيها متجه الموقع لنقطة عليه، واتجاه المتجه، أو عُلِم فيها متجها الموقع لنقطتين على المستقيم.
- تحديد إذا كان المستقيمان متوازيين، أو متقاطعين، أو متخالفين، وإيجاد نقاط التقاطع بينهما (إنْ وُجِدت).
- استعمال الضرب القياسي في مسائل تحوي مستقيمات ونقاطًا.

## مشروعُ الوحدةِ

## المتجهاتُ في الجغرافيا

**فكرةُ المشروعِ** أستعدُّ ومجموعتي لتنفيذِ مشروعِنا الخاصِّ باكتشافِ استعمالاتٍ للمتجهاتِ في الخرائطِ الجغرافيةِ بناءً على ما ستتعلَّمُهُ في هذهِ الوحدةِ.

**الموادُّ والأدواتُ** شبكةُ إنترنت، برمجيةُ جيوجبرا.

**خطواتُ تنفيذِ المشروعِ:**

1. أبحثُ في شبكةِ الإنترنتْ عنْ صورةٍ لخريطةِ الوطنِ العربيِّ أوِ الشرقِ الأوسطِ، ثمَّ أحفظُها في ملفٍّ بجهازِ الحاسوبِ.
2. أستعملُ برمجيةَ جيوجبرا لإيجادِ إحداثياتِ بعضِ العواصمِ العربيةِ باتباعِ الخطواتِ الآتيةِ:
   - أنقرُ أيقونةَ Image منْ شريطِ الأدواتِ، ثمَّ أختارُ الصورةَ التي حفظتُها.
   - أُظهرُ الشبكةَ فوقَ الصورةِ بنقرِ الزرِّ الأيمنِ لفأرةِ الحاسوبِ، ثمَّ اختيارِ (الإعداداتُ) Settings ، ومنْها أختارُ Background Image
   - أجِدُ إحداثياتِ أيِّ عاصمةٍ عربيةٍ على الخريطةِ باختيارِ أيقونةِ منْ شريطِ الأدواتِ، ثمَّ نقرِ موقعِ العاصمةِ على الصورةِ، فتظهرُ الإحداثياتُ على الشريطِ الجانبيِّ.
3. أرسمُ متجهًا بينَ أيِّ عاصمتيْنِ بنقرِ أيقونةِ المتجهِ منْ شريطِ الأدواتِ.
4. أجِدُ المسافةَ على الخريطةِ بينَ مدينةِ عمّانَ وأربعِ عواصمَ عربيةٍ باستعمالِ مقدارِ المتجهِ، ثمَّ أُقارِنُها بالمسافاتِ الحقيقيةِ، وأكتبُ مقياسَ الرسمِ، مُنظِّمًا النتائجَ في جدولٍ.
5. أجِدُ اتجاهَ أربعِ عواصمَ عربيةٍ بالنسبةِ إلى مدينةِ عمّانَ باستعمالِ الضربِ القياسيِّ للمتجهاتِ.

**عرضُ النتائجِ:**

أُعِدُّ معَ أفرادِ مجموعتي عرضًا تقديميًّا (بوربوينت) نُبيِّنُ فيهِ ما يأتي:

- خطواتُ تنفيذِ المشروعِ مُوضَّحةً بالصورِ، والحساباتُ التي أجريتُها في خطواتِ المشروعِ.
- المعلوماتُ الجديدةُ التي تعرَّفْتُها في أثناءِ العملِ بالمشروعِ، ومقترحٌ لتوسعةِ المشروعِ.

79

## أداة تقييم المشروع

| الرقم | المعيار | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | توثيق أفراد المجموعة مصادر المعلومات التي تعرَّفوها. | | | |
| 2 | المشاركة الفاعلة لجميع أفراد المجموعة. | | | |
| 3 | مراعاة أنْ يكون التقرير المكتوب كاملًا، ومنظمًا، ويحوي رسومًا توضيحيةً. | | | |
| 4 | اتصاف العرض التقديمي بالوضوح والشمول. | | | |
| 5 | عرض معلومة جديدة تعلَّمها أفراد المجموعة في أثناء البحث والعمل في المشروع. | | | |
| 6 | وجود مقترح مناسب لتوسعة المشروع. | | | |

1 إنجاز المهمة بوجود أكثر من خطأ.
2 إنجاز المهمة بوجود خطأ بسيط.
3 إنجاز المهمة بصورة صحيحة من دون خطأ.

## مشروع الوحدة: المتجهات في الجغرافيا.

**هدف المشروع:** يهدف مشروع الوحدة إلى ربط الرياضيات بالحياة، وتنمية مهارات التفكير والتجربة العلمية في أذهان الطلبة، باكتشاف استعمالات المتجهات في الخرائط الجغرافية.

## خطوات تنفيذ المشروع:

- أُعرِّف الطلبة بالمشروع وأهميته في تعلُّم موضوعات الوحدة.
- أُوزِّع الطلبة إلى مجموعات، يتكوَّن كلٌّ منها من (5–7) طلبة، ثم أطلب إلى أفراد كل مجموعة أنْ يُوزِّعوا الأدوار بينهم، ويختاروا مُقرِّرًا لهم.
- أذكر للطلبة المواد والأدوات اللازمة لتنفيذ المشروع، مثل: جهاز الحاسوب، وبرمجية جيوجبرا، والورق المقوى، والمقص، والمسطرة، فضلًا عن بيان عناصر المُنتَج النهائي المطلوب منهم، مُؤكِّدًا لهم أهمية توثيق خطوات تنفيذ المشروع باستمرار، وتعزيزه بالصور المناسبة. وكذلك أُذكِّرهم بإمكانية استعمال خاصية طباعة الشاشة (print screen) الموجودة على لوحة المفاتيح في جهاز الحاسوب؛ لتوثيق خطوات التنفيذ المُتعلِّقة بجهاز الحاسوب وبرمجية جيوجبرا.
- أُوضِّح للطلبة معايير تقييم أعمالهم، مستعينًا بسُلَّم التقدير.
- أُبيِّن للطلبة الأوقات التي يمكن فيها تنفيذ خطوات المشروع. فمثلًا، تُنفَّذ الخطوات (1–3) بعد الانتهاء من الدرس الأول، وتُنفَّذ الخطوة (4) بعد الدرس الثاني، وتُنفَّذ الخطوة (5) بعد الدرس الثالث.
- عند انتهاء الوحدة، أُحدِّد وقتًا مناسبًا لعرض النتائج التي توصَّل إليها الطلبة، وأُناقِشهم فيها.

## عرض النتائج:

- أطلب إلى أفراد كل مجموعة المشاركة في عرض جزء من نتائج المشروع (تكمن أهمية هذه الخطوة في تعزيز مهارات الطلبة التكنولوجية، ومهاراتهم الحياتية، مثل: التواصل، والتعاون).
- ألفِت انتباه الطلبة إلى ضرورة استعمال التكنولوجيا في عرض نتائج المشروع، وإعداد عرض تقديمي يحوي صورًا لمراحل التنفيذ.
- أُوضِّح للطلبة أهمية اشتمال التقرير على الصعوبات التي واجهتهم، وكيفية التغلُّب عليها، والمعلومات الجديدة التي تعرَّفوها، ومقترحاتهم عن كيفية تطوير المشروع؛ تعزيزًا لمهارات حل المشكلات لديهم.
- أطلب إلى الطلبة تدوين تقييمهم الذاتي للمشروع، وأُنبِّههم إلى إمكانية الاستعانة بأداة التقييم التالية.
- أطلب إلى طلبة الصف التصويت على المشروع الأفضل.

## التقويم القبلي (التشخيصي):

- أستعمل صفحة (أستعد لدراسة الوحدة) في كتاب التمارين والأنشطة العملية؛ لمساعدة الطلبة على تذكُّر المعرفة السابقة اللازمة لدراسة هذه الوحدة، مثل: ايجاد المسافة بين نقطتين، واستعمال النسب المثلثية ونظرية فيثاغورس في إيجاد أطوال الأضلاع وقياسات الزوايا في مثلث قائم الزاوية.
- أُوجِّه الطلبة إلى حل الأسئلة، ثم أتجوَّل بينهم، وأحثُّ الطلبة الذين يواجهون صعوبة في حل أيِّ سؤال على قراءة المثال المقابل له.
- أختار سؤالًا واجه الطلبة صعوبة في حله، ثم أكتب على اللوح إحدى إجابات الطلبة غير الصحيحة - من دون ذكر اسم الطالب-، وأُدير نقاشًا عنه.

### إجابات أسئلة بند (أستعد لدراسة الوحدة):

**1)** $x \approx 13.95$

$AB \approx 11.43$

$\sin 55° \approx \frac{11.43}{13.95} \approx 0.819$

$\cos 55° = \frac{8}{13.95} \approx 0.573$

$\tan 55° = \frac{11.43}{8} \approx 1.429$

**2)** $x \approx 37°$

$AB = 8$

$\sin 53° = \frac{8}{10} = 0.8$

$\cos 53° = \frac{6}{10} = 0.6$

$\tan 53° = \frac{8}{6} = 1.33$

**3)** $x \approx 1.81$

$AB = 6.76$

$\sin 75° \approx \frac{6.76}{7} \approx 0.966$

$\cos 75° = \frac{1.81}{7} \approx 0.259$

$\tan 75° = \frac{6.76}{1.81} \approx 3.734$

**4)** $x \approx 19°$

$AB = 8.98$

$\sin 71° \approx \frac{8.98}{9.5} \approx 0.945$

$\cos 71° = \frac{3.1}{9.5} \approx 0.326$

$\tan 71° = \frac{8.98}{3.1} \approx 2.897$

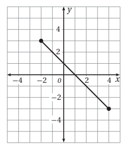
---



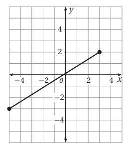
أختبرُ معلوماتي قبلَ البدءِ بدراسةِ الوحدةِ، وفي حالِ عدمِ تأكُّدي منَ الإجابةِ أستعينُ بالمراجعةِ.

**• إيجادُ المسافةِ بينَ نقطتيْنِ.**

أَجِدُ المسافةَ بينَ النقطتيْنِ في كلٍّ ممّا يأتي:

**1** 

$6\sqrt{2}$

**2** 

$\sqrt{89}$

**3** $(-5, -7), (2, -3)$ $\sqrt{65}$

**4** $(8, 0), (-4, -5)$ 13

**5** $(-4, 7), (-3, 6)$ $\sqrt{2}$

**مثالٌ:** أَجِدُ المسافةَ بينَ النقطتيْنِ: **(8− ,2−)، وَ (5− ,6−).**

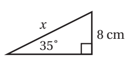
| | |
|---|---|
| قانونُ المسافةِ بينَ نقطتيْنِ | $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ |
| بتعويضِ إحداثياتِ النقطتيْنِ | $= \sqrt{(-6 - (-2))^2 + (-5 - (-8))^2}$ |
| بالتبسيطِ | $= \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$ |

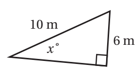
إذنْ، المسافةُ بينَ النقطتيْنِ: (8− ,2−)، وَ (5− ,6−) هيَ 5 وحداتِ طولٍ.

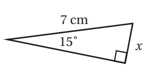
**• استعمالُ النسبِ المثلثيةِ في إيجادِ أطوالِ أضلاعٍ في مثلثٍ.**

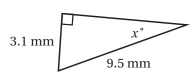
أستعملُ النسبةَ المثلثيةَ المناسبةَ لإيجادِ قيمةِ $x$ في كلٍّ منَ المثلثاتِ الآتيةِ، ثمَّ أَجِدُ النسبَ المثلثيةَ الأساسيةَ للزاويةِ الحادةِ الكبرى:

(1–4) أنظر الهامش.

**1** 


**2** 


**3** 

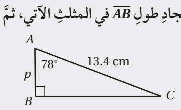

**4** 




---



**مثالٌ:** أستعملُ النسبةَ المثلثيةَ المناسبةَ لإيجادِ طولِ $\overline{AB}$ في المثلثِ الآتي، ثمَّ أَجِدُ النسبَ المثلثيةَ للزاويةِ $A$:




الضلعُ المجهولُ $\overline{AB}$ مجاورٌ للزاويةِ $A$؛ لذا أستعملُ نسبةَ جيبِ التمامِ للزاويةِ $A$:

| | |
|---|---|
| تعريفُ نسبةِ جيبِ التمامِ | $\cos A = \frac{\text{المجاورَ}}{\text{الوترِ}}$ |
| بتعويضِ القياساتِ المعلومةِ | $\cos 78° = \frac{p}{13.4}$ |
| بتعويضِ قيمةِ $\cos 78°$ | $0.21 = \frac{p}{13.4}$ |
| بالضربِ التبادليِّ | $p = (0.21)\ (13.4)$ |
| بالتبسيطِ | $p = 2.81$ |

لحسابِ نسبتَي الجيبِ والظلِّ للزاويةِ $A$، يجبُ معرفةُ طولِ الضلعِ المقابلِ لها. وبما أنَّ المثلثَ قائمُ الزاويةِ، فإنَّني أستعملُ نظريةَ فيثاغورس:

| | |
|---|---|
| نظريةُ فيثاغورس | $(AC)^2 = (BC)^2 + (AB)^2$ |
| بالتعويضِ | $(13.4)^2 = (BC)^2 + (2.81)^2$ |
| بالتبسيطِ | $179.56 = (BC)^2 + 7.90$ |
| بطرحِ 7.90 | $179.56 - 7.90 = BC^2$ |
| بالتبسيطِ | $171.66 = BC^2$ |
| بأخذِ الجذرِ التربيعيِّ للطرفيْنِ | $13.10 = BC$ |

أستطيعُ الآنَ حسابَ نسبتَي الجيبِ والظلِّ للزاويةِ $A$:

| | |
|---|---|
| تعريفُ نسبةِ الجيبِ | $\sin A = \frac{\text{المقابلَ}}{\text{الوترِ}}$ |
| بالتعويضِ | $\sin 78° = \frac{13.10}{13.4}$ |
| بالتبسيطِ | $\sin 78° \approx 0.98$ |
| تعريفُ نسبةِ الظلِّ | $\tan A = \frac{\text{المقابلَ}}{\text{المجاورِ}}$ |
| بتعويضِ القياساتِ المعلومةِ | $\tan 78° = \frac{13.10}{2.79}$ |
| بالتبسيطِ | $\tan 78° \approx 4.7$ |

الدرس 1

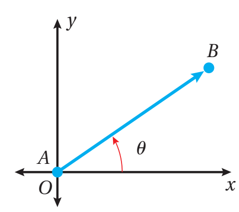
# المتجهاتُ في المستوى الإحداثيِّ
## Vectors in the Coordinate Plane

**فكرةُ الدرسِ** تعرُّفُ المتجهِ، وتمثيلُهُ في المستوى الإحداثيِّ، وإيجادُ مقدارِ المتجهِ.

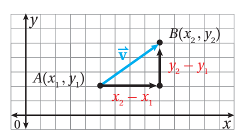
**المصطلحاتُ** المُركَّبةُ الأفقيةُ، المُركَّبةُ الرأسيةُ، الصورةُ الإحداثيةُ، الوضعُ القياسيُّ، متّجهُ الموقعِ، مقدارُ المتجهِ، السرعةُ المتجهةُ.

**مسألةُ اليومِ** قطعَ يختٌ سياحيٌّ مسارًا مستقيمًا في البحرِ الأحمرِ، مُنطلقًا منْ مدينةِ العقبةِ باتجاهِ الجنوبِ الغربيِّ إلى مدينةِ طابا المصريةِ. هلْ يُمكِنُ وصفُ اتجاهِ هذا اليختِ، وتحديدُ المسافةِ التي قطعَها باستعمالِ إحداثيَّيْ هاتيْنِ المدينتيْنِ فقطْ؟

درسْتُ في الفيزياءِ تمثيلَ المتجهاتِ في صورةِ سهمٍ ينطلقُ منْ نقطةِ إسنادٍ، مثلِ نقطةِ الأصلِ، وبطولٍ يُحدِّدُهُ مقياسُ رسمٍ مناسبٍ، واتجاهٍ تُحدِّدُهُ الزاويةُ $\theta$ التي يصنعُها السهمُ معَ محورٍ مرجعيٍّ، مثلِ محورِ $x$ الموجبِ عكسَ عقاربِ الساعةِ. ولأنَّ استعمالَ مقياسِ الرسمِ قدْ لا يكونُ دقيقًا في بعضِ الأحيانِ؛ فإنَّهُ يتعيَّنُ استعمالُ طريقةٍ أكثرَ دقَّةً لتمثيلِ المتجهاتِ.




يُمكِنُ تمثيلُ المتجهِ ($\overrightarrow{AB}$) في المستوى الإحداثيِّ في صورةِ قطعةٍ مستقيمةٍ تمتدُّ منْ نقطةِ بدايتِهِ $A(x_1, y_1)$ إلى نقطةِ نهايتِهِ $B(x_2, y_2)$، وفي اتجاهٍ يُحدِّدُهُ رمزُ السهمِ كما في الشكلِ المجاورِ.




**رموزٌ رياضيةٌ**

يُرمَزُ إلى المتجهِ الذي نقطةُ بدايتِهِ $A$، ونقطةُ نهايتِهِ $B$ بالرمزِ $\overrightarrow{AB}$ أوْ بالرمزِ $\vec{v}$ مكتوبًا بالخطِّ الغامقِ.

تُسمّى الإزاحةُ الأفقيةُ بينَ نقطةِ بدايةِ المتجهِ ونقطةِ نهايتِهِ **المُركَّبةَ الأفقيةَ** (horizontal component)، وتساوي $(x_2 - x_1)$، وتُسمّى الإزاحةُ الرأسيةُ بينَهُما **المُركَّبةَ الرأسيةَ** (vertical component)، وتساوي $(y_2 - y_1)$.



الدرس 1

## نتاجات الدرس

- تعرُّف المتجه، وكتابته بالصورة الإحداثية، وتمثيله في المستوى الإحداثي.
- إيجاد مقدار المتجه، وتحديد اتجاهه.
- إيجاد السرعة المتجهة.

## التعلُّم القبلي:

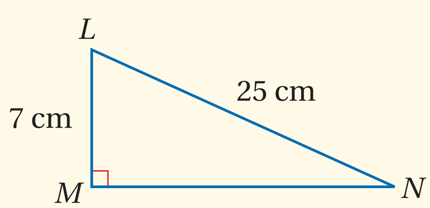
- إيجاد المسافة بين نقطتين في المستوى الإحداثي.
- حل مثلث قائم الزاوية، وإيجاد النسب المثلثية لزواياه.

## 1 التهيئة

- أُراجِع الطلبة في نظرية فيثاغورس، وقانون المسافة بين نقطتين، عن طريق حل السؤالين الآتيين:

» أُعيِّن النقاط $A(1, -2), B(4, 2), C(-2, 1)$ في المستوى الإحداثي، ثم أجد طول كلٍّ من $\overline{AB}$ ، و $\overline{AC}$ .

» أجد $MN$ في المثلث القائم $LMN$ المجاور، وقياس كلٍّ من الزاويتين $MNL$، و $MLN$ .



## 2 الاستكشاف

- أُوجِّه الطلبة إلى قراءة المسألة في بند (**مسألة اليوم**)، ثم أسألهم:
  - » مـا الفرق بين القارب واليخت؟ اليخت مثل القارب، لكنه أكبر حجمًا، ومُزوَّد بمحرك لدفعه إلى الأمام، وفيه كثير من وسائل الراحة والاستجمام.
  - » كيف يمكن حسـاب المسـافة بين مدينتي العقبة وطابا؟ إذا عُرِفت إحداثيات المدينتين، فإنَّه يمكن إيجاد المسـافة بينهما باسـتعمال نظريـة فيثاغورس، أو قانون المسـافة بين نقطتين، وكذلك يمكن إيجادها بقياس المسافة بينهما على خريطة باستعمال مقياس الرسم.
  - » كيف يمكن تمثيل مسـار اليخت على الخريطة؟ برسم قطعة مستقيمة من العقبة إلى طابا، ثم وضع إشارة تدل على بدء الرحلة من العقبة.
- أستمع لإجابات الطلبة من دون تقديم تغذية راجعة لهم، ثم أسألهم:
  - » مَنْ يُؤيِّد الإجابة؟
  - » مَنْ لديه إجابة أُخرى؟
  - » أذكرها.

وذلك لتعزيز مهارات التواصل واحترام الـرأي والرأي الآخر لديهم. بعد ذلك أُوضِّح لهم أنَّهم سـيتعرَّفون في هذا الدرس ما يُمكِّنهم من الإجابة عن هذه المسـألة ومسائل مشابهة، ثم أكتب العنوان على اللوح.

### تعزيز اللغة ودعمها:

أُكرِّر المصطلحات الرياضية المستخدمة في الدرس باللغتين العربية والإنجليزية، وأُحفِّز الطلبة على اسـتعمالها، مثل: المتجه (vector)، والمركبة الأفقيـة (horizontal component)، والمركبة الرأسية (vertical component)، والصورة الإحداثية (coordinate form)، والوضع القياسي (standard position)، والسرعة المتجهة (velocity).

## 3 التدريس

### مثال 1

- أُوضِّح للطلبة الفرق بين الكميات القياسـية (العددية) التي تُحدَّد بعدد، مثل: الطول، والمساحة، والحجم، والكميات المتجهة التي تُحدَّد بعدد واتجاه، مثل: القوة، والسرعة.
- أسـتعمل فقرة الشـرح الوارد ذكرها في بداية الدرس لتوضيح الفرق بين تمثيل المتجه هندسيًّا والتعبير عنه جبريًّا بالصورة الإحداثية.
- أُناقِش الطلبة فـي حل هذا المثال الذي يُبيِّن كيف يُكتَب المتجـه بالصورة الإحداثية إذا عُلِمت نقطتا بدايته ونهايته.

**إرشـاد:** أُحفِّز الطلبة على إحضار دفاتر الرسم البياني، أو دفاتر ورق المربعات عند البدء بدراسة هذه الوحدة.

### ملاحظات المُعلِّم/ المُعلِّمة

...........................................

...........................................

...........................................

...........................................

...........................................

...........................................

...........................................

...........................................

...........................................

...........................................

### المفاهيم العابرة:

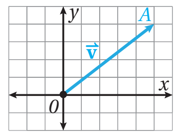
أُؤكِّد للطلبـة أهمية المفاهيـم العابرة للمواد حيثما ورد ذكرهـا في كتاب الطالب، أو كتاب التمارين والأنشـطة العملية. ففي بند (مسألة اليوم)، أُعـزِّز الوعي بالقضايـا البيئية (أهمية البحار والمحيطات) عن طريق حوار أُديره مع الطلبة عن أهميـة البحار والمحيطات للطقس والمخزون الغذائي والمائي، وتأثيرها في حياة الإنسان والكائنات الحية، ثم أسألهم:

- » ما فائدة البحار والمحيطات؟
- » ما البحار التي تحيط بوطننا الأردن؟
- » كيف نحافظ على البحار والمحيطات؟

يُمكِنُ كتابةُ المتجهِ **بالصورةِ الإحداثيةِ** (coordinate form) بدلالةِ مُركَّبتيهِ الأفقيةِ والرأسيةِ (العموديةِ) كما يأتي:

$$\vec{\mathbf{v}} = \overrightarrow{AB} = \langle x_2 - x_1 , y_2 - y_1 \rangle = \langle v_1, v_2 \rangle$$

إذا كانَتْ نقطةُ بدايةِ المتجهِ هيَ نقطةَ الأصلِ $0$، كما في الشكلِ المجاورِ، فإنَّهُ يكونُ في **الوضعِ القياسيِّ** (standard position) ويسمّى أيضًا **متّجهَ الموقعِ** (position vector) للنقطةِ $A$ التي تقعُ عندَ نهايتِهِ؛ لأنَّهُ يحدّدُ موقعَها بالنسبةِ إلى نقطةِ الأصلِ.

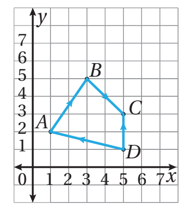



**رموزٌ رياضيةٌ**

يُستعمَلُ الرمزُ $\langle a, b\rangle$ أوْ $\binom{a}{b}$ لكتابةِ المتجهِ بصورتِهِ الإحداثيةِ.

**مثال 1**

**اعتمادًا على الشكلِ المجاورِ، أكتبُ المتجهاتِ الآتيةَ بالصورةِ الإحداثيةِ:**




**1** $\overrightarrow{AB}$

نقطةُ بدايةِ المتجهِ هيَ $A(1, 2) = (x_1, y_1)$، ونقطةُ نهايتِهِ هيَ $B(3, 5) = (x_2, y_2)$

المُركَّبةُ الأفقيّةُ $x_2 - x_1 = 3 - 1 = 2$

المُركَّبةُ الرأسيّةُ $y_2 - y_1 = 5 - 2 = 3$

إذنْ، $\overrightarrow{AB} = \langle 2, 3\rangle$

**طريقةٌ بديلةٌ**

للانتقالِ منَ النقطةِ $A$ إلى النقطةِ $B$، أتحرَّكُ وحدتينِ إلى اليمينِ، وثلاثَ وحداتٍ إلى الأعلى.

**2** $\overrightarrow{BC}$

نقطةُ بدايةِ المتجهِ هيَ $B(3, 5)$، ونقطةُ نهايتِهِ هيَ $C(5, 3)$

المُركَّبةُ الأفقيّةُ $x_2 - x_1 = 5 - 3 = 2$

المُركَّبةُ الرأسيّةُ $y_2 - y_1 = 3 - 5 = -2$

إذنْ، $\overrightarrow{BC} = \langle 2, -2\rangle$

**أتعلّمُ**

يُعبَّرُ عنِ الانتقالِ إلى اتجاهِ اليسارِ أوِ اتجاهِ الأسفلِ باستعمالِ الأعدادِ السالبةِ.

**3** $\overrightarrow{DC}$

نقطةُ بدايةِ المتجهِ هيَ $D(5, 1)$، ونقطةُ نهايتِهِ هيَ $C(5, 3)$

المُركَّبةُ الأفقيّةُ $x_2 - x_1 = 5 - 5 = 0$

المُركَّبةُ الرأسيّةُ $y_2 - y_1 = 3 - 1 = 2$

إذنْ، $\overrightarrow{DC} = \langle 0, 2\rangle$



## أخطاء مفاهيمية:

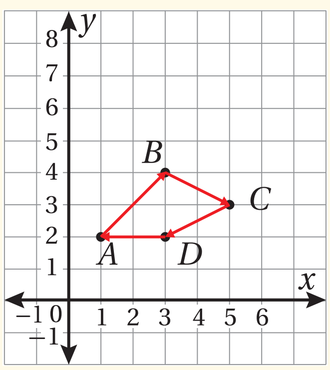
- قد لا يُميِّز بعض الطلبة بين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BA}$ عند كتابة المتجه بالصورة الإحداثية؛ لذا ألفِت انتباههم إلى طرح إحداثي نقطة البداية من الإحداثي المناظر له في نقطة النهاية.
- قد يُبدِّل بعض الطلبة من ذوي المستوى دون المتوسط موقعي المركبتين الأفقية والرأسية؛ لذا أُوضِّح لهم الطريقة الصحيحة لكتابة الصورة الإحداثية.

## مثال إضافي

- اعتمادًا على الشكل المجاور، أكتب كلًّا من المتجهات الآتية بالصورة الإحداثية:

**1** $\overrightarrow{AB}$ $\langle 2, 2\rangle$ **2** $\overrightarrow{BC}$ $\langle 2, -1\rangle$

**3** $\overrightarrow{CD}$ $\langle -2, -1\rangle$ **4** $\overrightarrow{DA}$ $\langle -2, 0\rangle$

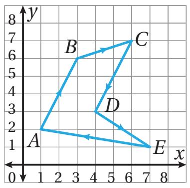



## التقويم التكويني:

- أُوجِّه الطلبة إلى حل التدريب في بند (**أتحقق من فهمي**) بعد كل مثال (فرديًّا، أو ضمن مجموعات).
- أتجوَّل بين الطلبة مُرشِدًا، ومُساعِدًا، ومُوجِّهًا، وأُقدِّم لهم التغذية الراجعة.
- أختار بعض الإجابات التي تحوي أخطاء مفاهيمية، ثم أُناقِشها على اللوح، ولا أذكر اسم الطالب الذي أخطأ في الإجابة؛ تجنبًا لإحراجه.

### أتحقق من فهمي

اعتمادًا على الشكلِ المجاورِ، أكتبُ المتجهاتِ الآتيةَ بالصورةِ الإحداثيةِ:




a) $\overrightarrow{EA}$ $\langle -6, 1\rangle$  b) $\overrightarrow{CD}$ $\langle -2, -4\rangle$

c) $\overrightarrow{AB}$ $\langle 2, 4\rangle$  d) $\overrightarrow{DE}$ $\langle 3, -2\rangle$

e) $\overrightarrow{BC}$ $\langle 3 ,1\rangle$  f) $\overrightarrow{CB}$ $\langle -3,- 1\rangle$

**مقدارُ المتجهِ** (magnitude) هوَ كميةٌ قياسيةٌ تُمثِّلُ طولَ القطعةِ المستقيمةِ الواصلةِ بينَ نقطتَيْ بدايةِ المتجهِ ونهايتِهِ.

فإذا كانَتْ $P_1(x_1, y_1)$ هيَ نقطةَ بدايةِ $\mathbf{\vec{v}}$، وَ $P_2(x_2, y_2)$ هيَ نقطةَ نهايتِهِ، فإنَّهُ يُمكِنُ استعمالُ نظريةِ فيثاغورس لإيجادِ الصيغةِ الآتيةِ لمقدارِ المتجهِ $|\mathbf{\vec{v}}|$:

$$|\mathbf{\vec{v}}| = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}$$

**أتعلَّمُ**

يُرمَزُ إلى مقدارِ المتجهِ $\mathbf{\vec{v}}$ بالرمزِ $|\mathbf{\vec{v}}|$

**مفهومٌ أساسيٌّ** — **مقدارُ المتجهِ**

إذا كانَتْ $P_1(x_1, y_1)$ هيَ نقطةَ بدايةِ المتجهِ $\mathbf{\vec{v}}$، وَ $P_2(x_2,y_2)$ هيَ نقطةَ نهايتِهِ، فإنَّهُ يُمكِنُ إيجادُ مقدارِهِ $|\mathbf{\vec{v}}|$ باستعمالِ الصيغةِ الآتيةِ:

$$|\mathbf{\vec{v}}| = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}$$

وإذا كانَ المتجهُ $\mathbf{\vec{v}}$ مكتوبًا بالصورةِ الإحداثيةِ $\mathbf{\vec{v}} = \langle v_1, v_2\rangle$، فإنَّهُ يُمكِنُ إيجادُ مقدارِهِ باستعمالِ الصيغةِ الآتيةِ:

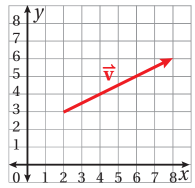
$$|\mathbf{\vec{v}}| = \sqrt{v_1^{\,2} + v_2^{\,2}}$$



## إرشادات للمُعلِّم/ للمُعلِّمة

أُوجِّه الطلبة إلى استعمال ورق المربعات أو ورق الرسم البياني لتمثيل المتجهات، إضافةً إلى المسطرة والمنقلة؛ فذلك يُكسِبهم مهارة التمثيل بسرعة ودقة، وأطلب إليهم استعمال الأقلام الملونة لتمييز المتجهات المختلفة بعضها من بعض.

### مثال 2




1 أَجِدُ مقدارَ المتجهِ $\vec{v}$ في الشكلِ المجاورِ.

**الخطوةُ 1:** أُحدِّدُ إحداثياتِ كلٍّ منْ نقطةِ بدايةِ المتجهِ، ونقطةِ نهايتِهِ.

إحداثيا نقطةِ بدايةِ المتجهِ $(2, 3)$، وإحداثيا نقطةِ نهايتِهِ $(8, 6)$.

**الخطوةُ 2:** أُعوِّضُ الإحداثياتِ في صيغةِ مقدارِ المتجهِ.

$$|\vec{v}| = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}$$ صيغةُ مقدارِ المتجهِ

$$= \sqrt{(8-2)^2 + (6-3)^2}$$ بالتعويضِ

$$= \sqrt{36 + 9}$$ بالتبسيطِ

$$= 3\sqrt{5}$$ بالتبسيطِ

2 أَجِدُ مقدارَ المتجهِ $\overrightarrow{AB} = \langle 4, -3 \rangle$

المتجهُ مكتوبٌ بالصورةِ الإحداثيةِ، إذنْ:

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$$ صيغةُ مقدارِ المتجهِ

$$= \sqrt{4^2 + (-3)^2}$$ بالتعويضِ

$$= 5$$ بالتبسيطِ

**أتحقق من فهمي**

أَجِدُ مقدارَ كلِّ متجهٍ ممّا يأتي:

a) $\overrightarrow{AB} = \langle -1, 4 \rangle$ $\sqrt{17}$

b) $\overrightarrow{CD} = \langle 5, -7 \rangle$ $\sqrt{74}$

يُمكِنُ استعمالُ النسبِ المثلثيةِ لإيجادِ اتجاهِ المتجهِ، وذلكَ باستعمالِ المثلثِ قائمِ الزاويةِ الذي يُمثِّلُ المتجهُ وترًا فيهِ.



## مثال 2

- أُوضِّح للطلبة مفهوم مقدار المتجه (طوله)، وكيفية حسابه إذا عُلِمت إحداثيات بداية المتجه ونهايته، أو صورته الإحداثية.
- أُناقِش الطلبة في حل هذا المثال الذي يُبيِّن كيفية إيجاد مقدار المتجه المُمثَّل على المستوى الإحداثي، أو المعطى بالصورة الإحداثية.

## مثال إضافي

- أجد مقدار كل متجه ممّا يأتي:

1 $\overrightarrow{AB}$ حيث $A(3, -7)$ و $B(0, -5)$ $\sqrt{13}$

2 $\overrightarrow{CD} = \langle 5, -10 \rangle$ $5\sqrt{5}$

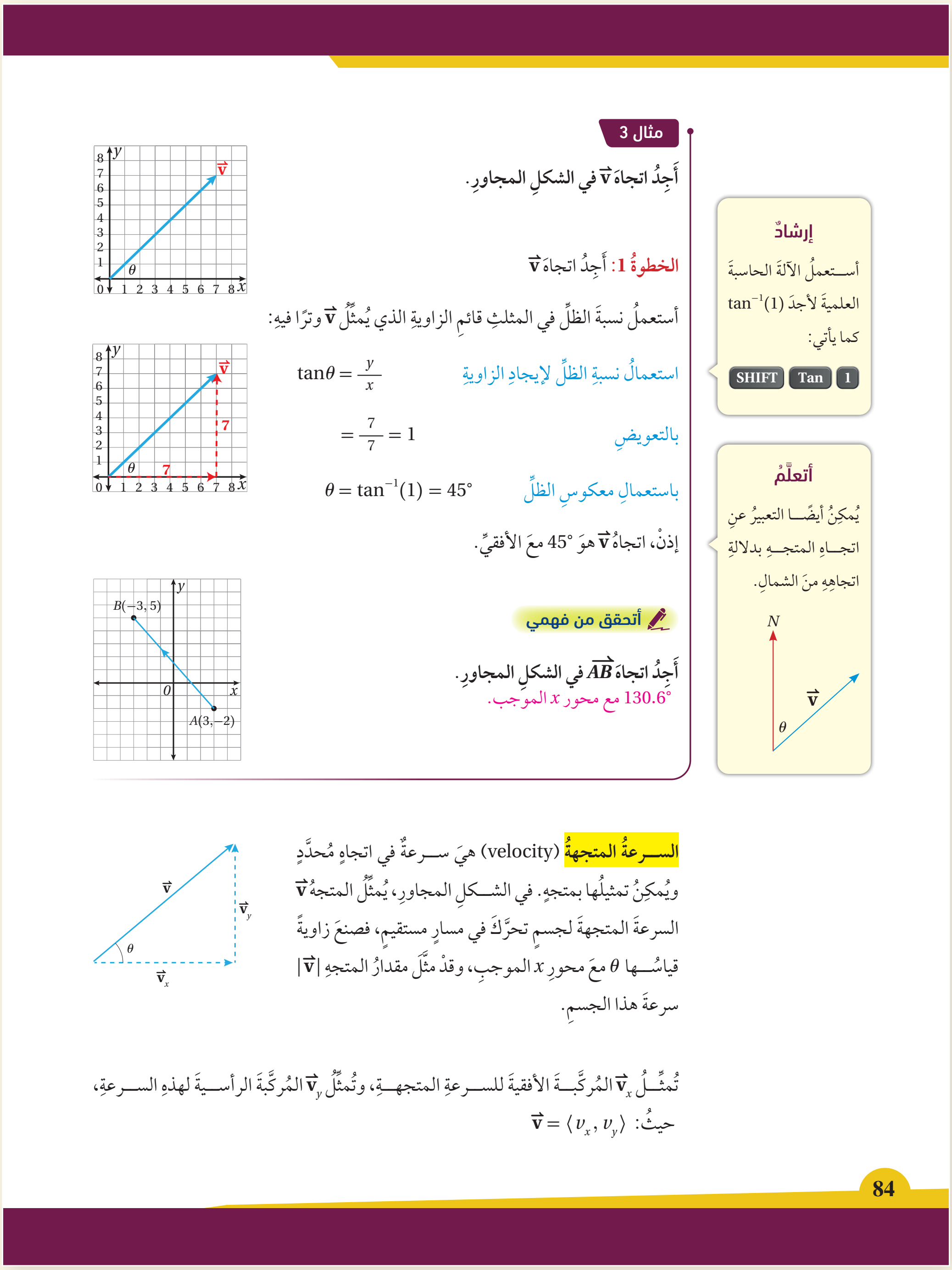
## مثال 3

- أُبيِّـن للطلبة أنَّ اتجاه أيِّ متجه يُحـدَّد بقياس الزاوية التي تصنعها القطعة المسـتقيمة التي تُمثِّله مع محور مرجعي، مثل محور $x$ الموجب عكس حركة عقارب الساعة، أو اتجاه الشمال مع حركة عقارب الساعة.
- أُناقِـش الطلبة في حـل هذا المثال الـذي يُبيِّن كيفية تحديد اتجاه متجه مرسـوم في الوضع القياسي، مُبيِّنًا أنَّ هذه الطريقة تُستعمَل إذا عُلِمت نقطتا بداية المتجه ونهايته، أو صورته الإحداثية، ثم أذكر أمثلة على ذلك.
- أطرح على الطلبة السؤال الآتي:

» هل يمكن استعمال نسبة أُخرى غير ظل الزاوية؟
نعم، ولكن يجب إيجاد طول المتجه أولًا.

**إرشـاد:** أُرشِـد الطلبة إلى اسـتعمال الآلة الحاسبة بصورة صحيحة لإيجاد قياس زاوية عُلِمت إحدى نسبها المثلثية.

**أخطـاء مفاهيمية:** قد يُخطِئ الطلبة من ذوي المستوى دون المتوسط في كتابة معادلة النسبة المثلثية؛ لـذا أَلِفت انتباههم إلـى الصيغ الصحيحة للنسب المثلثية في المثلث قائم الزاوية.


## مثال 3

أَجِدُ اتجاهَ $\vec{\mathbf{v}}$ في الشكلِ المجاورِ.

**الخطوةُ 1:** أَجِدُ اتجاهَ $\vec{\mathbf{v}}$

أستعملُ نسبةَ الظلِّ في المثلثِ قائمِ الزاويةِ الذي يُمثِّلُ $\vec{\mathbf{v}}$ وترًا فيهِ:

استعمالُ نسبةِ الظلِّ لإيجادِ الزاويةِ $\quad \tan\theta = \frac{y}{x}$

بالتعويضِ $\quad = \frac{7}{7} = 1$

باستعمالِ معكوسِ الظلِّ $\quad \theta = \tan^{-1}(1) = 45°$

إذنْ، اتجاهُ $\vec{\mathbf{v}}$ هوَ $45°$ معَ الأفقيِّ.

**أتحقق من فهمي**

أَجِدُ اتجاهَ $\overrightarrow{AB}$ في الشكلِ المجاورِ.
$130.6°$ مع محور $x$ الموجب.

**إرشادٌ**
أسـتعملُ الآلةَ الحاسبةَ العلميةَ لأجدَ $\tan^{-1}(1)$ كما يأتي:
SHIFT Tan 1

**أتعلَّمُ**
يُمكِنُ أيضًـا التعبيرُ عن اتجـاهِ المتجـهِ بدلالةِ اتجاهِهِ منَ الشمالِ.

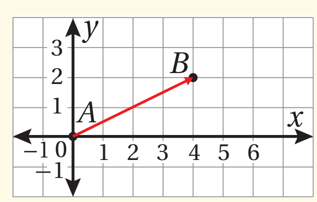
**السـرعةُ المتجهةُ** (velocity) هيَ سـرعةٌ في اتجاهٍ مُحدَّدٍ ويُمكِنُ تمثيلُها بمتجهٍ. في الشـكلِ المجاورِ، يُمثِّلُ المتجهُ $\vec{\mathbf{v}}$ السرعةَ المتجهةَ لجسمٍ تحرَّكَ في مسارٍ مستقيمٍ، فصنعَ زاويةً قياسُـها $\theta$ معَ محورِ $x$ الموجبِ، وقدْ مثَّلَ مقدارُ المتجهِ $|\vec{\mathbf{v}}|$ سرعةَ هذا الجسمِ.

تُمثِّـلُ $\vec{\mathbf{v}}_x$ المُركَّبـةَ الأفقيةَ للسـرعةِ المتجهـةِ، وتُمثِّلُ $\vec{\mathbf{v}}_y$ المُركَّبةَ الرأسـيةَ لهذهِ السـرعةِ، حيثُ: $\vec{\mathbf{v}} = \langle v_x, v_y \rangle$

84

## مثال إضافي

1. أجد اتجاه $\overrightarrow{AB}$ في الشكل الآتي.



$26.6°$ مع محور $x$ الموجب.

2. أجد اتجاه $\overrightarrow{LM} = \langle 4, -3 \rangle$

$323.1°$ مع محور $x$ الموجب.

يُمكِنُ استعمالُ النسبِ المثلثيةِ لكتابةِ المُركّبتَيْنِ الأفقيةِ والرأسيةِ للسرعةِ المتجهةِ بدلالةِ الزاويةِ $\theta$ التي تصنعُها السرعةُ المتجهةُ معَ محورِ $x$ الموجبِ كما يأتي:

$$v_x = |\vec{v}| \cos\theta$$

$$v_y = |\vec{v}| \sin\theta$$

عندئذٍ، يُمكِنُ كتابةُ السرعةِ المتجهةِ بالصورةِ الإحداثيةِ كما يأتي:

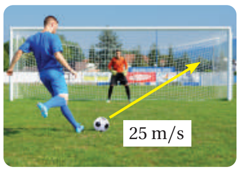
$$\vec{v} = \langle |\vec{v}| \cos\theta, |\vec{v}| \sin\theta \rangle$$

**أتعلّم**

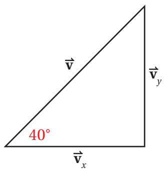
قدْ يُمثِّلُ المتجهُ أيضًا مسافةً متجهةً، أوْ قوةً متجهةً.

### مثال 4: من الحياة

**كرةُ قدمٍ:** ركلَ ريّانُ كرةً بسرعةِ **25m/s**، كما في الشكلِ المجاورِ، وبزاويةٍ مقدارُها **40°** معَ الأفقيِّ. أكتبُ المتجهَ الذي يُمثِّلُ السرعةَ المتجهةَ للكرةِ بالصورةِ الإحداثيةِ.




أرسمُ شكلًا مُبسَّطًا يُعبِّرُ عنِ المسألةِ، بحيثُ يكونُ فيهِ $|\vec{v}| = 25$، وَ $\theta = 40°$:




$\vec{v} = \langle |\vec{v}|\cos\theta, |\vec{v}| \sin\theta \rangle$    $\vec{v}_x = |\vec{v}| \cos\theta$ ، و $\vec{v}_y = |\vec{v}| \sin\theta$

$= \langle 25 \cos 40°, 25 \sin 40° \rangle$    بالتعويضِ

$= \langle 25 \times 0.7660, 25 \times 0.6428 \rangle$    بتعويضِ قيمِ النسبِ المثلثيةِ للزاويةِ 40°

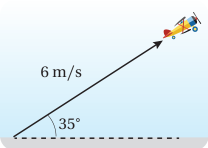
$= \langle 19.15, 16.07 \rangle$    بالتبسيطِ

إذنْ، $\vec{v} = \langle 19.15, 16.07 \rangle$ هوَ المتجهُ الذي يُمثِّلُ سرعةَ الكرةِ.

ازدادَ الاعتمادُ على الطائراتِ المُسيَّرةِ عنْ بُعْدٍ في كثيرٍ مِنَ المجالاتِ، مثلِ: رصدِ الازدحاماتِ المروريةِ، ومراقبةِ انتشارِ حرائقِ الغاباتِ.

**أتحقق من فهمي**

**ألعابٌ:** أقلعَتْ طائرةٌ تتحكَّمُ فيها ميساءُ عنْ بُعْدٍ، بزاويةِ قياسُها **35°** عنْ سطحِ الأرضِ، وبسرعةِ **6 m/s** كما في الشكلِ المجاورِ.




أكتبُ المتجهَ الذي يُمثِّلُ السرعةَ المتجهةَ للطائرةِ.

$\langle 4.91 , 3.44 \rangle$



### مثال 4: من الحياة

- أُوضِّح للطلبة كيفية تحليل المتجه إلى مركبة أفقية وأُخرى رأسية باستعمال النسب المثلثية لزاوية الاتجاه.
- أُناقِش الطلبة في حل هذا المثال الذي يُبيِّن كيفية كتابة الصورة الإحداثية لسرعة متجهة باستعمال زاوية الاتجاه.

**إرشاد:** أُؤكِّد باستمرار الفرق بين مفاهيم السرعة المتوسطة، والسرعة اللحظية، والسرعة المتجهة.

### مثال إضافي

- انطلق صاروخ ألعاب نارية بسرعة 32 m/s، وبزاوية مقدارها 45° مع الأفقي. أكتب المتجه الذي يُمثِّل السرعة المتجهة للصاروخ بالصورة الإحداثية.

$\langle 16\sqrt{2} , 16\sqrt{2} \rangle$

### تنويع التعليم:

- أستعمل برمجية جيوجبرا، وأطلب إلى الطلبة استعمالها لاستكشاف المتجهات، وتعلُّم الكثير عنها.
- أطلب إلى الطلبة تصفُّح موقع برمجية جيوجبرا الإلكتروني الذي يحوي معلومات مفيدة لدراسة جميع دروس الوحدة:

https://www.geogebra.org/t/2d–vectors

## 4 التدريب

- أُوجِّه الطلبة إلى قراءة الأسئلة في بند (**أتدرب وأحل المسائل**)، ثم أطلب إليهم حل الأسئلة ذات الأرقام الزوجية من (2–24).
- أتجوَّل بين الطلبة مُرشِدًا، ومُساعِدًا، ومُوجِّهًا، وأُقدِّم لهم التغذية الراجعة.
- إذا واجه بعض الطلبة صعوبة في حل أيِّ مسألة، فأختار طالبًا تمكَّن من حل المسألة، وأطلب إليه كتابة حله على اللوح.

**تنبيه:**

عند حل الأسئلة (1–6)، أُوجِّه الطلبة إلى افتراض أنَّ النقطة الأولى من اليسار هي نقطة بداية المتجه، وأنَّ النقطة الثانية هي نهايته.

### الواجب المنزلي:

- أطلب إلى الطلبة أنْ يحلوا في البيت جميع المسائل الواردة في الصفحة العشرين من كتاب التمارين، مُحدِّدًا لهم المسائل التي يمكنهم حلها في نهاية كل حصة بحسب ما يُقدَّم من أمثلة الدرس وأفكاره.
- يمكن أيضًا إضافة المسائل التي لم يحلها الطلبة داخل غرفة الصف إلى الواجب المنزلي.
- في اليوم التالي، أَطَّلع على حلول الطلبة، وأُناقِشهم في أيِّ صعوبات واجهوها في أثناء الحل.

### أتدرب وأحل المسائل

أكتبُ كلَّ متجهٍ عُلِمَتْ نقطتا بدايتِهِ ونهايتِهِ في ما يأتي بالصورةِ الإحداثيةِ، ثمَّ أَجِدُ مقدارَهُ:

1) $(2, 5), (4, -1)$ — $\langle 2, -6\rangle$ $|\vec{\mathbf{u}}| = 2\sqrt{10}$

2) $(-4, 7), (-3, 0)$ — $\langle 1, -7\rangle$ $|\vec{\mathbf{u}}| = 5\sqrt{2}$

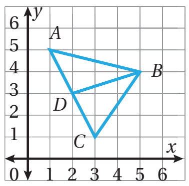
3) $(6, -2), (8, 1)$ — $\langle 2, 3\rangle$ $|\vec{\mathbf{u}}| = \sqrt{13}$

4) $(4, -9), (3, -5)$ — $\langle -1, 4\rangle$ $|\vec{\mathbf{u}}| = \sqrt{17}$

5) $(-1.5, 3), (0.5, -4)$ — $\langle 2, -7\rangle$ $|\vec{\mathbf{u}}| = \sqrt{53}$

6) $(-6, -\frac{2}{3}), (-2, -\frac{1}{3})$ — $\langle 4, \frac{1}{3}\rangle$ $|\vec{\mathbf{u}}| = \frac{\sqrt{145}}{3}$

اعتمادًا على الشكلِ المجاورِ، أكتبُ كلًّا منَ المتجهاتِ الآتيةِ بالصورةِ الإحداثيةِ:




7) $\overrightarrow{AB}$ $\langle 4, -1\rangle$

8) $\overrightarrow{DB}$ $\langle 3, 1\rangle$

9) $\overrightarrow{CB}$ $\langle 2, 3\rangle$

10) $\overrightarrow{CA}$ $\langle -2, 4\rangle$

11) $\overrightarrow{AC}$ $\langle 2, -4\rangle$

12) $\overrightarrow{DA}$ $\langle -1, 2\rangle$

13) في السؤالِ السابقِ، أُبيِّنُ أنَّ $|\overrightarrow{DC}| = |\overrightarrow{AD}|$. ماذا أستنتجُ منْ موقعِ النقطةِ $D$ على القطعةِ المستقيمةِ $\overline{AC}$ ؟

$|\overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{DC}| = \sqrt{5}$، $D$ نقطة منتصف القطعة المستقيمة $\overline{AC}$

أَجِدُ مقدارَ كلِّ متجهٍ ممّا يأتي:

14) $\langle 2,-6\rangle$ $2\sqrt{10}$

15) $\langle 7,-8\rangle$ $\sqrt{113}$

16) $\langle -1,-1\rangle$ $\sqrt{2}$

17) $\langle 3,5\rangle$ $\sqrt{34}$

18) $\langle 0,0\rangle$ $0$

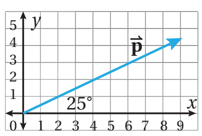
19) $\langle 2, 9\rangle$ $\sqrt{85}$

إذا كانَتْ $M$ هيَ نقطةَ منتصفِ $\overline{FG}$، حيثُ $F(4, 2)$ وَ $G(2, 6)$، وكانَتْ $O$ هيَ نقطةَ الأصلِ، فأكتبُ كلَّ متجهٍ ممّا يأتي بالصورةِ الإحداثيةِ:

20) $\overrightarrow{FG}$ $\langle -2, 4\rangle$

21) $\overrightarrow{GF}$ $\langle 2, -4\rangle$

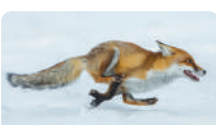
22) $\overrightarrow{OM}$ $\langle 3, 4\rangle$




23) أُعبِّرُ عنِ اتجاهِ المتجهِ $\vec{\mathbf{p}}$ في الشكلِ المجاورِ بطريقتيْنِ.

اتجاه $\vec{\mathbf{p}}$ هو $25°$ مع الأفقي.

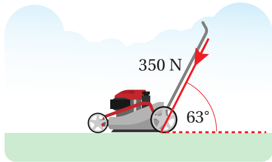
اتجاه $\vec{\mathbf{p}}$ هو $065°$



24) **حيواناتٌ:** أكتبُ السرعةَ المتجهةَ لثعلبٍ يُطارِدُ أرنبًا على منحدرٍ بالصورةِ الإحداثيةِ إذا كانَتْ سرعتُهُ الأفقيةُ $v_x = 27$ km/h، وسرعتُهُ الرأسيةُ $v_y = 25$ km/h

$\langle 27, 25\rangle$

**25** **فيزياءُ:** تدفعُ نورُ عربةً بقوةٍ مقدارُها 350N، وبزاويةٍ قياسُها °63 معَ المحورِ الأفقيِّ. أكتبُ متجهَ القوةِ بالصورةِ الإحداثيةِ.



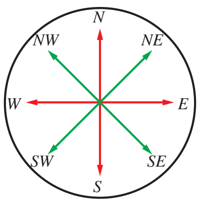

$\langle 158.90 , 311.85 \rangle$

**26** أكتبُ المتجهَ $\vec{\mathbf{v}}$ بالصورةِ الإحداثيةِ إذا كانَ $|\vec{\mathbf{v}}| = 27$، وصنعَ زاويةً مقدارُها °90 معَ محورِ $x$. $\langle 0 , 27 \rangle$

**27** أكتبُ المتجهَ $\vec{\mathbf{v}}$ بالصورةِ الإحداثيةِ إذا كانَ $|\vec{\mathbf{v}}| = 10$، وصنعَ زاويةً مقدارُها °320 معَ محورِ $x$.

$\langle 7.66 , -6.43 \rangle$

**28** خرجَ عبدُ الرحمنِ منْ منزلِهِ، وسارَ بخطٍّ مستقيمٍ شرقًا إلى المسجدِ مسافةَ 248 m، ثمَّ خرجَ منْهُ مرَّةً أُخرى، وسارَ بخطٍّ مستقيمٍ جنوبًا نحوَ منزلِ صديقِهِ يحيى مسافةَ 562 m. أُعبِّرُ عنِ المسارِ بينَ منزلِ عبدِ الرحمنِ ومنزلِ صديقِهِ على شكلِ متجهٍ بالصورةِ الإحداثيةِ (**إرشادٌ: البُعْدُ بينَ نقطتيْنِ هوَ أقصرُ مسافةٍ بينَهُما**).




$\langle 248 , -562 \rangle$

### مهارات التفكير العليا

**29** **تحدٍّ:** إذا كانَ $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{13}$ حيثُ $A(1, 2)$ نقطةُ بدايتِهِ، والنقطةُ $B(3, y)$ نقطةُ نهايتِهِ، فأَجِدُ إحداثيَّي النقطةِ $B$، مُبرِّرًا إجابتي. أنظر الهامش.

**30** **تبريرٌ:** ما مجموعةُ قيمِ $b$ التي يكونُ عندَها مقدارُ المتجهِ $\langle 4, b \rangle$ يساوي 5؟ أُبرِّرُ إجابتي. أنظر الهامش.

**31** **أكتشفُ الخطأَ:** حسبَ كلٌّ منْ ناصرٍ وليلى مقدارَ المتجهِ $\vec{\mathbf{v}} = \langle 6, -1 \rangle$، فكانَتْ إجابةُ كلٍّ منْهُما كما يأتي:

| ناصرٌ | ليلى |
|---|---|
| $\lvert\vec{\mathbf{v}}\rvert = 37$ | $\lvert\vec{\mathbf{v}}\rvert = \sqrt{35}$ |

هلْ إجابةُ أيٍّ منْهُما صحيحةٌ، مُبرِّرًا إجابتي؟

كلتا الإجابتين غير صحيحة؛ لأنَّ ناصرًا نسي الجذر التربيعي، وليلى طرحت مربعي المركبتين بدلًا من جمعهما.

**32** **مسألةٌ مفتوحةٌ:** أرسمُ متجهًا على المستوى الإحداثيِّ، ثمَّ أكتبُهُ بالصورةِ الإحداثيةِ، ثمَّ أَجِدُ مقدارَهُ.

ستتنوع إجابات الطلبة. هذا مثال على إجابة صحيحة: $\overrightarrow{AB} = \vec{\mathbf{v}} = \langle 6,-4 \rangle$

$|\vec{\mathbf{v}}| = \sqrt{36+16} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$



## إجابات أسئلة بند (أتدرب وأحل المسائل):

**29)**

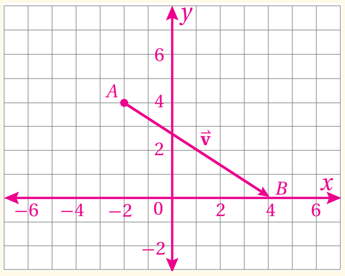
$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(2)^2 + (y-2)^2} = \sqrt{13}$$
$$4 + (y-2)^2 = 13$$
$$(y-2)^2 = 9$$
$$y - 2 = \pm 3 \Rightarrow y = 5, y = -1$$

إذن، إحداثيا $B$ هما: $(3, 5)$، أو $(3, -1)$.

**30)**

$$|\vec{\mathbf{v}}| = \sqrt{16 + b^2} = 5$$
$$b^2 = 9 \Rightarrow b = \pm 3$$

**32)**




## مهارات التفكير العليا

- أُشرِك الطلبة كافةً في حل هذه المسائل؛ لتنمية مهارات التفكير العليا لديهم.
- أتذكَّر أنَّه ليس شرطًا أنْ يتمكَّن الطلبة كافةً من حل المسائل جميعها، ولكن يجب عليهم أنْ يحاولوا حلها.
- أطلب إلى الطلبة – ضمن مجموعات– حل المسائل في بند (**مهارات التفكير العليا**)، ثم أطلب إلى أفراد بعضها بيان كيفية توصُّلهم إلى الحل في كل مسألة، وأمنح الآخرين فرصة نقد إجابات زملائهم وتقويمها.
- أُحفِّز الطلبة على تبرير إجاباتهم.

## 5 الإثراء

- أطرح على الطلبة السؤال الآتي:

» إذا كانت $A(3, -2), B(4, 3), C(6, y)$، وكانت $B$ تقسم القطعة المستقيمة $\overline{AC}$ بنسبة 1:2، فما العلاقة بين $|\overrightarrow{AB}|$، وَ $|\overrightarrow{BC}|$؟ ما قيمة $y$؟

مقدار المتجه $\overrightarrow{BC}$ يساوي مثلي مقدار المتجه $\overrightarrow{AB}$، $y = 13$.

### تعليمات المشروع:

- أطلب إلى الطلبة البدء بتنفيذ الخطوات (3–1) من المشروع.
- أُوجِّه الطلبة إلى تنظيم إجراءاتهم وتوثيقها بنسخ صورة (print screen) للشاشة في كل خطوة.
- أُتابِع أفراد المجموعات في أثناء تنفيذ مشروع الوحدة، وأُزوِّدهم بتغذية راجعة وإرشادات لتحسينه.

## 6 الختام

- أطلب إلى الطلبة الإجابة عن الأسئلة الآتية في ورقة، ثم تسليمها لي في نهاية الحصة:

» ما الفرق بين الكمية القياسية والكمية المتجهة؟

» أذكر 3 أمثلة على كلٍّ منهما.

» أُبيِّن بمثالٍ كيفية إيجاد مقدار متجه عُلِمت بدايته ونهايته.

# الدرس 2

## نتاجات الدرس

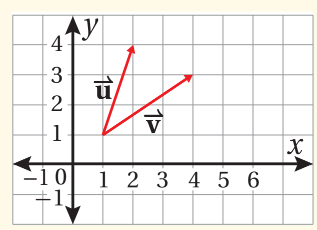
- التمييز بين المتجهات المتساوية، والمتجهات المتوازية، ومعكوس المتجه، والتعبير عنها بالرموز.
- حل مسائل عن جمع المتجهات، وطرحها، وضربها في عدد حقيقي هندسيًّا وجبريًّا.
- تعرُّف المتجه الصفري.
- إيجاد محصلة متجهين أو أكثر هندسيًّا وجبريًّا في مواقف رياضية وحياتية.

## التعلُّم القبلي:

- كتابة المتجه بالصورة الإحداثية.
- إيجاد مقدار المتجه واتجاهه.
- كتابة المركبتين الأفقية والرأسية لمتجه معطى.
- حل المثلث باستعمال قانون الجيوب، وقانون جيوب التمام.

## 1 التهيئة

- أرسم على لوح المستوى الإحداثي المتجهين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ كما في الشكل الآتي:




- أطلب إلى الطلبة التعبير عن هذين المتجهين بالصورة الإحداثية.
- أطلب إلى الطلبة إيجاد المقدار والاتجاه لكلٍّ من $\vec{u}$ و $\vec{v}$.
- أُكمِل الشكل المرسوم إلى مثلث، مُذكِّرًا الطلبة بكيفية تطبيق قانوني الجيوب وجيوب التمام لحل المثلث.

الدرس 2

جمعُ المتجهاتِ وطرحُها

Adding and Subtracting Vectors

**فكرةُ الدرسِ** إجراءُ العملياتِ على المتجهاتِ.

**المصطلحاتُ** المتجهاتُ المتساويةُ، المتجهاتُ المتوازيةُ، معكوسُ المتجهِ، المحصلةُ، المتجهُ الصفريُّ.

**مسألةُ اليومِ** بدأَتْ طائرةٌ رحلتَها نحوَ الشمالِ فقطعتْ مسافةَ 400 km ثمَّ اتجهتْ شرقًا وقطعتْ مسافةَ 250 km إذا مثّلَ كلٌّ منَ المسارَيْنِ اللّذينِ سلكَتْهُما الطائرةُ مُتجهًا في المستوى الإحداثيِّ، فماذا يمكنُ أنْ يمثلَ جمعُ هذينِ المتجهينِ؟

**أتعلَّمُ** لا يُشترطُ أنْ يكونَ للمتجهينِ المتساويينِ نُقطَتا البدايةِ والنهايةِ ذاتاهُما.

**المتجهانِ المتساويانِ** (equal vectors) هما متجهانِ لهُما نفسُ الاتجاهِ والمقدارِ. ففي الشكلِ المجاورِ، المتجهاتُ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ متساويةٌ، وبالرموزِ: $\vec{a} = \vec{b} = \vec{c}$

**المتجهانِ المتوازيانِ** (parallel vectors) هما متجهانِ لهُما الاتجاهُ نفسُهُ، أوْ عكسُهُ، وليسَ شرطًا أنْ يكونَ لهُما المقدارُ نفسُهُ. ففي الشكلِ المجاورِ، المتجهاتُ $\vec{a}, \vec{e}, \vec{f}$ متوازيةٌ، وبالرموزِ: $\vec{a} \parallel \vec{e} \parallel \vec{f}$

**معكوسُ المتجهِ** (opposite vectors) هوَ متجهٌ لهُ نفسُ مقدارِ متجهٍ آخرَ، لكنَّهُ في اتجاهٍ مُعاكِسٍ لهُ. ففي الشكلِ المجاورِ، المتجهُ $\vec{d}$ معكوسُ المتجهِ $\vec{a}$، وبالرمزِ: $-\vec{a}$؛ أيْ إنَّ $\vec{d} = -\vec{a}$

**مثال 1**

**في الشكلِ المجاورِ، $QRSP$ متوازي أضلاعٍ، فيهِ $\overrightarrow{PQ} = \vec{a}$ ، وَ $\overrightarrow{QR} = \vec{b}$. أُعبِّرُ عنْ كلٍّ ممّا يأتي باستعمالِ المتجهيْنِ $\vec{a}$ وَ $\vec{b}$:**

1) $\overrightarrow{SR}$

$\overrightarrow{SR} = \vec{a}$ متجهٌ موازٍ ومساوٍ للمتجهِ $\overrightarrow{PQ}$

2) $\overrightarrow{SP}$

$\overrightarrow{SP} = -\vec{b}$ متجهٌ موازٍ ومعكوسٌ للمتجهِ $\overrightarrow{QR}$

ملاحظات المُعلِّم/ المُعلِّمة

## 2 الاستكشاف

- أُوجِّه الطلبة إلى قراءة المسألة في بند (**مسألة اليوم**)، ثم أسألهم:
  - » ما الصورة الإحداثية للمتجه الذي يُمثِّل الجزء الأول من رحلة الطائرة؟ $\langle 0, 400 \rangle$
  - » ما الصورة الإحداثية للمتجه الذي يُمثِّل الجزء الثاني من رحلة الطائرة؟ $\langle 250, 0 \rangle$
  - » ما الصورة الإحداثية للمتجه الذي يُمثِّل رحلة الطائرة كاملة؟ $\langle 250, 400 \rangle$
  - » ما علاقة هذه المتجهات بعضها ببعض؟ متجه الرحلة الكاملة يمثل مقدار الإزاحة من نقطة بداية الرحلة إلى نقطة نهايتها.
- أستمع لإجابات الطلبة من دون تقديم تغذية راجعة لهم، ثم أسألهم:
  - » مَنْ يُؤيِّد الإجابة؟
  - » مَنْ لديه إجابة أُخرى؟
  - » أذكرها.

