المملكة الأردنية الهاشمية
وزارة التربية والتعليم

المركز الوطني
لتطوير المناهج
National Center
for Curriculum
Development

الرياضيات

الصف الحادي عشر- الفرع الأدبي

الفصل الدراسي الثاني

دليل المُعلِّم

11

فريق التأليف

د. عمر محمد أبوغليون (رئيسًا)

هبه ماهر التميمي
يوسف سليمان جرادات
أ.د. محمد صبح صبابحه

الناشر: المركز الوطني لتطوير المناهج

يسر المركز الوطني لتطوير المناهج استقبال آرائكم وملحوظاتكم على هذا الدليل عن طريق العناوين الآتية:

☎ 06-5376262 / 237
06-5376266
P.O.Box: 2088 Amman 11941

@nccdjor
feedback@nccd.gov.jo
www.nccd.gov.jo

قررت وزارة التربية والتعليم استخدام هذا الدليل في مدارس المملكة الأردنية الهاشمية جميعها، بناء على قرار المجلس الأعلى للمركز الوطني لتطوير المناهج في جلسته رقم (2024/1)، تاريخ 2024/2/6 م، وقرار مجلس التربية والتعليم رقم (2024/13) تاريخ 2024/2/26 م بدءًا من العام الدراسي 2023 / 2024 م.

- Prepared Originally in English for the National Center for Curriculum Development. Amman - Jordan
- Translated to Arabic, adapted, customised and published by the National Center for Curriculum Development. Amman - Jordan

ISBN: 978 - 9923 - 41 - 413 - 2

المملكة الأردنية الهاشمية
رقم الإيداع لدى دائرة المكتبة الوطنية
(2023/2/812)

373.19

الأردن. المركز الوطني لتطوير المناهج

دليل المعلم: الصف الحادي عشر: الفرع الأدبي: الفصل الدراسي الثاني/ المركز الوطني لتطوير المناهج.– عمان: المركز، 2023

(140) ص.

ر.إ.: 2023/2/812

الواصفات: / **الرياضيات** / / **الأدلة** / / **المعلمون** / / **أساليب التدريس** / / **التعليم الثانوي**/

يتحمل المؤلف كامل المسؤولية القانونية عن محتوى مصنفه، ولا يعبّر هذا المصنف عن رأي دائرة المكتبة الوطنية.

التحكيم التربوي: د. خالد محمد أبو اللوم

التصميم الجرافيكي: راكان محمد السعدي

التحرير اللغوي: نضال أحمد موسى

British Library Cataloguing -in- Publication Data
A catalogue record for this publication is available from the Library.

منهاجي
متعة التعليم الهادف

الطبعة الأولى (التجريبية)

1444 هـ / 2023 م

المقدمة

يسرُّ المركز الوطني لتطوير المناهج أنْ يُقدِّم للمُعلِّمين والمُعلِّمات هذه الطبعة من دليل المُعلِّم للصف الحادي عشر للفرع الأدبي، آملًا أنْ تكون لهم مُرشِدًا وداعمًا في تدريس الطلبة وتقويمهم، بما يُحقِّق الأهداف المنشودة من تدريس كتب الرياضيات المُطوَّرة.

يحتوي دليل المُعلِّم على جميع المصادر التي تَلزم المُعلِّم/ المُعلِّمة، بَدْءًا بالنسخ المُصغَّرة من كتابي الطالب والتمارين، وانتهاءً بإجابات ما ورد فيهما من تدريبات ومسائل؛ ما يُغْني عن حمل هذين الكتابين إلى الغرفة الصفية. وكذلك يحتوي الدليل على جميع أوراق المصادر المشار إليها في الدروس، ويُمكِن للمُعلِّم/ للمُعلِّمة تصوير نسخ منها للطلبة؛ ما يُوفِّر عليهما جُهْد إعداد هذه الأوراق. استُهِلَّ الدليل بالصفحات التي تحمل عنوان «أهلًا بك في مناهج الرياضيات المُطوَّرة »، وتعرض العناصر الرئيسة في كلٍّ من كتابي الطالب والتمارين ودليل المُعلِّم، وتُبيِّن النهج المُعتمَد في كلٍّ منها بطريقة مُبسَّطة؛ لذا يجدر بالمُعلِّم/ المُعلِّمة قراءة هذه الصفحات بِتَروٍّ وتدبُّرٍ قبل البَدْء باستعمال الدليل.

روعي في إعداد الدليل تقديم خطة واضحة لسير الدرس، بَدْءًا بمرحلة التمهيد، ومرورًا بمراحل الاستكشاف، والتدريس، والتدريب، والإثراء، وانتهاءً بمرحلة الختام، إلى جانب إرشادات تساعد المُعلِّم/ المُعلِّمة على التخطيط الزمني للمهام في كل مرحلة، وتوظيف مختلف أدوات التدريس والتقويم التي يتضمَّنها المنهاج المُطوَّر، فضلًا عن الأخطاء المفاهيمة الشائعة والإرشادات للمعلمين/ للمعلمات حول كيفية معالجتها.

يُقدِّم الدليل أيضًا مقترحات لتنويع التعليم تساعد المُعلِّم/ المُعلِّمة على التعامل مع الطلبة كافةً، على اختلاف مستوياتهم الدراسية وأنماط تعلُّمهم؛ انسجامًا مع الاتجاهات الحديثة في تعلُّم الرياضيات وتعليمها. ولأنَّ الموضوعات الرياضية بعضها مبني على بعض؛ فقد قدَّم الدليل نتاجات التعلُّم السابق ونتاجات التعلُّم اللاحق في بداية كل وحدة، فضلًا عن أدوات تشخيص ومعالجة مناسبة، تساعد المُعلِّم/ المُعلِّمة على معالجة الضعف لدى الطلبة، وتهيئتهم للتعلُّم الحالي. يضاف إلى ذلك أنَّ تعرُّف المُعلِّم/ المُعلِّمة جميع الموضوعات الرياضية التي سوف يدرسها الطلبة في صفوف لاحقة (التعلُّم اللاحق) يُوفِّر له/ لها تصوُّرًا كافيًا عنها، ويجعل تخطيط الدروس أكثر دِقَّةً.

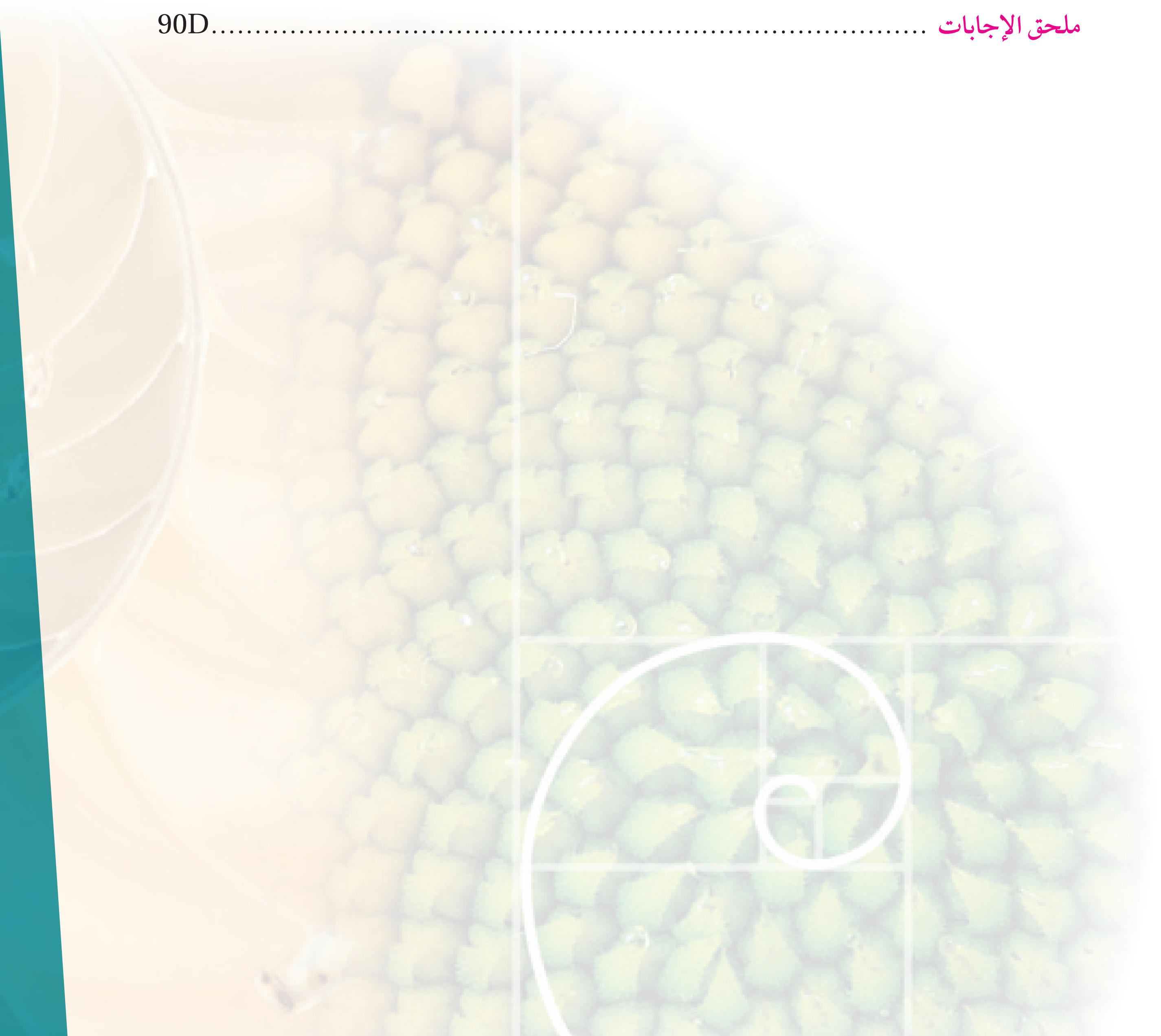
ونحن إذ نُقدِّم هذا الدليل، فإنّا نُؤمِّل أنْ ينال إعجاب زملائنا وزميلاتنا من المُعلِّمين والمُعلِّمات ويكون خير معين لهم/ لهنّ، ويجعل تعليم الرياضيات أكثر متعةً وسهولةً.

المركز الوطني لتطوير المناهج

قائمة المحتويات

منهاجي
متعة التعليم الهادف

قائمة المحتويات



أهلًا بك

في مناهج الرياضيات المُطوَّرة

عزيزي المُعلِّم/ عزيزتي المُعلِّمة، يسرُّنا في هذه المُقدِّمة أنْ نُبيِّن الأسس العلمية والتربوية التي قامت عليها مناهج الرياضيات المُطوَّرة بطريقة مُبسَّطة، وذلك بعرض بعض العناصر من كتاب الطالب، وكتاب التمارين، ودليل المُعلِّم، التي تتجلّى فيها تلك الجوانب العلمية والتربوية بوضوح. ونحن إذ نعرض هذه المُقدِّمة فإنّا نأمل أنْ تكون مُعينةً على فهم كيفية استعمال المناهج المُطوَّرة، وتوظيفها بصورة صحيحة داخل غرفة الصف، بما يُحقِّق الفائدة المنشودة منها.

تتناول المُقدِّمة الجوانب الآتية:

1. خطة الخطوات الست لتدريس الرياضيات.
2. أنواع التقويم وأدواته.
3. تعزيز لغة الرياضيات وإثراؤها.
4. التعلُّم باستعمال التكنولوجيا.
5. مهارات التفكير العليا.
6. الوصول إلى الطلبة كافةً.

وفي نهاية هذه المقدمة بعض استراتيجيات التدريس الشائعة؛ لتكون مرجعًا، ومُعينةً عند التخطيط لتقديم الدروس.

1 خطة الخطوات الست لتدريس الرياضيات:

يُقدِّم هذا الدليل خطة واضحة لسير الدرس، تحوي ست خطوات (مراحل)، هي: التهيئة، والاستكشاف، والتدريس، والتدريب، والإثراء، والختام. وتتضمَّن كل خطوة من هذه الخطوات مقترحات وإرشادات تساعد على تقديم الدرس بنجاح.

1 التهيئة

تهدف هذه المرحلة إلى تهيئة الطلبة لموضوع الدرس، ولكن دون ذكر لأيٍّ من أفكاره، وتوجد في هذا الدليل مقترحات تعين على تقديم التهيئة بنجاح في بند (التهيئة). قد يحوي هذا البند نشاطًا مبنيًّا على معرفة الطلبة السابقة؛ لذا يمكن في أثناء هذه المرحلة رصد بعض الأخطاء المفاهيمية وتصحيحها قبل بدء الدرس.

الدرس 1

نتاجات الدرس:

- تعرُّف الاقتران المُتشعِّب.
- إيجاد مجال الاقتران المُتشعِّب.
- إيجاد مدى الاقتران المُتشعِّب.
- تمثيل الاقتران المُتشعِّب بيانيًّا.
- حل مسائل وتطبيقات مُتنوِّعة على الاقترانات المُتشعِّبة.

نتاجات التعلُّم القبلي:

- إيجاد قيمة الاقتران عند قيمة معطاة.
- تمثيل الاقتران الخطي بيانيًّا.
- إيجاد معادلة مستقيم من تمثيل بياني معطى.

مراجعة التعلُّم القبلي:

- أُوجِّه الطلبة في بداية كل حصة إلى الفقرة (الفقرات) المُرتبِطة بما سيُقدَّم من موضوعات الدرس في الحصة (إنْ وُجِدت) ضمن صفحات **(أستعد لدراسة الوحدة)** في كتاب التمارين، ثم أطلب إليهم حل تدريباتها داخل الغرفة الصفية بصورة فردية.
- أتجوَّل بين الطلبة؛ لمتابعتهم أثناء الحل، وتحديد نقاط ضعفهم، وأُوجِّههم إلى مراجعة المثال عندما يواجهون صعوبة في الحل.

1 التهيئة

- أُوزِّع الطلبة إلى مجموعات ثنائية، ثم أُزوِّد كل مجموعة بورقة المصادر 1: **مجال الاقترانات ومداها.**
- أطلب إلى أفراد المجموعات الإجابة عن الأسئلة في ورقة المصادر.
- أُناقِش الطلبة في حل الأسئلة الوارد ذكرها في ورقة المصادر، وأطلب إليهم تبرير إجاباتهم.

8

الدرس 1

الاقترانات المتشعبة
Piecewise Functions

فكرة الدرس تعرُّف الاقتران المتشعب، وتمثيله بيانيًّا، وتحديد مجاله ومداه.

المصطلحات الاقتران المتشعب.

مسألة اليوم اتفقت مريم مع إحدى دور النشر على بيع كتاب لها لقاء حصولها على ما نسبته 10% من قيمة مبيعات أول 10000 نسخة من الكتاب، و15% من قيمة أيِّ مبيعات إضافية. إذا كان ثمن الكتاب الواحد 7 JD، فما المبلغ الذي ستأخذه مريم بعد بيع 12000 نسخة؟

يُسمَّى الاقتران المُعرَّف بقواعد مختلفة لأجزاء مجاله **اقترانًا متشعبًا** (piecewise function). فالاقتران المتشعب هو اقتران يدمج بين قاعدتي اقترانين أو أكثر.

لغة الرياضيات
تُعرَف الاقترانات المتشعبة أيضًا بالاقترانات المُعرَّفة بأكثر من قاعدة.

مثال 1

إذا كان: $f(x)=\begin{cases} x+1 & , -2 \leq x < 1 \\ 3 & , x \geq 1 \end{cases}$، فأُجيب عن الأسئلة الآتية:

1 أُحدِّد مجال $f(x)$.

ألاحِظ أنَّ الاقتران مُعرَّف بقاعدتين، هما:

- $f(x)=x+1$: تُستعمَل لحساب قِيَم الاقتران عندما تكون $-2 \leq x < 1$.
- $f(x)=3$: تُستعمَل لحساب قِيَم الاقتران عندما تكون $x \geq 1$.

إذن، مجال $f(x)$ هو الفترة $[-2, \infty)$.

2 أجد قيمة $f(-2)$.

العدد -2 ينتمي إلى الفترة $[-2, 1)$. إذن، أستعمل القاعدة الأولى:

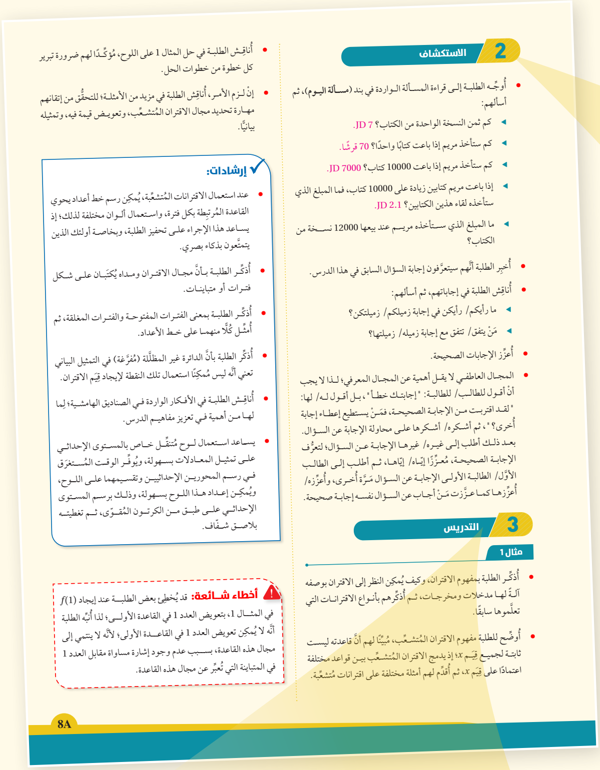
$f(x)=x+1$ القاعدة الأولى

أتذكَّر
العدد b لا ينتمي إلى الفترة $[a, b)$ التي تُكافِئ المتباينة: $a \leq x < b$، لكنَّه ينتمي إلى الفترة $[b, \infty)$ التي تُكافِئ المتباينة: $x \geq b$.

8

2 الاستكشاف

تهدف هذه المرحلة إلى إثارة فضول الطلبة لموضوع الدرس، ولكن دون تقديم معلومات جاهزة لهم؛ إذ يتعيَّن عليك في هذه المرحلة أداء دور تيسير التعلّم، وذلك بتوجيه الطلبة إلى قراءة المسألة الواردة في بند (مسألة اليوم) من كتاب الطالب، ومنحهم وقتًا كافيًا لدراستها والتفكير فيها، ثم الطلب إليهم الإجابة عن الأسئلة المقترحة في بند (الاستكشاف) من هذا الدليل. ليس شرطًا أنْ يتمكَّن الطلبة من الإجابة عن هذه الأسئلة بصورة صحيحة؛ لذا عليك تقبّل الإجابات، ثم النظر فيها لاحقًا بعد انتهاء الدرس، والتأكد من صحتها، علمًا بأنَّ تمارين بعض الدروس تُحيل الطلبة إلى المسألة في بند (مسألة اليوم)؛ لحلها في نهاية الدرس.



2 الاستكشاف

- أُوجِّه الطلبة إلى قراءة المسألة الواردة في بند (**مسألة اليوم**)، ثم أسألهم:
  - كم ثمن النسخة الواحدة من الكتاب؟ 7 JD.
  - كم ستأخذ مريم إذا باعت كتابًا واحدًا؟ 70 قرشًا.
  - كم ستأخذ مريم إذا باعت 10000 كتاب؟ 7000 JD.
  - إذا باعت مريم كتابين زيادة على 10000 كتاب، فما المبلغ الذي ستأخذه لقاء هذين الكتابين؟ 2.1 JD.
  - ما المبلغ الذي ستأخذه مريم عند بيعها 12000 نسخة من الكتاب؟
- أُخبِر الطلبة أنَّهم سيتعرَّفون إجابة السؤال السابق في هذا الدرس.
- أُناقِش الطلبة في إجاباتهم، ثم أسألهم:
  - ما رأيكم/ رأيكن في إجابة زميلكم/ زميلتكن؟
  - مَنْ يتفق/ تتفق مع إجابة زميله/ زميلتها؟
- أُعزِّز الإجابات الصحيحة.
- المجال العاطفي لا يقل أهمية عن المجال المعرفي؛ لذا لا يجب أنْ أقول للطالب/ للطالبة: "إجابتك خطأ"، بل أقول له/ لها: "لقد اقتربت من الإجابة الصحيحة، فمَنْ يستطيع إعطاء إجابة أُخرى؟"، ثم أشكره/ أشكرها على محاولة الإجابة عن السؤال. بعد ذلك أطلب إلى غيره/ غيرها الإجابة عن السؤال؛ لتعرُّف الإجابة الصحيحة، مُعزِّزًا إيّاه/ إيّاها، ثم أطلب إلى الطالب الأوَّل/ الطالبة الأولى الإجابة عن السؤال مَرَّة أُخرى، وأُعزِّزه/ أُعزِّزها كما عزَّزت مَنْ أجاب عن السؤال نفسه إجابة صحيحة.

3 التدريس

مثال 1

- أُذكِّر الطلبة بمفهوم الاقتران، وكيف يُمكِن النظر إلى الاقتران بوصفه آلةً لها مدخلات ومخرجات، ثم أُذكِّرهم بأنواع الاقترانات التي تعلَّموها سابقًا.
- أُوضِّح للطلبة مفهوم الاقتران المُتشعِّب، مُبيِّنًا لهم أنَّ قاعدته ليست ثابتة لجميع قِيَم x؛ إذ يدمج الاقتران المُتشعِّب بين قواعد مختلفة اعتمادًا على قِيَم x، ثم أُقدِّم لهم أمثلة مختلفة على اقترانات مُتشعِّبة.
- أُناقِش الطلبة في حل المثال 1 على اللوح، مُؤكِّدًا لهم ضرورة تبرير كل خطوة من خطوات الحل.
- إنْ لزم الأمر، أُناقِش الطلبة في مزيد من الأمثلة؛ للتحقُّق من إتقانهم مهارة تحديد مجال الاقتران المُتشعِّب، وتعويض قيمة فيه، وتمثيله بيانيًّا.

إرشادات:

- عند استعمال الاقترانات المُتشعِّبة، يُمكِن رسم خط أعداد يحوي القاعدة المُرتبِطة بكل فترة، واستعمال ألوان مختلفة لذلك؛ إذ يساعد هذا الإجراء على تحفيز الطلبة، وبخاصة أولئك الذين يتمتَّعون بذكاء بصري.
- أُذكِّر الطلبة بأنَّ مجال الاقتران ومداه يُكتَبان على شكل فترات أو متباينات.
- أُذكِّر الطلبة بمعنى الفترات المفتوحة والفترات المغلقة، ثم أُمثِّل كُلًّا منهما على خط الأعداد.
- أُذكِّر الطلبة بأنَّ الدائرة غير المظلَّلة (مُفرَّغة) في التمثيل البياني تعني أنَّه ليس مُمكِنًا استعمال تلك النقطة لإيجاد قِيَم الاقتران.
- أُناقِش الطلبة في الأفكار الواردة في الصناديق الهامشية؛ لِما لها من أهمية في تعزيز مفاهيم الدرس.
- يساعد استعمال لوح مُتنقِّل خاص بالمستوى الإحداثي على تمثيل المعادلات بسهولة، ويُوفِّر الوقت المُستغرَق في رسم المحورين الإحداثيين وتقسيمهما على اللوح، ويُمكِن إعداد هذا اللوح بسهولة، وذلك برسم المستوى الإحداثي على طبق من الكرتون المُقوّى، ثم تغطيته بلاصق شفّاف.

أخطاء شائعة: قد يُخطِئ بعض الطلبة عند إيجاد $f(1)$ في المثال 1، بتعويض العدد 1 في القاعدة الأولى؛ لذا أُنبِّه الطلبة أنَّه لا يُمكِن تعويض العدد 1 في القاعدة الأولى؛ لأنَّه لا ينتمي إلى مجال هذه القاعدة، بسبب عدم وجود إشارة مساواة مقابل العدد 1 في المتباينة التي تُعبِّر عن مجال هذه القاعدة.

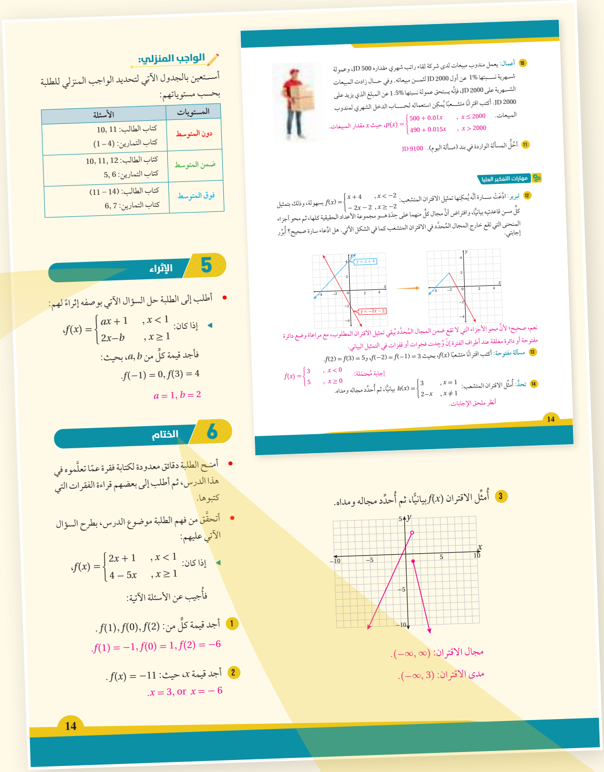
8A

3 التدريس

من المُتوقَّع أنْ تؤدي مرحلة (الاستكشاف) إلى حدوث حالة من عدم التوازن في المفاهيم لدى الطلبة، فتبدأ مرحلة (التعلُّم) في إعادة التوازن لديهم، للتمكن من تكوين خبرات مشتركة مُحدَّدة تساعد على إدراك المفاهيم، وإتقان العمليات والمهارات. تستغرق هذه المرحلة كثيرًا من وقت الدرس؛ فهي تشمل تقديم فقرات الشرح، وأمثلة الدرس جميعها؛ لذا يتعيَّن الاستعانة بالإرشادات الواردة في بند (التدريس) من هذا الدليل؛ للتمكّن من تنفيذ هذه المرحلة المهمة بنجاح.

4 التدريب

فـي هذه المرحلـة يتدرَّب الطلبـة على أنواع مختلفة من المسائل المجرَّدة والحياتية في بند (أتدرَّب وأحُلُّ المسائل) وبند (مهارات التفكير العليا) داخل غرفة الصف؛ لترسيخ المفاهيم الجديدة، وزيادة الطلاقة الإجرائية لديهم. قد يُكمِل الطلبة هذه المرحلة في المنزل. وكذلك التدريبات والمسائل الواردة في الصفحة المقابلة للدرس في كتاب التمارين.



5 الإثراء

تُعَدُّ توسعة المفاهيم والعمليات والمهارات الهدف الأساس لهذه المرحلة، ويتمثَّل ذلك في إشراك الطلبة في مهام تتضمَّن مفاهيم وعمليات أوسع وأكثر عمقًا. تُوفِّر مناهج الرياضيات المُطوَّرة مصادر عِدَّة لإثراء الطلبة ذوي المستوى فوق المُتوسِّط، منها بند الإثراء في هذا الدليل، الذي يحوي مسألةً، أو نشاطًا صفيًّا، أو نشاطًا حاسوبيًّا.

6 الختام

هي المرحلة الأخيرة من مراحل تقديم الدرس، وتهدف إلى تجميع الأفكار المختلفة التي تضمَّنها الدرس، ثم عرضها بصورة مترابطة، فضلًا عن اشتمالها على مقترحات تساعد على تقديم هذه المرحلة بنجاح .

2 أنواع التقويم وأدواته:

التقويم جزء لا يتجزَّأ من عملية التعلُّم؛ فهو يُواكِب جميع خطواتها، ويضمن استمرارها وصولًا إلى تحقيق الهدف. يُعرَّف التقويم بأنَّه عملية تُستعمَل فيها معلومات من مصادر مُتعدِّدة للوصول إلى حكم عن تحصيل الطلبة الدراسي. وقد أبرزت مناهج الرياضيات المُطوَّرة ثلاثة أنواع مختلفة من التقويم، هي: **التقويم القبلي، والتقويم التكويني، والتقويم الختامي.**

أ التقويم القبلي:

يهدف هذا النوع من التقويم إلى تحديد مدى امتلاك الطلبة المعرفةَ السابقة اللازمة لدراسة الموضوع الجديد؛ ما يساعد على تحديد ما يَلزم الطلبة من معالجات تتمثَّل في مصادر التعلُّم الإضافية. تحتوي مناهج الرياضيات المُطوَّرة على أداة تقويم قبلي في بداية كل وحدة، وهي موجودة في كتاب التمارين بعنوان (أستعد لدراسة الوحدة).

الوحدة 4: الاقترانات المتشعبة

أستعد لدراسة الوحدة

أختبر معلوماتي بحلّ التدريبات أوّلًا، وفي حال عدم تأكُّدي من الإجابة أستعين بالمثال المعطى.