وذلك لتعزيز مهارات التواصل واحترام الرأي والرأي الآخر لديهم. بعد ذلك أُوضِّح لهم أنَّهم سيتعرَّفون في هذا الدرس ما يُمكِّنهم من الإجابة عن هذه المسألة ومسائل مشابهة، ثم أكتب العنوان على اللوح.

## 3 التدريس

- أُوضِّح للطلبة المقصود بالمتجهين المتساويين (equal vectors)، والمتجهين المتوازيين (parallel vectors) ومعكوس المتجه (opposite vector)، وأُعبِّر عنها بالرموز، ثم أرسمها مُستعمِلًا المسطرة والمنقلة.

### مثال 1

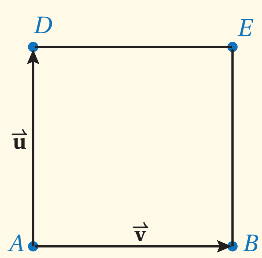
- أُناقِش الطلبة في حل هذا المثال، ثم أرسم متوازي أضلاع على لوح المستوى الإحداثي مُشابِه للمعطى في المثال، مُبرِّرًا كل خطوة من خطوات الحل (يمكن اختيار طالب من ذوي المستوى فوق المتوسط لذكر التبرير).
- أُذكِّر الطلبة أنَّ كل ضلعين متقابلين في متوازي الأضلاع يكونان متطابقين ومتوازيين.

### تعزيز اللغة ودعمها:

أُكرِّر المصطلحات الرياضية المستخدمة في الدرس باللغتين العربية والإنجليزية، وأُحفِّز الطلبة على استعمالها، مثل: المتجهين المتساويين (equal vectors)، والمتجهين المتوازيين (parallel vectors)، ومعكوس المتجه (opposite vector)، والمحصلة (resultant).

### مثال إضافي

- في الشكل المجاور، $ABED$ مربع، فيه $\overrightarrow{AB} = \mathbf{\vec{v}}$ ، $\overrightarrow{AD} = \mathbf{\vec{u}}$.
أُعبِّر عن كلٍّ من $\overrightarrow{EB}$ و $\overrightarrow{DE}$ باستعمال المتجهين $\mathbf{\vec{u}}, \mathbf{\vec{v}}$ .




$\overrightarrow{DE} = \mathbf{\vec{v}}\ ,\ \overrightarrow{EB} = -\mathbf{\vec{u}}$

3 $\overrightarrow{QP}$

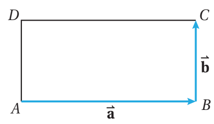
$\overrightarrow{QP} = -\vec{a}$ متجهٌ موازٍ ومعكوسٌ للمتجهِ $\overrightarrow{PQ}$

4 $\overrightarrow{RQ}$

$\overrightarrow{RQ} = -\vec{b}$ متجهٌ موازٍ ومعكوسٌ للمتجهِ $\overrightarrow{QR}$

**أتحقق من فهمي**

في الشــكلِ المجاورِ، $ABCD$ مســتطيلٌ، فيهِ $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$، وَ $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$ . أُعبِّرُ عنْ كلٍّ ممّا يأتي باستعمالِ المتجهيْنِ $\vec{a}$ وَ $\vec{b}$:




a) $\overrightarrow{AD}$ $\vec{b}$  b) $\overrightarrow{DC}$ $\vec{a}$  c) $\overrightarrow{CB}$ $-\vec{b}$

**جمعُ المتجهاتِ هندسيًا**

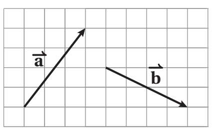
يمكن إيجاد ناتج جمع متجهين أو أكثر هندسياً.

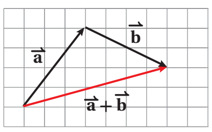
لإيجادِ $\vec{a} + \vec{b}$ هندسيًا، أتَّبعُ الخطواتِ الآتيةَ:

**الخطوةُ 1:** أرسمُ المتجهَ $\vec{a}$.

**الخطوةُ 2:** أرسمُ المتجهَ $\vec{b}$ بحيثُ تكونُ نقطةُ بدايتِهِ هيَ نقطةَ نهايةِ المتجهِ $\vec{a}$.

**الخطوةُ 3:** أَصِلُ بينَ نقطةِ بدايةِ المتجهِ $\vec{a}$ ونقطةِ نهايةِ المتجهِ $\vec{b}$، فيكونُ المتجهُ الناتجُ هوَ المتجهَ $\vec{a} + \vec{b}$.



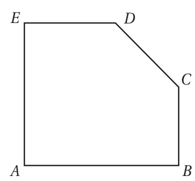

يُســمّى المتجهُ الناتجُ منْ جمعِ متجهيْــنِ أوْ أكثرَ **المحصلةَ** (resultant)، وتســمّى هذهِ الطريقةُ فــي جمعِ المتجهاتِ هندسيًّا قاعدةَ المثلثِ.

**أتعلَّمُ**

لا يتأثَّــرُ المتجــهُ بتغييرِ موقعِهِ ما دام أنَّ اتجاهَهُ ومقدارَهُ لم يتغيّرا.

**مثال 2**

اعتمادًا على الشكلِ المجاورِ، أكتبُ المتجهَ الذي يُمثِّلُ ناتجَ الجمعِ في كلٍّ ممّا يأتي:




1 $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}$

$\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{BA}$ أَصِلُ نقطةَ بدايةِ $\overrightarrow{BC}$ بنقطةِ نهايةِ $\overrightarrow{CA}$، فينتجُ $\overrightarrow{BA}$

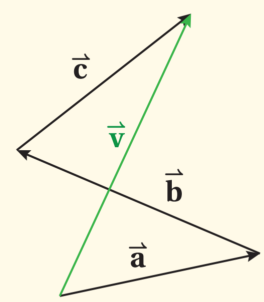


## التقويم التكويني:

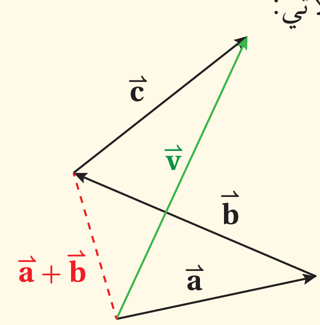
- أُوجِّه الطلبة إلــى حل التدريب في بنــد (**أتحقق من فهمي**) بعد كل مثال (فرديًّا، أو ضمن مجموعات).
- أتجوَّل بين الطلبة مُرشِدًا، ومُساعِدًا، ومُوجِّهًا، وأُقدِّم لهم التغذية الراجعة.
- أختار بعض الإجابــات التي تحوي أخطاء مفاهيمية، ثم أُناقِشــها على اللوح، ولا أذكر اسم الطالب الذي أخطأ في الإجابة؛ تجنبًا لإحراجه.

## التدريس

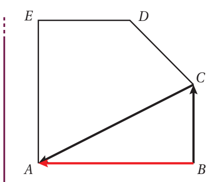
- أُوضِّح للطلبة خطوات إيجاد مجموع متجهين هندسيًّا باستعمال قاعدة المثلث.
- أرسم متجهين على لوح المستوى الإحداثي لتوضيح أنَّ المتجه $\vec{b}$ يبقى كمــا هو من حيث الطول والاتجاه عند عمل انسحاب له، بحيث تنطبق نقطة بدايته على نقطة نهاية المتجه $\vec{a}$.
- أُخبِر الطلبة أنَّ $\vec{a} + \vec{b}$ هو متجه يُسمّى متجه المحصلة (resultant)، وأنَّ له التأثير نفســه الذي يُحدِثه كلٌّ من المتجهين $\vec{a}, \vec{b}$ الواحد تلو الآخر.
- أرسم على اللوح شكلًا يُشبِه الشكل الآتي، مُستعمِلًا أقلامًا ذات ألوان لتمييز متجه المحصلة.




- أُخبِر الطلبة أنَّ $\vec{v} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ هو متجه المحصلة، وأنَّه ناتــج جمع المتجهات $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$، ثم أشــرح لهم قاعدة المثلــث؛ لجمع المتجهين $\vec{a}, \vec{b}$ أولًا، ثم جمع المحصلة $\vec{a} + \vec{b}$ مع المتجه $\vec{c}$ لينتج المتجه $\vec{v}$ كما في الشكل الآتي:




- أؤكِّد للطلبة أنَّه يمكن تطبيق قاعدة المثلث عند إيجاد مجموع متجهين أو أكثر.




2 $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EC}$

$\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{BC}$ أَصِلُ نقطةَ بدايةِ $\overrightarrow{BA}$ بنقطةِ نهايةِ $\overrightarrow{EC}$

3 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}$

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AE}$ أَصِلُ نقطةَ بدايةِ $\overrightarrow{AB}$ بنقطةِ نهايةِ $\overrightarrow{DE}$

4 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}$

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{AA}$ أَصِلُ نقطةَ بدايةِ $\overrightarrow{AB}$ بنقطةِ نهايةِ $\overrightarrow{CA}$

**أتعلَّمُ**

- يُسمّى المتجهُ $\overrightarrow{AA}$ المتجهَ الصفريَّ؛ وهوَ متجهٌ ليسَ لهُ مقدارٌ واتجاهٌ.
- لأيِّ متجهٍ $\vec{\mathbf{a}}$، فإنَّ:

$\vec{\mathbf{a}}+0=0+\vec{\mathbf{a}}=\vec{\mathbf{a}}$

$\vec{\mathbf{a}}+(-\vec{\mathbf{a}})=(-\vec{\mathbf{a}})+\vec{\mathbf{a}}=0$

**أتحقق من فهمي**

اعتمادًا على الشكلِ في المثالِ 2، أكتبُ المتجهَ الذي يُمثِّلُ ناتجَ الجمعِ في كلٍّ ممّا يأتي:

a) $\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{CB}$ $\overrightarrow{AB}$

b) $\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{DC}$ $\overrightarrow{BC}$

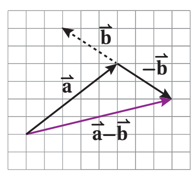
### طرحُ المتجهاتِ هندسيًّا

يُمكِنُ إيجادُ ناتجِ طرحِ متجهيْنِ أوْ أكثرَ هندسيًّا.

لإيجادِ $\vec{\mathbf{a}}-\vec{\mathbf{b}}$، أجمعُ المتجهَ $\vec{\mathbf{a}}$ معَ معكوسِ المتجهِ $\vec{\mathbf{b}}$؛ أيْ:

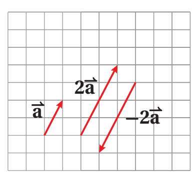
$$\vec{\mathbf{a}}-\vec{\mathbf{b}}=\vec{\mathbf{a}}+(-\vec{\mathbf{b}})$$

ولذلكَ يُمكِنُ إيجادُ ناتجِ طرحِ $\vec{\mathbf{a}}-\vec{\mathbf{b}}$ هندسيًّا بطريقةٍ مشابهةٍ لعمليةِ الجمعِ. وذلكَ بإيجادِ محصلةِ $\vec{\mathbf{a}}$ وَ $-\vec{\mathbf{b}}$ كما في الشكلِ المجاورِ.




### ضربُ المتجهِ في عددٍ ثابتٍ هندسيًّا

ينتجُ منْ ضربِ المتجهِ $\vec{\mathbf{a}}$ في العددِ الحقيقيِّ $k$ متجهٌ موازٍ للمتجهِ $\vec{\mathbf{a}}$، ويكونُ للمتجهيْنِ $k\vec{\mathbf{a}}$، وَ $\vec{\mathbf{a}}$ الاتجاهُ نفسُهُ إذا كانَ $k$ عددًا موجبًا، واتجاهانِ مُتعاكِسانِ إذا كانَ $k$ عددًا سالبًا.




$$2\vec{\mathbf{a}}=\vec{\mathbf{a}}+\vec{\mathbf{a}}$$

$$-2\vec{\mathbf{a}}=(-\vec{\mathbf{a}})+(-\vec{\mathbf{a}})$$

90

## مثال 2

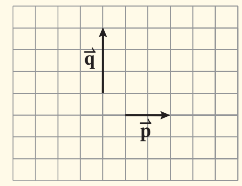
- قبل البدء بتقديم المثال 2، أرسم المضلع $ABCDE$ المعطى في المثال على اللوح.
- أُناقِش الطلبة في حل فروع المثال، مُبرِّرًا الناتج في كل فرع.
- عند مناقشة الطلبة في حل الفرع 4، أُوضِّح لهم أنَّ متجه المحصلة الناتج $\overrightarrow{AA}$ يُسمّى المتجه الصفري، ثم أسألهم: لماذا سُمِّي بهذا الاسم؟ لعدم وجود طول واتجاه له.
- أُوضِّح للطلبة كيفية طرح المتجهات برسم المتجهين $\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}$ باستعمال لوح المستوى الإحداثي والأقلام الملونة.
- أُوضِّح للطلبة كيفية تطبيق قاعدة المثلث لإيجاد ناتج طرح متجهين هندسيًّا، حيث $\vec{\mathbf{a}}-\vec{\mathbf{b}}=\vec{\mathbf{a}}+(-\vec{\mathbf{b}})$
- عند رسم معكوس المتجه $\vec{\mathbf{b}}$، أستعمل لونًا مختلفًا لتمييزه، مراعيًا أنْ تنطبق نقطة بدايته على نقطة نهاية المتجه $\vec{\mathbf{a}}$.
- عند رسم متجه المحصلة: $\vec{\mathbf{a}}-\vec{\mathbf{b}}$، أستعمل لونًا مختلفًا لتمييزه.
- أُوضِّح للطلبة كيفية تمثيل المتجه $\vec{\mathbf{a}}$ بعد ضربه في عدد حقيقي، وابدأ بالمتجه $2\vec{\mathbf{a}}$، و$3\vec{\mathbf{a}}$، ثم $-2\vec{\mathbf{a}}$، و$-3\vec{\mathbf{a}}$، و$-0.5\vec{\mathbf{a}}$
- في أثناء تمثيل المتجه $k\vec{\mathbf{a}}$، حيث $k$ عدد حقيقي، أعكس اتجاه المتجه الناتج عندما يكون $k$ عددًا سالبًا.

## مثال 3

- أناقِش الطلبة في حل هــذا المثال، مســتعينًا بلوح المستوى الإحداثي والأقلام الملونة.

## مثال إضافي

- اعتمادًا على الشــكل المجاور، أجد هندسيًّا كلًّا ممّا يأتي:

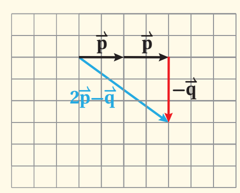



1) $2\vec{p}-\vec{q}$

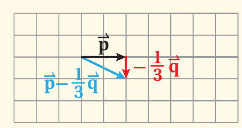
2) $\vec{p}-\frac{1}{3}\vec{q}$

**الحل:**

1)




2)



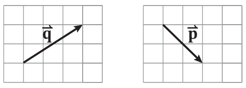

### تنويع التعليم (استراتيجية التعلّم بالأقران)

- قد يواجه بعض الطلبة من ذوي المســتوى المتوسط ودون المتوســط صعوبــة فــي تمثيــل المتجهات، وبخاصة تلك التي تُضرَب في عدد حقيقي كســري، وحل مسائل عنها هندسيًّا؛ لذا أطلب إليهم حل المثال الإضافي ضمن مجموعات؛ ما يُســهِّل عليهم تمثيل المتجهات هندسيًّا عندما تكون أفقية أو رأسية.
- أُوزِّع الطلبة الذين أتقنوا مهــارات تمثيل المتجهات على المجموعات؛ لمســاعدة زملائهم في أثناء حل التمارين في بند (أتحقــق من فهمي)، أو بند (أتدرب وأحل المسائل).
- أكتب النص الوارد في بند (مفهوم أساسي) على يمين اللوح بخط واضح، مُســتعمِلًا الألوان المناســبة، ثم أُوضِّح للطلبة كيفية إجــراء عمليات الجمع والطرح والضرب فــي عدد حقيقي عندما تكــون المتجهات مكتوبة بالصورة الإحداثية.
- أُخبِر الطلبة أنَّه يمكن التحقُّق ممّا ورد في البند السابق بتمثيل المتجهات هندســيًّا، ثم أذكر أمثلة عددية على ذلك.



**مثال 3**

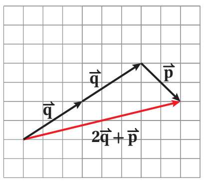
اعتمادًا على الشكلِ المجاورِ، أَجِدُ هندسيًّا كلًّا ممّا يأتي:




1) $2\vec{q}+\vec{p}$

الخطوةُ 1: أرسمُ المتجهَ $2\vec{q}$

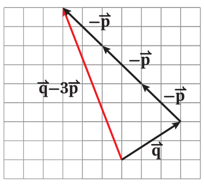
الخطوةُ 2: أَجِدُ محصلةَ المتجهيْنِ $2\vec{q}$ وَ $\vec{p}$




2) $\vec{q}-3\vec{p}$

الخطوةُ 1: أرسمُ المتجهَ $-3\vec{p}$ منْ رأسِ المتجهِ $\vec{q}$

الخطوةُ 2: أَجِدُ محصلةَ المتجهيْنِ $\vec{q}$ وَ $-3\vec{p}$




اكتُشِــفَتِ المتجهاتُ قبلَ 200 عام تقريبًا، وهيَ تُعَدُّ منَ الفــروعِ الحديثةِ في علمِ الرياضيــاتِ مقارنةً بعلمِ الجبرِ. وقدْ أســهمَ اكتشــافُها كثيرًا في الربطِ بيــنَ الهندســةِ والجبرِ؛ مــا أدّى إلى تطــوُّرِ علمِ الرياضياتِ.

**أتحقق من فهمي**

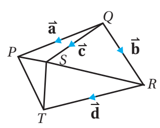
اعتمادًا على الشكلِ في المثالِ 3، أَجِدُ هندسيًّا كلًّا ممّا يأتي: أنظر الهامش.

a) $\vec{p}+3\vec{q}$ b) $3\vec{q}-2\vec{p}$ c) $2\vec{q}-\frac{1}{2}\vec{p}$

يمكنُ اســتعمالُ قاعدةِ المثلّثِ بطريقةٍ عكســيّةٍ؛ لكتابةِ متّجهٍ يمثّلُ ضلعًا في شــكلٍ هندسيٍّ بدلالةِ متّجهاتٍ تمثّلُ أضلاعًا أخرى في الشكلِ.

**مثال 4**

اعتمادًا على الشكلِ المجاورِ، أكتبُ كلًّا منَ المتّجهاتِ الآتيةِ بدلالةِ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$




1) $\overrightarrow{PS}$

$\overrightarrow{PS}=\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QS}$ بجمعِ المتّجهينِ هندسيًّا باستعمالِ $\Delta PQS$

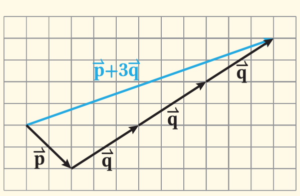
$=-\vec{a}+\vec{c}$ بالتعويضِ

$=\vec{c}-\vec{a}$ بالتبسيطِ

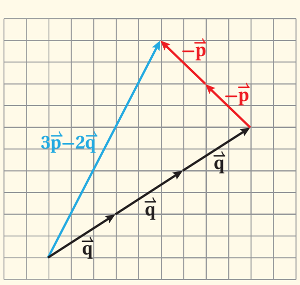


### إجابة سؤال بند (أتحقق من فهمي 3):

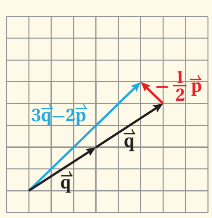
a) $\vec{p}+3\vec{q}$




b) $3\vec{q}-2\vec{p}$




c) $2\vec{q}-0.5\vec{p}$



**2** $\overrightarrow{RP}$

$\overrightarrow{RP} = \overrightarrow{RQ} + \overrightarrow{QP}$ بجمعِ المتّجهينِ هندسيًّا باستعمالِ $\Delta RQP$

$= -\vec{\mathbf{b}} + \vec{\mathbf{a}}$ بالتعويضِ

$= \vec{\mathbf{a}} - \vec{\mathbf{b}}$ بالتبسيطِ

**3** $\overrightarrow{PT}$

$\overrightarrow{PT} = \overrightarrow{PR} + \overrightarrow{RT}$ بجمعِ المتّجهينِ هندسيًّا باستعمالِ $\Delta PRT$

$= (\vec{\mathbf{b}} - \vec{\mathbf{a}}) + \vec{\mathbf{d}}$ $\quad \overrightarrow{PR} = -\overrightarrow{RP} = -(\vec{\mathbf{a}} - \vec{\mathbf{b}}) = \vec{\mathbf{b}} - \vec{\mathbf{a}}$

$= \vec{\mathbf{b}} + \vec{\mathbf{d}} - \vec{\mathbf{a}}$ بالتبسيطِ

**4** $\overrightarrow{TS}$

$\overrightarrow{TS} = \overrightarrow{TR} + \overrightarrow{RS}$ بجمعِ المتّجهينِ هندسيًّا باستعمالِ $\Delta TRS, \Delta RQS$

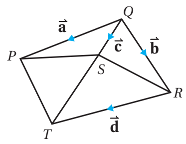
$= \overrightarrow{TR} + (\overrightarrow{RQ} + \overrightarrow{QS})$ $\quad \overrightarrow{RS} = \overrightarrow{RQ} + \overrightarrow{QS}$

$= -\vec{\mathbf{d}} + (-\vec{\mathbf{b}} + \vec{\mathbf{c}})$ بالتعويضِ

$= \vec{\mathbf{c}} - \vec{\mathbf{b}} - \vec{\mathbf{d}}$ بالتبسيطِ

**أتحقق من فهمي**

اعتمادًا على الشـــكلِ المجاورِ، أكتبُ كلًّا منَ المتّجهاتِ الآتيةِ بدلالةِ $\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}, \vec{\mathbf{c}}, \vec{\mathbf{d}}$ أنظر الهامش.




a) $\overrightarrow{SR}$ b) $\overrightarrow{QT}$ c) $\overrightarrow{PT}$ c) $\overrightarrow{ST}$

### جمعُ المتجهاتِ وطرحُها وضربُها في ثابتٍ جبريًّا

يُمكِـــنُ إيجادُ ناتجِ الجمعِ والطرحِ والضربُ في ثابتٍ للمتجهاتِ المكتوبةِ بالصورةِ الإحداثيةِ عنْ طريقِ جمعِ مُركّباتِها الأفقيةِ والرأسيةِ، أوْ طرحِها.

**مفهومٌ أساسيٌّ** **جمعُ المتجهاتِ وطرحُها وضربُها في ثابتٍ**

إذا كانَ $\vec{\mathbf{a}} = \langle x_1, y_1 \rangle$ ، وَ $\vec{\mathbf{b}} = \langle x_2, y_2 \rangle$، وكانَ $k$ عددًا حقيقيًّا، فإنَّ:

$\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}} = \langle x_1+x_2, y_1+y_2 \rangle$ $\quad \vec{\mathbf{a}} - \vec{\mathbf{b}} = \langle x_1-x_2, y_1-y_2 \rangle$ $\quad k\vec{\mathbf{a}} = \langle kx_1, ky_1 \rangle$



**إجابة سؤال بند (أتحقق من فهمي 4):**

a) $\overrightarrow{SR} = \overrightarrow{SQ} + \overrightarrow{QR} = -\vec{\mathbf{c}} + \vec{\mathbf{b}}$

b) $\overrightarrow{QT} = \overrightarrow{QR} + \overrightarrow{RT} = \vec{\mathbf{b}} + \vec{\mathbf{d}}$

c) $\overrightarrow{PT} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QT} = -\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}} + \vec{\mathbf{d}}$

d) $\overrightarrow{ST} = \overrightarrow{SR} + \overrightarrow{RT} = -\vec{\mathbf{c}} + \vec{\mathbf{b}} + \vec{\mathbf{d}}$

## مثال 5

- أُناقِش الطلبــة في حل هذا المثــال، وألفِت انتباههم إلــى أهمية اســتعمال الأقواس في كل فــرع؛ لتمييز المتجهات بالصورة الإحداثية.
- أخبِــر الطلبــة أنَّ المتجهات المعطــاة هي متجهات بالوضع القياســي (standard position)، وأنَّ أيَّ متجه على المســتوى الإحداثي يمكن كتابته بالوضع القياسي من دون أنْ يُؤثِّر ذلك في مقداره أو اتجاهه.
- يمكنني الاســتفادة من برمجية جيوجبرا في توضيح حل المســائل المعطاة عــن المتجهــات، والتحقُّق هندسيًّا من صحة ناتج كلٍّ منها.

## مثال إضافي

إذا كان $\vec{u} = \langle -3, 5\rangle$، وكان $\vec{v} = \langle 4, 7\rangle$، وكان $\vec{w} = \langle -1, -4\rangle$، فأجد كلًّا ممّا يأتي:

a) $-3\vec{u}$ $\langle 9, -15\rangle$

b) $\vec{v} - \vec{w}$ $\langle 5, 11\rangle$

c) $2\vec{u} + 3\vec{v}$ $\langle 6, 31\rangle$

d) $4(\vec{w} - 1.5\vec{u}) + 2\vec{v}$ $\langle 22, -32\rangle$

## إجابة سؤال بند (أتحقق من فهمي 5):

a) $-\vec{b} = \langle 2, -7\rangle$

b) $4\vec{c} = \langle 0, -20\rangle$

c) $\vec{b} - \vec{c} = \langle -2, 12\rangle$

d) $4\vec{a} + 3\vec{c} = \langle 12, -1\rangle$



### مثال 5

إذا كانَ $\vec{a} = \langle 3, 1\rangle$، وَ $\vec{b} = \langle -4, 6\rangle$، وَ $\vec{c} = \langle -3, -1\rangle$، فأجِدْ كلًّا ممّا يأتي:

1) $\vec{a} + \vec{b}$

$$\vec{a} + \vec{b} = \langle 3 + (-4), 1 + 6\rangle = \langle -1, 7\rangle$$

2) $2\vec{a}$

$$2\vec{a} = \langle 2 \times 3, 2 \times 1\rangle = \langle 6, 2\rangle$$

3) $\vec{c} - \vec{b}$

$$\vec{c} - \vec{b} = \langle -3 - (-4), -1 - 6\rangle = \langle 1, -7\rangle$$

4) $\vec{a} + \vec{c}$

$$\vec{a} + \vec{c} = \langle 3 + (-3), 1 + (-1)\rangle = \langle 0, 0\rangle$$

**أفكّر**

ما العلاقةُ بينَ المتجهَيْنِ $\vec{u} - \vec{v}$، $\vec{v} - \vec{u}$؟

**أتعلّم**

المتجهُ $\vec{a}$ هوَ معكوسُ المتجهِ $\vec{c}$؛ لأنَّ مجموعَهُما يساوي المتجهَ الصفريَّ؛ أيْ إنَّ: $\vec{a} + \vec{c} = \mathbf{0}$

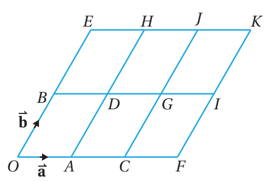
**أتحقق من فهمي** أنظر الهامش.

إذا كانَ $\vec{a} = \langle 3, 1\rangle$، وَ $\vec{b} = \langle -2, 7\rangle$، وَ $\vec{c} = \langle 0, -5\rangle$، فأجِدْ كلًّا ممّا يأتي:

a) $-\vec{b}$ b) $4\vec{c}$ c) $\vec{b} - \vec{c}$ d) $4\vec{a} + 3\vec{c}$

### أتدرب وأحل المسائل

أحدِّدُ كلًّا ممّا يأتي اعتمادًا على الشكلِ المجاورِ الذي يتكوَّنُ من متوازياتِ أضلاعٍ صغيرةٍ متطابقةٍ:




1) ثلاثةُ متجهاتٍ مساويةٍ للمتجهِ $\vec{a}$ $\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{CF}, \overrightarrow{HJ}, \overrightarrow{GI}, \overrightarrow{AC}$

2) ثلاثةُ متجهاتٍ موازيةٍ للمتجهِ $\vec{b}$ $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{CJ}, \overrightarrow{HJ}, \overrightarrow{FK}, \overrightarrow{OE}$

3) ثلاثةُ متجهاتٍ معاكسةٍ للمتجهِ $\vec{a}$ $\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{FC}, \overrightarrow{IB}, \overrightarrow{KE}, \overrightarrow{FO}$

4) ثلاثةُ متجهاتٍ مساويةٍ للمتجهِ $\overrightarrow{OD}$ $\overrightarrow{AG}, \overrightarrow{DJ}, \overrightarrow{JK}, \overrightarrow{BH}, \overrightarrow{CI}$

5) ثلاثةُ متجهاتٍ مساويةٍ للمتجهِ $\overrightarrow{OG}$ $\overrightarrow{BJ}, \overrightarrow{DK}, \overrightarrow{AJ}$

باستعمالِ الشكلِ الواردِ في السؤالِ السابقِ، أكتبُ كلاًّ منَ المتجهاتِ الآتيةِ بدلالةِ $\vec{\mathbf{a}}$ و $\vec{\mathbf{b}}$

6 المتجهُ $\overrightarrow{OC}$ $2\vec{\mathbf{a}}$

7 متجهُ الموقعِ للنقطةِ $E$ $2\vec{\mathbf{b}}$

8 متجهُ الموقعِ للنقطةِ $F$ $3\vec{\mathbf{a}}$

9 المتجهُ $\overrightarrow{OG}$ $2\vec{\mathbf{a}}+\vec{\mathbf{b}}$

10 المتجهُ $\overrightarrow{AG}$ $\vec{\mathbf{a}}+\vec{\mathbf{b}}$

11 المتجهُ $\overrightarrow{OK}$ $3\vec{\mathbf{a}}+2\vec{\mathbf{b}}$

إذا كانَ $\vec{\mathbf{a}}=\langle 34,-86\rangle$، وَ $\vec{\mathbf{b}}=\langle -65, 17\rangle$، وَ $\vec{\mathbf{c}}=\langle 9,-1\rangle$، فأَجِدُ كلًّا ممّا يأتي:

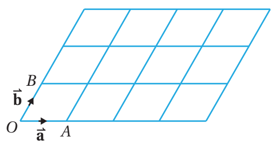
12 $\vec{\mathbf{a}}+\vec{\mathbf{c}}$ $\langle 43, -87\rangle$

13 $\vec{\mathbf{b}}-\vec{\mathbf{a}}$ $\langle -99, 103\rangle$

14 $3\vec{\mathbf{c}}+\vec{\mathbf{b}}$ $\langle -38, 14\rangle$

15 $\vec{\mathbf{a}}+\vec{\mathbf{b}}-2\vec{\mathbf{c}}$ $\langle -49, -67\rangle$

أنسـخُ الشكلَ المجاورَ الذي يتكوَّنُ من متوازياتِ أضلاعٍ صغيرةٍ متطابقةٍ، ثمَّ أحدّدُ عليهِ مواقعَ النقاطِ $C, D, E, F$ بحيثُ تحقّقُ كلًّا ممّا يأتي:




16 $\overrightarrow{OC}=2\vec{\mathbf{a}}+3\vec{\mathbf{b}}$

17 $\overrightarrow{OD}=2\vec{\mathbf{a}}+\vec{\mathbf{b}}$

18 $\overrightarrow{OE}=4\vec{\mathbf{a}}$

19 $\overrightarrow{OF}=4\vec{\mathbf{a}}+2\vec{\mathbf{b}}$

(16–19) أنظر ملحق الإجابات.

20 إذا كانَ $\langle 3x-y, y-x^2\rangle = \langle 7, -5\rangle$، فما قيمةُ كلٍّ منْ $x$ وَ $y$؟ $x=1$ و $y=4$، أو $x=2$ و $y=-1$

إذا كانَ $\vec{\mathbf{e}}=\langle -3, -2\rangle$، وَ $\vec{\mathbf{f}}=\langle 2, 4\rangle$، فأُمثِّلُ كلًّا منَ المتجهاتِ الآتيةِ على المستوى الإحداثيِّ:

21 $\vec{\mathbf{e}}+\vec{\mathbf{f}}$ انظر ملحق الإجابات

22 $3\vec{\mathbf{f}}$

23 $\vec{\mathbf{e}}-\vec{\mathbf{f}}$

24 $\vec{\mathbf{f}}-\vec{\mathbf{e}}$

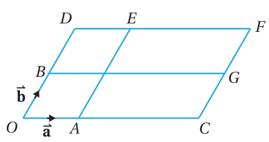
25 $4\vec{\mathbf{e}}$

26 $2\vec{\mathbf{f}}+\vec{\mathbf{e}}$

27 إذا كانَ $\vec{\mathbf{d}}=\langle 5, 9\rangle$، وَ $\vec{\mathbf{e}}=\langle 11, -8\rangle$، فأَجِدُ $|4\vec{\mathbf{d}}-3\vec{\mathbf{e}}|$، $|\frac{1}{3}\vec{\mathbf{e}}|$ أنظر ملحق الإجابات.

(28–32) أنظر ملحق الإجابات.

يتكوَّنُ الشكلُ المجاورُ من مجموعتينِ من المستقيماتِ المتوازية، إذا كان $\overrightarrow{OC}=3\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OD}=2\overrightarrow{OB}$ فأكتبُ كلاًّ منَ المتجهاتِ الآتيةِ بدلالةِ $\vec{\mathbf{a}}$ و $\vec{\mathbf{b}}$




28 $\overrightarrow{OF}$

29 $\overrightarrow{OG}$

30 $\overrightarrow{EG}$

31 $\overrightarrow{CE}$

32 اعتمادًا على الشكلِ السابقِ أحدّدُ متّجهينِ كلٌّ منهُما يساوي $(3\vec{\mathbf{a}}-\vec{\mathbf{b}})$



## 4 التدريب

- أُوجِّه الطلبة إلى حل الأسئلة (1–11) في مجموعات، وأتجوَّل بينهم مُرشِدًا، ومُساعِدًا، ومُوجِّهًا، وأُقدِّم لهم التغذية الراجعة.
- أُناقِش الطلبة في حل الأسئلة (12–27)، ثم أُشارِكهم في حلها على اللوح.
- أُخبِـر الطلبة أنَّه يمكنهم اسـتعمال برمجية جيوجبرا للتحقُّق من حل أسئلة الدرس في البيت، أو عن طريق تطبيق الهاتف، أو في مختبر المدرسة.
- إذا واجـه بعض الطلبـة صعوبة في حل أيِّ مسـألة، فأختار طالبًا تمكَّن من حل المسألة، وأطلب إليه كتابة حله على اللوح.
- أطلب إلـى الطلبة حل بقية الأسـئلة بعد الحصة، ثم عرضها عليَّ للتحقُّق من صحة الحل.

## الواجب المنزلي:

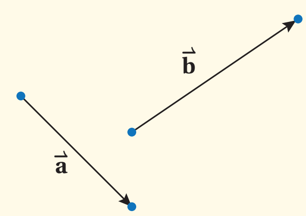
- أطلب إلى الطلبة أنْ يحلوا في البيت جميع المسـائل الواردة فـي الصفحة الحادية والعشـرين والصفحة الثانية والعشـرين مـن كتاب التماريـن، مُحدِّدًا لهم المسائل التي يمكنهم حلها في نهاية كل حصة بحسب ما يُقدَّم من أمثلة الدرس وأفكاره.
- يمكن أيضًا إضافة المسائل التي لم يحلها الطلبة داخل غرفة الصف إلى الواجب المنزلي.
- في اليوم التالي، أَطَّلِع على حلول الطلبة، وأُناقِشـهـم في أيِّ صعوبات واجهوها في أثناء الحل.

## مهارات التفكير العليا

- أُشرِك الطلبة كافةً في حل هذه المسائل؛ لتنمية مهارات التفكير العليا لديهم.
- أتذكَّر أنَّه ليس شرطًا أنْ يتمكَّن الطلبة كافةً من حل المسائل جميعها، ولكن يجب عليهم أنْ يحاولوا حلها.
- أطلب إلى الطلبة - ضمن مجموعات- حل المسائل في بند (**مهارات التفكر العليا**)، ثم أطلب إلى أفراد بعضها بيان كيفية توصُّلهم إلى الحل في كل مسألة، وأمنح الآخرين فرصة نقد إجابات زملائهم وتقويمها.
- أحفِّز الطلبة على تبرير إجاباتهم.
- عند حل السؤال 47، أُذكِّر الطلبة بخصائص المثلث متطابق الأضلاع: ارتفاعاته منصفات لأضلاعه (أيْ إنَّها القطع المتوسطة للمثلث)، ومنصفات لزواياه، وهي تتقاطع في مركزه الذي يقسم كل قطعة متوسطة بنسبة 2:1 من جهة الرأس.

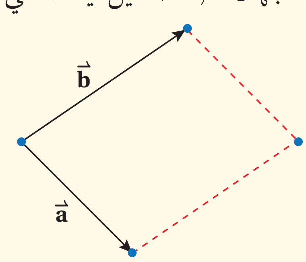
## 5 الإثراء

- أُوضِّح للطلبة كيفية إيجاد محصلة متجهين هندسيًا بطريقة أخرى تُسمّى قاعدة متوازي الأضلاع؛ إذ يمكن إيجاد محصلة المتجهين $\vec{a}, \vec{b}$ في الشكل المجاور باتباع الخطوات الآتية:

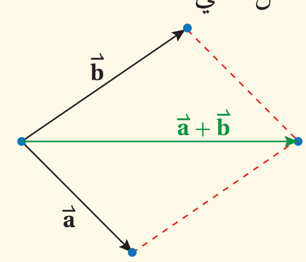



**الخطوة 1:** سحب المتجه $\vec{b}$ بحيث تنطبق نقطة بدايته على نقطة بداية المتجه $\vec{a}$.

**الخطوة 2:** إكمال رسم متوازي الأضلاع، بحيث يكون المتجهان $\vec{a}, \vec{b}$ ضلعين فيه كما في الشكل الآتي:



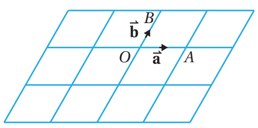

**الخطوة 3:** رسم قُطر متوازي الأضلاع المار بتقاطع المتجهين لتمثيل المتجه $\vec{a}+\vec{b}$ كما في الشكل الآتي:






**33** **نزهةٌ بحريةٌ:** أبحرَ قاربٌ سياحيٌّ مسافةَ 40 km جنوبًا، ثمَّ تحرَّكَ مسافةَ 70 km في اتجاهِ الشرقِ. أستعملُ جمعَ المتجهاتِ لأكتبَ متجهًا يمثِّلُ محصلةَ رحلةِ القاربِ وأجدُ بُعدَهُ عنْ نقطةِ انطلاقِهِ. أنظر ملحق الإجابات.

أنسخُ الشكلَ المجاورَ المكوَّنَ من متوازياتِ أضلاعٍ صغيرةٍ متطابقةٍ، ثمَّ أحدِّدُ عليهِ مواقعَ النقاطِ $C, D, E, F, G, H, I, J$ بحيثُ تحقِّقُ كلًّا ممّا يأتي:




(34–41) أنظر ملحق الإجابات.

**34** $\overrightarrow{OC} = 2\vec{a} - \vec{b}$

**35** $\overrightarrow{OD} = 2\vec{a} + \vec{b}$

**36** $\overrightarrow{OE} = \vec{a} - 2\vec{b}$

**37** $\overrightarrow{OF} = \vec{b} - 2\vec{a}$

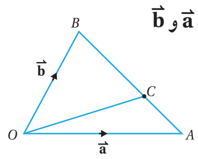
**38** $\overrightarrow{OG} = -\vec{a}$

**39** $\overrightarrow{OH} = -\vec{a} - 2\vec{b}$

**40** $\overrightarrow{OI} = 2\vec{a} - 2\vec{b}$

**41** $\overrightarrow{OJ} = -\vec{a} + \vec{b}$

في الشكلِ المجاورِ إذا كانتْ $C$ تقسمُ $\overline{AB}$ بنسبةِ 2:5 فأكتبُ كلاً مِنَ المتجهاتِ الآتيةِ بدلالةِ $\vec{a}$ و $\vec{b}$

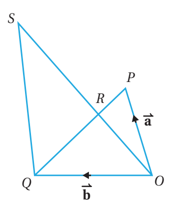



**42** $\overrightarrow{AB}$ **43** $\overrightarrow{AC}$ **44** $\overrightarrow{OC}$

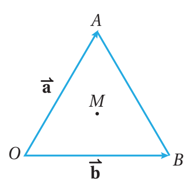
(42–44) أنظر ملحق الإجابات.

### مهارات التفكير العليا

**45** **برهانٌ:** في الشكلِ المجاورِ، إذا كانتْ $R$ تقسمُ كلًّا منْ $\overline{PQ}$، و $\overline{OS}$ بنسبةِ 2 : 1، وكانَ $\overrightarrow{OP} = \vec{a}$، و $\overrightarrow{OQ} = \vec{b}$، فأثبتُ أنَّ المتجهينِ $\overrightarrow{OP}$، و $\overrightarrow{QS}$ متوازيانِ. أنظر ملحق الإجابات.




**تحدٍّ:** يظهرُ في الشكلِ المجاورِ المثلثَ متطابقَ الأضلاعِ $OAB$ الذي مركزُهُ النقطةُ $M$؛ ما يعني أنَّ المستقيمَ الواصلَ بينَ رأسِ المثلثِ والنقطةِ $M$ عموديٌّ على الضلعِ المقابلِ:




**46** أكتبُ المتجهَ $\overrightarrow{AB}$ بدلالةِ $\vec{a}$ و $\vec{b}$ أنظر ملحق الإجابات.

**47** أثبتُ أنَّ $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b})$ أنظر ملحق الإجابات.



- أطلب إلى الطلبة إيجاد محصلة متجهين هندسيًا بطريقة قاعدة المثلث تارة، وبطريقة قاعدة متوازي الأضلاع تارة أُخرى، ثم تدوين مزايا كل طريقة.
- أطرح على الطلبة السؤال الآتي:
  » أيُّ الطريقتين تُفضِّلون؟

## تعليمات المشروع:

- أطلب إلى الطلبة البدء بتنفيذ الخطوة (4) من المشروع.
- أُذكِّر الطلبة بأنَّ مقياس الرسم في الخريطة يُعبِّر عن النسبة بين البُعْد على الخريطة والبُعْد الحقيقي على الأرض.

## 6 الختام

- أطلب إلى كل طالب اختيار فكرة فهمها من الدرس، وكتابة سؤال عنها في ورقة، أو اختيار فكرة لم يفهمها جيدًا، وكتابة سؤال عنها في ورقة.
- أطلب إلى كل طالب أنْ يُسلِّمني ورقته.
- بعد الاطلاع على الأوراق جميعها، أُخطِّط لكيفية معالجة جوانب الضعف التي أرصدها.

الدرس 3

# الضربُ القياسيُّ
## Scalar Product

**فكرةُ الدرس** ضربُ المتجهاتِ، وإيجادُ قياسِ الزاويةِ بينَ متجهيْنِ.

**المصطلحات** الضربُ القياسيُّ.

**مسألةُ اليوم** دفعَ محمدٌ عربةَ طفلتِهِ بقوةٍ مقدارُها 70 N، وبزاويةٍ مقدارُها 54° مسافةَ 18 m. ما مقدارُ الشغلِ الذي بذلَهُ لدفعِ العربةِ بوحدةِ جول (J)، وبإهمالِ قوةِ الاحتكاكِ؟

تعرَّفْتُ سابقًا العملياتِ على المتجهاتِ، مثلَ ضربِ متجهٍ في عددٍ ثابتٍ، وسأتعرَّفُ في هذا الدرسِ كيفيةَ إيجادِ ناتجِ ضربِ متجهيْنِ. **الضربُ القياسيُّ** (scalar product) هوَ عمليةٌ جبريةٌ بينَ متجهيْنِ، تنتجُ منْها كميةٌ قياسيةٌ يُرمَزُ إليْها بالرمزِ $\vec{v} \cdot \vec{w}$، وتُقرَأُ: $\vec{v}$ dot $\vec{w}$

**مفهومٌ أساسيٌّ** **الضربُ القياسيُّ**

إذا كانَ $\vec{v} = \langle v_1, v_2 \rangle$، وَ $\vec{w} = \langle w_1, w_2 \rangle$، فإنَّ: $\vec{v} \cdot \vec{w} = v_1 w_1 + v_2 w_2$

**مثال 1**

إذا كانَ $\vec{v} = \langle 2, 8 \rangle$، وَ $\vec{w} = \langle -5, 4 \rangle$، فأجِدْ $\vec{v} \cdot \vec{w}$:

| | |
|---|---|
| صيغةُ الضربِ القياسيِّ | $\vec{v} \cdot \vec{w} = v_1 w_1 + v_2 w_2$ |
| بالتعويضِ | $= 2 \times -5 + 8 \times 4$ |
| بالتبسيطِ | $= -10 + 32$ |
| | $= 22$ |

**أتعلَّمُ** يُسمّى الضربُ القياسيُّ أيضًا الضربَ النقطيَّ Dot product

**أتعلَّمُ** لأيِّ متجهٍ $\vec{u}$، فإنَّ: $\vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}|^2$

**أتحقق من فهمي**

إذا كانَ $\vec{u} = \langle 6, 9 \rangle$، وَ $\vec{v} = \langle -3, 2 \rangle$، فأجِدْ كلًّا ممّا يأتي:

a) $\vec{u} \cdot \vec{v}$ 0 b) $\vec{v} \cdot \vec{u}$ 0 c) $\vec{u} \cdot \vec{u}$ 117

96

الدرس 3

## نتاجات الدرس

- إيجاد ناتج الضرب القياسي لمتجهين.
- تعرُّف العلاقة بين الضرب القياسي ومقدار المتجه.
- إيجاد قياس الزاوية بين متجهين.
- حساب الشغل الناتج من تأثير قوة في تحريك جسم ما مسافة محددة.

## التعلُّم القبلي:

- جمع المتجهات، وطرحها، وضربها في عدد حقيقي.
- حل المثلث باستعمال قانون جيوب التمام.

## 1 التهيئة

- أُذكِّر الطلبة بما تعلَّموه عن المتجهات في الدرسين السابقين، ثم أطرح عليهم السؤال الآتي:

» إذا كان $\vec{u} = \langle 3, -2 \rangle, \vec{v} = \langle 4, 1 \rangle$، فأجد كلًّا ممّا يأتي:

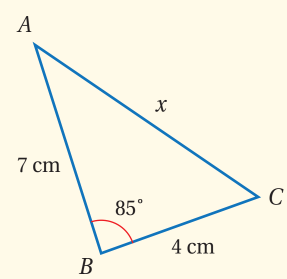
a) $\vec{u} + \vec{v}$ $\langle 7, -1 \rangle$

b) $\vec{v} - \vec{u}$ $\langle 1, 3 \rangle$

c) $2\vec{v} + 3\vec{u}$ $\langle 17, -4 \rangle$

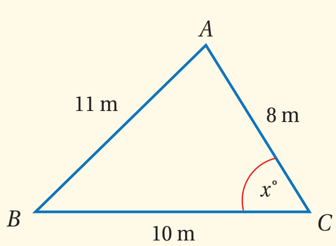
- أطلب إلى الطلبة إيجاد قيمة $x$ في المثلثين الآتيين:

1




7.8 cm

2




74.4°

## 2 الاستكشاف

- أُوجِّه الطلبة إلى قراءة المسألة في بند (**مسألة اليوم**)، ثم أسألهم:
  » ما المقصود بالشغل؟ الطاقة المبذولة لتحريك جسم ما مسافة محددة.
  » علامَ يعتمد مقدار الشغل؟ يعتمد على مقدار القوة المُؤثِّرة، واتجاهها، والمسافة التي تَحرَّكها الجسم.
  » ما وحدة قياس الشغل؟ الجول؛ وهو مقدار الشغل المبذول عندما تُؤثِّر قوة مقدارها نيوتن واحد في جسم يتحرك مسافة متر واحد في اتجاه تلك القوة.
  » هل أبذل شغلًا إذا حاولت دفع حائط غرفة الصف؟ لا؛ لأنَّه لن يتحرك.
- أستمع لإجابات الطلبة من دون تقديم تغذية راجعة لهم.
- أُخبِر الطلبة أنَّهم سيتعلَّمون في هذا الدرس كيفية حساب الشغل.

### تعزيز اللغة ودعمها:

أُكرِّر المصطلحات الرياضية المستخدمة في الدرس باللغتين العربية والإنجليزية، وأُحفِّز الطلبة على استعمالها، مثل: الضرب القياسي (scalar product)، والشغل (work).

## 3 التدريس

- أُوضِّح للطلبة مفهوم الضرب القياسي لمتجهين، وكيفية حسابه إذا أُعطِي متجهان بالصورة الإحداثية.

### مثال 1

أُناقِش الطلبة في حل هذا المثال الذي يُبيِّن كيفية إيجاد الضرب القياسي لمتجهين، مُوضِّحًا علاقة ناتج الضرب القياسي للمتجه في نفسه بمقدار المتجه (أو طوله) عندما يحل الطلبة التدريب في بند (**أتحقق من فهمي**).

### مثال إضافي

إذا كان $\vec{\mathbf{v}} = \langle -6, -3 \rangle$, $\vec{\mathbf{u}} = \langle \frac{3}{2}, -4 \rangle$، فأجد $\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}}$ .   3

### إرشادات للمُعلِّم/ للمُعلِّمة

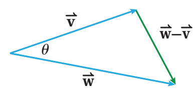
أُوضِّح للطلبة خطوات استنتاج الصيغة الخاصة بإيجاد قياس الزاوية بين متجهين من قانون جيوب التمام، مُبيِّنًا لهم أنَّه يمكن استعمال هذه الصيغة لإيجاد ناتج الضرب القياسي لمتجهين إذا عُلِم طول كلٍّ منهما، وقياس الزاوية بينهما.

### التقويم التكويني:

- أُوجِّه الطلبة إلى حل التدريب في بند (**أتحقق من فهمي**) بعد كل مثال.
- أختار بعض الإجابات التي تحوي أخطاء مفاهيمية، ثم أُناقِشها على اللوح، ولا أذكر اسم الطالب الذي أخطأ في الإجابة؛ تجنبًا لإحراجه.

### ملاحظات المُعلِّم/ المُعلِّمة

تعرَّفْتُ سابقًا أنَّهُ إذا كانَ $\vec{\mathbf{v}} = \langle v_1, v_2\rangle$، وَ $\vec{\mathbf{w}} = \langle w_1, w_2\rangle$، فإنَّ طولَ المتجهِ المرسومِ باللونِ الأخضرِ في الشكلِ المجاورِ هوَ $|\vec{\mathbf{w}}-\vec{\mathbf{v}}|$، حيثُ: $\vec{\mathbf{w}}-\vec{\mathbf{v}} = \langle w_1-v_1, w_2-v_2\rangle$




وباستعمالِ قانونِ جيوبِ التمامِ، فإنَّ:

$$|\vec{\mathbf{w}}-\vec{\mathbf{v}}|^2 = |\vec{\mathbf{w}}|^2 + |\vec{\mathbf{v}}|^2 - 2\,|\vec{\mathbf{w}}|\,|\vec{\mathbf{v}}| \cos\theta$$

$$(w_1-v_1)^2 + (w_2-v_2)^2 = w_1^{\,2} + w_2^{\,2} + v_1^{\,2} + v_2^{\,2} - 2|\vec{\mathbf{w}}|\,|\vec{\mathbf{v}}| \cos\theta$$

$$\cancel{w_1^{\,2}} - 2w_1 v_1 + \cancel{v_1^{\,2}} + \cancel{w_2^{\,2}} - 2 w_2 v_2 + \cancel{v_2^{\,2}} = \cancel{w_1^{\,2}} + \cancel{w_2^{\,2}} + \cancel{v_1^{\,2}} + \cancel{v_2^{\,2}} - 2|\vec{\mathbf{w}}||\vec{\mathbf{v}}|\cos\theta$$

$$-2w_1v_1 - 2w_1v_1 = -2|\vec{\mathbf{w}}|\,|\vec{\mathbf{v}}| \cos\theta$$ بالتبسيطِ

$$w_1 v_1 + w_2 v_2 = |\vec{\mathbf{w}}|\,|\vec{\mathbf{v}}| \cos\theta$$ بالتبسيطِ

$$v_1 w_1 + v_2 w_2 = |\vec{\mathbf{v}}|\,|\vec{\mathbf{w}}| \cos\theta$$ الخاصيةُ التبديليةُ

$$\vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{w}} = |\vec{\mathbf{v}}|\,|\vec{\mathbf{w}}| \cos\theta$$

ولذلكَ، فإنَّ:

$$\cos\theta = \frac{\vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{w}}}{|\vec{\mathbf{v}}|\,|\vec{\mathbf{w}}|}$$

### الزاويةُ بينَ متجهينِ

**مفهومٌ أساسيٌّ**

يمكِنُ إيجادُ قياسِ الزاويةِ $\theta$ بينَ المتجهينِ $\vec{\mathbf{a}}$ وَ $\vec{\mathbf{b}}$ حيثُ $0° \le \theta \le 180°$ باستعمالِ الصيغةِ الآتيةِ:

$$\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}} = |\vec{\mathbf{a}}|\,|\vec{\mathbf{b}}| \cos\theta$$

**مثال 2**

**أَجِدُ قياسَ الزاويةِ $\theta$ المحصورةِ بينَ المتجهيْنِ $\vec{\mathbf{a}} = \langle 6, 8\rangle$، وَ $\vec{\mathbf{b}} = \langle 3, 4\rangle$**

**الخطوةُ 1:** أَجِدُ مقدارَ المتجهِ $\vec{\mathbf{a}}$.

$$|\vec{\mathbf{a}}| = \sqrt{a_1^{\,2} + a_2^{\,2}}$$ صيغةُ مقدارِ المتجهِ

$$= \sqrt{6^2 + 8^2}$$ بالتعويضِ

$$= \sqrt{100} = 10$$ بالتبسيطِ



## مثال 2

- أُناقِش الطلبة في حــل هذا المثال الذي يُبيِّن خطوات إيجــاد قيــاس الزاوية بيــن متجهين غيــر صفريين، وأسألهم عن الحالات المختلفة للعلاقة بين متجهين، ثم أربطها بناتج الضرب القياسي.

## مثال إضافي

- أجد قياس الزاوية بين المتجهين

$\vec{\mathbf{w}} = \langle 1, -5\rangle, \vec{\mathbf{v}} = \langle -4, 2\rangle$ $\quad$ $127.9°$

**أخطاء شائعة:** قد يُخطِئ بعض الطلبة في حساب قياس الزاوية بين متجهين؛ لذا أُوجِّههم إلى رسـم المتجهين على المستوى الإحداثي، لملاحظة الزاوية بين المتجهين، ومقارنتها بإجاباتهم؛ للتحقُّق من معقولية الحل.

## إرشادات للمُعلِّم/ للمُعلِّمة

أُخبِر الطلبة أنّه توجد تسميات أُخرى للضرب القياسي، منها: الضرب النقطي (dot product)، والضرب الداخلي (inner product).

## مثال 3

- أُخبِر الطلبة أنَّ الضرب القياسي لمتجهين متعامدين يساوي صفرًا، مُبيِّنًا سبب ذلك.
- أُوضِّح للطلبة أنّه إذا كان الضرب الداخلي لمتجهين غير صفريين يساوي صفرًا فإنَّ المتجهين متعامدان.
- أُناقِش الطلبة في حل هذا المثال.

## مثال إضافي

- أُحدِّد إذا كان المتجهان في كلٍّ ممّا يأتي متعامدين، أو متوازيين، أو غير ذلك:

a) $\vec{u} = \langle 2, 4\rangle, \vec{v} = \langle -8, 4\rangle$ متعامدان.

b) $\vec{u} = \langle 1, -2\rangle, \vec{v} = \langle -3, 6\rangle$ متوازيان.

c) $\vec{u} = \langle -2, 4\rangle, \vec{v} = \langle -1, 5\rangle$ غير ذلك.

d) $\vec{u} = \langle 4, 5\rangle, \vec{v} = \langle 10, -8\rangle$ متعامدان.

---

**الخطوةُ 2:** أَجِدُ مقدارَ المتجهِ $\vec{b}$.

$|\vec{b}| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2}$ صيغةُ مقدارِ المتجهِ

$= \sqrt{3^2 + 4^2}$ بالتعويضِ

$= \sqrt{25} = 5$ بالتبسيطِ

**الخطوةُ 3:** أَجِدُ الضربَ القياسيَّ للمتجهينِ $\vec{a}$ وَ $\vec{b}$.

$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 . b_1 + a_2 . b_2$ صيغةُ الضربِ القياسيِّ

$= 6\times3 + 8\times4$ بالتعويضِ

$= 18 + 32$ بالتبسيطِ

$= 50$

**الخطوةُ 4:** أُعوِّضُ القيمةَ الناتجةَ منَ الخطوةِ السابقةِ في صيغةِ الزاويةِ بينَ متجهينِ.

$\cos\theta = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}$ صيغةُ الزاويةِ بينَ متجهينِ

$= \dfrac{50}{10\times5} = 1$ بالتعويضِ

$\theta = \cos^{-1}(1) = 0°$

بما أنَّ قياسَ الزاويةِ بينَ المتجهيْنِ $\vec{a}$ وَ $\vec{b}$ صفرٌ، فهُما متوازيانِ.

**أتحقق من فهمي**

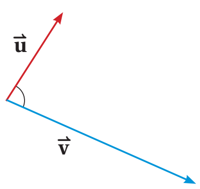
أَجِدُ قياسَ الزاويةِ $\theta$ المحصورةِ بينَ المتجهيْنِ $\vec{u} = \langle -1, 1\rangle$ وَ $\vec{v} = \langle 2, 7\rangle$ 61° تقريبًا.

تُستخدَمُ المتجهاتُ في إنتاجِ الألعابِ الإلكترونيةِ؛ فهيَ تساعدُ المبرمجينَ على ضبطِ المواقعِ والاتجاهاتِ لحركةِ الأجسامِ التي يتحكَّمُ فيها اللاعبونَ.

**إرشادٌ**

أرسمُ المتجهيْنِ في الوضعِ القياسيِّ في المستوى الإحداثيِّ، مُلاحِظًا وضعَ التوازي بينَهُما.

إذا كانَ $\vec{a}$ وَ $\vec{b}$ متجهيْنِ غيرَ صفريَّيْنِ، وكانَتِ الزاويةُ المحصورةُ بينَهُما قائمةً، فإنَّ المتجهيْنِ يكونانِ متعامدينِ، ويكونُ ناتجُ ضربِهما القياسي صفرًا؛ لأنَّ $\cos 90° = 0$



### مثال 3

أُحدِّدُ إذا كانَ المتجهانِ $\vec{\mathbf{v}} = \langle -6, 4 \rangle$، وَ $\vec{\mathbf{u}} = \langle 2, 3 \rangle$ متعامديْنِ أمْ لا.

صيغةُ الضربِ القياسيِّ: $\vec{\mathbf{u}} \bullet \vec{\mathbf{v}} = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2$

بالتعويضِ: $= 2\times -6 + 3\times 4$

بالتبسيطِ: $= -12 + 12$

$= 0$

بما أنَّ $\vec{\mathbf{u}} \bullet \vec{\mathbf{v}} = 0$ ، فإنَّ المتجهيْنِ متعامدانِ.

**أتحقق من فهمي**

أُحدِّدُ إذا كانَ المتجهانِ $\vec{\mathbf{v}} = \langle 3, -5 \rangle$، وَ $\vec{\mathbf{u}} = \langle 1, 0 \rangle$ متعامديْنِ أمْ لا.

غير متعامدين؛ لأنَّ ناتج ضربهما القياسي لا يساوي صفرًا، وإنَّما يساوي 3

توجدُ تطبيقاتٌ عمليةٌ عِدَّةٌ على الضربِ القياسيِّ للمتجهاتِ، أهمُّها حسابُ الشغلِ $W$ الناتجِ منْ تأثيرِ قوةٍ ثابتةٍ $\mathbf{F}$ بزاويةٍ مُحدَّدةٍ $\theta$ على جسمٍ ما؛ لتحريكِهِ منْ نقطةٍ إلى أُخرى مسافةً مقدارُها $\mathbf{d}$ وحدةً. فالشغلُ هوَ كميةٌ قياسيةٌ تساوي ناتجَ الضربِ القياسيِّ لمتجهِ القوةِ في متجهِ الإزاحةِ، ووحدةُ قياسِهِ هيَ جول (J). يُمكِنُ إيجادُ مقدارِ الشغلِ باستعمالِ الصيغةِ الآتيةِ:

$$W = |\vec{\mathbf{F}}|\,|\vec{\mathbf{d}}| \cos\theta$$

**أتعلَّمُ**

وَحدةُ قياسِ الشغلِ هيَ نيوتـن - متر، وتُسمّى الجـول، ويُرمَزُ إليْها بالرمزِ J

### مثال 4: من الحياة

**فيزياءُ:** سحبَ عاملٌ صندوقًا بقوةٍ مقدارُها $\vec{\mathbf{F}} = 13$ N، وبذلَ شغلًا مقدارُهُ $W = 20$ J لسحبِ الصندوقِ مسافةً أفقيةً مقدارُها $\vec{\mathbf{d}} = 18$ m. ما قياسُ الزاويةِ المحصورةِ بينَ قوةِ السحبِ واتجاهِ المسافةِ المقطوعةِ (بإهمالِ قوةِ الاحتكاكِ) لأقربِ جزءٍ منْ عشرةٍ؟

قانونُ الشغلِ: $W = |\vec{\mathbf{F}}|\,|\vec{\mathbf{d}}| \cos\theta$

بالتعويضِ: $20 = 13 \times 18 \times \cos\theta$

بالتبسيطِ: $20 = 234 \times \cos\theta$



### مثال 4: من الحياة

- أُناقِش الطلبة في مفهوم الشغل، وصيغة إيجاده، ثم أكتب على اللوح وحدتي القوة والشغل.
- أُناقِش الطلبة في حل هذا المثال.

## إرشادات للمُعلِّم/ للمُعلِّمة

**القوة:** مُؤثِّرٌ يؤدي إلى تغيير حالة الجسم الحركية. والقوة من الكميات المتجهة، وهي تقاس بوحدة نيوتن. أمّا الشغل فهو من الكميات المرتبطة بالقوة؛ إذ تبذل القوة شغلًا على جسم ما عندما تُحرِّكه في اتجاه ما بمقدار إزاحةٍ معين، ويقاس الشغل بوحدة جول.

## مثال إضافي

تدفع سلوى مكنسة كهربائية بقوة مقدارها 17 N، وتصنع ذراع المكنسة زاوية قياسها 65° مع أرضية الغرفة. ما الشغل (بالجول) الذي تبذله سلوى لتحريك المكنسة مسافة 4 m بإهمال قوة الاحتكاك؟ 28.7 J تقريبًا.

## 4 التدريب

- أُوجِّه الطلبة إلى قراءة الأسئلة في بند (**أتدرب وأحل المسائل**)، ثم أطلب إليهم حل الأسئلة (1–10) ضمن مجموعات.
- أتجوَّل بين الطلبة مُرشِدًا، ومُساعِدًا، ومُوجِّهًا، وأُقدِّم لهم التغذية الراجعة.

### الواجب المنزلي:

- أطلب إلى الطلبة أنْ يحلوا في البيت جميع المسائل الواردة في الصفحة الثالثة والعشرين من كتاب التمارين، مُحدِّدًا لهم المسائل التي يمكنهم حلها في نهاية كل حصة بحسب ما يُقدَّم من أمثلة الدرس وأفكاره.
- يمكن أيضًا إضافة المسائل التي لم يحلها الطلبة داخل غرفة الصف إلى الواجب المنزلي.
- في اليوم التالي، أَطَّلِع على حلول الطلبة، وأُناقِشهم في أيِّ صعوبات واجهوها في أثناء الحل.

---

بالتبسيطِ $\frac{20}{234} = \cos\theta$

معكوسُ جيبِ التمامِ $\theta = \cos^{-1}(0.0855)$

باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ $\theta = 85.1°$

**أتحقق من فهمي**

سحبَ منذرٌ عربةً، فبذلَ شغلًا مقدارُهُ 13 J، بقوةٍ مقدارُها 50 N، مسافةَ $\vec{\mathbf{d}} = 30$ m

ما قياسُ الزاويةِ المحصورةِ بينَ قوةِ السحبِ واتجاهِ المسافةِ المقطوعةِ (بإهمالِ قوةِ الاحتكاكِ) لأقربِ جزءٍ منْ عشرةٍ؟

89.5° تقريبًا.

**أتدرب وأحل المسائل**

أَجِدُ ناتجَ الضربِ القياسيِّ للمتجهيْنِ في كلٍّ ممّا يأتي:

1) $\vec{\mathbf{a}} = \langle 6, 8 \rangle, \vec{\mathbf{b}} = \langle 4, -3 \rangle$ 0

2) $\vec{\mathbf{u}} = \langle -3, 11 \rangle, \vec{\mathbf{v}} = \langle -9, 4 \rangle$ 71

3) $\vec{\mathbf{c}} = \langle -12, 43 \rangle, \vec{\mathbf{v}} = \langle 22, 14 \rangle$ 338

4) $\vec{\mathbf{d}} = \langle 21, 32 \rangle, \vec{\mathbf{e}} = \langle -21, 25 \rangle$ 359

5) إذا كانَ $|\vec{\mathbf{b}}| = 6$، وَ $|\vec{\mathbf{a}}| = 9$، وكانَ قياسُ الزاويةِ المحصورةِ بينَ $\vec{\mathbf{a}}$ وَ $\vec{\mathbf{b}}$ هوَ 42°، فأَجِدُ ناتجَ $\vec{\mathbf{a}} \bullet \vec{\mathbf{b}}$ 40.13

6) إذا كانَ $|\vec{\mathbf{b}}| = 76$، وَ $|\vec{\mathbf{a}}| = 34$، وكانَ قياسُ الزاويةِ المحصورةِ بينَ $\vec{\mathbf{a}}$ وَ $\vec{\mathbf{b}}$ هوَ 120°، فأَجِدُ ناتجَ $\vec{\mathbf{a}} \bullet \vec{\mathbf{b}}$ −1292

7) أَجِدُ قياسَ الزاويةِ بينَ المتجهيْنِ $\vec{\mathbf{a}} = \langle 7, 10 \rangle$، وَ $\vec{\mathbf{b}} = \langle 4, -10 \rangle$ لأقربِ جزءٍ منْ عشرةٍ. 123.2°

أَجِدُ ناتجَ الضربِ القياسيِّ للمتجهيْنِ في كلٍّ ممّا يأتي، ثمَّ أَجِدُ قياسَ الزاويةِ المحصورةِ بينَهُما:

8) $\vec{\mathbf{c}} = \langle 2, 4 \rangle, \vec{\mathbf{d}} = \langle -24, 12 \rangle$
0, 90°

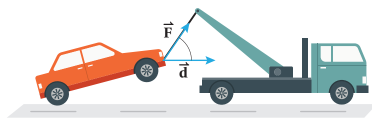
9) $\vec{\mathbf{a}} = \langle 4, 16 \rangle, \vec{\mathbf{k}} = \langle 8, -2 \rangle$
0, 90°

10) أُحدِّدُ إذا كانَ المتجهانِ $\vec{\mathbf{e}} = \langle 3, 4 \rangle$، وَ $\vec{\mathbf{a}} = \langle 11, -8 \rangle$ متعامديْنِ أمْ لا، مُبرِّرًا إجابتي.
$\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{e}} = 1$ إذن، المتجهان غير متعامدين؛ لأنَّ ناتج ضربهما القياسي لا يساوي صفرًا.

11) إذا كانَ $\vec{\mathbf{r}} = \langle 3, -4 \rangle$، وَ $\vec{\mathbf{s}} = \langle b, b+2 \rangle$ متجهيْنِ متعامديْنِ، فأَجِدُ قيمةَ $b$.

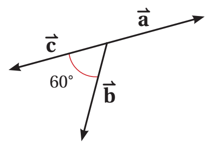
$3b - 4(b+2) = 0$
$3b - 4b - 8 = 0$
$-b = 8\,,\ b = -8$

12 **سـيّاراتٌ:** تسـحبُ شـاحنةٌ سـيّارةً كما في الشكلِ المجـاورِ. إذا كانَ مقدارُ قوةِ السـحبِ $|\vec{F}| = 34N$، والمسافةُ المقطوعةُ $|\vec{d}| = 12\ km$، وشغلُ الشاحنةِ المبذولُ $W = 46\ J$، فأَجِدُ قياسَ زاويةِ السحبِ.




$\theta = \cos^{-1}(46 \div 408000) \approx 89.9935°$

في الشكلِ المجاورِ، إذا كانَ $|\vec{a}| = 2$، وَ $|\vec{b}| = 4$، وَ $|\vec{c}| = 5$، فأَجِدُ كلًّا ممّا يأتي:




13 $\vec{a} \bullet \vec{b}$ $-4$

14 $\vec{b} \bullet \vec{c}$ $10$

15 $\vec{a} \bullet \vec{c}$ $-10$

16 أَحُلُّ المسألةَ الواردةَ في بدايةِ الدرسِ. $W = 70 \times 18 \times \cos 54° \approx 740\ J$

**مهارات التفكير العليا**

(17–19) أنظر ملحق الإجابات.

**برهانٌ:** إذا كانَتْ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ متجهاتٍ، وكانَ $\vec{0}$ المتجهَ الصفريَّ، فأُثبِتُ صحَّةَ كلٍّ ممّا يأتي:

17 $\vec{a} \bullet \vec{b} = \vec{b} \bullet \vec{a}$

18 $\vec{a} \bullet (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \bullet \vec{b} + \vec{a} \bullet \vec{c}$

19 $\vec{0} \bullet \vec{a} = 0$

20 **مسألةٌ مفتوحةٌ:** إذا كانَ $\vec{p} \bullet \vec{q} = 30$، وَ $\vec{q} = \langle 6 , 2 \rangle$، فأَجِدُ قيمةً مُحتمَلةً للمتجهِ $\vec{p}$. أنظر ملحق الإجابات.

21 **مسألةٌ مفتوحةٌ:** أَجِدُ متجهًا يُعامِدُ المتجهَ $\vec{a} = \langle -8 , -2 \rangle$ أنظر ملحق الإجابات.

22 **تبريرٌ:** أُبيِّنُ باسـتعمالِ المتجهاتِ أنَّ المثلثَ الذي رؤوسُهُ النقاطُ: $(-2, -4)$ , $(1, 5)$, $(6, -2)$ مُتطابِقُ الضلعيْنِ، ثمَّ أَجِدُ قياساتِ جميعِ زواياهُ، مُبرِّرًا إجابتي. أنظر ملحق الإجابات.

23 **تبريرٌ:** إذا كانَ المتجهانِ $\vec{a} = \langle -1 , r \rangle$، وَ $\vec{b} = \langle 2, -3 \rangle$ متوازييْنِ، فما قيمةُ $r$؟

أنظر ملحق الإجابات.



## مهارات التفكير العليا

- أُشـرِك الطلبــة كافةً في حــل هذه المســائل؛ لتنمية مهارات التفكير العليا لديهم.
- أتذكَّر أنَّه ليس شــرطًا أنْ يتمكَّــن الطلبة كافةً من حل المســائل جميعها، ولكن يجب عليهــم أنْ يحاولوا حلها.
- أطلب إلى الطلبة – ضمن مجموعات- حل المسائل في بند (**مهارات التفكير العليــا**)، ثم أطلب إلى أفراد بعضها بيان كيفية توصُّلهم إلى الحل في كل مســألة، وأمنح الآخرين فرصة نقد إجابات زملائهم وتقويمها.
- أُحفِّز الطلبة على تبرير إجاباتهم.

## 5 الإثراء

إذا كان للمتجهين $\vec{v}$ و $\vec{u}$ المقدار نفســه، فأُثبِت أنَّ $\vec{v} + \vec{u}$ و $\vec{v} - \vec{u}$ متعامدان.

## تعليمات المشروع:

- أطلب إلى الطلبة تنفيذ الخطوة (5) من المشروع.
- أُوجِّه الطلبة إلــى تنظيم إجراءاتهم وتوثيقها بنســخ صورة (print screen) للشاشة في كل خطوة.
- أُخبِر الطلبة بموعد عرض مشروع الوحدة.

## 6 الختام

- أطلب إلى الطلبة – كتابةً- بيان كيف يمكن تحديد إنْ كان متجهان معطيان متعامدين أم متوازيين، ثم تحديد المتجهين المتعامدين والمتجهين المتوازيين من بين المتجهات الآتية:

$\vec{u} = \langle 4, 6 \rangle, \vec{v} = \langle -3, -6 \rangle,$

$\vec{w} = \langle -8, 4 \rangle, \vec{z} = \langle 10, 15 \rangle$

$\vec{u}, \vec{z}$ : متوازيان.　　$\vec{v}, \vec{w}$ : متعامدان.

## التقويم الختامي:

- أُراجِع الطلبة في الأفكار الأساسية لدروس الوحدة.
- أُوزِّع الطلبة إلى مجموعات، ثم أطلب إلى أفراد كل مجموعة حل جزء من الأسئلة، ثم عرض إجاباتهم أمام الزملاء.
- أختار بعض الأسئلة ليحلها الطلبة واجبًا منزليًّا، ثم أُناقِشهم في إجاباتها في اليوم التالي.
- أَلفِت انتباه الطلبة إلى أنَّ الأسئلة (26 –30) وردت ضمن أسئلة الاختبارات الدولية، أو هي مسائل مشابهة لها.

**ملحوظة:** تُخصَّص حصتان(90 دقيقة) للإجابة عن أسئلة الاختبار.

### إرشادات للمُعلِّم/ للمُعلِّمة

أُذكِّر الطلبة بمفهومي زاوية الارتفاع وزاوية الانخفاض قبل حل السؤال 24.

## اختبارُ نهايةِ الوحدةِ

**أَضعُ دائرةً حولَ رمزِ الإجابةِ الصحيحةِ في ما يأتي:**

1 إذا كانَ $\vec{\mathbf{v}} = \langle 1, -1 \rangle$ ، فإنَّ $|\vec{\mathbf{v}}|$ تساوي:

a) 0 b) 1 c) 2 d) $\sqrt{2}$

2 إذا كانَ $A(2, 5), B(-1, 7)$ ، فإنَّ $\overrightarrow{BA}$ هوَ:

a) $\langle 3, -2 \rangle$ b) $\langle -2, 3 \rangle$

c) $\langle -3, 2 \rangle$ d) $\langle 3, 2 \rangle$

3 العبارةُ الصحيحةُ في ما يأتي هيَ:

a) مقدارُ المتجهِ $\langle 2, 4 \rangle$ يساوي 20

b) مقدارُ المتجهِ $\langle -4, 10 \rangle$ يساوي $\sqrt{84}$

c) مقدارُ المتجهِ $\langle 4, -3 \rangle$ يساوي $\sqrt{7}$

d) مقدارُ المتجهِ $\langle -6, 8 \rangle$ يساوي 10

4 إذا كانَتْ $A(0, 2), B(3, y)$ ، وكانَ $|\overrightarrow{AB}| = 3\sqrt{2}$ ، فإنَّ $y$ تساوي:

a) 5 b) $-1$

c) $5, -1$ d) $7, -3$

**إذا كانَ $\vec{\mathbf{v}} = \langle 1, 5 \rangle$، وَ $\vec{\mathbf{u}} = \langle -3, -1 \rangle$ ، فأُجيبُ عنِ الأسئلةِ: 5, 6, 7:**

5 $\vec{\mathbf{u}} - \vec{\mathbf{v}}$ تساوي:

a) $\langle -2, 4 \rangle$ b) $\langle 4, 6 \rangle$

c) $\langle -4, -6 \rangle$ d) $\langle -2, -4 \rangle$

6 إذا كانَ $\vec{\mathbf{p}} = \vec{\mathbf{u}} + 2\vec{\mathbf{v}}$، فإنَّ $|\vec{\mathbf{p}}|$ تساوي:

a) 8 b) $\sqrt{80}$ c) 82 d) $\sqrt{82}$

7 معكوسُ المتجهِ $\vec{\mathbf{v}} + \vec{\mathbf{u}}$ هوَ:

a) $\langle -2,4 \rangle$ b) $\langle 2,-4 \rangle$

c) $\langle 4,6 \rangle$ d) $\langle -4,-6 \rangle$

8 إذا كانَ $\vec{\mathbf{a}} = \langle 2,-3 \rangle, \vec{\mathbf{b}} = \langle 3,4 \rangle$، فإنَّ $\vec{\mathbf{a}} \cdot 2\vec{\mathbf{b}}$ تساوي:

a) $-6$ b) 6 c) $-12$ d) 12

**إذا كانَتِ النقاطُ $A, B, C, D$ نقاطًا في المستوى الإحداثيِّ، حيثُ $A(4, -1)$ , $B(2, -3)$, $D(7, 1)$. فأَجِدُ إحداثيَّيِ النقطةِ $C$ إذا كانَ:**

9 $\overrightarrow{AC} = -2\,\overrightarrow{AB}$ $C\,(8, 3)$

10 $\overrightarrow{DC} = \frac{1}{3}\,\overrightarrow{DB}$ $C\,(\frac{16}{3}, \frac{-1}{3})$

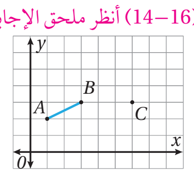
**أُحدِّدُ في ما يأتي العباراتِ الصحيحةَ، مُصحِّحًا الخطأَ في غيرِ الصحيحِ منْها:** (11–13) أنظر ملحق الإجابات.

11 المتجهانِ المتساويانِ لهُما نفسُ المقدارِ.

12 المتجهانِ المتوازيانِ لهُما نفسُ المقدارِ والاتجاهِ.

13 لأيِّ متجهيْنِ: $\vec{\mathbf{v}}$ وَ $\vec{\mathbf{u}}$ ، فإنَّ $\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{u}}$

**أنسخُ الرسمَ البيانيَّ الآتيَ، ثمَّ أستعملُهُ لأُجيبَ عنِ الأسئلةِ التي تليهِ:** (14–16) أنظر ملحق الإجابات.




14 إذا كانَ $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AB}$ ، فأُحدِّدُ النقطةَ $E$ على المستوى الإحداثيِّ.

15 إذا كانَ $\overrightarrow{CD} = -2\overrightarrow{AB}$، فأُحدِّدُ النقطةَ $D$ على المستوى الإحداثيِّ.

16 إذا كانَ $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AM}$ ، فأُحدِّدُ النقطةَ $M$ على المستوى الإحداثيِّ.

17 إذا كانَتْ $\overrightarrow{DC} = k\overrightarrow{AM}$ ، فأَجِدُ قيمةَ الثابتِ $k$. $k = 4$

## اختبارُ نهايةِ الوحدةِ

إذا كانَ $\vec{\mathbf{u}} = \langle -1, 5\rangle$، وَ $\vec{\mathbf{v}} = \langle 2, -1\rangle$، وَ $\vec{\mathbf{w}} = \langle 4, -2\rangle$، فأَجِدُ كلًّا ممّا يأتي:

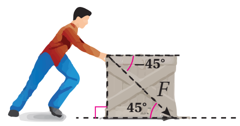
18 $-3\,(\vec{\mathbf{v}}-\vec{\mathbf{w}})$ $\langle 6,-3\rangle$

19 $\vec{\mathbf{v}}\cdot 2\vec{\mathbf{u}}$ $-14$

20 $\vec{\mathbf{w}}\cdot(\vec{\mathbf{u}}+\frac{1}{2}\vec{\mathbf{w}})$ $-4$

21 الزاويةُ بينَ المتجهيْنِ $\vec{\mathbf{v}}$ وَ $\vec{\mathbf{w}}$. $0°$

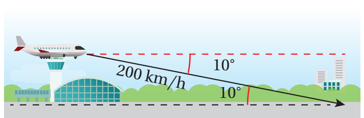
22 دفعَ عاملٌ صندوقًا بقوةِ 78 N، وبزاويةِ $-45°$ كما في الشكلِ التالي. أَجِدُ مقدارَ الشغلِ الذي بذلَهُ العاملُ لتحريكِ الصندوقِ مسافةَ 12 m   661.9J




23 ركضَ حسامٌ في اتجاهِ السلَّةِ في أثناءِ مباراةِ دوري كرةِ السلَّةِ بسرعةٍ أفقيةٍ مقدارُها 5 m/s ، وقذفَ الكرةَ بسرعةٍ مقدارُها 20 m/s ، وبزاويةٍ قياسُها $38°$ معَ الأفقيِّ. أَجِدُ محصلةَ سرعةِ الكرةِ.

أنظر ملحق الإجابات.


24 هبطَتْ طائرةٌ بسرعةٍ مقدارُها 200 km/h، وبزاويةِ انخفاضٍ قياسُها $10°$. أكتبُ السرعةَ المتجهةَ للطائرةِ بالصورةِ الإحداثيةِ.   أنظر ملحق الإجابات.



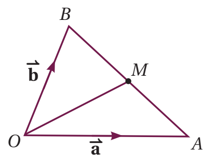

25 أقلعَتْ طائرتانِ معًا منَ المطارِ في الوقتِ نفسِهِ. وقدْ رصدَ برجُ المراقبةِ حركةَ الطائرتيْنِ، فوجدَ بعدَ ثوانٍ عِدَّةٍ أنَّ $\vec{\mathbf{a}} = \langle 6, 8\rangle$ يُمثِّلُ مسارَ الطائرةِ الأولى، وأنَّ $\vec{\mathbf{b}} = \langle 4, -3\rangle$ يُمثِّلُ مسارَ الطائرةِ الثانيةِ . هلْ يتعامدُ مسارا الطائرتيْنِ؟ أُبرِّرُ إجابتي.

نعم، يتعامدان؛ لأنَّ $\vec{\mathbf{a}}\,.\,\vec{\mathbf{b}} = 0$

### تدريبٌ على الاختباراتِ الدوليةِ

26 أَجِدُ الزاويةَ $\theta$ بينَ المتجهيْنِ $\vec{\mathbf{p}}$ وَ $\vec{\mathbf{q}}$ إذا كانَ $\vec{\mathbf{p}} = \langle 5, -1\rangle, \vec{\mathbf{q}} = \langle -2, 3\rangle$   $135°$

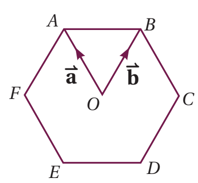
**يُمثِّلُ الشكلُ المجاورُ المتجهيْنِ $\overrightarrow{OA}$ وَ $\overrightarrow{OB}$ المرسوميْنِ في الوضعِ القياسيِّ، حيثُ $O$ نقطةُ الأصلِ، وَ $M$ نقطةُ منتصفِ القطعةِ المستقيمةِ $\overline{AB}$:**




27 أكتبُ المتجهَ $\overrightarrow{AB}$ بدلالةِ $\vec{\mathbf{a}}$ وَ $\vec{\mathbf{b}}$.   أنظر ملحق الإجابات.

28 أُبرهِنُ أنَّ $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\vec{\mathbf{a}}+\vec{\mathbf{b}})$   أنظر ملحق الإجابات.

**الشكلُ المجاورُ هوَ سداسيٌّ منتظمٌ، مركزُهُ $O$، وفيهِ: $\overrightarrow{OA} = \vec{\mathbf{a}}, \overrightarrow{OB} = \vec{\mathbf{b}}$**




29 أكتبُ المتجهَ $\overrightarrow{AB}$ بدلالةِ $\vec{\mathbf{a}}$ وَ $\vec{\mathbf{b}}$.

أنظر ملحق الإجابات.

30 إذا مُدَّ $\overline{AB}$ على استقامتِهِ حتى النقطةِ $K$ بحيثُ كانَتْ $AB : BK = 1 : 2$، فأكتبُ المتجهَ $\overrightarrow{CK}$ بدلالةِ $\vec{\mathbf{a}}$ وَ $\vec{\mathbf{b}}$.

أنظر ملحق الإجابات.



## تدريب على الاختبارات الدولية

يتقدَّم طلبة الصف الرابع والصف الثامن في المدارس الأردنية إلى اختبار (TIMSS) كل أربع سنوات. ويهدف هذا الاختبار إلى قياس مستوى تقدُّم الطلبة في التحصيل الدراسي في مادتي الرياضيات والعلوم. ولهذا الاختبار أهمية في تقييم جودة التعليم في الأردن مقارنةً بالدول الأُخرى التي يتقدَّم طلبتها لهذا الاختبار، والمساعدة على رسم السياسة التربوية على المستوى الوطني بما يخدم تطوير النظام التربوي، والارتقاء بنوعية مخرجاته.

يتقدَّم أيضًا طلبة الصف العاشر في الأردن لاختبار البرنامج الدولي لتقييم أداء الطلبة (PISA)

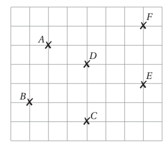
The Program for International Students Assessment: في مجالات القراءة، والرياضيات، والعلوم. وفي ما يخصُّ الرياضيات، فإنَّ المعرفة الرياضية – وَفق هذا البرنامج– يُعبَّر عنها بمدى قدرة الفرد على صياغة الرياضيات، وتوظيفها، وتفسيرها في أوضاع مختلفة؛ إذ تتضمَّن القدرة على التفكير الرياضي، واستعمال المفاهيم والإجراءات والحقائق والأدوات لوصف الظواهر، والتنبُّؤ بها، وتسعى لمساعدة صانعي القرارات وراسمي السياسات التربوية في الدول المشاركة على تحديد معايير حقيقية وواقعية لأداء نظمها التربوية، وتُعينهم على تقييم النجاحات أو الإخفاقات، علمًا بأنَّ الأردن يشارك في دورات هذه الدراسات والبرامج بانتظام منذ مطلع تسعينيات القرن العشرين الميلادي؛ لذا يتعيَّن عليك عزيزي المُعلِّم/ عزيزتي المُعلِّمة تحفيز الطلبة على الاهتمام بحل هذه الأسئلة، والمشاركة في الدراسات وبرامج التقييم الدولية بكل جدية، وتضمين الاختبارات المدرسية مثل نوعية هذه الأسئلة.

# كتاب التمارين

## الدرس 1
## المتجهاتُ في المستوى الإحداثيِّ
## Vectors in the Coordinate Plane



إذا كانَ $\overrightarrow{AD} = \langle 2, -1 \rangle$، فأكتبُ كلًّا ممّا يأتي بالصورةِ الإحداثيةِ، ثمَّ أَجِدُ مقدارَهُ:




1. $\overrightarrow{AF}$ $\langle 5, 1 \rangle, \sqrt{26}$
2. $\overrightarrow{AB}$ $\langle -1, -3 \rangle, \sqrt{10}$
3. $\overrightarrow{CA}$ $\langle -2, 4 \rangle, 2\sqrt{5}$
4. $\overrightarrow{EB}$ $\langle -6, -1 \rangle, \sqrt{37}$
5. $\overrightarrow{EF}$ $\langle 0, 3 \rangle, 3$
6. $\overrightarrow{DC}$ $\langle 0, -3 \rangle, 3$

7. أكتبُ كلًّا منْ $\overrightarrow{BD}$ ، وَ $\overrightarrow{BF}$ بالصورةِ الإحداثيةِ. ماذا أستنتجُ منْ موقعِ $B$، وَ$D$، وَ $F$؟ أنظر ملحق الإجابات.

أستعملُ إحداثيَّي النقطةِ $A(6, 3)$ للإجابةِ عنِ المسائلِ الآتيةِ:

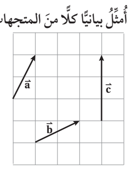
8. إذا كانَ $\overrightarrow{AB} = \langle 2, -5 \rangle$ ، فأَجِدُ إحداثيَّي النقطةِ $B$. $B(8, -2)$
9. إذا كانَ $\overrightarrow{AC} = \langle -3, 4 \rangle$ ، فأَجِدُ إحداثيَّي النقطةِ $C$. $C(3, 7)$
10. إذا كانَ $\overrightarrow{AD} = \langle 6, 0 \rangle$ ، فأَجِدُ إحداثيَّي النقطةِ $D$. $D(12, 3)$
11. **شاحناتٌ:** أكتبُ بالصورةِ الإحداثيةِ السرعةَ المتجهةَ لشاحنةٍ تسيرُ على طريقٍ مُنحدِرٍ، علمًا بأنَّ سرعتَها الأفقيةَ $v_x = 58\ km/h$، وسرعتَها الرأسيةَ $v_y = 37\ km/h$. $\langle 58, 37 \rangle$
12. يدفعُ صالحٌ مكنسةً كهربائيةً بقوةٍ مقدارُها 272 N، وبزاويةٍ قياسُها $51°$ معَ المحورِ الأفقيِّ. أكتبُ متجهَ القوةِ بالصورةِ الإحداثيةِ. $\langle 171.18, 211.38 \rangle$
13. إذا كانَ $|\overrightarrow{AB}| = 7$، حيثُ $A(-1, 4)$ هيَ نقطةُ بدايتِهِ، والنقطةُ $B(x, 2)$ هيَ نقطةُ نهايتِهِ، فأَجِدُ قيمةَ $x$ ، مُبرِّرًا إجابتي. أنظر ملحق الإجابات.



## الدرس 2
## جمعُ المتجهاتِ وطرحُها
## Adding and Subtracting Vectors

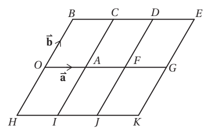


أُمثِّلُ بيانيًّا كلًّا منَ المتجهاتِ الآتيةِ اعتمادًا على الشكلِ المجاورِ: (1–6) أنظر ملحق الإجابات.




1. $\vec{a} + \vec{b}$
2. $-\vec{a}$
3. $\vec{a} - \vec{c}$
4. $\vec{b} - \vec{a}$
5. $-\vec{c}$
6. $-\vec{a}-\vec{b}$

اعتمادًا على الشكلِ المجاورِ الذي يبيّنُ مجموعتينِ من المستقيماتِ المتوازيةِ، أكتبُ كلاًّ منَ المتجهاتِ الآتيةِ بدلالةِ $\vec{a}$ و $\vec{b}$




7. $\overrightarrow{OH}$ $-\vec{b}$
8. $\overrightarrow{OK}$ $3\vec{a} - \vec{b}$
9. $\overrightarrow{OJ}$ $2\vec{a} - \vec{b}$
10. $\overrightarrow{OI}$ $\vec{a} - \vec{b}$
11. $\overrightarrow{OC}$ $\vec{a} + \vec{b}$
12. $\overrightarrow{CO}$ $-\vec{a} - \vec{b}$
13. $\overrightarrow{AK}$ $2\vec{a} - \vec{b}$
14. $\overrightarrow{DI}$ $-\vec{a} - 2\vec{b}$
15. $\overrightarrow{JE}$ $\vec{a} + 2\vec{b}$
16. $\overrightarrow{AB}$ $\vec{b} - \vec{a}$
17. $\overrightarrow{CK}$ $2\vec{a} - 2\vec{b}$
18. $\overrightarrow{DK}$ $\vec{a} - 2\vec{b}$

### إرشادات للمُعلِّم/ للمُعلِّمة

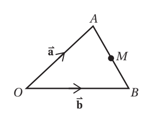
نُقِلت الأسئلة (14–25) إلى الدرس 2، ويُلفَت انتباه الطلبة إلى حل هذه الأسئلة عند دراسة الدرس 2.

## الدرس 2 تابع
## جمعُ المتجهاتِ وطرحُها
## Adding and Subtracting Vectors



في الشكلِ المجاورِ، $M$ هيَ نقطةُ منتصفِ $\overline{AB}$

أكتبُ كلاًّ منَ المتجهاتِ الآتيةِ بدلالةِ المتجهيْنِ $\vec{a}$، وَ $\vec{b}$:

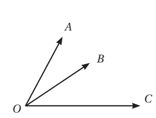



19. $\overrightarrow{AB}$ $\vec{b} - \vec{a}$
20. $\overrightarrow{BO}$ $-\vec{b}$
21. $\overrightarrow{AM}$ $\frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a})$
22. $\overrightarrow{OM}$ $\frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$
23. أُحدِّدُ على الشكلِ موقعَيِ النقطتيْنِ $X$، وَ $Y$، بحيثُ يكونَ $\overrightarrow{OX} = 2\vec{a} + \vec{b}, \overrightarrow{OY} = \vec{a} + 2\vec{b}$. أنظر ملحق الإجابات.
24. أكتبُ $\overrightarrow{XY}$ بدلالةِ $\vec{a}$، وَ $\vec{b}$ $\vec{b} - \vec{a}$
25. ما المتجهاتُ الأُخرى المكافئةُ لـ $\overrightarrow{XY}$؟ $\overrightarrow{AB}$

إذا كانَ $\vec{a} = \langle 27, -15 \rangle, \vec{b} = \langle 9, -21 \rangle, \vec{c} = \langle -12, 0 \rangle$، فأَجِدُ كلًّا ممّا يأتي:

26. $\vec{a} - \vec{c}$ $\langle 39, -15 \rangle$
27. $\vec{b} - 2\vec{a}$ $\langle -45, 9 \rangle$
28. $3\vec{c} - \vec{b}$ $\langle -45, 21 \rangle$
29. $\vec{a} - \vec{b} - \vec{c}$ $\langle 30, 6 \rangle$

يُمثِّلُ الشكلُ المجاورُ المتجهاتِ الآتيةَ، علمًا بأنَّ $O$ هيَ نقطةُ الأصلِ:




$\overrightarrow{OA} = \langle 2, 2 \rangle$ $\quad \overrightarrow{OB} = \langle 4, 1 \rangle$ $\quad \overrightarrow{OC} = \langle 6, 0 \rangle$

أكتبُ كلًّا منَ المتجهاتِ الآتيةِ بالصورةِ الإحداثيةِ، ثمَّ أرسمُهُ على الشكلِ:

30. $\overrightarrow{AB}$
31. $\overrightarrow{AC}$
32. $\overrightarrow{BC}$

(30–32) أنظر ملحق الإجابات.

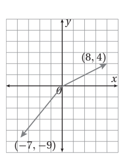


## الدرس 3
## الضربُ القياسيُّ
## Scalar Product

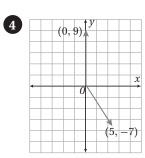


أَجِدُ ناتجَ الضربِ القياسيِّ للمتجهيْنِ في كلٍّ ممّا يأتي:

1. $\vec{a} = \langle -1, 5 \rangle, \vec{b} = \langle -6, -2 \rangle$ $-4$
2. $\vec{u} = \langle 3, 9 \rangle, \vec{v} = \langle 6, 5 \rangle$ $63$
3. $-92$




4. $-63$

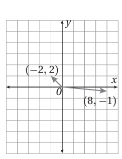



أُحدِّدُ إذا كانَ المتجهانِ $\vec{u}$ وَ $\vec{v}$ متوازييْنِ، أوْ متعامديْنِ، أوْ غيرَ ذلكَ في كلٍّ ممّا يأتي:

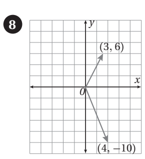
5. $\vec{u} = \langle 4, -9 \rangle, \vec{v} = \langle -9, 4 \rangle$ غير ذلك.
6. $\vec{u} = \langle -5, 2 \rangle, \vec{v} = \langle -10, 25 \rangle$ غير ذلك.

أَجِدُ قياسَ الزاويةِ بينَ المتجهيْنِ في كلٍّ ممّا يأتي:

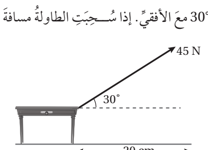
7. $142.1°$




8. $131.6°$

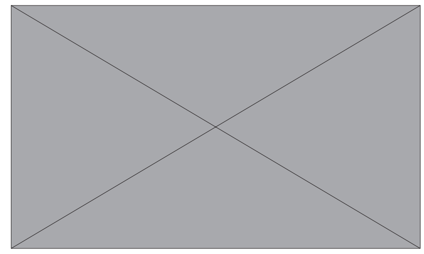



9. يُمثِّلُ الشكلُ المجاورُ سحبَ طاولةٍ بقوةٍ مقدارُها 45 N، وزاويةٍ قياسُها $30°$ معَ الأفقيِّ. إذا سُحِبَتِ الطاولةُ مسافةَ 20 cm، فأَجِدُ مقدارَ الشغلِ الذي بُذِلَ. 7.8 J تقريبًا.

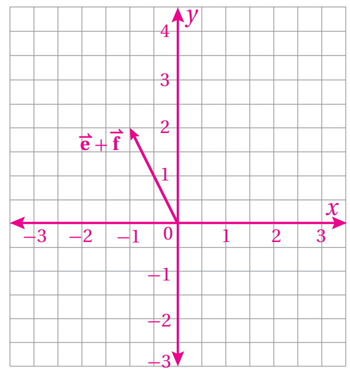


## الدرس 2:

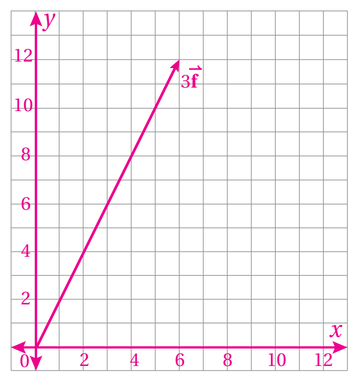
### إجابة الأسئلة (16-19)



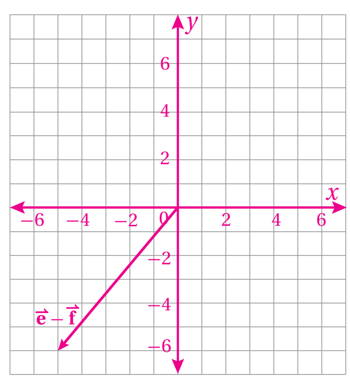
**21)**



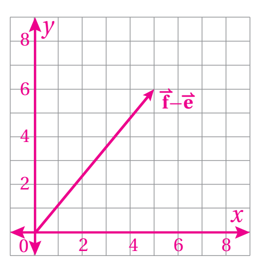

**22)**



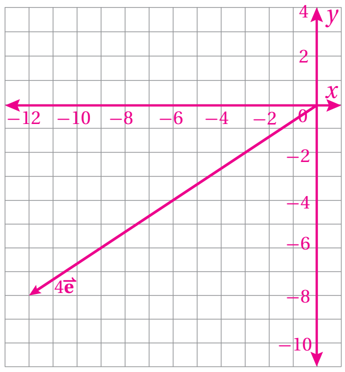

**23)**



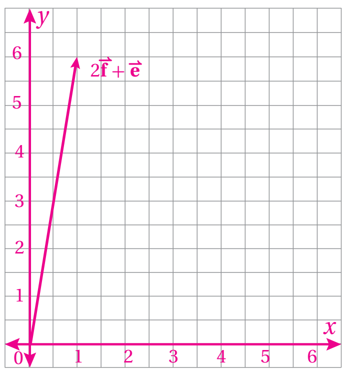

**24)**




**25)**




**26)**




**28)** $\overrightarrow{OF}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CF}=3\,\vec{\mathbf{a}}+2\,\vec{\mathbf{b}}$

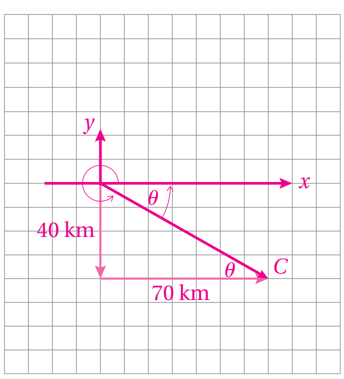
**29)** $\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CG}=3\,\vec{\mathbf{a}}+\vec{\mathbf{b}}$

**30)** $\overrightarrow{EG}=\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FG}=2\,\vec{\mathbf{a}}-\vec{\mathbf{b}}$

**31)** $\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{CF}+\overrightarrow{FE}=2\,\vec{\mathbf{b}}-2\,\vec{\mathbf{a}}$

**32)** $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{GC}=3\,\vec{\mathbf{a}}-\vec{\mathbf{b}}$, $\overrightarrow{DG}=\overrightarrow{DF}+\overrightarrow{FG}=3\,\vec{\mathbf{a}}-\vec{\mathbf{b}}$

**33)** أنظر الشكل الآتي:




$|AC|=\sqrt{40^2+70^2}$

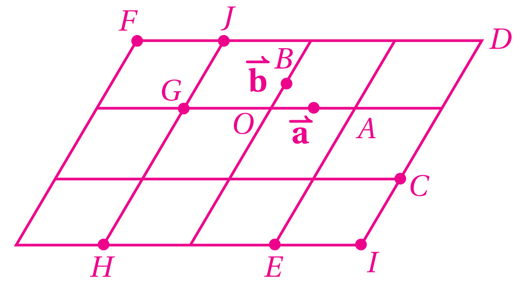
$=\sqrt{6500}\approx 80.62\text{ km}$

$\tan\theta=\frac{40}{70}$

$\theta=\tan^{-1}\left(\frac{4}{7}\right)\approx 29.7°$

أيْ إنَّ القارب يَبعُد 80.62 km عــن نقطة انطلاقه $A$، وفي اتجاه 330.3° مع محور $x$ الموجب.

إجابات الأسئلة (34–41)




42) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}=-\vec{\mathbf{a}}+\vec{\mathbf{b}}=\vec{\mathbf{b}}-\vec{\mathbf{a}}$

43) $\frac{AC}{CB}=\frac{2}{5}$

افترض أنَّ: $\overrightarrow{AC}=2x$، فتكون $\overrightarrow{AB}=7x$، و $\overrightarrow{CB}=5x$

$\frac{AC}{AB}=\frac{2x}{7x}=\frac{2}{7}\Longrightarrow AC=\frac{2}{7}AB$

$\overrightarrow{AC}=\frac{2}{7}\overrightarrow{AB}=\frac{2}{7}(\vec{\mathbf{b}}-\vec{\mathbf{a}})$

44) $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\vec{\mathbf{a}}+\frac{2}{7}(\vec{\mathbf{b}}-\vec{\mathbf{a}})=\frac{5}{7}\vec{\mathbf{a}}+\frac{2}{7}\vec{\mathbf{b}}$

45) $\frac{PR}{RQ}=\frac{1}{2}\Longrightarrow PR=\frac{1}{3}PQ$

$\frac{OR}{RS}=\frac{1}{2}\Longrightarrow RS=2\,OR$

$\overrightarrow{QS}=\overrightarrow{QO}+\overrightarrow{OS}=\overrightarrow{QO}+\overrightarrow{OR}+\overrightarrow{RS}$

$=\overrightarrow{QO}+\overrightarrow{OR}+2\,\overrightarrow{OR}$

$=\overrightarrow{QO}+3\,\overrightarrow{OR}=\overrightarrow{QO}+3(\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PR})$

$=\overrightarrow{QO}+3\,(\overrightarrow{OP}+\frac{1}{3}\overrightarrow{PQ})$

$=\overrightarrow{QO}+3\left(\overrightarrow{OP}+\frac{1}{3}(\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OQ})\right)$

$=-\vec{\mathbf{b}}+3\left(\vec{\mathbf{a}}+\frac{1}{3}(\vec{\mathbf{a}}+\vec{\mathbf{b}})\right)$

$\overrightarrow{QS}=-\vec{\mathbf{b}}+3\,\vec{\mathbf{a}}+\vec{\mathbf{a}}+\vec{\mathbf{b}}=4\,\vec{\mathbf{a}}=4\,\overrightarrow{OP}$

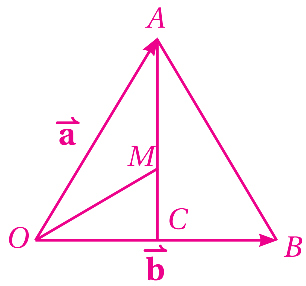
إذن، $\overrightarrow{QS}\parallel\overrightarrow{OP}$ .

46) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}$

$=-\vec{\mathbf{a}}+\vec{\mathbf{b}}$

$=\vec{\mathbf{b}}-\vec{\mathbf{a}}$

47)




أَصِـــل الرأس $A$ بالنقطة $C$، وهي منتصف الضلع $OB$، ثم أرســـم $OM$.

$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AM}$

$=\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

(لأنَّ مركز المثلث يقســـم القطع المتوسطة بنســـبة 2:1 من جهة الرأس).

$=\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OC})$

$=\vec{\mathbf{a}}+\frac{2}{3}(-\vec{\mathbf{a}}+\frac{1}{2}\vec{\mathbf{b}})$

$=\vec{\mathbf{a}}-\frac{2}{3}\vec{\mathbf{a}}+\frac{1}{3}\vec{\mathbf{b}}$

$=\frac{1}{3}\vec{\mathbf{a}}+\frac{1}{3}\vec{\mathbf{b}}=\frac{1}{3}(\vec{\mathbf{a}}+\vec{\mathbf{b}})$

## الدرس 3:

17) إذا كان $\vec{\mathbf{a}}=\langle a_1,a_2\rangle, \vec{\mathbf{b}}=\langle b_1,b_2\rangle, \vec{\mathbf{c}}=\langle c_1,c_2\rangle$، فإنَّ:

$\vec{\mathbf{a}}\,.\,\vec{\mathbf{b}}=a_1b_1+a_2b_2$

$=b_1a_1+b_2a_2$ (لأنَّ ضرب الأعداد الحقيقية تبديلي).

وإنَّ: $\vec{\mathbf{b}}\,.\,\vec{\mathbf{a}}=b_1a_1+b_2a_2$

إذن، $\vec{\mathbf{a}}\,.\,\vec{\mathbf{b}}=\vec{\mathbf{b}}\,.\,\vec{\mathbf{a}}$ ؛ أيْ إنَّ الضرب القياسي للمتجهات تبديلي.

18) إيجاد الطرف الأيسر:

$$\vec{\mathbf{a}}.(\vec{\mathbf{b}}+\vec{\mathbf{c}}) = \langle a_1 , a_2\rangle.(\langle b_1 , b_2\rangle + \langle c_1 , c_2\rangle)$$

$$= \langle a_1 , a_2\rangle.\langle b_1+c_1 , b_2+c_2\rangle$$

$$= a_1(b_1+c_1) + a_2(b_2+c_2)$$

$$= a_1 b_1 + a_1 c_1 + a_2 b_2 + a_2 c_2$$

ثم إيجاد الطرف الأيمن:

$$\vec{\mathbf{a}}.\vec{\mathbf{b}}+\vec{\mathbf{a}}.\vec{\mathbf{c}} = \langle a_1 ,a_2\rangle.\langle b_1 ,b_2\rangle + \langle a_1 , a_2\rangle.\langle c_1 , c_2\rangle$$

$$= a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_1 c_1 + a_2 c_2$$

$$= a_1 b_1 + a_1 c_1 + a_2 b_2 + a_2 c_2$$

(بتبديل موقعي الحدين: الثاني، والثالث)

إذن، $\vec{\mathbf{a}}.(\vec{\mathbf{b}}+\vec{\mathbf{c}}) = \vec{\mathbf{a}}.\vec{\mathbf{b}}+\vec{\mathbf{a}}.\vec{\mathbf{c}}$؛ أيْ إنَّ الضرب القياسي يتوزَّع على جمع المتجهات.

19) $\mathbf{0}.\vec{\mathbf{a}} = \langle 0,0\rangle.\langle a_1 , a_2\rangle = 0\times a_1 + 0\times a_2 = 0+0 = 0$

20) بافتراض أنَّ $\vec{\mathbf{p}} = \langle a , b\rangle$، فإنَّ:

$\vec{\mathbf{p}}.\vec{\mathbf{q}} = 30$؛ أيْ إنَّ $6a+2b = 30$

ولهذه المعادلة عدد لانهائي من الحلول؛ فإذا افترضنا أنَّ $a = 2$، فإنَّ $b = 9$. ومن ثَمَّ، فإنَّ $\vec{\mathbf{p}} = \langle 2, 9\rangle$

وبافتراض وجود قيم أُخرى لـ $a$، فإنَّه توجد قيم مناظرة لـ $b$، فتنتج قيم ممكنة للمتجه $\vec{\mathbf{p}}$.

21) بافتراض أنَّ $\vec{\mathbf{b}} = \langle c, d\rangle$ يعامد المتجه $\vec{\mathbf{a}} = \langle -8, -2\rangle$، فإنَّ:

$-8c-2d = 0$؛ أيْ إنَّ $d = -4c$

إذن، جميع المتجهات في صورة $\langle c,-4c\rangle$ تعامد المتجه $\vec{\mathbf{a}} = \langle -8, -2\rangle$، ومن أمثلتها: $\langle 1,-4\rangle,\langle 3,-12\rangle,\langle -2,8\rangle$.

22) إذا كان $A(6, -2), B(1, 5), C(-4, -2)$، فإنَّ:

$$\overrightarrow{AB} = \langle -5,7\rangle \Rightarrow |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{25+49} = \sqrt{74}$$

$$\overrightarrow{AC} = \langle -10,0\rangle \Rightarrow |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{100} = 10$$

$$\overrightarrow{BC} = \langle -5,-7\rangle \Rightarrow |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{25+49} = \sqrt{74}$$

إذن، المثلث $ABC$ متطابق الضلعين؛ لأنَّ $AB = BC = \sqrt{74}$

$$m\angle A = \cos^{-1}\left(\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|\times|\overrightarrow{AC}|}\right) = \cos^{-1}\frac{50}{\sqrt{74}\times 10} \approx 54.5°$$

$$m\angle C = \cos^{-1}\left(\frac{\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}}{|\overrightarrow{CA}|\times|\overrightarrow{CB}|}\right) = \cos^{-1}\frac{50}{10\times\sqrt{74}} \approx 54.5°$$

$$m\angle B = 180° - (54.5° + 54.5°) = 71°$$

23) $\vec{\mathbf{b}} \parallel \vec{\mathbf{a}}$ إذا كان قياس الزاوية بينهما $0°$، أو $180°$؛

أيْ إنَّ: $\frac{\vec{\mathbf{a}}\cdot\vec{\mathbf{b}}}{|\vec{\mathbf{a}}|\times|\vec{\mathbf{b}}|}$ يساوي $\cos0°$، أو $\cos180°$؛

أيْ إنَّ: $\frac{\vec{\mathbf{a}}\cdot\vec{\mathbf{b}}}{|\vec{\mathbf{a}}|\times|\vec{\mathbf{b}}|} = \pm1$

$$\frac{-2-3r}{\sqrt{13}\times\sqrt{1+r^2}} \Rightarrow \left(\frac{-2-3r}{\sqrt{13}\times\sqrt{1+r^2}}\right)^2 = (\pm1)^2$$

$$\frac{4+12r+9r^2}{13+13r^2} = 1 \Rightarrow 4+12r+9r^2 = 13+13r^2$$

$$4r^2 - 12r + 9 = 0$$

$$(2r-3)^2 = 0 \Rightarrow r = \frac{3}{2}$$

حل آخر:

$\vec{\mathbf{b}} \parallel \vec{\mathbf{a}}$ إذا وُجِد عدد حقيقي $k$، حيث: $\vec{\mathbf{b}} = k\vec{\mathbf{a}}$؛

أيْ إنَّ: $\langle 2,-3\rangle = k\langle -1, r\rangle$، ومنه:

$2 = -k \Rightarrow k = -2$، و $-3 = kr \Rightarrow r = \frac{-3}{k} = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}$

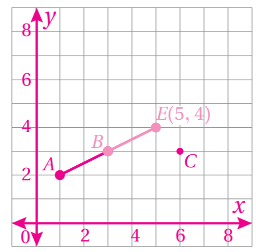
## إجابات أسئلة اختبار نهاية الوحدة:

11) صحيحة.

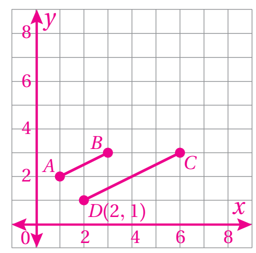
12) غير صحيحة؛ فالمتجهان المتوازيان لهما الاتجاه نفسه، أو لهما اتجاهان متعاكسان.

13) صحيحة.

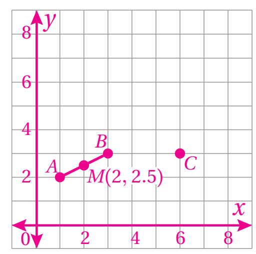
14)



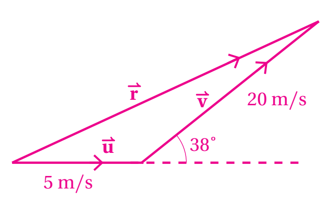

15)




16)




23) يُمثِّل المتجه $\vec{\mathbf{u}}$ سرعة حسام، ويُمثِّل المتجه $\vec{\mathbf{v}}$ سرعة الكرة، ويُمثِّل المتجه $\vec{\mathbf{r}}$ محصلة السرعتين. ولهذا، فإنَّ:




$$(|\vec{\mathbf{r}}|)^2 = 5^2 + 20^2 - 2\times 5\times 20\cos 142°$$

$$= 582.6$$

$$|\vec{\mathbf{r}}| = \sqrt{582.6} \approx 24.1 \text{ m/s}$$

أيْ إنَّ محصلة سرعة الكرة هي $24.1$ m/s تقريبًا.

24) قياس الزاوية التي يصنعها متجه سرعة الطائرة مع المحور الأفقي عكس حركة عقارب الساعة هو $360° - 10° = 350°$؛ لذا، فإنَّ الصورة الإحداثية للسرعة المتجهة للطائرة هي:

$$\langle 200\cos 350°, 200\sin 350° \rangle = \langle 196.96, -34.73\rangle$$

27) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = -\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}}$

28) $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

$= \vec{\mathbf{a}} + \frac{1}{2}(-\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}})$

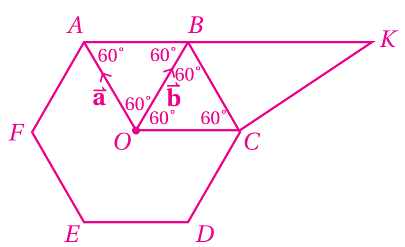
$= \vec{\mathbf{a}} - \frac{1}{2}\vec{\mathbf{a}} + \frac{1}{2}\vec{\mathbf{b}}$

$= \frac{1}{2}\vec{\mathbf{a}} + \frac{1}{2}\vec{\mathbf{b}} = \frac{1}{2}(\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}})$

29) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = -\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}}$

30) $\overrightarrow{CK} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BK} = \overrightarrow{CB} + 2\overrightarrow{AB}$

لكن $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{OA}$؛ لأنَّ $ABCO$ متوازي أضلاع؛ فكل زاويتين متقابلتين فيه متطابقتان.




إذن، $\overrightarrow{CK} = \overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{AB} = \vec{\mathbf{a}} + 2(\vec{\mathbf{b}} - \vec{\mathbf{a}}) = 2\vec{\mathbf{b}} - \vec{\mathbf{a}}$

## إجابات أسئلة كتاب التمارين، الدرس 1:

7) $\overrightarrow{BD} = \langle 3,2\rangle$

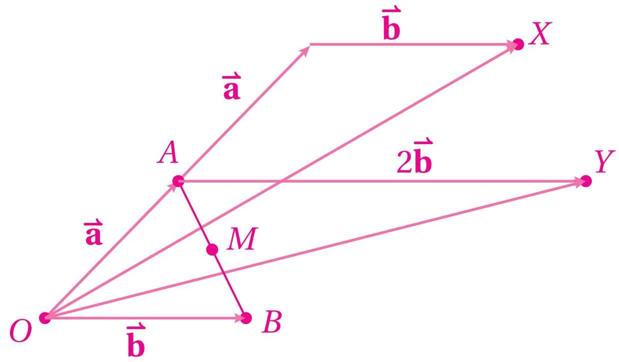
$\overrightarrow{BF} = \langle 6,4\rangle$

اتجاه $\overrightarrow{BD}$ هو $\tan^{-1}(\frac{2}{3})$،

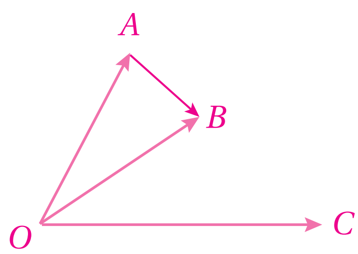
واتجاه $\overrightarrow{BF}$ هو $\tan^{-1}(\frac{4}{6}) = \tan^{-1}(\frac{2}{3})$

إذن، النقاط $B$، و $D$، و $F$ تقع على خط مستقيم واحد.

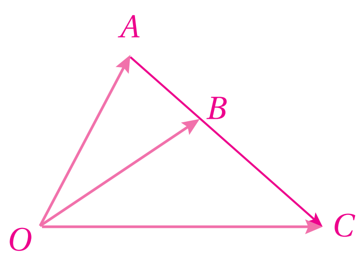
23)



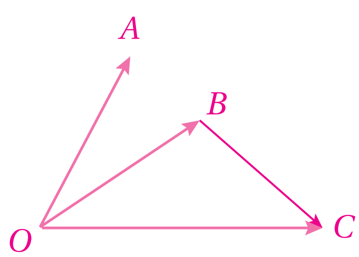

30) $\langle 2, -1\rangle$




31) $\langle 4, -2\rangle$




32) $\langle 2, -1\rangle$




13) $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x+1)^2 + 4}$

$$7 = \sqrt{(x+1)^2 + 4}$$

$$49 = (x+1)^2 + 4$$

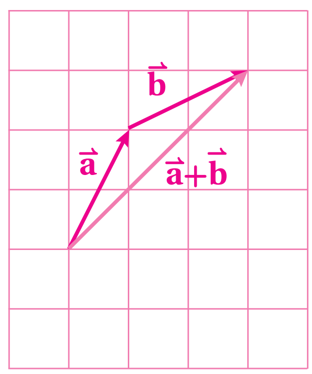
$$(x+4)^2 = 45$$

$$x + 1 = \pm\sqrt{45}$$

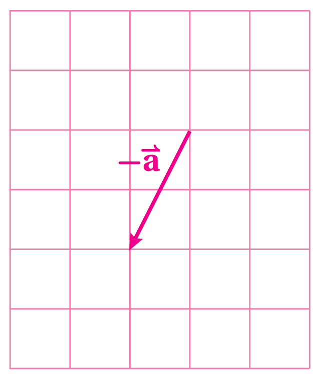
$$x = -1 \pm 3\sqrt{5}$$

## إجابات أسئلة كتاب التمارين، الدرس 2:

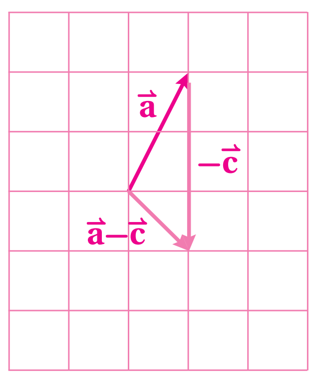
1)



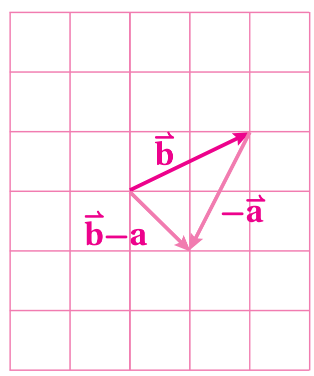

2)



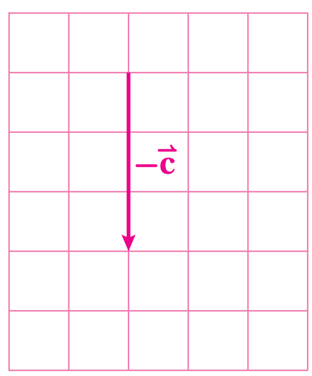

3)



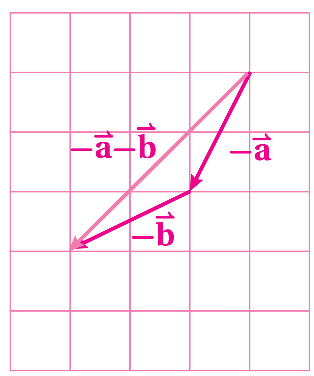

4)




5)




6)



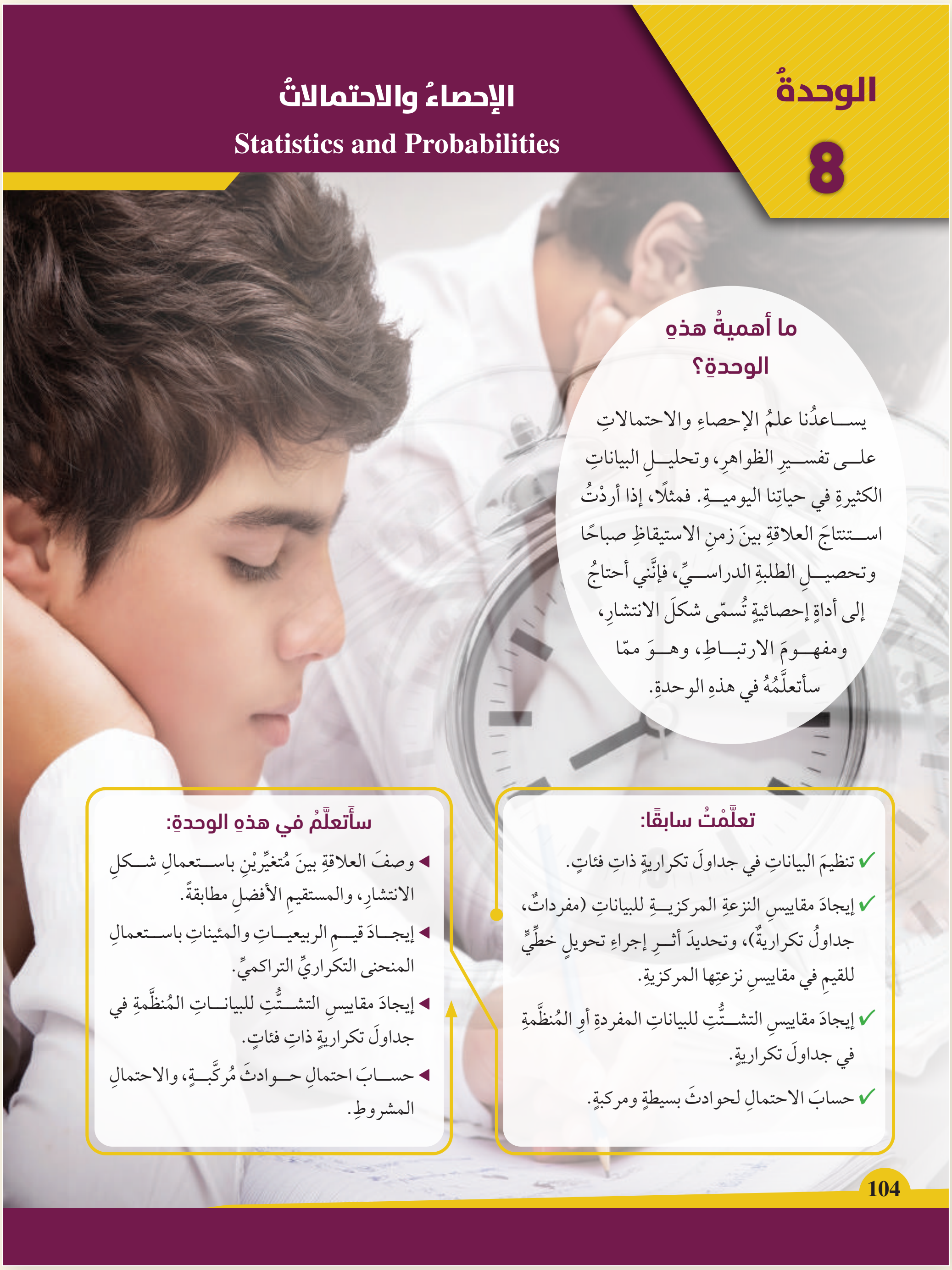
الوحدة
8

# الإحصاءُ والاحتمالاتُ
# Statistics and Probabilities

## مُخطَّط الوحدة

| اسم الدرس | النتاجات | المصطلحات | المصادر والأدوات | عدد الحصص |
|---|---|---|---|---|
| أستعد لدراسة الوحدة | | | • كتاب التمارين.<br>• الآلة الحاسبة. | 1 |
| الدرس 1: أشكال الانتشار. | • تعرُّف شكل الانتشار.<br>• وصف العلاقة بين مجموعتي بيانات مُمثَّلة بشكل الانتشار.<br>• تمثيل بيانات متغيرين بشكل انتشار يدويًّا، وباستعمال أدوات التكنولوجيا.<br>• رسم المستقيم الأفضل مطابقة في شكل الانتشار، وإيجاد معادلته يدويًّا، وباستعمال أدوات التكنولوجيا.<br>• استعمال المستقيم الأفضل مطابقة لتقدير قيمة أحد المتغيرات إذا عُلِمت قيمة المتغير الآخر ضمن مواقف حياتية متنوعة. | شكل الانتشار، الارتباط، الارتباط الموجب، الارتباط السالب، المستقيم الأفضل مطابقة. | • ورق رسم بياني.<br>• لوح متنقل للمستوى الإحداثي (الربع الأول فقط).<br>• مسطرة شفافة.<br>• الآلة الحاسبة.<br>• برمجية جيوجبرا. | 4 |
| معمل برمجية جيوجبرا | • تمثيل البيانات ذات المتغيرين بشكل الانتشار، ورسم المستقيم الأفضل مطابقة لها باستعمال برمجية جيوجبرا. | | • برمجية جيوجبرا. | 1 |
| الدرس 2: المنحنى التكراري التراكمي. | • رسم المنحنى التكراري التراكمي يدويًّا، وباستعمال أدوات التكنولوجيا.<br>• تقدير الربيعات $Q_1$ , $Q_2$ , $Q_3$، والمدى الربيعي، والمئينات للجداول التكرارية ذات الفئات، وتفسير معنى كلٍّ منها ضمن مواقف حياتية.<br>• إيجاد الرتبة المئينية لقيمة من بيانات التوزيع. | المنحنى التكراري التراكمي. | • ورق رسم بياني.<br>• لوح متنقل للمستوى الإحداثي.<br>• مسطرة شفافة.<br>• الآلة الحاسبة.<br>• برمجية جيوجبرا. | 3 |
| الدرس 3: مقاييس التشتُّت للجداول التكرارية ذات الفئات. | • إيجاد التباين والانحراف المعياري للبيانات المنظمة في جداول تكرارية ذات فئات، وتفسير معنى كلٍّ منهما في مواقف حياتية متنوعة.<br>• اختيار الصيغة التي أُفضِّلها لحساب التباين.<br>• إيجاد التباين والانحراف المعياري للبيانات المُمثَّلة بمُدرَّج تكراري. | | • الآلة الحاسبة. | 3 |
| الدرس 4: احتمالات الحوادث المتنافية. | • تمييز الحادثين المتنافيين من الحادثين غير المتنافيين.<br>• إيجاد احتمالات حوادث متنافية وحوادث غير متنافية ضمن مواقف حياتية متنوعة.<br>• تمثيل التجارب العشوائية بأشكال فن، واستعمالها لإيجاد الاحتمالات.<br>• إيجاد احتمال الحادث المتمم. | الحادث البسيط.<br>الحادث المُركَّب.<br>الحادثان المتنافيان.<br>الحادث المتمم.<br>أشكال فن. | • أحجار نرد.<br>• صندوق فيه كرات، أو بطاقات ملونة.<br>• بطاقات مرقمة.<br>• الآلة الحاسبة. | 3 |
| الدرس 5: احتمالات الحوادث المستقلة والحوادث غير المستقلة. | • تمييز الحادثين المستقلين من الحادثين غير المستقلين.<br>• إيجاد احتمالات حوادث مستقلة وحوادث غير مستقلة ضمن مواقف حياتية متنوعة.<br>• تمثيل التجارب العشوائية بالشجرة الاحتمالية، واستعمالها لإيجاد الاحتمالات.<br>• إيجاد احتمالات الحوادث المشروطة ضمن مواقف حياتية متنوعة. | الحوادث المستقلة.<br>الحوادث غير المستقلة.<br>الاحتمال المشروط.<br>جدول الاتجاهين. | • أحجار نرد.<br>• صندوق فيه كرات، أو بطاقات ملونة.<br>• بطاقات مرقمة.<br>• الآلة الحاسبة. | 3 |
| عرض نتائج المشروع. | | | • جهاز عرض. | 1 |
| اختبار الوحدة. | | | | 2 |
| مجموع الحصص: | | | | 21 |

# الوحدة 8


الوحدةُ 8

الإحصاءُ والاحتمالاتُ
Statistics and Probabilities

ما أهميةُ هذهِ الوحدةِ؟

يساعدُنا علمُ الإحصاءِ والاحتمالاتِ على تفسيرِ الظواهرِ، وتحليلِ البياناتِ الكثيرةِ في حياتِنا اليوميةِ. فمثلًا، إذا أردْتُ استنتاجَ العلاقةِ بينَ زمنِ الاستيقاظِ صباحًا وتحصيلِ الطلبةِ الدراسيِّ، فإنَّني أحتاجُ إلى أداةٍ إحصائيةٍ تُسمّى شكلَ الانتشارِ، ومفهومَ الارتباطِ، وهوَ ممّا سأتعلَّمُهُ في هذهِ الوحدةِ.

تعلَّمْتُ سابقًا:

✓ تنظيمَ البياناتِ في جداولَ تكراريةٍ ذاتِ فئاتٍ.

✓ إيجادَ مقاييسِ النزعةِ المركزيةِ للبياناتِ (مفرداتٌ، جداولُ تكراريةٌ)، وتحديدَ أثرِ إجراءِ تحويلٍ خطِّيٍّ للقيمِ في مقاييسِ نزعتِها المركزيةِ.

✓ إيجادَ مقاييسِ التشتُّتِ للبياناتِ المفردةِ أوِ المُنظَّمةِ في جداولَ تكراريةٍ.