إيجاد قيمة الاقتران عند قيمة معطاة (الدرس 1)

إذا كان $g(x) = 10 - x$، فأُجيب عن الأسئلة الآتية تباعًا:

❶ أجد $g(-5)$

❷ أجد $g(3) + 6$

❸ أجد قيمة x التي تجعل $g(x) = -35$

إذا كان $f(x) = 5x - 3$، فأجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي:

❼ $f(2) + f(-1)$

❻ $25 - f(-2)$

❺ $f(5)$

❹ $f(0)$

مثال: إذا كان $f(x) = 2x + 6$، فأجيب عن الأسئلة الآتية تباعًا:

a) أجد $f(3)$

الاقتران المعطى $f(x) = 2x + 6$

بتعويض $x = 3$ $f(3) = 2(3) + 6$

بالتبسيط $= 12$

b) أجد $f(-4) + 10$

بتعويض $x = -4$ $f(-4) + 10 = (2(-4) + 6) + 10$

بالتبسيط $= -2 + 10$

بالتبسيط $= 8$

c) أجد قيمة x التي تجعل $f(x) = -10$

الاقتران المعطى $f(x) = 2x + 6$

بتعويض $f(x) = -10$ $-10 = 2x + 6$

بطرح 6 من طرفي المعادلة $-16 = 2x$

بقسمة طرفي المعادلة على 2 $x = -8$

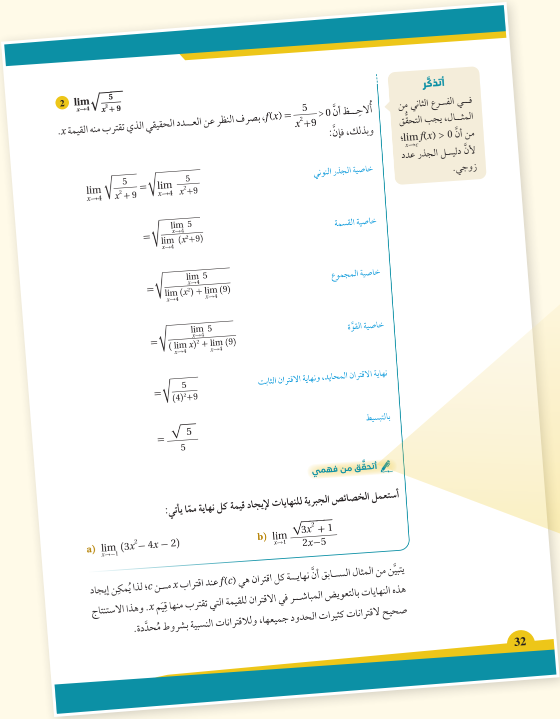
إذن، عندما $x = -8$، فإنَّ $f(x) = -10$

6

ب التقويم التكويني:

يحدث هذا النوع من التقويم في أثناء عملية التدريس، ويهدف إلى متابعة تعلُّم الطلبة أوّلًا بأوّل، والتأكُّد أنَّ العملية التعليمية التعلُّمية تسير في اتجاه تحقيق أهدافها المنشودة، وأنَّه لا يوجد انحراف عن مسارها؛ ما يساعد على اتخاذ القرارات الصحيحة، مثل: الاستمرار في عملية التدريس، أو التعديل عليها، أو النظر فيها من جديد. من أدوات التقويم التكويني: الأسئلة الشفوية، والملاحظات غير الرسمية، والاختبارات القصيرة.

تحتوي مناهج الرياضيات المُطوَّرة على أدوات للتقويم التكويني في كل درس، تتمثَّل في مسائل بند (أتحقَّق من فهمي) التي تلي كل مثال.



أتذكَّر

في الفرع الثاني من المثال، يجب التحقُّق من أنَّ $\lim\limits_{x\to c} f(x) > 0$؛ لأنَّ دليل الجذر عدد زوجي.

② $\lim\limits_{x\to 4}\sqrt{\frac{5}{x^2+9}}$

أُلاحِظ أنَّ $f(x) = \frac{5}{x^2+9} > 0$، بصرف النظر عن العدد الحقيقي الذي تقترب منه القيمة x. وبذلك، فإنَّ:

خاصية الجذر النوني $\lim\limits_{x\to 4}\sqrt{\frac{5}{x^2+9}} = \sqrt{\lim\limits_{x\to 4}\frac{5}{x^2+9}}$

خاصية القسمة $= \sqrt{\frac{\lim\limits_{x\to 4} 5}{\lim\limits_{x\to 4}(x^2+9)}}$

خاصية المجموع $= \sqrt{\frac{\lim\limits_{x\to 4} 5}{\lim\limits_{x\to 4}(x^2) + \lim\limits_{x\to 4}(9)}}$

خاصية القوَّة $= \sqrt{\frac{\lim\limits_{x\to 4} 5}{(\lim\limits_{x\to 4} x)^2 + \lim\limits_{x\to 4}(9)}}$

نهاية الاقتران المحايد، ونهاية الاقتران الثابت $= \sqrt{\frac{5}{(4)^2+9}}$

بالتبسيط $= \frac{\sqrt{5}}{5}$

أتحقَّق من فهمي

أستعمل الخصائص الجبرية للنهايات لإيجاد قيمة كل نهاية ممّا يأتي:

a) $\lim\limits_{x\to -1}(3x^2 - 4x - 2)$

b) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{3x^2+1}}{2x-5}$

يتبيَّن من المثال السابق أنَّ نهاية كل اقتران هي $f(c)$ عند اقتراب x من c؛ لذا يُمكِن إيجاد هذه النهايات بالتعويض المباشر في الاقتران للقيمة التي تقترب منها قِيَم x. وهذا الاستنتاج صحيح لاقترانات كثيرات الحدود جميعها، وللاقترانات النسبية بشروط مُحدَّدة.

32

أتحقَّق من فهمي

أستعمل الخصائص الجبرية للنهايات لإيجاد قيمة كل نهاية ممّا يأتي:

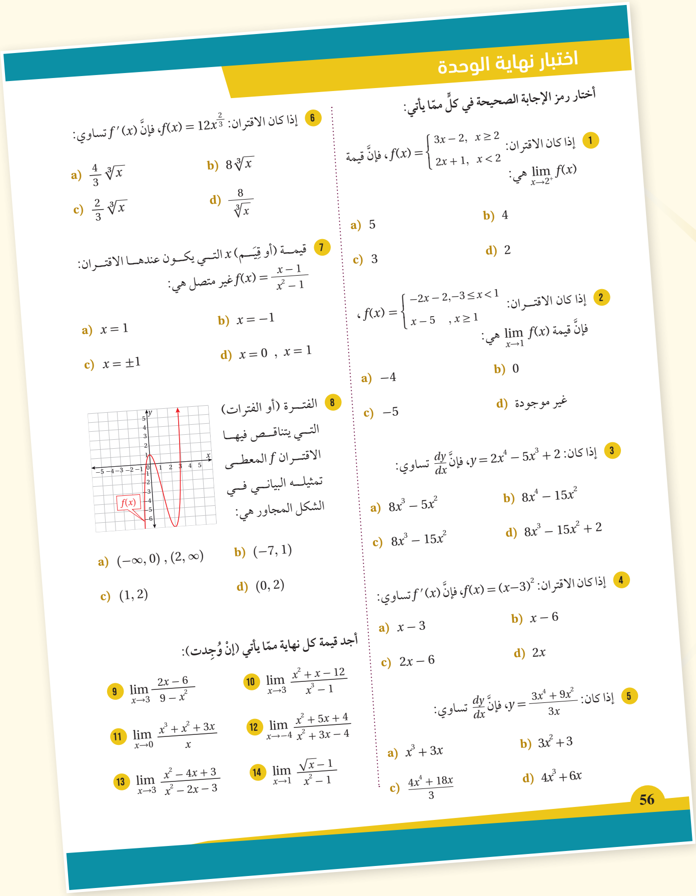
a) $\lim\limits_{x\to -1}(3x^2 - 4x - 2)$

b) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{3x^2+1}}{2x-5}$

جـ التقويم الختامي:

يأتي هذا التقويم في نهاية عملية التدريس، أو في نهاية الوحدة الدراسية. وهو يساعد على تحديد مدى إتقان الطلبة للمفاهيم والمهارات التي تم تقديمها لهم.

تُوفِّر المناهج المُطوَّرة أداة للتقويم الختامي في كل وحدة، تتمثَّل في فقرة (اختبار نهاية الوحدة) الذي يحوي مسائل مُتنوِّعة تشمل نتاجات الوحدة كلها.



اختبار نهاية الوحدة

أختار رمز الإجابة الصحيحة في كلٍّ ممّا يأتي:

1 إذا كان الاقتران: $f(x) = \begin{cases} 3x-2, & x \geq 2 \\ 2x+1, & x < 2 \end{cases}$، فإنَّ قيمة $\lim_{x \to 2^+} f(x)$ هي:

a) 5 b) 4

c) 3 d) 2

2 إذا كان الاقتـران: $f(x) = \begin{cases} -2x-2, -3 \leq x < 1 \\ x-5 \quad , x \geq 1 \end{cases}$، فإنَّ قيمة $\lim_{x \to 1} f(x)$ هي:

a) -4 b) 0

c) -5 d) غير موجودة

3 إذا كان: $y = 2x^4 - 5x^3 + 2$، فإنَّ $\frac{dy}{dx}$ تساوي:

a) $8x^3 - 5x^2$ b) $8x^4 - 15x^2$

c) $8x^3 - 15x^2$ d) $8x^3 - 15x^2 + 2$

4 إذا كان الاقتران: $f(x) = (x-3)^2$، فإنَّ $f'(x)$ تساوي:

a) $x - 3$ b) $x - 6$

c) $2x - 6$ d) $2x$

5 إذا كان: $y = \frac{3x^4 + 9x^2}{3x}$، فإنَّ $\frac{dy}{dx}$ تساوي:

a) $x^3 + 3x$ b) $3x^2 + 3$

c) $\frac{4x^4 + 18x}{3}$ d) $4x^3 + 6x$

6 إذا كان الاقتران: $f(x) = 12x^{\frac{2}{3}}$، فإنَّ $f'(x)$ تساوي:

a) $\frac{4}{3}\sqrt[3]{x}$ b) $8\sqrt[3]{x}$

c) $\frac{2}{3}\sqrt[3]{x}$ d) $\frac{8}{\sqrt[3]{x}}$

7 قيمـة (أو قِيَـم) x التـي يكـون عندهـا الاقتـران: $f(x) = \frac{x-1}{x^2-1}$ غير متصل هي:

a) $x = 1$ b) $x = -1$

c) $x = \pm 1$ d) $x = 0$, $x = 1$

8 الفتـرة (أو الفترات) التـي يتناقـص فيهـا الاقتـران f المعطـى تمثيلـه البيانـي فـي الشكل المجاور هي:

a) $(-\infty, 0)$, $(2, \infty)$ b) $(-7, 1)$

c) $(1, 2)$ d) $(0, 2)$

أجد قيمة كل نهاية ممّا يأتي (إنْ وُجِدت):

9 $\lim_{x \to 3} \frac{2x-6}{9-x^2}$

10 $\lim_{x \to 3} \frac{x^2+x-12}{x^3-1}$

11 $\lim_{x \to 0} \frac{x^3+x^2+3x}{x}$

12 $\lim_{x \to -4} \frac{x^2+5x+4}{x^2+3x-4}$

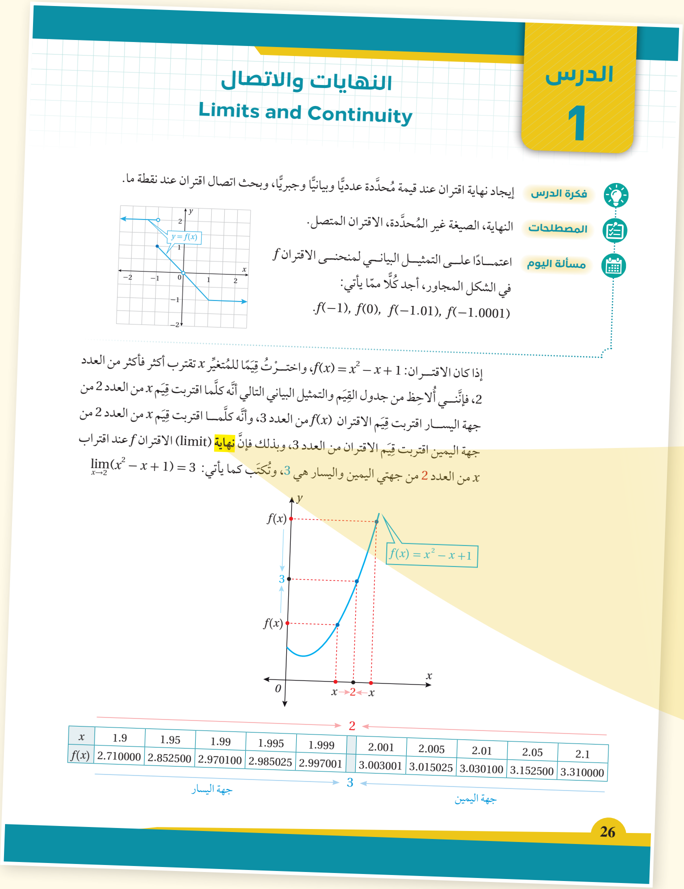
13 $\lim_{x \to 3} \frac{x^2-4x+3}{x^2-2x-3}$

14 $\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x^2-1}$

56

3 تعزيز لغة الرياضيات وإثراؤها:

تُعَدُّ المصطلحات إحدى ركائز تعلُّم الرياضيات؛ فهي الوعاء الذي يحمل المعاني الرياضية، وينقلها بين المسائل والسياقات المختلفة. ولهذا أبرزت مناهج الرياضيات المطورة المصطلحات الرياضية التي يتعرَّفها الطلبة أول مرَّة، وميَّزتها بلون مختلف داخل نصوص الشرح، وأوردت مرادفاتها من اللغة الإنجليزية بهدف إثراء معرفة الطلبة.



الدرس 1

النهايات والاتصال
Limits and Continuity

فكرة الدرس إيجاد نهاية اقتران عند قيمة مُحدَّدة عدديًّا وبيانيًّا وجبريًّا، وبحث اتصال اقتران عند نقطة ما.

المصطلحات النهاية، الصيغة غير المُحدَّدة، الاقتران المتصل.

مسألة اليوم اعتمـادًا علـى التمثيـل البيانـي لمنحنـى الاقتران f في الشكل المجاور، أجد كُلًّا ممّا يأتي:
$f(-1)$, $f(0)$, $f(-1.01)$, $f(-1.0001)$.

إذا كان الاقتـران: $f(x) = x^2 - x + 1$، واختـرْتُ قِيَمًا للمُتغيِّر x تقترب أكثر فأكثر من العدد 2، فإنَّنـي أُلاحِظ من جدول القِيَم والتمثيل البياني التالي أنَّه كلَّما اقتربت قِيَم x من العدد 2 من جهة اليسـار اقتربت قِيَم الاقتران $f(x)$ من العدد 3، وأنَّه كلَّمـا اقتربت قِيَم x من العدد 2 من جهة اليمين اقتربت قِيَم الاقتران من العدد 3، وبذلك فإنَّ **نهاية** (limit) الاقتران f عند اقتراب x من العدد 2 من جهتي اليمين واليسار هي 3، وتُكتَب كما يأتي: $\lim_{x \to 2}(x^2 - x + 1) = 3$

2

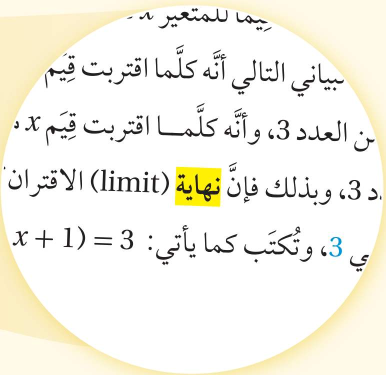
x	1.9	1.95	1.99	1.995	1.999		2.001	2.005	2.01	2.05	2.1
$f(x)$	2.710000	2.852500	2.970100	2.985025	2.997001		3.003001	3.015025	3.030100	3.152500	3.310000

3

جهة اليسار

جهة اليمين

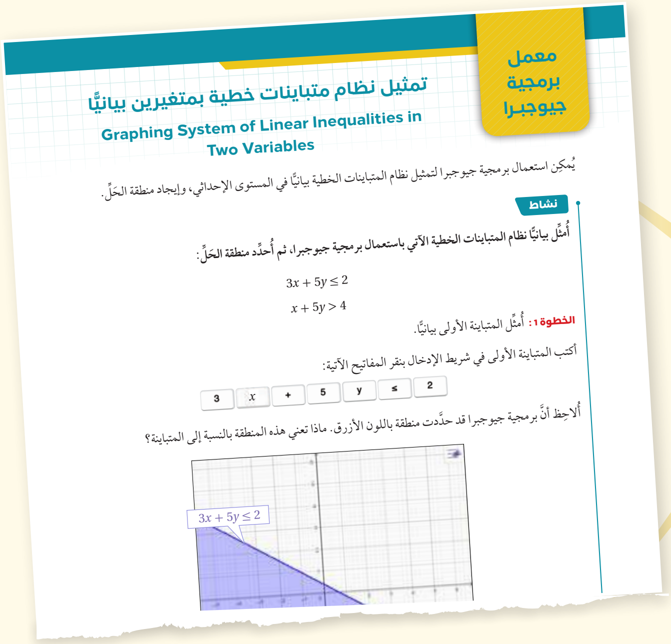
26



4 التعلُّم باستعمال التكنولوجيا:

تُســهِم التكنولوجيا إســهامًا فاعلًا في تعلُّم الرياضيات؛ فهي تُوفِّر تمثيلات بصرية للمفاهيم الرياضية بصورة تفاعلية تزيد من رغبة الطلبة في التعلُّم، وتساعد على استكشاف المفاهيم الجديدة. إنَّ توافر الأدوات التكنولوجية يســاعد الطلبة على التأمُّــل والتحليل والتفكير بــدلًا من إضاعة أوقاتهم في إجراء الحسابات الرتيبة.

تمنـح أدلـة المُعلِّـم في مناهـج الرياضيـات المُطـوَّرة فرصـة توظيف عدد مـن البرمجيـات التعليمية فـي تدريـس الطلبة؛ سـواء أكان ذلك في المدرسـة، أم فـي المنزل.



معمل برمجية جيوجبرا

تمثيل نظام متباينات خطية بمتغيرين بيانيًّا

Graphing System of Linear Inequalities in Two Variables

يُمكِن استعمال برمجية جيوجبرا لتمثيل نظام المتباينات الخطية بيانيًّا في المستوى الإحداثي، وإيجاد منطقة الحَلِّ.

نشاط

أُمثِّل بيانيًّا نظام المتباينات الخطية الآتي باستعمال برمجية جيوجبرا، ثم أُحدِّد منطقة الحَلِّ:

$$3x + 5y \leq 2$$

$$x + 5y > 4$$

الخطوة 1: أُمثِّل المتباينة الأولى بيانيًّا.

أكتب المتباينة الأولى في شريط الإدخال بنقر المفاتيح الآتية:

3 | x | + | 5 | y | ≤ | 2

أُلاحِظ أنَّ برمجية جيوجبرا قد حدَّدت منطقة باللون الأزرق. ماذا تعني هذه المنطقة بالنسبة إلى المتباينة؟

5 مهارات التفكير العليا:

تهدف **مهارات التفكير العليا** إلى تحدّي قدرات الطلبة في مجال التفسير، والتحليل، ومعالجة المعلومات؛ لذا، فهي تُنمّي قدراتهم على التأمُّل، والتفكير، والاستقصاء، واكتشاف العلاقات.

تمنح مناهج الرياضيــات المُطوَّرة الطلبة فرصة لتطويــر مهارات التفكير العليا في كل درس، بطرحها مســائل مرتبطــة بنتاجات الدرس؛ إذ يحــوي بند (مهارات التفكير العليا) عددًا من المســائل ضمن العناوين الآتية:

تبرير: يتطلَّب حلُّ هذه المسائل تبرير خطوات الحلِّ جميعها.

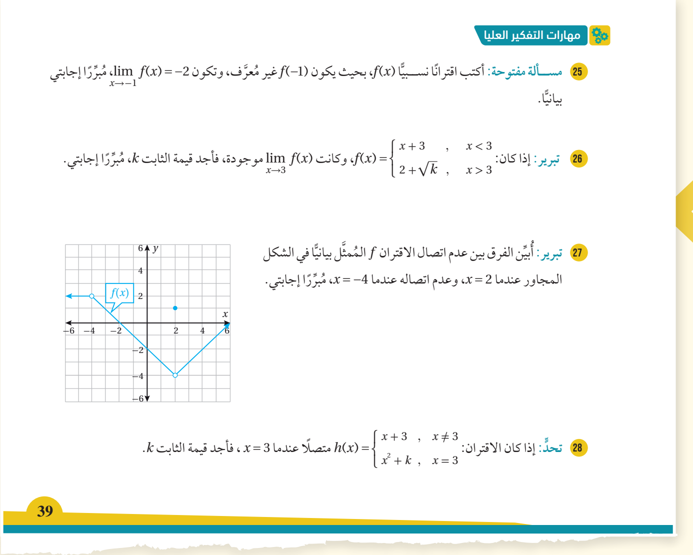
تحدٍّ: تتضمَّن هذه المسائل أفكارًا غير مألوفة تُمثِّل تحدِّيًا للطلبة.

مسألة مفتوحة: يوجد لهذه المسألة عدد من الحلول الصحيحة، وليس حلًّا واحدًا فقط.

أكتشف الخطأ: يتعيَّن على الطلبة في هذا النوع من المسائل تحديد الخطأ في إجابة معطاة؛ ما يُحتِّم عليهم إدراك مفاهيم الدرس بصورة عميقة.

أيُّها مختلف: يتعيَّن على الطلبة في هذا النوع من المسائل تحليل عدد من الخيارات المعطاة، ثم تحديد خيار واحد فقط مختلف عن البقية.

ما السؤال: يُعطى الطلبة في هذا النوع من المسائل إجابة لمسألة ما، ثم يُطلَب إليهم كتابة هذه المسألة.



مهارات التفكير العليا

25 **مسألة مفتوحة:** أكتب اقترانًا نسبيًّا $f(x)$، بحيث يكون $f(-1)$ غير مُعرَّف، وتكون $\lim_{x\to -1} f(x) = -2$، مُبرِّرًا إجابتي بيانيًّا.

26 **تبرير:** إذا كان: $f(x) = \begin{cases} x+3 & , \quad x<3 \\ 2+\sqrt{k} & , \quad x>3 \end{cases}$، وكانت $\lim_{x\to 3} f(x)$ موجودة، فأجد قيمة الثابت k، مُبرِّرًا إجابتي.

27 **تبرير:** أُبيِّن الفرق بين عدم اتصال الاقتران f المُمثَّل بيانيًّا في الشكل المجاور عندما $x = 2$، وعدم اتصاله عندما $x = -4$، مُبرِّرًا إجابتي.

28 **تحدٍّ:** إذا كان الاقتران: $h(x) = \begin{cases} x+3 & , \quad x\neq 3 \\ x^2+k & , \quad x=3 \end{cases}$ متصلًا عندما $x = 3$ ، فأجد قيمة الثابت k.

39

منهاجي
متعة التعليم الهادف

6 الوصول إلى الطلبة كافةً:

تراعي مناهج الرياضيات المُطوَّرة تكافُؤ الفرص بين الطلبة، وخصوصية كل منهم (التمايز)، وتساعد على تجاوز العثرات، وتعزيز مناحي التفوّق.

يُمكِن تحقيق التمايز عن طريق أربعة عناصر رئيسة، هي:

المحتوى: يُقصَد بذلك ما يحتاج كل من الطلبة إلى تعلُّمه، وكيفية الحصول على المعلومة. من الأمثلة على تحقيق التمايز في المحتوى: تقديم الأفكار باستعمال الوسائل السمعية والبصرية والمحسوسة.

الأنشطة: كل ما يشارك فيه كل من الطلبة من أنشطة؛ للتمكُّن من فهم المحتوى، أو إتقان المهارة. من الأمثلة على تحقيق التمايز في هذا العنصر: استعمال الأنشطة المُتدرِّجة التي يشارك فيها جميع الطلبة، ويكون تقدُّمهم فيها مُتباينًا من حيث المستوى، ومنح الطلبة ذوي المستوى دون المتوسط وقتًا إضافيًّا لإنجاز المهام.

المُنتَجات: مشاريع يتعيَّن على الطلبة تنفيذها؛ للتدرُّب على ما تعلَّموه في الوحدة، وتوظيفه في حياتهم، والتوسُّع فيه. من الأمثلة على تحقيق التمايز في المُنتَجات: السماح للطلبة بالعمل وحدهم، أو في مجموعات صغيرة لابتكار مُنتَجاتهم الخاصة وَفق ميولهم.

بيئة التعلُّم: يُقصَد بها عناصر البيئة الصفية جميعها. من الأمثلة على تحقيق التمايز في بيئة التعلُّم: التحقُّق من وجود أماكن في غرفة الصف يُمكِن للطلبة العمل فيها بهدوء، ومن دون إلهاء. وكذلك وجود أماكن أُخرى تُسهِّل العمل التعاوني بين الطلبة.

✓ إرشادات:

- عند استعمال الاقترانات المُتشعِّبة، يُمكِن رسم خط أعداد يحوي القاعدة المُرتبِطة بكل فترة، واستعمال ألوان مختلفة لذلك؛ إذ يساعد هذا الإجراء على تحفيز الطلبة، وبخاصة أولئك الذين يتمتَّعون بذكاء بصري.

2 الاستكشاف

- أُوجِّه الطلبة إلى قراءة المسألة الواردة في بند (**مسألة اليوم**)، ثم أسألهم:
  - كم ثمن النسخة الواحدة من الكتاب؟ JD 7.
  - كم ستأخذ مريم إذا باعت كتابًا واحدًا؟ 70 قرشًا.
  - كم ستأخذ مريم إذا باعت 10000 كتاب؟ JD 7000.
  - إذا باعت مريم كتابين زيادة على 10000 كتاب، فما المبلغ الذي ستأخذه لقاء هذين الكتابين؟ JD 2.1.
  - ما المبلغ الذي ستأخذه مريم عند بيعها 12000 نسخة من الكتاب؟
- أُخبِر الطلبة أنَّهم سيتعرَّفون إجابة السؤال السابق في هذا الدرس.
- أُناقِش الطلبة في إجاباتهم، ثم أسألهم:
  - ما رأيكم/ رأيكن في إجابة زميلكم/ زميلتكن؟
  - مَنْ يتفق/ تتفق مع إجابة زميله/ زميلتها؟
- أُعزِّز الإجابات الصحيحة.
- المجال العاطفي لا يقل أهمية عن المجال المعرفي؛ لذا لا يجب أنْ أقول للطالب/ للطالبة: "إجابتك خطأ"، بل أقول له/ لها: "لقد اقتربت من الإجابة الصحيحة، فمَنْ يستطيع إعطاء إجابة أُخرى؟"، ثم أشكره/ أشكرها على محاولة الإجابة عن السؤال. بعد ذلك أطلب إلى غيره/ غيرها الإجابة عن السؤال؛ لتعرُّف الإجابة الصحيحة، مُعزِّزًا إيّاه/ إيّاها، ثم أطلب إلى الطالب الأوَّل/ الطالبة الأولى الإجابة عن السؤال مَرَّة أُخرى، وأُعزِّزه/ أُعزِّزها كما عزَّزت مَنْ أجاب عن السؤال نفسه إجابة صحيحة.

3 التدريس

مثال 1

- أُذكِّر الطلبة بمفهوم الاقتران، وكيف يُمكِن النظر إلى الاقتران بوصفه آلةً لها مدخلات ومخرجات، ثم أُذكِّرهم بأنواع الاقترانات التي تعلَّموها سابقًا.
- أُوضِّح للطلبة مفهوم الاقتران المُتشعِّب، مُبيِّنًا لهم أنَّ قاعدته ليست ثابتة لجميع قِيَم x؛ إذ يدمج الاقتران المُتشعِّب بين قواعد مختلفة اعتمادًا على قِيَم x، ثم أُقدِّم لهم أمثلة مختلفة على اقترانات مُتشعِّبة.
- أُناقِش الطلبة في حل المثال 1 على اللوح، مُؤكِّدًا لهم ضرورة تبرير كل خطوة من خطوات الحل.
- إنْ لزم الأمر، أُناقِش الطلبة في مزيد من الأمثلة؛ للتحقُّق من إتقانهم مهارة تحديد مجال الاقتران المُتشعِّب، وتعويض قيمة فيه، وتمثيله بيانيًّا.

✓ إرشادات:

- عند استعمال الاقترانات المُتشعِّبة، يُمكِن رسم خط أعداد يحوي القاعدة المُرتبِطة بكل فترة، واستعمال ألوان مختلفة لذلك؛ إذ يساعد هذا الإجراء على تحفيز الطلبة، وبخاصة أولئك الذين يتمتَّعون بذكاء بصري.
- أُذكِّر الطلبة بأنَّ مجال الاقتران ومداه يُكتَبان على شكل فترات أو متباينات.
- أُذكِّر الطلبة بمعنى الفترات المفتوحة والفترات المغلقة، ثم أُمثِّل كُلًّا منهما على خط الأعداد.
- أُذكِّر الطلبة بأنَّ الدائرة غير المظلَّلة (مُفرَّغة) في التمثيل البياني تعني أنَّه ليس مُمكِنًا استعمال تلك النقطة لإيجاد قِيَم الاقتران.
- أُناقِش الطلبة في الأفكار الواردة في الصناديق الهامشية؛ لِما لها من أهمية في تعزيز مفاهيم الدرس.
- يساعد استعمال لوح مُتنقِّل خاص بالمستوى الإحداثي على تمثيل المعادلات بسهولة، ويُوفِّر الوقت المُستغرَق في رسم المحورين الإحداثيين وتقسيمهما على اللوح، ويُمكِن إعداد هذا اللوح بسهولة، وذلك برسم المستوى الإحداثي على طبق من الكرتون المُقوّى، ثم تغطيته بلاصق شفّاف.

أخطاء شائعة: قد يُخطِئ بعض الطلبة عند إيجاد $f(1)$ في المثال 1، بتعويض العدد 1 في القاعدة الأولى؛ لذا أُنبِّه الطلبة أنَّه لا يُمكِن تعويض العدد 1 في القاعدة الأولى؛ لأنَّه لا ينتمي إلى مجال هذه القاعدة، بسبب عدم وجود إشارة مساواة مقابل العدد 1 في المتباينة التي تُعبِّر عن مجال هذه القاعدة.

8A

استراتيجيات تدريس إضافية

عزيزي المُعلِّم/ عزيزتي المُعلِّمة، تساعد مناهج الرياضيات المُطوَّرة على تطبيق أحدث استراتيجيات التدريس، بما تحويه من عناصر مُنظَّمة في كتاب الطالب، ومقترحات، وإرشادات مناسبة للتدريس في هذا الدليل، علمًا بأنَّ مسألة تطبيقها متروكة لك؛ إذ يُمكِن لك اختيار طرائق التدريس المناسبة داخل غرفة الصف؛ فأنت أكثر علمًا بأحوال غرفة الصف، والوسائل والتجهيزات المتوافرة في المدرسة.

في ما يأتي بعض استراتيجيات التدريس الإضافية التي قد تساعد المُعلِّم/ المُعلِّمة على تقديم الدروس:

التعلُّم المقلوب (Flipped Learning):

يسهم هذا الأسلوب في تعزيز مهارات التعلم الذاتي واستثمار وقت الحصة الصفية استثمارًا كبيرًا والتركيز على المحتوى والمفاهيم العلمية بشكل مكثف. تتيح هذه الاستراتيجية لك إعداد الدروس وإطلاع الطلبة عليها مسبقًا بالاستعانة بالتقنيات الحديثة وشبكة (الإنترنت)، إذ يمكن إرسال مقاطع مرئية (فيديوهات) أو ملفات صوتية أو غيرها من الوسائط إلى الطلبة، والطلب إليهم الاطلاع عليها في المنازل قبل وقت كافٍ من الوقت المخصص لعرض الدرس، عن طريق الوسائل المتاحة لهم (حاسوب، هاتف ذكي، جهاز لوحي). يتعين عليك تجهيز أنشطة متنوعة لتنفيذها في اللقاء الصفي تهدف إلى تطبيق المفاهيم التي اكتسبها الطلبة ومناقشة المحتوى العام للدرس، وتشمل أنشطة التعلم النشط والاستقصاء، والتجريب، وحلّ المسائل الرياضية، وبما يعزز مهارات العمل بروح الفريق وتقييم التعلم.