✓ حسابَ الاحتمالِ لحوادثَ بسيطةٍ ومركبةٍ.

سأَتعلَّمُ في هذهِ الوحدةِ:

◂ وصفَ العلاقةِ بينَ مُتغيِّرَيْنِ باستعمالِ شكلِ الانتشارِ، والمستقيمِ الأفضلِ مطابقةً.

◂ إيجادَ قيمِ الربيعياتِ والمئيناتِ باستعمالِ المنحنى التكراريِّ التراكميِّ.

◂ إيجادَ مقاييسِ التشتُّتِ للبياناتِ المُنظَّمةِ في جداولَ تكراريةٍ ذاتِ فئاتٍ.

◂ حسابَ احتمالِ حوادثَ مُركَّبةٍ، والاحتمالِ المشروطِ.

104

## نظرة عامة على الوحدة:

تعلَّم الطلبة سابقًا تنظيم البيانات في جداول تكرارية، وتقدير مقاييس نزعتها المركزية، وكيفية إيجاد الربيعات $Q_1, Q_2, Q_3$ للقيم المفردة، واستعمالها لعرض البيانات المفردة بطريقة الصندوق ذي العارضتين. وكذلك إيجاد مقاييس التشتُّت للقيم المفردة. سيتعلَّم الطلبة في هذه الوحدة تقدير مقاييس التشتُّت، وتقدير المئينات لبيانات منظمة في جداول تكرارية ذات فئات باستعمال المنحنى التكراري التراكمي، وسيتعرَّفون العلاقة بين مجموعتي بيانات (متغيرين) عن طريق تمثيلهما باستعمال شكل انتشار يدويًّا، وباستعمال برمجية جيوجبرا، وسيستعملون المستقيم الأفضل مطابقة لتقدير قيمة أحد المتغيرين بمعلومية المتغير الآخر. سيتعلَّم الطلبة أيضًا حساب احتمالات الحوادث المُركَّبة، وتمييز الحوادث المتنافية من الحوادث غير المتنافية، وتمييز الحوادث المستقلة من الحوادث غير المستقلة، واستعمال القوانين وأشكال فن والشجرة الاحتمالية لحساب الاحتمالات.

## الترابط الرأسي بين الصفوف

### سابقًا

#### الصف التاسع

- إيجاد الوسط الحسابي والوسيط والمنوال لبيانات منظمة في جداول تكرارية ذات فئات، وفي مُدرَّجات ومنحنيات تكرارية.
- حساب مقاييس التشتُّت لبيانات مفردة، وتحديد أثر التحويلات الخطية للقيم في تلك المقاييس.
- إيجاد مجموعة عناصر اتحاد حادثين أو تقاطعهما.
- إيجاد احتمالات حوادث مُركَّبة لتجربة عشوائية.

#### الصف العاشر

- تمثيل البيانات ذات المتغيرين بشكل الانتشار، ووصف العلاقة بين المتغيرين، واستعمال المستقيم الأفضل مطابقة لنقاط شكل الانتشار لتمثيل العلاقة (إنْ وُجِدت)، وتقدير قيمة متغير إذا عُلِمت قيمة المتغير الآخر.
- استعمال المنحنى التكراري التراكمي لتمثيل البيانات، وتقدير قيم الربيعات والمئينات لتلك البيانات.
- تقدير مقاييس التشتُّت للبيانات المنظمة في جداول تكرارية ذات فئات.
- إيجاد احتمالات حوادث مُركَّبة تشمل المتنافية، وغير المتنافية، والمستقلة، وغير المستقلة، والمشروطة.

### لاحقًا

#### الصف الحادي عشر العلمي

- حساب احتمالات حوادث باستعمال التباديل والتوافيق.
- تعرُّف مفهوم المتغير العشوائي.
- تحديد الحادث الذي يُحقِّق كل قيمة للمدى في المتغير العشوائي.
- إيجاد احتمال وقوع المتغير العشوائي.
- إنشاء جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي.
- توظيف جدول التوزيع الاحتمالي في حساب توقع المتغير العشوائي (المتوسط الحسابي للمتغير العشوائي).

## مشروع الوحدة

# مستوى الأقاربِ التعليميُّ

**فكرةُ المشروعِ** جمعُ بياناتٍ عنْ مستوى الأقاربِ التعليميِّ، وتنظيمُها، وتحليلُها، وكتابةُ استنتاجاتٍ عنْها.

**الموادُّ والأدواتُ** برمجيةُ جيوجبرا، برمجيةُ العرضِ التقديميِّ (بوربوينت).

### خطواتُ تنفيذِ المشروعِ:

1. أجمعُ بياناتٍ منْ 12 عائلةً منْ أقاربي أوْ جيراني عنِ المستوى التعليميِّ للزوجِ والزوجةِ.
2. أُنظِّمُ في الجدولِ المجاورِ البياناتِ التي جمعْتُها على النحوِ الآتي:
   - أُدوِّنُ في عمودَيِ الزوجِ والزوجةِ قيمًا عدديةً وَفقَ التصنيفِ الآتي: منْ دونِ تعليمٍ (1)، الأساسيُّ (2)، الثانويُّ (3)، الدبلومُ (4)، البكالوريوسُ (5)، الماجستيرُ (6)، الدكتوراه (7).

| رقمُ العائلةِ | المستوى التعليميُّ | |
|---|---|---|
| | الزوجُ | الزوجةُ |
| 1 | | |
| 2 | | |
| 3 | | |

3. أستعملُ برمجيةَ جيوجبرا لتمثيلِ القيمِ العدديةِ لمستوى تعليمِ الزوجِ والزوجةِ في صورةِ أزواجٍ مُرتَّبةٍ على هيئةِ شكلِ انتشارٍ، ثمَّ أَجِدُ معادلةَ المستقيمِ الأفضلِ مطابقةً للنقاطِ الاثنتي عشرةَ.
4. أُنظِّمُ البياناتِ التي جمعْتُها في الجدولِ السابقِ في جدولٍ تكراريٍّ ذي فئاتٍ كما في الجدولِ المجاورِ.

| عددُ الأزواجِ | عددُ الزوجاتِ | فئاتُ المستوى التعليميِّ |
|---|---|---|
| | | 1−3 |
| | | 4−6 |
| | | 7−9 |

5. أحسبُ الانحرافَ المعياريَّ للمستوى التعليميِّ لكلٍّ منَ الأزواجِ والزوجاتِ، ثمَّ أُقارِنُ بينَهُما، وأُفسِّرُهُما.
6. أكتبُ حادثيْنِ متنافييْنِ، وآخريْنِ غيرَ متنافييْنِ عنِ اختيارِ شخصٍ (أوْ أكثرَ) عشوائيًّا منَ الجدولِ الأولِ، ثمَّ أَجِدُ احتمالَ وقوعِهما معًا، واحتمالَ وقوعِ أحدِهما على الأقلِّ.
7. أكتبُ حادثيْنِ مستقليْنِ، وآخريْنِ مشروطيْنِ عنِ اختيارِ شخصٍ (أوْ أكثرَ) عشوائيًّا منَ الجدولِ الأولِ، ثمَّ أَجِدُ احتمالَ وقوعِهما معًا.

### عرضُ النتائجِ:

أُعِدُّ معَ أفرادِ مجموعتي عرضًا تقديميًّا (بوربوينت) يُلخِّصُ العملَ، وما توصَّلَ إليْهِ كلُّ فردٍ في المجموعةِ، وما تعلَّمْتُهُ منْ هذا المشروعِ؛ على أنْ يتضمَّنَ العرضُ التقديميُّ صورًا للجداولِ، وشكلَ الانتشارِ، وجميعَ الاستنتاجاتِ التي تُوصِّلَ إليْها في أثناءِ تنفيذِ المشروعِ.

105

## أداة تقييم المشروع

| الرقم | المعيار | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | تمثيل البيانات التي جُمِعت بطرائق مناسبة تبعًا لنوعها (عددية، غير عددية). | | | |
| 2 | رسم شكل انتشار دقيق، وتحديد المستقيم الأفضل مطابقة للبيانات. | | | |
| 3 | تنظيم البيانات في جدول تكراري ذي فئات بصورة دقيقة. | | | |
| 4 | إجراء الحسابات المُقترنة بالجداول على نحوٍ صحيح، والتوصُّل إلى استدلالات مُبرَّرة. | | | |
| 5 | مشاركة أفراد المجموعة جميعًا في عرض النتائج على نحوٍ شائق. | | | |

1 إنجاز المهمة بوجود أكثر من خطأ.
2 إنجاز المهمة بوجود خطأ بسيط.
3 إنجاز المهمة بصورة صحيحة من دون خطأ.

## مشروع الوحدة: مستوى الأقارب التعليمي.

**هدف المشروع:** يهدف مشروع الوحدة إلى ترسيخ المفاهيم الإحصائية والاحتمالية التي سيتعلَّمها الطلبة في هذه الوحدة، بجمع بيانات حقيقية من بيئتهم، ثم تنظيمها في جداول تكرارية، ثم تحليلها باستعمال برمجية جيوجبرا، وكتابة استنتاجات عنها.

## خطوات تنفيذ المشروع:

- أُعرِّف الطلبة بالمشروع وأهميته في تعلُّم موضوعات الوحدة.
- أُوزِّع الطلبة إلى مجموعات رباعية أو خماسية، ثم أطلب إلى أفراد كل مجموعة أنْ يُوزِّعوا الأدوار بينهم، ويختاروا مُقرِّرًا لهم.
- أُذكِّر أفراد المجموعات بالمواد والتجهيزات التي تَلزمهم لتنفيذ المشروع، مثل: كتاب الطالب، والأوراق الملونة، ولوحة الكرتون، والآلات الحاسبة، وأجهزة الحاسوب، وبرمجية جيوجبرا، وبرمجية العرض التقديمي (بوربوينت)، وآلة التصوير، فضلًا عن بيان عناصر المُنتَج النهائي المطلوب منهم، مُؤكِّدًا لهم أهمية توثيق كل خطوة من خطوات تنفيذ المشروع بالطرائق المناسبة.
- أُبيِّن لأفراد المجموعات أنَّ المطلوب هو تصميم عرض تقديمي يُلخِّص خطوات تنفيذ المشروع والاستنتاجات التي توصَّلوا إليها.

## عرض النتائج:

- أُوجِّه أفراد المجموعات إلى استعمال برمجية العرض التقديمي (بوربوينت) لتلخيص خطوات تنفيذ المشروع والاستنتاجات التي توصَّلوا إليها.
- أطلب إلى أفراد كل مجموعة المشاركة في عرض جزء من نتائج المشروع (تكمن أهمية هذه الخطوة في تعزيز مهارات الطلبة التكنولوجية، ومهاراتهم الحياتية، مثل: التواصل، والتعاون).
- أُخبِر أفراد المجموعات أنَّه يمكن عرض مشروعاتهم داخل الصف إنْ توافر جهاز عرض، أو في مختبر الحاسوب.
- أطلب إلى طلبة الصف التصويت على المشروع الأفضل.

## التقويم القبلي (التشخيصي):

- أستعمل صفحتي (أستعد لدراسة الوحدة) في كتاب التمارين والأنشطة العملية؛ لمساعدة الطلبة على تذكُّر المعرفة السابقة اللازمة لدراسة هذه الوحدة، مثل: استعمال القوانين لإيجاد كلٍّ من المدى، والتباين، والانحراف المعياري للبيانات المفردة أو المنظمة في جدول ذي تكرارات، وإيجاد الاحتمال لحوادث بسيطة في تجربة عشوائية.
- أُوجِّه الطلبة إلى حل الأسئلة، ثم أتجوَّل بينهم، وأحثُّ الطلبة الذين يواجهون صعوبة في حل أيِّ سؤال على قراءة المثال الذي يلي السؤال. وإذا لم تساعد دراسة المثال المحلول هؤلاء الطلبة، فأطلب إلى الجميع التوقُّف عن حل الأسئلة، ثم أشرح المثال، أو مثالًا مكافئًا له على اللوح بمشاركة طلبة الصف كافةً، ويمكنني اختيار بعضهم للمشاركة في شرح المثال.
- أختار سؤالًا واجه الطلبة صعوبة في حله، ثم أكتب على اللوح إحدى إجابات الطلبة غير الصحيحة – من دون أُذكِّر اسم الطالب–، وأُدير نقاشًا عنه.

**إرشاد:** إذا واجه بعض الطلبة صعوبة في حل الأسئلة الواردة في بند (أختبر معلوماتي)، فأُناقِشهم في المثالين الإضافيين الآتيين، مُستعملًا اللوح، وأحرص على التدرُّج في توضيح خطوات الحل؛ بُغْيَةَ تنظيم هذه الخطوات عند حل أسئلة مشابهة، وأُوجِّه الطلبة إلى استعمال الآلة الحاسبة حيثما لزم ذلك.

## مثالان إضافيان:

1 أجد كلًّا من المدى، والتباين، والانحراف المعياري للبيانات في الجدول التكراري الآتي:

| القيمة $x$ | 10 | 20 | 30 |
|---|---|---|---|
| التكرار $f$ | 2 | 2 | 1 |

$R = 20$ , $\sigma^2 = 56$, $\sigma = 7.48$

2 يحتوي صندوق على بطاقات متماثلة، كُتِب على كلٍّ منها أحد الأعداد الآتية: 9 ،8 ،7 ،6 ،5. إذا اختار سليم بطاقة من الصندوق عشوائيًّا، فما احتمال أنْ تحمل البطاقة عددًا أوليًّا؟ $\frac{2}{5}$

### الوحدةُ 8: الإحصاءُ والاحتمالاتُ — أستعدُّ لدراسةِ الوحدةِ

أختبرُ معلوماتي قبلَ البدءِ بدراسةِ الوحدةِ، وفي حالِ عدمِ تأكُّدي منَ الإجابةِ أستعينُ بالمراجعةِ.

**إيجادُ المدى، والانحرافِ المعياريِّ، والتباينِ للبياناتِ.**

1 أَجِدُ المدى، والانحرافَ المعياريَّ، والتباينَ للبياناتِ في الجدولِ التكراريِّ الآتي:

| التكرارُ | القيمةُ |
|---|---|
| 3 | 5 |
| 5 | 6 |
| 8 | 7 |
| 4 | 8 |

**مثالٌ:** أَجِدُ المدى، والانحرافَ المعياريَّ، والتباينَ للبياناتِ في الجدولِ التكراريِّ المجاورِ:

| القيمةُ $x$ | 10 | 12 | 15 | 17 |
|---|---|---|---|---|
| التكرارُ $f$ | 1 | 3 | 4 | 2 |

أُضيفُ إلى الجدولِ أعمدةً لأحسُبَ فيها القيمَ الآتيةَ:

$$x \cdot f, x-\mu, (x-\mu)^2, (x-\mu)^2 f$$

| القيمةُ $x$ | التكرارُ $f$ | $x \cdot f$ | $x-\mu$ | $(x-\mu)^2$ | $(x-\mu)^2 f$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 10 | 1 | 10 | $-4$ | 16 | 16 |
| 12 | 3 | 36 | $-2$ | 4 | 12 |
| 15 | 4 | 60 | 1 | 1 | 4 |
| 17 | 2 | 34 | 3 | 9 | 18 |
| المجموعُ | 10 | 140 | | | 50 |

المدى هوَ الفرقُ بينَ أكبرِ قيمةٍ وأصغرِ قيمةٍ $R = 17 - 10 = 7$

الوسطُ الحسابيُّ $\mu = \frac{\Sigma xf}{\Sigma f}$

بالتعويضِ والتبسيطِ $= \frac{140}{10} = 14$

التباينُ $\sigma^2 = \frac{\Sigma(x-\mu)^2 \cdot f}{(\Sigma f)}$

بالتعويضِ والتبسيطِ $= \frac{50}{10} = 5$

الانحرافُ المعياريُّ $\sigma = \sqrt{5} = 2.24$

24

### الوحدةُ 8: الإحصاءُ والاحتمالاتُ — أستعدُّ لدراسةِ الوحدةِ

**إيجادُ احتمالِ وقوعِ حادثٍ في تجربةٍ عشوائيةٍ.**

يحتوي كيسٌ على 6 كراتٍ حمراءَ، وَ5 كراتٍ زرقاءَ، وَ4 كراتٍ خضراءَ، علمًا بأنَّ جميعَ الكراتِ مُتماثِلةٌ. سحبَتْ هندُ كرةً واحدةً عشوائيًّا، ما احتمالُ سحبِ كرةٍ:

1 حمراءَ؟

2 ليسَتْ زرقاءَ؟

3 صفراءَ؟

**مثال 1:** رُمِيَتْ قطعةُ نقدٍ منتظمةٌ عشوائيًّا مرَّتيْنِ. أَجِدُ احتمالَ ظهورِ وجهِ الكتابةِ ($T$) مرَّتيْنِ.

عناصرُ الحادثِ $A$، وعددُها $A = \{(T, T)\}$ , $n(A) = 1$

عناصرُ فضاءِ العيِّنةِ، وعددُها $\Omega = \{(H, H), (H, T), (T, H), (T, T)\}$ , $n(\Omega) = 4$

احتمالُ الحادثِ $A$ $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{1}{4}$

**مثال 2:** رمى خليلٌ حجرَ نردٍ منتظمٍ مرَّةً واحدةً. أَجِدُ احتمالَ وقوعِ كلٍّ منَ الحادثيْنِ الآتييْنِ:

**1) ظهورُ عددٍ أقلَّ منْ 3**

إذا افترضْتُ أنَّ $A$ هوَ حادثُ ظهورِ عددٍ أقلَّ منْ 3، فإنَّ:

عناصرَ الحادثِ $A$، وعددَها $A = \{1, 2\}$ , $n(A) = 2$

عناصرَ فضاءِ العيِّنةِ، وعددَها $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ , $n(\Omega) = 6$

احتمالَ الحادثِ $A$ $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

**2) ظهورُ عددٍ أكبرَ منْ 6**

إذا افترضْتُ أنَّ $B$ هوَ حادثُ ظهورِ عددٍ أكبرَ منْ 6، فإنَّ:

عناصرَ الحادثِ $B$، وعددَها $B = \varnothing$ , $n(B) = 0$

احتمالَ الحادثِ $B$ $P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{0}{6} = 0$

25

# الدرس 1

## نتاجات الدرس

- تعرُّف شكل الانتشار.
- وصـف العلاقة بين مجموعتي بيانات مُمثَّلة بشـكل الانتشار.
- تمثيل بيانات متغيرين بشكل انتشار يدويًّا، وباستعمال أدوات التكنولوجيا.
- رسـم المسـتقيم الأفضل مطابقة في شكل الانتشار، وإيجاد معادلته يدويًّا، وباستعمال أدوات التكنولوجيا.
- استعمال المسـتقيم الأفضل مطابقة لتقدير قيمة أحد المتغيـرات إذا عُلِمـت قيمة المتغيـر الآخر ضمن مواقف حياتية متنوعة.
- تحديد متـى يكون تقدير قيمة أحد المتغيرين مُضلِّلًا، أو غير منطقي.

## التعلُّم القبلي:

- تعيين النقاط على المستوى الإحداثي.
- إيجاد معادلة مستقيم يمر بنقطتين معلومتين.
- إيجاد قيمة أحـد المتغيرين إذا عُلِمـت قيمة المتغير الآخر في معادلة مستقيم.

## 1 التهيئة

- أرسـم مسـتوى إحداثيًّا على اللوح المتنقل، أو على اللوح العادي باستعمال المسطرة.
- أُذكِّر الطلبة بكيفية كتابة إحداثيي نقطة على المستوى $A(x, y)$.
- أُدوِّن جانبًا مجموعة من النقاط، مثل: $A(3, 5), B(0, 2), C(3, 0), D(-1,1), E(1, -1), F(-1, -2)$، ثم أُناقِش الطلبة في كيفية تعيينها على المستوى الإحداثي.
- أُدوِّن جانبًـا مجموعـة أُخـرى من النقـاط تتضمَّن إحداثياتها كسـورًا، مثـل $G(2.5, 3.4)$، ثم أُناقِش الطلبة في كيفية تعيينها على المستوى الإحداثي.
- أرسـم مسـتقيمًا يمر بالنقطتين $A, B$، مُذكِّرًا الطلبة بمعادلة المستقيم.
- أرسـم مسـتقيمًا يمر بالنقطتين $C, D$، ثم أطلب إلى الطلبة إيجاد معادلته.

---

الدرس 1

## أشكالُ الانتشارِ
## Scatter Graphs

**فكرةُ الدرسِ** فهمُ أشـكالِ الانتشارِ، ووصفُها، واسـتعمالُ المسـتقيمِ الأفضلِ مطابقةً لتقديرِ قيمةِ أحدِ مُتغيِّرَيْنِ بمعرفةِ قيمةِ الآخرِ.

**المصطلحاتُ** شكلُ الانتشارِ، الارتباطُ الموجبُ، الارتباطُ السالبُ، المستقيمُ الأفضلُ مطابقةً.

**مسألةُ اليومِ** ادَّعى راكانُ أنَّهُ كلَّما زادَ طولُ الشخصِ زادَتِ المسافةُ بينَ طرفَيْ ذراعيْهِ عندَ مدِّهِما على استقامةٍ. كيفَ أتحقَّقُ مِنْ صحَّةِ ادِّعائِهِ؟

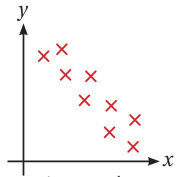
يتعيَّنُ علَيْنا في كثيرٍ منَ المواقفِ الحياتيةِ استكشـافُ العلاقةِ بيـنَ مجموعتيْنِ منَ البياناتِ، ووصفُ هذهِ العلاقةِ. ومنَ الأمثلةِ على ذلكَ:

- طولُ الإنسانِ ومُعدَّلُ نبضاتِ قلبِهِ.
- تحصيلُ الطلبةِ في الرياضياتِ وتحصيلُهُمْ في العلومِ.

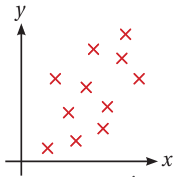
**شكلُ الانتشارِ** (scatter graph) هوَ تمثيلٌ بيانيٌّ يُوضِّحُ العلاقةَ (إنْ وُجِدَتْ) بينَ مجموعتيْنِ مـنَ البياناتِ، وتَظهرُ فيهِ نقاطٌ تُمثِّـلُ بياناتِ المجموعتيْنِ بوصفِها أزواجًـا مُرتَّبةً $(x, y)$ في المسـتوى الإحداثيِّ؛ إذْ تُمثِّلُ بياناتُ المُتغيِّرِ $x$ على المحورِ الأفقيِّ الموجبِ، وتُمثِّلُ بياناتُ المُتغيِّرِ $y$ على المحورِ الرأسيِّ الموجبِ.

**الارتباطُ** (correlation) هوَ وصفُ العلاقةِ بينَ مجموعتَيِ البياناتِ. وقدْ يكونُ **الارتباطُ موجبًا** (positive correlation)، أوْ **سـالبًا** (negative)، أوْ قويًّا، أو ضعيفًا، كما في أشـكالِ الانتشارِ الآتيةِ:

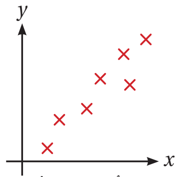
**أتعلَّمُ**
أُلاحِظُ عـدمَ وجودِ حاجةٍ إلـى الأجزاءِ السـالبةِ منَ المحـاورِ في المسـتوى الإحداثـيِّ؛ لأنَّ النقـاطَ التي تُمثِّلُ شـكلَ الانتشارِ موجبةٌ.



ارتباطٌ سالبٌ قويٌّ.



ارتباطٌ موجبٌ ضعيفٌ.



ارتباطٌ موجبٌ قويٌّ.

106

---

## إرشادات:

- يمكنني تصميـم لوح متنقل للمسـتوى الإحداثي باسـتعمال لوحة من الكرتـون الأبيض، ثم أرسـم عليها محورين متعامدين فوق شـبكة من المربعات الصغيرة المتطابقة التي سـبق رسـمها على اللوحة، ثم أُقسِّم المحاور إلى وحدات، طول كلٍّ منها 10 مربعات صغيرة على الشبكة، ثم أُغلِّف اللوحة بلاصق شفاف؛ ليسهل الكتابة عليها بأقلام اللوح.
- يمكننـي تصميم لـوح متنقل إضافي أرسـم عليه فقط الربـع الأول من المستوى الإحداثي؛ ليسهل على الطلبة تعيين نقاط شكل الانتشار.
- أحثُّ الطلبة على إحضار دفاتر الرسم البياني في الحصص اللاحقة.

ملاحظات المُعلِّم/ المُعلِّمة

## 2 الاستكشاف

- أُوجِّه الطلبة الى قراءة المسألة في بند (**مسألة اليوم**).
- أطلب إلى الطلبة أُذكِّر أمثلة على متغيرين آخرين من المسألة يمكن الادِّعاء بوجود علاقة بينهما، ثم صياغة ادِّعاء مرتبط بالعلاقة بين المتغيرين.

**من الإجابات المحتملة:**

كلَّما زاد طول الذراع زاد طول الساق.

كلَّما زاد طول الشخص نقص محيط الرأس.

كلَّما زاد طول الشخص زادت كتلة الجسم.

- أستمع لإجابات الطلبة، ثم أُناقِشهم فيها.
- أطلب إلى الطلبة الإجابة عن المسألة، ثم أستمع لبعض الإجابات من دون تقديم تغذية راجعة لها.

## 3 التدريس

- أكتب على اللوح الأمثلة الثلاثة التي وردت في كتاب الطالب، وبيَّنت العلاقة بين مجموعتين من البيانات، ثم أسأل الطلبة بعد كل مثال:
  - » ما العلاقة المُتوقَّعة بين المجموعة الأولى والمجموعة الثانية؟
- بعد كل إجابة أستمع لها، أسأل الطلبة:
  - » لماذا تعتقدون ذلك؟
  - » كيف يمكنكم التحقُّق من ذلك؟
- أستمع لإجابات بعض الطلبة، وأُشارِك آخرين في التعليق على إجابات الزملاء بسؤالهم:
  - » ما رأيكم في هذه الإجابة؟

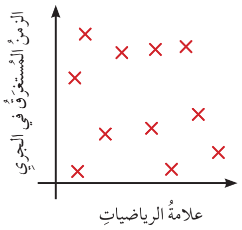
**إجابة محتملة للمثال الأول:**

كلَّما زادت درجات الحرارة زادت الكميات المَبيعة من المُثلَّجات. أو:
لا توجد علاقة بين درجات الحرارة والكميات المَبيعة من المُثلَّجات.

- أُوضِّح للطلبة مفهوم شكل الانتشار (scatter graph)، وكيف يساعد التمثيل بشكل الانتشار على فهم العلاقة بين مجموعتي البيانات التي يُمثِّلها، وتحديد هذه العلاقة، وبخاصة عندما تتجمَّع نقاطه كأنَّها حول مستقيم. بعد ذلك أرسم على اللوح ثلاثة أشكال انتشار مشابهة لتلك الواردة في كتاب الطالب، مُوضِّحًا مفهوم الارتباط (correlation)، ومتى يوصف بأنَّه موجب (positive) أو سالب (negative)، وقوي أو ضعيف، مستعينًا بأشكال الانتشار التي رسمتها.
- أرسم على اللوح شكل انتشار مشابهًا لما ورد في كتاب الطالب (علامات الرياضيات، الزمن المستغرق لجري مسافة 800 m)، مُوضِّحًا للطلبة سبب وصف الارتباط – في هذه الحالة– بأنَّه ضعيف، أو القول بعدم وجود ارتباط خطي.
- أُخبِر الطلبة أنَّ التركيز في هذا الدرس سيكون على أشكال الانتشار التي تُوضِّح ارتباطًا خطيًّا.

مِنَ المُلاحَظِ أَنَّهُ كلَّما كانَ الارتباطُ موجبًا قويًّا تجمَّعَتِ النقاطُ في شكلِ الانتشارِ حولَ مستقيمٍ ميلُهُ موجبٌ، وأَنَّهُ كلَّما كانَ الارتباطُ سالبًا قويًّا تجمَّعَتِ النقاطُ في شكلِ الانتشارِ حولَ مستقيمٍ ميلُهُ سالبٌ.

أمّا إذا كانَ الارتباطُ ضعيفًا (أوْ لا يوجدُ ارتباطٌ)، فإنَّ النقاطَ في شكلِ الانتشارِ تكونُ متناثرةً ومتباعدةً كما في شكلِ الانتشارِ المجاورِ، الذي يُظهِرُ العلاقةَ بينَ تحصيلِ مجموعةٍ منَ الطلبةِ في مادَّةِ الرياضياتِ والزمنِ الذي استغرقَهُ كلٌّ منْهُمْ في الجريِ مسافةَ 800 m

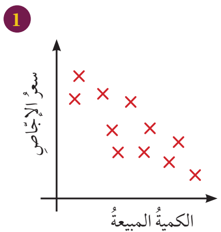



### مثال 1

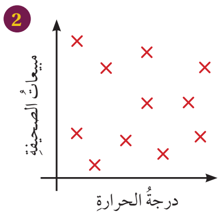
**هلْ يوجدُ ارتباطٌ بينَ بياناتِ المُتغيِّريْنِ المُمثَّليْنِ في كلٍّ منْ شكلَيِ الانتشارِ الآتييْنِ؟ في حالةِ وجودِ ارتباطٍ بينَهما، هلْ هوَ موجبٌ أمْ سالبٌ؟ هلْ هوَ قويٌّ أمْ ضعيفٌ؟**

يُزرَعُ في دولِ العالَمِ المختلفةِ نحوَ 300 نوعٍ منَ الإجّاصِ.

1 يُظهِرُ شكلُ الانتشارِ المجاورُ العلاقةَ بينَ سعرِ الإجّاصِ وكميتِهِ المبيعةِ. وبناءً على توزيعِ النقاطِ في هذا الشكلِ، فإنَّ كميةَ الإجّاصِ المبيعةَ كانَتْ قليلةً عندما كانَ سعرُهُ مرتفعًا، والعكسُ صحيحٌ. وهذا يشيرُ إلى وجودِ ارتباطٍ سالبٍ؛ ولأنَّ نقاطَ شكلِ الانتشارِ متقاربةٌ، فهوَ قويٌّ.




2 يُظهِرُ شكلُ الانتشارِ المجاورُ العلاقةَ بينَ درجةِ الحرارةِ ومبيعاتِ إحدى الصحفِ. ومنَ المُلاحَظِ أَنَّهُ لا يوجدُ ارتباطٌ أوْ علاقةٌ واضحةٌ بينَ درجاتِ الحرارةِ ومبيعاتِ الصحيفةِ؛ لأنَّ نقاطَ شكلِ الانتشارِ متباعدةٌ.




107

## مثال 1

- أُناقِش الطلبة في حل هذا المثال، ثم أرسم على اللوح أشكال انتشار مشابهة لتلك الواردة في فرعي المثال، مُركِّزًا على رسم مستقيم ميله سالب (في الفرع 1)، وتتجمَّع نقاط شكل الانتشار على طرفيه بالتساوي (ما أمكن).

## تعزيز اللغة ودعمها:

أُكرِّر المصطلحات الرياضية المستخدمة في الدرس باللغتين العربية والإنجليزية، وأُحفِّز الطلبة على استعمالها، مثل: شكل الانتشار (scatter graph)، والارتباط الموجب (positive correlation)، والارتباط السالب (negative correlation)، والمستقيم الأفضل مطابقة (line of best fit).

## إرشادات:

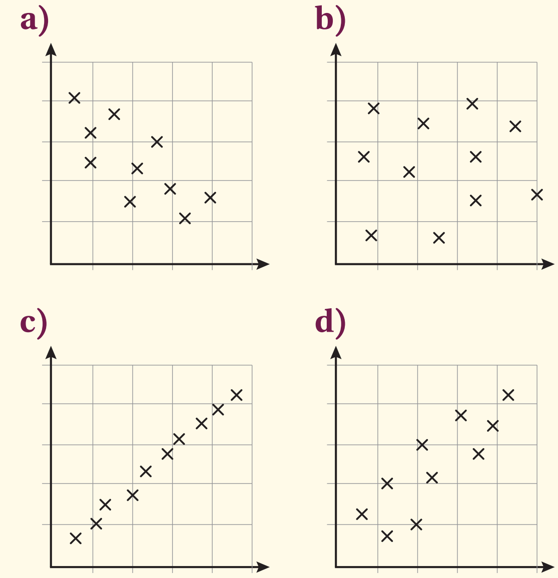
- إذا توافر في الصف جهاز عرض، فأستعمله لعرض أشكال الانتشار التي ورد ذكرها في الدرس؛ توفيرًا للوقت الذي يستغرقه رسمها على اللوح.
- عند مناقشة الطلبة في إجاباتهم عن سؤال المثال الإضافي، أُركِّز على تبرير الإجابة، لا على الإجابة تحديدًا؛ إذ ستختلف كل إجابة تبعًا لتبريرها.

## التقويم التكويني:

- أُوجِّه الطلبة إلى حل التدريب في بند (**أتحقق من فهمي**).
- أختار بعض الإجابات التي تحوي أخطاء مفاهيمية، ثم أُناقِشها على اللوح، ولا أذكر اسم الطالب الذي أخطأ في الإجابة؛ تجنبًا لإحراجه.

## مثال إضافي

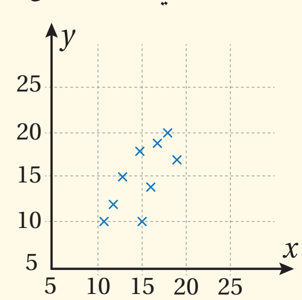
- أيُّ أشـــكال الانتشـــار الآتية يصف العلاقة بين راتب الموظف ومساحة الشقة التي يستأجرها؟ أُبرِّر إجابتي.




الشـكل $d$ هو الأنسـب؛ لأنَّ العلاقة بين راتب الموظف ومساحة الشقة التي يستأجرها موجبة ومتوسطة القوة.

## مثال 2

- أُوضِّح للطلبة أنَّه لرسم شكل الانتشار ودراسة العلاقة بين مجموعتي بيانات، توضع قيم إحدى المجموعتين علـى المحـور الأفقـي (المتغيـر $x$)، وتوضع قيم المجموعــة الأُخرى على المحور الرأســي (المتغير $y$)، ثم يُدرَّج المحــوران لتعيين أكبر القيم في بيانات المجموعتيــن، مُبيِّنًا أنَّ التركيز فقـط هو على الجزء الموجب من كل محور، ثم أُناقِشهم في سبب ذلك.
- أُناقِش الطلبة في حل هــذا المثال، ثم أُخبِرهم – عند تدريج المحــاور – أنَّ التدريـج ... ,5, 10, 15, 20 مناسب؛ لأنَّه يتيح تعيين أكبر قيمة لزمن الاستحمام $x$، وهي 19 min، وأكبر قيمة لكمية المياه المســتهلكة $y$، وهي 20 L، ثم أُوضِّح لهم ســبب وصف الارتباط بأنَّه موجب وقوي.
- أُخبِــر الطلبة أنَّه يمكن البــدء بالنقطة (5, 5) بوصفها نقطة تقاطــع المحوريــن – كما يظهر فــي التمثيل الآتي– بدلًا مــن البدء بنقطة الأصل (0, 0) origin، من دون أنْ يُؤثِّر ذلك في صحة شكل الانتشار.




---

يُعَـدُّ مُعدَّلُ اسـتهلاكِ السـيّارةِ للوقـودِ أحدَ أهمِّ العوامـلِ المُحفِّزةِ لشـرائِها؛ لذا تحرِصُ مصانعُ السيّاراتِ دائمًا علـى ابتكارِ أسـاليبَ تكنولوجيـةٍ للحدِّ منَ استهلاكِ الوقودِ.

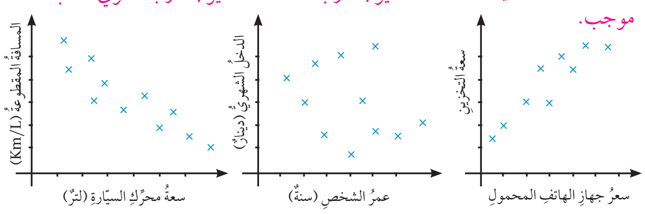
### أتحقق من فهمي

هلْ يوجدُ ارتباطٌ بينَ بياناتِ المُتغيِّرَيْنِ المُمثَّليْنِ في كلِّ شـكلٍ منْ أشكالِ الانتشارِ الآتيةِ؟ في حالةِ وجودِ ارتباطٍ بينَها، هلْ هوَ موجبٌ أمْ سالبٌ؟ هلْ هوَ قويٌّ أمْ ضعيفٌ؟

a) يوجد ارتباط قوي سالب.

b) لا يوجد ارتباط.

c) يوجـد ارتباط قوي موجب.




عنـدَ تمثيلِ مجموعتيْنِ منَ البياناتِ بمُتغيِّريْنِ مثلِ $(x)$ وَ$(y)$، يمكنُ تمثيلُ شـكلِ الانتشـارِ يدويًّا، أوْ باستعمالِ برمجيةِ جيوجبرا، وذلكَ بتعيينِ نقاطِ شكلِ الانتشارِ بوصفِها أزواجًا مُرتَّبةً $(x , y)$؛ لأتمكَّنَ منْ وصفِ الارتباطِ (إنْ وُجِدَ).

### مثال 2

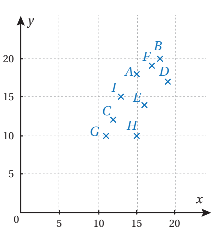
أُمثِّـلُ البيانـاتِ فـي الجـدولِ الآتـي علـى شـكلِ انتشـارٍ، ثـمَّ أَصِـفُ الارتبـاطَ بيـنَ المُتغيِّريْـنِ $(x)$ وَ $(y)$:

يعاني الأردنُّ شُـحًّا في المواردِ المائيةِ؛ ولهذا، فإنَّ عدمَ الإسـرافِ في اسـتهلاكِ الميـاهِ هـوَ واجبٌ دينيٌّ ووطنيٌّ.

مدَّةُ الاستحمامِ $(x)$ بالدقائقِ للشخصِ، وكميةُ المياهِ المُستهلَكةِ $(y)$ باللترِ.

| الشخصُ | $A$ | $B$ | $C$ | $D$ | $E$ | $F$ | $G$ | $H$ | $I$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | 15 | 18 | 12 | 19 | 16 | 17 | 11 | 15 | 13 |
| $y$ | 18 | 20 | 12 | 17 | 14 | 19 | 10 | 10 | 15 |

أُعيِّنُ الأزواجَ المُرتَّبةَ في المستوى الإحداثيِّ كما في الشكلِ المجاورِ.




بالنظرِ إلى شكلِ الانتشارِ، يُلاحَظُ وجودُ ارتباطٍ موجبٍ قويٍّ بينَ المُتغيِّريْنِ $(x)$ وَ$(y)$؛ لأنَّهُ كلَّما زادَتْ قيمةُ $(x)$ في أغلبِ الحـالاتِ زادَتْ قيمةُ $(y)$؛ أيْ كلَّما زادَتْ مدَّةُ الاسـتحمامِ لشخصٍ ما زادَتْ كميةُ المياهِ التي يستهلكُها.

**أتحقق من فهمي** أنظر الهامش.

**أُمثِّلُ البياناتِ في الجدولِ الآتي على شكلِ انتشارٍ، ثمَّ أَصِفُ الارتباطَ بينَ المُتغيِّرَيْنِ $(x)$ وَ $(y)$:**

| سعرُ السيّارةِ $(x)$ بألوفِ الدنانيرِ، وعمرُ السيّارةِ $(y)$ بالسنواتِ. | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| السيّارةُ | $A$ | $B$ | $C$ | $D$ | $E$ | $F$ | $G$ | $H$ | $I$ | $J$ |
| $x$ | 10.5 | 10 | 10.2 | 9.5 | 9.4 | 10.1 | 9.5 | 7 | 6 | 5.5 |
| $y$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |

**المســتقيمُ الأفضلُ مطابقةً** (line of best fit) هوَ مســتقيمٌ يمرُّ بأكبرِ عددٍ منْ نقاطِ شــكلِ الانتشــارِ، بحيثُ يكونُ عددُ النقاطِ التي لا يمرُّ بها متساويًا (تقريبًا) على جهتيْهِ، وتكونُ أقصرُ المسافاتِ بينَهُ وبينَ النقاطِ التي لا يمرُّ بها متساويةً (تقريبًا).

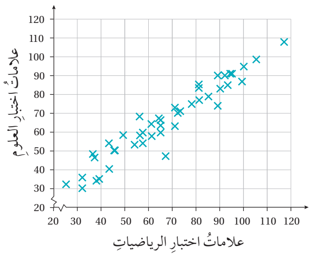
يُستعمَلُ المستقيمُ الأفضلُ مطابقةً لتقديرِ قيمةِ أحدِ المُتغيِّرَيْنِ في شكلِ الانتشارِ ذي الارتباطِ القويِّ بمعلوميةِ قيمةِ المُتغيِّرِ الآخرِ.

**إرشادٌ**

يُرسَمُ المستقيمُ الأفضلُ مطابقــةً بالنظــرِ عامةً. ولرسمِهِ، يُفضَّلُ استعمالُ مسطرةٍ شفّافةٍ.

**مثال 3**

**اعتمــادًا على شــكلِ الانتشــارِ المجــاورِ الذي يُمثِّــلُ علامــاتِ اختبارِ الرياضيــاتِ وعلاماتِ اختبــارِ العلــومِ لمجموعــةٍ منَ الطلبــةِ، أُجيبُ عــنِ الأســئلةِ الآتيةِ:**

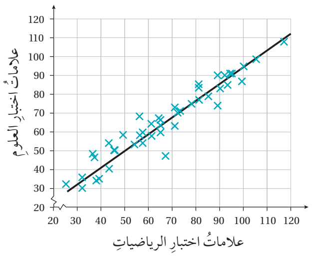



**أتعلّمُ**

عندَ عــدمِ الحاجــةِ إلى بدءِ المحاورِ في التمثيلِ البيانيِّ منْ نقطةِ الأصلِ، توضعُ قبــلَ قيــمِ البدءِ للمحوريــنِ خطــوطٌ متعرّجةٌ تدلُّ على إهمالِ جــزءٍ مــنَ المحوريــنِ الإحداثيين

**1** **أرسمُ المستقيمَ الأفضلَ مطابقةً للبياناتِ المُمثَّلةِ في شكلِ الانتشارِ.**

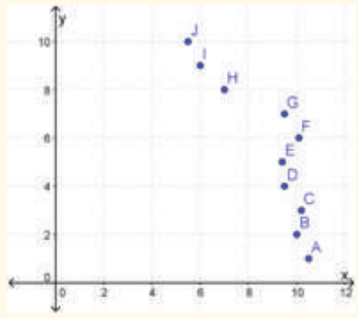
أرســمُ المســتقيمَ الأفضــلَ مطابقــةً باســتعمالِ المســطرةِ كما في الشكلِ المجاورِ.




أُلاحِــظُ أنَّ الارتبــاطَ بيــنَ المُتغيِّرَيْنِ موجبٌ وقويٌّ.



## إجابة سؤال بند (أتحقق من فهمي 2):



يوجد ارتباط قوي سالب بين $x$ و $y$؛ إذ يُمثِّل $x$ سعر السيارة بآلاف الدنانير، ويُمثِّل $y$ عمرها بالسنوات.

## إرشاد: استراتيجية التعلُّم بالأقران:

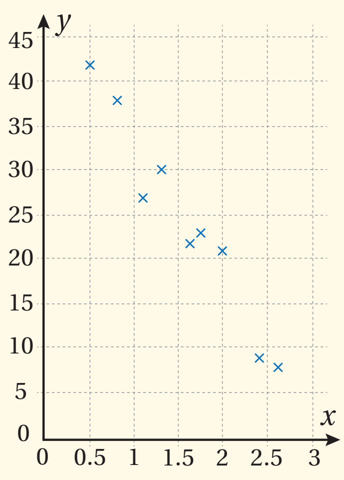
قد يواجه بعض الطلبة من ذوي المستوى التوسط ودون المتوسط صعوبة في تدريج المحورين عند رسم شكل الانتشار؛ لذا أُوزِّع الطلبة إلى مجموعات، ثم أطلب إليهم حل المثال الإضافي؛ لتأكيد أهمية تدريج المحورين بصورة مناسبة لقيم مجموعتي البيانات، ثم أُوزِّع الطلبة الذين أتقنوا تدريج المحورين بصورة مناسبة على بقية المجموعات ليساعدوا زملاءهم.

## مثال إضافي

- دوَّن عُمَر في الجدول التالي الزمن بالساعات، والسرعة المتوسطة بالكيلومتر لكل ساعة، أثناء قيادته السيارة في عدد من الرحلات التي قام بها. أُمثِّل البيانات في شكل انتشار، ثم أَصِف الارتباط بين المتغيرين $x, y$.

| رقم الرحلة | الزمن $x$ (h) | السرعة $y$ (km/h) |
|---|---|---|
| 1 | 0.5 | 42 |
| 2 | 0.8 | 38 |
| 3 | 1.1 | 27 |
| 4 | 1.3 | 30 |
| 5 | 1.6 | 22 |
| 6 | 1.75 | 23 |
| 7 | 2 | 21 |
| 8 | 2.4 | 9 |
| 9 | 2.6 | 8 |

الحل:



الارتباط سالب قوي.

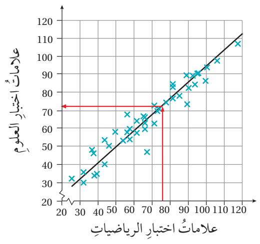
## مثال 3

- أوضِّـح للطلبة مفهوم المســـتقيم الأفضـــل مطابقة، وأؤكِّد عند رســـمه يدويًّا ضرورة مراعاة مروره وسط معظم نقاط شكل الانتشار، بحيث تتوزَّع النقاط التي لا تقع عليه بشــكل متســاوٍ (تقريبًا) على جهتيه، من حيث: عددها، وبُعْد كلٍّ منها عنه، مُبيِّنًا أنَّه يستفاد من رسم المســـتقيم الأفضل مطابقة بدقة في إعطاء تقدير دقيق لقيمة أحـــد المتغيرين إذا عُلِمـــت قيمة المتغير الآخر.
- عند مناقشة الطلبة في حل هذا المثال، أرسم على لوح متنقل شكل الانتشـــار المعطى لعلامات الرياضيات وعلامات العلوم ســلفًا، مُبيِّنًا كيفية ضبط المســـطرة الشـــفافة عند رسم المســـتقيم الأفضل مطابقة بحيث يتوسط نقاط شكل الانتشار.
- أُخبِر الطلبة أنَّه يســتفاد من معادلة المستقيم الأفضل مطابقة فـــي الحصول علـــى تقدير أكثـــر دقة لعلامة الطالب الغائب عن اختبار العلوم، بتعويض $x$ علامته في الرياضيات مكان $x$؛ أيْ:

$$y = 0.88(75) + 6.36 = 72$$

**2** علامـــةُ طالبٍ في اختبارِ الرياضيـــاتِ 75، لكنَّهُ غابَ عنِ اختبارِ العلومِ بســـببِ مرضِهِ. أستعملُ المستقيمَ الأفضلَ مطابقةً الذي رسمْتُهُ لتقديرِ علامتِهِ المحتملةِ في مادَّةِ العلومِ.

أُقدِّرُ علامةَ هذا الطالبِ في مادَّةِ العلومِ برســمِ مستقيمٍ رأسيٍّ، بدءًا بالعلامةِ 75 على المحورِ الأفقيِّ حتى يلتقيَ بالمستقيمِ الأفضلِ مطابقةً. ومنْ نقطةِ التقاطعِ أرسمُ مستقيمًا أفقيًّا، وصولًا إلى المحورِ الرأســيِّ، فأُقدِّرُ علامتَهُ بنحوِ 72 كما في الشكلِ المجاورِ.




**3** أَجِدُ معادلةَ المستقيمِ الأفضلِ مطابقةً.

يُمكِنُ إيجادُ معادلةِ المستقيمِ إذا عُلِمَتْ إحداثياتُ أيِّ نقطتيْنِ يمرُّ بهِما، ولتكنْ $(53, 53)$ وَ $(95, 90)$:

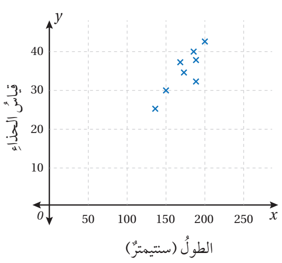
| | |
|---|---|
| معادلةُ مستقيمٍ يمرُّ بنقطتيْنِ معلومتيْنِ | $y-y_1 = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$ |
| بتعويضِ إحداثياتِ النقطتيْنِ | $y-53 = \frac{90-53}{95-53}(x-53)$ |
| بالتبسيطِ | $y = 0.88x + 6.36$ |

**إرشادٌ**

بما أنَّهُ يُمكِنُ رسمُ أكثرَ مِـنْ مســتقيمٍ، واختيارُ أيِّ نقطتيْـــنِ يمـــرُّ بهِما المستقيمُ (يختلفُ هذا الاختيـــارُ منْ شـــخصٍ إلى آخرَ)، فـــإنَّ معادلةَ المستقيمِ قدْ تختلفُ تبعًا للنقطتيْنِ المختارتيْنِ.

**أتحقق من فهمي**

اعتمادًا على شكلِ الانتشارِ المجاورِ الذي يُمثِّلُ الطـــولَ $(x)$ بالســـنتيمترِ، وقياسَ الحـــذاءِ $(y)$ لمجموعةٍ منَ الأشخاصِ، أُجيبُ عمّا يأتي:




a) أرســـمُ المســـتقيمَ الأفضلَ مطابقةً، ثمَّ أَجِدُ معادلتَهُ. أنظر الهامش.

b) أُقدِّرُ قياسَ الحذاءِ لشخصٍ طولُهُ 190 cm

38 تقريبًا.



## تنويع التعليم:

أطلب إلى الطلبة تصفُّح الموقع الإلكتروني:

http://nlvm.usu.edu/en/nav/vlibrary.html

الذي تتوافر فيه الأداة التفاعلية Scatterplot correlation. ضمن مجال Data Analysis & Probability؛ لتعيين نقاط شـكل الانتشار على المستوى الإحداثي، ورسم المستقيم الأفضل مطابقة لها، وتحديد معادلته.

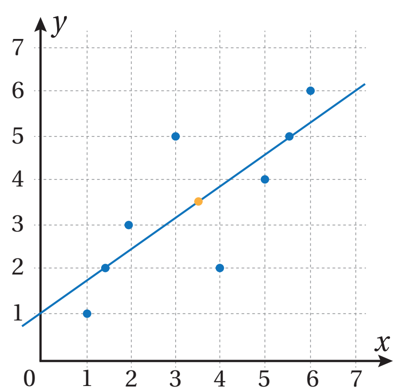
### إجابة سؤال بند (أتحقق من فهمي 3):

معادلة المستقيم هي: $y = 0.23x - 5.58$

## أخطاء مفاهيمية:

قد يُخطِئ بعض الطلبة في رســـم المســـتقيم الأفضل مطابقة يدويًّا، فيرسمون مستقيمًا يمر بأكبر عدد من نقاط شكل الانتشار؛ لذا أُخبِرهم أنَّ ذلك قد لا يكون صحيحًا، مُؤكِّدًا أنَّ المستقيم يجب أنْ يتوسط نقاط شكل الانتشار، بحيث تنتشر النقاط على جهتيه بالتساوي (تقريبًا)، وأنَّه ليس شرطًا أنْ يمر بأكبر عدد منها.

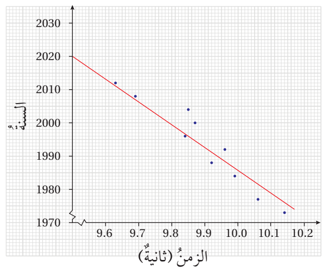
يمكنني الاستعانة بالرسم الآتي:



مِنَ المحاذيرِ التي يجبُ التنبُّهُ لها، استعمالُ شكلِ الانتشارِ لعملِ استنتاجاتٍ؛ فشكلُ الانتشارِ يكونُ مفيدًا فقطْ ضمنَ مدى القيمِ المعطاةِ. أمّا في حالِ الخروجِ عنْ هذا المدى فقدْ تكونُ الاستنتاجاتُ مُضلِّلةً، أوْ غيرَ منطقيةٍ.

### مثال 4

**يُمثِّلُ شكلُ الانتشارِ المجاورُ الأزمنةَ المُدوَّنةَ لصاحبِ المركزِ الأولِ في سباقِ 100 m للرجالِ في عددٍ منْ دوراتِ الألعابِ الأولمبيةِ. أستعملُ المستقيمَ الأفضلَ مطابقةً المُعطى في الشكلِ لتقديرِ الزمنِ الذي سيُحقِّقُهُ صاحبُ المركزِ الأولِ في السباقِ للدورةِ التي ستقامُ عامَ 2020م.**



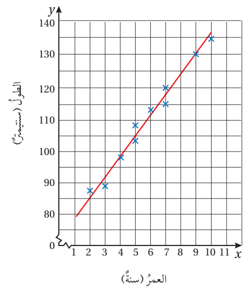

**الألعابُ الأولمبيةُ:** حدثٌ رياضيٌّ دوليٌّ يُنظَّمُ كلَّ سنتيْنِ في السنواتِ الزوجيةِ، بتناوبِ الألعابِ الصيفيةِ والألعابِ الشتويةِ.

**هلْ يُمكِنُ تقديرُ الزمنِ الذي سيُحقِّقُهُ صاحبُ المركزِ الأولِ في السباقِ للدورةِ التي ستقامُ عامَ 2038م؟**

إذا استعملْتُ المستقيمَ الأفضلَ مطابقةً، فأُقدِّرُ الزمنَ المُستغرَقَ لقطعِ مسافةِ السباقِ بنحوِ 9.5 ثوانٍ في دورةِ عامِ 2020م، ولكنَّ هذا التقديرَ لا ينطبقُ على الدوراتِ الأولمبيةِ التاليةِ الخارجةِ عنْ مدى القيمِ المعطاةِ؛ فوَفقًا لهذا التقديرِ، يُتوقَّعُ استمرارُ انخفاضِ الزمنِ المُستغرَقِ لقطعِ مسافةِ السباقِ إلى 9 ثوانٍ، وَ8.5 ثوانٍ، وَ8 ثوانٍ، ...، وهكذا حتى الوصولِ إلى دورةٍ لنْ يحتاجَ فيها المتسابقونَ إلى أيِّ زمنٍ لقطعِ مسافةِ السباقِ التي طولُها 100 m، وهذا غيرُ منطقيٍّ.

**أتحقق من فهمي**

**أستعملُ المستقيمَ الأفضلَ مطابقةً في الشكلِ المجاورِ لتقديرِ طولِ طفلٍ عمرُهُ 8 سنواتٍ. هلْ يُمكِنُ استعمالُ هذا الشكلِ لتقديرِ طولِ شخصٍ عمرُهُ 30 سنةً؟ أُبرِّرُ إجابتي.** أنظر الهامش.






### مثال 4

- عند مناقشة الطلبة في حل هذا المثال، أرسم شكل الانتشار المعطى على لوح متنقل، مُؤكِّدًا لهم ضرورة استعمال المستقيم الأفضل مطابقة لنقاط شكل الانتشار ضمن المجال والمدى لتلك النقاط؛ لأنَّ الخروج عنها يؤدي إلى تقديرات مُضلِّلة وغير منطقية. وكذلك أُركِّز على أهمية إعطاء مُبرِّر للإجابة.

## المفاهيم العابرة:

- أُعزِّز وعي الطلبة بالقضايا الإنسانية (تقدير العلم والعلماء) عن طريق حوار أُديره مع الطلبة عن واحد من أشهر علماء القرن العشرين، هو البريطاني فيشر (Ronald Fisher) الذي كان له فضل كبير في تطوير علم الإحصاء بصيغته الحديثة، وعمل على تطبيقه في عديد من المجالات والعلوم، مثل: الزراعة، والوراثة، والاقتصاد، فضلًا عن وضعه أسس تصميم التجارب وتحليلها.
- أُوجِّه الطلبة إلى البحث في مصادر المعرفة المتوافرة عن ثلاثة علماء اشتُهِروا بإسهاماتهم في علم الإحصاء، ثم كتابة مقالة عنهم، مُذكِّرًا إيّاهم بضرورة توثيق مصادر معلوماتهم.

**إجابة سؤال بند (أتحقق من فهمي 4):**

طول الشخص الذي عمره 8 سنوات هو 124 cm تقريبًا.

لا يمكن استعمال شكل الانتشار لتقدير طول شخص عمره 30 سنة؛ لأن هذا العمر يقع خارج مجال قيم العمر الممثلة فيه.

## 4 التدريب

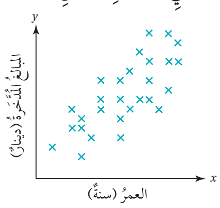
- أُوجِّه الطلبة إلى قراءة الأسئلة في بند (**أتدرب وأحل المسائل**)، ثم أُشارِكهم في حل الأسئلة الآتية على اللوح: 4, 5, 6, 11, 12, 13, 19, 20, 21, 22, 23
- أُوزِّع الطلبة إلى مجموعات، ثم أطلب إلى أفراد كل مجموعة حل الأسئلة الآتية: 1, 2, 3, 14, 15, 16
- أتجوَّل بين الطلبة مُرشِدًا، ومُساعِدًا، ومُوجِّهًا، وأُقدِّم لهم التغذية الراجعة.
- إذا واجه بعض الطلبة صعوبة في حل أيِّ مسألة، فأختار طالبًا تمكَّن من حل المسألة، وأطلب إليه كتابة حله على اللوح.

### الواجب المنزلي:

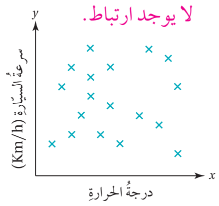
- أطلب إلى الطلبة أنْ يحلوا في البيت جميع المسائل الواردة في الصفحة السادسة والعشرين من كتاب التمارين، مُحدِّدًا لهم المسائل التي يمكنهم حلها في نهاية كل حصة بحسب ما يُقدَّم من أمثلة الدرس وأفكاره.
- يمكن أيضًا إضافة المسائل التي لم يحلها الطلبة داخل غرفة الصف إلى الواجب المنزلي.
- في اليوم التالي، أَطَّلِع على حلول الطلبة، وأُناقِشهم في أيِّ صعوبات واجهوها في أثناء الحل.

### أتدرب وأحل المسائل

أَصِفُ الارتباطَ في شكلَيِ الانتشارِ الآتييْنِ:

2 


يوجد ارتباط قوي موجب.

1 


لا يوجد ارتباط.

3 ماذا أستنتجُ منْ شكلَيِ الانتشارِ السابقيْنِ؟ أُبرِّرُ إجابتي. أنظر الهامش.

يُمثِّلُ الجدولُ الآتي العمرَ والطولَ والكتلةَ لسبعِ لاعباتٍ منْ فريقِ كرةِ الطائرةِ في إحدى المدارسِ:

| اسمُ اللاعبةِ | سميرةُ | ابتسامُ | تغريدُ | هدى | عائشةُ | هندُ | وفاءُ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| العمرُ (سنةٌ) | 13 | 15 | 12 | 11 | 11 | 15 | 14 |
| الطولُ (سنتيمترٌ) | 161 | 165 | 162 | 158 | 154 | 168 | 169 |
| الكتلةُ (كيلوغرامٌ) | 41 | 42 | 37 | 32 | 35 | 42 | 40 |

أرسمُ أشكالَ الانتشارِ، ثمَّ أَصِفُ الارتباطَ لكلٍّ منْها: أنظر ملحق الإجابات.

4 العمرُ مقابلَ الطولِ. 5 الطولُ مقابلَ الكتلةِ. 6 العمرُ مقابلَ الكتلةِ.

**تجربةٌ علميةٌ:** يُبيِّنُ الجدولُ الآتي المسافةَ بالسنتيمترِ، والسرعةَ بالسنتيمترِ لكلِّ ثانيةٍ، عندَ دحرجةِ كرةٍ على سطحِ طاولةٍ، بدءًا بنقطةٍ مُحدَّدةٍ:

| المسافةُ (cm) | 10 | 20 | 30 | 40 | 50 | 60 | 70 | 80 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| السرعةُ (cm/s) | 18 | 16 | 13 | 10 | 7 | 5 | 3 | 0 |

7 أرسمُ شكلَ الانتشارِ لبياناتِ الجدولِ. أنظر ملحق الإجابات.

8 أرسمُ المستقيمَ الأفضلَ مطابقةً للبياناتِ. أنظر ملحق الإجابات.

9 أُقدِّرُ سرعةَ الكرةِ لحظةَ قطعِها مسافةَ 5 cm منْ نقطةِ انطلاقِها. 19 cm/s تقريبًا.

10 أُقدِّرُ المسافةَ التي قطعَتْها الكرةُ منْ نقطةِ انطلاقِها عندما كانَتْ سرعتُها 12 cm/s 33 cm تقريبًا.



### إجابات أسئلة بند (أتدرب وأحل المسائل):

3) في شكل الانتشار الذي يظهر في السؤال 1، يمكن القول أنَّه لا يوجد ارتباط واضح بين سرعة السيارة ودرجة حرارة الجو؛ لأنَّ نقاط شكل الانتشار متناثرة أو متباعدة.

في شكل الانتشار الذي يظهر في السؤال 2، يمكن القول أنَّه كلَّما زاد عمر الشخص زادت قيمة مدخراته؛ لأنَّ نقاط شكل الانتشار تتجمَّع حول مستقيم ميله موجب.

لحلِّ المســألةِ الواردةِ في بدايةِ الدرسِ، أجمعُ بياناتٍ منْ 10 طلبةٍ عشــوائيًّا، ثمَّ أُدوِّنُها في الجدولِ الآتي، ثُمَّ أُجيبُ عنِ الأسئلةِ التي تلي: (11, 12, 13) تعتمد الإجابة على البيانات التي يجمعها الطلبة.

| رقمُ الطالبِ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| طولُ الطالبِ | | | | | | | | | | |
| المسافةُ بينَ طرفَيْ ذراعيْهِ (cm) | | | | | | | | | | |

11 أرسمُ شكلَ الانتشارِ لبياناتِ الجدولِ.

12 أَصِفُ الارتباطَ بينَ المُتغيِّرَيْنِ.

13 هلِ ادِّعاءُ راكانٍ صحيحٌ؟ أُبرِّرُ إجابتي.

**أطوالٌ:** **يُبيِّنُ الجدولُ الآتي أطوالَ 20 أبًا وأبنائِهِمُ الذينَ تبلغُ أعمارُهُمْ 20 سنةً بالسنتيمترِ:**

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| طولُ الأبِ | 153 | 162 | 147 | 183 | 174 | 169 | 152 | 164 | 186 | 178 |
| طولُ الابنِ | 145 | 155 | 142 | 167 | 167 | 151 | 145 | 152 | 163 | 168 |
| طولُ الأبِ | 175 | 173 | 158 | 168 | 181 | 173 | 166 | 162 | 180 | 156 |
| طولُ الابنِ | 172 | 167 | 160 | 154 | 170 | 164 | 156 | 150 | 160 | 152 |

(14, 15, 16) أنظر ملحق الإجابات.

14 أرسمُ شكلَ الانتشارِ لبياناتِ الجدولِ.

15 هلْ صحيحٌ أنَّ الأبَ الطويلَ ابنُهُ طويلٌ؟ أُبرِّرُ إجابتي.

16 أرسمُ المستقيمَ الأفضلَ مطابقةً، ثمَّ أَجِدُ معادلتَهُ.

**إرشادٌ**

يُمكِنُ تمثيلُ طولِ الأبِ على المحورِ الأفقيِّ بتدريجٍ يتراوحُ بينَ 140 cm وَ 200 cm، وتمثيلُ طولِ الابنِ على المحورِ الرأسيِّ بتدريجٍ يتراوحُ بينَ 140 cm وَ 200 cm أيضًا.

**في دراسةٍ مسحيةٍ لمُعلِّمٍ عنْ عددِ ســاعاتِ ممارسةِ الرياضةِ ومشاهدةِ التلفازِ أسبوعيًّا شملَتْ 20 طالبًا في أحدِ الصفوفِ التي يُدرِّسُها، كانَتْ نتيجةُ المسحِ كما في الجدولِ الآتي:** (17, 18) أنظر ملحق الإجابات.

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| عددُ ساعاتِ ممارسةِ الرياضةِ | 12 | 6 | 7 | 9 | 0 | 11 | 15 | 5 | 3 | 12 |
| عددُ ساعاتِ مشاهدةِ التلفازِ | 14 | 17 | 13 | 12 | 27 | 19 | 16 | 24 | 26 | 18 |
| عددُ ساعاتِ ممارسةِ الرياضةِ | 12 | 0 | 2 | 1 | 3 | 7 | 6 | 7 | 10 | 12 |
| عددُ ساعاتِ مشاهدةِ التلفازِ | 13 | 25 | 20 | 18 | 28 | 12 | 22 | 18 | 16 | 22 |

17 أرسمُ شكلَ الانتشارِ لبياناتِ الجدولِ.