بطاقة الخروج (Exit Ticket):

أسلوب يتضمَّن مهمة قصيرة يُنفِّذها الطلبة في مرحلة ختام الدرس. وفيه يجيب الطلبة عن أسئلة قصيرة مُحدَّدة مكتوبة في بطاقات صغيرة، بعد ذلك عليك جمع البطاقات لقراءة الإجابات، ثم التعليق عليها في الحصة التالية، في ما يُمثِّل تغذية راجعة يُستنَد إليها في الحصة اللاحقة.

رفع اليد (إشارة الصمت) (Hand Up):

أسلوب يُستعمَل لإدارة الصف. وفيه عليك رفع يدك، فيستجيب الطلبة برفع أيديهم، وإنهاء مناقشاتهم فورًا. تُعَدُّ هذه الاستراتيجية طريقة فاعلة وسريعة للفت انتباه الطلبة، ويُمكِن استخدامها في بداية الحصة، أو للإعلان عن انتهاء النشاط. تجدر الإشارة إلى أنَّ رفع يدك يجب أنْ يُقابَل باستجابات ثلاث: رفع جميع الطلبة أيديهم من دون استثناء، والتزامهم الصمت التام، والإصغاء.

الرؤوس المُرقَّمة (Numbered Heads):

أسلوب يُستعمَل لإدارة الصف، وتوزيع المسؤوليات. وهو يهدف إلى إبقاء الطلبة في وضع استعداد دائم، عن طريق الاختيار العشوائي لمشاركاتهم وإجابتهم عن الأسئلة. ففي العمل الجماعي يكون لكل فرد في المجموعة رقم خاص، وعند طلبك الحصول على إجابة سؤال بصورة عشوائية، يختار الفرد رقمًا من دون أنْ يعرف زميله/ زميلتها، فيجيب من يقع عليه الاختيار عن السؤال، ويمكن أن يتم ذلك بمساعدة أفراد المجموعة.

أنا أُفكِّر، نحن نُفكِّر (I Think, We Think):

أسلوب يُستعمَل لتطوير تفكير الطلبة ضمن مجموعات. وفيه تُعِدُّ كل مجموعة ورقة تتضمَّن جدولًا من عمودين؛ عنوان الأوَّل: (أنا أُفكِّر)، وعنوان الثاني: (نحن نُفكِّر). ثم يمكنك توجيه سؤال يجيب عنه الطلبة بصورة فردية في العمود الأوَّل، ثم يُناقِش الطلبة إجاباتهم للاتفاق على إجابة واحدة تُكتَب في العمود الثاني، ويُمكِن تغيير الورقة عند الحاجة. يساعد هذا الأسلوب الطلبة على التفكير في الموضوع، وتأمُّل التغيُّر في تفكيرهم نتيجة التحدُّث إلى الآخرين.

الألواح الصغيرة (Small Boards):

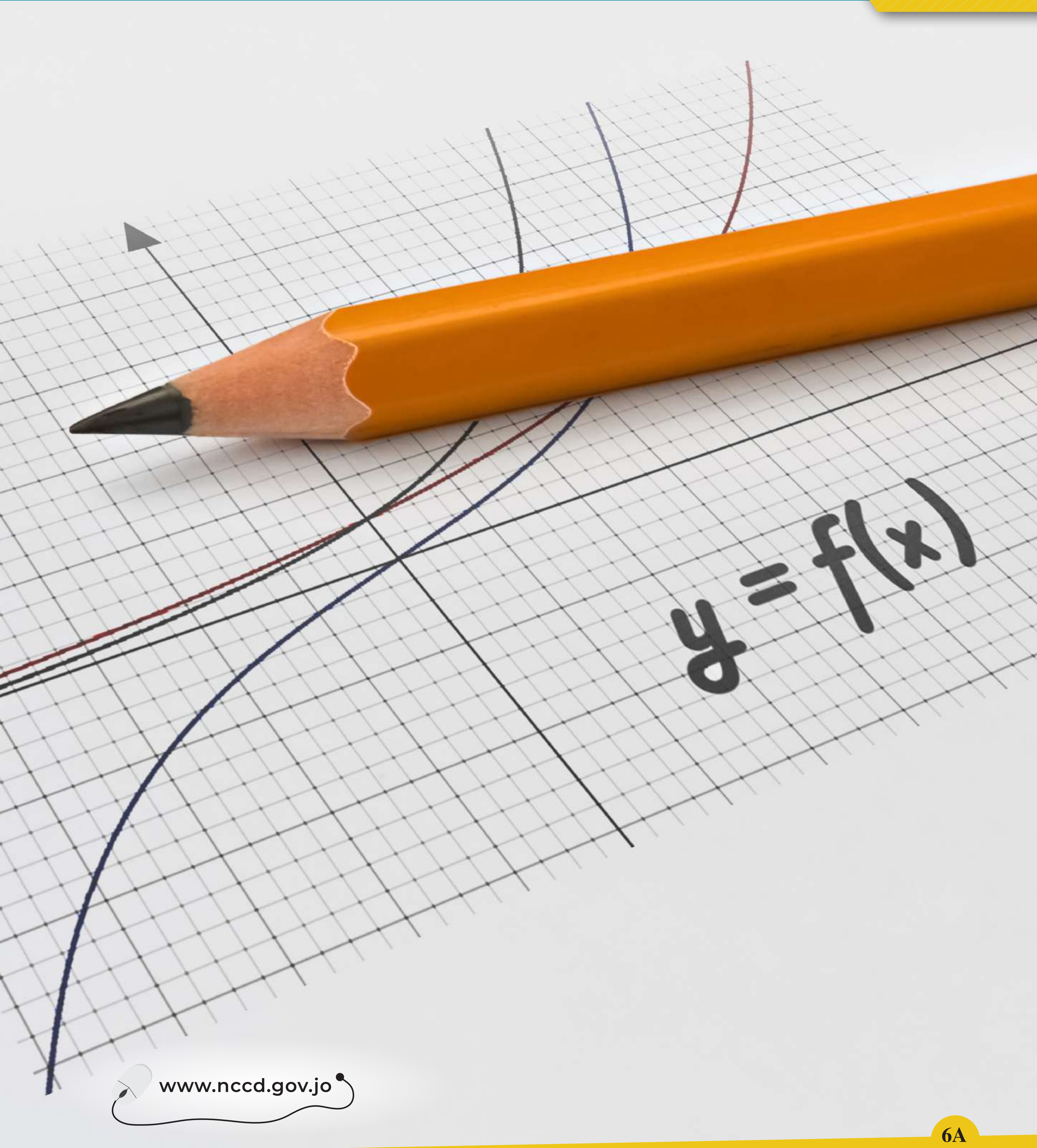
أسلوب يُستعمَل للتقويم. وفيه يُمسِك كل طالب/ طالبة بلوح صغير (يُمكِن أنْ يُصنَع من قطعة كرتون مقوًّى، أو قطعة خشب صغيرة يُكتَب عليها بالطبشور، أو قطعة كرتون عليها لاصق شفّاف يُكتَب عليها بقلم اللوح الأبيض)، ثم يمكنك توجيه سؤال يجيب عنه الطلبة بالكتابة على اللوح، ثم رفعه إلى أعلى؛ للتمكن من مشاهدة الإجابات بسهولة. يُسهِم هذا الأسلوب في زيادة مشاركة الطلبة؛ لأنَّهم يجيبون جميعًا في الوقت نفسه من دون إحداث فوضى، ويُسهِم أيضًا في التقويم التكويني؛ إذ يمكنك ملاحظة نسبة إجابات الطلبة الصحيحة.

الوحدة

4

الاقترانات المُتشعِّبة

Piecewise Functions



www.nccd.gov.jo

مُخطَّط الوحدة

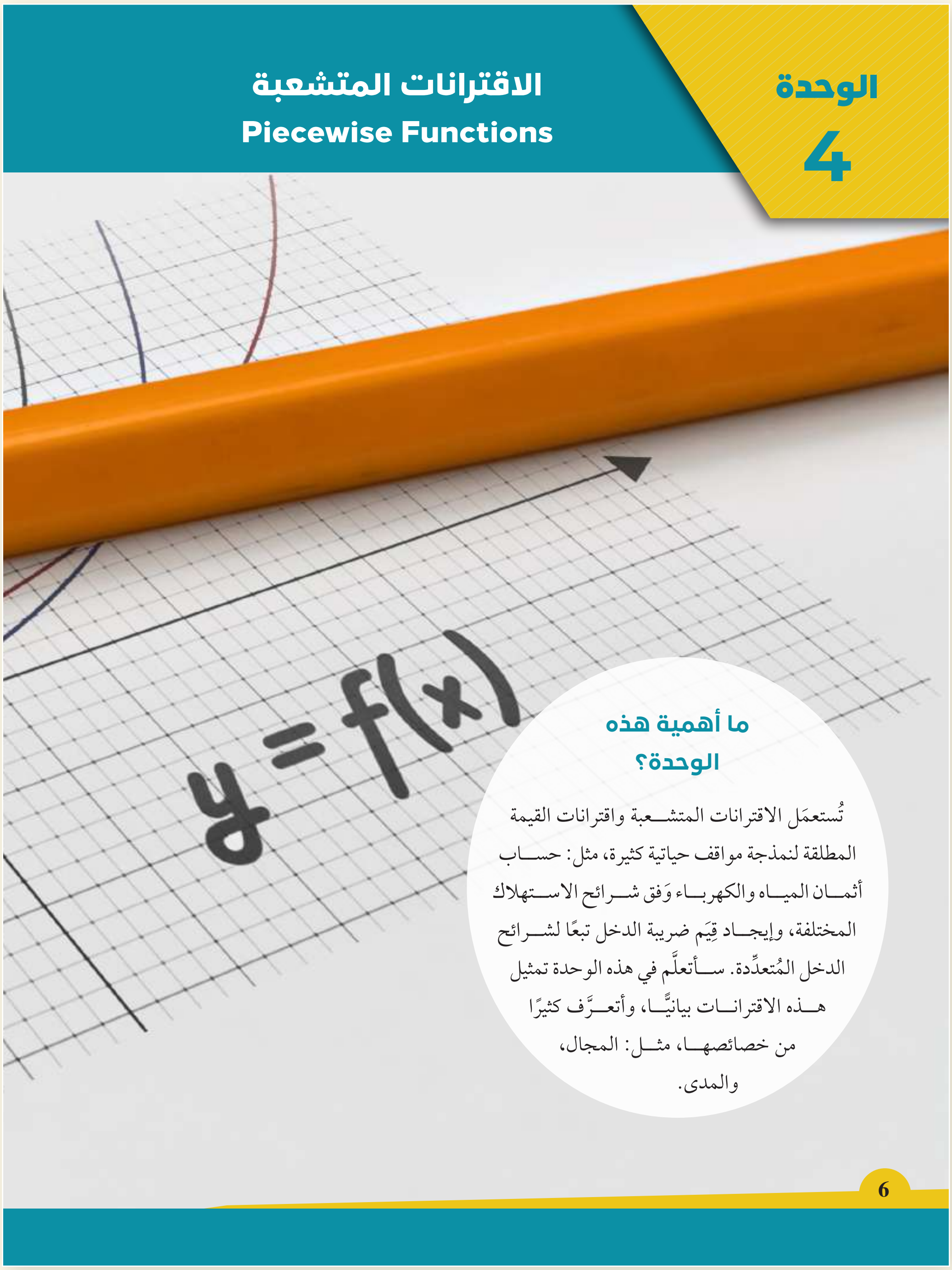
اسم الدرس	النتاجات	المصطلحات	الأدوات اللازمة	عدد الحصص
الدرس 1: **الاقترانات المُتشعِّبة.**	• تعرُّف الاقتران المُتشعِّب. • إيجاد مجال الاقتران المُتشعِّب. • إيجاد مدى الاقتران المُتشعِّب. • تمثيل الاقتران المُتشعِّب بيانيًّا. • حل مسائل وتطبيقات مُتنوِّعة على الاقترانات المُتشعِّبة.	الاقتران المُتشعِّب.	• ورقة المصادر 1	5
الدرس 2: **اقتران القيمة المطلقة.**	• إيجاد مجال اقتران القيمة المطلقة. • إيجاد مدى اقتران القيمة المطلقة. • تمثيل اقتران القيمة المطلقة بيانيًّا. • حل مسائل وتطبيقات مُتنوِّعة على اقتران القيمة المطلقة.	اقتران القيمة المطلقة. الرأس.		5
اختبار نهاية الوحدة.				1
مجموع الحصص:				11 حصة

الوحدة
4

نظرة عامة على الوحدة:

سيتعرَّف الطلبة في هذه الوحدة أحد أهم أنواع الاقترانات، وهو الاقتران المُتشعِّب الذي يظهر في العديد من المسائل العملية عند نمذجتها رياضيًّا. وفيها سيتعلَّم الطلبة كيفية تحديد مجال الاقترانات المُتشعِّبة ومداها، وكيف يُمكِن تمثيلها بيانيًّا، وكذلك نمذجة بعض المسائل العملية باستعمال هذه الاقترانات.

سيتعرَّف الطلبة أيضًا اقتران القيمة المطلقة بوصفه حالة خاصة من الاقترانات المُتشعِّبة، وسيتعلَّمون كيفية تحديد مجال اقتران القيمة المطلقة ومداه، وكيف يُمكِن تمثيله بيانيًّا.



الوحدة

4

الاقترانات المتشعبة

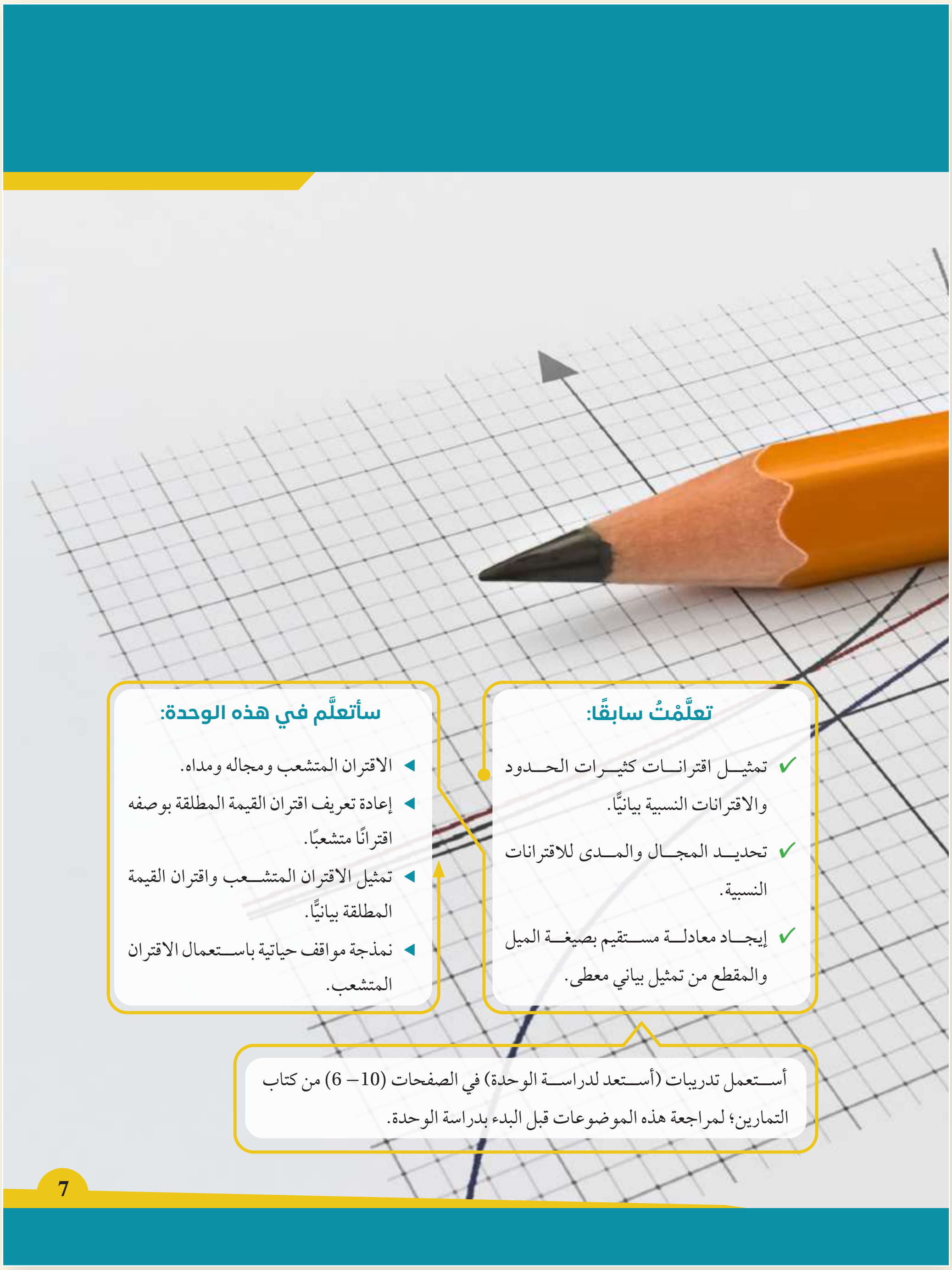
Piecewise Functions

ما أهمية هذه الوحدة؟

تُستعمَل الاقترانات المتشعبة واقترانات القيمة المطلقة لنمذجة مواقف حياتية كثيرة، مثل: حساب أثمان المياه والكهرباء وَفق شرائح الاستهلاك المختلفة، وإيجاد قِيَم ضريبة الدخل تبعًا لشرائح الدخل المُتعدِّدة. سأتعلَّم في هذه الوحدة تمثيل هذه الاقترانات بيانيًّا، وأتعرَّف كثيرًا من خصائصها، مثل: المجال، والمدى.

6

الوحدة 4



تعلَّمْتُ سابقًا:

- ✓ تمثيل اقترانات كثيرات الحدود والاقترانات النسبية بيانيًّا.
- ✓ تحديد المجال والمدى للاقترانات النسبية.
- ✓ إيجاد معادلة مستقيم بصيغة الميل والمقطع من تمثيل بياني معطى.

سأتعلَّم في هذه الوحدة:

- ◄ الاقتران المتشعب ومجاله ومداه.
- ◄ إعادة تعريف اقتران القيمة المطلقة بوصفه اقترانًا متشعبًا.
- ◄ تمثيل الاقتران المتشعب واقتران القيمة المطلقة بيانيًّا.
- ◄ نمذجة مواقف حياتية باستعمال الاقتران المتشعب.

أستعمل تدريبات (أستعد لدراسة الوحدة) في الصفحات (10 – 6) من كتاب التمارين؛ لمراجعة هذه الموضوعات قبل البدء بدراسة الوحدة.

7

الترابط الرأسي بين الصفوف:

الصف العاشر:

- تعرُّف اقترانات كثيرات الحدود، والنسبية والجذر التربيعي.
- تحديد المجال والمدى لكلٍّ من كثيرات الحدود، والنسبية والجذر التربيعي.
- تمثيل اقترانات كثيرات الحدود، والنسبية والجذر التربيعي بيانيًّا.
- إجراء العمليات الأربع على اقترانات كثيرات الحدود.
- حل مسائل وتطبيقات مُتنوِّعة على كلٍّ من اقترانات كثيرات الحدود، والنسبية والجذر التربيعي.
- إيجاد قاعدة الاقتران الناتج من تركيب اقترانين.
- إيجاد مجال الاقتران الناتج من تركيب اقترانين.
- إيجاد معكوس اقتران.

الصف الحادي عشر (الأدبي):

- تعرُّف الاقتران المُتشعِّب.
- إيجاد مجال الاقتران المُتشعِّب ومداه.
- تمثيل الاقتران المُتشعِّب بيانيًّا.
- إيجاد مجال اقتران القيمة المطلقة ومداه.
- تمثيل اقتران القيمة المطلقة بيانيًّا.
- حل مسائل وتطبيقات مُتنوِّعة على كلٍّ من الاقترانات المُتشعِّبة، واقتران القيمة المطلقة.

الصف الثاني عشر (الأدبي):

- تعرُّف كلٍّ من الاقترانات الأُسِّية، والاقترانات اللوغاريتمية.
- التمييز بين الاقترانات الأُسِّية والاقترانات اللوغاريتمية من حيث الخصائص.
- تحديد المجال والمدى لكلٍّ من الاقترانات الأُسِّية، والاقترانات اللوغاريتمية.
- تمثيل الاقترانات الأُسِّية والاقترانات اللوغاريتمية بيانيًّا.
- حل مسائل وتطبيقات مُتنوِّعة على كلٍّ من الاقترانات الأُسِّية، والاقترانات اللوغاريتمية.

الدرس 1

نتاجات الدرس:

- تعرُّف الاقتران المُتشعِّب.
- إيجاد مجال الاقتران المُتشعِّب.
- إيجاد مدى الاقتران المُتشعِّب.
- تمثيل الاقتران المُتشعِّب بيانيًّا.
- حل مسائل وتطبيقات مُتنوِّعة على الاقترانات المُتشعِّبة.

نتاجات التعلُّم القبلي:

- إيجاد قيمة الاقتران عند قيمة معطاة.
- تمثيل الاقتران الخطي بيانيًّا.
- إيجاد معادلة مستقيم من تمثيل بياني معطى.

مراجعة التعلُّم القبلي:

- أُوجِّه الطلبة في بداية كل حصة إلى الفقرة (الفقرات) المُرتبِطة بما سيُقدَّم من موضوعات الدرس في الحصة (إنْ وُجِدت) ضمن صفحات **(أستعد لدراسة الوحدة)** في كتاب التمارين، ثم أطلب إليهم حل تدريباتها داخل الغرفة الصفية بصورة فردية.
- أتجوَّل بين الطلبة؛ لمتابعتهم أثناء الحل، وتحديد نقاط ضعفهم، وأُوجِّههم إلى مراجعة المثال عندما يواجهون صعوبة في الحل.

1 التهيئة

- أُوزِّع الطلبة إلى مجموعات ثنائية، ثم أُزوِّد كل مجموعة بورقة المصادر **1: مجال الاقترانات ومداها.**
- أطلب إلى أفراد المجموعات الإجابة عن الأسئلة في ورقة المصادر.
- أُناقِش الطلبة في حل الأسئلة الوارد ذكرها في ورقة المصادر، وأطلب إليهم تبرير إجاباتهم.

الدرس 1

الاقترانات المتشعبة

Piecewise Functions

فكرة الدرس تعرُّف الاقتران المتشعب، وتمثيله بيانيًّا، وتحديد مجاله ومداه.

المصطلحات الاقتران المتشعب.

مسألة اليوم اتفقت مريم مع إحدى دور النشر على بيع كتاب لها لقاء حصولها على ما نسبته 10% من قيمة مبيعات أول 10000 نسخة من الكتاب، و15% من قيمة أيِّ مبيعات إضافية. إذا كان ثمن الكتاب الواحد JD 7، فما المبلغ الذي ستأخذه مريم بعد بيع 12000 نسخة؟

يُسمّى الاقتران المُعرَّف بقواعد مختلفة لأجزاء مجاله **اقترانًا متشعبًا** (piecewise function). فالاقتران المتشعب هو اقتران يدمج بين قاعدتي اقترانين أو أكثر.

لغة الرياضيات

تُعرَف الاقترانات المتشعبة أيضًا بالاقترانات المُعرَّفة بأكثر من قاعدة.

مثال 1

إذا كان: $f(x) = \begin{cases} x+1 & , -2 \leq x < 1 \\ 3 & , x \geq 1 \end{cases}$، فأُجيب عن الأسئلة الآتية:

1 أُحدِّد مجال $f(x)$.

أُلاحِظ أنَّ الاقتران مُعرَّف بقاعدتين، هما:

- $f(x) = x+1$: تُستعمَل لحساب قِيَم الاقتران عندما تكون $-2 \leq x < 1$.
- $f(x) = 3$: تُستعمَل لحساب قِيَم الاقتران عندما تكون $x \geq 1$.

إذن، مجال $f(x)$ هو الفترة $[-2,\infty)$.

2 أجد قيمة $f(-2)$.

العدد -2 ينتمي إلى الفترة $[-2, 1)$. إذن، أستعمل القاعدة الأولى:

$f(x) = x + 1$ القاعدة الأولى

أتذكَّر

العدد b لا ينتمي إلى الفترة $[a, b)$ التي تُكافِئ المتباينة: $a \leq x < b$، لكنَّه ينتمي إلى الفترة $[b, \infty)$ التي تُكافِئ المتباينة: $x \geq b$.

2 الاستكشاف

- أُوجِّه الطلبة إلى قراءة المسألة الواردة في بند (**مسألة اليوم**)، ثم أسألهم:
  - كم ثمن النسخة الواحدة من الكتاب؟ JD 7.
  - كم ستأخذ مريم إذا باعت كتابًا واحدًا؟ 70 قرشًا.
  - كم ستأخذ مريم إذا باعت 10000 كتاب؟ JD 7000.
  - إذا باعت مريم كتابين زيادة على 10000 كتاب، فما المبلغ الذي ستأخذه لقاء هذين الكتابين؟ JD 2.1.
  - ما المبلغ الذي ستأخذه مريم عند بيعها 12000 نسخة من الكتاب؟
- أُخبِر الطلبة أنَّهم سيتعرَّفون إجابة السؤال السابق في هذا الدرس.
- أُناقِش الطلبة في إجاباتهم، ثم أسألهم:
  - ما رأيكم/ رأيكن في إجابة زميلكم/ زميلتكن؟
  - مَنْ يتفق/ تتفق مع إجابة زميله/ زميلتها؟
- أُعزِّز الإجابات الصحيحة.
- المجال العاطفي لا يقل أهمية عن المجال المعرفي؛ لذا لا يجب أنْ أقول للطالب/ للطالبة: "إجابتك خطأ"، بل أقول له/ لها: "لقد اقتربت من الإجابة الصحيحة، فمَنْ يستطيع إعطاء إجابة أُخرى؟"، ثم أشكره/ أشكرها على محاولة الإجابة عن السؤال. بعد ذلك أطلب إلى غيره/ غيرها الإجابة عن السؤال؛ لتعرُّف الإجابة الصحيحة، مُعزِّزًا إيّاه/ إيّاها، ثم أطلب إلى الطالب الأوَّل/ الطالبة الأولى الإجابة عن السؤال مَرَّةً أُخرى، وأُعزِّزه/ أُعزِّزها كما عزَّزت مَنْ أجاب عن السؤال نفسه إجابة صحيحة.

3 التدريس

مثال 1

- أُذكِّر الطلبة بمفهوم الاقتران، وكيف يُمكِن النظر إلى الاقتران بوصفه آلةً لها مدخلات ومخرجات، ثم أُذكِّرهم بأنواع الاقترانات التي تعلَّموها سابقًا.
- أُوضِّح للطلبة مفهوم الاقتران المُتشعِّب، مُبيِّنًا لهم أنَّ قاعدته ليست ثابتة لجميع قِيَم x؛ إذ يدمج الاقتران المُتشعِّب بين قواعد مختلفة اعتمادًا على قِيَم x، ثم أُقدِّم لهم أمثلة مختلفة على اقترانات مُتشعِّبة.
- أُناقِش الطلبة في حل المثال 1 على اللوح، مُؤكِّدًا لهم ضرورة تبرير كل خطوة من خطوات الحل.
- إنْ لزم الأمر، أُناقِش الطلبة في مزيد من الأمثلة؛ للتحقُّق من إتقانهم مهارة تحديد مجال الاقتران المُتشعِّب، وتعويض قيمة فيه، وتمثيله بيانيًّا.

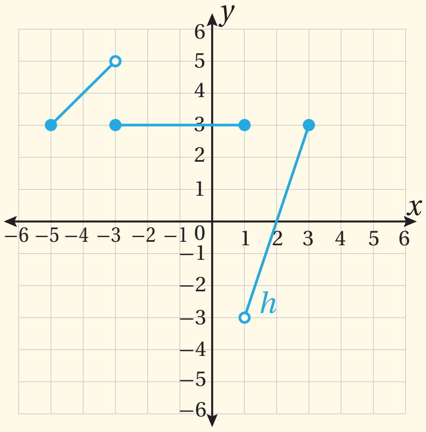
✓ إرشادات:

- عند استعمال الاقترانات المُتشعِّبة، يُمكِن رسم خط أعداد يحوي القاعدة المُرتبِطة بكل فترة، واستعمال ألوان مختلفة لذلك؛ إذ يساعد هذا الإجراء على تحفيز الطلبة، وبخاصة أولئك الذين يتمتَّعون بذكاء بصري.
- أُذكِّر الطلبة بأنَّ مجال الاقتران ومداه يُكتَبان على شكل فترات أو متباينات.
- أُذكِّر الطلبة بمعنى الفترات المفتوحة والفترات المغلقة، ثم أُمثِّل كُلًّا منهما على خط الأعداد.
- أُذكِّر الطلبة بأنَّ الدائرة غير المظلَّلة (مُفرَّغة) في التمثيل البياني تعني أنَّه ليس مُمكِنًا استعمال تلك النقطة لإيجاد قِيَم الاقتران.
- أُناقِش الطلبة في الأفكار الواردة في الصناديق الهامشية؛ لِما لها من أهمية في تعزيز مفاهيم الدرس.
- يساعد استعمال لوح مُتنقِّل خاص بالمستوى الإحداثي على تمثيل المعادلات بسهولة، ويُوفِّر الوقت المُستغرَق في رسم المحورين الإحداثيين وتقسيمهما على اللوح، ويُمكِن إعداد هذا اللوح بسهولة، وذلك برسم المستوى الإحداثي على طبق من الكرتون المُقوّى، ثم تغطيته بلاصق شفّاف.

! أخطاء شائعة: قد يُخطِئ بعض الطلبة عند إيجاد $f(1)$ في المثال 1، بتعويض العدد 1 في القاعدة الأولى؛ لذا أُنبِّه الطلبة أنَّه لا يُمكِن تعويض العدد 1 في القاعدة الأولى؛ لأنَّه لا ينتمي إلى مجال هذه القاعدة، بسبب عدم وجود إشارة مساواة مقابل العدد 1 في المتباينة التي تُعبِّر عن مجال هذه القاعدة.