18 إذا كانَ أحدُ الطلبةِ منَ الصفِّ نفسِهِ يُشاهِدُ التلفازَ مدَّةَ 8 ساعاتٍ أسبوعيًّا، فهلْ يُمكِنُ تقديرُ عددِ الساعاتِ التي يمارسُ فيها الرياضةَ أسبوعيًّا؟ أُبرِّرُ إجابتي.



## مهارات التفكير العليا

- أُوجِّه الطلبة -ضمن مجموعات ثنائية- إلى حل المسائل في بند (**مهارات التفكير العليا**)، مُذكِّرًا إيّاهم بكتابة مُبرِّر للإجابة التي يتوصَّلون إليها، وأمنحهم وقتًا كافيًا لنقد مُبرِّرات زملائهم.

## 5 الإثراء

- المستقيم الأفضل مطابقة هو من أهم نتائج موضوع إحصائي يُعرَف بتحليل الانحدار (regression analysis)؛ إذ تُستعمَل طريقة (least squares method) لتحديد مستقيم يتوسط نقاط شكل الانتشار، ويكون مجموع مربعات بُعْد كل نقطة عنه أقل ما يمكن، وتُعرَف معادلته باسم معادلة الانحدار. ويُعْزى الفضل في اكتشاف هذه الطريقة إلى العالِم جاوس (Carl Friedrich Gauss) عام 1975م.
- أُوجِّه الطلبة إلى البحث في مصادر المعرفة المتوافرة عن موضوع الانحدار وعلاقته بمعامل الارتباط بيرسون، ثم كتابة تقرير عن ذلك، مُرفَق بمنجزات مشروع الوحدة؛ ليُعرَض مع المشروع.
- أُذكِّر الطلبة بضوابط التقرير العلمي ومعاييره، التي أهمها: وجود صفحة لعنوان التقرير وأسماء المُعِدّين، وفهرس للعناوين الفرعية، ومراعاة الدقة العلمية، وسلامة اللغة، والإيجاز، والوضوح، وتوثيق المصادر.

## تعليمات المشروع:

- أطلب إلى الطلبة البدء بتنفيذ الخطوتين (1) و(2) من خطوات المشروع.
- أُوجِّه الطلبة إلى تضمين عرض مشروع الوحدة مُلخَّصًا للتقرير.

## 6 الختام

- أطلب إلـى الطلبة – في نهاية الـدرس – تلخيص ما تعلَّموه بعباراتهم الخاصة، ثم أستمع لبعض ما كتبوه.
- أطلـب إلى كل طالـب اختيار موضـوع أو فكرة من الدرس أتقنها، وكتابة سـؤال عنها فـي ورقة تحمل اسـمه، أو اختيار موضوع أو فكـرة تحتاج إلى مزيد من التمرين لإتقانها، وكتابة سـؤال عنها، ثم تسليمي الورقة.
- أطَّلِـع على الأوراق، ثـم أُخطِّـط لمعالجة جوانب الضعف التي رصدتها في أوراق الطلبة.

**سيارةُ أجرةٍ:** يُبيِّنُ الجدولُ الآتي المسافاتِ المقطوعةَ بالكيلومترِ والمُدَدَ الزمنيةَ المُستغرَقةَ بالدقائقِ لـِ 10 رحلاتٍ قامَ بها سائقُ سيارةِ أجرةٍ في أحدِ الأيامِ:

(19, 20) أنظر ملحق الإجابات.

| المسافةُ (km) | 5.4 | 8.8 | 5.8 | 3.9 | 2.9 | 4.8 | 6.6 | 5.2 | 3.8 | 1.6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| الزمنُ (min) | 10 | 16 | 11 | 8 | 15 | 9 | 13 | 11 | 17 | 3 |

19 أرسمُ شكلَ الانتشارِ لبياناتِ الجدولِ، بوضعِ الزمنِ على المحورِ الأفقيِّ.

20 أرسمُ المستقيمَ الأفضلَ مطابقةً، ثمَّ أَجِدُ معادلتَهُ.

21 إذا استغرقَتْ إحدى الرحلاتِ 5 دقائقَ، فما المسافةُ المقطوعةُ التي يُمكِنُ تقديرُها لهذهِ الرحلةِ؟ 3.4 km تقريبًا.

22 ما الزمنُ الذي يُمكِنُ تقديرُهُ لرحلةٍ قطعَ فيها السائقُ مسافةَ 4 km؟ 7.5 min تقريبًا.

23 إذا استغرقَتْ إحدى الرحلاتِ ساعةً كاملةً، فما المسافةُ المقطوعةُ التي يُمكِنُ تقديرُها لهذهِ الرحلةِ؟ أُبرِّرُ إجابتي.

لا يمكن تقدير المسـافة المقطوعة؛ لأنَّ مدَّة سـاعة (60 دقيقة) تقع خارج مجال القيم التي يُظهِرها شكل الانتشار.

### مهارات التفكير العليا

24 **تبريرٌ:** يُبيِّنُ الجدولُ الآتي علاماتِ 10 طالباتٍ في اختبارَيِ الرياضياتِ والجغرافيا. إذا كانَتْ إحدى الطالباتِ مريضةً عندَ تقديمِها اختبارَ الجغرافيا، فمَنْ هيَ؟ أُبرِّرُ إجابتي. أنظر ملحق الإجابات.

| الاسمُ | منى | فداءُ | علياءُ | سعادُ | سارةُ | رقيةُ | دعاءُ | تهاني | باسمةُ | إيمانُ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| علاماتُ اختبارِ الرياضياتِ | 168 | 163 | 152 | 145 | 151 | 167 | 167 | 142 | 155 | 145 |
| علاماتُ اختبارِ الجغرافيا | 156 | 180 | 162 | 166 | 173 | 181 | 168 | 158 | 173 | 175 |

25 **أكتشفُ الخطأَ:** بالعودةِ إلى الجدولِ في السؤالِ السابقِ، لمْ تتقدَّمْ سميرةُ لاختبارِ الجغرافيا، وقدْ أحرزَتْ علامةَ 75 في اختبارِ الرياضياتِ. قدَّرَتْ سميرةُ أنَّها ستحصلُ على علامةِ 80 في اختبارِ الجغرافيا لوْ أنَّها قدَّمَتْهُ. هلْ تقديرُ سميرةَ منطقيٌّ؟ أُبرِّرُ إجابتي.

تقدير سميرة غير منطقي؛ لأنَّ علامتها في اختبار الرياضيات تقع خارج مدى القيم التي يُظهِرها شكل الانتشار الذي يبدو فيه الارتباط موجبًا وضعيفًا.

26 **مسألةٌ مفتوحةٌ:** أختارُ مُتغيِّرَيْنِ، ثمَّ أُنشِئُ جدولًا أُنظِّمُ فيهِ بعضَ قيمِهِما، ثمَّ أستعملُهُ للتنبُّؤِ بالقيمةِ الحقيقيةِ لأحدِ المُتغيِّرَيْنِ باستعمالِ المستقيمِ الأفضلِ مطابقةً إذا عُلِمَتْ قيمةُ المُتغيِّرِ الآخرِ. تعتمد الإجابة على اختيار الطلبة.

27 **أكتبُ:** لماذا يوصفُ الارتباطُ بأنَّهُ موجبٌ في شكلِ الانتشارِ الذي يُمثِّلُ مبيعاتِ أحدِ المحالِّ منَ المثلجاتِ على مدارِ أشهرِ السنةِ؟ هلْ يعني ذلكَ أنَّ أحدَ المُتغيِّرَيْنِ (مبيعاتُ المثلجاتِ، أوْ أشهرُ السنةِ) سببٌ للآخرِ؟ أُبرِّرُ إجابتي.

إجابة محتملة: بما أنَّ درجات الحرارة عامة تزداد مع التقدُّم في أشهر السنة (من شهر 1 إلى شهر 9)، فإنَّه يُتوقَّع ازدياد مبيعات المثلَّجات تبعًا لذلك. ولكن، لا يمكن القول إنَّ ارتفاع درجات الحرارة سيؤدي إلى ارتفاع مبيعات المثلَّجات، أو العكس؛ إذ يُؤثِّر في ارتفاع مبيعات المثلَّجات عوامل أخرى، مثل: السعر، والجودة، وقوانين العرض والطلب.

معملُ برمجيةِ جيوجبرا

# رسمُ المستقيمِ الأفضلِ مطابقةً
## Graphing the Line of Best Fit

يمكنُ استعمالُ برمجيةِ جيوجبرا لرسمِ المستقيمِ الأفضلِ مطابقةً لنقاطِ شكلِ الانتشارِ.

**نشاط**

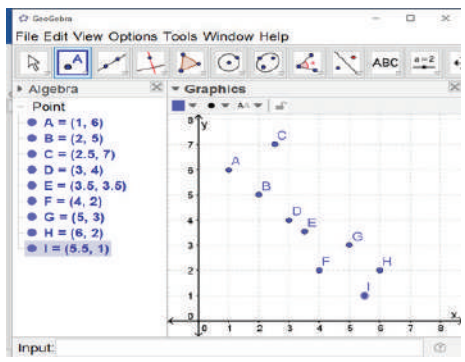
أرسمُ المستقيمَ الأفضلَ مطابقةً للبياناتِ الواردةِ في الجدولِ الآتي باستعمالِ برمجيةِ جيوجبرا.

| $x$ | 1 | 2 | 2.5 | 3 | 3.5 | 4 | 5 | 6 | 5.5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 6 | 5 | 7 | 4 | 3.5 | 2 | 3 | 2 | 1 |

لرسمِ المستقيمِ الأفضلِ مطابقةً، أتّبعُ الخطواتِ الآتيةَ:

**الخطوةُ 1:** أُعيِّنُ النقاطَ في المستوى الإحداثيِّ.

أختارُ أيقونةَ من شريطِ الأدواتِ، ثمَّ أنقرُ عندَ موقعِ كلِّ زوجٍ مُرتَّبٍ في المستوى البيانيِّ، لتظهرَ النقاطُ كما في الشكلِ الآتي:




يُمكِنُ أيضًا تعيينُ النقاطِ بإدخالِ كلٍّ منها في شريطِ الإدخالِ باستعمالِ لوحةِ المفاتيحِ في صورةِ: $A = (x, y)$.



- أُوضِّح للطلبة كيفية تقدير قيمة متغير باستعمال المستقيم الأفضل مطابقة في برمجية جيوجبرا:
  - » هندسيًّا: باختيار أداة إنشاء عمود على مستقيم من نقطة مُحدَّدة Perpendicular Line، واستعمالها لرسم عمود على أحد المحورين، ثم إيجاد نقطة تقاطعه مع المستقيم الأفضل مطابقة باستعمال الأداة Intersect.
  - » جبريًّا: بالتعويض في معادلة المستقيم.

**إرشاد:** إذا توافر جهاز عرض في المختبر، فأستعمله لعرض صور من كتاب الطالب عن معمل برمجية جيوجبرا.



## التعلُّم القبلي:

- تعيين النقاط في المستوى الإحداثي باستعمال برمجية جيوجبرا.

## إرشادات للمُعلِّم/ للمُعلِّمة

يمكن تحميل برمجية جيوجبرا المجانية وتثبيتها على أجهزة الحاسوب في مختبر المدرسة، وتحديثها باستمرار عن طريق الرابط الإلكتروني:
**https://www.geogebra.org/download**

## 1 التهيئة

- أتوجَّه مع الطلبة إلى مختبر الحاسوب في المدرسة.
- أُوزِّع الطلبة إلى مجموعات بحسب عدد الأجهزة المتوافرة في المختبر.
- أطلب إلى الطلبة تشغيل أجهزة الحاسوب، وفتح برمجية جيوجبرا.
- أُعرِّف الطلبة بمزايا برمجية جيوجبرا الجبرية والهندسية، مثل كيفية تعيين النقاط.

## 2 التدريس

- أُوضِّح للطلبة كيفية تنفيذ النشاط، ثم أطلب إليهم تنفيذه بأنفسهم.
- أطلب إلى أفراد المجموعات تطبيق خطوتي النشاط على التوالي، وأتجوَّل بينهم مُرشِدًا ومُساعِدًا ومُوجِّهًا، وأتأكَّد أنَّ كل فرد في المجموعة قد تمكَّن من تنفيذ النشاط.
- أُوجِّه الطلبة إلى استعمال شريط الإدخال (Input) عند الحاجة إلى تعيين نقطة ذات إحداثيات تتضمَّن كسورًا؛ سعيًا للدقة في تعيين النقاط.
- بعد تنفيذ أفراد المجموعات الخطوة الثانية بصورة صحيحة، أطلب إليهم عرض هامش (Algebra)؛ للتحقُّق من إحداثيات النقاط على شكل الانتشار، وملاحظة معادلة المستقيم الأفضل مطابقة.

## 3 التدريب

- أُوجِّه الطلبة إلى حل الأسئلة في بند (أتدرب) الواردة في معمل برمجية جيوجبرا، بعد الانتهاء من تنفيذ النشاط مباشرةً؛ بتطبيق ما تعلّموه من مهارات باستعمال البرمجية.
- أختار بعض الأخطاء التي وقع فيها الطلبة – من دون أذكِّر أسمائهم؛ تجنبًا لإحراجهم، ثم أُناقِش طلبة الصف فيها.

### الواجب المنزلي:

- أطلب إلى الطلبة أنْ يحلوا في البيت أسئلة الدرس المتبقية، وأنْ يستعملوا برمجية جيوجبرا للتحقُّق من إجابات الأسئلة التي سبق حلها يدويًّا.
- في اليوم التالي، أَطَّلِع على حلول الطلبة، وأُناقِشهم في أيِّ صعوبات واجهوها في أثناء الحل.

## 4 الإثراء

- أطلب إلى الطلبة تحديد كلٍّ من ميل المستقيم الأفضل مطابقة، ومقطعيه من المحورين الإحداثيين، بعد حل كل سؤال من أسئلة الدرس يتطلّب رسم المستقيم.
- أطلب إلى الطلبة مقارنة الإجابات بعضها ببعض، وحفِّز الطلبة من ذوي المستوى فوق المتوسط على مساعدة بقية زملائهم.
- أُوضِّح للطلبة أنَّه يمكنهم توثيق المهام المنوطة بهم باستعمال برمجية جيوجبرا عن طريق التقاط صور لشاشة الحاسوب باستعمال مفتاح (PrtScr)، أو من تبويب (Edit) في برمجية جيوجبرا باختيار (Graphics view to clipboard)، أو من لوحة المفاتيح بالضغط على أزرار (Ctrl+shift+C) معًا، ثم عمل لصق (paste) بالضغط على أزرار (Ctrl+shift+V) في الموضع المطلوب من الملف المراد توثيق المهمة فيه.

### تعليمات المشروع:

- أُخبِر الطلبة أنَّه يمكنهم الاستفادة من برمجية جيوجبرا في تنفيذ الخطوات اللاحقة من المشروع.

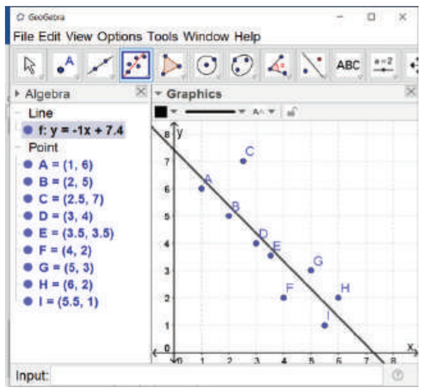
## 5 الختام

- أطلب إلى الطلبة تلخيص المهارات والأفكار التي تعلّموها، ثم أستمع لبعض ما كتبوه.

---

**الخطوةُ 2:** أرسمُ المستقيمَ الأفضلَ مطابقةً.

أختارُ أيقونةَ Best Fit Line منْ شريطِ الأدواتِ، ثمَّ أُحدِّدُ جميعَ النقاطِ التي عيَّنْتُها في المستوى الإحداثيِّ، بوضعِ المُؤشِّرِ في أيِّ مكانٍ بعيدًا عنِ النقاطِ، ثمَّ الضغطِ باستمرارٍ على الزرِّ الأيسرِ لفأرةِ الحاسوبِ، معَ السحبِ لشمولِ جميعِ النقاطِ، عندئذٍ سيظهرُ المستقيمُ الأفضلُ مطابقةً، وتظهرُ معادلتُهُ إلى يسارِ الشاشةِ كما في الشكلِ الآتي:

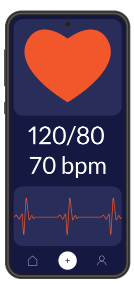



**إرشادٌ**

لإظهارِ هامشِ (Algebra)، أختارُ (Algebra) منْ قائمةِ العرضِ (View).

**أتدرب**

1. أحُلُّ الأسئلةَ (8, 9, 10, 16) في الدرسِ السابقِ باستعمالِ برمجيةِ جيوجبرا، ثمَّ أُقارِنُ الحلَّ بحلّي اليدويِّ.
أنظر رسوم الطلبة.
2. تحوي الهواتفُ المحمولةُ تطبيقًا يُستعمَلُ لرصدِ مُعدَّلِ نبضاتِ القلبِ. أستعملُ هذا التطبيقَ لرصدِ مُعدَّلِ نبضاتِ القلبِ لـ 10 أشخاصٍ على الأقلِّ، ثمَّ أقيسُ طولَ كلٍّ منْهُمْ، ثمَّ أرسمُ شكلَ الانتشارِ والمستقيمَ الأفضلَ مطابقةً باستعمالِ برمجيةِ جيوجبرا. أنظر رسوم الطلبة.



# الدرس 2

## نتاجات الدرس

- رسم المنحنى التكراري التراكمي يدويًّا، وباستعمال أدوات التكنولوجيا.
- تقدير الربيعات $Q_1, Q_2, Q_3$، والمدى الربيعي، والمئينات للجداول التكرارية ذات الفئات، وتفسير معنى كلٍّ منها ضمن مواقف حياتية متنوعة.
- إيجاد الرتبة المئينية لقيمة من بيانات التوزيع.

## التعلّم القبلي:

- تعيين النقاط في المستوى الإحداثي.
- رسم منحنى متصل يمر بمجموعة من النقاط في المستوى الإحداثي يدويًّا.

## 1 التهيئة

- أرسم مستوى إحداثيًّا على اللوح المتنقل، أو على اللوح العادي باستعمال المسطرة.
- مستعينًا بالجدول الآتي، أُمثِّل الاقتران: $f(x) = x^2 , x \geq 0$؛ لتوضيح كيفية تعيين النقاط في المستوى، ثم توصيلها معًا بمنحنى متصل يمر بها.

| $x$ | 0 | 0.5 | 1 | 1.5 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| $y = f(x)$ | 0 | 0.25 | 1 | 2.25 | 4 |

الدرسُ 2

# المنحنى التكراريُّ التراكميُّ
## Cumulative Frequency Graph

**فكرةُ الدرسِ** تعـرُّفُ الربيعياتِ والمئيناتِ، وإيجادُها للبياناتِ المُبوَّبةِ في جداولَ تكراريةٍ باستعمالِ المنحنى التكراريِّ التراكميِّ.

**المصطلحاتُ** المنحنى التراكميُّ، المئيناتُ.

**مسألةُ اليومِ** يُبيِّنُ الجدولُ المجاورُ رواتبَ الموظفينَ في إحدى الشركاتِ. ما عددُ الموظفينَ الذينَ تزيدُ رواتبُهُمْ على 520 دينارًا؟

| فئاتُ الرواتبِ | عددُ الموظفينَ |
|---|---|
| $349 \leq x < 399$ | 8 |
| $399 \leq x < 449$ | 12 |
| $449 \leq x < 499$ | 15 |
| $499 \leq x < 549$ | 9 |
| $549 \leq x < 599$ | 6 |

يُمثِّلُ **المنحنى التكراريُّ التراكميُّ** (cumulative frequency graph) للبياناتِ المُنظَّمةِ في جداولَ تكراريةٍ ذاتِ فئاتٍ العلاقةَ بينَ التكرارِ التراكميِّ للفئاتِ في التوزيعِ التكراريِّ والحدودِ الفعليةِ العليا للفئاتِ.

**مثال 1**

**يُبيِّنُ الجدولُ التكراريُّ المجاورُ الزمنَ الذي يستغرقُهُ طلبةُ الصفِّ العاشرِ في الوصولِ إلى المدرسةِ. أرسمُ المنحنى التكراريَّ التراكميَّ للبياناتِ.**

| الزمنُ (دقيقةٌ) | التكرارُ (عددُ الطلبةِ) |
|---|---|
| $0 \leq x < 5$ | 2 |
| $5 \leq x < 10$ | 9 |
| $10 \leq x < 15$ | 9 |
| $15 \leq x < 20$ | 8 |
| $20 \leq x < 25$ | 3 |
| $25 \leq x < 30$ | 1 |

**الخطوةُ 1:** أُنشِئُ جدولَ التكرارِ التراكميِّ بإضافةِ عمودِ التكرارِ التراكميِّ كما في الجدولِ الآتي. أضيفُ الحدَّ الأعلى للفئةِ التي تسبقُ الفئةَ الأولى التي يساوي تكرارُها صفرًا.

## ملاحظات المُعلِّم/ المُعلِّمة

## 2 الاستكشاف

- أُوجِّه الطلبة إلى قراءة المسألة في بند (**مسألة اليوم**)، ثم أسألهم:
  - » كم عدد الموظفين الذين رواتبهم أقل من 400 دينار؟ 8 موظفين.
  - » كم عدد الموظفين الذين رواتبهم أكثر من 499 دينارًا؟ 15 موظفًا.
  - » كم عدد الموظفين الذين رواتبهم أكثر من 349 دينارًا؟ 50 موظفًا.
  - » كم عدد الموظفين الذين رواتبهم 460 دينارًا؟ إجابة محتملة: لا يمكن معرفة ذلك من الجدول.
- أستمع لبعض إجابات الطلبة من دون تقديم تغذية راجعة لها.
- أُخبِر الطلبة أنَّ ما سيتعلَّمونه في هذا الدرس سيساعدهم على الإجابة عن الأسئلة السابقة، وبخاصة تلك التي لم يتمكَّنوا من تحديد إجابتها من الجدول.

## 3 التدريس

- أُوضِّح للطلبة مفهوم المنحنى التكراري التراكمي، ثم أرسم على اللوح الشكل العام لهذا المنحنى، مشيرًا إلى أنَّه يتخذ تقريبًا شكل الحرف (S).
- أُذكِّر الطلبة – من الجدول الوارد في بند (مسألة اليوم)– بالحدود العليا للفئات وحدودها الدنيا، والحدود الفعلية العليا للفئات وحدودها الفعلية الدنيا.
- أُوضِّح للطلبة كيفية تحديد التكرار التراكمي في الجدول الوارد في بند (مسألة اليوم).

### مثال 1

- أُناقِش الطلبة في حل هذا المثال، مُتَّبِعًا الخطوات الموصوفة لحله.
- عند تنفيذ الخطوة الأولى المُتعلِّقة بإنشاء جدول التكرار التراكمي، أُؤكِّد للطلبة أهمية إضافة فئة سابقة افتراضية، يكون حدها الأعلى هو الحد الأدنى للفئة الأولى في الجدول الأصلي المعطى، ويكون التكرار المقابل لها صفرًا؛ لبدء المنحنى التراكمي عند رسمه من المحور الأفقي $x$.
- عند تنفيذ الخطوة الثانية المُتعلِّقة برسم المنحنى التكراري التراكمي، أُؤكِّد للطلبة ما ورد في بند (إرشاد) في الصفحة 119 من كتاب الطالب، من أنه يُكتفى – بُغْيَةَ التسهيل – بوضع الحدود العليا على المحور الأفقي $x$ بدلًا من الحدود الفعلية العليا.

### تعزيز اللغة ودعمها:

أُكرِّر المصطلحات الرياضية المستخدمة في الدرس باللغتين العربية والإنجليزية، وأُحفِّز الطلبة على استعمالها، مثل: المنحنى التكراري التراكمي (cumulative frequency curve).

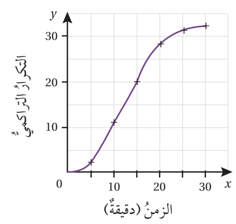
| الحدودُ العليا للفئاتِ | التكرارُ التراكميُّ |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 5 | $0 + 2 = 2$ |
| 10 | $2 + 9 = 11$ |
| 15 | $2 + 9 + 9 = 20$ |
| 20 | $2 + 9 + 9 + 8 = 28$ |
| 25 | $2 + 9 + 9 + 8 + 3 = 31$ |
| 30 | $2 + 9 + 9 + 8 + 3 + 1 = 32$ |

أضيفُ فئةً جديدةً إلى الجدولِ تكرارُها يساوي صفرًا.

**الخطوةُ 2:** أرسمُ المنحنى التكراريَّ التراكميَّ.

أرسمُ منحنًى يُمثِّلُ العلاقةَ بينَ الحدودِ العليا لفئاتِ الزمنِ بالدقائقِ (المُتغيِّرُ $x$) والتكرارِ التراكميِّ (المُتغيِّرُ $y$)، التي تُمثِّلُها الأزواجُ المُرتَّبةُ الآتيةُ:

$(0, 0), (5, 2), (10, 11), (15, 20),$
$(20, 28), (25, 31), (30, 32)$




**معلومةٌ**

محافظةُ المفرقِ هيَ ثاني أكبرِ محافظاتِ المملكةِ الأردنيةِ الهاشميةِ منْ حيثُ المساحةُ، وتقعُ في الشمالِ الشرقيِّ للمملكةِ.

**أتحقق من فهمي**

**طقسٌ: يُبيِّنُ الجدولُ التكراريُّ المجاورُ درجاتِ الحرارةِ في محافظةِ المفرقِ في أحدِ أشهرِ فصلِ الربيعِ. أرسمُ المنحنى التكراريَّ التراكميَّ للبياناتِ.**

أنظر ملحق الإجابات.

| الفئاتُ (درجةُ الحرارةِ) | التكرارُ (عددُ الأيامِ) |
|---|---|
| $5 \le x < 8$ | 1 |
| $8 \le x < 11$ | 7 |
| $11 \le x < 14$ | 9 |
| $14 \le x < 17$ | 6 |
| $17 \le x < 20$ | 5 |
| $20 \le x < 23$ | 1 |
| $23 \le x < 26$ | 1 |

تعرَّفْتُ سابقًا الربيعياتِ؛ وهيَ ثلاثُ قيمٍ تُقسِّمُ البياناتِ إلى أربعةِ أجزاءٍ متساويةٍ. وهذهِ القيمُ هيَ: الربيعُ الأدنى ($Q_1$)؛ وهوَ وسيطُ النصفِ الأدنى منَ البياناتِ، والربيعُ الأوسطُ ($Q_2$)؛ وهوَ وسيطُ البياناتِ كلِّها، والربيعُ الأعلى ($Q_3$)؛ وهوَ وسيطُ النصفِ الأعلى منَ البياناتِ. تعرَّفْتُ أيضًا المدى الربيعيَّ؛ وهوَ مدى البياناتِ التي تقعُ بينَ الربيعِ الأدنى والربيعِ الأعلى.



## إرشادات للمُعلِّم / للمُعلِّمة

المجال العاطفي لا يقل أهمية عن المجال المعرفي؛ لذا لا يجب أنْ أقول لأحد الطلبة: "إجابتك خطأ"، بل أقول له: "لقد اقتربت من الإجابة الصحيحة، فمَنْ يستطيع إعطاء إجابة أُخرى؟"، أو أقول له: "هذه إجابة صحيحة لغير هذا السؤال".

## إرشادات:

- أُنبِّه الطلبة إلى أنَّ بداية المنحنى التكراري التراكمي يجب أنْ تكون على المحور الأفقي $x$، وأنَّ المنحنى قد يبدأ بنقطة الأصل عندما يكون الحد الأدنى للفئة الأولى في الجدول الأصلي المعطى صفرًا (يمكنني تقديم المثال الإضافي لتوضيح ذلك).
- إذا توافر جهاز حاسوب وجهاز عرض في الصف، فأستعملهما لعرض الجداول والمنحنيات التكرارية التراكمية التي ورد ذكرها في الدرس؛ توفيرًا للوقت الذي يستغرقه رسمها على اللوح.

## التقويم التكويني:

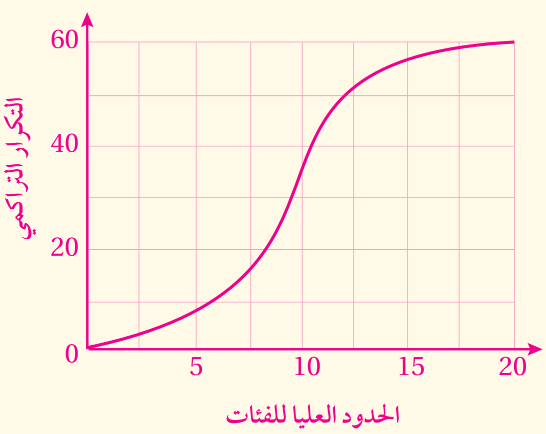
- أُوجِّه الطلبة إلى حل التدريب في بند (**أتحقق من فهمي**).
- أتجوَّل بين الطلبة مُرشِدًا، ومُساعِدًا، ومُوجِّهًا، وأُقدِّم لهم التغذية الراجعة.
- أختار بعض الإجابات التي تحوي أخطاء مفاهيمية، ثم أُناقِشها على اللوح، ولا أذكر اسم الطالب الذي أخطأ في الإجابة؛ تجنبًا لإحراجه.

## مثال إضافي

- أرسم المنحنى التكراري التراكمي لبيانات الجدول الآتي.

| الفئة | $0<x\le5$ | $5<x\le10$ | $10<x\le15$ | $15<x\le20$ |
|---|---|---|---|---|
| التكرار | 8 | 27 | 21 | 4 |

**الحل:**



## مثال 2

- أُذكِّر الطلبة بتعريـف الربيعات الثلاثة: $Q_1, Q_2, Q_3$، وتعريف المــدى الربيعــي، وكيفية إيجادهــا للقيم المفردة، وأُذكِّرهم أيضًا بتعريف المئين، وكيفية تمثيل توزيع البيانات باستعمال الصندوق ذي العارضتين.
- أُناقِـش الطلبة في حل هذا المثـال. وتوفيرًا للوقت؛ يُفضَّل رســم المنحنى التكــراري المعطى في المثال سلفًا، أو الاستعانة بجهاز العرض (إنْ توافر).
- عند تقدير الوســيط $Q_2$ في الفــرع الأول، أُركِّز على تطبيق خطوتــي الحل كما ورد ذكرهمــا في المثال، واســتعمال المسطرة عند رســم المستقيمات الأفقية والرأسـية، واسـتعمال قلم ذي لون مختلف لرسمها بشـكل متقطع، مُبيِّنًــا أنَّه (الوسـيط $Q_2$) القيمة التي تقسم البيانات إلى نصفين، بحيث يقع ما نسبته 50% من القيم فوق الوسيط، ويقع ما نسبته 50% من القيم تحته.
- أُوضِّح للطلبة كيفية تقديــر الربيعين بخطوات مماثلة لتقدير الوســيط، مُبيِّنًا أنَّ المــدى الربيعي هو المدى الذي يقع ضمنه ما نسبته 50% من القيم (أيْ بين $Q_1$، و$Q_3$).
- أخبِر الطلبة أنَّه يمكن رســم تمثيل آخر يُوضِّح كيف توزَّعت البيانات باستعمال الصندوق ذي العارضتين.



1 1 3 3 3 5 6 6 7 7 7 8 8 9 9

الربيعُ الأدنى $Q_1$ — الوسيطُ $Q_2$ — الربيعُ الأعلى $Q_3$

المدى الربيعيُّ

$$IQR = Q_3 - Q_1$$
$$= 8 - 3 = 5$$

**المئينُ** (percentile): هوَ قيمةٌ أكبرُ منْ نسـبةٍ مئويّةٍ مُحدّدةٍ منَ البياناتِ، فمثلاً؛ إذا حصلتَ في اختبارِ الحاسـوبِ على درجةٍ تساوِي «المئينَ الأربعينَ»، فإنَّ ذلكَ يعنِي أنَّ درجتكَ أعلَى منْ درجاتِ 40% منَ الطلبةِ الذين تقدّمُوا للاختبارِ، و يُرمزُ للمئينِ الأربعينَ بالرّمزِ $P_{40}$.

يُمكِـنُ تقديرُ قيمِ الربيعيّـاتِ والمئيناتِ للبيانـاتِ المُنظَّمةِ في جداولَ تكراريـةٍ ذاتِ فئاتٍ باستعمالِ المُنحنى التكراريِّ التراكميِّ.

**أتعلّمُ**

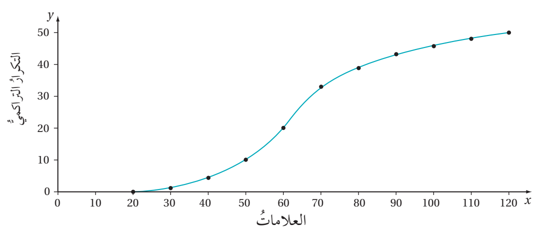
بما أنَّ الربيعَ الأدنى ($Q_1$) أكبرُ منْ ربعِ البياناتِ فإنّهُ يسـاوِي المئينَ الخامسَ والعشـرينَ ($P_{25}$).

وهكذا فإنَّ:

$Q_1=P_{25}$ ، $Q_2=P_{50}$ ، $Q_3=P_{75}$

### مثال 2

**يُبيِّنُ المنحنى التكراريُّ التراكميُّ المجاورُ علاماتِ 50 طالبًا في اختبارِ اللغةِ العربيةِ:**

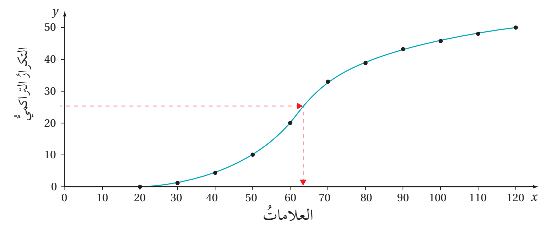



**1** أُقدِّرُ وسيطَ البياناتِ.

**الخطوةُ 1:** أُحدِّدُ رُتبةَ الوسيطِ.

بما أنَّ عددَ الطلبةِ 50 طالبًا، فإنَّ رُتبةَ الوسيطِ هيَ: $0.5 \times n = 0.5 \times 50 = 25$

**الخطوةُ 2:** أرسمُ مستقيمًا أفقيًّا بدءًا بالتكرارِ التراكميِّ 25 حتى يتقاطعَ معَ المنحنى التكراريِّ التراكميِّ. ومنْ نقطةِ التقاطعِ أرسمُ مستقيمًا رأسيًّا حتى يتقاطعَ معَ المحورِ الأفقيِّ (العلاماتُ) كما في الشكلِ الآتي.




إذنْ، قيمةُ الوسيطِ هيَ العلامةُ 64 تقريبًا.

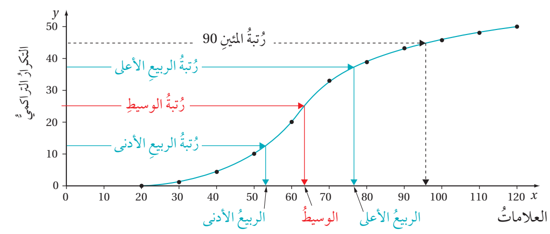
**2 أَجِدُ المدى الربيعيَّ.**

**الخطوةُ 1:** أُحدِّدُ رُتبةَ الربيعِ الأدنى، ورُتبةَ الربيعِ الأعلى.

رُتبةُ الربيعِ الأدنى: $0.25 \times n = 0.25 \times 50 = 12.5$

رُتبةُ الربيعِ الأعلى: $0.75 \times n = 0.75 \times 50 = 37.5$

**الخطوةُ 2:** أُقدِّرُ قيمتَيِ الربيعيْنِ: الأدنى والأعلى، برسمِ المستقيماتِ الأفقيةِ والرأسيةِ على المنحنى التكراريِّ التراكميِّ كما في الفرعِ السابقِ.




أُلاحِظُ منَ التمثيلِ البيانيِّ أنَّ قيمةَ الربيعِ الأدنى هيَ العلامةُ 53 تقريبًا، وأنَّ قيمةَ الربيعِ الأعلى هيَ العلامةُ 77 تقريبًا. وعليْهِ، فإنَّ قيمةَ المدى الربيعيِّ:

$$IQR = Q_3 - Q_1 = 77 - 53 = 24$$

**3 أَجِدُ المئينَ 90، ثمَّ أُفسِّرُ معناهُ.**

**الخطوةُ 1:** أُحدِّدُ رُتبةَ المئينِ 90

رُتبةُ المئينِ 90: $90\% \times n = 0.9 \times 50 = 45$

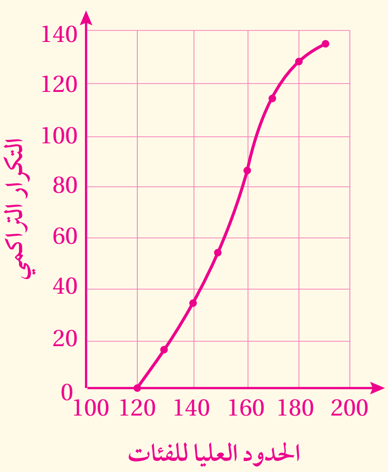
120

## مثال إضافي

- سُجِّلت أعداد الطلبة في 135 مدرسة ابتدائية بإحدى محافظات المملكة، وقـد توزَّعت المدارس كما في الجدول التالي:
- أرسـم المنحنى التكراري التراكمي، مُقدِّرًا منه قيمة الوسيط، والمدى الربيعي.

| أعداد الطلبة | التكرار |
|---|---|
| $120 < x \leq 130$ | 15 |
| $130 < x \leq 140$ | 18 |
| $140 < x \leq 150$ | 20 |
| $150 < x \leq 160$ | 32 |
| $160 < x \leq 170$ | 28 |
| $170 < x \leq 180$ | 15 |
| $180 < x \leq 190$ | 7 |

**الحل:**




الوسيط: 155 تقريبًا.

المدى الربيعي: 26 تقريبًا.

## 4 التدريب

- أُناقِش الطلبة في حل الأسئلة (17– 8).
- أطلب إلى الطلبة حل الأسـئلة (6– 1) بعد توزيعهم إلى مجموعات.
- أتجوَّل بين الطلبة مُرشِدًا، ومُساعِدًا، ومُوجِّهًا، وأُقدِّم لهم التغذية الراجعة.
- أُخبِـر الطلبة أنَّه يمكنهم اسـتعمال برمجية جيوجبرا للتحقُّق من صحة إجابات أسـئلة الدرس؛ سواء كان ذلك في البيت، أو باسـتعمال تطبيـق الهاتف، أو في مختبر المدرسة.
- إذا واجـه بعض الطلبـة صعوبة في حل أيِّ مسـألة، فأختار طالبًا تمكَّن من حل المسألة، وأطلب إليه كتابة حله على اللوح.

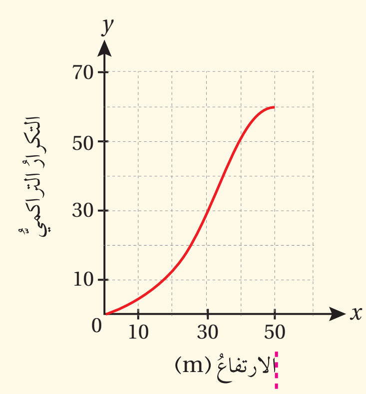
### إجابات أسئلة بند (أتدرب وأحل المسائل):

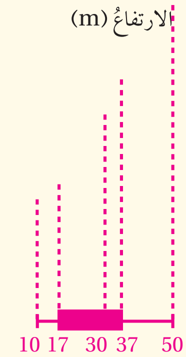
5) $IQR = Q_3 - Q_1$

$= 37 - 17$

$= 20$

6)




7) 37 تقريبًا.

وهذا يعني أنَّ 80% من المباني ترتفع أقل من 37 m

---

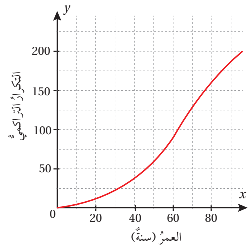


**الخطوةُ 2:** أُقدِّرُ قيمةَ المئينِ 90 برسـمِ المستقيماتِ الأفقيةِ والرأسيةِ على المنحنى التكراريِّ التراكميِّ كما في الفرعِ السابقِ.

أُلاحِظُ منَ التمثيلِ البيانيِّ أنَّ قيمةَ المئيـنِ 90 هيَ العلامةُ 96 تقريبًا، وأنَّ هذهِ القيمةَ تعني أنَّ 90% مـنَ الطلبةِ أحرزوا علاماتٍ أقلَّ منَ العلامةِ 96، أوْ أنَّ 10% منَ الطلبةِ أحرزوا علاماتٍ أكثرَ منَ العلامةِ 96 في هذا الاختبارِ.

### أتحقق من فهمي

يُبيِّنُ المنحنـى التكراريُّ التراكمـيُّ المجاورُ أعمارَ 200 عضوٍ في جمعيةٍ ثقافيةٍ:




a) أُقدِّرُ وسيطَ البياناتِ. أنظر ملحق الإجابات.

b) أَجِدُ المدى الربيعيَّ.

c) أَجِدُ المئينَ 85، ثمَّ أُفسِّرُ معناهُ.

### أتدرب وأحل المسائل

**كرةُ قـدمٍ:** يُبيِّنُ الجدولُ المجاورُ عددَ الأهدافِ التي سـجَّلَها طلبةُ المرحلةِ الثانويةِ في دوري كرةِ القدمِ المدرسيِّ:

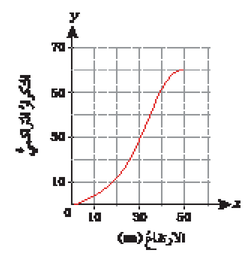
| عددُ الطلبةِ | عددُ الأهدافِ |
|---|---|
| 3 | 0 – 4 |
| 17 | 5 – 9 |
| 12 | 10 – 14 |
| 9 | 15 – 19 |
| 5 | 20 – 24 |
| 4 | 25 – 29 |

1) أرسمُ المنحنى التكراريَّ التراكميَّ. أنظر ملحق الإجابات.

2) أُقدِّرُ المئينَ 85، ثمَّ أُفسِّرُ معناهُ. 23 تقريبًا.

3) أُقدِّرُ عددَ الطلبةِ الذينَ سجَّلوا 18 هدفًا على الأقلِّ. 12 تقريبًا.

يُبيِّنُ المنحنى التكراريُّ التراكميُّ المجاورُ ارتفاعَ عددٍ منَ المباني في مدينةِ عمّانَ:




4) أُقدِّرُ وسيطَ البياناتِ. $Q_2 = 30$

5) أَجِدُ المدى الربيعيَّ. أنظر الهامش.

6) أُمثِّلُ البياناتِ باستعمالِ الصندوقِ ذي العارضتيْنِ. أنظر الهامش.

7) أَجِدُ المئينَ 80، ثمَّ أُفسِّرُ معناهُ. 37 تقريبًا.

**ألعابٌ: يُبيِّنُ الجدولُ المجاورُ نتائجَ 80 متسابقًا في لعبةِ رميِ السهامِ:**

| عددُ المتسابقينَ | مجموعُ النقاطِ ($x$) |
|---|---|
| 9 | 1 – 20 |
| 13 | 21 – 40 |
| 23 | 41 – 60 |
| 15 | 61 – 80 |
| 11 | 81 – 100 |
| 7 | 101 – 120 |
| 2 | 121 – 140 |

8 أرسمُ المنحنى التكراريَّ التراكميَّ. أنظر ملحق الإجابات.

9 أَجِدُ قيمةَ كلٍّ منَ الوسيطِ، والمدى الربيعيِّ. أنظر ملحق الإجابات.

10 إذا حصلَ المتسابقُ الذي مجموعُ نقاطِهِ أكثرُ منْ 90 على جائزةٍ، فما نسبةُ المتسابقينَ الذينَ سيحصلونَ على جائزةٍ؟ أنظر ملحق الإجابات.

$\approx 18\%$

**طُلِبَ إلى 30 طالبًا، وَ 50 مُعلِّمًا رفعُ أيديهِمْ لحظةَ تقديرِ انقضاءِ دقيقةٍ واحدةٍ بعدَ إعطاءِ إشارةِ البدءِ، وقدْ نُظِّمَتِ النتائجُ في الجدوليْنِ الآتييْنِ:**

| عددُ الطلبةِ | فئاتُ الزمنِ ($x$) ثانيةً |
|---|---|
| 1 | $20 \le x < 30$ |
| 3 | $30 \le x < 40$ |
| 6 | $40 \le x < 50$ |
| 12 | $50 \le x < 60$ |
| 3 | $60 \le x < 70$ |
| 3 | $70 \le x < 80$ |
| 2 | $80 \le x < 90$ |

| عددُ المُعلِّمينَ | فئاتُ الزمنِ ($x$) ثانيةً |
|---|---|
| 1 | $10 \le x < 20$ |
| 2 | $20 \le x < 30$ |
| 2 | $30 \le x < 40$ |
| 9 | $40 \le x < 50$ |
| 17 | $50 \le x < 60$ |
| 13 | $60 \le x < 70$ |
| 3 | $70 \le x < 80$ |
| 2 | $80 \le x < 90$ |
| 1 | $90 \le x < 100$ |

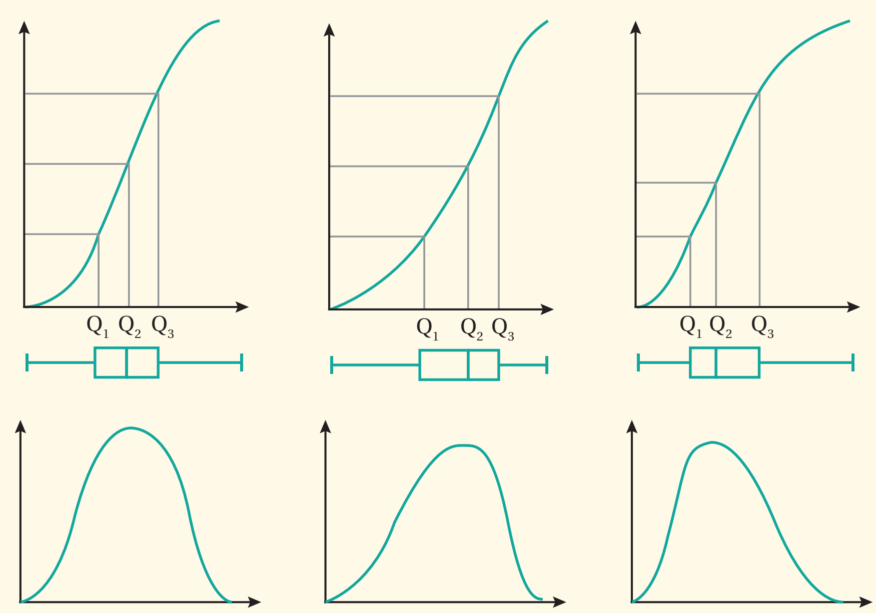
11 أرسمُ المنحنى التكراريَّ التراكميَّ لكلِّ جدولٍ. أنظر ملحق الإجابات.

12 أجِدُ الوسيطَ والمدى الربيعيَّ لكلِّ جدولٍ. أنظر ملحق الإجابات.

13 أيُّ الفريقيْنِ كانَ أفضلَ في تقديرِ مدَّةِ الدقيقةِ: الطلبةُ أمِ المُعلِّمونَ؟ أُبرِّرُ إجابتي.

المُعلِّمون أفضل في تقدير مدَّة الدقيقة؛ لأنَّ قيمة الوسيط لزمن المُعلِّمين (56 sec) أقرب إلى الدقيقة الواحدة (60 sec).






توزيع ملتوٍ نحو اليمين.

توزيع ملتوٍ نحو اليسار.

توزيع متماثل (طبيعي).

## مهارات التفكير العليا

- أُوجِّه الطلبة (ضمن مجموعات ثنائية) إلى حل المسائل في بند (مهارات التفكير العليا)، مُذكِّرًا إيّاهم بكتابة مُبرِّر للإجابة التي يتوصَّلون إليها، وأمنحهم وقتًا كافيًا لنقد مُبرِّرات زملائهم.

## الواجب المنزلي:

- أطلب إلى الطلبة أنْ يحلوا في البيت جميع المسائل الواردة في الصفحة السادسة والعشرين من كتاب التمارين، مُحدِّدًا لهم المسائل التي يمكنهم حلها في نهاية كل حصة بحسب ما يُقدَّم من أمثلة الدرس وأفكاره.
- في اليوم التالي، أَطَّلِع على حلول الطلبة، وأُناقِشهم في أيِّ صعوبات واجهوها في أثناء الحل.

## 5 الإثراء

- أُوضِّح للطلبة كيف ترتبط ثلاث طرائق لتمثيل البيانات (المنحنى التكراري التراكمي، الصندوق ذو العارضتين، المنحنى التكراري) بثلاث طرائق من أشهر أنواع التوزيعات، كما يأتي:

## تعليمات المشروع:

- أُتابع أفراد المجموعات في أثناء تنفيذ مشروع الوحدة، وأُنبِّههم إلى ضرورة استعمال برمجية جيوجبرا لرسم أشكال الانتشار في الخطوة 3.

## 6 الختام

- أطلب إلى الطلبة - في نهاية الدرس- تلخيص ما تعلَّموه بعباراتهم الخاصة، ثم أستمع لبعض ما كتبوه.
- أطلب إلى كل طالب اختيار موضوع أو فكرة من الدرس أتقنها، وكتابة سؤال عنها في ورقة تحمل اسمه، أو اختيار موضوع أو فكرة تحتاج إلى مزيد من التمرين لإتقانها، وكتابة سؤال عنها، ثم تسليمي الورقة.
- أَطَّلِع على الأوراق، ثم أُخطِّط لمعالجة جوانب الضعف التي رصدتها في أوراق الطلبة.



**جامعاتٌ:** يُبيِّنُ الجدولُ المجاورُ مُعدَّلاتِ عيِّنَةٍ منْ طلبةِ كليةِ الهندسةِ في الجامعةِ الأردنيةِ:

| عددُ الطلبةِ | المُعدَّلُ التراكميُّ $(x)$ |
|---|---|
| 3 | $1 \le x < 1.5$ |
| 7 | $1.5 \le x < 2$ |
| 25 | $2 \le x < 2.5$ |
| 38 | $2.5 \le x < 3$ |
| 24 | $3 \le x < 3.5$ |
| 11 | $3.5 \le x < 4$ |

14 أرسمُ المنحنى التكراريَّ التراكميَّ للبياناتِ. أنظر ملحق الإجابات.

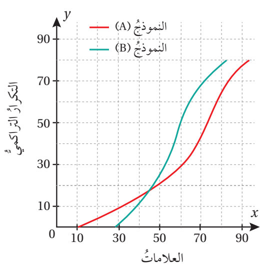
15 أجِدُ الوسيطَ والمدى الربيعيَّ للبياناتِ. أنظر ملحق الإجابات.

16 إذا كانَ الطلبةُ الذينَ تزيدُ مُعدَّلاتُهُمُ التراكميةُ على 3.4 قدْ حصلوا على منحةٍ، فكمْ طالبًا في هذهِ العيِّنَةِ لمْ يحصلْ على منحةٍ؟ $\approx 95$

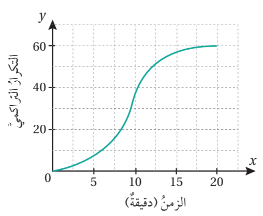
17 أحلُّ السؤالَ الواردَ في فقرةِ مسألةِ اليومِ. 11 موظفًا تقريبًا.

### مهارات التفكير العليا

18 **تبريرٌ:** طلبَ مُعلِّمُ الرياضياتِ إلى طلبةِ الصفِّ العاشرِ الإجابةَ عنْ أسئلةِ اختبارٍ مِنْ نموذجيْنِ $A$، وَ$B$، ثمَّ رسمَ المنحنى التكراريَّ التراكميَّ لنتائجِ الطلبةِ كما في الشكلِ المجاورِ. أيُّ النموذجيْنِ كانَ أصعبَ: $A$ أمْ $B$؟ أُبرِّرُ إجابتي.
أنظر ملحق الإجابات.




19 **تحدٍّ:** يُبيِّنُ الشكلُ المجاورُ المنحنى التكراريَّ التراكميَّ للمدَّةِ الزمنيةِ التي استغرقَتْها 60 مكالمةً هاتفيةً أُجرِيَتْ في أحدِ الأيامِ معَ مُقدِّمِ برنامجٍ حواريٍّ في إحدى المحطاتِ الإذاعيةِ. أستعملُ هذا التمثيلَ لتقديرِ النسبةِ المئويةِ للمكالماتِ التي استغرقَتْ 10 دقائقَ على الأقلِّ. $\approx 33\%$




20 **مسألةٌ مفتوحةٌ:** أجمعُ بياناتي الخاصةَ بـ30 مشاهدةً، ثمَّ أُنظِّمُها في جدولٍ تكراريٍّ، ثمَّ أجِدُ كلًّا منَ الوسيطِ، والمدى الربيعيِّ لها. تعتمد الإجابة على البيانات التي يجمعها الطلبة.



### أخطاء مفاهيمية:

عند حل السؤال 19 في بند (مهارات التفكير العليا)، قد يُخطِئ بعض الطلبة في تحديد المقصود من عبارة (10 دقائق على الأقل)، فيعتقدون أنَّها تعني كل قيمة أقل من 10؛ لذا أُوضِّح لهم أنَّها تعني جميع القيم التي تساوي 10، أو تزيد على 10. أمّا عبارة (10 على الأكثر) فتعني جميع القيم التي تساوي 10، أو تقل عن 10.

الدرس 3

# مقاييسُ التشتُّتِ للجداولِ التكراريةِ ذاتِ الفئاتِ

## Measures of Variation for Frequency Tables with Class Intervals

**فكرةُ الدرسِ** إيجادُ مقاييسِ التشتُّتِ للبياناتِ المُنظَّمةِ في جداولَ تكراريةٍ ذاتِ فئاتٍ.

**مسألةُ اليومِ** يعملُ في مصنعٍ للأثاثِ المنزليِّ 20 عاملًا، يتوزَّعونَ وَفقَ الأجرِ الأسبوعيِّ لأقربِ دينارٍ كما في الجدولِ المجاورِ. في أثناءِ زيارةِ مندوبِ وزارةِ العملِ الذي يُتابعُ أحوالَ العمّالِ في المصانعِ، أفادَ المديرُ الماليُّ للمصنعِ بأنَّ الانحرافَ المعياريَّ لأجورِ العاملينَ هوَ 4.72 تقريبًا. كيفَ يُمكِنُ التحقُّقُ منْ صحَّةِ ما أفادَ بِهِ المديرُ الماليُّ؟

| فئاتُ الأجورِ | عددُ العمّالِ |
|---|---|
| $70 \le x < 75$ | 6 |
| $75 \le x < 80$ | 8 |
| $80 \le x < 85$ | 4 |
| $85 \le x \le 90$ | 2 |

تعرَّفْتُ سابقًا مقاييسَ التشتُّتِ التي تصفُ تباعدَ البياناتِ عنْ بعضِها. ومنْ هذهِ المقاييسِ التباينُ؛ وهوَ الوسطُ الحسابيُّ لمُربَّعاتِ انحرافاتِ القيمِ عنْ وسطِها الحسابيِّ، وقدْ أوجدْتُهُ باستعمالِ الصيغةِ الآتيةِ:

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x-\mu)^2}{n}$$

حيثُ:

$\mu$ : الوسطُ الحسابيُّ للبياناتِ.

$n$: عددُ البياناتِ.

تعرَّفْتُ أيضًا الانحرافَ المعياريَّ $\sigma$؛ وهوَ الجذرُ التربيعيُّ للتباينِ.

لِنُراجِعْ كيفيةَ حسابِ هذيْنِ المقياسيْنِ في المثالِ الآتي.

**أتعلّمُ**

إذا كانتِ البياناتُ $x_1$، $x_2$، $x_3$، ...، $x_n$ تُمثِّلُ عينةً عشوائيةً منْ مجتمعٍ إحصائيٍّ ما؛ فإنَّ التباينَ يُرمزُ لهُ $s^2$، ويُعرّفُ بأنَّه:

$$s^2 = \frac{\sum (x-\bar{x})^2}{n-1}$$

وفي هذا الدرسِ؛ ستُعامَلُ جميعُ البياناتُ على أنّها تُمثّلُ مجتمعًا إحصائيًّا، وعليهِ فإنّ التباينَ يُعرّفُ بالصيغةِ المجاورةِ. ألاحظُ الاختلافَ بينَ الصيغتينِ.

**مثال 1**

**أَجِدُ التباينَ والانحرافَ المعياريَّ لمجموعةِ البياناتِ الآتيةِ: 4, 7, 1, 3, 0, 3**

**1 التباينُ $\sigma^2$:**

**الخطوةُ 1:** أَجِدُ الوسطَ الحسابيَّ.

$\mu = \frac{\sum x}{n}$ صيغةُ الوسطِ الحسابيِّ

$= \frac{4+7+1+3+0+3}{6} = 3$ بالتعويضِ، والتبسيطِ



الدرس 3

## نتاجات الدرس

- إيجاد التباين والانحراف المعياري للبيانات المنظمة في جداول تكرارية ذات فئات.
- اختيار الصيغة التي أُفضِّلها لحساب التباين.
- إيجاد التباين والانحراف المعياري للبيانات المُمثَّلة بمُدرَّج تكراري.

## التعلّم القبلي:

- إيجاد المدى، والتباين، والانحراف المعياري للبيانات المفردة.
- إيجاد المدى، والتباين، والانحراف المعياري للبيانات المنظمة في جداول تكرارية.

## 1 التهيئة

- أطرح على الطلبة الأسئلة الآتية:
  - » ما مقاييس النزعة المركزية التي سبق أنْ تعلّمتموها؟ الوسط، والوسيط، والمنوال.
  - » لماذا سُمِّيت مقاييس النزعة المركزية بهذا الاسم؟ لأنّها تصف القيمة المركزية للبيانات.
  - » ما مقاييس التشتُّت التي سبق أنْ تعلّمتموها؟ المدى، والتباين، والانحراف المعياري.
  - » لماذا سُمِّيت مقاييس التشتُّت بهذا الاسم؟ لأنّها تصف تباعد البيانات بعضها عن بعض، أو تصف تشتُّتها.
- أطلب إلى الطلبة إيجاد الوسط الحسابي لكلٍّ ممّا يأتي:

**a)** أوزان خمسة أطفال بالكيلوغرام:

23, 27, 28, 21, 26    25 kg

**b)** أعمار 20 طالبًا مُوزَّعة كما يأتي:

| العمر (سنة) | 13 | 14 | 15 | 16 |
|---|---|---|---|---|
| العدد | 2 | 6 | 8 | 4 |

14.7 سنة.

**الخطوةُ 2:** أُنشِئُ جدولًا أحسبُ فيهِ انحرافَ كلِّ قيمةٍ عنْ الوسطِ الحسابيِّ، فضلًا عنْ حسابِ مُربَّعاتِ الفروقِ.

| $x$ | $(x-\mu)$ | $(x-\mu)^2$ |
|---|---|---|
| 4 | $4-3=1$ | 1 |
| 7 | $7-3=4$ | 16 |
| 1 | $1-3=-2$ | 4 |
| 3 | $3-3=0$ | 0 |
| 0 | $0-3=-3$ | 9 |
| 3 | $3-3=0$ | 0 |
| المجموعُ | | 30 |

**الخطوةُ 3:** أُعوِّضُ القيمَ التي توصَّلْتُ إليْها منَ الجدولِ بصيغةِ التباينِ.

$$\sigma^2 = \frac{\sum(x-\mu)^2}{n}$$ صيغةُ التباينِ

$$= \frac{30}{6} = 5$$ بالتعويضِ، والتبسيطِ

إذنْ، التباينُ هوَ 5

**2 الانحرافُ المعياريُّ $\sigma$:**

الانحرافُ المعياريُّ هوَ الجذرُ التربيعيُّ للتباينِ: $\sigma = \sqrt{5}$

**أتذكَّرُ**

مجموعُ انحرافاتِ المشاهداتِ أوِ القيمِ عنْ وسطِها الحسابيِّ يساوي صفرًا.

**أتحقق من فهمي**

$\sigma^2 \approx 17.14$ , $\sigma \approx 4.14$

**أَجِدُ التباينَ والانحرافَ المعياريَّ لمجموعةِ البياناتِ الآتيةِ:**

3, 5, 12, 10, 15, 14, 11

بالرغمِ منْ أنَّ الجداولَ التكراريةَ ذاتَ الفئاتِ لا تظهرُ فيها القيمُ الحقيقيةُ للبياناتِ، فإنَّهُ يُمكِنُ استعمالُها لتقديرِ التباينِ والانحرافِ المعياريِّ للبياناتِ؛ إذْ يُمكِنُ النظرُ إلى جميعِ قيمِ البياناتِ في فئةٍ مُعيَّنةٍ على أساسِ أنَّ كلًّا منْها ممثلةٌ بقيمةِ منتصفِ الفئةِ (مركزُ الفئةِ) $x$.

**مفهومٌ أساسيٌّ**

**الوسطُ الحسابيُّ والتباينُ للبياناتِ ذاتِ الفئاتِ**

- لتقديرِ الوسطِ الحسابيِّ للبياناتِ المُنظَّمةِ في جداولَ تكراريةٍ ذاتِ فئاتٍ، أستعملُ الصيغةَ الآتيةَ:

$$\mu = \frac{\sum(x \times f)}{\sum f}$$

حيثُ:

$x$: مركزُ الفئةِ. $f$: التكرارُ المقابلُ للفئةِ

- لتقديرِ التباينِ للبياناتِ المُنظَّمةِ في جداولَ تكراريةٍ ذاتِ فئاتٍ، أستعملُ الصيغةَ الآتيةَ:

$$\sigma^2 = \frac{\sum((x-\mu)^2 \times f)}{\sum f}$$

- لتقديرِ الانحرافِ المعياريِّ، أَجِدُ الجذرَ التربيعيَّ للتباينِ.

**معلومةٌ**

في ما يخصُّ البياناتِ المُنظَّمةَ في الجداولِ ذاتِ الفئاتِ، يكونُ المدى مساويًا لقيمةِ الحدِّ الأعلى الفعليِّ للفئةِ العليا مطروحًا منْها قيمةُ الحدِّ الأدنى الفعليِّ للفئةِ الدنيا.



## 2 الاستكشاف

- أُوجِّه الطلبة إلى قراءة المسألة في بند (**مسألة اليوم**)، ثم أسألهم:
  - » ما معدل الأجر الأسبوعي للعمّال الذين تُصنَّف أجورهم ضمن الفئة الأولى في الجدول؟ 72.5 دينارًا.
  - » ما المجموع التقريبي لأجور العمّال الأسبوعية في الفئتين الأولى والثانية؟ 1055 دينارًا.
  - » كيف يمكن تقدير الوسط الحسابي لأجور كل العاملين في المصنع؟ بجمع نواتج ضرب مراكز الفئات في عدد العمّال ضمن كل فئة، وقسمة المجموع على عدد العمّال جميعًا.
  - » كيف أُعرِّف المدير المالي قيمة الانحراف المعياري لأجور العاملين في المصنع؟ حسبها بطريقة ما.
- أستمع لبعض إجابات الطلبة من دون تقديم تغذية راجعة لها.

### إرشادات:

- المثال الأول هو مراجعة للتعلُّم السابق؛ لذا أستعمله لتذكير الطلبة بصيغة التباين المستعملة في حالة البيانات المفردة، وأحرص على تنفيذ خطوات الحل الثلاث كما وردت في الفرع الأول؛ نظرًا إلى تكرار استعمال هذه الخطوات عند تقدير التباين للبيانات المنظمة في جدول تكراري ذي فئات.
- أُوضِّح للطلبة أنَّ تقدير التباين يتطلَّب أولًا إيجاد مجموع التكرارات $\sum f$، ثم تدوين المجموع في خانة أسفل العمود، ثم إضافة الأعمدة الخمسة المُبيَّنة في حل المثال.