مثال إضافي:

مُعتمِدًا الشكل الآتي الذي يُمثِّل منحنى الاقتران المُتشعِّب $h(x)$، أُجيب عن السؤالين التاليين:



1 أُحدِّد مجال الاقتران $h(x)$، ومداه.

المجال: $[-5, 3]$.

المدى: $(-3, 5)$.

2 أجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي:

$h(0), h(-3), h(2), h(-4)$.

$h(0) = 3, h(-3) = 3, h(2) = 0, h(-4) = 4$.

تعزيز اللغة ودعمها:

أُكرِّر المصطلحات الرياضية الوارد ذكرها في الدرس بكلٍّ من اللغة العربية واللغة الإنجليزية، مُحفِّزًا الطلبة على استعمالها.

التقويم التكويني:

أطلب إلى الطلبة حل التدريب الوارد في بند (**أتحقَّق من فهمي**) بعد كل مثال، ثم أختار بعض الإجابات التي تحوي أخطاء مفاهيمية لمناقشتها على اللوح، ولا أذكر اسم مَنْ أخطأ في الإجابة؛ تجنُّبًا لإحراجه.

الوحدة 4

$f(-2) = -2 + 1$ بتعويض $x = -2$

$= -1$ بالتبسيط

3 **أجد قيمة $f(0)$.**

العدد 0 ينتمي إلى الفترة $[-2, 1)$. إذن، أستعمل القاعدة الأولى:

$f(x) = x + 1$ القاعدة الأولى

$f(0) = 0 + 1$ بتعويض $x = 0$

$= 1$ بالتبسيط

4 **أجد قيمة $f(2)$.**

العدد 2 ينتمي إلى الفترة $[1, \infty)$. إذن، أستعمل القاعدة الثانية:

$f(x) = 3$ القاعدة الثانية

$f(2) = 3$ بتعويض $x = 2$

5 **أُمثِّل الاقتران $f(x)$ بيانيًّا، ثم أُحدِّد مداه.**

الخطوة 1: أُمثِّل $f(x) = x + 1$ عندما $-2 \le x < 1$.

أجد قيمة الاقتران الخطي: $f(x) = x + 1$ عند طرفي مجاله؛ أيْ عندما $x = 1$، وعندما $x = -2$، وذلك باستعمال جدول على النحو الآتي:

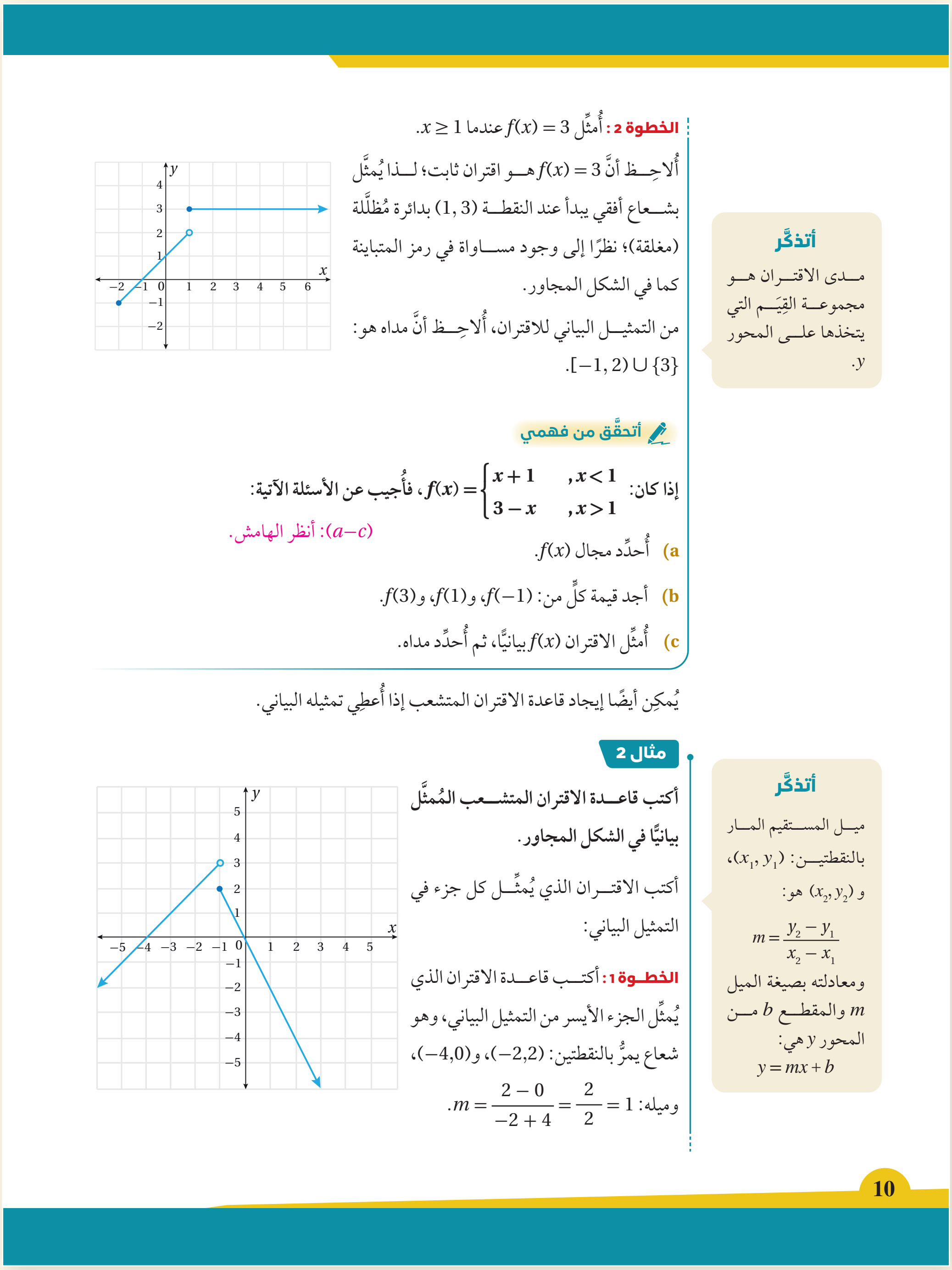
x	-2	1
$y = x + 1$	-1	2
(x, y)	$(-2, -1)$	$(1, 2)$

أُعيِّن النقطة $(1, 2)$ والنقطة $(-2, -1)$ في المستوى الإحداثي، ثم أصل بينهما بقطعة مستقيمة. بما أنَّ العدد -2 يُحقِّق المتباينة (توجد مساواة في رمز المتباينة من جهة العدد -2)، فإنَّني أبدأ التمثيل بدائرة مُظلَّلة عند النقطة $(-2, -1)$. أمّا العدد 1 فهو لا يُحقِّق المتباينة (لا توجد مساواة في رمز المتباينة من جهة العدد 1؛ لذا أُنهي التمثيل بدائرة غير مُظلَّلة (مُفرَّغة) عند النقطة $(1, 2)$.

أتذكَّر

بما أنَّ الاقتران: $f(x) = x+1$ هو اقتران خطي، فإنَّه يُكتفى بنقطتين لتمثيله بيانيًّا.

9



أتذكَّر

مـدى الاقتـران هـو مجموعـة القِيَـم التي يتخذها علـى المحور y.

الخطوة 2: أُمثِّل $f(x) = 3$ عندما $x \geq 1$.

أُلاحِظ أنَّ $f(x) = 3$ هو اقتران ثابت؛ لذا يُمثَّل بشعاع أفقي يبدأ عند النقطة $(1, 3)$ بدائرة مُظلَّلة (مغلقة)؛ نظرًا إلى وجود مساواة في رمز المتباينة كما في الشكل المجاور.

من التمثيل البياني للاقتران، أُلاحِظ أنَّ مداه هو: $[-1, 2) \cup \{3\}$.

أتحقَّق من فهمي

إذا كان: $f(x) = \begin{cases} x+1 & ,x<1 \\ 3-x & ,x>1 \end{cases}$، فأُجيب عن الأسئلة الآتية:

$(a–c)$: أنظر الهامش.

a) أُحدِّد مجال $f(x)$.

b) أجد قيمة كلٍّ من: $f(-1)$، و$f(1)$، و$f(3)$.

c) أُمثِّل الاقتران $f(x)$ بيانيًّا، ثم أُحدِّد مداه.

يُمكِن أيضًا إيجاد قاعدة الاقتران المتشعب إذا أُعطِي تمثيله البياني.

مثال 2

أتذكَّر

ميل المستقيم المار بالنقطتين: (x_1, y_1)، و (x_2, y_2) هو:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

ومعادلته بصيغة الميل m والمقطع b من المحور y هي:

$$y = mx + b$$

أكتب قاعدة الاقتران المتشعب المُمثَّل بيانيًّا في الشكل المجاور.

أكتب الاقتران الذي يُمثِّل كل جزء في التمثيل البياني:

الخطوة 1: أكتب قاعدة الاقتران الذي يُمثِّل الجزء الأيسر من التمثيل البياني، وهو شعاع يمرُّ بالنقطتين: $(-2,2)$، و$(-4,0)$،

وميله: $m = \frac{2-0}{-2+4} = \frac{2}{2} = 1$.

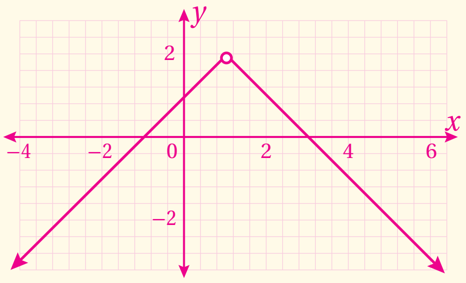
10

إجابة الأسئلة في بند (أتحقَّق من فهمي 1):

a) المجال هو جميع قِيَم x الحقيقية ما عدا العدد 1

b) $f(-1) = 0$، $f(1)$ غير مُعرَّف، $f(3) = 0$.

c) المدى هو جميع قِيَم y التي تنتمي إلى الفترة $(-\infty, 2)$.



مثال 2

- أُذكِّر الطلبة بكيفية إيجاد معادلة الخط المستقيم عن طريق نقطتين واقعتين عليه، مستعينًا بصندوق (**أتذكَّر**) المجاور للمثال الثاني.
- بعد إيجاد قاعدة كل مستقيم، أتحقَّق من فهم الطلبة كيفية كتابة هذه المعادلات في صورة اقتران مُتشعِّب.
- أطلب إلى الطلبة تأمُّل الاقتران المُتشعِّب المُمثَّل بيانيًّا في المثال 2، ثم أسألهم:
  - ما نوع الاقتران الظاهر في التمثيل البياني؟ اقتران مُتشعِّب.
  - كم قاعدة لهذا الاقتران؟ قاعدتان.
  - ما قيمة x التي تشعَّب عندها الاقتران؟ -1
  - ما نوع الاقتران في كل قاعدة؟ اقتران خطي.
  - كيف يُمكِن إيجاد الاقتران الذي يُمثِّل كل قاعدة؟ بما أنَّ كُلًّا من القاعدتين تُمثِّل اقترانًا خطيًّا، فإنَّه يُمكِن إيجاد قاعدتها بإيجاد ميل المستقيم الذي يُمثِّل الاقتران، ونقطة يمرُّ بها هذا المستقيم، إضافةً إلى تحديد مجال القاعدة.
  - ما مجال الاقتران؟ $(-\infty, \infty)$.
  - ما مجال القاعدة الأولى؟ $(-\infty, -1)$.
  - ما مجال القاعدة الثانية؟ $[-1, \infty)$.
- استنادًا إلى إجابات الأسئلة السابقة بمشاركة الطلبة، أنتقل معهم إلى مناقشة كتابة قاعدة الاقتران، مستعينًا بالخطوات الواردة في المثال.
- إنْ لزم الأمر، أُناقِش الطلبة في مزيد من الأمثلة؛ للتحقُّق من إتقانهم هذه المهارة.

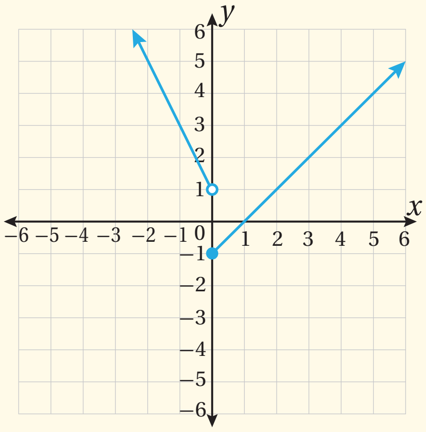
✓ إرشادات:

- أُخبِر الطلبة أنَّه أمكن إيجاد قاعدة الاقتران في المثال 2 عن طريق التمثيل البياني؛ نظرًا إلى احتوائه على أجزاء من خطوط مستقيمة (شعاعين). ثم أُخبِرهم أنَّه ليس من السهل عامةً إيجاد قاعدة اقتران ما عن طريق تمثيله البياني؛ إذ يتطلَّب ذلك توافر معلومات إضافية عن ماهية الاقتران.
- أُبيِّن للطلبة أنَّه إذا التقى التمثيلان البيانيان لقاعدتي الاقتران المُتشعِّب عند نقطة التشعُّب، فإنَّه يُمكِن إضافة المساواة إلى أيِّ قاعدة منهما.
- أُذكِّر الطلبة بأنَّ ميل الخط الأفقي هو صفر، وأنَّه يُمكِن إيجاده عن طريق صيغة الميل، وذلك بأخذ أيِّ نقطتين عليه.

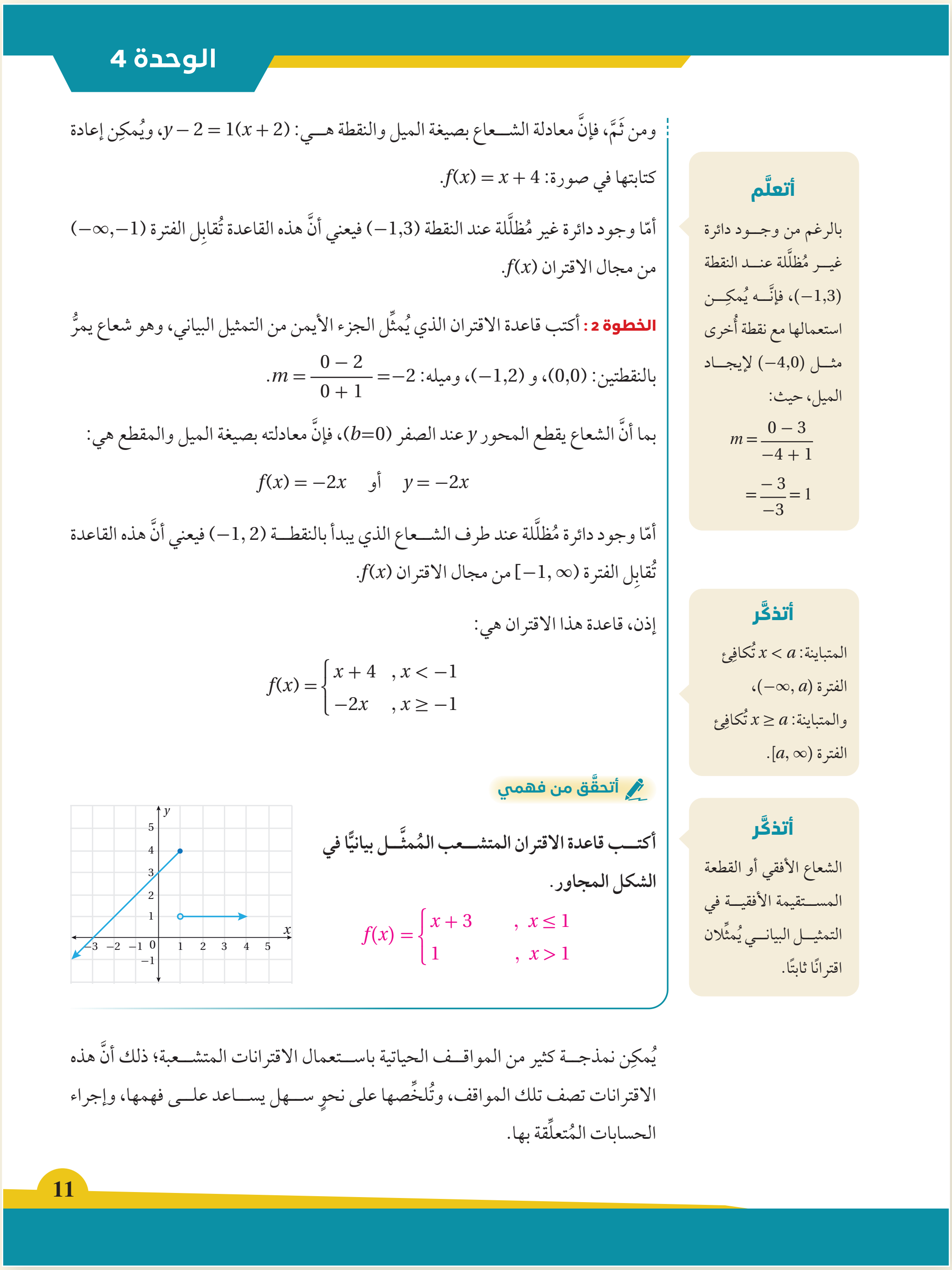
أخطاء شائعة: قد يُخطِئ بعض الطلبة بكتابة معادلة الخط الأفقي في صورة $x = c$ لأنَّه يمتدُّ بموازاة المحور x؛ لذا أُبيِّن لهم سبب كتابة المعادلة في صورة $y = c$ في هذه الحالة، مُذكِّرًا إيّاهم بأنَّ المستقيم $x = c$ هو مستقيم عمودي، وأنَّه لا يُمثِّل اقترانًا.

مثال إضافي:

أكتب قاعدة الاقتران المُتشعِّب المُمثَّل بيانيًّا في الشكل الآتي.



$$f(x) = \begin{cases} -2x + 1 & , x < 0 \\ x - 1 & , x \geq 0 \end{cases}$$



ومن ثَمَّ، فإنَّ معادلة الشعاع بصيغة الميل والنقطة هي: $y - 2 = 1(x + 2)$، ويُمكِن إعادة كتابتها في صورة: $f(x) = x + 4$.

أمّا وجود دائرة غير مُظلَّلة عند النقطة $(-1,3)$ فيعني أنَّ هذه القاعدة تُقابِل الفترة $(-\infty,-1)$ من مجال الاقتران $f(x)$.

الخطوة 2 : أكتب قاعدة الاقتران الذي يُمثِّل الجزء الأيمن من التمثيل البياني، وهو شعاع يمرُّ بالنقطتين: $(0,0)$، و $(-1,2)$، وميله: $m = \frac{0-2}{0+1} = -2$.

بما أنَّ الشعاع يقطع المحور y عند الصفر $(b=0)$، فإنَّ معادلته بصيغة الميل والمقطع هي:

$$f(x) = -2x \quad \text{أو} \quad y = -2x$$

أمّا وجود دائرة مُظلَّلة عند طرف الشعاع الذي يبدأ بالنقطة $(-1, 2)$ فيعني أنَّ هذه القاعدة تُقابِل الفترة $[-1, \infty)$ من مجال الاقتران $f(x)$.

إذن، قاعدة هذا الاقتران هي:

$$f(x) = \begin{cases} x + 4 & , x < -1 \\ -2x & , x \geq -1 \end{cases}$$

أتحقَّق من فهمي

أكتب قاعدة الاقتران المتشعب المُمثَّل بيانيًّا في الشكل المجاور.

$$f(x) = \begin{cases} x + 3 & , x \leq 1 \\ 1 & , x > 1 \end{cases}$$

أتعلَّم

بالرغم من وجود دائرة غير مُظلَّلة عند النقطة $(-1,3)$، فإنَّه يُمكِن استعمالها مع نقطة أُخرى مثل $(-4,0)$ لإيجاد الميل، حيث:

$$m = \frac{0-3}{-4+1} = \frac{-3}{-3} = 1$$

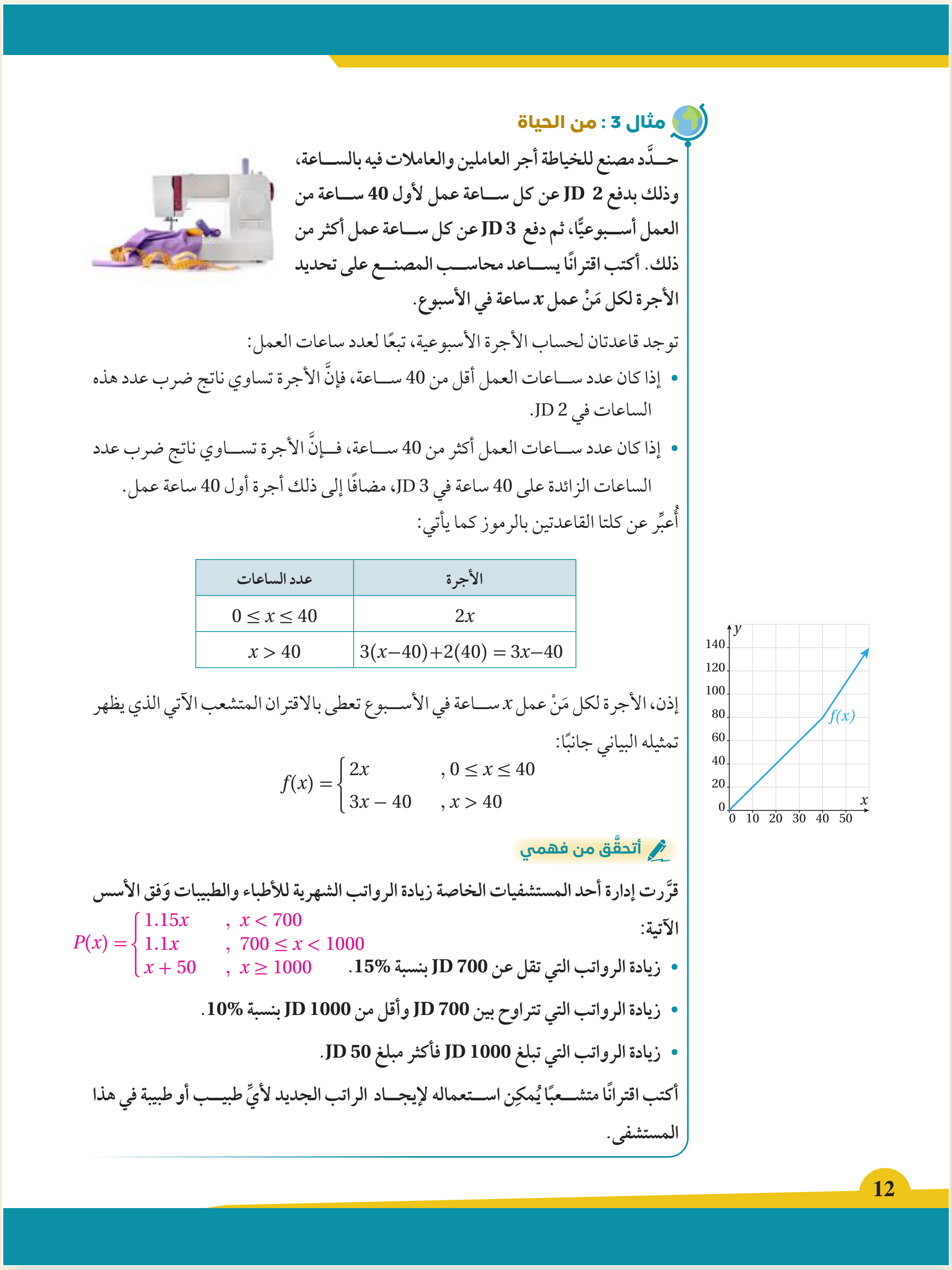
أتذكَّر

المتباينة: $x < a$ تُكافِئ الفترة $(-\infty, a)$، والمتباينة: $x \geq a$ تُكافِئ الفترة $[a, \infty)$.

أتذكَّر

الشعاع الأفقي أو القطعة المستقيمة الأفقية في التمثيل البياني يُمثِّلان اقترانًا ثابتًا.

يُمكِن نمذجة كثير من المواقف الحياتية باستعمال الاقترانات المتشعبة؛ ذلك أنَّ هذه الاقترانات تصف تلك المواقف، وتُلخِّصها على نحوٍ سهل يساعد على فهمها، وإجراء الحسابات المُتعلِّقة بها.



مثال 3 : من الحياة

حـدَّد مصنع للخياطة أجر العاملين والعاملات فيه بالساعة، وذلك بدفع JD 2 عن كل ساعة عمل لأول 40 ساعة من العمل أسبوعيًّا، ثم دفع JD 3 عن كل ساعة عمل أكثر من ذلك. أكتب اقترانًا يساعد محاسب المصنع على تحديد الأجرة لكل مَنْ عمل x ساعة في الأسبوع.

توجد قاعدتان لحساب الأجرة الأسبوعية، تبعًا لعدد ساعات العمل:

- إذا كان عدد ساعات العمل أقل من 40 ساعة، فإنَّ الأجرة تساوي ناتج ضرب عدد هذه الساعات في JD 2.
- إذا كان عدد ساعات العمل أكثر من 40 ساعة، فـإنَّ الأجرة تساوي ناتج ضرب عدد الساعات الزائدة على 40 ساعة في JD 3، مضافًا إلى ذلك أجرة أول 40 ساعة عمل.

أُعبِّر عن كلتا القاعدتين بالرموز كما يأتي:

الأجرة	عدد الساعات
$2x$	$0 \le x \le 40$
$3(x-40)+2(40) = 3x-40$	$x > 40$

إذن، الأجرة لكل مَنْ عمل x ساعة في الأسبوع تعطى بالاقتران المتشعب الآتي الذي يظهر تمثيله البياني جانبًا:

$$f(x) = \begin{cases} 2x & , 0 \le x \le 40 \\ 3x - 40 & , x > 40 \end{cases}$$

أتحقَّق من فهمي

قرَّرت إدارة أحد المستشفيات الخاصة زيادة الرواتب الشهرية للأطباء والطبيبات وَفق الأسس الآتية:

- **زيادة الرواتب التي تقل عن JD 700 بنسبة 15%.**
- **زيادة الرواتب التي تتراوح بين JD 700 وأقل من JD 1000 بنسبة 10%.**
- **زيادة الرواتب التي تبلغ JD 1000 فأكثر مبلغ JD 50.**

$$P(x) = \begin{cases} 1.15x & , \ x < 700 \\ 1.1x & , \ 700 \le x < 1000 \\ x + 50 & , \ x \ge 1000 \end{cases}$$

أكتب اقترانًا متشعبًا يُمكِن استعماله لإيجاد الراتب الجديد لأيِّ طبيب أو طبيبة في هذا المستشفى.

12

مثال 3: من الحياة

- أؤكِّد للطلبة أهمية الاقترانات المُتشعِّبة في حياتنا العملية، وذلك بذكر أمثلة بسيطة عليها.
- أطلب إلى أحد الطلبة قراءة المثال 3، ثم أطلب إلى آخر تحديد المعطيات والمطلوب.
- أُناقِش الطلبة في حل المثال 3 على اللوح، مُؤكِّدًا لهم ضرورة تبرير كل خطوة من خطوات الحل.

إرشادات:

- أُبرِّر للطلبة منطق اختلاف أجور العاملين في مصنع الخياطة بناءً على عدد ساعات العمل.
- أُبيِّن للطلبة أنَّ وجود عدد كبير من العاملين في المصنع يتطلَّب وجود معادلة يَسْهُل تطبيقها باستعمال الآلة الحاسبة أو برمجيات الحاسوب.
- أحرص على فهم الطلبة سبب وجود المقدار **2(40)** عند حساب الأجر لعدد ساعات يزيد على 40 ساعة.
- أُؤكِّد وجوب التقاء التمثيلين البيانيين لقاعدتي الاقتران في المثال 3.

تنويع التعليم:

- في المثال 3، قد يواجه بعض الطلبة من ذوي المستوى دون المتوسط صعوبة في التعبير عن مسألة لفظية باقتران مُتشعِّب؛ لذا أمنحهم بعض الوقت، وأُقدِّم لهم أمثلة سهلة عند اللزوم، مُنوِّهًا إيّاهم بضرورة قراءة المسألة بِرَوِيَّة؛ ما يساعدهم على حل المسائل بسهولة.
- أطلب إلى الطلبة المُتميِّزين كتابة مسألة حياتية يُمكِن التعبير عن حلها باستعمال الاقترانات المُتشعِّبة.

4 التدريب

أتدرّب وأحل المسائل

- أوجِّه الطلبة إلى بند (**أتدرّب وأحل المسائل**)، ثم أطلب إليهم حل المسائل (9 – 1) ضمن مجموعات ثنائية داخل الغرفة الصفية؛ فهذه المسائل تحديدًا ترتبط ارتباطًا مباشرًا بأمثلة الدرس، وهي تُستعمَل خاصةً لتدريب الطلبة على المفاهيم نفسها، بصرف النظر عمّا إذا كانت الأسئلة فردية أم زوجية.
- إذا واجه الطلبة صعوبة في حل أيّة مسألة، فإنّني أختار أحد الطلبة مِمَّنْ تمكَّن/ تمكّنت من حل المسألة؛ لمناقشة استراتيجيته/ استراتيجيتها في حل المسألة على اللوح، مُحفِّزًا الطلبة على طرح أيِّ تساؤل عن خطوات الحل المُقدَّمة من الزميل/ الزميلة.

تنويع التعليم:

إذا واجه الطلبة ذوو المستوى دون المتوسط صعوبة في حل أسئلة بند (**أتدرّب وأحل المسائل**)، فإنّني أضع كُلًّا منهم مع طالب آخر/ طالبة أُخرى من ذوي المستوى المتوسط أو مع أحد الطلبة المُتميِّزين؛ ليتشاركا في حل الأسئلة.

مهارات التفكير العليا

- أوجِّه الطلبة إلى بند (**مهارات التفكير العليا**)، ثم أطلب إليهم حل المسائل (14 – 12).
- أرصد أيّة أفكار غير تقليدية من الطلبة، ثم أطلب إلى هؤلاء الطلبة كتابة هذه الأفكار على اللوح.

إرشاد: في السؤال 14 (**تحدٍّ**)، أُوضِّح للطلبة أنَّ قاعدة الاقتران تُمثِّل نقطةً عندما $x = 1$.