## مثال 2

**حفظُ القرآنِ الكريمِ:** يُبيِّنُ الجدولُ المجاورُ توزيعًا لخمسينَ طالبًا يحفظونَ 5 أجزاءٍ منَ القرآنِ الكريمِ بحسبِ أعمارِهِمْ لأقربِ سنةٍ. أُقدِّرُ التباينَ والانحرافَ المعياريَّ لهذهِ البياناتِ.

| فئاتُ العمرِ | عددُ الحُفّاظِ |
|---|---|
| 6 – 8 | 15 |
| 9 – 11 | 10 |
| 12 – 14 | 25 |

لتقديرِ التباينِ، أُنشِئُ جدولًا جديدًا يحوي الأعمدةَ المُظلَّلةَ عناوينُها على النحوِ الآتي:

| فئاتُ العمرِ | $f$ | $x$ | $x \times f$ | $x - \mu$ | $(x-\mu)^2$ | $(x-\mu)^2 \times f$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 6 – 8 | 15 | 7 | 105 | −3.6 | 12.96 | 194.4 |
| 9 – 11 | 10 | 10 | 100 | −0.6 | 0.36 | 3.6 |
| 12 – 14 | 25 | 13 | 325 | 2.4 | 5.76 | 144 |
| المجموعُ | **50** | | **530** | | | **342** |

$$\mu = \frac{\sum (x \times f)}{\sum f} = \frac{530}{50} = 10.6$$ بالتعويضِ في صيغةِ الوسطِ الحسابيِّ

$$\sigma^2 = \frac{\sum((x-\mu)^2 \times f)}{\sum f}$$ صيغةُ التباينِ

$$= \frac{342}{50}$$ بالتعويضِ

$$= 6.84$$ بالتبسيطِ

لتقديرِ الانحرافِ المعياريِّ، أَجِدُ الجذرَ التربيعيَّ للتباينِ:

$$\sigma \approx 2.62$$

**أُفكِّرُ**

لماذا لا يُشترَطُ في مجموعِ انحرافاتِ مراكزِ الفئاتِ عنِ الوسطِ الحسابيِّ أنْ يساويَ صفرًا، في حالةِ البياناتِ المُنظَّمةِ في الجدولِ ذي الفئاتِ؟

**أتحقق من فهمي**

**يُبيِّنُ الجدولُ المجاورُ توزيعًا لـ 200 سائقٍ وفقَ أعمارِهم، ممن تسبَّبوا في حوادثَ مروريةٍ خطيرةٍ في إحدى المدنِ على مدارِ أسبوعٍ. أُقدِّرُ التباينَ والانحرافَ المعياريَّ لهذهِ البياناتِ.**

| فئاتُ العمرِ (سنةٌ) | عددُ الأشخاصِ |
|---|---|
| $18 \le x < 28$ | 100 |
| $28 \le x < 38$ | 52 |
| $38 \le x < 48$ | 26 |
| $48 \le x < 58$ | 18 |
| $58 \le x \le 68$ | 4 |

$\sigma^2 \approx 115.31$ , $\sigma \approx 10.74$

توجدُ صيغةٌ أُخرى لتقديرِ التباينِ للبياناتِ المُنظَّمةِ في جداولَ تكراريةٍ ذاتِ فئاتٍ، منْ دونِ حاجةٍ إلى حسابِ انحرافاتِ مراكزِ الفئاتِ عنِ الوسطِ الحسابيِّ، وهذهِ الصيغةُ هيَ:

$$\sigma^2 = \frac{\sum(x^2 \times f) - (\sum f)\,\mu^2}{\sum f}$$



## 3 التدريس

- أكتب الصيغ التي ورد ذكرها في بند (مفهوم أساسي) داخل إطار في الزاوية اليمنى العليا من اللوح، ثم اشرحها.

## مثال 2

- أُناقِش الطلبة في حل هذا المثال، وأحرص على تنظيم الإجابة وَفق خطوات متسلسلة وواضحة.
- أُوضِّح للطلبة قيم المجاميع التي تضمَّنها الجدول، وعُوِّضت في الصيغ الرياضية، بكتابتها بلون مختلف، أو تظليل خاناتها.
- أُوجِّه الطلبة إلى استعمال الآلة الحاسبة حيثما لزم ذلك.

### تعزيز اللغة ودعمها:

أُكرِّر المصطلحات الرياضية المستخدمة في الدرس باللغتين العربية والإنجليزية، وأُحفِّز الطلبة على استعمالها، مثل: مقاييس التشتُّت (measures of variaton)، والمدى (range)، والتباين (variance)، والانحراف المعياري (standard deviation).

### التقويم التكويني:

- أُوجِّه الطلبة إلى حل التدريب في بند (**أتحقق من فهمي**) بعد كل مثال.
- أختار بعض الإجابات التي تحوي أخطاء مفاهيمية، ثم أُناقِشها على اللوح، ولا أذكر اسم الطالب الذي أخطأ في الإجابة؛ تجنبًا لإحراجه.

### مثال 3: من الحياة

**معلومةٌ**

في شهرِ تشــرينَ الثاني منْ عامِ 1971م، تمكَّنَ راي توملينسون (مُخترعُ البريــدِ الإلكترونــيِّ) منْ إرســالِ أولِ رسالةٍ إلكترونيةٍ.

**بريدٌ إلكترونيٌّ:** دوَّنَتْ سُــمَيَّةُ عددَ رســائلِ البريدِ الإلكترونــيِّ اليوميــةِ التي وصلَتْها فــي 40 يومًا، ونظَّمَتْ بياناتِها في الجــدولِ التكراريِّ المجاورِ. أُقدِّرُ التباينَ لهذهِ البياناتِ.

| عددُ الأيامِ | عددُ الرسائلِ |
|---|---|
| 6 | 10 – 14 |
| 5 | 15 – 19 |
| 12 | 20 – 24 |
| 9 | 25 – 29 |
| 8 | 30 – 34 |

لتقديرِ التباينِ، أُنشِئُ جدولًا جديدًا يحوي الأعمدةَ المُظلَّلةَ عناوينُها على النحوِ الآتي:

| عددُ الرسائلِ | $f$ | $x$ | $x^2$ | $f \times x$ | $f \times x^2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 10 – 14 | 6 | 12 | 144 | 72 | 864 |
| 15 – 19 | 5 | 17 | 289 | 85 | 1445 |
| 20 – 24 | 12 | 22 | 484 | 264 | 5808 |
| 25 – 29 | 9 | 27 | 729 | 243 | 6561 |
| 30 – 34 | 8 | 32 | 1024 | 256 | 8192 |
| المجموعُ | **40** | | | **920** | **22870** |

بالتعويضِ في صيغةِ الوسطِ الحسابيِّ
$$\mu = \frac{\sum x \times f}{\sum f} = \frac{920}{40} = 23$$

الصيغةُ الثانيةُ لحسابِ التباينِ
$$\sigma^2 = \frac{\sum (x^2 \times f) - (\sum f)\,\mu^2}{\sum f}$$

بالتعويضِ
$$= \frac{22870 - 21160}{40}$$

بالتبسيطِ
$$\approx 43$$

**أتحقق من فهمي**

**أَحُلُّ مســألةَ (حفظُ القــرآنِ الكريمِ) التي وردَتْ في المثالِ 2 باســتعمالِ الصيغةِ الثانيةِ لتقديرِ الانحــرافِ المعياريِّ، ثمَّ أُقارِنُ قيمةَ الانحرافِ المعياريِّ التي أتوصَّلُ إليْها بالقيمةِ التي ســبقَ حسابُها.** أنظر ملحق الإجابات.

يُمكِنُني أيضًا تقديرُ مقاييسِ التشتُّتِ للبياناتِ المُمثَّلةِ بمُدرَّجٍ تكراريٍّ، عنْ طريقِ إعادةِ تنظيمِها في جدولٍ ذي فئاتٍ وتكرارٍ.



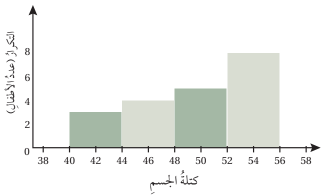
### مثال 3: من الحياة

- أُوضِّح للطلبة أنَّه يمكن تقدير التباين باستعمال صيغة أُخرى لا تعتمد على حساب فروق مراكز الفئات عن الوسط الحســابي، وأنَّ بعضهم قد إيجاد هذه الصيغة أسهل من الصيغة الأولى.
- أُخبِر الطلبة أنَّ قيمة التباين الناتجة هي نفسها في كلتا الصيغتين، وأنَّ اختلاف القيمــة أحيانًا في الصيغتين سببه تقريب القيم في أثناء الحسابات.
- أكتب صيغتــي تقدير التباين في أعلى اللوح، مُوضِّحًا الفروق بينهما.
- أُناقِش الطلبة فــي حل هذا المثــال، مُبيِّنًا أنَّ الإجابة تتطلَّــب إضافة أربعة أعمــدة جديدة إلــى الجدول الأصلي.
- أُوضِّح للطلبة مُسمَّيات الأعمدة الأربعة: $x, x^2, f \times x, f \times x^2$، مُحدِّدًا الأعمدة الثلاثة التي يتعيَّن إيجاد مجموع القيم في خاناتها، وكيفية التعويض في الصيغة الرياضية لتقدير التباين.
- أُوجِّه الطلبة إلى اســتعمال الآلة الحاســبة حيثما لزم ذلك.

### المفاهيم العابرة:

- عنــد حل المثال الثالث، أُدير حــوارًا مع الطلبة – في دقيقتيــن– عن مُختــرِع البريــد الإلكترونــي (راي توملينسون)، ثم أسألهم:
  - » كيف أسهم هذا الاختراع في خدمة البشرية؟
  - » أيُّكم فكَّر أنْ يكون مُخترِعًا أو مُبدِعًا؟
- أُخبِر الطلبة أنَّ الأفــكار الإبداعية لا تقاس بحجمها. فمُخترِع قلم الرصــاص، ومُخترِع الممحاة، ومُخترِع جهاز الحاسوب؛ جميعهم أصحاب أفكار إبداعية.
- أُحفِّــز الطلبة علــى تقدير جهود العلمــاء وأصحاب الأفكار الإبداعية.

## مثال 4




**كتلةُ الجسمِ: يُبيِّنُ التمثيلُ بالمُدرَّجِ التكراريِّ المجاورِ توزيعًا لمجموعةِ أطفالٍ منْ سنِّ 10 سنواتٍ وَفقَ كتلِ أجسامِهِمْ مُقرَّبةً إلى أقربِ كيلوغرامٍ.**

**أُقدِّرُ التباينَ والانحرافَ المعياريَّ لهذهِ البياناتِ.**

**1** **التباينُ:** أُعيدُ تنظيمَ البياناتِ في جدولٍ ذي فئاتٍ وتكرارٍ على النحوِ الآتي:

| الفئةُ (الكتلةُ $x$) | $f$ | $x$ | $x \times f$ | $x - \mu$ | $(x-\mu)^2$ | $(x-\mu)^2 \times f$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $40 \le x < 44$ | 3 | 42 | 126 | $-7.6$ | 57.76 | 173.28 |
| $44 \le x < 48$ | 4 | 46 | 184 | $-3.6$ | 12.96 | 51.84 |
| $48 \le x < 52$ | 5 | 50 | 250 | 0.4 | 0.16 | 0.8 |
| $52 \le x \le 56$ | 8 | 54 | 432 | 4.4 | 19.36 | 154.88 |
| المجموعُ | **20** | | **992** | | | **380.8** |

$$\mu = \frac{\sum x \times f}{\sum f}$$ صيغةُ الوسطِ الحسابيِّ

$$= \frac{992}{20} = 49.6$$ بالتعويضِ، والتبسيطِ

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x-\mu)^2 \times f}{\sum f}$$ الصيغةُ الأولى لحسابِ التباينِ

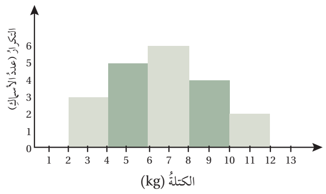
$$= \frac{380.8}{20} = 19.04$$ بالتعويضِ، والتبسيطِ

**2** **الانحرافُ المعياريُّ:**

لتقديرِ الانحرافِ المعياريِّ، أَجِدُ الجذرَ التربيعيَّ للتباينِ: $\sigma \approx 4.36$

يحـوي خليـجُ العقبةِ ما يزيدُ علـى 500 نوعٍ منَ الأسـماكِ منْ أصلِ 1400 نـوعٍ تعيـشُ في مياهِ البحرِ الأحمرِ.

### أتحقق من فهمي




**صيدٌ بحريٌّ: يُبيِّنُ التمثيلُ بالمُدرَّجِ التكراريِّ المجاورِ توزيعًا لكتلِ مجموعةٍ منَ الأسـماكِ التي اصطادَها أحدُ الصيّادينَ في مدينةِ العقبةِ. أُقـدِّرُ التباينَ والانحـرافَ المعيـاريَّ لهذهِ البياناتِ.** أنظر ملحق الإجابات.



## مثال 4

- أُخبِر الطلبة أنَّ المُدرَّج التكـراري هو طريقة لعرض البيانـات الكبيرة، وتلخيصهـا، وتمثيلها، وأنَّه يمكن التحويل بسـهولة بين المُدرَّج التكـراري والجدول التكراري ذي الفئات.
- أُوضِّح للطلبة كيف يمكن إنشـاء جدول تكراري ذي فئات من المُدرَّج المعطى في المثال، ثم أسألهم:

» كيف نصف توزيع البيانـات المُمثَّلة بهذا المُدرَّج التكراري؟ توزيع ملتوٍ نحو اليسار.

» هل الوسـيط $Q_2$ في هذا التوزيع أقرب إلى الربيع الأدنـى $Q_1$ أم إلى الربيع الأعلـى $Q_3$؟ أقرب إلى الربيع الأعلى $Q_3$.

- أُناقِش الطلبة في حل هذا المثال.

## تنويع التعليم:

- أُخبِـر الطلبـة أنَّ بعـض الآلات الحاسـبة العلمية تمتـاز بخاصية إدخال الفئات والتكـرارات، وإجراء الحسـابات اللازمـة لتقدير التبايـن والانحراف المعياري.
- إذا توافـر لدى بعض الطلبة مثل هذه الآلات، فأطلب إليهم استعمالها لتقدير التباين والانحراف المعياري، ثم أطلب إلى أحدهم شـرح تعليمات الاسـتعمال، وتطبيقها أمام الزملاء في الصف.

## 4 التدريب

- أُناقِش الطلبة في حل الأسئلة (17– 5).
- أطلب إلى الطلبة حل الأسـئلة (1, 2, 3, 4, 11) بعد توزيعهم إلى مجموعات.
- أتجوَّل بين الطلبة مُرشِدًا، ومُساعِدًا، ومُوجِّهًا، وأُقدِّم لهم التغذية الراجعة.
- إذا واجــه بعض الطلبــة صعوبة في حل أيِّ مســألة، فأختار طالبًا تمكَّن من حل المسألة، وأطلب إليه كتابة حله على اللوح.

## مهارات التفكير العليا

- أُوجِّه الطلبة (ضمن مجموعات ثنائية غير متجانســة) إلى حل المســائل في بند (**مهــارات التفكير العليا**)، وأُذكِّر كل مجموعة بكتابة مُبرِّر للإجابة التي يتوصَّلون إليهــا، وأمنح طلبة الصــف وقتًا كافيًا لنقــد مُبرِّرات زملائهم.

## الواجب المنزلي:

- أطلب إلى الطلبة أنْ يحلوا في البيت جميع المســائل الواردة فــي الصفحــة الثامنة والعشــرين من كتاب التمارين، مُحدِّدًا لهم المســائل التــي يمكنهم حلها في نهاية كل حصة بحســب ما يُقدَّم من أمثلة الدرس وأفكاره.
- يمكن أيضًا إضافة المسائل التي لم يحلها الطلبة داخل غرفة الصف إلى الواجب المنزلي.
- في اليوم التالي، أَطَّلِع على حلول الطلبة، وأُناقِشــهم في أيِّ صعوبات واجهوها في أثناء الحل.



### أتدرب وأحل المسائل

**طباعةٌ:** يُبيِّنُ الجدولُ المجاورُ توزيعًا لأربعينَ طالبًا في الصفِّ العاشرِ بحسبِ عددِ الكلماتِ التي يستطيعونَ طباعتَها في جهازِ الحاسوبِ في دقيقةٍ واحدةٍ:

| عددُ الطلبةِ | الفئاتُ (عددُ الكلماتِ في الدقيقةِ) |
|---|---|
| 8 | 26 – 30 |
| 12 | 31 – 35 |
| 10 | 36 – 40 |
| 7 | 41 – 45 |
| 3 | 46 – 50 |

1) أُقدِّرُ الوسطَ الحسابيَّ لهذهِ البياناتِ. $\mu = 36.125$

2) أُقدِّرُ التباينَ والانحرافَ المعياريَّ لهذهِ البياناتِ.
$\sigma^2 \approx 35.86$ , $\sigma \approx 5.99$

**شــقق ســكنيةٌ:** يُبيِّنُ الجدولُ المجاورُ توزيعًا لِـ 23 شــقةً سكنيةً – بحسبِ مِساحاتِها – بنَتْها إحدى شركاتِ الإسكانِ عامَ 2020م:

| عددُ الشققِ | الفئاتُ (المِساحةُ $m^2$) |
|---|---|
| 2 | $80 \le x < 100$ |
| 5 | $100 \le x < 120$ |
| 7 | $120 \le x < 140$ |
| 6 | $140 \le x < 160$ |
| 3 | $160 \le x \le 180$ |

3) أُقدِّرُ الوسطَ الحسابيَّ لهذهِ البياناتِ. $\mu = 132.61$

4) أُقدِّرُ التباينَ والانحرافَ المعياريَّ لهذهِ البياناتِ بطريقتيْنِ مختلفتيْنِ.
أنظر ملحق الإجابات.

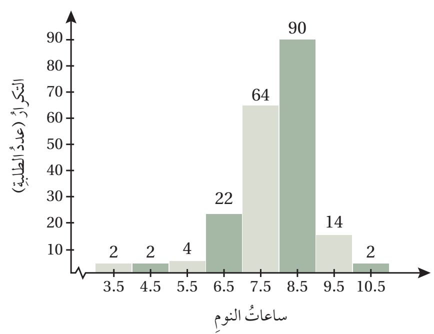
**كرةُ ســلَّةٍ:** يُبيِّنُ الجدولُ المجاورُ توزيــعَ اللاعبينَ في فريقيْنِ لكرةِ السلَّةِ وفقَ أطوالِهِمْ بالسنتيمترِ:

| فريقُ الأُسودِ | فريقُ النسورِ | الطولُ $(x)$ |
|---|---|---|
| 2 | 3 | $170 \le x < 178$ |
| 3 | 1 | $179 \le x < 187$ |
| 3 | 4 | $188 \le x < 196$ |
| 2 | 2 | $197 \le x \le 205$ |

أنظر ملحق الإجابات.
5) أُقدِّرُ التباينَ لأطوالِ اللاعبينَ في كلِّ فريقٍ.

6) أيُّ الفريقيْنِ أكثرُ تجانسًــا منْ حيثُ أطوالُ اللاعبينَ؟ أُبرِّرُ إجابتي. أطوال لاعبي فريق الأسود أكثر تجانسًا؛ لأنَّ تباينها أقل من تباين أطوال فريق النسور.

**ســاعاتُ النومِ:** يُبيِّنُ التمثيلُ بالمُدرَّجِ التكراريِّ المجاورِ توزيعًا لِـ 200 طالبٍ بحسبِ ساعاتِ نومِهِمْ:



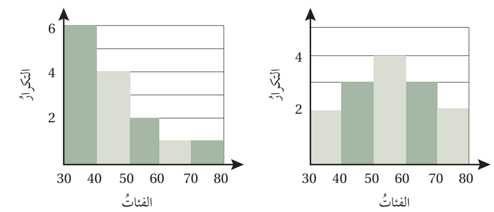

7) أُقدِّرُ الوسطَ الحسابيَّ لهذهِ البياناتِ. $\mu = 7.9$

8) أُقدِّرُ التباينَ والانحرافَ المعياريَّ لهذهِ البياناتِ.
$\sigma^2 \approx 1.1$ , $\sigma \approx 1.05$

9) أَصِفُ توزيعَ هذهِ البياناتِ.
التوزيع ملتوٍ نحو اليسار.

10 أُقارِنُ بينَ قيمتَيِ التباينِ للبياناتِ المُمثَّلةِ في الشكليْنِ الآتيينِ، مُفسِّرًا سببَ الاختلافِ بينَهُما.

أنظر ملحق الإجابات.




11 أحل السؤال الوارد في فقرة مسألة اليوم. أنظر ملحق الإجابات.

مهارات التفكير العليا

12 **مسألةٌ مفتوحةٌ:** أُنظِّمُ البياناتِ الآتيةَ في جدولٍ تكراريٍّ (أختارُ طولًا مناسبًا للفئات)، ثمَّ أُقدِّرُ قيمتَيِ الوسطِ الحسابيِّ والتباينِ، مُستعمِلًا آلةً حاسبةً لإيجادِ القيمةِ الدقيقةِ لكلٍّ منْهُما، ثمَّ أُقارِنُ قيمَهُما الدقيقةَ بالقيمِ التقديريةِ.

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 15 | 14 | 14 | 14 | 13 | 12 | 11 | 11 | 11 | 11 |
| 10 | 11 | 13 | 16 | 10 | 9 | 15 | 12 | 9 | 10 |
| 7 | 14 | 13 | 14 | 8 | 9 | 8 | 11 | 13 | 13 |
| 15 | 12 | 9 | 10 | 9 | 9 | 16 | 16 | 12 | 10 |
| 11 | 11 | 12 | 15 | 6 | 10 | 10 | 10 | 11 | 9 |

القيم الدقيقة هي:

$\mu = 11.48$

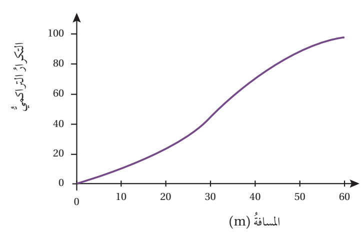
التباين هو 5.49 تقريبًا.

أنظر ملحق الإجابات.

13 **تبريرٌ:** في السؤالِ (12)، ما تأثيرُ أطوالِ فتراتِ الجدولِ التكراريِّ الذي أنشأْتُهُ في القيمةِ التقديريةِ للتباينِ؟ أُبرِّرُ إجابتي. أنظر ملحق الإجابات.

14 **تبريرٌ:** هلْ يُمكِنُ تقديرُ التباينِ للبياناتِ المُمثَّلةِ في المنحنى التكراريِّ التراكميِّ المجاورِ؟ أُبرِّرُ إجابتي.

أنظر ملحق الإجابات.




130

## 5 الإثراء

- تعتمد كتب الإحصاء كتابة صيغتي تقدير التباين بتحديد مُؤشِّر (index) الذي يُرمَز إليه بالحرف (i)، ويُكتَب أسفل رمز المجموع $\sum$، ويتخذ هذا المُؤشِّر القيم: $1, 2, 3, \ldots, n$، حيث n عدد صحيح غير سالب.
- أُوجِّه الطلبة إلى البحث في مصادر المعرفة المتوافرة عن أهمية هذا المُؤشِّر، ومجالات استعماله.
- أُخبِر الطلبة أنَّ كتب الإحصاء تحتوي أيضًا على صيغ أُخرى تُستعمَل لتقدير التباين والانحراف المعياري، ثم أطلب إليهم البحث عن هذه الصيغ، وكتابة تقرير عنها يتضمَّن أمثلة على تطبيق الصيغ الجديدة.
- أُذكِّر الطلبة بضوابط التقرير العلمي ومعاييره، التي أهمها: وجود صفحة لعنوان التقرير وأسماء المُعِدِّين، وفهرس للعناوين الفرعية، ومراعاة الدقة العلمية، وسلامة اللغة، والإيجاز، والوضوح، وتوثيق المصادر.
- أُخبِر الطلبة أنَّه يمكنهم عرض ملخص للتقرير في أثناء الحصة المُخصَّصة لعرض مشروع الوحدة.

### تعليمات المشروع:

- أطلب إلى الطلبة البدء بتنفيذ الخطوتين (4) و(5) من خطوات المشروع.
- أُتابِع أفراد المجموعات في أثناء تنفيذ مشروع الوحدة، وأُزوِّدهم بتغذية راجعة وإرشادات لتحسينه.

## 6 الختام

- أطلب إلى الطلبة –في نهاية الدرس– تلخيص ما تعلَّموه بعباراتهم الخاصة، ثم أستمع لبعض ما كتبوه.
- أطلب إلى كل طالب اختيار موضوع أو فكرة من الدرس أتقنها، وكتابة سؤال عنها في ورقة تحمل اسمه، أو اختيار موضوع أو فكرة تحتاج إلى مزيد من التمرين لإتقانها، وكتابة سؤال عنها، ثم تسليمي الورقة.
- أَطَّلِع على الأوراق، ثم أُخطِّط لمعالجة جوانب الضعف التي رصدتها في أوراق الطلبة.

# الدرس 4

## نتاجات الدرس

- تحديد إذا كان الحادثان متنافيين أو غير متنافيين.
- إيجاد احتمالات حوادث متنافية وحوادث غير متنافية ضمن مواقف حياتية متنوعة.
- تمثيل التجارب العشوائية بأشكال فن، واستعمالها لإيجاد الاحتمالات.
- إيجاد احتمال الحادث المتمم.

## التعلُّم القبلي:

- كتابة عناصر الحوادث البسيطة وعناصر فضاء العيِّنة في تجربة عشوائية.
- إيجاد تقاطع مجموعتين، واتحادهما، ومتممة مجموعة.
- إيجاد احتمالات الحوادث البسيطة.

## 1 التهيئة

- أكتب على اللوح المثال الآتي لتوضيح مجموعة من المفاهيم المُتعلِّقة بالاحتمال:

» في تجربة إلقاء حجر نرد منتظم مرَّة واحدة، إذا كان $A$ يعني ظهور عدد أقل من 3، و$B$ يعني ظهور عدد أكبر من 5، و$C$ يعني ظهور عدد أكبر من 6، و$D$ يعني ظهور عدد أقل من 7، فماذا تُسمّى هذه التجربة؟ تجربة عشوائية.

- أعرض حجر نرد منتظمًا أمام الطلبة، مُوضِّحًا لهم خصائصه (يمكنني الاستعانة بصورة حجر النرد الظاهرة في المثال الثاني إذا لم يتوافر حجر نرد حقيقي).
- أُذكِّر الطلبة بمفهوم فضاء العيِّنة (sample space)، وبرمزه Ω (أوميجا)، وتعريفه: مجموعة النواتج الممكنة جميعها لتجربة عشوائية. أُذكِّرهم أيضًا بمفهوم الحادث البسيط (simple event)، وبعناصره التي تنتمي إلى فئة واحدة، مثل: فئة العدد الأولي، وفئة العدد الفردي، **وليس بالضرورة الحادث الذي فيه عنصر واحد.**

---

# الدرس 4

# احتمالاتُ الحوادثِ المتنافيةِ

**Probability of Mutually Exclusive Events**

**فكرةُ الدرسِ** حسابُ احتمالاتِ الحوادثِ المتنافيةِ، وغيرِ المتنافيةِ، ومُتمِّمةِ الحادثِ.

**المصطلحاتُ** الحادثُ البسيطُ، الحادثُ المُركَّبُ، الحادثانِ المتنافيانِ.

**مسألةُ اليومِ** استوردَ تاجرٌ شحنةً منَ السكَّرِ في باخرتيْنِ. إذا كانَ احتمالُ وصولِ الباخرةِ الأولى في موعدِها 60%، واحتمالُ وصولِ الباخرةِ الثانيةِ في موعدِها 50%، واحتمالُ وصولِهما معًا 30%، فما احتمالُ وصولِ إحدى الباخرتيْنِ على الأقلِّ في موعدِها؟

يُسمّى الحادثُ الواحدُ (مثلُ وصولِ الباخرةِ الأولى في موعدِها) **الحادثَ البسيطَ** (simple event)، أمّا **الحادثُ المُركَّبُ** (compound event) فيتكوَّنُ منْ حادثيْنِ بسيطيْنِ أوْ أكثرَ، مثلُ وصولِ إحدى الباخرتيْنِ على الأقلِّ في موعدِها.

إذا كانَ $(A)$ وَ $(B)$ حادثيْنِ في تجربةٍ عشوائيةٍ، فإنَّهُما يُسمَّيانِ **حادثيْنِ متنافييْنِ** (mutually exclusive)؛ إذا تعذَّرَ وقوعُهُما معًا في الوقتِ نفسِهِ. ويُقصَدُ بالمتنافييْنِ عدمُ وجودِ عناصرَ مشتركةٍ بينَهُما.

**أتعلَّمُ**

يُطلَقُ على الحادثيْنِ المتنافييْنِ أيضًا اسمُ الحادثيْنِ المنفصليْنِ.

**مثال 1**

أُحدِّدُ إذا كانَ الحادثانِ متنافييْنِ أمْ لا في ما يأتي، مُبرِّرًا إجابتي:

1. **التجربةُ هيَ لعبةُ كرةِ القدمِ. الحادثُ الأوَّلُ هوَ الفوزُ في المباراةِ، والحادثُ الثاني هوَ الخسارةُ.**

   الحادثانِ متنافيانِ؛ لأنَّهُ لا يُمكِنُ الفوزُ والخسارةُ في الوقتِ نفسِهِ.

2. **التجربةُ هيَ إلقاءُ حجرِ نردٍ منتظمٍ. الحادثانِ هما الحصولُ على عددٍ زوجيٍّ، أوِ الحصولُ على عددٍ أقلَّ منْ 3**

   الحادثانِ غيرُ متنافييْنِ؛ نظرًا إلى وجودِ عنصرٍ مشتركٍ بينَهُما، هوَ العددُ 2، وهذا العددُ زوجيٌّ، وأقلُّ منْ 3 في الوقتِ نفسِهِ.

**أتذكَّرُ**

الحادثانِ ($A$ وَ $B$) وَ($A$ أوْ $B$) كلاهُما مُركَّبٌ؛ لأنَّهُ يتكوَّنُ منْ حادثيْنِ بسيطيْنِ.

ملاحظات المُعلِّم/ المُعلِّمة

- أسأل الطلبة:
  - » ماذا تعني $\Omega$ في تجربة إلقاء حجر نرد منتظم مرَّة واحدة؟ $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
  - » ماذا يُسمّى كلٌّ من $A$، و$B$، و$C$، و$D$؟ يُسمّى حادثًا بسيطًا.
  - » ما عناصر كلٍّ من $A$، و$B$، و$C$، و$D$؟ $A = \{1, 2\}, B = \{6\}, C = \{\ \} = \varnothing, D = \Omega$
  - » ما عناصر كلٍّ من $A \cap B$، و$A \cup B$، و $\overline{A}$؟ $A \cup B = \{1, 2, 6\}, A \cap B = \varnothing, \overline{A} = \{3, 4, 5, 6\}$
- أُذكِّر الطلبة بمفهوم الاحتمال (probability)، وكيفية إيجاد احتمال كلٍّ من الحوادث المعطاة، مُبيِّنًا أنَّ الحادث الذي احتماله 0 يُسمّى مستحيلًا، وأنَّ الحادث الذي احتماله 1 يُسمّى أكيدًا، وأنَّ احتمال أيِّ حادث يجب أنْ يقع ضمن الفترة $[0, 1]$.

## 2 الاستكشاف

- أُوجِّه الطلبة إلى قراءة المسألة في بند (**مسألة اليوم**)، ثم أسألهم:
  - » أُحوِّل احتمال حادث وصول الباخرة الأولى في موعدها إلى كسر. $0.6 = \frac{3}{5}$
  - » ماذا يُسمّى حادث وصول الباخرة الأولى في موعدها؟ يُسمّى حادثًا بسيطًا.
  - » ماذا يُسمّى حادث وصول الباخرتين معًا؟ يُسمّى حادثًا مُركَّبًا؛ لأنَّه يتكوَّن من حادثين بسيطين.
- أستمع لبعض إجابات الطلبة من دون تقديم تغذية راجعة لها.

**إرشاد:** أُخبِر الطلبة أنَّ حجر النرد المنتظم مكعب يظهر على كل أُوجِّه من وجوهه رقم (أو نقاط تدل على أحد الأرقام من 1 إلى 6)، ويكون مجموع كل رقمين على وجهين متقابلين 7؛ فالوجه الذي يحمل الرقم 2 مثلًا يقابل الوجه الذي يحمل الرقم 5.

## 3 التدريس

- أُوضِّح للطلبة مفهوم الحادثين المتنافيين (mutually exclusive)، مُبيِّنًا أنَّهما يُسمَّيان أيضًا الحادثين المنفصلين.
- أَرجِع إلى المثال الذي قدَّمته في بند (التهيئة)، ثم أسأل الطلبة:
  - » ماذا يُسمّى حادث ظهور عدد أقل من 3 وأكبر من 5؟ يُسمّى حادثًا مُركَّبًا.
  - » كيف يُكتَب هذا الحادث بالرموز؟ A and B، أو $A \cap B$.
- أُخبِر الطلبة أنَّه يمكن تسمية هذا الحادث برمز جديد مثل $E$، علمًا بأنَّ $E = A \cap B$.
- أُخبِر الطلبة أنَّ $A \cap B = \varnothing$؛ لأنَّه لا توجد عناصر مشتركة بين $A$ و$B$، وأنَّه يتعذَّر وقوع الحادثين معًا؛ لذا فهما حادثان متنافيان: $P(E) = P(A \cap B) = 0$.

## مثال 1

- أطلب إلى أحد الطلبة قراءة النصوص في فرعي المثال، ثم أُبيِّن لهم كيف يمكن تمييز الحادثين المتنافيين من الحادثين غير المتنافيين.
- أُناقِش الطلبة في حل هذا المثال.
- عند توضيح الفرع الأول، أذكر مثالًا حياتيًّا على نتائج بعض المباريات في كرة القدم من الدوري المحلي أو غيره.
- أستعين بحجر نرد حقيقي عند توضيح الفرع الثاني من المثال.

## تعزيز اللغة ودعمها:

أُكرِّر المصطلحات الرياضية المستخدمة في الدرس باللغتين العربية والإنجليزية، وأُحفِّز الطلبة على استعمالها، مثل: الحادث البسيط (simple event) والحادث المُركَّب (compound event)، والحادثين المتنافيين (mutually exclusive)، والحادث المتمم (complement event).

## التقويم التكويني:

- أطلب إلى الطلبة – ضمن مجموعات – حل التدريب في بند (**أتحقق من فهمي**) بعد كل مثال.
- أختار بعض الإجابات التي تحوي أخطاء مفاهيمية، ثم أُناقِشها على اللوح، ولا أذكر اسم الطالب الذي أخطأ في الإجابة؛ تجنبًا لإحراجه.

## التدريس:

- أُوضِّح للطلبة دلالة أداة الربط (و: and)، و(أو: or)، ورمز كلٍّ منهما: ∩ ، ∪ (على الترتيب).
- أُبيِّن للطلبة أنَّ ورود أدوات الربط في نص السؤال له دلالات مُحدَّدة. فمثلًا، ورود تركيب (على الأقل) في السؤال يدل على ∪، أو على أداة الربط (أو: or).
- أُوضِّح للطلبة التعميم الوارد في بند (مفهوم أساسي)، وأحرص على تقديمه بالكلمات والرموز؛ للإفادة من ذلك في عرض تمثيلات رياضية متكافئة للفكرة الواحدة.

---

**أتحقق من فهمي**

**أُحدِّدُ إذا كانَ الحادثانِ متنافييْنِ أمْ لا في ما يأتي، مُبرِّرًا إجابتي:** أنظر الهامش.

a) التجربةُ هيَ سحبُ بطاقةٍ واحدةٍ عشوائيًّا منْ سلَّةٍ فيها 5 بطاقاتٍ حمراءَ، وَ3 بطاقاتٍ خضراءَ. الحادثُ الأولُ سحبُ بطاقةٍ حمراءَ، والحادثُ الثاني سحبُ بطاقةٍ خضراءَ.

b) التجربةُ هيَ إلقاءُ حجرِ نردٍ منتظمٍ. الحادثُ الأوّلُ هوَ الحصولُ على عددٍ فرديٍّ والثاني هوَ الحصولُ على عددٍ زوجيٍّ.

تعرَّفْتُ سابقًا أنَّ تقاطعَ حادثيْنِ في تجربةٍ عشوائيةٍ يعني وقوعَهُما معًا، ويُستدَلُّ على ذلكَ منْ أداةِ الربطِ (وَ: and) أوْ الرمزِ (∩)، وأنَّ اتحادَ حادثيْنِ يعني وقوعَ أحدِهِما على الأقلِّ، ويُستدَلُّ على ذلكَ منْ أداةِ الربطِ (أوْ: or ) أوْ الرمزِ (∪). فإذا كانَ $(A)$ وَ $(B)$ حادثيْنِ متنافييْنِ، فإنَّ احتمالَ وقوعِهِما معًا $P(A\cap B)$ يساوي صفرًا، واحتمالَ وقوعِ أحدِهِما على الأقلِّ $P(A\cup B)$ يساوي مجموعَ احتمالَيْ وقوعِهِما.

**مفهومٌ أساسيٌّ** — **احتمالُ الحادثينِ المتنافييْنِ**

**بالكلماتِ:** إذا كانَ $(A)$ وَ $(B)$ حادثيْنِ متنافييْنِ في تجربةٍ عشوائيةٍ، فإنَّ احتمالَ وقوعِهِما معًا يساوي صفرًا، واحتمالَ وقوعِ أحدِهِما على الأقلِّ يساوي مجموعَ احتمالَيْ وقوعِهِما.

**بالرموزِ:** إذا كانَ $(A)$ وَ $(B)$ حادثيْنِ متنافييْنِ، فإنَّ:

$$P(A \text{ and } B) = P(A\cap B) = 0$$

$$P(A \text{ or } B) = P(A\cup B) = P(A) + P(B)$$

**أتعلَّمُ**

الحرفُ $(P)$ هوَ اختصارٌ لكلمةِ (Probability) التي تعني الاحتمالَ.

**مثال 2**

**إذا كانَ الحادثانِ $Z$ و $Y$ متنافييْنِ في تجربةٍ عشوائيّةٍ، وكانَ $P(Y) = 0.3$، و $P(Z) = 0.5$، فأجدُ كلًّا ممّا يأتي:**

1 $P(Y\cup Z)$

$P(Y\cup Z) = P(Y) + P(Z)$ صيغةُ احتمالِ اتّحادِ حادثيْنِ متنافيينِ

$P(Y\cup Z) = 0.3 + 0.5$ بالتعويضِ

$= 0.8$ بالتبسيطِ



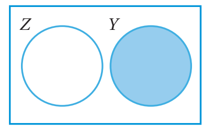
### إجابة سؤال بند (أتحقق من فهمي 1):

a) الحادثان متنافيان؛ لأنه لا يمكن سحب بطاقة لونها أحمر وأخضر في المرَّة الواحدة.

b) الحادثان متنافيان؛ لأن الأعداد الفردية على حجر النرد هي: 1، 3، 5، والأعداد الزوجية عليه هي: 2، 4، 6، ولا توجد عناصر مشتركة بين الحادثين.

**أتذكّر**
يعني الحادثُ $Y-Z$ وقوعَ الحادثِ $Y$ فقطْ، وعدمَ وقوعِ الحادثِ $Z$، ويمكنُ أيضًا التعبيرُ عنْهُ بالرمزِ $Y\cap\overline{Z}$

**2** $P(Y-Z)$




بمــا أنّ الحادثينِ $Z$ و $Y$ متنافيانِ، فــإنَّ $Y-Z$ يعني وقوعَ الحادثِ $Y$ فقطْ؛ لأنّهما لا يقعانِ معًا، كما يظهرُ في شــكلِ فن المجاور. إذنْ:

$$P(Y-Z) = P(Y) = 0.3$$

**3** $P(\overline{Y\cup Z})$

| | |
|---|---|
| احتمالُ المتممةِ | $P(\overline{Y\cup Z}) = 1 - P(Y\cup Z)$ |
| بالتعويضِ | $= 1 - 0.8$ |
| بالتبسيطِ | $= 0.2$ |

**أتذكّر**
احتمــالُ وقــوعِ متممةِ الحــادثِ $A$ هو 1 ناقصُ احتمالِ وقوعِ الحادثِ $A$.
$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

**أتحقق من فهمي**

**إذا كانَ الحادثانِ $A$ و $B$ متنافيينِ في تجربةٍ عشــوائيّةٍ، وكانَ $P(A)=\frac{1}{5}$، و $P(B)=\frac{1}{4}$، فأجدُ كلًّا ممّا يأتي:** أنظر ملحق الإجابات.

a) $P(A\cap B)$ b) $P(B\cap\overline{A})$ c) $P(\overline{A\cup B})$

أحتاجُ في بعضِ المســائلِ إلى تحديدِ ما إذا كانتْ حــوادثُ معيّنةٌ متنافيةٌ أمْ لا، وذلكَ لإيجادِ احتمالاتٍ مرتبطةٍ بها.

**أتذكّر**
لأيِّ تجربــةٍ عشــوائيةٍ، احتمالُ وقــوعِ الحادثِ البســيطِ $E$ يساوي عددَ عناصــرِ هــذا الحادثِ $n(E)$ مقســومًا علــى عددِ عناصرِ فضاءِ العيِّنةِ $n(\Omega)$؛ أيْ:
$P(E) = \frac{n(E)}{n(\Omega)}$

**مثال 3**

**في تجربةِ إلقاءِ حجرِ نردٍ منتظمٍ مرّةً واحدةً، أَجِدُ ما يأتي:**

**1** **احتمالُ ظهورِ العددِ 1، وظهورِ عددٍ زوجيٍّ.**

أفترضُ أنَّ $(A)$ هوَ حادثُ ظهورِ العددِ 1، وَ$(B)$ هوَ حادثُ ظهورِ عددٍ زوجيٍّ. إذنْ، $A=\{1\}, B=\{2, 4, 6\}$

بمــا أنَّ $\{1\}\cap\{2, 4, 6\}=\phi$، فإنَّ $(A)$ وَ$(B)$ حادثانِ متنافيانِ. إذنْ، احتمالُ وقوعِهما معًا هوَ صفرٌ. وبالرموزِ: $P(A \text{ and } B) = P(A\cap B) = 0$

**2** **احتمالُ ظهورِ العددِ 1، أوْ ظهورِ عددٍ زوجيٍّ.**

بما أنَّ $(A)$ وَ$(B)$ حادثانِ متنافيانِ، فــإنَّ احتمالَ وقوعِ $(A)$ أوْ $(B)$ (وقوعُ أحدِهما على الأقلِّ) يساوي مجموعَ احتماليْ وقوعِهما. وبالرموزِ:

| | |
|---|---|
| صيغةُ احتمالِ اتّحادِ حادثيْنِ متنافييْنِ | $P(A \text{ or } B) = P(A\cup B) = P(A) + P(B)$ |
| بإيجادِ احتمالاتِ كلٍّ منَ الحادثيْنِ، والتعويضِ | $= \frac{1}{6} + \frac{3}{6}$ |
| بالجمعِ، ثمَّ التبسيطِ | $= \frac{2}{3}$ |

**أتذكّر**
لأيِّ حادثٍ $(A)$ في فضــاءِ العيِّنةِ لتجربةٍ عشوائيةٍ ما $\Omega$، فإنَّ:
$0 \le P(A) \le 1$



## التدريس:

- أكتب على اللوح السؤال الآتي:
  - « فــي تجربة إلقاء حجر نرد منتظــم مرَّة واحدة، إذا كان $A$ حــادث ظهور العدد 5، فمــا احتمال عدم ظهور العدد 5؟
  - « أُمثِّل التجربة بشــكل فن، مُبيِّنًا للطلبة أنَّ مجموعة العناصر التي تقع خارج $A$ تنتمي إلى مجموعة تُسمّى متمــم الحــادث $A$ (complement event)، ويُرمَز إليها بالرمز $\overline{A}$، وأنَّ المطلوب في الســؤال أعلاه هو $P(\overline{A})$، وأنَّه باستعمال شكل فن فإنَّ:

$$P(\overline{A}) = \frac{n(\overline{A})}{n(\Omega)} = \frac{5}{6}$$

- أجد $1-P(A)$، ثم أسأل الطلبة:
  - « ماذا تلاحظون؟ تساوي ناتجي $P(\overline{A})$ و $1-P(A)$

## مثال 3

- أســتعين بحجر نرد حقيقي عند مناقشة الطلبة في حل فرعي هذا المثال.
- أكتــب الإجابة من اليســار إلــى اليميــن، وبالرموز الإنجليزية، ثم أقرأهــا، مُحفزًا الطلبة على عمل ذلك بصورة صحيحة.
- أُحفِّز الطلبــة على وضع خط - بقلــم ألوان- تحت النص الذي يدل على الحادث المراد إيجاد احتماله؛ لأنَّه يســاعدهم على التعبير عن الاحتمال المطلوب بالرموز، وإيجاد الاحتمال بصورة صحيحة.
- أُوجِّــه الطلبة إلى الحــرص دائمًا علــى كتابة الناتج النهائي في أبسط صورة.

### أتحقق من فهمي

**في تجربةِ اختيارِ عددٍ عشوائيًّا منْ بينِ الأعدادِ: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8، أَجِدُ:**

**a)** احتمالَ اختيارِ عددٍ أوليٍّ، ويقبلُ القسمةَ على 4

**b)** احتمالَ اختيارِ عددٍ أوليٍّ، أوْ عددٍ يقبلُ القسمةَ على 4

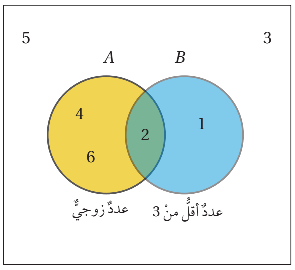
أنظر ملحق الإجابات.

**رموزٌ رياضيةٌ**

يُستعمَلُ الحرفُ اليونانيُّ $\Omega$ للدلالةِ على فضاءِ العيِّنةِ للتجربةِ العشوائيةِ، ويُقرَأُ: أوميجا.

لاحظْتُ في المثالِ 1 أنَّ حادثَي الحصولِ على عددٍ زوجيٍّ أوْ عددٍ أقلَّ منْ 3 عندَ إلقاءِ حجرِ نردٍ منتظم هما غيرُ متنافييْنِ؛ نظرًا إلى وجودِ عنصرٍ مشتركٍ بينَهُما، هوَ العددُ 2، وهذا العددُ زوجيٌّ، وأقلُّ منْ 3، فكيفُ أَجِدُ احتمالَ وقوعِ أحدِهِما على الأقلِّ؟

إذا كانَ $(A)$ حادثَ الحصولِ على عددٍ زوجيٍّ، وَ$(B)$ حادثَ الحصولِ على عددٍ أقلَّ منْ 3، في تجربةِ إلقاءِ حجرِ نردٍ منتظمٍ مرَّةً واحدةً، فإنَّهُ يُمكِنُ تمثيلُ هذيْنِ الحادثيْنِ باستعمالِ أشكالِ فِنْ كما يأتي:




عندَ حسابِ احتمالِ كلِّ حادثٍ على حِدَةٍ، أَجِدُ أنَّ:

$$P(A) = \frac{3}{6} \quad , \quad P(B) = \frac{2}{6}$$

عندَ إيجادِ احتمالِ وقوعِ أحدِ الحادثيْنِ على الأقلِّ، وجمعِ هذيْنِ الاحتماليْنِ، فإنَّ احتمالَ العددِ 2 سيتكرَّرُ؛ لأنَّهُ موجودٌ في الحادثيْنِ (موجودٌ في منطقةِ التقاطعِ بينَ الحادثيْنِ)، ولذلكَ يجبُ طرحُهُ منْ مجموعِ الاحتماليْنِ:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
$$= \frac{3}{6} + \frac{2}{6} - \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

134

## إرشادات:

- أحرص دائمًا على تقديم المفاهيم باستعمال تمثيلات رياضية مُتعدِّدة؛ ليتمكَّن معظم الطلبة من فهمها؛ ذلك أنَّهم يتفاوتون في طرائق تعلُّمهم؛ فمنهم البصري، ومنهم اللفظي، ومنهم غير ذلك.
- أستعمل صندوقًا يحوي بطاقات مرقمة من 1 إلى 15 لتمثيل التجربة في المثال الثالث بصورة حسية وواقعية.
- أكتب عناصر كلٍّ من الحادثين $M$ و$F$ في صورة مجموعات قبل تمثيلهما بشكل فن، مُبيِّنًا أنهما غير متنافيين؛ نظرًا إلى وجود عناصر مشتركة بينهما ضمن منطقة التقاطع.
- أطلب إلى الطلبة تمثيل حوادث التجارب العشوائية بشكل فن؛ لأنَّ ذلك يساعدهم على تحديد المطلوب، وإيجاد الاحتمال بصورة صحيحة.
- أُخبِر الطلبة أنَّه يمكن حساب احتمال وقوع أحد الحادثين على الأقل من شكل فن من دون استعمال القانون: $P(F \cup M)$.

### احتمالُ الحادثينِ غيرِ المتنافيينِ

**مفهومٌ أساسيٌّ**

**بالكلماتِ:** إذا كانَ $(A)$ وَ $(B)$ حادثَيْنِ غيرَ متنافيَيْنِ في تجربةٍ عشوائيةٍ، فإنَّ احتمالَ وقوعِ أحدِهِما على الأقلِّ يساوي مجموعَ احتمالَيْهِما مطروحًا منْهُ احتمالَ وقوعِ $(A)$ وَ$(B)$ معًا.

**بالرموزِ:** إذا كانَ $(A)$ وَ $(B)$ حادثَيْنِ غيرَ متنافيَيْنِ، فإنَّ:

$$P(A \text{ or } B) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

**مثال 4**

**يحتوي صندوقٌ على 15 بطاقةً مُرقَّمةً منْ 1 إلى 15، إذا سُحِبَتْ بطاقةٌ عشوائيًّا، فأَجِدُ احتمالَ الحادثَيْنِ الآتيَيْنِ:**

**1 أنْ يكونَ العددُ على البطاقةِ منْ مضاعفاتِ العددِ 3، ومنْ عواملِ العددِ 12**

أفترضُ أنَّ $(M)$ هوَ حادثُ اختيارِ عددٍ منْ مضاعفاتِ العددِ 3، وَ$(F)$ هوَ حادثُ اختيارِ عددٍ منْ عواملِ العددِ 12.

إذنْ $M = \{3, 6, 9, 12, 15\}, F = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$

أداةُ الوصلِ (وَ) في السؤالِ تشيرُ إلى أنَّ المطلوبَ هوَ تقاطعُ الحادثَيْنِ $(M)$ وَ$(F)$.

إذنْ $M \cap F = \{3, 6, 12\}$

$$P(M \text{ and } F) = P(M \cap F)$$
$$= \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$$

**2 أنْ يكونَ العددُ على البطاقةِ منْ مضاعفاتِ العددِ 3، أوْ منْ عواملِ العددِ 12**

أداةُ الوصلِ (أوْ) في السؤالِ تشيرُ إلى أنَّ المطلوبَ هوَ اتحادُ الحادثَيْنِ غيرِ المتنافيَيْنِ $(M)$ وَ$(F)$ اللذيْنِ سُمِّيا في الفرعِ السابقِ. وهذا يعني احتمالَ وقوعِ أحدِهِما على الأقلِّ (احتمالُ اتحادِهِما):

$$P(M \text{ or } F) = P(M \cup F) = P(M) + P(F) - P(M \cap F)$$
$$= \frac{5}{15} + \frac{6}{15} - \frac{3}{15} = \frac{8}{15}$$



## مثال 4

- قبل البدء بحل السؤال في هذا المثال، أَرجِع إلى الفرع الثاني من المثال الأول، وأُوضِّح للطلبة – باستعمال أشكال فن – كيف يظهر الحادثان، وسبب عَدِّهما حادثين غير متنافيين.
- أُوضِّح للطلبة التعميم الوارد في بند (مفهوم أساسي)، وأحرص على تقديمه بالكلمات والرموز.
- أُوضِّح للطلبة التعميم الوارد في بند (مفهوم أساسي)، بعد كتابته داخل إطار في إحدى زوايا اللوح العليا، وأحرص على تقديمه بالكلمات والرموز؛ للإفادة من ذلك في عرض تمثيلات رياضية متكافئة للفكرة الواحدة.

### ! أخطاء مفاهيمية:

قد يُخطِئ بعض الطلبة عند تحديد عناصر متمم الحادث $A$ مثلًا، فيكتبون العناصر خارج الحوادث المُمثَّلة بشكل فن، ويُهمِلون العناصر المكتوبة في الحادث $B$ خارج منطقة التقاطع (إنْ وُجِدت)؛ لذا أطلب إليهم تظليل المنطقة خارج الحادث $A$ وداخل فضاء العيِّنة $\Omega$؛ لمساعدتهم على تحديد عناصر متمم الحادث $A$ بسهولة.

## مثال 5

- أُناقِش الطلبة في العلاقة بين العمليات على المجموعات (التقاطع، الاتحاد، المتممة) وأهمية تطبيق قانوني ديمورغان عند حساب احتمالات حوادث مُركَّبة. مُوضِّحًا القانونين بذكر أمثلة عددية، وباستعمال أشكال فن.
- أطرح على الطلبة السؤال الآتي:

» إذا كانت $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$، وكانت $A = \{1, 3, 4, 6\}$، وكانت $B = \{2, 3, 4,\}$، فأكتب عناصر كلٍّ ممّا يأتي:

$\overline{A}$، و $\overline{B}$، و $\overline{A} \cap \overline{B}$، و $A \cup B$، و $A \cup B$، $A \cap B$، و $\overline{A \cup B}$، و $\overline{A \cap B}$. ماذا أُلاحِظ من ذلك؟

$\overline{A} = \{2, 5\}, \overline{B} = \{1, 5, 6\},$

$\overline{A} \cap \overline{B} = \{5\}, \overline{A} \cup \overline{B} = \{1, 2, 5, 6\}$

$A \cup B = \{1,2,3,4,6\}, \overline{A \cup B} = \{5\}$

$A \cap B = \{3, 4\}, \overline{A \cap B} = \{1, 2, 5, 6\}$

أُلاحِظ أنَّ $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$، وأنَّ $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

- أُشارِك الطلبة في حل السؤال، مُوظِّفًا العلاقة بين احتمال الحادث واحتمال متممته، ومستفيدًا من أشكال فن.

## 4 التدريب

- أطلب إلى الطلبة قراءة الأسئلة في بند (**أتدرب وأحل المسائل**)، ثم حل الأسئلة (11-1) ضمن مجموعات.
- أتجوَّل بين الطلبة مُرشِدًا، ومُساعِدًا، ومُوجِّهًا، وأُقدِّم لهم التغذية الراجعة.

### تنويع التعليم (التعلُّم بالأقران):

إذا واجه الطلبة من ذوي المستوى المتوسط أو دون المتوسط صعوبة في حل الأسئلة الواردة في بند (**أتدرب وأحل المسائل**)، فأُوزِّع طلبة الصف إلى مجموعات ثلاثية، تضم كلٌّ منها طالبًا من ذوي المستوى فوق المتوسط، وطالبين ممَّن واجهوا صعوبة في الحل، ثم أُقدِّم تغذية راجعة لهم.

---

### أتحقق من فهمي

في تجربةِ اختيارِ عددٍ عشوائيًّا منَ المجموعةِ: $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$، أَجِدُ:

a) احتمالَ اختيارِ عددٍ أوليٍّ، ومنْ عواملِ العددِ 10 — أنظر ملحق الإجابات.

b) احتمالَ اختيارِ عددٍ أوليٍّ، أوْ عددٍ منْ عواملِ العددِ 10

### مثال 5

إذا كانَ $A$ و $B$ حادثينِ في تجربةٍ عشوائيّةٍ، وكانَ $P(A) = 0.65, P(B) = 0.75,$ $P(A \cup B) = 0.85$، فأجِدُ كلًّا ممّا ياتي:

**1** $P(A \cap B)$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ صيغةُ احتمالِ اتّحادِ حادثينِ غيرِ متنافيينِ

$0.85 = 0.65 + 0.75 - P(A \cap B)$ بالتعويضِ

$0.85 = 1.4 - P(A \cap B)$ بالتبسيطِ

$P(A \cap B) = 0.55$ بحلّ المعادلةِ

**2** $P(\overline{A})$

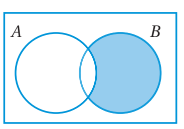
$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$ احتمالُ المتممةِ

$= 1 - 0.65$ بالتعويضِ

$= 0.35$ بالتبسيطِ

**3** $P(\overline{A} \cap B)$

إنَّ $\overline{A} \cap B$ يعني وقوعَ الحادثِ $B$ فقطْ، وعدمَ وقوعِ الحادثِ $A$ كما يظهرُ في شكلِ فن المجاورِ، ولإيجادِ احتمالِهِ أطرحُ احتمالَ تقاطعِ الحادثينِ $A$ و $B$ منِ احتمالِ الحادثِ $B$، إذنْ:




$P(\overline{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$ احتمالُ وقوعِ الحادثِ $B$ فقطْ

$= 0.75 - 0.55$ بالتعويضِ

$= 0.2$ بالتبسيطِ

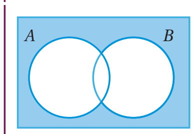
**4** $P(\overline{A} \cup B)$

$P(\overline{A} \cup B) = P(\overline{A}) + P(B) - P(\overline{A} \cap B)$ صيغةُ احتمالِ اتِّحاد حادثينِ غيرِ متنافيينِ

$= 0.35 + 0.75 - 0.2$ بالتعويضِ

$= 0.9$ بالتبسيطِ

5 $P(\bar{A} \cap \bar{B})$




إنَّ $\bar{A} \cap \bar{B}$ يعني متممةَ اتّحادِ الحادثيْنِ $A$ و $B$ كما يظهرُ في شكلِ فن المجاورِ، إذنْ:

$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\overline{A \cup B})$ احتمالُ تقاطعِ متممةِ حادثين

$= 1 - P(A \cup B)$ احتمالُ المتممةِ

$= 1 - 0.85$ بالتعويضِ

$= 0.15$ بالتبسيطِ

**أتحقق من فهمي**

إذا كانَ $A$ و $B$ حادثيْـنِ فـي تجربـةٍ عشـوائيّةٍ، وكان $P(A) = 0.5, P(B) = 0.3,$ $P(A \cap B) = 0.2$، فأجِدُ كلًّا ممّا يأتي: أنظر ملحق الإجابات.

a) $P(A \cup B)$ b) $P(\bar{B})$ c) $P(A - B)$

d) $P(A \cup \bar{B})$ e) $P(\bar{A} \cap \bar{B})$

**أتدرب وأحل المسائل**

أنظر الهامش.

**أُحدِّدُ إذا كانَ الحادثانِ متنافييْنِ أمْ لا لكلِّ تجربةٍ عشوائيةٍ في ما يأتي، مُبرِّرًا إجابتي:**

1 ظهورُ العددِ 3، أوْ ظهورُ عددٍ زوجيٍّ عندَ إلقاءِ حجرِ نردٍ منتظمٍ مرَّةً واحدةً.

2 ظهورُ أحدِ عواملِ العددِ 12، أوْ ظهورُ عددٍ أوليٍّ عندَ إلقاءِ حجرِ نردٍ منتظمٍ مرَّةً واحدةً.

3 ظهورُ عددَيْنِ مجموعُهُما 8 أوْ 12 عندَ إلقاءِ حجرَيْ نردٍ منتظمٍ مرَّةً واحدةً.

**في تجربةِ اختيارِ بطاقةٍ واحدةٍ عشوائيًّا منْ 20 بطاقةً مُتماثِلةً، كُتِبَ على كلٍّ منها عددٌ منْ 1 إلى 20، أجِدُ:**

4 احتمالَ اختيارِ عددٍ منْ مضاعفاتِ العددِ 7، ومنْ مضاعفاتِ العددِ 5 (4–7) أنظر ملحق الإجابات.

5 احتمالَ اختيارِ عددٍ منْ مضاعفاتِ العددِ 7، أوْ منْ مضاعفاتِ العددِ 5

6 احتمالَ اختيارِ عددٍ فرديٍّ، ويقبلُ القسمةَ على 4

7 احتمالَ اختيارِ عددٍ فرديٍّ، أوْ يقبلُ القسمةَ على 4

**إذا كانَ الحادثانِ $A$ و $B$ حادثيْنِ متنافييْنِ في تجربةٍ عشوائيّةٍ، وكانَ $P(A) = 0.4$، و $P(B) = 0.25$، فأجِدُ كلًّا ممّا يأتي:**

8 $P(A \cap B)$ 9 $P(A \cup B)$ 10 $P(\overline{A \cup B})$ 11 $P(A - B)$

(8–11) أنظر ملحق الإجابات.

137

## مهارات التفكير العليا

- أُوجِّه الطلبة –ضمن مجموعات ثنائية غير متجانسة– إلى حل المسـائل في بند (**مهـارات التفكير العليا**)، وأُذكِّر كل مجموعة بكتابة مُبرِّر للإجابة التي يتوصَّلون إليهـا، وأمنح طلبة الصـف وقتًا كافيًا لنقـد مُبرِّرات زملائهم.

## الواجب المنزلي:

- أطلب إلى الطلبة أنْ يحلوا في البيت جميع المسـائل الـواردة في الصفحة التاسـعة والعشـرين من كتاب التمارين، مُحدِّدًا لهم المسـائل التـي يمكنهم حلها في نهاية كل حصة بحسـب ما يُقدَّم من أمثلة الدرس وأفكاره.
- في اليوم التالي، أَطَّلِع على حلول الطلبة، وأُناقِشـهـم في أيِّ صعوبات واجهوها في أثناء الحل.

**إجابات أسئلة بند (أتدرب وأحل المسائل):**

1) الحادثان متنافيان؛ لأنه لا توجد عناصر مشتركة بينهما.

2) الحادثان غير متنافيين؛ لأن 2 و 3 عناصر مشتركة بينهما.

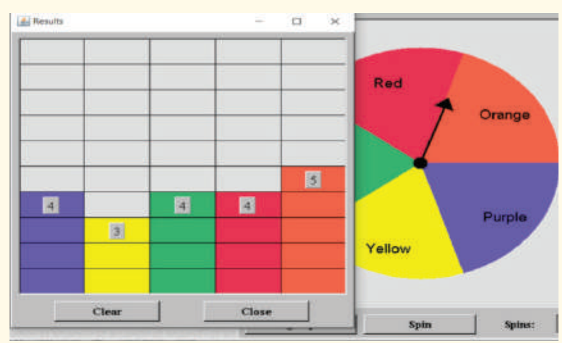
3) الحادثان متنافيان؛ لأنه لا توجد عناصر مشتركة بينهما.

## 5 الإثراء

- يحوي الموقع الإلكتروني:

http://nlvm.usu.edu/en/nav/vlibrary.html

أداة تفاعلية على شكل قرص مُتعدِّد الألوان، ومُؤشِّرًا وقطاعات ملونة، ويمكن تدويره بالضغط على زر (Spin) من المرّات، ثم عرض سجل يحوي نتائج : n تدوير المُؤشِّر في صورة تمثيل بياني بالأعمدة، بالضغط على زر (Record Results)، ثم إيجاد احتمالات الحوادث نظريًا (مثل احتمال توقُّف المُؤشِّر على اللون الأحمر)، ومقارنة الاحتمال النظري بالاحتمال التجريبي كما يظهر في الصورتين الآتيتين.


تشير الصورة الأُخرى أعلاه إلى نتائج تدوير المُؤشِّر 20 مرَّة.

- أُوجِّه الطلبة إلى تصفُّح هذا الموقع بإشرافي، مُبيِّنًا لهم كيفية استعمال الأداة فيه، ومُذكِّرًا إيّاهم بمفهوم الاحتمال التجريبي.
- أُخبِر الطلبة أنَّ الأداة تتيح أيضًا التحكُّم في عدد القطاعات وألوانها بالضغط على خيار (Change Spinner).

### تعليمات المشروع:

- أطلب إلى الطلبة البدء بتنفيذ الخطوة (6) من خطوات المشروع.
- أُتابِع أفراد المجموعات في أثناء تنفيذ مشروع الوحدة، وأُزوِّدهم بتغذية راجعة وإرشادات لتحسينه.

مجموعةٌ منَ الكراتِ المُتماثِلةِ، مُرقَّمةٌ منْ 1 إلى 21، وموضوعةٌ داخلَ صندوقٍ. إذا اختيرَتْ كرةٌ منَ الصندوقِ عشوائيًّا، فأَجِدُ كلًّا ممّا يأتي:

(12–15) أنظر ملحق الإجابات.

12 احتمالَ أنْ تحملَ الكرةُ عددًا زوجيًّا.

13 احتمالَ أنْ تحملَ الكرةُ عددًا منْ مضاعفاتِ العددِ 3

14 احتمالَ أنْ تحملَ الكرةُ عددًا زوجيًّا، ومنْ مضاعفاتِ العددِ 3

15 احتمالَ أنْ تحملَ الكرةُ عددًا زوجيًّا، أوْ منْ مضاعفاتِ العددِ 3

إذا كانَ $A$ و $B$ حادثينِ في تجربةٍ عشوائيّةٍ، وكانَ $P(A) = 0.3, P(B) = 0.5, P(A\cap B) = 0.15$، فأجدُ كلًّا ممّا يأتي:

16 $P(A\cup B)$ 17 $P(\overline{A})$ 18 $P(B-A)$ 19 $P(A\cup \overline{B})$ 20 $P(\overline{A}\cup \overline{B})$

(16–24) أنظر ملحق الإجابات.