أتدرَّب وأحُلُّ المسائل

إذا كان: $f(x) = \begin{cases} 3x-4 & , x \geq 1 \\ 2 & , x < 1 \end{cases}$، وكان: $g(x) = \begin{cases} 2x+1 & , -3 \leq x < 0 \\ 2x-1 & , x > 0 \end{cases}$، فأُجيب عن الأسئلة الآتية:

1 أُحدِّد مجال كلٍّ من: $f(x)$، و$g(x)$. أنظر ملحق الإجابات.

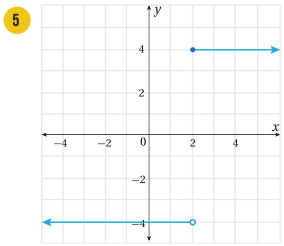
2 أجد قيمة كلٍّ من: $f(-1)$، و$f(2)$، و$g(0)$، و$g(-2)$. $f(-1) = 2$، $f(2) = 2$، $g(0)$ غير مُعرَّف، $g(-2) = -3$.

3 أُمثِّل الاقتران $f(x)$ بيانيًّا، ثم أُحدِّد مداه. أنظر ملحق الإجابات.

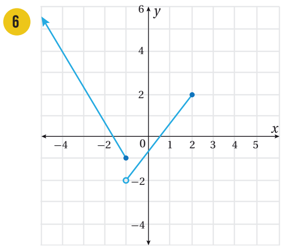
4 أُمثِّل الاقتران $g(x)$ بيانيًّا، ثم أُحدِّد مداه. أنظر ملحق الإجابات.

أكتب قاعدة الاقتران المتشعب المُمثَّل بيانيًّا في كلٍّ ممّا يأتي: (6–5): أنظر الهامش.

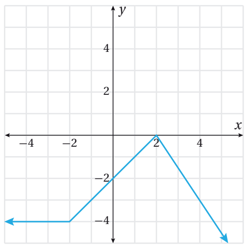
5



6



مُعتمِدًا الشكل المجاور الذي يُمثِّل منحنى الاقتران المتشعب $h(x)$، أُجيب عن السؤالين الآتيين: (9–7): أنظر الهامش.



7 أُحدِّد مجال الاقتران $h(x)$، ومداه.

8 أجد قيمة كلٍّ من: $h(-3)$، و$h(0)$، و$h(3)$، و$h(6)$.

9 **توفير:** أراد الوالد أنْ يُحفِّز ابنته سعاد على توفير جزء من مصروفها اليومي، فقرَّر منحها مبلغًا يساوي ما ستُوفِّره نهاية كل شهر في حال لم يتجاوز مبلغ التوفير JD 5. أمّا إذا زاد على ذلك، فإنَّه سيمنحها JD 10. أكتب اقترانًا متشعبًا يُمكِن استعماله لتمثيل هذا الموقف.

إجابة الأسئلة في بند (أتدرّب وأحل المسائل):

$$5)\ f(x) = \begin{cases} -4 & , x < 2 \\ 4 & , x \geq 2 \end{cases}$$

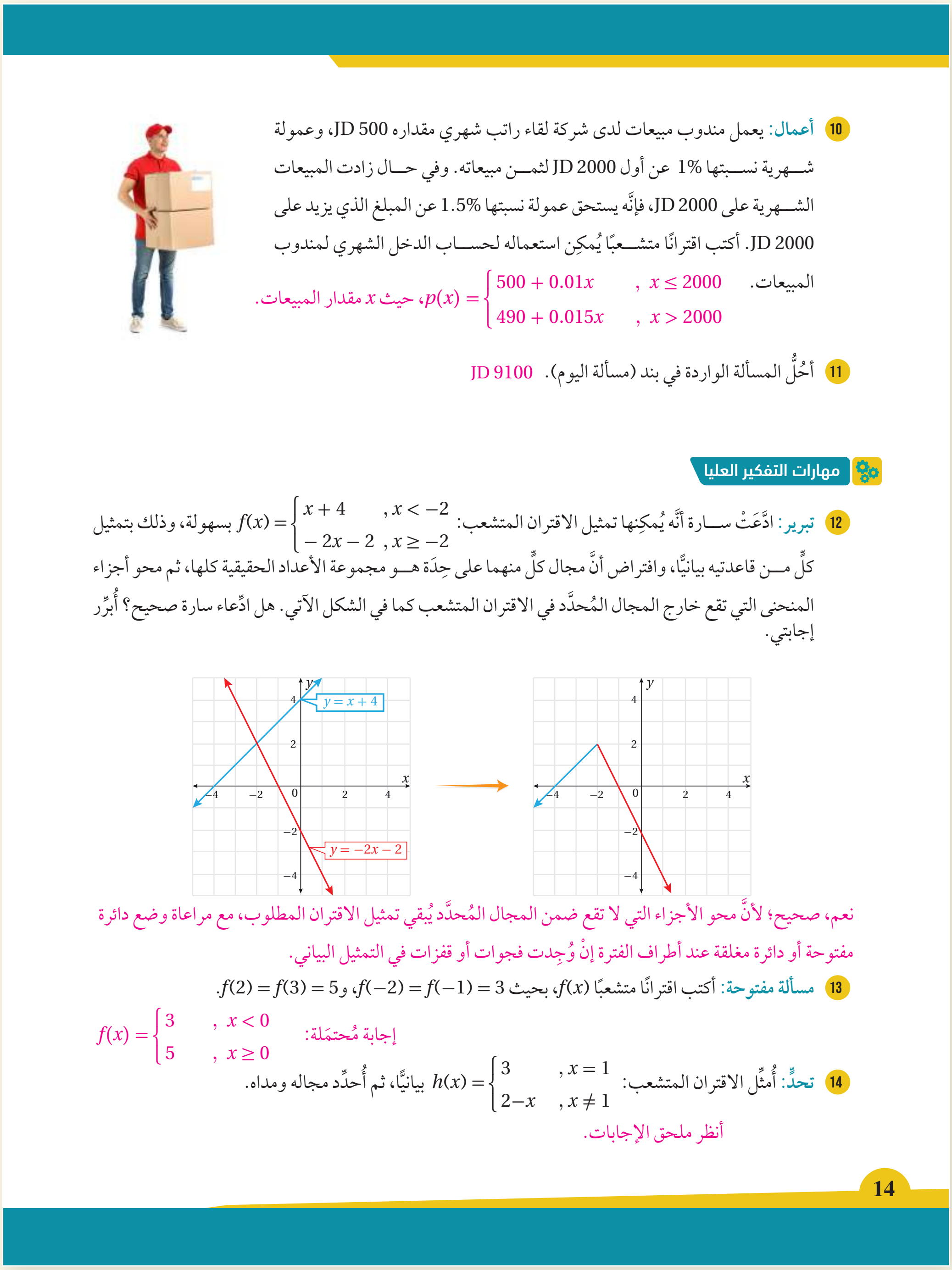
$$6)\ f(x) = \begin{cases} \frac{-5}{3}x - \frac{8}{3} & , x \leq -1 \\ \frac{4}{3}x - \frac{2}{3} & , -1 < x \leq 2 \end{cases}$$

7) مجال الاقتران h هو جميع قِيَم x الحقيقية، ومداه هو جميع قِيَم y التي تنتمي إلى الفترة $(-\infty, 0]$.

$$8)\ h(x) = \begin{cases} -4 & , x < -2 \\ x-2 & , -2 \leq x < 2 \\ -\frac{3}{2}x + 3 & , x \geq 2 \end{cases}$$

$h(-3) = -4, h(0) = -2, h(3) = -\frac{3}{2}, h(6) = -6$

9) $f(x) = \begin{cases} 2x & , 0 \leq x \leq 5 \\ 10 + x & , x > 5 \end{cases}$، حيث $f(x)$ هو المبلغ الذي تملكه سعاد بعد منحها المبلغ التحفيزي من أبيها، عند توفيرها مبلغًا مقداره x.



10 **أعمال:** يعمل مندوب مبيعات لدى شركة لقاء راتب شهري مقداره JD 500، وعمولة شهرية نسبتها 1% عن أول JD 2000 لثمن مبيعاته. وفي حال زادت المبيعات الشهرية على JD 2000، فإنَّه يستحق عمولة نسبتها 1.5% عن المبلغ الذي يزيد على JD 2000. أكتب اقترانًا متشعبًا يُمكِن استعماله لحساب الدخل الشهري لمندوب المبيعات.

$p(x)=\begin{cases}500+0.01x & , x\leq 2000\\ 490+0.015x & , x>2000\end{cases}$، حيث x مقدار المبيعات.

11 أحُلُّ المسألة الواردة في بند (مسألة اليوم). JD 9100

مهارات التفكير العليا

12 **تبرير:** ادَّعَتْ سارة أنَّه يُمكِنها تمثيل الاقتران المتشعب: $f(x)=\begin{cases}x+4 & , x<-2\\ -2x-2 & , x\geq -2\end{cases}$ بسهولة، وذلك بتمثيل كلٍّ من قاعدتيه بيانيًّا، وافتراض أنَّ مجال كلٍّ منهما على حِدَة هو مجموعة الأعداد الحقيقية كلها، ثم محو أجزاء المنحنى التي تقع خارج المجال المُحدَّد في الاقتران المتشعب كما في الشكل الآتي. هل ادِّعاء سارة صحيح؟ أُبرِّر إجابتي.

نعم، صحيح؛ لأنَّ محو الأجزاء التي لا تقع ضمن المجال المُحدَّد يُبقي تمثيل الاقتران المطلوب، مع مراعاة وضع دائرة مفتوحة أو دائرة مغلقة عند أطراف الفترة إنْ وُجِدت فجوات أو قفزات في التمثيل البياني.

13 **مسألة مفتوحة:** أكتب اقترانًا متشعبًا $f(x)$، بحيث $f(-2)=f(-1)=3$، و $f(2)=f(3)=5$.

إجابة مُحتمَلة: $f(x)=\begin{cases}3 & , x<0\\ 5 & , x\geq 0\end{cases}$

14 **تحدٍّ:** أُمثِّل الاقتران المتشعب: $h(x)=\begin{cases}3 & , x=1\\ 2-x & , x\neq 1\end{cases}$ بيانيًّا، ثم أُحدِّد مجاله ومداه.

أنظر ملحق الإجابات.

الواجب المنزلي:

أستعين بالجدول الآتي لتحديد الواجب المنزلي للطلبة بحسب مستوياتهم:

المستويات	الأسئلة
دون المتوسط	كتاب الطالب: 10, 11 كتاب التمارين: (1 – 4)
ضمن المتوسط	كتاب الطالب: 10, 11, 12 كتاب التمارين: 5, 6
فوق المتوسط	كتاب الطالب: (11 – 14) كتاب التمارين: 6, 7

5 الإثراء

- أطلب إلى الطلبة حل السؤال الآتي بوصفه إثراءً لهم:

◄ إذا كان: $f(x)=\begin{cases}ax+1 & , x<1\\ 2x-b & , x\geq 1\end{cases}$،

فأجد قيمة كلٍّ من a, b، بحيث:

$f(-1)=0, f(3)=4$.

$a=1, b=2$

6 الختام

- أمنح الطلبة دقائق معدودة لكتابة فقرة عمّا تعلَّموه في هذا الدرس، ثم أطلب إلى بعضهم قراءة الفقرات التي كتبوها.
- أتحقَّق من فهم الطلبة موضوع الدرس، بطرح السؤال الآتي عليهم:

◄ إذا كان: $f(x)=\begin{cases}2x+1 & , x<1\\ 4-5x & , x\geq 1\end{cases}$،

فأُجيب عن الأسئلة الآتية:

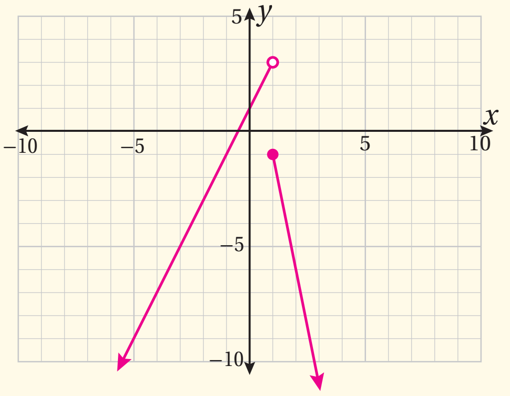
1 أجد قيمة كلٍّ من: $f(1), f(0), f(2)$.

$f(1)=-1, f(0)=1, f(2)=-6$.

2 أجد قيمة x، حيث: $f(x)=-11$.

$x=3$, or $x=-6$.

3 أُمثِّل الاقتران $f(x)$ بيانيًّا، ثم أُحدِّد مجاله ومداه.



مجال الاقتران: $(-\infty, \infty)$.

مدى الاقتران: $(-\infty, 3)$.

الدرس
2

الدرس 2

اقتران القيمة المطلقة

Absolute Value Function

فكرة الدرس تعرُّف اقتران القيمة المطلقة، وتمثيله بيانيًّا، وتحديد مجاله ومداه.

المصطلحات اقتران القيمة المطلقة، الرأس.

مسألة اليوم مُثِّلت الواجهة الأمامية لخيمة في مستوى إحداثي، تُمثَّل فيه كل وحدة مترًا واحدًا. إذا كان رأس الخيمة عند النقطة $(1, 3.5)$، وطرفا قاعدتها عند النقطة $(-0.5, 0)$، والنقطة $(2.5, 0)$، فأجد اقتران القيمة المطلقة الذي يُمثِّل واجهة الخيمة.

يُسمّى الاقتران الذي يحوي قيمة مطلقة لمقدار جبري **اقتران القيمة المطلقة** (absolute value function)، ومن أمثلته:

$$f(x)=|x+2| \quad , \quad g(x)=|2x-4|-1 \quad , \quad h(x)=-|x|+3$$

أتذكَّر

القيمة المطلقة للعدد الحقيقي السالب تُلغي الإشارة السالبة، وتجعلها موجبة، مثل: $|-5| = |+5| = 5$

تعلَّمْتُ سابقًا أنَّ القيمة المطلقة (يُرمَز إليها بالرمز $|x|$) لأيِّ عدد حقيقي x تساوي بُعْده عن الصفر على خط الأعداد. وبما أنَّ البُعْد لا يكون سالبًا، فإنَّ $|x| \geq 0$؛ لذا يُمكِن كتابة $|x|$ في صورة اقتران متشعب كما يأتي:

$$|x| = \begin{cases} -x & , x < 0 \\ x & , x \geq 0 \end{cases}$$

يُمكِن أيضًا إعادة كتابة أيِّ اقترانِ قيمةٍ مطلقةٍ في صورة اقتران متشعب، من دون استعمال رمز القيمة المطلقة، وهو ما يُسمّى **إعادة تعريف اقتران القيمة المطلقة**.

مثال 1

أُعيد تعريف اقتران القيمة المطلقة: $f(x)=|3x-6|$، ثم أجد كُلًّا من $f(-1)$ و $f(4)$.

لإعادة تعريف اقتران القيمة المطلقة f، أتبع الخطوات الآتية:

الخطوة 1: أجعل ما في داخل القيمة المطلقة يساوي صفرًا، ثم أحُلُّ المعادلة الناتجة.

15

نتاجات الدرس:

- إيجاد مجال اقتران القيمة المطلقة.
- إيجاد مدى اقتران القيمة المطلقة.
- تمثيل اقتران القيمة المطلقة بيانيًّا.
- حل مسائل وتطبيقات مُتنوِّعة على اقتران القيمة المطلقة.

نتاجات التعلُّم القبلي:

- تعرُّف مفهوم القيمة الطلقة.
- إيجاد قيمة مقدار جبري يتضمَّن قيمة مطلقة.
- تعرُّف الاقتران المُتشعِّب.
- إيجاد مجال الاقتران المُتشعِّب.
- إيجاد مدى الاقتران المُتشعِّب.
- تمثيل الاقتران المُتشعِّب بيانيًّا.

مراجعة التعلُّم القبلي:

- أُوجِّه الطلبة في بداية كل حصة إلى الفقرة (الفقرات) المُرتبطة بما سيُقدَّم من موضوعات الدرس في الحصة (إنْ وُجِدت) ضمن صفحات **(أستعد لدراسة الوحدة)** في كتاب التمارين، ثم أطلب إليهم حل تدريباتها داخل الغرفة الصفية بصورة فردية.
- أتجوَّل بين الطلبة؛ لمتابعتهم أثناء الحل، وتحديد نقاط ضعفهم، وأُوجِّههم إلى مراجعة المثال عندما يواجهون صعوبة في الحل.

ملاحظات المُعلِّم/ المُعلِّمة

1 التهيئة

- أُوزِّع الطلبة إلى مجموعات ثنائية، ثم أطلب إلى أفراد المجموعات الإجابة عن الأسئلة الآتية:
  - ماذا يُقصَد بالقيمة المطلقة للعدد (-5)؟ المسافة بين العدد (-5) والصفر على خط الأعداد، وهي 5
  - ما المقصود بـ $|x|$؟ القيمة المطلقة للعدد x، وهي بُعْده عن الصفر على خط الأعداد.
  - إذا كان: $|x| = m$، حيث m عدد موجب، فما قيمة (قِيَم) x؟ $x = m, \text{ or } x = -m$
  - إذا كان: $f(x) = |2x - 4|$، فما قيمة $f(2)$؟ 0
  - أكتب قاعدة اقتران تُمثِّل بُعْد العدد x عن الصفر. $|x| = \begin{cases} -x & , x < 0 \\ x & , x \geq 0 \end{cases}$
  - أكتب $\sqrt{(x-2)^2}$ في أبسط صورة. $|x - 2|$
- أُناقِش أفراد المجموعات في حل الأسئلة السابقة، وأطلب إليهم تبرير إجاباتهم.

2 الاستكشاف

- أُوجِّه الطلبة إلى قراءة المسألة الواردة في بند (**مسألة اليوم**)، ثم أسألهم:
  - ما النقطة التي تُمثِّل رأس الخيمة؟ $(1, 3.5)$
  - ما النقطتان اللتان تُمثِّلان طرفي قاعدة الخيمة؟ $(2.5, 0), (-0.5, 0)$
- أطلب إلى أحد الطلبة تمثيل واجهة الخيمة الأمامية بيانيًّا في المستوى الإحداثي، ثم أطرح على الطلبة الأسئلة الآتية:
  - ما الاقتران المُتشعِّب الذي يُمثِّل ضلعي المثلث غير المُنطبِقين على محور x؟
  - بماذا يمتاز هذا الاقتران؟
  - هل يُمكِن تسمية هذا الاقتران باسم آخر؟
- أُخبِر الطلبة أنَّهم سيتعرَّفون إجابة الأسئلة السابقة في هذا الدرس.
- أُناقِش الطلبة في إجاباتهم، ثم أسألهم:
  - ما رأيكم/ رأيكن في إجابة زميلكم/ زميلتكن؟
  - مَنْ يتفق/ تتفق مع إجابة زميله/ زميلتها؟
- أُعزِّز الإجابات الصحيحة.

3 التدريس

مثال 1

- أُذكِّر الطلبة بمفهوم القيمة المطلقة للأعداد والمقادير الجبرية، ثم أُقدِّم لهم مفهوم اقتران القيمة المطلقة، مُبيِّنًا أنَّه يُمكِن كتابة اقتران القيمة المطلقة في صورة اقتران مُتشعِّب من دون استعمال رمز القيمة المطلقة، في ما يُسمّى إعادة تعريف اقتران القيمة المطلقة.
- أُناقِش الطلبة في إعادة تعريف اقتران القيمة المطلقة الوارد في المثال 1 على اللوح، مستعينًا بالخطوات الواردة في كتاب الطالب.
- إنْ لزم الأمر، أُناقِش الطلبة في مزيد من الأمثلة؛ للتحقُّق من إتقانهم هذه المهارة.

إرشادات:

- يُمكِن تعريف الاقتران الناتج من إعادة تعريف اقتران القيمة المطلقة بالكلمات كما يأتي: " هو ما جاء داخل القيمة المطلقة إذا كان موجبًا أو صفرًا، ومضروبًا في -1 إذا كان سالبًا " .
- أُناقِش الطلبة في الأفكار الواردة في الصناديق الهامشية؛ لِما لها من أهمية في تعزيز مفاهيم الدرس.

تعزيز اللغة ودعمها:

أُكرِّر المصطلحات الرياضية الوارد ذكرها في الدرس بكلٍّ من اللغة العربية واللغة الإنجليزية، مُحفِّزًا الطلبة على استعمالها.

التقويم التكويني:

أطلب إلى الطلبة حل التدريب الوارد في بند (**أتحقَّق من فهمي**) بعد كل مثال، ثم أختار بعض الإجابات التي تحوي أخطاء مفاهيمية لمناقشتها على اللوح، ولا أذكر اسم مَنْ أخطأ في الإجابة؛ تجنُّبًا لإحراجه.

$3x - 6 = 0$ بجعل ما في داخل القيمة المطلقة يساوي صفرًا

$3x - 6 + 6 = 0 + 6$ بإضافة 6 إلى طرفي المعادلة

$\frac{3x}{3} = \frac{6}{3}$ بقسمة طرفي المعادلة على 3

$x = 2$ بالتبسيط

الخطوة 2 : أُعيِّن جذر المعادلة على خط الأعداد، ثم أُحدِّد الإشارة على جانبيه.

أُعيِّن العدد 2 على خط الأعداد، ثم أُحدِّد الإشارة على جانبيه، بتعويض أيِّ قيمة أقل من 2 (مثل 0) في المقدار الجبري: $3x-6$، فيكون دائمًا ناتج التعويض سالبًا؛ ما يعني أنَّ إشارة المقدار سالبة يسار العدد 2، بعد ذلك أُعوِّض أيَّ قيمة أكبر من 2 (مثل 4) في المقدار الجبري: $3x-6$، ويكون دائمًا ناتج التعويض موجبًا؛ ما يعني أنَّ إشارة المقدار موجبة يمين العدد 2:

- - - - - - - - - | + + + + + + + +

2

الخطوة 3 : أكتب قاعدتي الاقتران بحسب إشارة يمين صفر المعادلة ويساره.

أكتب ما في داخل رمز القيمة المطلقة كما هو من دون تغيير في الجزء الموجب، ثم أكتب في الجزء السالب ما في داخل رمز القيمة المطلقة مضروبًا في -1:

$6 - 3x$ $3x - 6$

- - - - - - - - - | + + + + + + + +

2

الخطوة 4 : أكتب قاعدة الاقتران المتشعب (من دون استعمال رمز القيمة المطلقة).

$$f(x) = \begin{cases} 6-3x & , x < 2 \\ 3x-6 & , x \geq 2 \end{cases}$$

لإيجاد كلٍّ من: $f(-1)$، و $f(4)$، أُعوِّض في القاعدة المناسبة:

$f(-1) = 6 - 3(-1)$ بتعويض $x = -1$ في القاعدة الأولى؛ لأنَّ $-1<2$

$= 9$ بالتبسيط

$f(4) = 3(4) - 6$ بتعويض $x = 4$ في القاعدة الثانية؛ لأنَّ $4>2$

$= 6$ بالتبسيط

أتعلَّم

يُمكِن أيضًا كتابة الاقتران $f(x)$ على النحو الآتي:

$$f(x) = \begin{cases} 6-3x & , x \leq 2 \\ 3x-6 & , x > 2 \end{cases}$$

ولكنْ جرت العادة أنْ يوضَع رمز المساواة عند رمز أكبر (>).

أتحقَّق من فهمي

أُعيد تعريف اقتران القيمة المطلقة: $\boldsymbol{h(x) = |2x + 8|}$.

$$h(x) = \begin{cases} 2x + 8 & , \ x \geq -4 \\ -2x - 8 & , \ x<-4 \end{cases}$$

16

الوحدة 4

التمثيل البياني لاقتران القيمة المطلقة في صورة: $f(x) = a|mx+b| + c$، حيث: $a \neq 0$، و $m \neq 0$، يتكوَّن من شعاعين على شكل ∨ أو ∧ متماثلين حول المحور: $x = \frac{-b}{m}$.

رأس (vertex) منحنى الاقتران هو النقطة التي يصل عندها منحناه إلى أعلى قيمة أو أقل قيمة، وإحداثياها $(-\frac{b}{m}, c)$.

يُمكِن تمثيل اقتران القيمة المطلقة بيانيًّا باستعمال محور التماثل والرأس.

مثال 2

أُمثِّل بيانيًّا كل اقتران ممّا يأتي، مُحدِّدًا مجاله ومداه:

① $f(x) = |x|$

الخطوة 1: أجد إحداثيي نقطة رأس الاقتران، ومعادلة محور التماثل.

أُقارِن الاقتران: $f(x)=|x|$ بالصيغة: $f(x) = a|mx+b|+c$، فأُلاحِظ أنَّ:

$$a = 1, b = 0, c = 0, m = 1$$

أجد إحداثيي نقطة الرأس:

إحداثيا نقطة الرأس $(\frac{-b}{m}, c)$

بتعويض $b = 0, m = 1, c = 0$ $= (\frac{0}{1}, 0)$

بالتبسيط $= (0, 0)$

أجد معادلة محور التماثل:

معادلة محور التماثل $x = \frac{-b}{m}$

بتعويض $b = 0, m = 1$ $x = \frac{0}{1}$

بالتبسيط $x = 0$

أتعلَّم

تُمثِّل المعادلة: $x = 0$ المحور y.

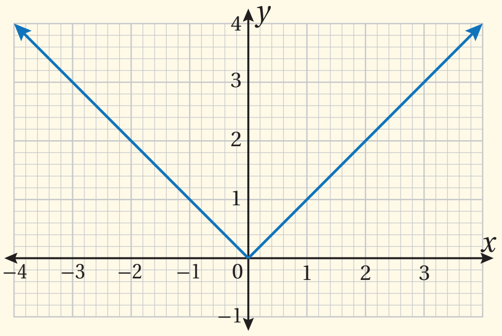
17

أخطاء شائعة:

قد يعتقد بعض الطلبة خطأً أنَّ التمثيل البياني لأيِّ اقتران يحتوي على القيمة المطلقة يأخذ شكل ∧ أو ∨؛ لذا أُوضِّح لهم أنَّ هذا الشكل ينطبق فقط على اقترانات القيمة المطلقة في صورة: $f(x) = a|mx + b| + c$؛ أيْ إذا وُجِد اقتران خطي داخل القيمة المطلقة.

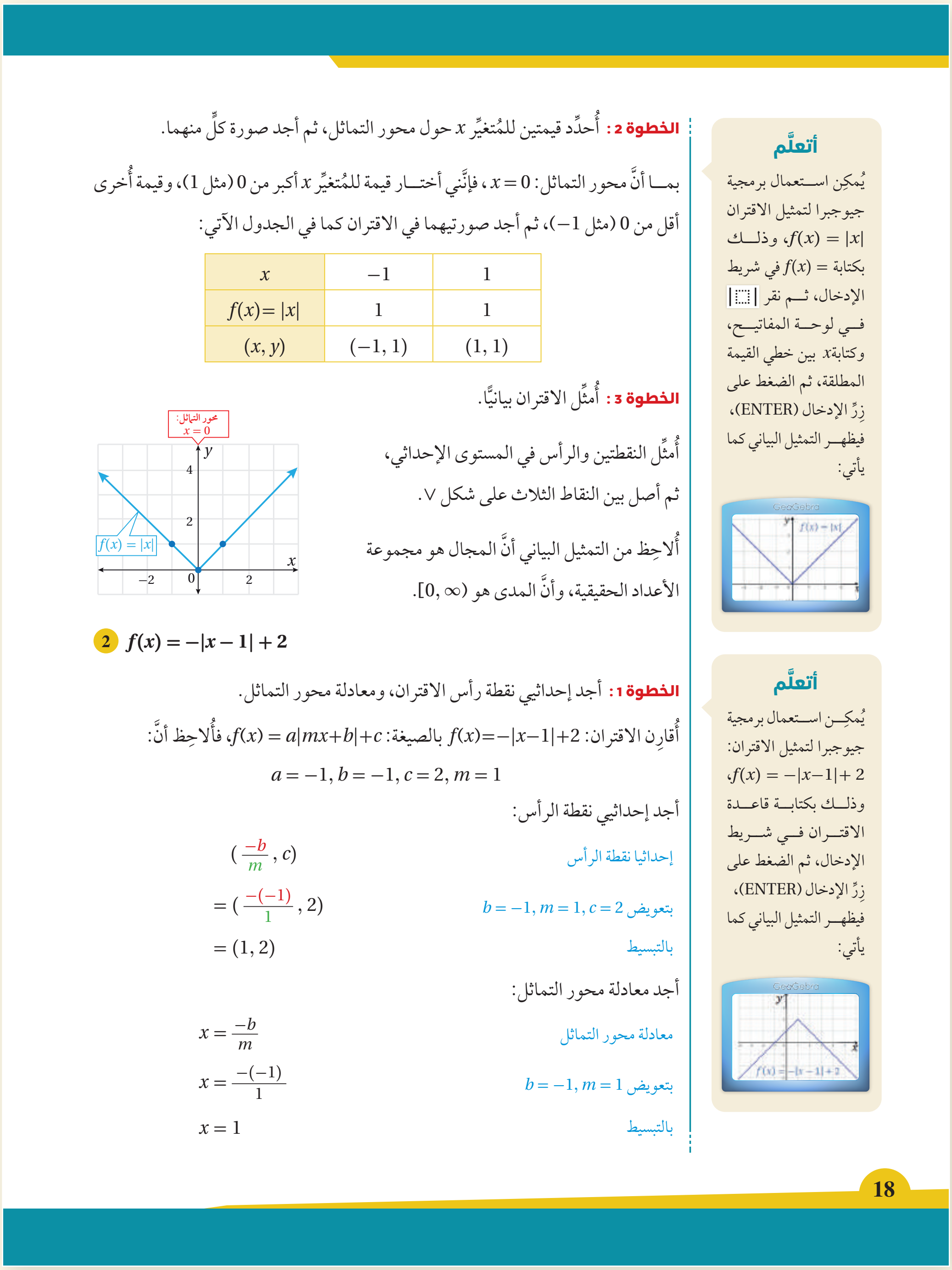
مثال 2

- أرسم على اللوح الشكل الآتي، مُبيِّنًا للطلبة أنَّه التمثيل البياني للاقتران: $f(x) = |x|$.



- أطلب إلى الطلبة العمل ضمن مجموعات ثنائية، وكتابة أكبر عدد مُمكِن من الملاحظات عن الرسم البياني.
- أُناقِش أفراد المجموعات في إجاباتهم، ثم أُوضِّح لهم خصائص التمثيل البياني لأيِّ اقتران قيمة مطلقة في صورة: $f(x) = a|mx + b| + c$، حيث: $a \neq 0, m \neq 0$، وعناصره، مستعينًا بفقرة الشرح التي تسبق المثال 2.
- أُناقِش الطلبة في حل الفرع 1 من هذا المثال على اللوح، مُبيِّنًا لهم أهمية تحديد رأس الاقتران، ومعادلة محور تماثله، وقيمتين للمُتغيِّر x حول محور التماثل؛ لتمثيل اقتران القيمة المطلقة بيانيًّا.
- أُناقِش الطلبة في حل الفرع 2 من هذا المثال على اللوح، مُبيِّنًا لهم أنَّ سبب مجيء منحنى الاقتران مفتوحًا إلى الأسفل هو أنَّ $a < 0$.
- إنْ لزم الأمر، أُناقِش الطلبة في مزيد من الأمثلة؛ للتحقُّق من إتقانهم هذه المهارة.

إرشاد: أُوضِّح للطلبة خطوات تمثيل اقتران القيمة المطلقة باستعمال برمجية جيوجبرا، مستعينًا بفقرتي (**أتعلَّم**) الواردتين في هامش المثال 2.



الخطوة 2: أُحدِّد قيمتين للمُتغيِّر x حول محور التماثل، ثم أجد صورة كلٍّ منهما.

بما أنَّ محور التماثل: $x = 0$، فإنَّني أختار قيمة للمُتغيِّر x أكبر من 0 (مثل 1)، وقيمة أُخرى أقل من 0 (مثل -1)، ثم أجد صورتيهما في الاقتران كما في الجدول الآتي:

x	-1	1
$f(x)= \|x\|$	1	1
(x, y)	$(-1, 1)$	$(1, 1)$

الخطوة 3: أُمثِّل الاقتران بيانيًّا.

أُمثِّل النقطتين والرأس في المستوى الإحداثي، ثم أصل بين النقاط الثلاث على شكل V.

ألاحِظ من التمثيل البياني أنَّ المجال هو مجموعة الأعداد الحقيقية، وأنَّ المدى هو $[0, \infty)$.

2 $f(x) = -|x - 1| + 2$

الخطوة 1: أجد إحداثيي نقطة رأس الاقتران، ومعادلة محور التماثل.

أُقارِن الاقتران: $f(x)=-|x-1|+2$ بالصيغة: $f(x) = a|mx+b|+c$، فأُلاحِظ أنَّ:

$$a = -1, b = -1, c = 2, m = 1$$

أجد إحداثيي نقطة الرأس:

إحداثيا نقطة الرأس $\left(\frac{-b}{m}, c\right)$

بتعويض $b = -1, m = 1, c = 2$ $= \left(\frac{-(-1)}{1}, 2\right)$

بالتبسيط $= (1, 2)$

أجد معادلة محور التماثل:

معادلة محور التماثل $x = \frac{-b}{m}$

بتعويض $b = -1, m = 1$ $x = \frac{-(-1)}{1}$

بالتبسيط $x = 1$

أتعلَّم

يُمكِن استعمال برمجية جيوجبرا لتمثيل الاقتران $f(x) = |x|$، وذلك بكتابة $f(x) =$ في شريط الإدخال، ثم نقر |⬚| في لوحة المفاتيح، وكتابة x بين خطي القيمة المطلقة، ثم الضغط على زِرِّ الإدخال (ENTER)، فيظهر التمثيل البياني كما يأتي:

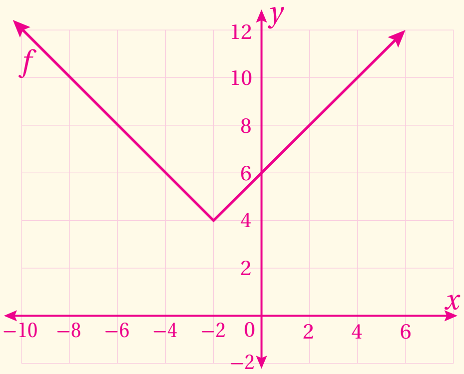
أتعلَّم

يُمكِن استعمال برمجية جيوجبرا لتمثيل الاقتران: $f(x) = -|x-1|+ 2$، وذلك بكتابة قاعدة الاقتران في شريط الإدخال، ثم الضغط على زِرِّ الإدخال (ENTER)، فيظهر التمثيل البياني كما يأتي:

مثال إضافي:

أُمثِّل بيانيًّا كل اقتران ممّا يأتي، مُحدِّدًا مجاله ومداه:

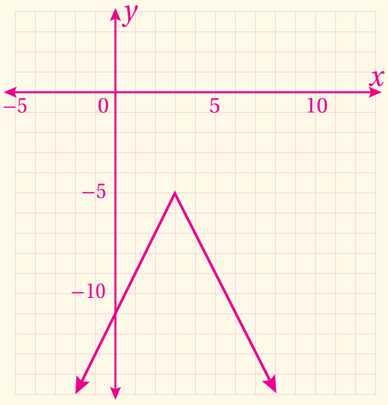
1 $f(x) = |x + 2| + 4$



المجال: $(-\infty, \infty)$

المدى: $[4, \infty)$

2 $f(x) = -|6 - 2x| - 5$

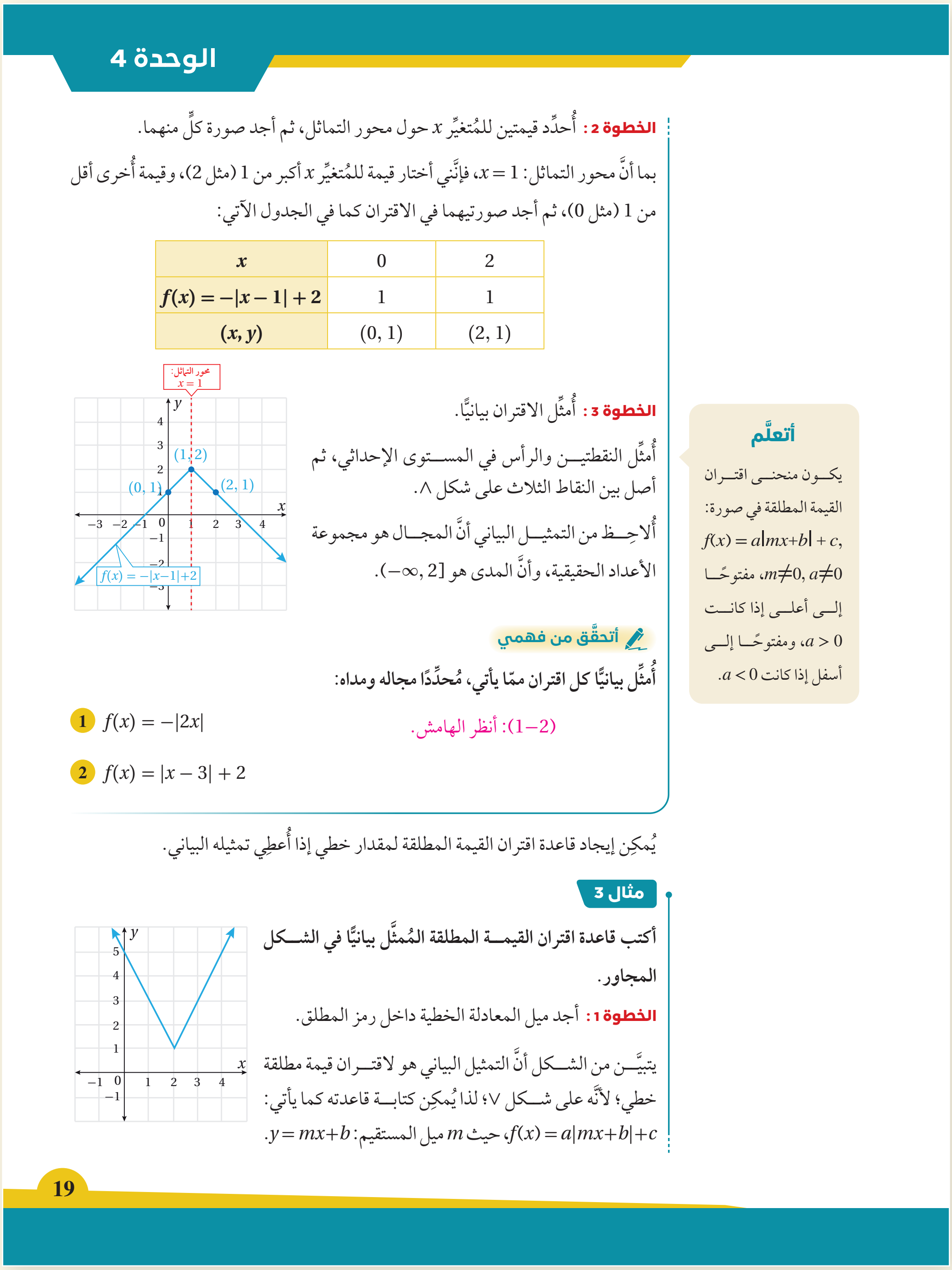


المجال: $(-\infty, \infty)$

المدى: $(-\infty, -5]$

••• توسعة:

أطلب إلى الطلبة حل المثال 2 بإعادة تعريف الاقتران المعطى، وتمثيل هذا الاقتران بوصفه اقترانًا مُتشعِّبًا.



الخطوة 2: أُحدِّد قيمتين للمُتغيِّر x حول محور التماثل، ثم أجد صورة كلٍّ منهما.

بما أنَّ محور التماثل: $x = 1$، فإنَّني أختار قيمة للمُتغيِّر x أكبر من 1 (مثل 2)، وقيمة أُخرى أقل من 1 (مثل 0)، ثم أجد صورتيهما في الاقتران كما في الجدول الآتي:

x	0	2
$f(x) = -\|x-1\| + 2$	1	1
(x, y)	$(0, 1)$	$(2, 1)$

الخطوة 3: أُمثِّل الاقتران بيانيًّا.

أُمثِّل النقطتين والرأس في المستوى الإحداثي، ثم أصل بين النقاط الثلاث على شكل ٨.

ألاحِظ من التمثيل البياني أنَّ المجال هو مجموعة الأعداد الحقيقية، وأنَّ المدى هو $(-\infty, 2]$.

أتعلَّم

يكون منحنى اقتران القيمة المطلقة في صورة: $f(x) = a|mx+b| + c,\ m\neq0, a\neq0$، مفتوحًا إلى أعلى إذا كانت $a > 0$، ومفتوحًا إلى أسفل إذا كانت $a < 0$.

أتحقَّق من فهمي

أُمثِّل بيانيًّا كل اقتران ممّا يأتي، مُحدِّدًا مجاله ومداه:

1) $f(x) = -|2x|$

2) $f(x) = |x-3| + 2$

(1–2): أنظر الهامش.

يُمكِن إيجاد قاعدة اقتران القيمة المطلقة لمقدار خطي إذا أُعطِي تمثيله البياني.

مثال 3

أكتب قاعدة اقتران القيمة المطلقة المُمثَّل بيانيًّا في الشكل المجاور.

الخطوة 1: أجد ميل المعادلة الخطية داخل رمز المطلق.

يتبيَّن من الشكل أنَّ التمثيل البياني هو لاقتران قيمة مطلقة خطي؛ لأنَّه على شكل ٧؛ لذا يُمكِن كتابة قاعدته كما يأتي: $f(x) = a|mx+b|+c$، حيث m ميل المستقيم: $y = mx+b$.

مثال 3

- أُوضِّح للطلبة أنَّه يُمكِن إيجاد قاعدة اقتران قيمة مطلقة لمقدار خطي إذا عُلِم تمثيله البياني.
- أُوضِّح للطلبة كيف يُمكِن كتابة قاعدة اقتران القيمة المطلقة المُمثَّل بيانيًّا في المثال 3، مستعينًا بالخطوات الواردة في المثال.
- إنْ لزم الأمر، أُناقِش الطلبة في مزيد من الأمثلة؛ للتحقُّق من إتقانهم هذه المهارة.

إرشادات:

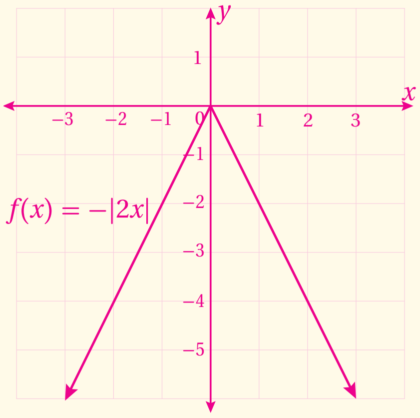
- أَلفِت انتباه الطلبة إلى أنَّه إذا كان الرأس (x_0, y_0)، فإنَّ معادلة الاقتران ستكون بالضرورة في صورة: $f(x) = a|x-x_0| + y_0$؛ ففي المثال 3، الرأس هو $(2, 1)$، وهذا يُحتِّم أنْ تكون المعادلة هي: $f(x) = a|x-2| + 1$، ثم يتطلَّب إيجاد قيمة a بتعويض أيِّ نقطة واقعة على المنحنى، مثل $(3, 3)$، فتكون القيمة عندئذٍ هي: $a = 2$؛ أيْ إنَّ المعادلة ستكون:

$$f(x) = 2|x-2| + 1$$

- أُذكِّر الطلبة بعدم وجود فرق بين $|x-x_0|$ و $|x_0-x|$.

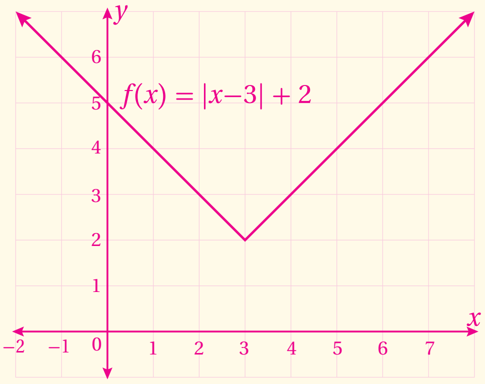
إجابة الأسئلة في بند (أتحقَّق من فهمي 2):

1)



مجال الاقتران f هو جميع قِيَم x الحقيقية، ومداه هو جميع قِيَم y الحقيقية التي تنتمي إلى الفترة $(-\infty, 0]$.

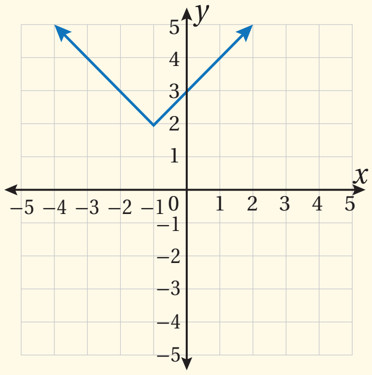
2)



مجال الاقتران f هو جميع قِيَم x الحقيقية، ومداه هو جميع قِيَم y الحقيقية التي تنتمي إلى الفترة $[2, \infty)$.

مثال إضافي:

أكتب اقتران القيمة المطلقة المُمثَّل بيانيًا في الشكل الآتي.



$f(x) = |x + 1| + 2$

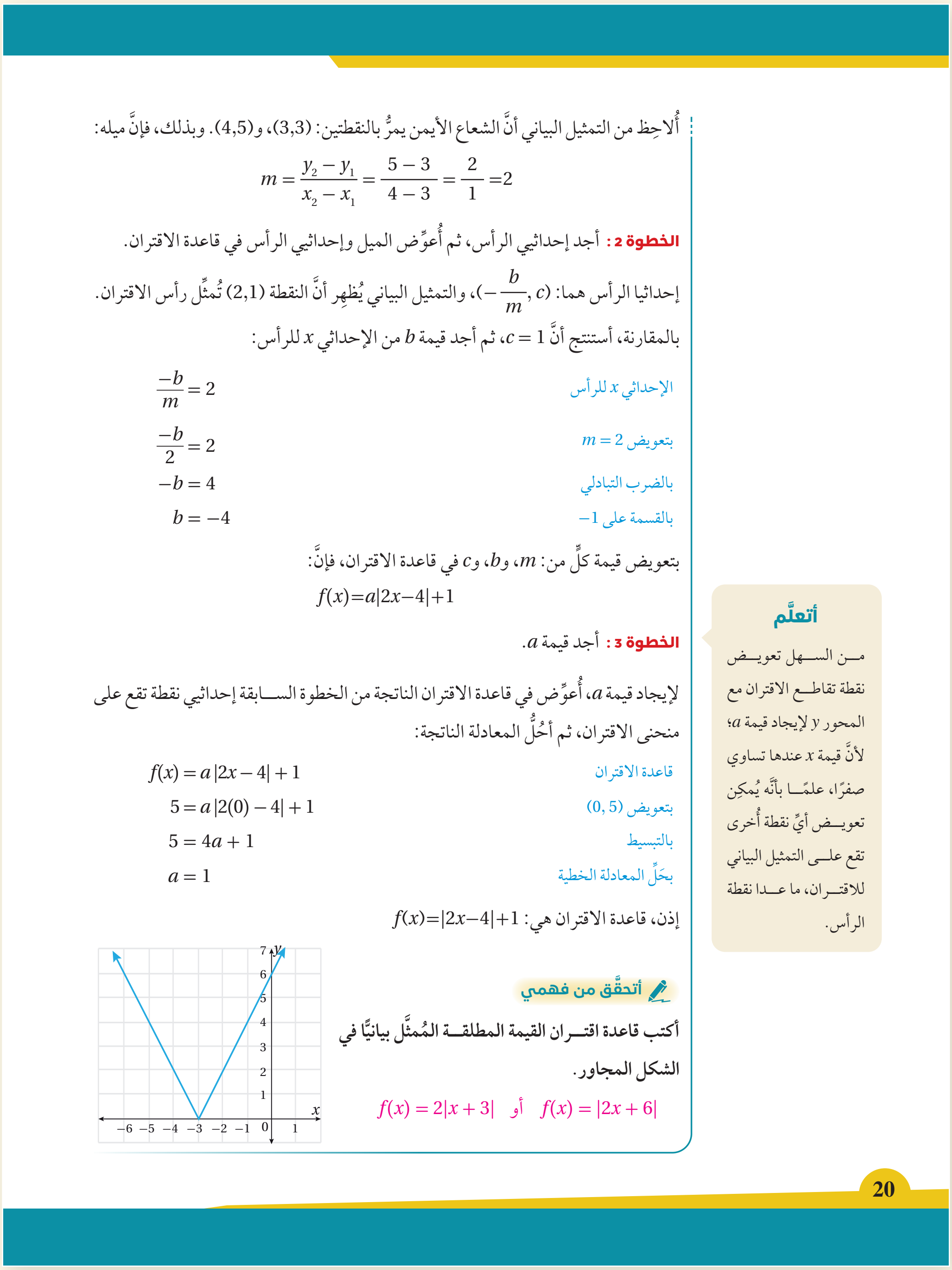
4 التدريب

أتدرَّب وأحل المسائل

- أُوجِّه الطلبة إلى بند (**أتدرَّب وأحل المسائل**)، ثم أطلب إليهم حل المسائل (7 – 1)، والمسألتين (11, 12) ضمن مجموعات ثنائية داخل الغرفة الصفية؛ فهذه المسائل تحديدًا ترتبط ارتباطًا مباشرًا بأمثلة الدرس، وهي تُستعمَل خاصةً لتدريب الطلبة على المفاهيم نفسها، بصرف النظر عمّا إذا كانت الأسئلة فردية أم زوجية.
- إذا واجه الطلبة صعوبة في حل أيّة مسألة، فإنَّني أختار أحد الطلبة مِمَّنْ تمكَّن/ تمكَّنت من حل المسألة؛ لمناقشة استراتيجيته/ استراتيجيتها في حل المسألة على اللوح، مُحفِّزًا الطلبة على طرح أيِّ تساؤل عن خطوات الحل المُقدَّمة من الزميل/ الزميلة.

تنويع التعليم:

إذا واجه الطلبة ذوو المستوى دون المتوسط صعوبة في حل أسئلة بند (**أتدرَّب وأحل المسائل**)، فإنَّني أضع كُلًّا منهم مع طالب آخر/ طالبة أخرى من ذوي المستوى المتوسط أو مع أحد الطلبة المُتميِّزين؛ ليتشاركا في حل الأسئلة.



أُلاحِظ من التمثيل البياني أنَّ الشعاع الأيمن يمرُّ بالنقطتين: (3,3)، و(4,5). وبذلك، فإنَّ ميله:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5-3}{4-3} = \frac{2}{1} = 2$$

الخطوة 2 : أجد إحداثيي الرأس، ثم أُعوِّض الميل وإحداثيي الرأس في قاعدة الاقتران.

إحداثيا الرأس هما: $(-\frac{b}{m}, c)$، والتمثيل البياني يُظهِر أنَّ النقطة (2,1) تُمثِّل رأس الاقتران.

بالمقارنة، أستنتج أنَّ $c = 1$، ثم أجد قيمة b من الإحداثي x للرأس:

$\frac{-b}{m} = 2$ الإحداثي x للرأس

$\frac{-b}{2} = 2$ بتعويض $m = 2$

$-b = 4$ بالضرب التبادلي

$b = -4$ بالقسمة على -1

بتعويض قيمة كلٍّ من: m، وb، وc في قاعدة الاقتران، فإنَّ:

$$f(x)=a|2x-4|+1$$

الخطوة 3 : أجد قيمة a.

لإيجاد قيمة a، أُعوِّض في قاعدة الاقتران الناتجة من الخطوة السابقة إحداثيي نقطة تقع على منحنى الاقتران، ثم أحُلُّ المعادلة الناتجة:

$f(x) = a\,|2x - 4| + 1$ قاعدة الاقتران

$5 = a\,|2(0) - 4| + 1$ بتعويض (0, 5)

$5 = 4a + 1$ بالتبسيط

$a = 1$ بحَلِّ المعادلة الخطية

إذن، قاعدة الاقتران هي: $f(x)=|2x-4|+1$

أتعلَّم

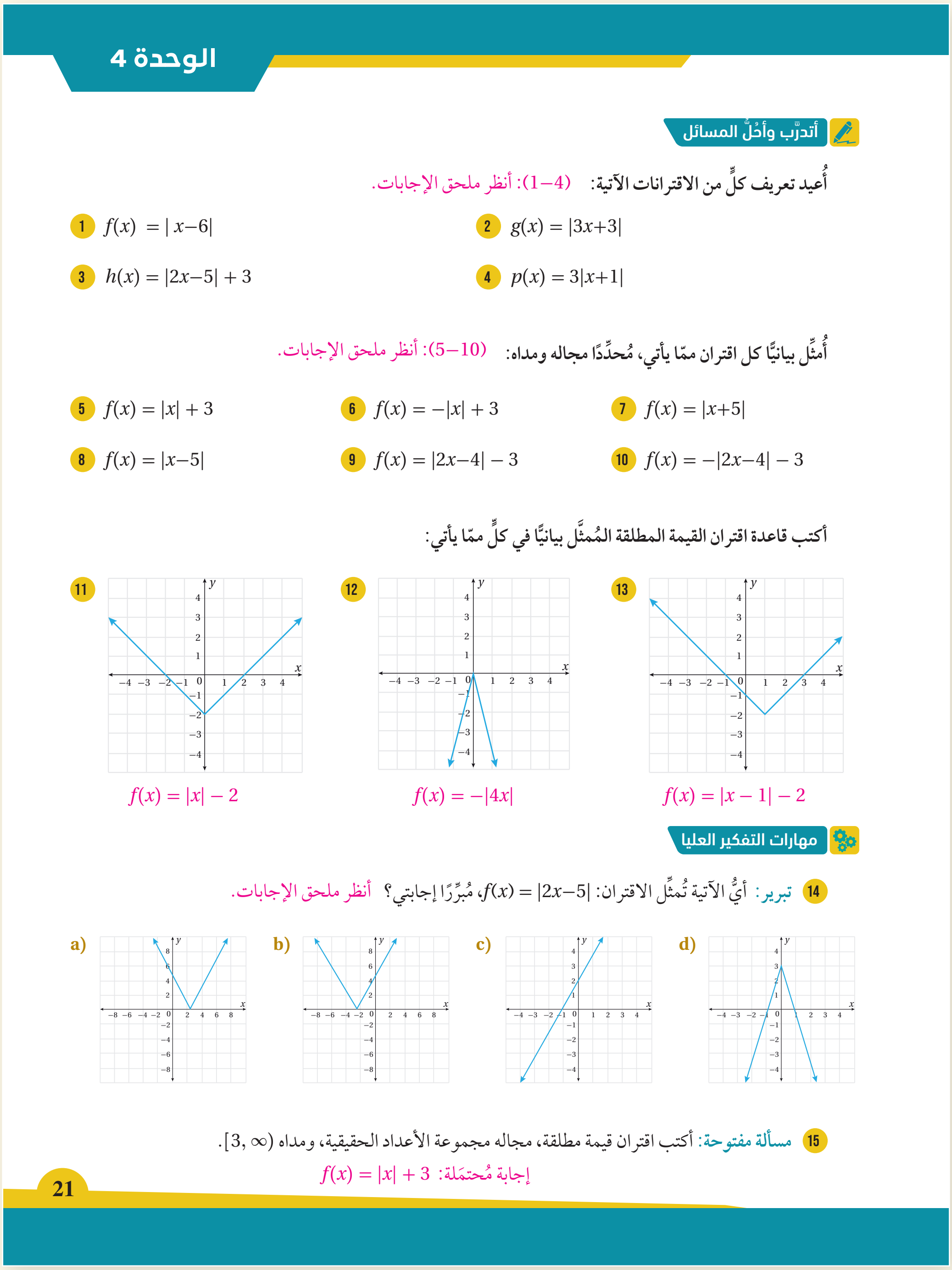
من السهل تعويض نقطة تقاطع الاقتران مع المحور y لإيجاد قيمة a؛ لأنَّ قيمة x عندها تساوي صفرًا، علمًا بأنَّه يُمكِن تعويض أيِّ نقطة أخرى تقع على التمثيل البياني للاقتران، ما عدا نقطة الرأس.

أتحقَّق من فهمي

أكتب قاعدة اقتران القيمة المطلقة المُمثَّل بيانيًا في الشكل المجاور.

$f(x) = |2x + 6|$ أو $f(x) = 2|x + 3|$

20



الوحدة 4

أتدرَّب وأحُلُّ المسائل

أُعيد تعريف كلٍّ من الاقترانات الآتية: (1–4): أنظر ملحق الإجابات.

1 $f(x) = |x-6|$

2 $g(x) = |3x+3|$

3 $h(x) = |2x-5| + 3$

4 $p(x) = 3|x+1|$

أُمثِّل بيانيًّا كل اقتران ممّا يأتي، مُحدِّدًا مجاله ومداه: (5–10): أنظر ملحق الإجابات.

5 $f(x) = |x| + 3$

6 $f(x) = -|x| + 3$

7 $f(x) = |x+5|$

8 $f(x) = |x-5|$

9 $f(x) = |2x-4| - 3$

10 $f(x) = -|2x-4| - 3$

أكتب قاعدة اقتران القيمة المطلقة المُمثَّل بيانيًّا في كلٍّ ممّا يأتي:

11 $f(x) = |x| - 2$

12 $f(x) = -|4x|$

13 $f(x) = |x-1| - 2$

مهارات التفكير العليا

14 تبرير: أيُّ الآتية تُمثِّل الاقتران: $f(x) = |2x-5|$، مُبرِّرًا إجابتي؟ أنظر ملحق الإجابات.

a) b) c) d)

15 مسألة مفتوحة: أكتب اقتران قيمة مطلقة، مجاله مجموعة الأعداد الحقيقية، ومداه $[3, \infty)$.

إجابة مُحتمَلة: $f(x) = |x| + 3$

21

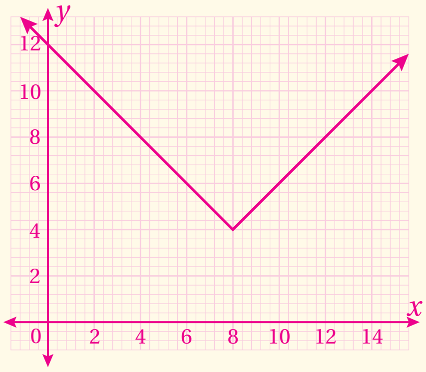
- أتحقَّق من فهم الطلبة موضوع الدرس، بطرح السؤال الآتي عليهم:

◂ أُمثِّل بيانيًّا كل اقتران ممّا يأتي، مُحدِّدًا مجاله ومداه:

1 $f(x) = |8 - x| + 4$

المجال: $(-\infty, \infty)$

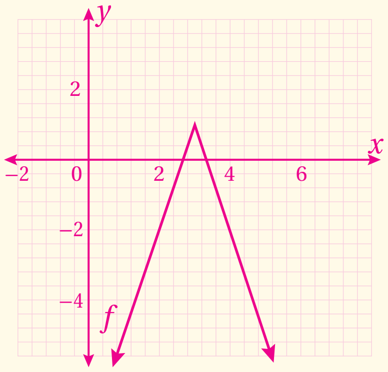
المدى: $[4, \infty)$



2 $f(x) = -|2x - 6| + 1$

المجال: $(-\infty, \infty)$

المدى: $(-\infty, 1]$



مهارات التفكير العليا

- أُوجِّه الطلبة إلى بند (**مهارات التفكير العليا**)، ثم أطلب إليهم حل المسألة 14 والمسألة 15

- أرصد أيَّة أفكار غير تقليدية من الطلبة، ثم أطلب إلى هؤلاء الطلبة كتابة هذه الأفكار على اللوح.

إرشاد: في السؤال 14 (تبرير)، أَلفِت انتباه الطلبة إلى تحديد الخيار الأضعف من بين الخيارات الأربعة، وهو الخيار c؛ لأنَّه لا يُمثِّل اقتران قيمة مطلقة.

الواجب المنزلي:

أستعين بالجدول الآتي لتحديد الواجب المنزلي للطلبة بحسب مستوياتهم:

المستويات	الأسئلة
دون المتوسط	كتاب الطالب: 8, 9 كتاب التمارين: 1, 2, 5, 6, 9
ضمن المتوسط	كتاب الطالب: 10, 13 كتاب التمارين: 3, 4, 7, 8, 10
فوق المتوسط	كتاب الطالب: (13 – 15) كتاب التمارين: (7 – 12)

5 الإثراء

- أطلب إلى الطلبة حل السؤال الآتي بوصفه إثراءً لهم:

◂ إذا كان: $f(x) = \begin{cases} 2x+5 & , x < B \\ 9-Ax & , x \geq B \end{cases}$، فأجد قيمة كلٍّ من الثابت A والثابت B، التي تجعل هذا الاقتران اقتران قيمة مطلقة في صورة: $f(x) = a|mx + b| + c$.