**رياضةٌ:** سُئِلَ 60 رياضيًّا إذا كانوا يمارسونَ لعبةَ كرةِ القدمِ أوْ كرةِ السلَّةِ، وقدْ توزَّعوا وَفقَ إجاباتِهِمْ كما في الجدولِ الآتي:

| | عدمُ ممارسةِ أيٍّ منَ اللعبتيْنِ | كرةُ السلَّةِ فقطْ | كرةُ القدمِ فقطْ | كرةُ القدمِ، وكرةُ السلَّةِ |
|---|---|---|---|---|
| عددُ الرياضيينَ | 10 | 8 | 30 | 12 |

إذا اختيرَ رياضيٌّ منْهُمْ عشوائيًّا، فأجدُ كلًّا ممّا يأتي:

21 احتمالِ أنْ يكونَ ممَّنْ يمارسونَ لعبتَيْ كرةِ القدمِ وكرةِ السلَّةِ.

22 احتمالِ أنْ يكونَ ممَّنْ يمارسونَ لعبةَ كرةِ القدمِ، ولا يمارسونَ لعبةَ كرةِ السلَّةِ.

23 احتمالِ أنْ يكونَ ممَّنْ يمارسونَ لعبةَ كرةِ السلَّةِ، ولا يمارسونَ لعبةَ كرةِ القدمِ.

24 احتمالِ أنْ يكونَ ممَّنْ لا يمارسونَ لعبةَ كرةِ القدمِ، ولا يمارسونَ لعبةَ كرةِ السلَّةِ.

25 **تجارةٌ:** أَحُلُّ المسألةَ الواردةَ في بدايةِ الدرسِ. 80%

### مهارات التفكير العليا

(26–30) أنظر ملحق الإجابات.

**تَحَدٍّ:** إذا كانَ $R$ و $S$ حادثينِ في تجربةٍ عشوائيّةٍ، وكانَ $P(R) = P(S) = 3P(R\cap S), P(R\cup S) = 0.75$، فأجدُ كلًّا ممّا يأتي:

26 $P(R\cap S)$ 27 $P(R)$ 28 $P(\overline{S})$ 29 $P(\overline{R}\cap \overline{S})$

30 **تبريرٌ:** قالَ هاني: إنَّ احتمالَ فوزِ فريقِهِ المُفضَّلِ هوَ 0.3، فردَّ عليْهِ يزيدُ قائلًا: إذنْ، احتمالُ خسارةِ الفريقِ هوَ 0.7، هلْ قولُ يزيدَ صحيحٌ؟ أُبرِّرُ إجابتي.

31 **مسألةٌ مفتوحةٌ:** أَصِفُ موقفيْنِ منْ حياتي اليوميةِ، أحدُهُما يتضمَّنُ حادثيْنِ متنافييْنِ، والآخرُ يتضمَّنُ حادثيْنِ غيرَ متنافييْنِ، مُبيِّنًا كيفَ حدَّدْتُ ذلكَ. ستتنوع الإجابات. أنظر إجابات الطلبة، ثم أحكم عليها.



## 6 الختام

- أطلب إلى الطلبة –في نهاية الدرس– تلخيص ما تعلَّموه بعباراتهم الخاصة، ثم أستمع لبعض ما كتبوه.
- أطلب إلى كل طالب اختيار موضوع أو فكرة من الدرس أتقنها، وكتابة سؤال عنها في ورقة تحمل اسمه، أو اختيار موضوع أو فكرة تحتاج إلى مزيد من التمرين لإتقانها، وكتابة سؤال عنها، ثم تسليمي الورقة.
- أَطّلِع على الأوراق، ثم أُخطِّط لمعالجة جوانب الضعف التي رصدتها في أوراق الطلبة.

الدرسُ 5

# احتمالاتُ الحوادثِ المستقلةِ والحوادثِ غيرِ المستقلة
**Probability of Independent and Dependent Events**

**فكرةُ الدرسِ** تمييزُ الحوادثِ المستقلةِ منَ الحوادثِ غيرِ المستقلةِ، وحسابُ احتمالاتِها.

**المصطلحاتُ** الحوادثُ المستقلةُ، الحوادثُ غيرُ المستقلةِ، الاحتمالُ المشروطُ، جداولُ الاتجاهينِ.

**مسألةُ اليومِ** تحتوي السنةُ على 365 يومًا؛ لذا، فإنَّ احتمالَ أنْ يكونَ الأولُ منْ شهرِ أيلولَ يومَ ميلادِ شخصٍ هوَ $\frac{1}{365}$ تقريبًا. إذا اختيرَ شخصانِ عشوائيًّا، فما احتمالُ أنْ يكونَ يومُ ميلادِ كليهِما الأولِ منْ شهرِ أيلولَ؟

لأيِّ تجربةٍ عشوائيةٍ، يكونُ الحادثانِ $(A)$ وَ $(B)$ مستقلَّيْنِ (independent) إذا كانَ وقوعُ أحدِهِما (أوْ عدمُ وقوعِهِ) لا يُؤثِّرُ في احتمالِ وقوعِ (أوْ عدمِ وقوعِ) الآخرِ.

**مفهومٌ أساسيٌّ** — **احتمالُ الحادثينِ المستقلّينِ**

**بالكلماتِ:** إذا كانَ $(A)$ وَ $(B)$ حادثيْنِ مستقليْنِ في تجربةٍ عشوائيةٍ، فإنَّ احتمالَ وقوعِهِما معًا هوَ حاصلُ ضربِ احتمالِ وقوعِ كلٍّ منْهُما.

**بالرموزِ:** إذا كانَ $(A)$ وَ $(B)$ حادثيْنِ مستقليْنِ، فإنَّ:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

**أتعلَّمُ**
تُستعمَلُ عمليةُ الضربِ عندَ حسابِ احتمالاتِ الحوادثِ التي تقعُ تباعًا. يُمكِنُ تعميمُ قانونِ حسابِ احتمالِ وقوعِ حادثيْنِ مستقليْنِ معًا لأكثرَ منْ حادثيْنِ مستقليْنِ.

**مثال 1**

**في تجربةِ إلقاءِ حجرِ نردٍ وقطعةِ نقدٍ منتظميْنِ عشوائيًّا معًا مرَّةً واحدةً، أَجِدُ احتمالَ ظهورِ العددِ 6 على حجرِ النردِ والصورةِ على قطعةِ النقدِ.**

أفترضُ أنَّ $(A)$ هوَ حادثُ ظهورِ العددِ 6 على حجرِ النردِ، وَ$(B)$ هوَ حادثُ ظهورِ الصورةِ على قطعةِ النقدِ. أُلاحِظُ أنَّ وقوعَ الحادثِ $(A)$ أوْ عدمَ وقوعِهِ لا يُؤثِّرُ في وقوعِ الحادثِ $(B)$ أوْ عدمِ وقوعِهِ. إذنْ، $(A)$ وَ $(B)$ حادثانِ مستقلانِ، وإنَّ:

$$P(A \text{ and } B) = P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$
$$= \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$$



الدرس 5

## نتاجات الدرس

- تحديد إذا كان الحادثان مستقلين أو غير مستقلين.
- إيجاد احتمالات حوادث مستقلة وحوادث غير مستقلة ضمن مواقف حياتية متنوعة.
- تمثيل التجارب العشوائية بالشجرة الاحتمالية، واستعمالها لإيجاد الاحتمالات.
- إيجاد احتمالات الحوادث المشروطة ضمن مواقف حياتية متنوعة.

## التعلُّم القبلي:

- كتابة عناصر الحوادث البسيطة وعناصر فضاء العيِّنة في تجربة عشوائية.
- إيجاد احتمالات الحوادث البسيطة والحوادث المُركَّبة.

## 1 التهيئة

- أُذكِّر الطلبة بمفهوم الحادث ومفهوم فضاء العيِّنة في تجربة عشوائية.
- أُذكِّر الطلبة بمفهوم الحادثين المتنافيين، ومفهوم الحادثين غير المتنافيين.
- أُحضِر حجر نرد وقطعة نقد، ثم أُلقيهما معًا على سطح الطاولة، ثم أسأل الطلبة عن احتمال ظهور العدد 5 على حجر النرد، واحتمال ظهور الصورة على قطعة النقد.
- أسأل الطلبة:
  - » هل يتأثَّر احتمال ظهور العدد 5 على حجر النرد بظهور الصورة على قطعة النقد؟ لا.
  - » هل يتأثَّر احتمال ظهور الكتابة على قطعة النقد بظهور العدد 5 على حجر النرد؟ لا.
  - » أَصِف هذين الحادثين. أستمع لإجابات الطلبة من دون تقديم تغذية راجعة لها.

## 2 الاستكشاف

- أُوجِّه الطلبة إلى قراءة المسألة في بند (**مسألة اليوم**)، ثم أسألهم:
  » ما الحادث الأول في هذا الموقف؟ أنْ يكون الأول من شهر أيلول هو يوم ميلاد شخص ما.
  » ما الحادث الثاني في هذا الموقف؟ أنْ يكون الأول من شهر أيلول هو يوم ميلاد شخص آخر.
  » ما عدد الأشخاص الذين سنختار الشخصين من بينهم؟ غير مُحدَّد في هذا الموقف.
  » هل يتأثَّر الاحتمال بعدد الأشخاص الذين سنختار الشخصين من بينهم؟ لا.
- أستمع لبعض إجابات الطلبة من دون تقديم تغذية راجعة لها.

## 3 التدريس

- أُوضِّح للطلبة مفهوم الحادثين المستقلين (Independent)، مُبيِّنًا أنَّ احتمال وقوع أيٍّ منهما لا يُؤثِّر في وقوع الحادث الآخر، أو عدم وقوعه، ولا يتأثَّر بذلك.
- أَرجِع إلى المثال الذي قدَّمته في بند (التهيئة)، ثم أسأل الطلبة:
  » هل يمكن القول إنَّ الحادثين مستقلان وَفق هذا المفهوم؟ نعم.
  » كيف نجد احتمال وقوع حادثين مستقلين معًا؟ أستمع لبعض إجابات الطلبة، ثم أَلفِت انتباههم إلى ما ورد في بند (مفهوم أساسي).

### مثال 1

- أُناقِش الطلبة في حل هذا المثال، مُبيِّنًا أن الحادثين مستقلان، وكيف يُكتَب المطلوب بالرموز.
- لتوضيح أن الحادثين مستقلان، أستعمل حجر نرد وقطعة نقد، وأُلقِهما مرّات عِدَّة على سطح الطاولة.

### تعزيز اللغة ودعمها:

أُكرِّر المصطلحات الرياضية المستخدمة في الدرس باللغتين العربية والإنجليزية، وأُحفِّز الطلبة على استعمالها، مثل: الحادثين المستقلين (independent events)، والحادثين غير المستقلين (dependent events)، والاحتمال المشروط (conditional probability)، وجداول الاتجاهين (two – way tables).

### التقويم التكويني:

- أطلب إلى الطلبة حل التدريب في بند (**أتحقق من فهمي**) بعد كل مثال.
- أختار بعض الإجابات التي تحوي أخطاء مفاهيمية، ثم أُناقِشها على اللوح، ولا أذكر اسم الطالب الذي أخطأ في الإجابة؛ تجنبًا لإحراجه.

ملاحظات المُعلِّم/ المُعلِّمة

**أتحقق من فهمي**

في تجربةِ إلقاءِ حجرَيْ نردٍ منتظميْنِ عشـــوائيًّا معًا مـــرَّةً واحدةً، أَجِدُ احتمالَ ظهورِ عددٍ فرديٍّ على حجرِ النردِ الأولِ وعددٍ أكبرَ منْ 4 على حجرِ النردِ الثاني. أنظر ملحق الإجابات.

لأيِّ تجربةٍ عشـــوائيةٍ، يكونُ الحادثانِ $(A)$ وَ $(B)$ **غيرَ مستقلّيْنِ** (dependent) إذا أثَّرَ وقوعُ أحدِهِما في احتمالِ وقوعِ الآخرِ.

**مثال 2**

يُستعملُ علمُ الاحتمالاتِ فـي الـذكاءِ الاصطناعيِّ، وهـي الأنظمـةُ أو الأجهزةُ التي تحاكي الذكاءَ البشـريَّ ويمكنُها أنْ تطوّرَ منْ قدراتِها ذاتيًّا استنادًا إلى المعلوماتِ التي تجمعُها.

**أُحَدِّدُ إذا كانَ الحادثانِ مستقلّيْنِ أمْ لا في الحالاتِ الآتيةِ:**

1 **سحبُ كرتيْنِ على التوالي عشوائيًّا منْ كيسٍ فيهِ كراتٌ مُتماثِلةٌ مختلفةُ الألوانِ، علمًا بأنَّ سحبَ الكرةِ الثانيةِ كانَ بعدَ إرجاعِ الكرةِ الأولى إلى الكيسِ.**

إرجاعُ الكرةِ المسحوبةِ أولًا إلى الكيسِ يعني أنَّهُ يُمكِنُ إعادةُ سحبِها، أوْ سحبُ غيرِها، فتكونُ فرصُ سـحبِها وغيرِها منَ الكراتِ متكافئةً؛ أيْ إنَّ نتيجةَ سحبِها لا تُؤثِّرُ في نتيجةِ سحبِ أيِّ كرةٍ أُخرى؛ فالحادثانِ مستقلانِ.

2 **سحبُ كرتيْنِ على التوالي عشوائيًّا منْ كيسٍ فيهِ كراتٌ مُتماثِلةٌ، وعدمِ إرجاعِ أيٍّ منْهُما إلى الكيسِ.**

عدمُ إرجاعِ الكرةِ المسحوبةِ أولًا إلى الكيسِ يعني نقصَ عددِ الكراتِ المُتبقِّيةِ فيهِ، وهذا يعني أنَّ احتمالَ سحبِ الكرةِ الثانيةِ سيتأثَّرُ بنتيجةِ الكرةِ المسحوبةِ أولًا؛ فالحادثانِ غيرُ مستقلَّيْنِ.

3 **سحبُ كرةٍ عشوائيًّا منْ كيسٍ فيهِ كراتٌ مُتماثِلةٌ حمراءُ وصفراءُ، ثمَّ سحبُ كرةٍ عشوائيًّا منْ كيسٍ آخرَ فيهِ كراتٌ مُتماثِلةٌ حمراءُ وصفراءُ.**

نتيجةُ سـحبِ الكرةِ منَ الكيسِ الأولِ لا تُؤثِّرُ في نتيجةِ سـحبِ كرةٍ منَ الكيسِ الثاني؛ فالحادثانِ مستقلانِ.

**أتحقق من فهمي**

**أُحَدِّدُ إذا كانَ الحادثانِ مستقلّيْنِ أمْ لا في الحالاتِ الآتيةِ:**

a) اختيارُ قطعةِ حلوى حمراءَ عشوائيًّا وأكلُها، ثمَّ اختيارُ قطعةِ حلوى حمراءَ أُخرى عشوائيًّا منْ كيسٍ يحوي 10 قطعِ حلوى حمراءَ وَ25 قطعةَ حلوى زرقاءَ، جميعُها مُتماثِلةٌ. غير مستقلين.

b) ظهورُ العددِ 5 على حجرَيْ نردٍ أُلقِيا معًا مرَّةً واحدةً عشوائيًّا. مستقلان.

c) سـحبُ كرةٍ حمراءَ عشـوائيًّا منْ كيسٍ فيهِ كراتٌ مُتماثِلةٌ، 4 منها حمـراءُ وَ 3 صفراءُ، ثمَّ إعادتُها إلى الكيسِ، ثمَّ سحبُ كرةٍ حمراءَ أُخرى عشوائيًّا. مستقلان.



## التدريس:

- أُوضِّح للطلبة مفهوم الحادثين غير المستقلين، مُستعمِلًا صندوقًا فيه كرتان لونهما أبيض، وكرتان لونهما أسود، وأسحب الكرة الأولى (لتكن بيضاء)، ثم أسألهم:

» ما قيمة الاحتمال؟ $\frac{1}{2}$

- أضع الكرة البيضاء المسحوبة خارج الصندوق، ثم أعرض محتوى الصندوق أمام الطلبة، مُبيِّنًا أنَّ احتمال سحب كرة ثانية بيضاء أو كرة ثانية سوداء يتأثَّر بنتيجة السحب الأول (ما لم تُرجَع الكرة الأولى المسحوبة إلى الصندوق)؛ ما يعني أنَّ الحادثين (سحب كرة أولى بيضاء) و(سحب كرة ثانية بيضاء) من دون إرجاع الكرة الأولى إلى الصندوق، هما غير مستقلين. بعد ذلك أُوضِّح لهم كيف ينقص عدد عناصر فضاء العيِّنة في هذه التجربة.
- أسأل الطلبة:

» ما احتمال سحب كرة ثانية بيضاء في هذه الحالة؟ $\frac{1}{3}$

## مثال 2

- أستعمل صندوقًا يحوي كرات متماثلة ملونة أو بطاقات ملونة عند مناقشة الطلبة في حل فروع هذا المثال.
- أُبرِّر الإجابة للفروع الثلاثة في هذا المثال.
- أسأل الطلبة عن عدد الكرات المتبقية في الصندوق بعد السحب الأول في حالتي السحب من دون إرجاع، والسحب مع الإرجاع، مُبيِّنًا أنَّ السحب مع الإرجاع يؤدي إلى حوادث مستقلة، وأنَّ السحب من دون إرجاع يؤدي إلى حوادث غير مستقلة.

### إرشاد:

أثبتت عديد من الدراسات التربوية أنَّ تقريب المفاهيم المُجرَّدة عن طريق التمثيلات الحسية يساعد الطلبة على استيعاب هذه المفاهيم بفاعلية أكثر من تقديمها بصورة مُجرَّدة فقط.

## مثال 3

- أســتعمل صندوقًا يحوي كرات أو قصاصات ورقية ملونة عند مناقشة الطلبة في حل هذا المثال.
- أُبرِّر الإجابة للفروع الثلاثة في هذا المثال.
- عند مناقشــة الطلبة في حــل الفرع الثالــث من هذا المثال، أُخبِرهم أنَّ الســؤال قد يتألَّــف من عبارات عديدة جميعها متكافئة من حيث المعنى (أو المطلوب إيجاده)، كما ورد في هامش لغة الرياضيات.
- أُوضِّح للطلبة التعميم الوارد في بند (مفهوم أساسي).

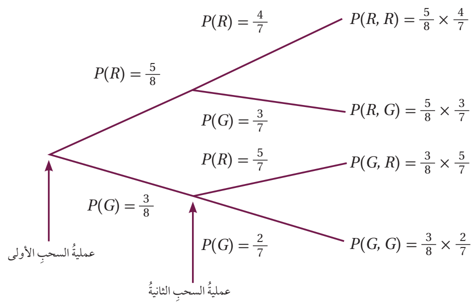


يساعدُ استعمالُ الشجرةِ الاحتماليةِ على حسابِ احتمالاتِ الحوادثِ المستقلةِ وغيرِ المستقلةِ.

### مثال 3

**يحتوي كيسٌ على 5 كراتٍ حمراءَ ($R$)، وَ3 كراتٍ خضراءَ ($G$)، جميعُها مُتماثِلةٌ. سُحِبَتْ كرةٌ منَ الكيسِ عشوائيًّا، ثمَّ كُتِبَ لونُها منْ دونِ إرجاعِها إلى الكيسِ، ثمَّ سُحِبَتْ كرةٌ أُخرى عشوائيًّا، ثمَّ كُتِبَ لونُها. أَجِدُ احتمالَ كلٍّ منَ الحوادثِ التاليةِ باستعمالِ الشجرةِ الاحتماليةِ:**

أُلاحِظُ منَ التمثيلِ بالشجرةِ الاحتماليةِ الآتي كيفَ تتأثَّرُ عمليةُ السحبِ الثانيةُ بنتيجةِ عمليةِ السحبِ الأولى عندَ عدمِ إرجاعِ الكرةِ المسحوبةِ:




**1** **سحبُ كرتيْنِ خضراويْنِ.**

$$P(G \cap G) = \frac{3}{8} \times \frac{2}{7} = \frac{3}{28}$$

بعدَ عمليةِ السحبِ الأولى يقلُّ عددُ الكراتِ في الكيسِ بمقدارِ كرةٍ خضراءَ

**2** **سحبُ كرةٍ خضراءَ في المرَّةِ الأولى وكرةٍ حمراءَ في المرَّةِ الثانيةِ.**

$$P(G \cap R) = \frac{3}{8} \times \frac{5}{7} = \frac{15}{56}$$

يُمكِنُ الحصولُ على هذهِ النتيجةِ في حالةٍ واحدةٍ فقطْ منَ الحالاتِ الأربعِ التي تظهرُ في الشجرةِ الاحتماليةِ

**3** **سحبُ كرتيْنِ، إحداهُما خضراءُ، والأُخرى حمراءُ.**

$$P(R \cap G) + P(G \cap R) = \frac{5}{8}\times\frac{3}{7} + \frac{3}{8}\times\frac{5}{7} = \frac{15}{28}$$

يُمكِنُ الحصولُ على هذهِ النتيجةِ في حالتيْنِ، هما: الكرةُ الأولى حمراءُ، والثانيةُ خضراءُ، أوِ الكرةُ الأولى خضراءُ، والثانيةُ حمراءُ

**لغةُ الرياضياتِ**

العباراتُ الآتيةُ متكافئةٌ:
- سحبُ كرتيْنِ، إحداهُما خضراءُ، والأُخرى حمراءُ.
- سحبُ كرتيْنِ مختلفتَيِ اللونِ.
- سحبُ كرتيْنِ، إحداهُما حمراءُ، والأُخرى خضراءُ.
- سحبُ كرةٍ منْ كلِّ لونٍ.

### أتحقق من فهمي

**يحتوي كيسٌ على 6 قطعِ حلوى حمراءَ ($R$)، وَ8 قطعِ حلوى خضراءَ ($G$)، جميعُها مُتماثِلةٌ. اختارَ طفلٌ منَ الكيسِ قطعةَ حلوى عشوائيًّا وأكلَها، ثمَّ اختارَ قطعةً أُخرى عشوائيًّا ليأكلَها. أَجِدُ احتمالَ كلٍّ منَ الحادثيْنِ الآتييْنِ باستعمالِ الشجرةِ الاحتماليةِ:**

a) اختيارُ الطفلِ قطعتَيْ حلوى مُتماثِلتَيِ اللونِ. أنظر ملحق الإجابات.

b) اختيارُ الطفلِ قطعتَيْ حلوى مختلفتَيِ اللونِ. أنظر ملحق الإجابات.

أُلاحِظُ في المثالِ السابقِ أنَّ احتمالَ سحبِ كرةٍ خضراءَ في المرَّةِ الأولى وكرةٍ حمراءَ في المرَّةِ الثانيةِ يساوي احتمالَ سحبِ كرةٍ خضراءَ في المرَّةِ الأولى مضروبًا في احتمالِ سحبِ كرةٍ حمراءَ في المرَّةِ الثانيةِ، علمًا بأنَّ كرةً خضراءَ سُحِبَتْ في المرَّةِ الأولى.

### مفهومٌ أساسيٌّ

#### احتمالُ الحادثينِ غيرِ المستقلّينِ

**بالكلماتِ:** احتمالُ وقوعِ حادثيْنِ غيرِ مستقليْنِ معًا يساوي احتمالَ وقوعِ الحادثِ الأولِ مضروبًا في احتمالِ وقوعِ الحادثِ الثاني بعدَ وقوعِ الحادثِ الأولِ.

**بالرموزِ:** إذا كانَ ($A$) وَ ($B$) حادثيْنِ غيرَ مستقليْنِ في تجربةٍ عشوائيةٍ ما، فإنَّ:

$$P(A \text{ and } B) = P(A) \times P(B \mid A)$$

يُقرَأُ الرمزُ $P(B \mid A)$: احتمالُ وقوعِ الحادثِ ($B$) شرطَ وقوعِ الحادثِ ($A$)؛ لذا يُسمّى **الاحتمالَ المشروطَ** (conditional probability)، ويُمكِنُ إيجادُهُ باستعمالِ الصيغةِ الآتيةِ:

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}, \; P(A) \neq 0$$

### مثال 4

**أُلقِيَ حجرُ نردٍ منتظمٌ عشوائيًّا مرَّةً واحدةً. ما احتمالُ ظهورِ العددِ 6 إذا كانَ العددُ الظاهرُ زوجيًّا؟**

في هذهِ التجربةِ العشوائيةِ، فضاءُ العيِّنةِ هوَ: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

إذا كانَ ($A$) هوَ حادثَ ظهورِ العددِ 6، وَ($B$) هوَ حادثَ ظهورِ عددٍ زوجيٍّ، فإنَّ:

$$A = \{6\}, B = \{2, 4, 6\} \rightarrow A \cap B = \{6\}$$



## إرشادات:

- أُوضِّح للطلبة أنَّ رمز الشرط ( | ) يُقرَأ: بشرط وقوع الحادث، أو يُقرَأ: علمًا بأنَّ الحادث قد وقع.
- أُساعِد الطلبة على التمييز في القراءة بين $P(A \mid B)$ و $P(B \mid A)$، مُبيِّنًا لهم الحادث الذي وقع أولًا في كل حالة.

## التدريس:

- أكتب في إطار عند الزاوية اليسرى العليا من اللوح صيغة الاحتمال المشروط.
- أُناقِش الطلبة في حل المثال الرابع، مُستعمِلًا حجر نرد لتوضيح عناصر الفرضيات المعطاة، ثم أكتب المطلوب بالرموز.
- عند التعويض في صيغة الاحتمال المشروط، أُوضِّح للطلبة كيفية تبسيط قسمة كسر على كسر، بتحويل القسمة إلى ضرب، وقلب الكسر المقسوم عليه، وعمل الاختصارات اللازمة لكتابة الكسر الناتج في أبسط صورة.

## أخطاء مفاهيمية:

قد يُخطِئ بعض الطلبة عند قسمة كسر على كسر، بعمل اختصارات بين بسط الكسر العلوي ومقام الكسر السفلي، أو بين مقام الكسر العلوي وبسط الكسر السفلي؛ لذا أُخبِرهم أنَّ الاختصار يجب أنْ يقتصر على البسط مع البسط، والمقام مع المقام، ثم أُبيِّن لهم صحة هذا الإجراء بتحويل القسمة إلى ضرب، وقلب المقسوم عليه، ثم الاختصار أو الضرب.

## مثال 5: من الحياة

- أُوضِّح للطلبة المقصود بجداول الاتجاهين، برسم شكل الجدول على اللوح، مُبيِّنًا أنَّ هذه الجداول تُستعمَل لعرض مجموعتين من البيانات تجمعهما بعض الخصائص.
- أُناقِش الطلبة في حل هذا المثال، مُوضِّحًا المطلوب بالرموز.
- أُسمّي الحوادث برموز مناسبة.
- أُوضِّح للطلبة كيف يُتوصَّل إلى الناتج النهائي للمطلوب بالعودة إلى الجدول، وتظليل خانة العدد 8، وخانة العدد 129، وبيان دلالة كلٍّ منهما؛ إذ يدل العدد 8 على الحالات (عناصر العيِّنة) في مجموعة التقاطع، ويدل العدد 129 على حالات الحادث الذي يلي رمز الشرط ( | ).
- أكتب مُبرِّرات لخطوات الحل، وأُحفِّز الطلبة على عمل ذلك.



$P(A \mid B)$ تعني احتمالَ ظهورِ العددِ 6 إذا كانَ العددُ الظاهرُ زوجيًّا:

الاحتمالُ المشروطُ $P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

بالتبسيطِ $= \frac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{6}} = \frac{1}{3}$

**أتحقق من فهمي**

**أُلقِيَ حجرُ نردٍ منتظمٌ عشوائيًّا مرَّةً واحدةً. ما احتمالُ ظهورِ عددٍ أكبرَ منْ 3 إذا كانَ العددُ الظاهرُ زوجيًّا؟** انظر ملحق الإجابات.

في كثيرٍ منَ الأحيانِ، تعرضُ البياناتُ لفئتيْنِ منَ الأشياءِ باستعمالِ ما يُسمّى **جداولَ الاتجاهيْنِ** (two–ways tables)، وهيَ جداولُ تتيحُ إيجادَ الاحتمالِ المشروطِ على نحوٍ سهلٍ.

### مثال 5: من الحياة

**تدويرٌ: يُبيِّنُ الجدولُ المجاورُ كتلَ النُّفاياتِ التي جُمِعَتْ بالأطنانِ في يوميْنِ منْ إحدى المدنِ. إذا سُحِبَتْ عيِّنةٌ عشوائيةٌ منها قبلَ البدءِ بإعادةِ تدويرِها، فما احتمالُ أنْ تكونَ العيِّنةُ ورقيةً، علمًا بأنَّها جُمِعَتْ يومَ الأحدِ؟**

| | غيرُ ورقيةٍ | ورقيةٌ |
|---|---|---|
| السبتُ | 94 | 7 |
| الأحدُ | 121 | 8 |

تُسهِمُ عمليةُ تدويرِ النُّفاياتِ في المحافظةِ على البيئةِ بصورةٍ كبيرةٍ. فمثلًا، إعادةُ تدويرِ طنٍّ واحدٍ منَ الورقِ قدْ تحولُ دونَ قطعِ 17 شجرةً.

إذا كانَ $(A)$ هوَ حادثَ سحبِ عيِّنةٍ منَ الورقِ، وَ$(B)$ هوَ حادثَ سحبِ عيِّنةٍ أخرى جُمِعَتْ يومَ الأحدِ، فما قيمةُ $P(A \mid B)$؟

| | المجموعُ | غيرُ ورقيةٍ | ورقيةٌ |
|---|---|---|---|
| السبتُ | 101 | 94 | 7 |
| الأحدُ | 129 | 121 | 8 |
| المجموعُ | 230 | 215 | 15 |

**الخطوةُ 1:** أُكمِلُ جدولَ الاتجاهيْنِ بإيجادِ المجاميعِ.

**الخطوةُ 2:** أَجِدُ احتمالاتِ الحوادثِ اللازمةِ لحسابِ الاحتمالِ المشروطِ.

بالنظرِ إلى جدولِ الاتجاهيْنِ، أَجِدُ كلًّا منْ: $P(A)$، وَ $P(B)$، وَ $P(A \cap B)$:

كتلةُ الورقِ التي جُمِعَتْ في اليوميْنِ 15 طنًّا، وكتلةُ جميعِ النُّفاياتِ التي جُمِعَتْ في اليوميْنِ 230 طنًّا $P(A) = \frac{15}{230}$

كتلةُ النُّفاياتِ التي جُمِعَتْ يومَ الأحدِ 129 طنًّا، وكتلةُ النُّفاياتِ التي جُمِعَتْ في اليوميْنِ 230 طنًّا $P(B) = \frac{129}{230}$

## إرشادات:

- أرسم على اللوح جدولًا كبيرًا مُشابِهًا للجدول الوارد في بند (ملخص المفاهيم)، ثم أكتب فيه عناوين الأعمدة الثلاثة، ثم نوع الحوادث الواحد تلو الآخر. بعد ذلك أطلب إلى أحد الطلبة كتابة وصف مناسب له، ثم أطلب إلى آخر كتابة القانون أو الصيغة الرياضية التي تُستعمَل لحساب احتمال الحادث.
- أطلب إلى آخرين فعل ذلك حتى الانتهاء من جميع أنواع الحوادث التي وردت في الوحدة.

كتلةُ النُّفاياتِ الورقيةِ التي جُمِعَتْ يومَ الأحدِ 8 أطنانٍ، وكتلةُ جميعِ النُّفاياتِ التي جُمِعَتْ 230 طنًّا

$$P(A \cap B) = \frac{8}{230}$$

**الخطوةُ 3:** أُعوِّضُ قيمَ الاحتمالاتِ بصيغةِ الاحتمالِ المشروطِ.

صيغةُ الاحتمالِ المشروطِ

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

بالتعويضِ، والتبسيطِ

$$= \frac{\frac{8}{230}}{\frac{129}{230}} = \frac{8}{129}$$

إذنْ، احتمالُ أنْ تكونَ العيِّنةُ ورقيةً، وأنَّها جُمِعَتْ يومَ الأحدِ هوَ $\frac{8}{129}$

**أتحقق من فهمي**

$$P(D|E) = \frac{P(D \cap E)}{P(E)} = \frac{94}{101}$$

**إذا سُحِبَتْ عيِّنةٌ عشوائيةٌ، فما احتمالُ أنْ تكونَ غيرَ ورقيةٍ، علمًا بأنَّها جُمِعَتْ يومَ السبتِ؟**

**ملحوظةٌ**

يُمكِنُ إيجادُ ناتجِ الاحتمالِ المشروطِ بسهولةٍ منْ جدولِ الاتجاهيْنِ مباشرةً.

### مُلخَّصُ المفاهيمِ

| نوعُ الحوادثِ | الوصفُ | القانونُ |
|---|---|---|
| المتنافيانِ | لا يوجدُ بينَهُما عناصرُ مشتركةٌ. | $P(A \cap B) = 0$<br>$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ |
| غيرُ المتنافييْنِ | يوجدُ بينَهُما عناصرُ مشتركةٌ. | $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ |
| المُتتامّانِ | لا يوجدُ بينَهُما عناصرُ مشتركةٌ، واتحادُهُما معًا يُمثِّلُ فضاءَ العيِّنةِ. | $P(A) + P(\overline{A}) = 1$ |
| المستقلانِ | وقوعُ أحدِهِما لا يُؤثِّرُ في احتمالِ وقوعِ الآخرِ. | $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ |
| غيرُ المستقليْنِ | وقوعُ أحدِهِما يُؤثِّرُ في احتمالِ وقوعِ الآخرِ. | $P(A \cap B) = P(A) \times P(B \mid A)$ |
| المشروطةُ | وجودُ معلومةٍ إضافيةٍ عنْ وقوعِ أحدِهِما. | $P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}, P(A) \neq 0$ |

## 4 التدريب

- أُناقِش الطلبة في حل الأسئلة (7–1)، و(20–11).
- أطلب إلى الطلبة حل الأسئلة (10– 8)، و (27– 21) بعد توزيعهم إلى مجموعات.
- أتجوَّل بين الطلبة مُرشِدًا، ومُساعِدًا، ومُوجِّهًا، وأُقدِّم لهم التغذية الراجعة.

### تنويع التعليم (التعلُّم بالأقران):

إذا واجــه الطلبة من ذوي المســتوى المتوســط أو دون المتوســط صعوبة في حل الأسئلة الواردة في بند (**أتدرب وأحل المســائل**)، فــأُوزِّع طلبة الصف إلــى مجموعات ثلاثيــة، تضــم كلٌّ منها طالبًــا من ذوي المســتوى فوق المتوســط، وطالبين ممَّن واجهوا صعوبــة في الحل، ثم أُقدِّم تغذية راجعة لهم.



### أتدرب وأحل المسائل

**كراتٌ زجاجيةٌ: يحتوي كيسٌ على 5 كراتٍ حمراءَ ($R$)، وَ3 كراتٍ خضراءَ ($G$)، وكرتيْنِ صفراويْنِ ($Y$)، جميعُها مُتماثِلةٌ. سُحِبَتْ كرةٌ منَ الكيسِ عشوائيًّا، ثمَّ كُتِبَ لونُها، ثمَّ أُعيدَتْ إلى الكيسِ، ثمَّ سُحِبَتْ كرةٌ أُخرى عشوائيًّا، ثمَّ كُتِبَ لونُها:**

1. ما احتمالُ أنْ تكونَ الكرةُ الأولى حمراءَ والثانيةُ صفراءَ؟ أنظر ملحق الإجابات.
2. ما احتمالُ أنْ تكونَ الكرتانِ خضراويْنِ؟ أنظر ملحق الإجابات.

**أُحدِّدُ إذا كانَ الحادثانِ مستقليْنِ أوْ غيرَ مستقليْنِ في كلٍّ منَ التجاربِ العشوائيةِ الآتيةِ:**

3. سحبُ كرةٍ زرقاءَ عشوائيًّا منْ صندوقٍ، والحصولُ على العددِ 5 عندَ إلقاءِ حجرِ نردٍ منتظمٍ مرَّةً واحدةً. مستقلان.
4. اختيارُ طالبٍ منْ مواليدِ شــهرِ 10 عشــوائيًّا ليخرجَ منْ غرفةِ الصفِّ، ثمَّ اختيارُ طالبٍ آخرَ عشوائيًّا منْ مواليدِ شهرِ 5 ليلحقَ بهِ. غير مستقلين.
5. الحصولُ على عددٍ زوجيٍّ عندَ إلقاءِ حجرِ نردٍ منتظمٍ مرَّةً واحدةً، وعددٍ يقبلُ القســمةَ على 2 عندَ إلقاءِ حجرِ نردٍ آخرَ منتظمٍ. مستقلان.
6. إصابةُ صيّاديْنِ الهدفَ الثابتَ الذي أَطلقَ كلٌّ منْهُما طلقةً واحدةً نحوَهُ عشوائيًّا. مستقلان.
7. سحبُ بطاقةٍ عشوائيًّا تحملُ العددَ 6 منْ مجموعةِ بطاقاتٍ مُتماثِلةٍ تحملُ الأرقامَ منْ 1 إلى 10، ثمَّ إعادتُها، ثمَّ سحبُ بطاقةٍ أُخرى عشوائيًّا تحملُ عددًا زوجيًّا. مستقلان.

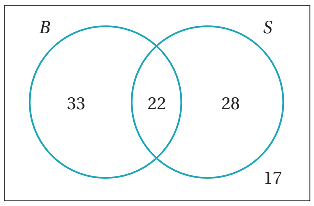
**أقلامُ حبرٍ: في علبةٍ قلما حبرٍ أحمرَ، وثلاثةُ أقلامِ حبرٍ أزرقَ، جميعُها مُتماثِلةٌ. اختارَ سالمٌ منْها قلميْنِ عشوائيًّا على التوالي منْ دونِ إرجاعٍ. أَجِدُ احتمالَ كلٍّ منَ الحوادثِ الآتيةِ باستعمالِ الشجرةِ الاحتماليةِ:**

8. اختيارُ قلمَيْ حبرٍ أحمرَ. أنظر ملحق الإجابات.
9. اختيارُ قلمَيْ حبرٍ أزرقَ. أنظر ملحق الإجابات.
10. اختيارُ قلمِ حبرٍ منْ كلِّ لونٍ. أنظر ملحق الإجابات.

**اختباراتٌ: تقدّمَ ســامي لاختبارينِ في الرياضياتِ، وكانَ احتمالُ نجاحِهِ فــي الأوّلِ 75%، واحتمالُ نجاحِهِ في الثاني إذا نجحَ فيْ الأوّلِ 80%، واحتمالُ رسوبِهِ في الثاني إذا رسبَ في الأوّلِ 60%، فأجدُ كلًّا ممّا يأتي:**

11. احتمالُ نجاحِ سامي في كلا الاختبارينِ. أنظر ملحق الإجابات.
12. احتمالُ نجاحِ سامي في أحدِ الاختبارينِ، ورسوبِهِ في الآخرِ. أنظر ملحق الإجابات.

سُئِلَ 100 شخصٍ عنْ وجودِ أخٍ لهُمْ أوْ أختٍ، وقدْ توزَّعوا وَفقَ إجاباتِهِمْ كما في شكلِ فِنْ المجاور، حيثُ:




$B$: الأشخاصُ الذينَ لكلٍّ منْهُمْ أخٌ.

$S$: الأشخاصُ الذينَ لكلٍّ منْهُمْ أختٌ.

إذا اختيرَ أحدُ هؤلاءِ الأشخاصِ عشوائيًّا، فما احتمالُ:

13 أنْ يكونَ لهُ أخٌ؟ (13–15) أنظر ملحق الإجابات.

14 أنْ يكونَ لهُ أخٌ، علمًا بأنَّ لهُ أختًا؟

15 أنْ يكونَ لهُ أختٌ، علمًا بأنَّ لهُ أخًا؟

**وظائفُ**: يُبيِّنُ الجدولُ المجاورُ أعدادَ المُتقدِّمينَ لوظيفةٍ في إحدى الشركاتِ، ومُؤهّلاتِهِمُ العلميةَ، وخبراتِهِمُ السابقةَ. إذا اختيرَ أحدُ المُتقدِّمينَ للوظيفةِ عشوائيًّا، فما احتمالُ:

| | | لديْهِ خبرةٌ سابقةٌ | |
|---|---|---|---|
| | | لا | نعم |
| لديْهِ شهادةٌ جامعيةٌ | نعم | 27 | 54 |
| | لا | 4 | 5 |

16 أنْ يكونَ لديْهِ خبرةٌ سابقةٌ، علمًا بأنَّ لديْهِ شهادةً جامعيةً؟ أنظر ملحق الإجابات.

17 ألّا يكونَ لديْهِ شهادةٌ جامعيةٌ، علمًا بأنَّ لديْهِ خبرةً سابقةً؟ أنظر ملحق الإجابات.

**إشاراتُ مرورٍ**: تمرُّ غادةُ في رحلةِ عودتِها منَ العملِ بشارعٍ رئيسٍ عليْهِ إشارتانِ ضوئيتانِ. إذا كانَ احتمالُ أنْ تصلَ الإشارةَ الأولى، وتجتازَها وهيَ مضاءةٌ باللونِ الأخضرِ $G$ هوَ 0.3، وإذا كانَتْ مضاءةً بالأحمرِ $R$، فإنَّ احتمالَ وصولِها الإشارةَ الثانيةَ وهيَ مضاءةٌ بالأحمرِ هوَ 0.8، أمّا إذا كانَتِ الإشارةُ الأولى مضاءةً بالأخضرِ، فإنَّ احتمالَ وصولِها الإشارةَ الثانيةَ وهيَ مضاءةٌ بالأحمرِ هوَ 0.4

أستعملُ التمثيلَ بالشجرةِ الاحتماليةِ لإيجادِ كلٍّ منَ الاحتمالاتِ الآتيةِ: (18–20) أنظر ملحق الإجابات.

18 احتمالُ وصولِها كلًّا منَ الإشارتيْنِ وهما مضاءتانِ بالأحمرِ.

19 احتمالُ وصولِها كلًّا منَ الإشارتيْنِ وهما مضاءتانِ بالأخضرِ.

20 احتمالُ وصولِها إحدى الإشارتيْنِ وهيَ مضاءةٌ بالأخضرِ، ووصولِها الإشارةَ الأُخرى وهيَ مضاءةٌ بالأحمرِ.



## مهارات التفكير العليا

- أُوجِّه الطلبة – ضمن مجموعات ثنائية– إلى حل المسائل في بند (**مهارات التفكير العليا**)، مُذكِّرًا إيّاهم بكتابة مُبرِّر للإجابة التي يتوصَّلون إليها، وأمنحهم وقتًا كافيًا لنقد مُبرِّرات زملائهم.

## الواجب المنزلي:

- أطلب إلى الطلبة أنْ يحلوا في البيت جميع المسائل الواردة في الصفحة الثلاثين من كتاب التمارين، مُحدِّدًا لهم المسائل التي يمكنهم حلها في نهاية كل حصة بحسب ما يُقدَّم من أمثلة الدرس وأفكاره.
- في اليوم التالي، أَطَّلِع على حلول الطلبة، وأُناقِشهم في أيِّ صعوبات واجهوها في أثناء الحل.

## 5 الإثراء

### الاستقراء العددي:

- أخبِر الطلبة أنَّ التخمين أو الاستنتاج المبني على ملاحظات ضمن أمثلة عددية يُسمّى الاستقراء العددي، وأنَّ التخمين أو الاستنتاج الذي يُتوصَّل إليه صحيح (لكنه بحاجة إلى برهان رياضي ليقال عنه: تعميم صحيح) ما لم يوجد مثال يُناقِض ذلك.
- عند حل الطلبة السؤال 29 في بند (**مهارات التفكير العليا**)، أطلب إليهم ملء الفراغ بما هو مناسب في الجدول الآتي:

| $P(A) =$ | $P(B) =$ | $P(A\cap B) =$ | $P(A\|B) =$ | $P(B\|A) =$ |
|---|---|---|---|---|
| 0.60 | 0.50 | 0.20 | 0.40 | 0.33 |
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |

- أُوجِّه الطلبة إلى افتراض قيم عددية لاحتمالات كلٍّ من $A, B, A\cap B$ (الأعمدة المُظلَّلة باللون البنفسجي)، ثم حساب الاحتمال المشروط في الحالتين (الأعمدة المُظلَّلة باللون الأصفر) عند إكمال الجدول كما في المثال المعطى.
- أخبِر الطلبة أنَّ احتمال تقاطع حادثين لا يمكن أنْ يكون أكبر من احتمال أيٍّ منهما.
- أُوجِّه الطلبة إلى الاستمرار في وضع الفرضيات للقيم العددية لاحتمالات كلٍّ من $A, B, A\cap B$، والتوصُّل إلى نواتج متساوية عند حساب الاحتمال المشروط في الحالتين، ثم التوصُّل إلى تخمين أو استنتاج معين اعتمادًا على ذلك.

### تعليمات المشروع:

- أطلب إلى الطلبة تنفيذ الخطوة (7) من المشروع.
- أُتابِع أفراد المجموعات في أثناء تنفيذ مشروع الوحدة، وأُزوِّدهم بتغذية راجعة وإرشادات لتحسينه.
- أخبِر الطلبة بموعد عرض مشروع الوحدة.



**أرصادٌ جويةٌ:** أفادَتْ مذيعةُ النشرةِ الجويةِ أنَّ احتمالَ تساقطِ الثلوجِ يومَ الإثنينِ هيَ 25%، وأنَّها ترتفعُ إلى 90% يومَ الثلاثاءِ. أستعملُ التمثيلَ بالشجرةِ الاحتماليةِ لإيجادِ احتمالِ:

(21–23) أنظر ملحق الإجابات.

21 تساقطِ الثلوجِ يومَ الثلاثاءِ، وعدمِ تساقطِها يومَ الإثنينِ.

22 عدمِ تساقطِ الثلوجِ في كلا اليوميْنِ.

23 تساقطِ الثلوجِ في أحدِ اليوميْنِ على الأقلِّ.

**صيدٌ:** أطلقَ صيّادٌ طلقةً واحدةً على هدفٍ ثابتٍ، وأطلقَ آخرُ طلقةً واحدةً على الهدفِ نفسِهِ. إذا كان احتمالُ إصابةِ الأولِ للهدفِ 70%، واحتمالُ إصابةِ الثاني للهدفِ 60%، فأَجِدُ احتمالَ:

24 إصابةِ كلا الصيّاديْنِ الهدفَ. 0.42

25 عدمِ إصابتِهِما الهدفَ. 0.12

26 إصابةِ الصيّادِ الثاني الهدفَ، علمًا بأنَّ الصيّادَ الأولَ أصابَ الهدفَ. 0.60

27 عدمِ إصابةِ الصيّادِ الثاني الهدفَ، علمًا بأنَّ الصيّادَ الأولَ لمْ يُصِبِ الهدفَ. 0.40

28 أحلُّ السؤالَ الواردَ في فقرةِ مسألةِ اليومِ. $\frac{1}{(365)^2}$

#### مهارات التفكير العليا

29 **تبريرٌ:** إذا كانَ $(A)$ وَ $(B)$ حادثيْنِ متنافييْنِ في تجربةٍ عشوائيةٍ، فما قيمةُ $P(A \mid B)$؟ أُبرِّرُ إجابتي. أنظر ملحق الإجابات.

30 **تبريرٌ:** قالَتْ تماضرُ: إنَّهُ لأيِّ حادثيْنِ $(A)$ وَ $(B)$ في فضاءِ العيِّنةِ $\Omega$ لتجربةٍ عشوائيةٍ ما، فإنَّ:

$$P(A \mid B) = P(B \mid A)$$

هلْ قولُ تماضرَ صحيحٌ؟ أُبرِّرُ إجابتي. أنظر ملحق الإجابات.

31 **تحدٍّ:** يحتوي كيسٌ على $n$ منَ الكراتِ المُتماثِلةِ مختلفةِ الألوانِ. إذا كانَ احتمالُ سحبِ كرةٍ حمراءَ ثمَّ سحبِ كرةٍ خضراءَ منْ دونِ إرجاعٍ 2.4% تقريبًا، فما قيمةُ $n$؟ $n = 7$

32 **مسألةٌ مفتوحةٌ:** أذكرُ مثالًا على حادثيْنِ مستقليْنِ، ومثالًا آخرَ على حادثيْنِ غيرِ مستقليْنِ، مُبيِّنًا كيفَ أَجِدُ احتمالَ وقوعِ الحادثيْنِ معًا في كلِّ مثالٍ. ستتنوع إجابات الطلبة.



## 6 الختام

### بطاقة خروج:

- أطلب إلى الطلبة – في نهاية الدرس– تلخيص ما تعلَّموه بعباراتهم الخاصة، ثم أستمع لبعض ما كتبوه.
- أطلب إلى كل طالب اختيار موضوع أو فكرة من الدرس أتقنها، وكتابة سؤال عنها في ورقة تحمل اسمه، أو اختيار موضوع أو فكرة تحتاج إلى مزيد من التمرين لإتقانها، وكتابة سؤال عنها، ثم تسليمي الورقة.
- أَطَّلِع على الأوراق، ثم أُخطِّط لمعالجة جوانب الضعف التي رصدتها في أوراق الطلبة.

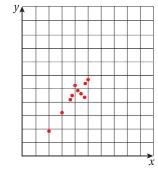
## التقويم الختامي:

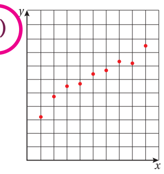
- أُوزِّع الطلبة إلـى مجموعات، ثم أطلب إلى أفراد كل مجموعة حل أسئلة اختبار نهاية الوحدة (25–1) في حصتين.
- أُوجِّــه الطلبة إلى اســتعمال الأدوات اللازمة للحل، مثل: قلم الرصاص، والمسطرة الشفافة، وورق الرسم البياني، والآلة الحاســبة، وأحجار النرد، والبطاقات الملونة.
- أتجوَّل بين الطلبة مُرشِدًا، ومُساعِدًا، ومُوجِّهًا، وأُقدِّم لهم التغذية الراجعة.
- أُناقِش الطلبة في حل بعض المســائل، وبخاصة تلك التي واجهوا صعوبة في حلها.

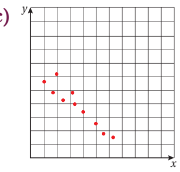
## اختبارُ نهايةِ الوحدةِ

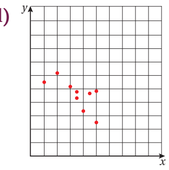
أَضعُ دائرةً حولَ رمزِ الإجابةِ الصحيحةِ في ما يأتي:

1 شكلُ الانتشــارِ الذي يُظهِرُ الارتباطَ الموجبَ الأقوى بينَ $(x)$ وَ $(y)$ هوَ:

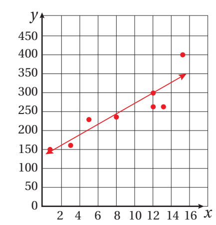
a) 

b) 

c) 

d) 

2 باستعمالِ المستقيمِ الأفضلِ مطابقةً في الشكلِ الآتي، تقديرُ قيمةِ $y$ عندما $x = 7$ هوَ:



a) 150 b) 175

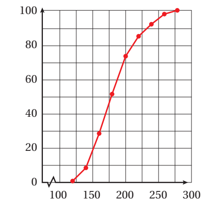
c) 200 d) 225

3 قيمــةُ المدى الربيعيِّ للقيم: 11 ، 5 ، 10 ، 8 ، 7 ، 10 ، 15 ، 12 ، 13 ، 9 ، 6 ، 7 ، 4 هيَ:

a) 5 b) 6

c) 9 d) 11

4 **رسائلُ بريديةٌ:** يُبيِّنُ الشــكلُ الآتي المنحنى التكراريَّ التراكميَّ لكتلةِ 100 رسالةٍ (بالغرام) مُسجَّلةٍ لدى أحدِ مكاتبِ البريدِ. قيمةُ الربيعِ الأعلى لكتلِ الرسائلِ هيَ:



a) 160 b) 200

c) 210 d) 230

5 في الجدولِ الآتي، إذا كانَ مجموعُ مُربَّعاتِ انحرافاتِ مراكزِ الفئاتِ عنِ الوسطِ الحسابيِّ في التكرارِ المقابلِ لها هوَ 324، فإنَّ قيمةَ التباينِ هيَ:

| الفئاتُ | التكرارُ |
|---|---|
| $5 \le x < 10$ | 7 |
| $10 \le x < 15$ | 12 |
| $15 \le x < 20$ | 6 |

a) 13.50 b) 12.96

c) 3.67 d) 3.60

6 **حجرا نردٍ:** أُلقِيَ حجرا نــردٍ منتظمانِ، أحدُهُما أحمرُ، والآخرُ أزرقُ عشوائيًّا مرَّةً واحدةً. احتمالُ ظهورِ عددٍ أوليٍّ على حجرِ النردِ الأحمــرِ، وعددٍ أقلَّ منْ 3 على حجرِ النردِ الأزرقِ هوَ:

a) $\frac{5}{6}$ b) $\frac{5}{36}$

c) $\frac{1}{3}$ d) $\frac{1}{6}$

## اختبارُ نهايةِ الوحدةِ

**إذا كانَ $A$ و $B$ حادثينِ في تجربةٍ عشوائيّةٍ، وكانَ $P(A) = 0.3$، $P(B) = 0.6, P(A\cap B) = 0.1$، فأجدُ كلًّا ممّا يأتي:**

7 $P(A\cup B)$ 0.8

8 $P(\bar{A})$ 0.7

9 $P(B-A)$ 0.5

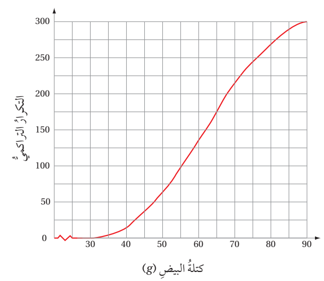
10 $P(A\cup \bar{B})$ 0.5

11 $P(\bar{A}\cup \bar{B})$ 0.9

**زراعـةٌ:** دوّنَ مهندسٌ زراعيٌّ كتلةَ 300 بيضةٍ بالغرامِ كما في الجدولِ الآتي:

| كتلةُ البيضةِ $(x)$ | التكرارُ |
|---|---|
| $30 < x \le 40$ | 15 |
| $40 < x \le 50$ | 48 |
| $50 < x \le 60$ | 72 |
| $60 < x \le 70$ | 81 |
| $70 < x \le 80$ | 54 |
| $80 < x \le 90$ | 30 |

**يُبيِّنُ التمثيلُ الآتي المنحنى التكراريَّ التراكميَّ لهذا الجدولِ:**




أنظر ملحق الإجابات.

**أستعملُ المنحنى التكراريَّ التراكميَّ لإيجادِ:**

12 قيمةِ الوسيطِ لكتلِ البيضِ، مُفسِّرًا دلالتَهُ.

13 قيمةِ المدى الربيعيِّ لكتلِ البيضِ، مُفسِّرًا دلالتَهُ.

أنظر ملحق الإجابات.

أنظر ملحق الإجابات.

14 قيمةِ المئينِ 80 لكتلِ البيضِ، مُفسِّرًا دلالتَهُ.

15 عددِ البيضِ الذي تزيدُ كتلتُهُ على 65g

125 بيضة.

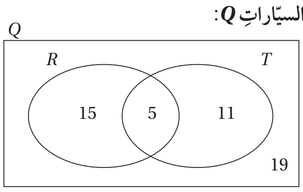
16 يُمثِّلُ الجدولُ الآتي كميةَ الأمطارِ في إحدى مناطقِ المملكةِ على مدارِ 20 عامًا لأقربِ ملّيمترٍ:

| كميةُ الأمطارِ | عددُ السنواتِ |
|---|---|
| $199 \le x < 249$ | 2 |
| $249 \le x < 299$ | 3 |
| $299 \le x < 349$ | 6 |
| $349 \le x < 399$ | 3 |
| $399 \le x < 449$ | 4 |
| $449 \le x \le 499$ | 2 |

أجدُ التباينَ والانحرافَ المعياريَّ لكميةِ الأمطارِ.

أنظر ملحق الإجابات.

**سيّاراتٌ:** يُبيِّنُ شكلُ فنْ الآتي عددَ السيّاراتِ الحمراءِ $R$، وعددَ السيّاراتِ ذاتِ البابيْنِ $T$، وعددَ سيّاراتٍ أُخرى في أحدِ مواقفِ السيّاراتِ $Q$:




**إذا اختيرَتْ سيّارةٌ عشوائيًّا، فما احتمالُ:**

17 أنْ تكونَ حمراءَ، وذاتَ بابيْنِ؟ أنظر ملحق الإجابات.

18 ألّا تكونَ حمراءَ، ولها بابانِ؟ أنظر ملحق الإجابات.

19 إذا اختيرَتْ سيّارةٌ، وكانَتْ ذاتَ بابيْنِ، فما احتمالُ ألّا تكونَ حمراءَ؟ أنظر ملحق الإجابات.

20 إذا اختيرَتْ سيّارتانِ، الواحدةُ تلوَ الأُخرى عشوائيًّا، فما احتمالُ أنْ يكونَ لونُهُما أحمرَ؟

أنظر ملحق الإجابات.



### إرشادات للمُعلِّم/ للمُعلِّمة

أُنبِّه الطلبة إلى تعديل أرقام الأسئلة في هذه الصفحة؛ إذ تبدأ بالرقم 7، وتنتهي بالرقم 20، وفي الصفحة التالية تبدأ بالرقم 21، وتنتهي بالرقم 33، وكذلك أُنبِّههم إلى تعديل الاحتمال المطلوب في الأسئلة التي تحمل الأرقام: 8، و10، و11.

## اختبارُ نهايةِ الوحدةِ

**كـراتٌ ملونةٌ: يحتوي كيسٌ على كرتيْنِ سوداويْنِ، وكرةٍ بيضاءَ. إذا كانَتْ جميعُ الكراتِ مُتماثِلةً، وسحبَ مصعبٌ كرةً عشوائيًّا، ثمَّ كتبَ لونَها، ثمَّ أعادَها إلى الكيسِ، ثمَّ سحبَ أُخرى عشوائيًّا، ثمَّ كتبَ لونَها، فأستعملُ التمثيلَ بالشجرةِ الاحتماليةِ لإيجادِ الاحتمالاتِ الآتيةِ:**

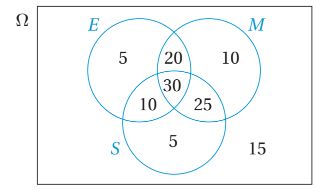
(21–23) أنظر ملحق الإجابات.

21 الكرتانِ المسحوبتانِ بيضاوانِ.

22 الكرتانِ المسحوبتانِ مختلفتا اللونِ.

23 إحدى الكرتيْنِ المسحوبتيْنِ على الأقلِّ لونُها أسودُ.

**تقدَّمَ 120 طالبًا لاختباراتٍ في اللغةِ الإنجليزيةِ ($E$)، والرياضياتِ ($M$)، والعلومِ ($S$)، وقدْ توزَّعوا وَفقَ نجاحِهِمْ في هذهِ الاختباراتِ كما في شكلِ فنْ الآتي:**




**إذا اختيرَ أحدُ هؤلاءِ الطلبةِ عشوائيًّا، فما احتمالُ:**

24 أنْ يكونَ ناجحًا في العلومِ، علمًا بأنَّهُ ناجحٌ في الرياضياتِ؟ $P(S|M) = \frac{11}{17}$

25 أنْ يكونَ ناجحًا في اللغةِ الإنجليزيةِ، علمًا بأنَّهُ ناجحٌ في الرياضياتِ؟ $P(E|M) = \frac{10}{17}$

26 ألّا يكونَ ناجحًا في العلومِ، علمًا بأنَّهُ ليسَ ناجحًا في الرياضياتِ؟ $P(\overline{S} \mid \overline{M}) = \frac{4}{7}$

### تدريبٌ على الاختباراتِ الدوليةِ

**لونُ العينيْنِ: يُبيِّنُ الجدولُ الآتي احتمالَ أنْ يكونَ الشخصُ في مجتمعٍ ما ذا عينيْنِ زرقاويْنِ، أوْ بُنِّيتيْنِ، أوْ خضراويْنِ:**

| لونُ العينيْنِ | زرقاوانِ | بُنِّيتانِ | خضراوانِ |
|---|---|---|---|
| الاحتمالُ | 0.4 | 0.5 | 0.1 |

**إذا اختيرَ شخصانِ عشوائيًّا، فما احتمالُ:**

27 أنْ تكونَ عينا كلٍّ منْهُما زرقاويْنِ؟ 0.16

28 أنْ تكونَ عينا كلٍّ منْهُما مختلفتَي اللونِ؟ 0.58

**أقلامٌ ملونةٌ: يحتوي صندوقٌ على 3 أقلامٍ حمراءَ $R$، وقلميْنِ زرقاويْنِ $B$، وَ 4 أقلامٍ خضراءَ $G$. اختارَتْ شيماءُ قلميْنِ عشوائيًّا منَ الصندوقِ على التوالي، ومنْ دونِ إرجاعٍ. ما احتمالُ:**

29 أنْ يكونَ لونُ القلميْنِ أحمرَ؟ $\frac{1}{12}$

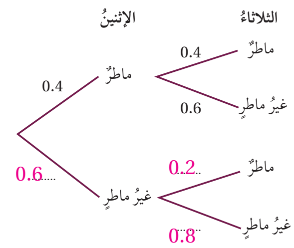
30 أنْ يكونَ للقلميْنِ اللونُ نفسُهُ؟ $\frac{5}{18}$

31 أنْ يكونَ لونُ أحدِ القلميْنِ فقطْ أخضرَ؟ $\frac{5}{9}$

**أمطارٌ: إذا نزلَ المطرُ اليومَ، فإنَّ احتمالَ نزولِهِ غدًا هوَ 0.4، وإذا لمْ ينزلِ اليومَ، فإنَّ احتمالَ نزولِهِ غدًا هوَ 0.2.**

**نزلَ المطرُ يومَ الأحدِ:**

32 أُكمِلُ الفراغَ في الشكلِ الآتي:




33 أَجِدُ احتمالَ نزولِ المطرِ في يومٍ واحدٍ على الأقلِّ منَ اليوميْنِ الوارديْنِ في الشكلِ. 0.52

150

## تدريب على الاختبارات الدولية

- أُعرِّف الطلبة بالاختبارات الدولية، وأهميتها المُبيَّنة في الفقرة الآتية، ثم أطلب إليهم حل الأسئلة الواردة في بند (تدريب على الاختبارات الدولية) بصورة فردية، ثم أُناقِشهم في إجاباتهم.
- يتقدَّم طلبة الصف العاشر في الأردن لاختبار البرنامج الدولي لتقييم أداء الطلبة (PISA) في مجالات القراءة والرياضيات والعلوم. وفي ما يخصُّ الرياضيات، فإنَّ المعرفة الرياضية – وَفق هذا البرنامج– يُعبَّر عنها بمدى قدرة الفرد على صياغة الرياضيات، وتوظيفها، وتفسيرها في أوضاع مختلفة؛ إذ تتضمَّن القدرة على التفكير الرياضي، واستعمال المفاهيم والإجراءات والحقائق والأدوات لوصف الظواهر، والتنبُّؤ بها.
- تسعى هذه البرامج والدراسات لمساعدة صانعي القرارات وراسمي السياسات التربوية في الدول المشاركة على تحديد معايير حقيقية وواقعية لأداء نظمها التربوية، وتقييم النجاحات أو الإخفاقات. وقد شارك الأردن بانتظام في هذه البرامج والدراسات ودوراتها منذ مطلع تسعينيات القرن العشرين الميلادي.
- شمل اختبار الرياضيات في دورة عام 2012م المحتويات الفرعية الآتية:

**الكميات، والتغيُّر والعلاقات، والأشكال والفراغات، والإحصاء والاحتمالات.**

- وقد توزَّعت فقرات الاختبار البالغ عددها (110) فقرات على النحو المُبيَّن في الجدول الآتي:

| المحتوى | عدد الفقرات |
|---|---|
| الكميات: | 29 |
| التغيُّر والعلاقات: | 29 |
| الأشكال والفراغات: | 27 |
| الإحصاء والاحتمالات: | 25 |
| **المجموع:** | **110** |

- وتوزَّعت فقرات الاختبار – بحسب مستويات المعرفة– على النحو المُبيَّن في الجدول الآتي:

| المستوى المعرفي | عدد الفقرات |
|---|---|
| الصياغة: | 51 |
| التوظيف: | 32 |
| التفسير: | 27 |
| **المجموع:** | **110** |

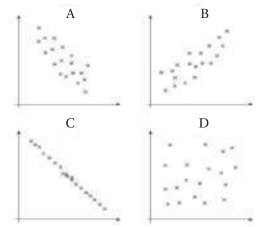
- يتعيَّن عليك عزيزي المُعلِّم/ عزيزتي المُعلِّمة تحفيز الطلبة على حل مثل هذه الأسئلة، والاهتمام بالمشاركة في دراسات التقييم وبرامجه الدولية بجدية، وتوعية الطلبة وأولياء الأمور بأهميتها، فضلًا عن تضمين الاختبارات المدرسية نماذج مماثلة لهذه الأسئلة.