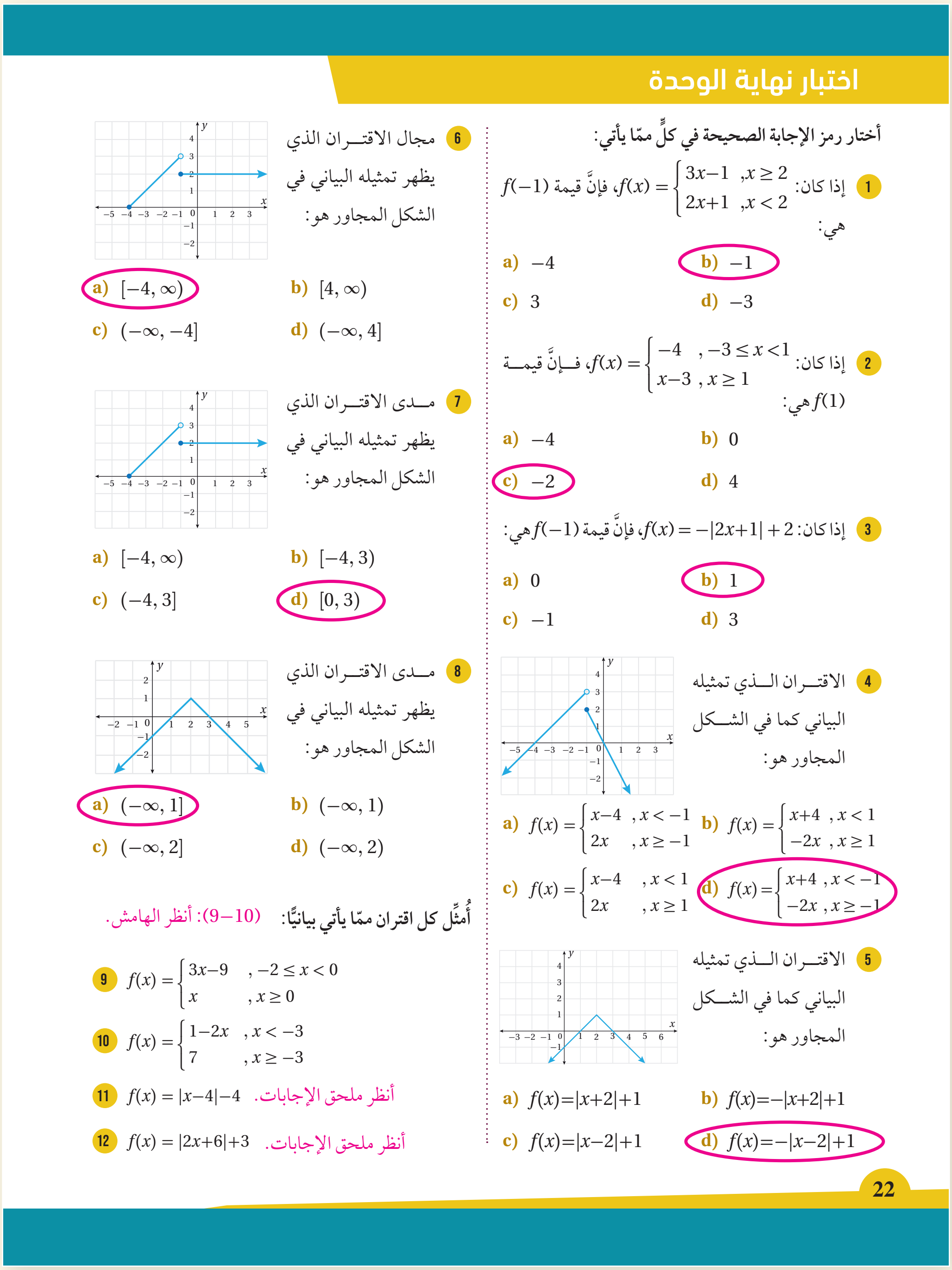
$A = 2, B = 1$

6 الختام

- أمنح الطلبة دقائق معدودة لكتابة فقرة عمّا تعلَّموه في هذا الدرس، ثم أطلب إلى بعضهم قراءة الفقرات التي كتبوها.

اختبار نهاية الوحدة:

- أطلب إلى الطلبة حل الأسئلة (1 – 8) فرديًّا، وأتجوَّل بينهم مُساعِدًا ومُرشِدًا ومُوجِّهًا، وأُقدِّم لهم التغذية الراجعة اللازمة، ثم أُناقِشهم جميعًا في حل بعض المسائل على اللوح.
- أُوزِّع الطلبة إلى مجموعات رباعية، ثم أطلب إلى أفراد المجموعات حل المسائل (9 – 24)، وأتجوَّل بينهم مُساعِدًا ومُرشِدًا ومُوجِّهًا، وأُقدِّم لهم التغذية الراجعة اللازمة، ثم أُحدِّد المسائل التي واجه الطلبة صعوبة في حلها لمناقشتها على اللوح.



اختبار نهاية الوحدة

أختار رمز الإجابة الصحيحة في كلٍّ ممّا يأتي:

① إذا كان: $f(x)=\begin{cases}3x-1 & ,x\ge 2\\ 2x+1 & ,x<2\end{cases}$، فإنَّ قيمة $f(-1)$ هي:

a) -4 [✓ b) -1]

c) 3 d) -3

② إذا كان: $f(x)=\begin{cases}-4 & ,-3\le x<1\\ x-3 & ,x\ge 1\end{cases}$، فإنَّ قيمة $f(1)$ هي:

a) -4 b) 0

[✓ c) -2] d) 4

③ إذا كان: $f(x)=-|2x+1|+2$، فإنَّ قيمة $f(-1)$ هي:

a) 0 [✓ b) 1]

c) -1 d) 3

④ الاقتران الذي تمثيله البياني كما في الشكل المجاور هو:

a) $f(x)=\begin{cases}x-4 & ,x<-1\\ 2x & ,x\ge -1\end{cases}$ b) $f(x)=\begin{cases}x+4 & ,x<1\\ -2x & ,x\ge 1\end{cases}$

c) $f(x)=\begin{cases}x-4 & ,x<1\\ 2x & ,x\ge 1\end{cases}$ [✓ d) $f(x)=\begin{cases}x+4 & ,x<-1\\ -2x & ,x\ge -1\end{cases}$]

⑤ الاقتران الذي تمثيله البياني كما في الشكل المجاور هو:

a) $f(x)=|x+2|+1$ b) $f(x)=-|x+2|+1$

c) $f(x)=|x-2|+1$ [✓ d) $f(x)=-|x-2|+1$]

⑥ مجال الاقتران الذي يظهر تمثيله البياني في الشكل المجاور هو:

[✓ a) $[-4, \infty)$] b) $[4, \infty)$

c) $(-\infty, -4]$ d) $(-\infty, 4]$

⑦ مدى الاقتران الذي يظهر تمثيله البياني في الشكل المجاور هو:

a) $[-4, \infty)$ b) $[-4, 3)$

c) $(-4, 3]$ [✓ d) $[0, 3)$]

⑧ مدى الاقتران الذي يظهر تمثيله البياني في الشكل المجاور هو:

[✓ a) $(-\infty, 1]$] b) $(-\infty, 1)$

c) $(-\infty, 2]$ d) $(-\infty, 2)$

أُمثِّل كل اقتران ممّا يأتي بيانيًّا: (9–10): أنظر الهامش.

⑨ $f(x)=\begin{cases}3x-9 & ,-2\le x<0\\ x & ,x\ge 0\end{cases}$

⑩ $f(x)=\begin{cases}1-2x & ,x<-3\\ 7 & ,x\ge -3\end{cases}$

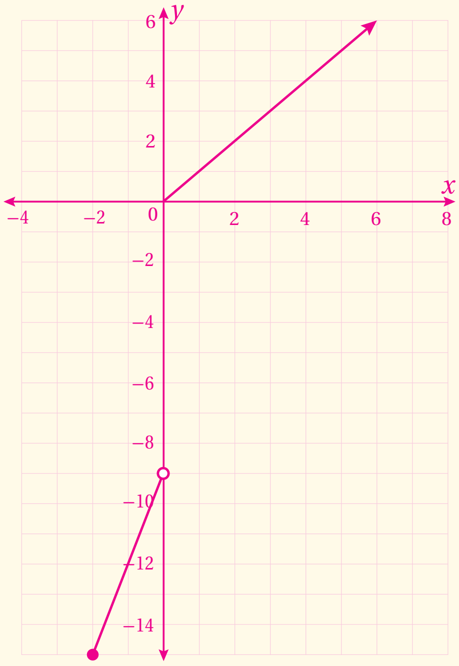
⑪ $f(x)=|x-4|-4$ أنظر ملحق الإجابات.

⑫ $f(x)=|2x+6|+3$ أنظر ملحق الإجابات.

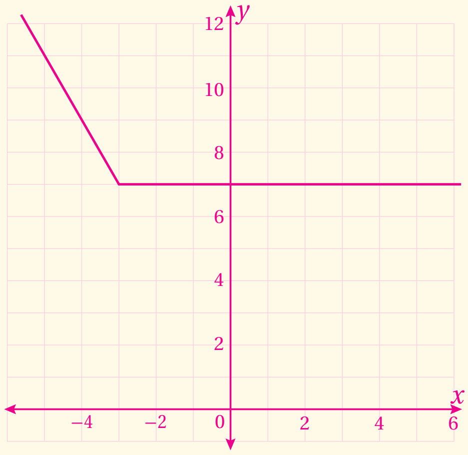
22

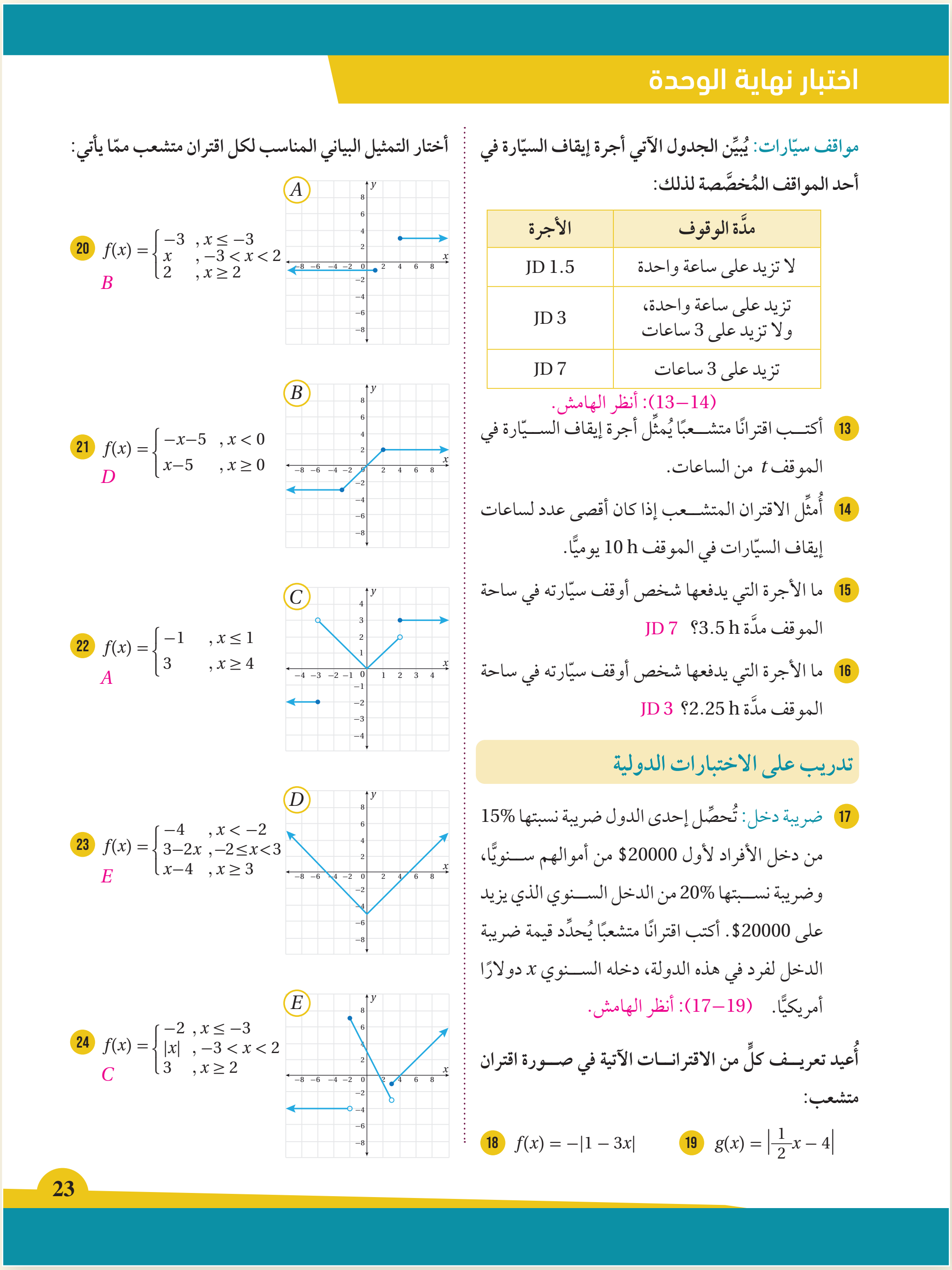
إجابة الأسئلة في بند (اختبار نهاية الوحدة):

9)



10)





اختبار نهاية الوحدة

مواقف سيّارات: يُبيِّن الجدول الآتي أجرة إيقاف السيّارة في أحد المواقف المُخصَّصة لذلك:

مدَّة الوقوف	الأجرة
لا تزيد على ساعة واحدة	JD 1.5
تزيد على ساعة واحدة، ولا تزيد على 3 ساعات	JD 3
تزيد على 3 ساعات	JD 7

(13–14): أنظر الهامش.

13 أكتب اقترانًا متشعبًا يُمثِّل أجرة إيقاف السيّارة في الموقف t من الساعات.

14 أُمثِّل الاقتران المتشعب إذا كان أقصى عدد لساعات إيقاف السيّارات في الموقف 10 h يوميًّا.

15 ما الأجرة التي يدفعها شخص أوقف سيّارته في ساحة الموقف مدَّة 3.5 h؟ JD 7

16 ما الأجرة التي يدفعها شخص أوقف سيّارته في ساحة الموقف مدَّة 2.25 h؟ JD 3

تدريب على الاختبارات الدولية

17 ضريبة دخل: تُحصِّل إحدى الدول ضريبة نسبتها 15% من دخل الأفراد لأول 20000$ من أموالهم سنويًّا، وضريبة نسبتها 20% من الدخل السنوي الذي يزيد على 20000$. أكتب اقترانًا متشعبًا يُحدِّد قيمة ضريبة الدخل لفرد في هذه الدولة، دخله السنوي x دولارًا أمريكيًّا. (17–19): أنظر الهامش.

أُعيد تعريف كلٍّ من الاقترانات الآتية في صورة اقتران متشعب:

18 $f(x) = -|1-3x|$ 19 $g(x) = \left|\frac{1}{2}x - 4\right|$

أختار التمثيل البياني المناسب لكل اقتران متشعب ممّا يأتي:

20 $f(x) = \begin{cases} -3 & , x \le -3 \\ x & , -3 < x < 2 \\ 2 & , x \ge 2 \end{cases}$ B

21 $f(x) = \begin{cases} -x-5 & , x < 0 \\ x-5 & , x \ge 0 \end{cases}$ D

22 $f(x) = \begin{cases} -1 & , x \le 1 \\ 3 & , x \ge 4 \end{cases}$ A

23 $f(x) = \begin{cases} -4 & , x < -2 \\ 3-2x & , -2 \le x < 3 \\ x-4 & , x \ge 3 \end{cases}$ E

24 $f(x) = \begin{cases} -2 & , x \le -3 \\ |x| & , -3 < x < 2 \\ 3 & , x \ge 2 \end{cases}$ C

تدريب على الاختبارات الدولية

- أطلب إلى الطلبة حل الأسئلة الواردة في بند (**تدريب على الاختبارات الدولية**) فرديًّا، ثم أُناقِشهم جميعًا في حلها على اللوح، مُبيِّنًا لهم المقصود بالاختبارات الدولية.

إجابة الأسئلة في بند (اختبار نهاية الوحدة):

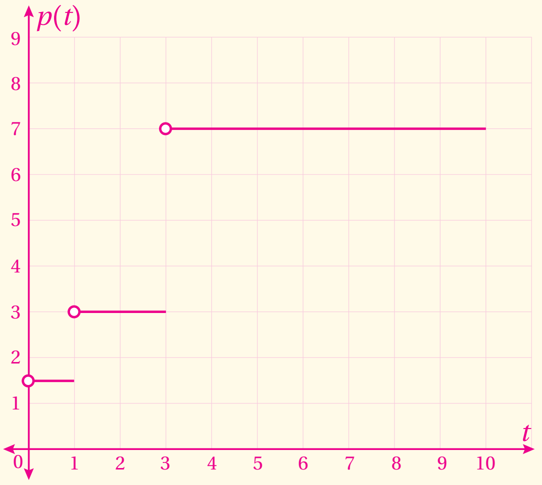
$$17)\ \ T(x) = \begin{cases} 0.15x & , \ 0 \le x \le 20000 \\ 3000 + 0.2(x - 20000) & , \ x > 20000 \end{cases}$$

$$18)\ \ f(x) = \begin{cases} 1-3x & , x \ge \frac{1}{3} \\ 3x - 1 & , x < \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$19)\ \ g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x - 4 & , \ x \ge 8 \\ 4 - \frac{1}{2}x & , \ x < 8 \end{cases}$$

$$13)\ \ p(t) = \begin{cases} 1.5 & , \quad 0 < t \le 1 \\ 3 & , \quad 1 < t \le 3 \\ 7 & , \quad t > 3 \end{cases}$$

14)



كتاب التمارين

الوحدة 4: الاقترانات المتشعبة — أستعد لدراسة الوحدة

أختبر معلوماتي بحلّ التدريبات أوّلًا، وفي حال عدم تأكُّدي من الإجابة أستعين بالمثال المعطى.

إيجاد قيمة الاقتران عند قيمة معطاة (الدرس 1)

إذا كان $g(x) = 10 - x$، فأُجيب عن الأسئلة الآتية تباعًا:

① أجد $g(-5)$ 15

② أجد $g(3) + 6$ 13

③ أجد قيمة x التي تجعل $g(x) = -35$ $x = 45$

إذا كان $f(x) = 5x - 3$، فأجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي:

④ $f(0)$ -3

⑤ $f(5)$ 22

⑥ $25 - f(-2)$ $25-(-13) = 25 + 13 = 38$

⑦ $f(2) + f(-1)$ $7 + (-8) = -1$

مثال: إذا كان $f(x) = 2x + 6$، فأجيب عن الأسئلة الآتية تباعًا:

a) أجد $f(3)$

الاقتران المعطى	$f(x) = 2x + 6$
بتعويض $x = 3$	$f(3) = 2(3) + 6$
بالتبسيط	$= 12$

b) أجد $f(-4) + 10$

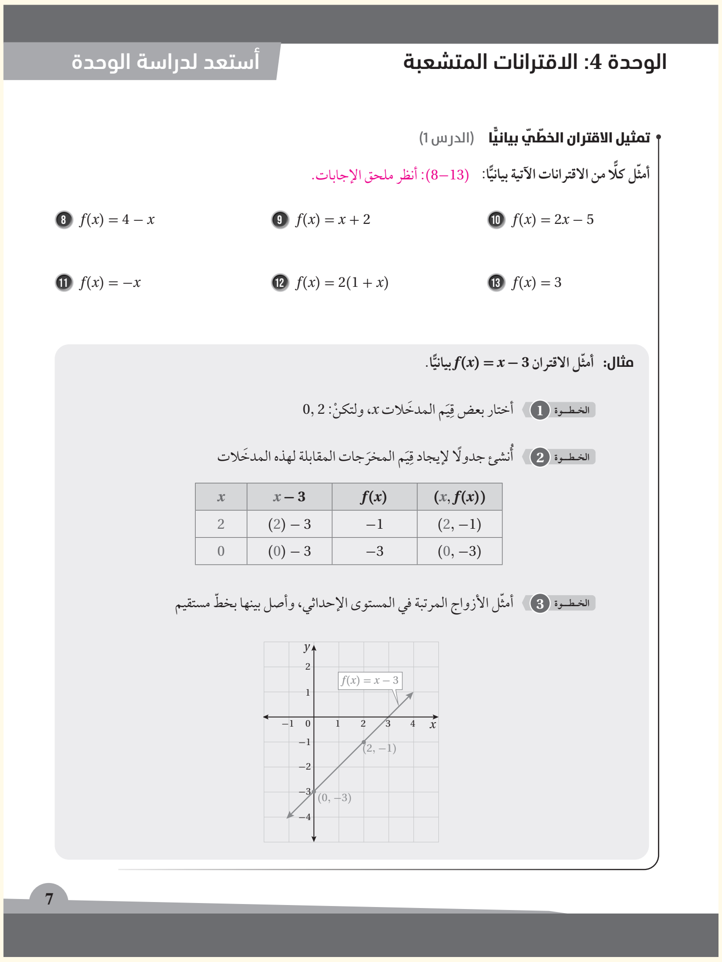
بتعويض $x = -4$	$f(-4) + 10 = (2(-4) + 6) + 10$
بالتبسيط	$= -2 + 10$
بالتبسيط	$= 8$

c) أجد قيمة x التي تجعل $f(x) = -10$

الاقتران المعطى	$f(x) = 2x + 6$
بتعويض $f(x) = -10$	$-10 = 2x + 6$
بطرح 6 من طرفي المعادلة	$-16 = 2x$
بقسمة طرفي المعادلة على 2	$x = -8$

إذن، عندما $x = -8$، فإنَّ $f(x) = -10$

6



الوحدة 4: الاقترانات المتشعبة — أستعد لدراسة الوحدة

تمثيل الاقتران الخطّيّ بيانيًّا (الدرس 1)

أمثّل كلًّا من الاقترانات الآتية بيانيًّا: (8–13): أنظر ملحق الإجابات.

⑧ $f(x) = 4 - x$

⑨ $f(x) = x + 2$

⑩ $f(x) = 2x - 5$

⑪ $f(x) = -x$

⑫ $f(x) = 2(1 + x)$

⑬ $f(x) = 3$

مثال: أمثّل الاقتران $f(x) = x - 3$ بيانيًّا.

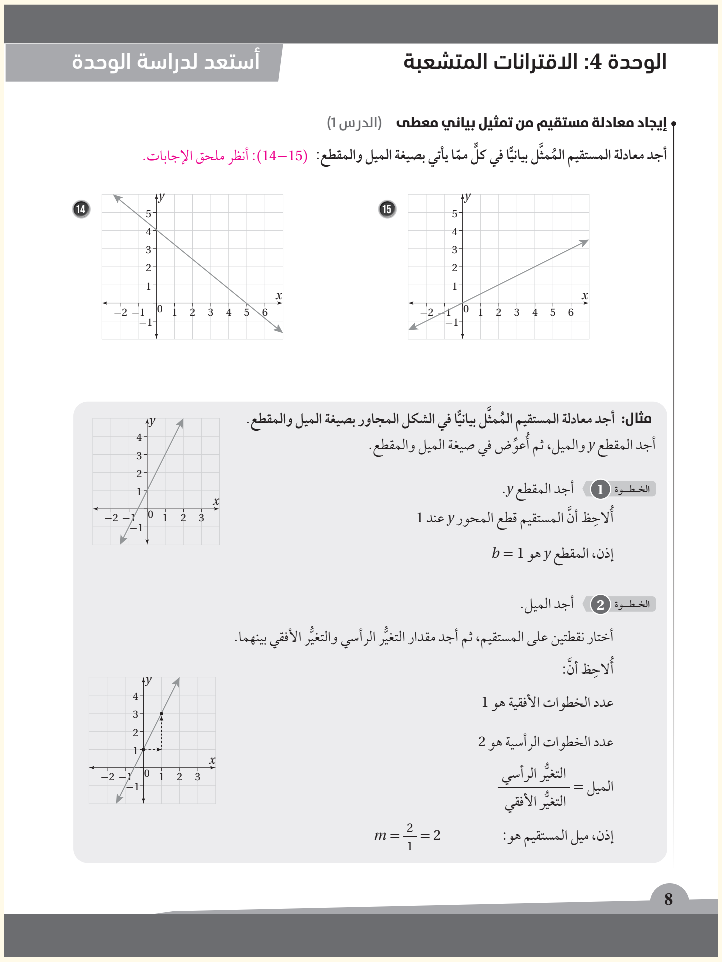
الخطوة 1 أختار بعض قِيَم المدخَلات x، ولتكنْ: 0, 2

الخطوة 2 أُنشئ جدولًا لإيجاد قِيَم المخرَجات المقابلة لهذه المدخَلات

x	$x - 3$	$f(x)$	$(x, f(x))$
2	$(2) - 3$	-1	$(2, -1)$
0	$(0) - 3$	-3	$(0, -3)$

الخطوة 3 أمثّل الأزواج المرتبة في المستوى الإحداثي، وأصل بينها بخطّ مستقيم

7



الوحدة 4: الاقترانات المتشعبة — أستعد لدراسة الوحدة

إيجاد معادلة مستقيم من تمثيل بياني معطى (الدرس 1)

أجد معادلة المستقيم المُمثَّل بيانيًّا في كلٍّ ممّا يأتي بصيغة الميل والمقطع: (14–15): أنظر ملحق الإجابات.

⑭

⑮

مثال: أجد معادلة المستقيم المُمثَّل بيانيًّا في الشكل المجاور بصيغة الميل والمقطع.

أجد المقطع y والميل، ثم أُعوِّض في صيغة الميل والمقطع.

الخطوة 1 أجد المقطع y.

أُلاحِظ أنَّ المستقيم قطع المحور y عند 1

إذن، المقطع y هو $b = 1$

الخطوة 2 أجد الميل.

أختار نقطتين على المستقيم، ثم أجد مقدار التغيُّر الرأسي والتغيُّر الأفقي بينهما.

أُلاحِظ أنَّ:

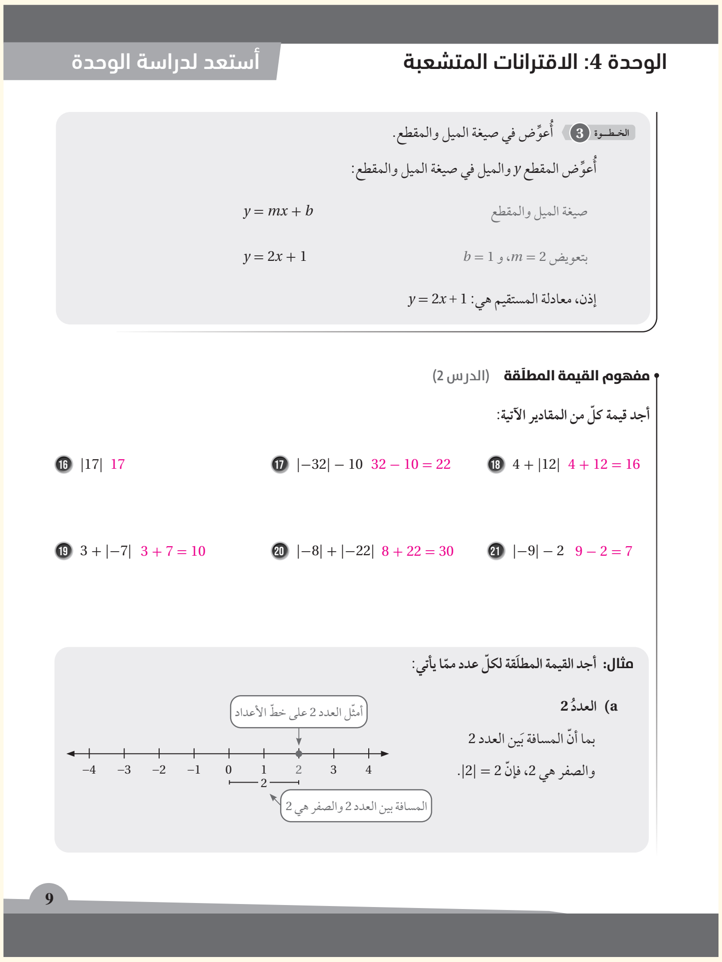
عدد الخطوات الأفقية هو 1

عدد الخطوات الرأسية هو 2

$$\text{الميل} = \frac{\text{التغيُّر الرأسي}}{\text{التغيُّر الأفقي}}$$

إذن، ميل المستقيم هو: $m = \frac{2}{1} = 2$

8



الوحدة 4: الاقترانات المتشعبة — أستعد لدراسة الوحدة

الخطوة 3 أُعوِّض في صيغة الميل والمقطع.

أُعوِّض المقطع y والميل في صيغة الميل والمقطع:

صيغة الميل والمقطع	$y = mx + b$
بتعويض $m = 2$، و $b = 1$	$y = 2x + 1$

إذن، معادلة المستقيم هي: $y = 2x + 1$

مفهوم القيمة المطلَقة (الدرس 2)

أجد قيمة كلّ من المقادير الآتية:

⑯ $|17|$ 17

⑰ $|-32| - 10$ $32 - 10 = 22$

⑱ $4 + |12|$ $4 + 12 = 16$

⑲ $3 + |-7|$ $3 + 7 = 10$

⑳ $|-8| + |-22|$ $8 + 22 = 30$

㉑ $|-9| - 2$ $9 - 2 = 7$

مثال: أجد القيمة المطلَقة لكلّ عدد ممّا يأتي:

a) العددُ 2

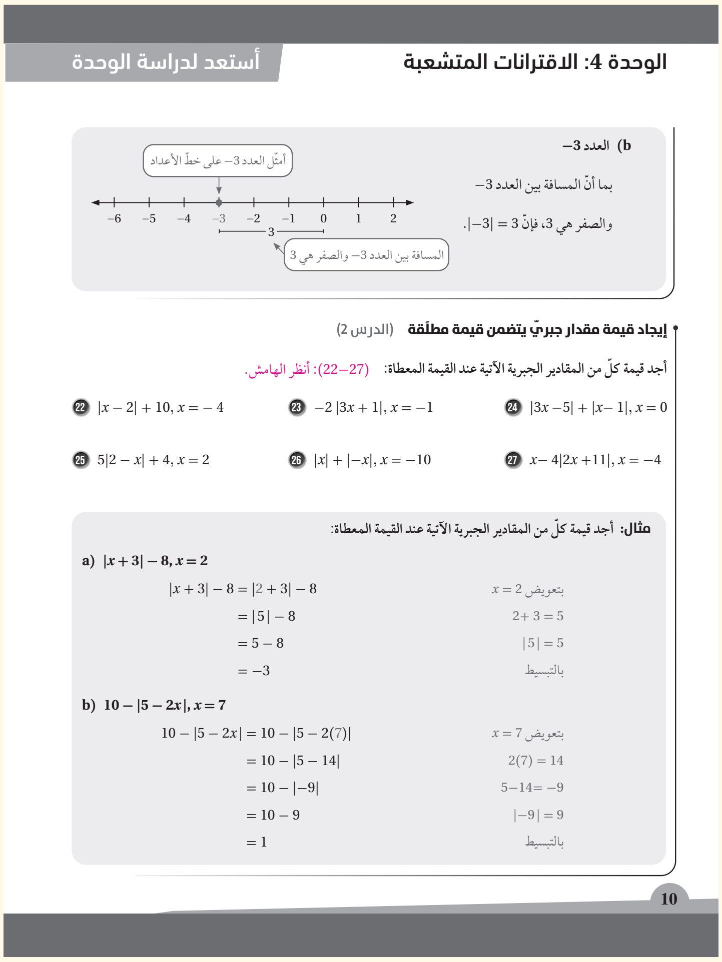
بما أنّ المسافة بَين العدد 2 والصفر هي 2، فإنّ $|2| = 2$.