**المصدر: الدليل الإرشادي لمُعلِّمي الرياضيات (PISA 2013)، المركز الوطني لتنمية الموارد البشرية، عمّان، الأردن.**

# كتاب التمارين

## الدرسُ 1
## أشكالُ الانتشارِ
## Scatter Graphs

الوحدةُ 8: الإحصاءُ والاحتمالاتُ




مستعينًا بالأشكالِ المجاورةِ، أكتبُ في الفراغِ الآتي رمزَ شكلِ الانتشارِ المناسبِ:

1. يدلُّ شكلُ الانتشارِ ...D... على عدمِ وجودِ ارتباطٍ بينَ المُتغيِّرَيْنِ.
2. يدلُّ شكلُ الانتشارِ ...B... على وجودِ ارتباطٍ موجبٍ بينَ المُتغيِّرَيْنِ.
3. يدلُّ شكلُ الانتشارِ ...C... على وجودِ ارتباطٍ سالبٍ وقويٍّ بينَ المُتغيِّرَيْنِ.

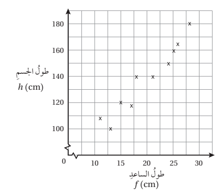
( 4–5 ) أنظر ملحق الإجابات.

يُبيِّنُ الجدولُ المجاورُ الكتلَ والأطوالَ لِـ 12 طالبةً في الصفِّ السابعِ:

| الاسمُ | الكتلةُ (kg) | الطولُ (cm) |
|---|---|---|
| مريمُ | 41 | 123 |
| شيماءُ | 48 | 125 |
| نانسي | 47.5 | 127 |
| خلودُ | 52 | 128 |
| أسيلُ | 49.5 | 129 |
| لانا | 55 | 129 |
| يقينُ | 55 | 133 |
| لورا | 55.5 | 135 |
| هيا | 61 | 137 |
| بيانُ | 65.5 | 140 |
| ياسمينُ | 60 | 143 |
| تمارا | 68 | 145 |

4. أرسمُ شكلَ الانتشارِ لبياناتِ الجدولِ، واصفًا الارتباطَ بينَ الكتلةِ والطولِ.
5. أرسمُ المستقيمَ الأفضلَ مطابقةً للبياناتِ المُمثَّلةِ في شكلِ الانتشارِ.
6. صفاءُ إحدى طالباتِ الصفِّ السابعِ، وطولُها 132 cm أستعملُ المستقيمَ الأفضلَ مطابقةً لتقديرِ كتلتِها. 54 kg تقريبًا.
7. انتقلَتْ طالبةٌ في الصفِّ السابعِ منْ مدرسةٍ أُخرى إلى مدرسةِ هؤلاءِ الطالباتِ. أُقدِّرُ طولَ الطالبةِ الجديدةِ، علمًا بأنَّ كتلتَها 45 kg 123 cm تقريبًا.

يُمثِّلُ شكلُ الانتشارِ المجاورِ العلاقةَ بينَ طولِ الساعدِ $f$ بالسنتيمترِ، وطولِ الجسمِ $h$ بالسنتيمترِ لعشرةِ أشخاصٍ:

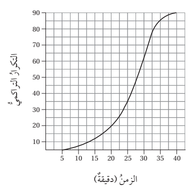



8. أَصِفُ الارتباطَ بينَ طولِ الجسمِ وطولِ الساعدِ. الارتباط موجب قوي.
9. أرسمُ المستقيمَ الأفضلَ مطابقةً، ثمَّ أكتبُ معادلتَهُ. أنظر ملحق الإجابات.
10. أستعملُ المستقيمَ الأفضلَ مطابقةً لتقديرِ طولِ شخصٍ، طولُ ساعدِهِ 27 cm 168 cm تقريبًا.



## الدرسُ 2
## المنحنى التكراريُّ التراكميُّ
## Cumulative Frequency Graph

الوحدةُ 8: الإحصاءُ والاحتمالاتُ




سُجِّلَ الزمنُ الذي استغرقَتْهُ سيّارةُ الإسعافِ لنقلِ مريضٍ منْ مكانِهِ إلى المستشفى في عددٍ منَ الحالاتِ. مستعينًا بالمنحنى التكراريِّ التراكميِّ المجاورِ الذي يُمثِّلُ البياناتِ المُتعلِّقةَ بذلكَ:

1. أُقدِّرُ وسيطَ البياناتِ. $Q_2 \approx 27$
2. أَجِدُ المدى الربيعيَّ. $Q_2 \approx 10$
3. أَجِدُ المئينَ 40، مُفسِّرًا معناهُ.
المئين 40 يساوي 25 تقريبًا، ويعني أن 60% من الأزمان المستغرقة لنقل المريض تزيد على 25 min

نشرَ موقعٌ إخباريٌّ 177 خبرًا في أحدِ الأيامِ. وقدْ رصدَ القائمونَ على الموقعِ عددَ الأشخاصِ الذينَ قرؤوا كلَّ خبرٍ، ثمَّ نظَّموا البياناتِ في الجدولِ التكراريِّ المجاورِ:

| الفئاتُ (عددُ القرّاءِ) | التكرارُ (عددُ الأخبارِ) |
|---|---|
| $0 \le x < 50$ | 6 |
| $50 \le x < 100$ | 9 |
| $100 \le x < 150$ | 15 |
| $150 \le x < 200$ | 25 |
| $200 \le x < 250$ | 31 |
| $250 \le x < 300$ | 37 |
| $300 \le x < 350$ | 32 |
| $350 \le x < 400$ | 17 |
| $400 \le x \le 450$ | 5 |

4. أُكمِلُ جدولَ التكرارِ التراكميِّ. أنظر ملحق الإجابات.
5. أرسمُ المنحنى التكراريَّ التراكميَّ. أنظر ملحق الإجابات.
6. أُقدِّرُ وسيطَ البياناتِ، والمدى الربيعيَّ. $Q_2 \approx 252, IQR \approx 150$
7. إذا قرَّرَ القائمونَ على هذا الموقعِ حذفَ الأخبارِ التي قرأَها أقلُّ منْ 60 شخصًا، فما عددُ الأخبارِ التي ستُحذَفُ؟ 10 تقريبًا.

خضعَتْ مجموعتانِ لاختبارِ حسابٍ ذهنيٍّ. وقدْ رُصِدَ عددُ الإجاباتِ الصحيحةِ لكلِّ مجموعةٍ في الجدولِ الآتي:

| عددُ الإجاباتِ الصحيحةِ | $0 \le x < 4$ | $4 \le x < 8$ | $8 \le x < 12$ | $12 \le x < 16$ | $16 \le x < 20$ |
|---|---|---|---|---|---|
| A: الفتيانُ | 5 | 9 | 23 | 28 | 17 |
| B: الفتياتُ | 6 | 10 | 19 | 25 | 22 |

8. أرسمُ المنحنى التكراريَّ التراكميَّ لكلٍّ منَ الفتيانِ والفتياتِ على ورقةِ الرسمِ البيانيِّ نفسِها. أنظر ملحق الإجابات.
9. أُقدِّرُ وسيطَ البياناتِ، والمدى الربيعيَّ لكلٍّ منْهُما.
للفتيان: الوسيط = 13 تقريبًا، المدى الربيعي = 7 تقريبًا.
للفتيات: الوسيط = 14 تقريبًا، المدى الربيعي = 8 تقريبًا.
10. أيُّ المجموعتيْنِ أداؤُها أفضلُ في الاختبارِ؟ أُبرِّرُ إجابتي.
يبدوا أداء المجموعتين متقاربًا مع أفضلية بسيطة لمجموعة الفتيات؛ لأن وسيط الأداء عندهن أعلى من وسيط الأداء لمجموعة الفتيان.



## الدرسُ 3
## مقاييسُ التشتُّتِ للجداولِ التكراريةِ ذاتِ الفئاتِ
## Measures of Variation for Frequency Tables with Class Intervals

الوحدةُ 8: الإحصاءُ والاحتمالاتُ

يُبيِّنُ الجدولُ التكراريُّ الآتي توزيعًا لأطوالِ بعضِ النباتاتِ على مدارِ أسبوعٍ في تجربةٍ زراعيةٍ:

| الطولُ (cm) | $(f)$ | $(x)$ | $f.x$ | $(x-\mu)$ | $(x-\mu)^2$ | $f\times(x-\mu)^2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $25 \le t < 29$ | 2 | 27 | 54 | −16 | 256 | 512 |
| $30 \le t < 34$ | 4 | 32 | 128 | −11 | 121 | 484 |
| $35 \le t < 39$ | 7 | 37 | 259 | −6 | 36 | 252 |
| $40 \le t < 44$ | 10 | 42 | 420 | −1 | 1 | 10 |
| $45 \le t < 49$ | 8 | 47 | 376 | 4 | 16 | 128 |
| $50 \le t < 54$ | 6 | 52 | 312 | 9 | 81 | 486 |
| $55 \le t \le 59$ | 3 | 57 | 171 | 14 | 196 | 588 |
| المجموعُ | 40 | | 1720 | | | 2460 |

1. أملأُ الفراغَ بما هوَ مناسبٌ في الجدولِ.
2. أُقدِّرُ كلًّا منَ الوسطِ الحسابيِّ، والتباينِ.

$$\bar{x} = \frac{\Sigma x.f}{\Sigma f} = \frac{1720}{40} = 43$$

$$\sigma^2 = \frac{\Sigma(x-\mu)^2 \times f}{\Sigma f} = \frac{2460}{40} = 61.5$$

يُبيِّنُ الجدولُ المجاورُ توزيعَ مدَّةِ الانتظارِ $t$ بالدقيقةِ لعددٍ منْ مُراجِعي دائرةٍ حكوميةٍ منْ لحظةِ أخْذِ المُراجِعِ بطاقةَ المراجعةِ إلى لحظةِ استدعائِهِ منَ الموظفِ المعنيِّ:

| الزمنُ (min) | التكرارُ |
|---|---|
| $0 \le t < 5$ | 4 |
| $5 \le t < 10$ | 9 |
| $10 \le t < 15$ | 20 |
| $15 \le t < 20$ | 7 |
| $20 \le t \le 25$ | 5 |

3. أُقدِّرُ الوسطَ الحسابيَّ. أنظر ملحق الإجابات.
4. أُقدِّرُ التباينَ، والانحرافَ المعياريَّ.

$$\sigma^2 = \frac{\Sigma(x^2.f) - (\Sigma f)(\mu)^2}{\Sigma f} = \frac{8331.25 - (45)(12.5)^2}{45} \approx 28.89$$

$$\sigma \approx \sqrt{28.89} \approx 5.37$$

5. مسألةٌ مفتوحةٌ: أجمعُ بياناتٍ لِـ 20 مشاهدةً، وأُنظِّمُها في جدولٍ تكراريٍّ ذي فئاتٍ، ثمَّ أُقدِّرُ الوسطَ الحسابيَّ والتباينَ.
يعتمد على البيانات التي يجمعها الطلبة.

# كتاب التمارين

## الدرسُ 4
## احتمالاتُ الحوادثِ المتنافيةِ
## Probability of Mutually Exclusive Events



**فـي تجربةِ اختيارِ عددٍ عشـوائيًّا منْ بينِ الأعـدادِ: 10 , 9 , 8 , 7 , 6 ، 5 , 4 , 3 , 2 , 1، إذا كانَ (A) حادثَ اختيارِ عددٍ أكبرَ منْ 4، و(B) حادثَ اختيارِ عددٍ يقبلُ القسمةَ على 3 منْ دونِ باقٍ، فأَجِدُ:**

1. احتمالَ اختيارِ عددٍ أقلَّ منْ 4، ويقبلُ القسمةَ على 3

A: عدد أقل من 4 ، B: عدد يقبل القسمة على 3

$A = \{1, 2, 3\}$ , $B = \{3, 6, 9\}$ , $A \cap B = \{3\}$

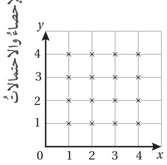
$P(A \cap B) = \frac{1}{10}$

2. احتمالَ اختيارِ عددٍ أقلَّ منْ 4، أوْ يقبلُ القسمةَ على 3

$P(A \cup B) = \frac{3}{10} + \frac{3}{10} - \frac{1}{10} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$

3. يُبيِّنُ التمثيلُ البيانيُّ المجاورُ فضاءَ العيِّنةِ Ω لتجربةٍ عشوائيةٍ. إذا كانَ $(A)$ يُمثِّلُ النقاطَ الواقعةَ على المستقيمِ $x = 3$، وكانَ $(B)$ يُمثِّلُ النقاطَ الواقعةَ على المستقيمِ $y = 5 - x$، إذا اختيرَتْ نقطةٌ عشوائيًّا، فما احتمالُ أنْ تقعَ على كلا المستقيمَيْنِ: $x = 3$، وَ $y = 5 - x$؟

$P(A \cap B) = \frac{1}{16}$




**إذا كانَ $A$ و $B$ حادثينِ في تجربةٍ عشوائيّةٍ، وكانَ $P(A) = 0.5, P(B) = 0.6, P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0.3$، فأجدُ كلًّا ممّا يأتي:**

(4–6) أنظر ملحق الإجابات.

4. $P(A \cap B)$
5. $P(A \cap \overline{B})$
6. $P(B \cup \overline{A})$

**سُئِلَتْ 516 مهندسةً كهربائيةً وكيميائيةً وميكانيكيةً عنِ المبحثِ المُفضَّلِ لكلٍّ منْهُنَّ عندَما كُنَّ في الصفِّ العاشرِ، وقدْ نُظِّمَتْ إجاباتُهُنَّ في الجدولِ المجاورِ.**

**إذا اختيرَتْ مهندسةٌ عشوائيًّا منْ هذهِ العيِّنةِ، فما احتمالُ:**

| المبحثُ المُفضَّلُ | العلومُ | الرياضياتُ | المجموعُ |
|---|---|---|---|
| مهندسةٌ كهربائيةٌ: | 90 | 85 | 175 |
| مهندسةٌ كيميائيةٌ: | 91 | 80 | 171 |
| مهندسةٌ ميكانيكيةٌ: | 81 | 89 | 170 |
| المجموعُ: | 262 | 254 | 516 |

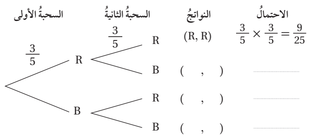
7. اختيارِ مهندسةٍ كهربائيةٍ تُفضِّلُ مبحثَ العلومِ؟ $\frac{90}{516} = \frac{15}{86}$
8. اختيارِ مهندسةٍ ميكانيكيةٍ تُفضِّلُ مبحثَ الرياضياتِ؟ $\frac{89}{516}$
9. اختيارِ مهندسةٍ ميكانيكيةٍ، أوْ مهندسةٍ تُفضِّلُ مبحثَ الرياضياتِ؟ $\frac{335}{516}$
10. اختيارِ مهندسةٍ لا تُفضِّلُ مبحثَ الرياضياتِ، لكنَّها ليسَتْ مهندسةً كيميائيةً؟ $\frac{171}{516}$



## الدرسُ 5
## احتمالاتُ الحوادثِ المستقلةِ والحوادثِ غيرِ المستقلةِ
## Probability of Independent and Dependent Events



**يحتوي كيسٌ على 3 كراتٍ زجاجيةٍ حمراءَ (R)، وَكرتيْنِ زجاجيتيْنِ زرقاويْنِ (B)، علمًا بأنَّ جميعَ الكراتِ مُتماثِلةٌ. إذا سُحِبَتْ منَ الكيسِ كرتانِ على التوالي معَ الإرجاعِ:**

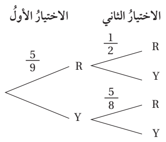



1. أُكمِلُ الشجرةَ الاحتماليةَ المجاورةَ.

أنظر ملحق الإجابات.

2. أَجِدُ احتمالَ أنْ تكونَ الكرتانِ المسحوبتانِ منَ اللونِ نفسِهِ. $\frac{13}{25}$
3. أَجِدُ احتمالَ أنْ تكونَ واحدةٌ على الأقلِّ منَ الكراتِ المسحوبةِ حمراءَ اللونِ. $\frac{21}{25}$
4. أَجِدُ احتمالَ ألّا تكونَ الكرتانِ المسحوبتانِ حمراويْنِ. $\frac{16}{25}$

**يحتوي كيسٌ على 5 حبّاتِ حلوى بنكهةِ النعناعِ (R)، وَ4 حبّاتٍ أُخرى بنكهةِ الكراميلِ (Y)، علمًا بأنَّ جميعَ الحبّاتِ مُتماثِلةٌ. اختارَ طفلٌ منَ الكيسِ حبَّةَ حلوى عشوائيًّا وأكلَها، ثمَّ اختارَ حبَّةً أُخرى عشوائيًّا وأكلَها:**




5. أُكمِلُ الشجرةَ الاحتماليةَ المجاورةَ. أنظر ملحق الإجابات.
6. ما احتمالُ أنْ يكونَ الطفلُ قدَ أكلَ حبَّتَيْ حلوى بنكهةِ الكراميلِ؟ $\frac{1}{6}$
7. مــا احتمالُ أنْ يكونَ الطفلُ قدْ أكلَ حبَّةَ حلوى بنكهةِ النعناعِ في المرَّةِ الثانيةِ، علمًا بأنَّهُ أكلَ حبَّةً بنكهةِ الكراميلِ في المرَّةِ الأولى؟ $\frac{5}{8}$

**إذا كانَ $P(A) = 0.5, P(B) = 0.7, P(A \cup B) = 0.8$، فأَجِدُ:**

8. $P(A \cap B)$

$P(A \cap B) = 0.4$

9. $P(B \mid A)$

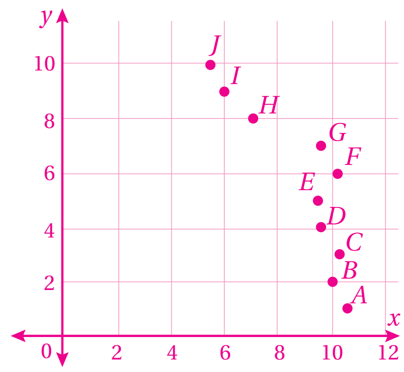
$P(B \mid A) = \frac{4}{5} = 0.8$

10. $P(A \mid B)$

$P(A \mid B) = \frac{4}{7} \approx 0.57$

11. أُلقِيَ حجرُ نردٍ منتظمٍ عشوائيًّا مرَّتيْنِ متتاليتيْنِ، وجُمِعَ الرقمانِ الظاهرانِ على الوجهِ العلويِّ. أَجِدُ احتمالَ أنْ يكونَ المجموعُ 8 إذا ظهرَ الرقمُ 5 مرَّةً واحدةً على الأقلِّ. $P(A \mid B) = \frac{2}{11} \approx 0.18$

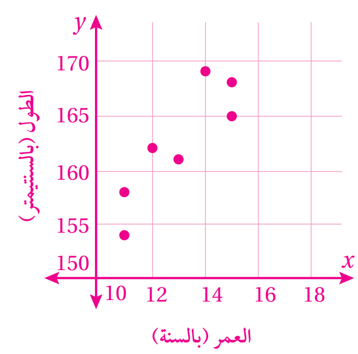
## الدرس 1 (أتحقق من فهمي 2):




يوجد ارتباط قوي ســالب بين $x$ و $y$؛ إذ يُمثِّل $x$ سعر السيارة بآلاف الدنانير، ويُمثِّل $y$ عمرها بالسنوات.

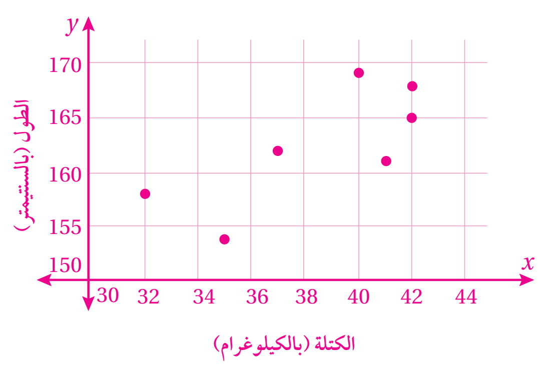
## الدرس 1:

4)



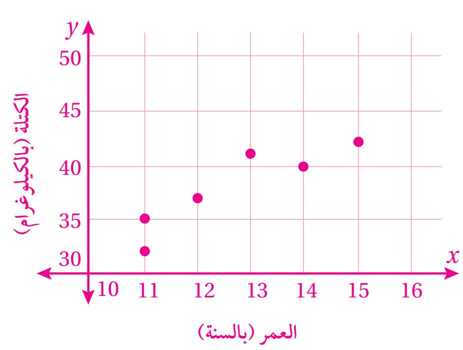

يوجد ارتباط قوي موجب بين عمر اللاعبة وطولها.

5)



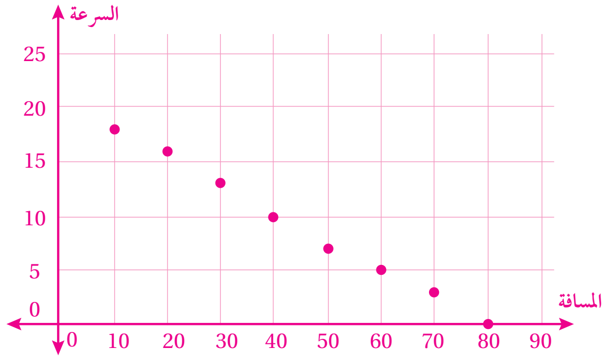

يوجد ارتباط ضعيف موجب بين طول اللاعبة وكتلة جسمها.

6)

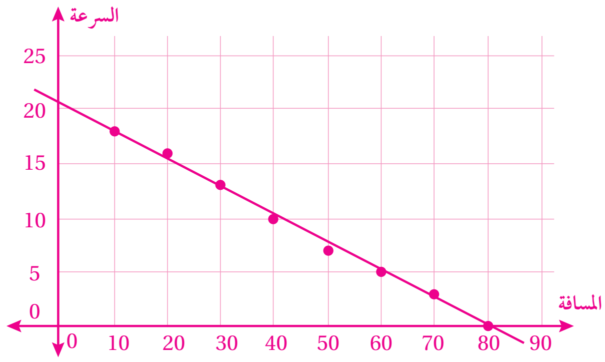



يوجد ارتباط قوي موجب بين عمر اللاعبة وكتلة جسمها.

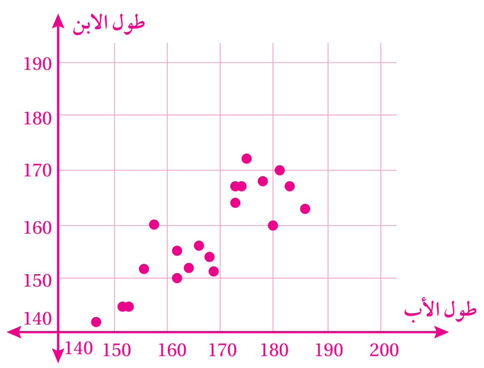
7)




8)

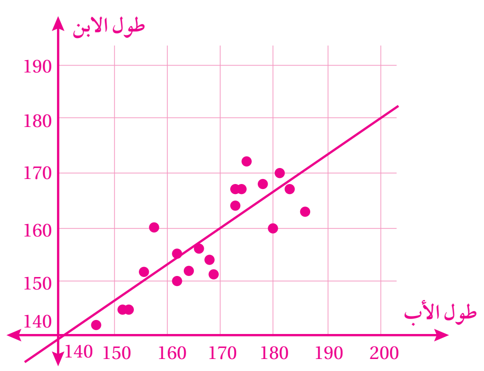



14)




15) صحيح؛ لأنَّ التمثيل البياني مســتقيم، وميلــه موجب؛ ما يعني أنَّ الارتباط موجب.

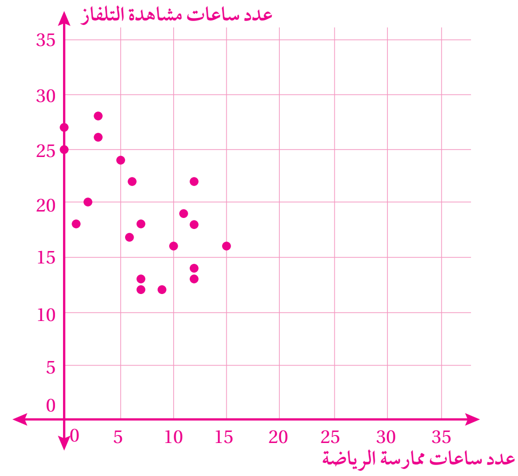
16)




معادلة المستقيم الأفضل مطابقة هي:

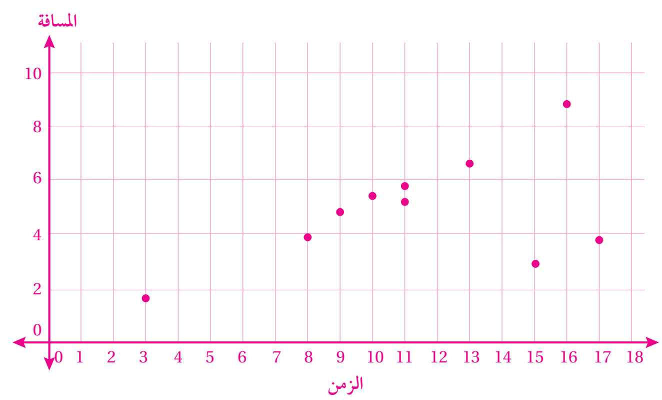
$$y = 0.68\,x + 43.2$$

**17)**

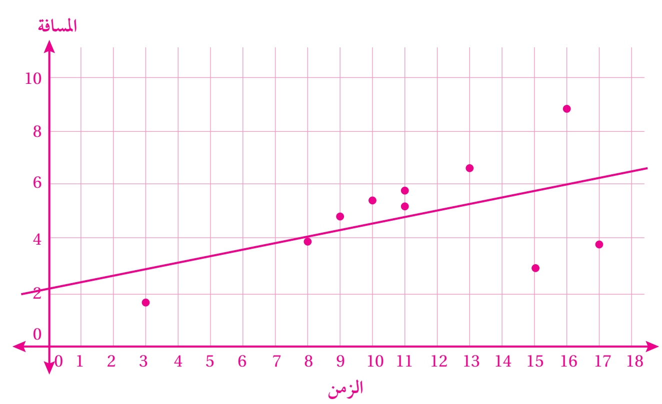



**18)** لا، لأنَّ العدد 8 خارج بيانات ساعات مشاهدة التلفاز المعطاة في الدراسة.

**19)**



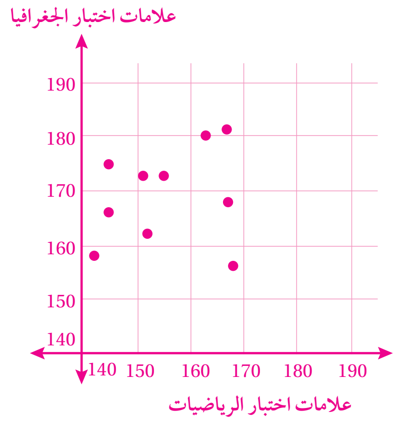

**20)**




معادلة المستقيم الأفضل مطابقة هي:

$y = 0.24\,x + 2.2$

**24)**



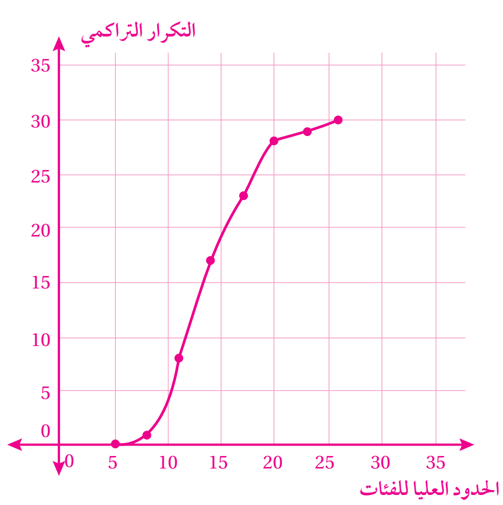

منى؛ فبناءً على شكل الانتشار، تبدو النقطة التي تُمثِّل درجاتها في الاختبارين بعيدة عن بقية النقاط، وهي الوحيدة التي كانت علامتها في اختبار الجغرافيا أقل من علامة اختبار الرياضيات؛ إذ يُلاحَظ أنَّ علامة اختبار الجغرافيا كانت أكبر من علامة اختبار الرياضيات لبقية الطالبات. ولأنَّ علامتها في الرياضيات هي العليا، وعلاماتها في الجغرافيا هي الدنيا.

## الدرس 2 (أتحقق من فهمي 1):

– أُنشِئ جدول التكرار التراكمي كما يظهر تاليًا.

| التكرار التراكمي $y$ | الحدود العليا للفئات $x$ |
|---|---|
| 0 | 5 |
| 1 | 8 |
| 8 | 11 |
| 17 | 14 |
| 23 | 17 |
| 28 | 20 |
| 29 | 23 |
| 30 | 26 |

– أُعيِّن النقطتين $(x, y)$ في المستوى الإحداثي، وأصل بينهما بمنحى متصل كما في الشكل الآتي.



## الدرس 2 (أتحقق من فهمي 2):

a) رتبة الوسيط هي: $50\% \times 200 = 100$

الوسيط $Q_2 = 63$ تقريبًا.

b) رتبة $Q_1$ هي: $25\% \times 200 = 50$

إذن، $Q_1 \approx 45$

رتبة $Q_2$ هي: $75\% \times 200 = 150$

إذن، $Q_2 \approx 80$

المدى الربيعي هو: $IQR = Q_3 - Q_1$

$= 80 - 45$

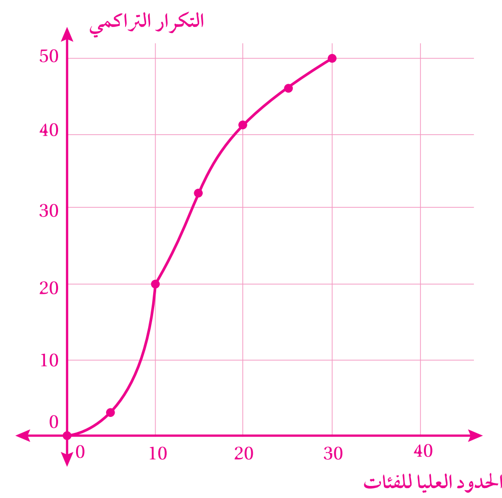
$= 35$

c) $85\% \times 200 = 170$

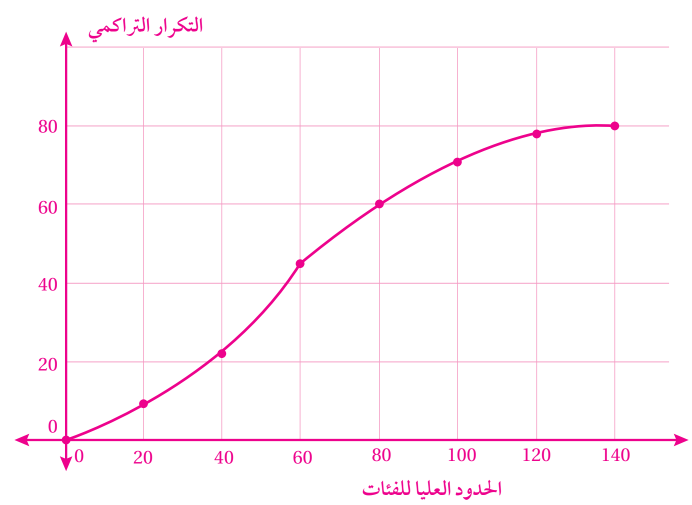
إذن، المئين 85 يساوي 88 تقريبًا.

## الدرس 2:

1)




8)




9) الوسيط: $Q_2 \approx 56$

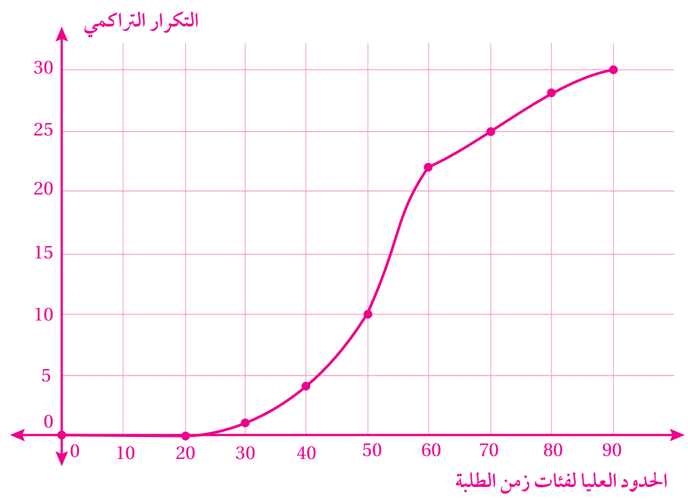
$IQR = Q_3 - Q_1$

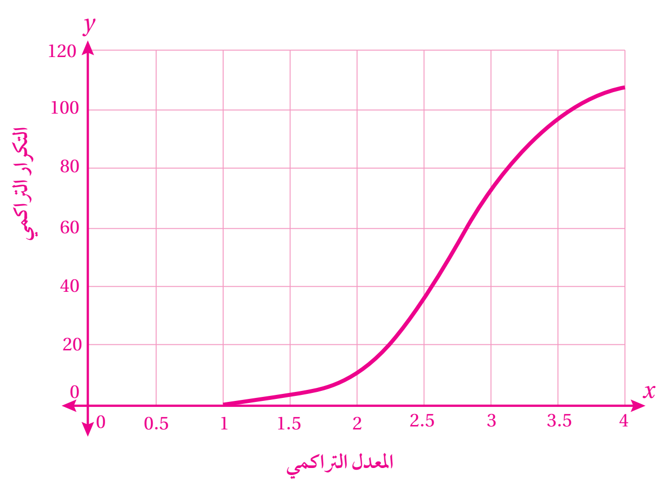
$= 80 - 37$

$= 43$

10) 16% تقريبًا.

11)




12) (للطلبة) الوسيط: $Q_2 \approx 54$

$IQR = Q_3 - Q_1$

$= 60 - 44$

$= 16$

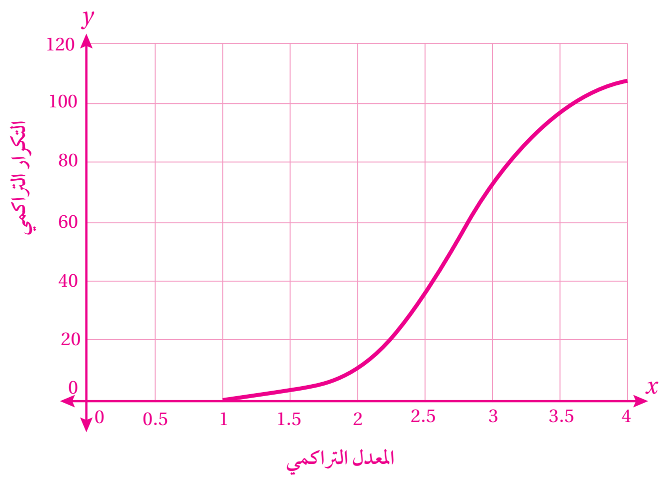
(للمُعلِّمين) الوسيط: $Q_2 \approx 56$

$IQR = Q_3 - Q_1$

$= 65 - 48$

$= 17$

14)




15) الوسيط: $Q_2 \approx 2.8$

$IQR = Q_3 - Q_1$

$= 3.2 - 2.4$

$= 0.8$

18) (النموذج A)

الوسيط: $Q_2 \approx 68$

$IQR \approx 28$

(النموذج B)

الوسيط: $Q_2 \approx 57$

$IQR \approx 18$

بما أنَّ قيمتي الوسيط والمدى الربيعي للنموذج B أقل من قيمتي الوسيط والمدى الربيعي (على الترتيب) للنموذج A، فإنَّ النموذج B هو الأصعب.

**الدرس 3 (أتحقق من فهمي 3):**

| فئات العمر | $f$ | $x$ | $x^2$ | $f \times x$ | $f \times x^2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 6−8 | 15 | 7 | 49 | 105 | 735 |
| 9−11 | 10 | 10 | 100 | 100 | 1000 |
| 12−14 | 25 | 13 | 169 | 325 | 4225 |
| المجموعُ | **50** | | | **530** | **5960** |

$$\mu = \frac{\sum x \times f}{\sum f} = \frac{530}{50} = 10.6$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x^2 \times f) - (\sum f)\,(\mu)^2}{\sum f}$$

$$= \frac{5960 - (50)(10.6)^2}{50}$$

$$= 6.84$$

$\sigma = \sqrt{6.84} \approx 2.62$، وهي القيمة نفسها التي سبق حسابها باستعمال الصيغة الأولى.

**الدرس 3 (أتحقق من فهمي 4):**

| $x$ | $f$ | $x^2$ | $f \times x$ | $f \times x^2$ |
|---|---|---|---|---|
| 3 | 3 | 9 | 9 | 27 |
| 5 | 5 | 25 | 25 | 125 |
| 7 | 6 | 49 | 42 | 294 |
| 9 | 4 | 81 | 36 | 324 |
| 11 | 2 | 121 | 22 | 242 |
| المجموع | **20** | | **134** | **1012** |

$$\mu = \frac{\sum x \times f}{\sum f} = \frac{134}{20} = 6.7$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x^2 \times f) - (\sum f)\,(\mu)^2}{\sum f}$$

$$= \frac{1012 - (20)(6.7)^2}{20}$$

$$= 5.71$$

$$\sigma = \sqrt{5.71} \approx 2.39$$

الدرس 3:

4) الطريقة الأولى:

| $x$ | $f$ | $x \times f$ | $x-\mu$ | $(x-\mu)^2$ | $(x-\mu)^2 \times f$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 90 | 2 | 180 | −42.61 | 1815.6121 | 3631.2242 |
| 110 | 5 | 550 | −22.61 | 511.2121 | 2556.0605 |
| 130 | 7 | 910 | −2.61 | 6.8121 | 47.6847 |
| 150 | 6 | 900 | 17.39 | 302.4121 | 1814.4726 |
| 170 | 3 | 510 | 37.39 | 1398.0121 | 4194.0363 |
| المجموع | **23** | **3050** | | | **12243.4783** |

$$\mu = \frac{\sum x \times f}{\sum f} = \frac{3050}{23} \approx 132.61$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x-\mu)^2 \times f}{\sum f}$$

$$= \frac{12243.4783}{23} \approx 532$$

$$\sigma = \sqrt{532} \approx 23.07$$

الطريقة الثانية:

| $x$ | $f$ | $x^2$ | $f \times x$ | $f \times x^2$ |
|---|---|---|---|---|
| 90 | 2 | 8100 | 180 | 16200 |
| 110 | 5 | 12100 | 550 | 60500 |
| 130 | 7 | 16900 | 910 | 118300 |
| 150 | 6 | 22500 | 900 | 135000 |
| 170 | 3 | 28900 | 510 | 86700 |
| المجموع | **23** | | **3050** | **416700** |

$$\mu = \frac{\sum x \times f}{\sum f} = \frac{3050}{23} \approx 132.61$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x^2 \times f) - (\sum f)\,(\mu)^2}{\sum f}$$

$$= \frac{416700 - (23)(132.61)^2}{23}$$

$$\approx 532$$

$$\sigma = \sqrt{532} \approx 23.07$$

5) فريق النسور: $\mu = 187.5$

$\sigma^2 = 101.25$

فريق الأسود: $\mu = 187.5$

$\sigma^2 = 85.05$

10) الشــكل الأيمن: $\sigma^2 \approx 157.14$، والشكل الأيسر: $\sigma^2 \approx 150.8$، والاختلاف بينهما مردُّه إلى اختلاف شــكل توزيع البيانات؛ ففي الشكل الأيمن تبدو البيانات مُوزَّعة طبيعيًّا، أمّا في الشكل الأيسر فتوزيع البيانات ملتوٍ نحو اليمين.

11) أُنشِئ جدولًا على النحو الآتي:

| $x$ | $f$ | $x^2$ | $f \times x$ | $f \times x^2$ |
|---|---|---|---|---|
| 72.5 | 6 | 5256.25 | 435 | 31537.5 |
| 77.5 | 8 | 6006.25 | 620 | 48050 |
| 82.5 | 4 | 6806.25 | 330 | 27225 |
| 87.5 | 2 | 7656.25 | 175 | 15312.5 |
| المجموع | **20** | | **1560** | **122125** |

$$\mu = \frac{\sum x \times f}{\sum f} = \frac{1560}{20} = 78$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x^2 \times f) - (\sum f)\,(\mu)^2}{\sum f}$$

$$= \frac{122125 - (20)(78)^2}{20}$$

$$= 22.25$$

$$\sigma = \sqrt{22.25} \approx 4.72$$

إذن، قول المدير المالي صحيح.

13) ســتختلف قيمة التباين عن القيمة الدقيقة عند تقديرها بعد تنظيم البيانــات في جــداول ذات فئات وتكرارات بحســب طول الفئة المُحــدَّدة. وكلَّما زاد طــول الفئة قلَّ عدد الفئــات في الجدول، وقلَّت الدقة في تقدير التباين.

14) نعم، يمكن تقدير التباين؛ لأنَّ حدود الفئات معطاة، ويمكن تحديد التكرار المقابل لكل فئة بطرح التكرار التراكمي السابق من التكرار التراكمي اللاحق والمقابل للحدود العليا للفئات، ثم إنشاء الجدول على النحو الآتي:

| التكرار | الفئات |
|---|---|
| $10-0=10$ | $0<x\le 10$ |
| $22-10=12$ | $10<x\le 20$ |
| $44-22=22$ | $20<x\le 30$ |
| $70-44=26$ | $30<x\le 40$ |
| $88-70=18$ | $40<x\le 50$ |
| $100-88=12$ | $50<x\le 60$ |

### الدرس 4 إجابة سؤال بند (أتحقق من فهمي 2):

**a)** $P(A\cap B)=P(\varnothing)=0$

**b)** $P(B\cap \overline{A})=P(B-A)=P(B)-P(A\cap B)=\frac{1}{4}-0=\frac{1}{4}$

**c)** $P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{4}\right)=\frac{11}{20}$

### الدرس 4 إجابة سؤال بند (أتحقق من فهمي 3):

ليكن $A$ حادث اختيار عدد أولي، و $B$ حادث اختيار عدد يقسم على 4. ومن ثَمَّ، فإنَّ:

$$A=\{2,3,5,7\},\ B=\{4,8\},\ A\cap B=\varnothing$$

أيْ إنَّ الحادثين متنافيان.

**a)** $P(A\cap B)=P(\varnothing)=0$

**b)** $P(A\cup B)=P(A)+P(B)=\frac{4}{8}+\frac{2}{8}=\frac{3}{4}$

### الدرس 4 إجابة سؤال بند (أتحقق من فهمي 4):

ليكن الحادث A: اختيار عدد أولي، والحادث B: اختيار عدد من عوامل 10

إذن، $A=\{2,3,5,7\},\ B=\{1,2,5,10\},\ A\cap B=\{2,5\}$

أيْ إنَّ الحادثين A, B غير متنافيين.

**a)** $P(A\cap B)=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$

**b)** $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$$=\frac{4}{10}+\frac{4}{10}-\frac{2}{10}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$$

### الدرس 4 إجابة سؤال بند (أتحقق من فهمي 5):

**a)** $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$=0.5+0.3-0.2=0.6$

**b)** $P(\overline{B})=1-P(B)=1-0.3=0.7$

**c)** $P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)=0.5-0.2=0.3$

**d)** $P(A\cup \overline{B})=P(A)+P(\overline{B})-P(A\cap \overline{B})$

$=P(A)+1-P(B)-P(A-B)$

$=P(A)+1-P(B)-(P(A)-P(A\cap B))$

$=1-P(B)+P(A\cap B)$

$=1-0.3+0.2=0.9$

**e)** $P(\overline{A}\cap \overline{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)$

$=1-0.6=0.4$

### الدرس 4:

4) A : عدد من مضاعفات 7

B: عدد من مضاعفات 5

إذن،

$A=\{7,14\},\ B=\{5,10,15,20\},\ A\cap B=\varnothing$

$P(A\cap B)=0$

5) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

$=\frac{2}{20}+\frac{4}{20}=\frac{6}{20}=\frac{3}{10}$

6) C : عدد فردي.

D: عدد يقبل القسمة على 4

إذن،

$C=\{1,3,5,7,9,11,13,15,17,19\}$,

$D=\{4,8,12,16,20\},\ C\cap D=\varnothing$

$P(C\cap D)=0$

7) $P(C\cup D)=P(C)+P(D)$

$=\frac{10}{20}+\frac{5}{20}=\frac{15}{20}=\frac{3}{4}$

8) $P(A\cap B)=P(\varnothing)=0$

9) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)=0.4+0.25=0.65$

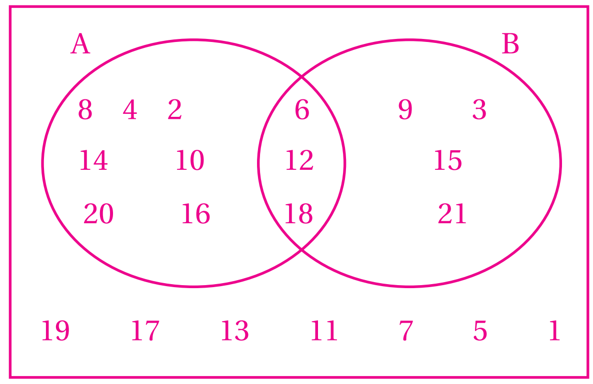
10) $P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-0.65=035$

11) $P(A-B)=P(A)=0.4$

12) A : عدد زوجي.

B: عدد من مضاعفات 3

إذن،




$P(\text{A}) = \frac{10}{21}$

13) $P(\text{B}) = \frac{7}{21} = \frac{1}{3}$

14) $P(\text{A}\cap\text{B}) = \frac{3}{21} = \frac{1}{7}$

15) $P(\text{A}\cup\text{B}) = \frac{14}{21} = \frac{2}{3}$

16) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$= 0.3 + 0.5 - 0.15 = 0.65$

17) $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0.3 = 0.7$

18) $P(B{-}A) = P(B) - P(A \cap B) = 0.5 - 0.15 = 0.35$

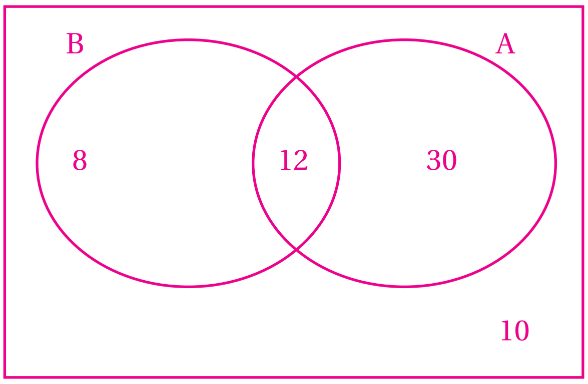
19) $P(A \cup \overline{B}) = P(\overline{B}) + P(A \cap B) = 1 - 0.5 + 0.15 = 0.65$

20) $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - 0.15 = 0.85$

21) A : لاعب يمارس كرة القدم.

B: لاعب يمارس كرة السلَّة.

إذن،




$P(\text{A}\cap\text{B}) = \frac{12}{60} = \frac{1}{5}$

22) $P(\text{A}\cap\overline{\text{B}}) = \frac{30}{60} = \frac{1}{2}$

23) $P(\overline{\text{A}}\cap\text{B}) = \frac{8}{60} = \frac{2}{15}$

24) $P(\overline{\text{A}}\cap\overline{\text{B}}) = \frac{10}{60} = \frac{1}{6}$

26) $P(R \cup S) = P(R) + P(S) - P(R \cap S)$

$0.75 = 3P\,(R \cap S) + 3P(R \cap S) - P(R \cap S)$

$0.75 = 5P\,(R \cap S) \Longrightarrow P(R \cap S) = 0.15$

27) $P(R) = 3P(R \cap S) = 0.45$

28) $P(\overline{S}) = 1 - P(S) = 1 - 0.45 = 0.55$

29) $P(\overline{R} \cap \overline{S}) = P(\overline{R \cup S}) = 1 - P(R \cup S)$

$= 1 - 0.75 = 0.25$

30) قول زيد غير صحيح؛ لأنَّ فضاء العيِّنة لنتيجة مباراة كرة القدم فيه 3 نواتج، هي: الفوز، أو الخسارة، أو التعادل. فمتممة الفوز ليست خسارة، وإنَّما هي خسارة أو تعادل. وبذلك، فإنَّ احتمال الخسارة أو التعادل هو 0.7، واحتمال الخسارة هو أقل من 0.7

**الدرس 5 إجابة سؤال بند (أتحقق من فهمي 1):**

$$P(A\cap B) = P(A) \times P(B)$$

$$= \frac{3}{6} \times \frac{2}{6} = \frac{1}{6}$$

**الدرس 5 إجابة سؤال بند (أتحقق من فهمي 3):**

**a)** $P(R\cap R) + P(G\cap G)$

$$= \frac{6}{14} \times \frac{5}{13} + \frac{8}{14} \times \frac{7}{13} = \frac{43}{91}$$

**b)** $P(R\cap G) + P(G\cap R)$

$$= \frac{6}{14} \times \frac{8}{13} + \frac{8}{14} \times \frac{6}{13} = \frac{48}{91}$$

**الدرس 5 إجابة سؤال بند (أتحقق من فهمي 4):**

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ , $A = \{4, 5, 6\}$ ,

$B = \{2, 4, 6\}$ , $A \cap B = \{4, 6\}$

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{2}{6}}{\frac{3}{6}} = \frac{2}{3}$$

**الدرس 5:**

**1)** $P(R\cap Y) = P(R) \times P(Y)$

$$= \frac{5}{10} \times \frac{2}{10} = \frac{1}{10}$$

**2)** $P(G\cap G) = P(G) \times P(G)$

$$= \frac{3}{10} \times \frac{3}{10} = \frac{9}{100}$$

**8)** $P(R\cap R) = P(R) \times P(R|R)$

$$= \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{10}$$

**9)** $P(B\cap B) = P(B) \times P(B|B)$

$$= \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{3}{10}$$

**10)** $P(R\cap B) + P(B\cap R)$

$P(R) \times P(B|R) + P(B) \times P(R|B)$

$$= \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} + \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

**11)** A : ناجح في الاختبار الأول.

B: ناجح في الاختبار الثاني.

إذن،

$$P(A\cap B) = P(A) \times P(B)$$

$$= \frac{75}{100} \times \frac{80}{100} = \frac{60}{100}$$

**12)** $P(A\cap \overline{B}) + P(B\cap \overline{A})$

$$= P(A) \times P(\overline{B}) + P(B) \times P(\overline{A})$$

$$= \frac{75}{100} \times \frac{20}{100} + \frac{40}{100} \times \frac{25}{100} = \frac{25}{100}$$

**13)** $P(B) = \frac{55}{100} = \frac{11}{20}$

**14)** $P(S) = \frac{50}{100} = \frac{1}{2}$ , $P(B\cap S) = \frac{22}{100} = \frac{11}{50}$

$$P(B|S) = \frac{P(B\cap S)}{P(S)} = \frac{\frac{22}{100}}{\frac{50}{100}} = \frac{22}{50} = \frac{11}{25}$$

**15)** $P(S|B) = \frac{P(B\cap S)}{P(B)} = \frac{\frac{22}{100}}{\frac{55}{100}} = \frac{22}{55} = \frac{2}{5}$

**16)** A : لديه خبرة سابقة.

B: لديه شهادة جامعية.

إذن،

$P(A) = \frac{59}{90}$ , $P(B) = \frac{81}{90}$ , $P(A\cap B) = \frac{54}{90}$

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{54}{90}}{\frac{81}{90}} = \frac{54}{81} = \frac{2}{3}$$

**17)** $P(\overline{B}|A) = \frac{P(A\cap \overline{B})}{P(A)} = \frac{\frac{5}{90}}{\frac{59}{90}} = \frac{5}{59}$

16)

| $x$ | $f$ | $x^2$ | $f \times x$ | $f \times x^2$ |
|---|---|---|---|---|
| 224 | 2 | 50176 | 448 | 100352 |
| 274 | 3 | 75076 | 822 | 225228 |
| 324 | 6 | 104976 | 1944 | 629856 |
| 374 | 3 | 139876 | 1122 | 419628 |
| 424 | 4 | 179776 | 1696 | 719104 |
| 474 | 2 | 224676 | 948 | 449352 |
| المجموع | **20** | | **6980** | **2543520** |

$$\mu = \frac{\sum x \times f}{\sum f} = \frac{6980}{20} = 349$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum(x^2 \times f) - (\sum f)(\mu)^2}{\sum f}$$

$$= \frac{2543520 - (20)(349)^2}{20}$$

$$= 5375$$

$$\sigma = \sqrt{5375} \approx 73.31$$

17) $P(R \cap T) = \frac{5}{50} = \frac{1}{10}$

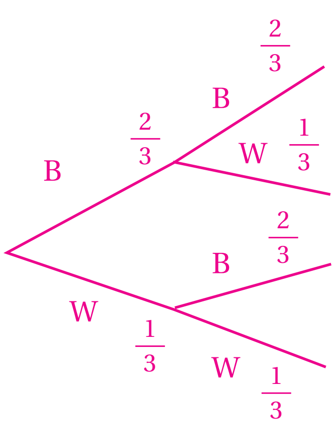
18) $P(\overline{R} \cap T) = \frac{11}{30}$

19) $P(\overline{R} \mid T) = \frac{11}{16}$

20) $P(R_1 \cap R_2) = \frac{38}{245}$

21) $P(W_1 \cap W_2) = \frac{1}{9}$

22) $P(B \cap W) + P(W \cap B) = \frac{4}{9}$




$P(B, B) = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$

$P(B, W) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$

$P(W, B) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$

$P(W, W) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$

23) $P(B \cap W) + P(W \cap B) + P(B \cap B)$

$\frac{2}{9} + \frac{2}{9} + \frac{4}{6} = \frac{8}{9}$

18) $P(R_1 \cap R_2) = P(R_1) \times P(R_2 \mid R_1)$

$= 0.7 \times 0.8 = 0.56$

19) $P(G_1 \cap G_2) = P(G_1) \times P(G_2 \mid G_1)$

$= 0.3 \times 0.6 = 0.18$

20) $P(R \cap G) + P(G \cap R) = P(R) \times P(G|R) + P(G) \times P(R|G)$

$= 0.7 \times 0.2 + 0.3 \times 0.4 = 0.26$

21) $P(T) = 90\%, P(M) = 25\%$

$P(T \cap \overline{M}) = P(T) \times P(\overline{M})$

$= 0.90 \times 0.75 = 0.675$

22) $P(\overline{M} \cap \overline{T}) = P(\overline{M}) \times P(\overline{T})$

$= 0.75 \times 0.1 = 0.075$

23) $P(M \cup T) = P(M) + P(T) - P(M \cap T)$

$= 0.25 + 0.9 - 0.25 \times 0.9 = 0.925$

29) $P(A|B) = 0$ ؛ لأنّ $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ ، و $P(A \cap B) = 0$؛ شرط أنّ $P(B) \neq 0$

30) غير صحيح؛ لأنّ $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$، و $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$، ولا يكونان متساويين إلا إذا كان $P(A) = P(B)$ ، وكلاهما لا يساوي صفرًا.

**إجابات أسئلة اختبار نهاية الوحدة:**

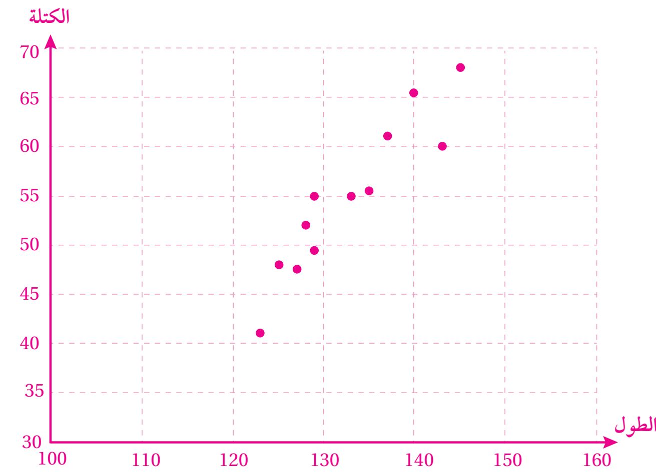
12) $Q_2 = 62$ g، وهذا يعني أنّ 50% من البيض (أيّ 150 بيضة) كتلة كلٍّ منها أكثر من 62 g

13) $IQR = Q_3 - Q_1 = 72 - 52 = 20$، وهذا يعني أنّ 50% من البيض (أيّ 150 بيضة) كتلة كلٍّ منها تقع بين 52 g و 72g

14) المئين 80 يساوي 73 g تقريبًا، وهذا يعني أنّ 80% من البيض (أيّ 240 بيضة) كتلة كلٍّ منها أقل من 73 g، أو أنّ 20% من البيض (أيّ 60 بيضة) كتلة كلٍّ منها تزيد على 73 g

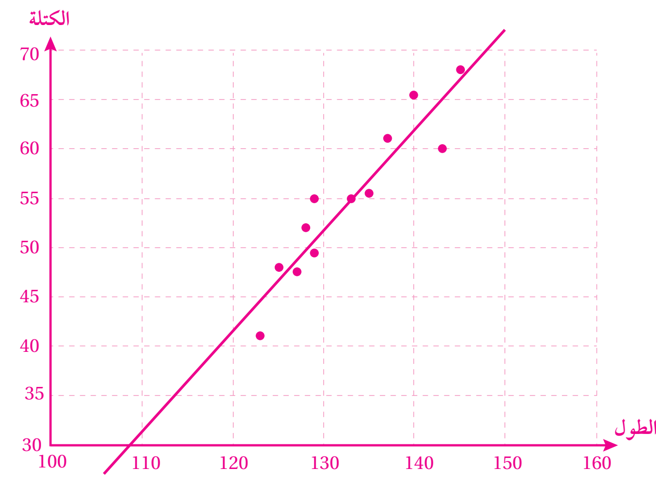
## إجابات أسئلة كتاب التمارين، الدرس 1:

**4)**

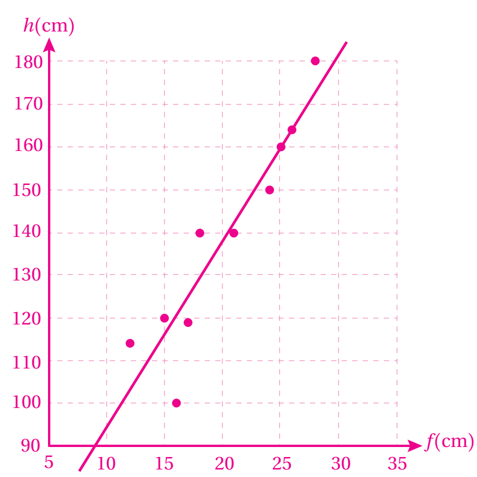



الارتباط موجب قوي

**5)**




**9)**



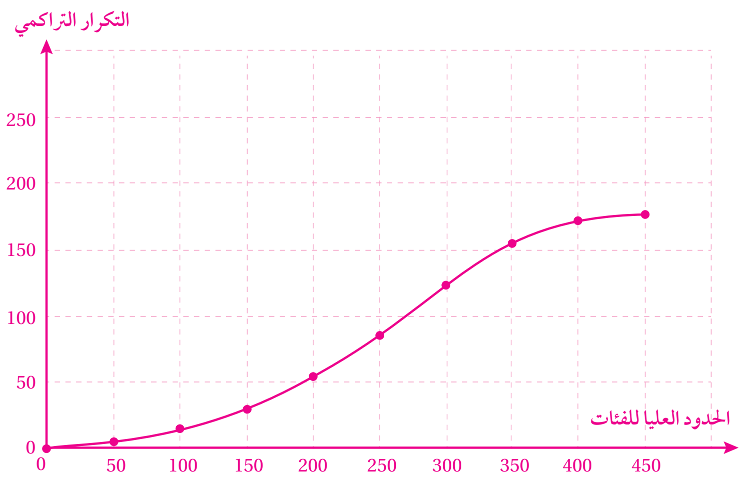

$y = 4.38x + 50.18$

## إجابات أسئلة كتاب التمارين، الدرس 2:

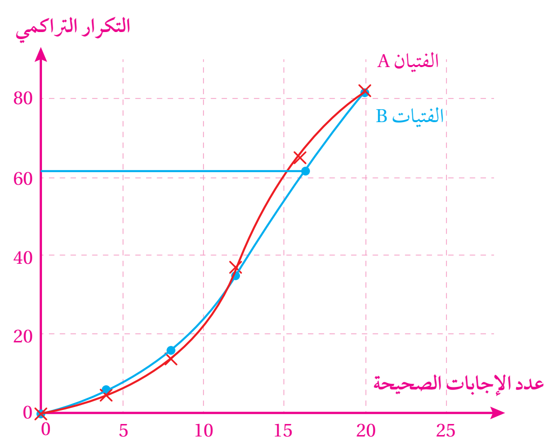
**4)** الجدول التكراري التراكمي

| التكرار التراكمي | الحدود العليا |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 6 | 50 |
| 15 | 100 |
| 30 | 150 |
| 55 | 200 |
| 86 | 250 |
| 123 | 300 |
| 155 | 350 |
| 172 | 400 |
| 177 | 450 |

**5)** المنحنى التكراري التراكمي




**8)** المنحنى التكراري التراكمي للفتيان A ، وللفتيات B



## إجابات أسئلة كتاب التمارين، الدرس 3:

(3

| $x$ | $f$ | $x^2$ | $f \times x$ | $f \times x^2$ |
|---|---|---|---|---|
| 2.5 | 4 | 6.25 | 10 | 25 |
| 7.5 | 9 | 56.25 | 67.5 | 506.25 |
| 12.5 | 20 | 156.25 | 250 | 3125 |
| 17.5 | 7 | 306.25 | 122.5 | 2143.75 |
| 22.5 | 5 | 506.25 | 112.5 | 2531.25 |
| المجموع | **45** | | **562.5** | **8331.25** |

$$\mu = \frac{\sum x \times f}{\sum f} = \frac{562.5}{45} = 12.5$$

## إجابات أسئلة كتاب التمارين، الدرس 4:

**4)** $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B)$

$0.3 = 1 - P(A \cup B) \Longrightarrow P(A \cup B) = 0.7$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$0.7 = 0.5 + 0.6 - P(A \cap B) \Longrightarrow P(A \cap B) = 0.4$

**5)** $P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B) = 0.5 - 0.4 = 0.1$

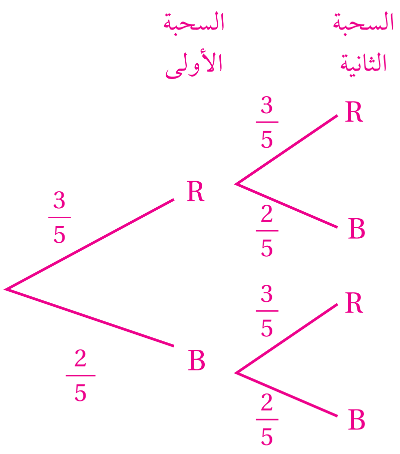
**6)** $P(B \cup \bar{A}) = P(B) + P(\bar{A}) - P(\bar{A} \cap B)$

$= P(B) + P(\bar{A}) - (P(B) - P(A \cap B))$

$= P(\bar{A}) + P(A \cap B) = 0.5 + 0.4 = 0.9$

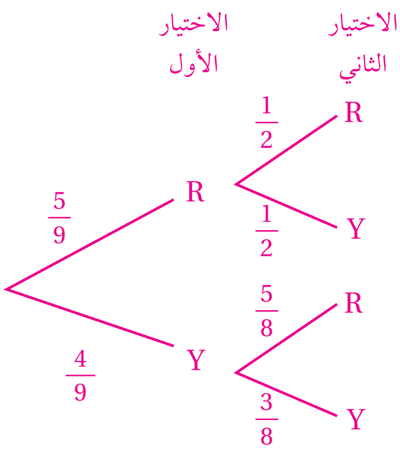
## إجابات أسئلة كتاب التمارين، الدرس 5:

(1




| النواتج | الاحتمال |
|---|---|
| (R, R) | $\frac{3}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{9}{25}$ |
| (R, B) | $\frac{3}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{6}{25}$ |
| (B, R) | $\frac{2}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{6}{25}$ |
| (B, B) | $\frac{2}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{4}{25}$ |

(5




| النواتج | الاحتمال |
|---|---|
| (R, R) | $\frac{5}{9} \times \frac{1}{2} = \frac{5}{18}$ |
| (R, Y) | $\frac{5}{9} \times \frac{1}{2} = \frac{5}{18}$ |
| (Y, R) | $\frac{4}{9} \times \frac{5}{8} = \frac{5}{18}$ |
| (Y, Y) | $\frac{4}{9} \times \frac{3}{8} = \frac{1}{6}$ |