أمثّل العدد 2 على خطّ الأعداد

المسافة بين العدد 2 والصفر هي 2

9

كتاب التمارين



الوحدة 4: الاقترانات المتشعبة

أستعد لدراسة الوحدة

b) العدد 3−

بما أنّ المسافة بين العدد 3−

والصفر هي 3، فإنّ 3 = |3−|.

أمثّل العدد 3− على خطّ الأعداد

المسافة بين العدد 3− والصفر هي 3

إيجاد قيمة مقدار جبريّ يتضمن قيمة مطلَقة (الدرس 2)

أجد قيمة كلّ من المقادير الجبرية الآتية عند القيمة المعطاة: (22−27): أنظر الهامش.

㉔ $|3x-5|+|x-1|, x=0$

㉓ $-2\,|3x+1|, x=-1$

㉒ $|x-2|+10, x=-4$

㉗ $x-4|2x+11|, x=-4$

㉖ $|x|+|-x|, x=-10$

㉕ $5|2-x|+4, x=2$

مثال: أجد قيمة كلّ من المقادير الجبرية الآتية عند القيمة المعطاة:

a) $|x+3|-8, x=2$

بتعويض $x=2$	$|x+3|-8=|2+3|-8$
$2+3=5$	$=|5|-8$
$|5|=5$	$=5-8$
بالتبسيط	$=-3$

b) $10-|5-2x|, x=7$

بتعويض $x=7$	$10-|5-2x|=10-|5-2(7)|$
$2(7)=14$	$=10-|5-14|$
$5-14=-9$	$=10-|-9|$
$|-9|=9$	$=10-9$
بالتبسيط	$=1$

10

إجابة الأسئلة في بند (أستعد لدراسة الوحدة):

22) $|-4-2|+10=|-6|+10=16$

23) $-2|-3+1|=-2|-2|$

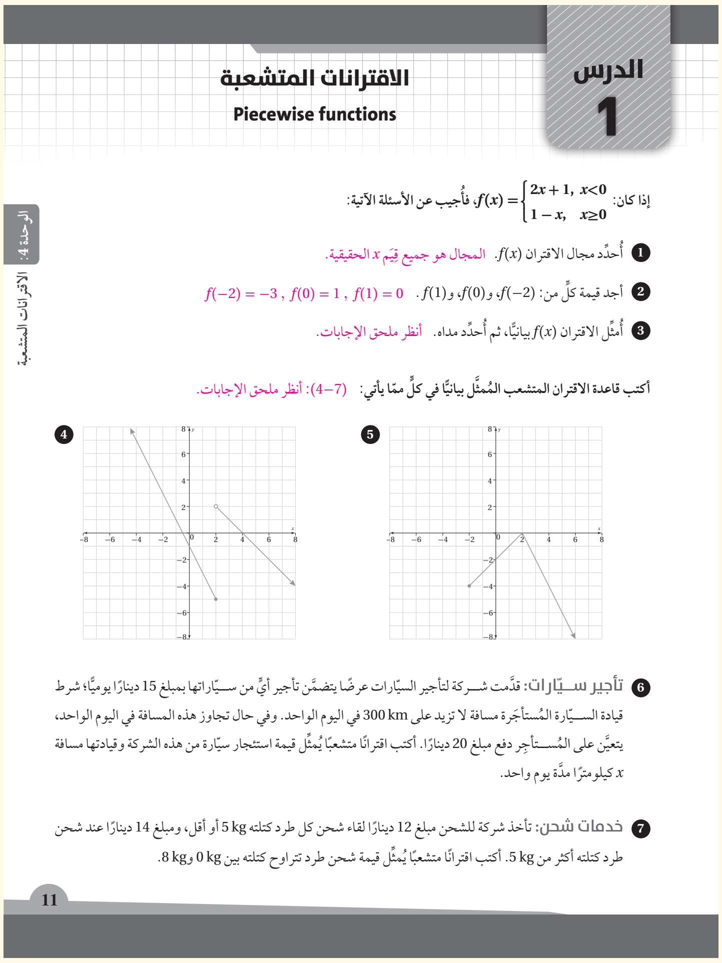
$=-2\times 2=-4$

24) $|-5|+|-1|=5+1=6$

25) $5|2-2|+4=5\times 0+4=4$

26) $|-10|+|-(-10)|=10+10=20$

27) $-4-4|-8+11|=-4-4|3|=-4-12=-16$



الدرس 1

الاقترانات المتشعبة

Piecewise functions

الوحدة 4: الاقترانات المتشعبة

إذا كان: $f(x)=\begin{cases}2x+1, & x<0\\ 1-x, & x\geq 0\end{cases}$، فأُجيب عن الأسئلة الآتية:

❶ أُحدِّد مجال الاقتران $f(x)$. المجال هو جميع قِيَم x الحقيقية.

❷ أجد قيمة كلٍّ من: $f(-2)$، و$f(0)$، و$f(1)$. $f(-2)=-3\ ,\ f(0)=1\ ,\ f(1)=0$

❸ أُمثِّل الاقتران $f(x)$ بيانيًّا، ثم أُحدِّد مداه. أنظر ملحق الإجابات.

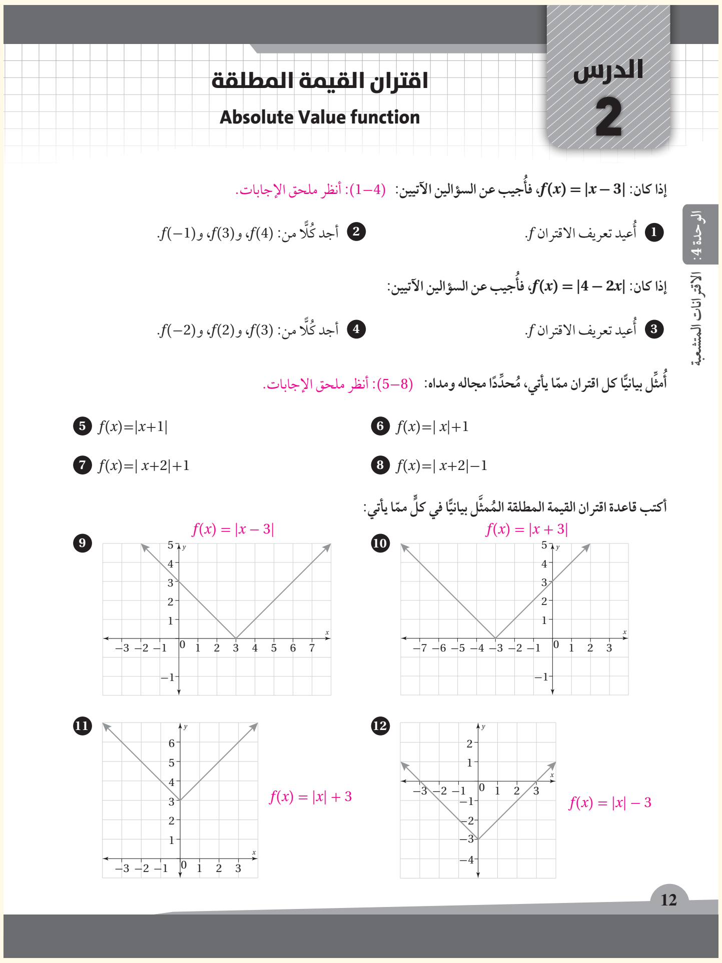
أكتب قاعدة الاقتران المتشعب المُمثَّل بيانيًّا في كلٍّ ممّا يأتي: (4−7): أنظر ملحق الإجابات.

❹ ❺

❻ **تأجير سـيّارات:** قدَّمت شركة لتأجير السيّارات عرضًا يتضمَّن تأجير أيٍّ من سيّاراتها بمبلغ 15 دينارًا يوميًّا؛ شرط قيادة السيّارة المُستأجَرة مسافة لا تزيد على 300 km في اليوم الواحد. وفي حال تجاوز هذه المسافة في اليوم الواحد، يتعيَّن على المُستأجِر دفع مبلغ 20 دينارًا. أكتب اقترانًا متشعبًا يُمثِّل قيمة استئجار سيّارة من هذه الشركة وقيادتها مسافة x كيلومترًا مدَّة يوم واحد.

❼ **خدمات شحن:** تأخذ شركة للشحن مبلغ 12 دينارًا لقاء شحن كل طرد كتلته 5 kg أو أقل، ومبلغ 14 دينارًا عند شحن طرد كتلته أكثر من 5 kg. أكتب اقترانًا متشعبًا يُمثِّل قيمة شحن طرد تتراوح كتلته بين 0 kg و8 kg.

11



الدرس 2

اقتران القيمة المطلقة

Absolute Value function

الوحدة 4: الاقترانات المتشعبة

إذا كان: $f(x)=|x-3|$، فأُجيب عن السؤالين الآتيين: (1−4): أنظر ملحق الإجابات.

❶ أُعيد تعريف الاقتران f.

❷ أجد كُلًّا من: $f(4)$، و$f(3)$، و$f(-1)$.

إذا كان: $f(x)=|4-2x|$، فأُجيب عن السؤالين الآتيين:

❸ أُعيد تعريف الاقتران f.

❹ أجد كُلًّا من: $f(3)$، و$f(2)$، و$f(-2)$.

أُمثِّل بيانيًّا كل اقتران ممّا يأتي، مُحدِّدًا مجاله ومداه: (5−8): أنظر ملحق الإجابات.

❻ $f(x)=|x|+1$

❺ $f(x)=|x+1|$

❽ $f(x)=|x+2|-1$

❼ $f(x)=|x+2|+1$

أكتب قاعدة اقتران القيمة المطلقة المُمثَّل بيانيًّا في كلٍّ ممّا يأتي:

❿ $f(x)=|x+3|$

❾ $f(x)=|x-3|$

⓫ $f(x)=|x|+3$

⓬ $f(x)=|x|-3$

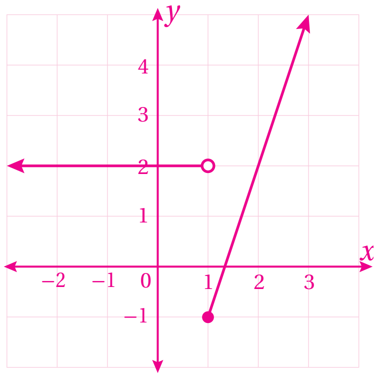
12

الدرس 1 – إجابة الأسئلة في بند (أتدرَّب وأحل المسائل):

1) مجال الاقتران f هو جميع قِيَم x الحقيقية.

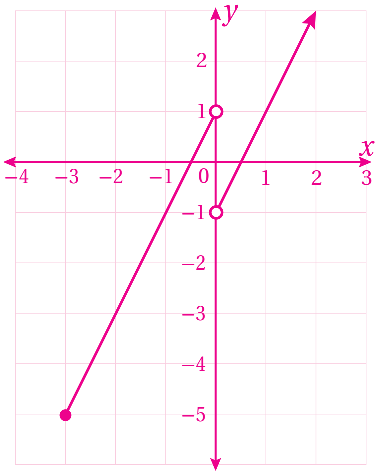
مجال الاقتران g هو : $[-3, 0) \cup (0, \infty)$

3)



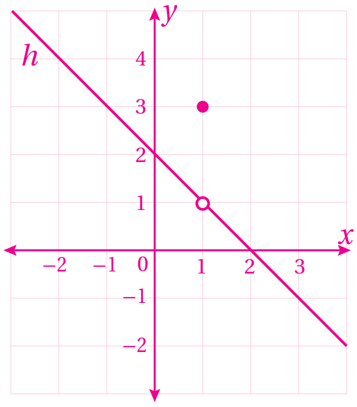
المدى هو جميع قِيَم y التي تنتمي إلى الفترة $[-1, \infty)$.

4)



المدى هو جميع قِيَم y التي تنتمي إلى الفترة $[-5, \infty)$

14)



مجال الاقتران h هو جميع قِيَم x الحقيقية،

ومداه هو جميع قِيَم y الحقيقية ما عدا العدد 1

الدرس 2 – إجابة الأسئلة في بند (أتدرَّب وأحل المسائل):

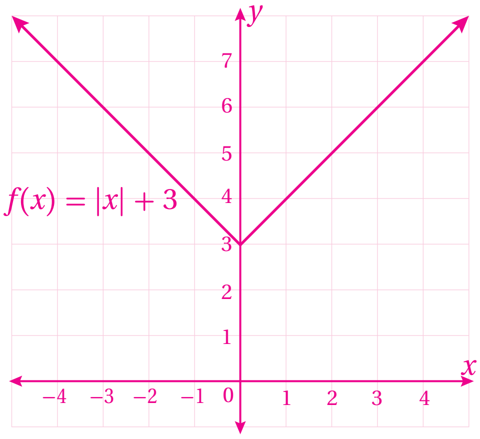
1) $f(x) = \begin{cases} x-6 & , x \geq 6 \\ 6-x & , x < 6 \end{cases}$

2) $g(x) = \begin{cases} 3x+3 & , x \geq -1 \\ -3x-3 & , x < -1 \end{cases}$

3) $h(x) = \begin{cases} 2x-2 & , x \geq 2.5 \\ -2x+8 & , x < 2.5 \end{cases}$

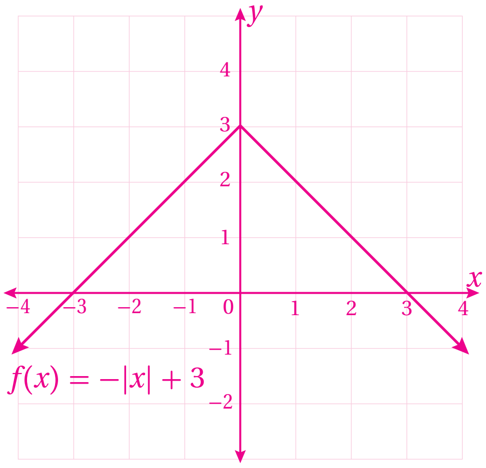
4) $p(x) = \begin{cases} 3(x+1) & , x \geq -1 \\ -3(x+1) & , x < -1 \end{cases}$

5)



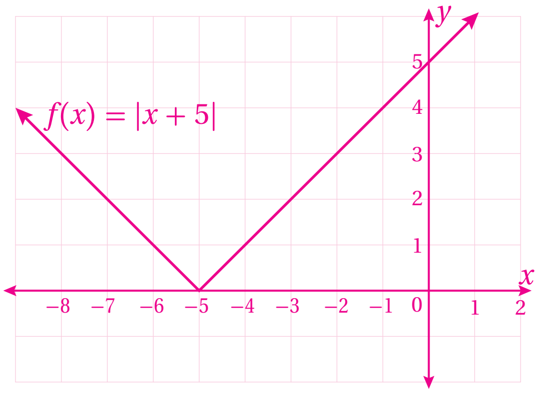
المجال: جميع قِيَم x الحقيقية. المدى: $[3, \infty)$.

6)



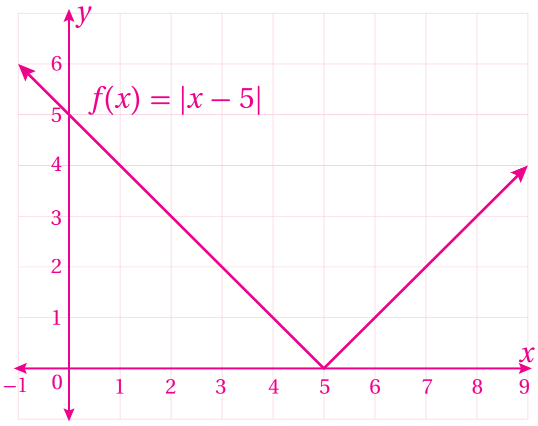
المجال: جميع قِيَم x الحقيقية. المدى: $(-\infty, 3]$.

7)



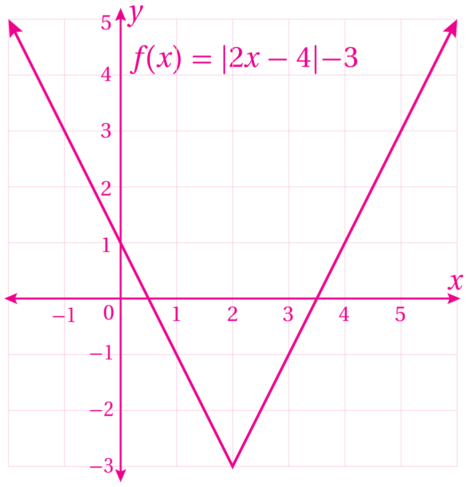
المجال: جميع قِيَم x الحقيقية. المدى: $[0, \infty)$.

8)



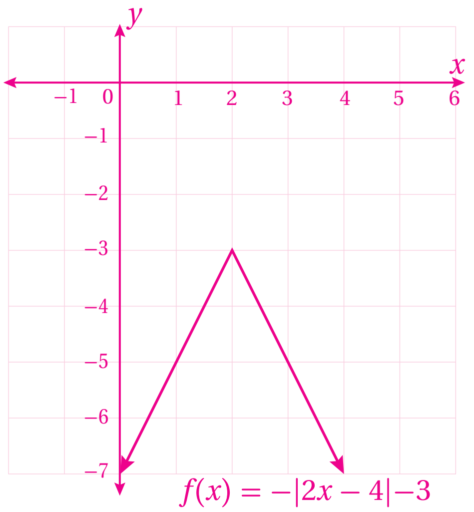
المجال: جميع قِيَم x الحقيقية.   المدى: $[0, \infty)$.

9)



المجال: جميع قِيَم x الحقيقية.   المدى: $[-3, \infty)$.

10)



المجال: جميع قِيَم x الحقيقية.   المدى: $(-\infty, -3]$.

14) $a = 1, m = 2, b = -5, c = 0$

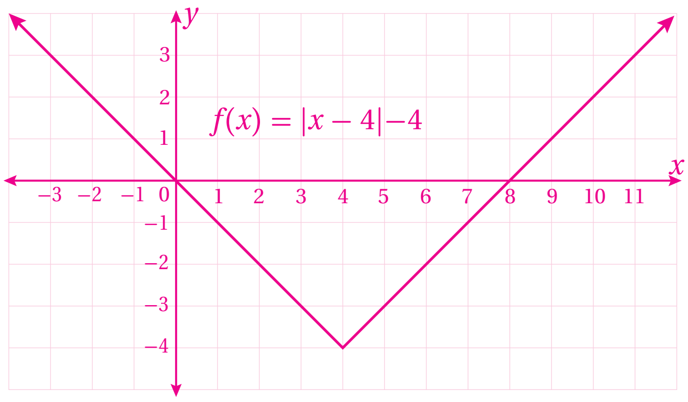
بما أنَّ $a > 0$، فإنَّ منحنى f مفتوح إلى أعلى، ورأسه النقطة

$$\left(\frac{-b}{m}, c\right) = \left(\frac{5}{2}, 0\right) = (2.5, 0).$$

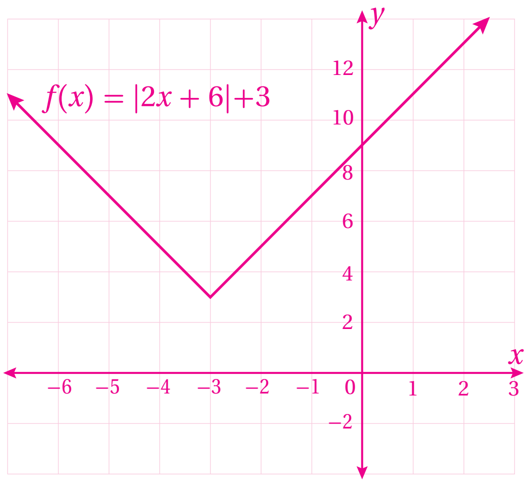
إذن، الجواب هو البديل a.

إجابة الأسئلة في بند (اختبار نهاية الوحدة):

11)



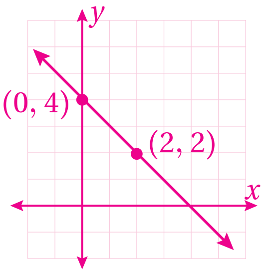
12)



كتاب التمارين – إجابة الأسئلة في بند (أستعد لدراسة الوحدة):

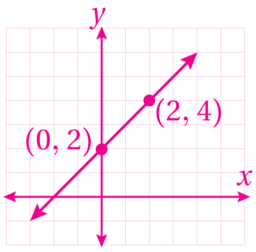
8)

x	0	2
$y = f(x) = 4 - x$	4	2
(x, y)	$(0, 4)$	$(2, 2)$



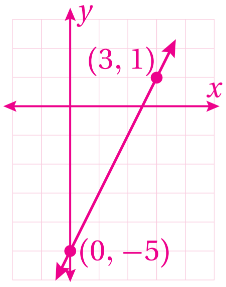
9)

x	0	2
$y = f(x) = x + 2$	2	4
(x, y)	$(0, 2)$	$(2, 4)$



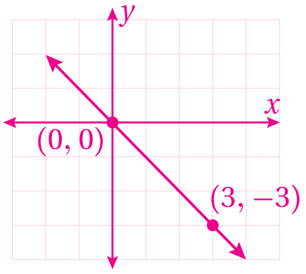
10)

x	0	3
$y = f(x) = 2x - 5$	-5	1
(x, y)	$(0, -5)$	$(3, 1)$



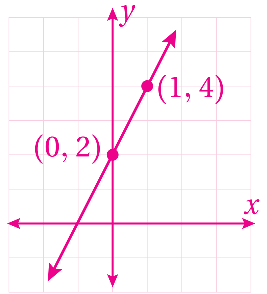
11)

x	0	3
$y = f(x) = -x$	0	-3
(x, y)	$(0, 0)$	$(3, -3)$



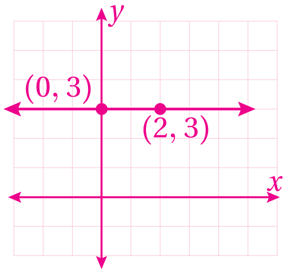
12)

x	0	1
$y = f(x) = 2(1 + x)$	2	4
(x, y)	$(0, 2)$	$(1, 4)$



13)

x	0	2
$y = f(x) = 3$	3	3
(x, y)	$(0, 3)$	$(2, 3)$



14) $b = 4$

هذا المستقيم يمرُّ بالنقطتين: $(0, 4), (5, 0)$.

إذن، ميله m هو:

$$m = \frac{4-0}{0-5} = -\frac{4}{5}$$

ومن ثَمَّ، فإنَّ معادلته بصيغة الميل والمقطع هي:

$$y = -\frac{4}{5}x + 4$$

15) $b = 0$

هذا المستقيم يمرُّ بالنقطتين: $(0, 0), (4, 2)$.

إذن، ميله m هو:

$$m = \frac{2-0}{4-0} = \frac{1}{2}$$

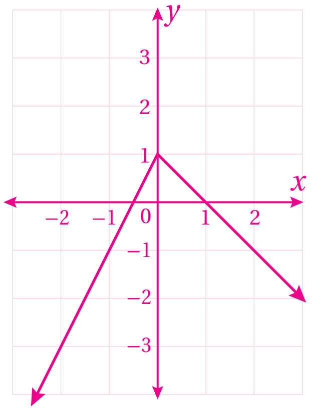
ومن ثَمَّ، فإنَّ معادلته بصيغة الميل والمقطع هي:

$$y = \frac{1}{2}x + 0$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{2}x$$

كتاب التمارين – إجابة أسئلة الدرس (1):

3)



المجال هو جميع قِيَم x الحقيقية،

والمدى هو جميع قِيَم y الحقيقية التي تنتمي إلى الفترة $(-\infty, 1]$.

4) $$f(x) = \begin{cases} -2x - 1 & , x \leq 2 \\ -x + 4 & , x > 2 \end{cases}$$

5) $$f(x) = \begin{cases} x - 2 & , -2 \leq x < 2 \\ -2x + 4 & , x \geq 2 \end{cases}$$

6) $$f(x)=\begin{cases}15 & ,\ 0\le x\le 300\\ 20 & ,\ x>300\end{cases}$$

7) إذا كان x هو كتلة الطرد، فإنَّ:

$$f(x)=\begin{cases}12 & ,\ 0<x\le 5\\ 14 & ,\ 5<x\le 8\end{cases}$$

كتاب التمارين – إجابة أسئلة الدرس (2):

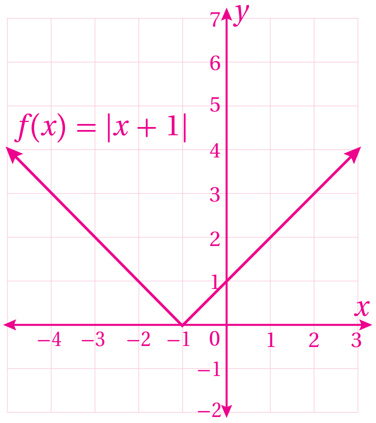
1) $$f(x)=\begin{cases}3-x & ,\ x<3\\ x-3 & ,\ x\ge 3\end{cases}$$

2) $f(4)=1\ ,\ f(3)=0\ ,\ f(-1)=4$

3) $$f(x)=\begin{cases}4-2x & ,\ x<2\\ 2x-4 & ,\ x\ge 2\end{cases}$$

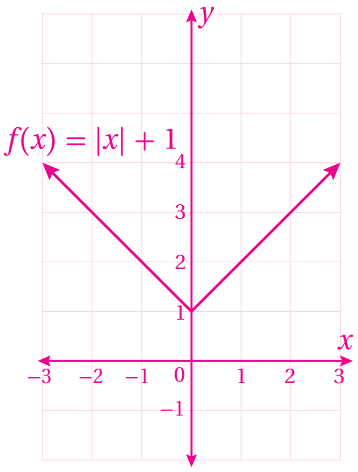
4) $f(3)=2\ ,\ f(2)=0\ ,\ f(-2)=8$

5)



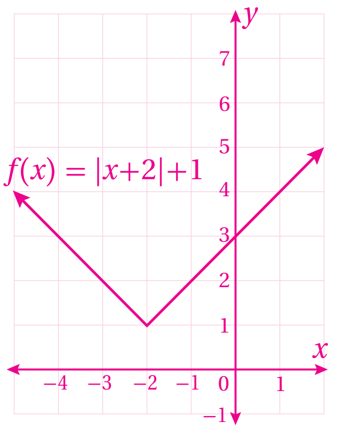
المجال هو جميع قِيَم x الحقيقية، والمدى هو جميع قِيَم y الحقيقية التي تنتمي إلى الفترة $[0, \infty)$.

6)



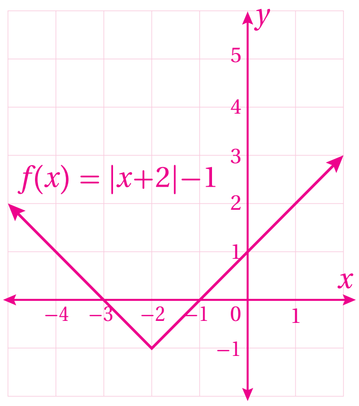
المجال هو جميع قِيَم x الحقيقية، والمدى هو جميع قِيَم y الحقيقية التي تنتمي إلى الفترة $[1, \infty)$.

7)



المجال هو جميع قِيَم x الحقيقية، والمدى هو جميع قِيَم y الحقيقية التي تنتمي إلى الفترة $[1, \infty)$.

8)



المجال هو جميع قِيَم x الحقيقية، والمدى هو جميع قِيَم y الحقيقية التي تنتمي إلى الفترة $[-1, \infty)$.

الوحدة
5

النهايات والمشتقات
Limits and Derivatives

www.nccd.gov.jo

مُخطَّط الوحدة

اسم الدرس	النتاجات	المصطلحات	الأدوات اللازمة	عدد الحصص
الدرس 1: **النهايات والاتصال.**	• إيجاد نهاية اقتران عند قيمة مُحدَّدة عدديًّا وجبريًّا. • البحث في اتصال اقتران عند نقطة ما.	النهاية. الصيغة غير المُحدَّدة. الاقتران المتصل.	• ورقة المصادر 1 • مشابك ورقية. • أقلام ملونة.	6
الدرس 2: **المشتقة.**	• إيجاد مشتقة اقترانات القوَّة باستعمال التعريف. • إيجاد مشتقة اقترانات القوَّة باستعمال القواعد. • إيجاد سرعة جسم يتحرَّك في مسار مستقيم.	التعريف العام للمشتقة. اقتران القوَّة.		4
الدرس 3: **التزايد والتناقص لكثيرات الحدود.**	• تحديد النقاط الحرجة لكثيرات الحدود. • إيجاد القِيَم العظمى والقِيَم الصغرى المحلية لكثيرات الحدود باستعمال المشتقة. • تحديد فترات التزايد والتناقص لكثيرات الحدود حتى الدرجة الثالثة.	النقطة الحرجة. القيمة الحرجة. التزايد. التناقص. القيمة العظمى المحلية. القيمة الصغرى المحلية.	• ورقة المصادر 2	4
اختبار نهاية الوحدة.				1
مجموع الحصص:				15 حصة

الوحدة
5

نظرة عامة على الوحدة:

سيبني الطلبة في هذه الوحدة على ما تعلّموه سابقًا عن خصائص اقترانات كثيرات الحدود، والاقترانات النسبية، والاقترانات المُتشعِّبة، والتمثيل البياني لكلٍّ منها؛ لتعلُّم إيجاد نهاية كلٍّ من هذه الاقترانات عند قيمة مُحدَّدة عدديًّا وبيانيًّا وجبريًّا، إضافةً إلى البحث في اتصال هذه الاقترانات عند نقطة ما.

سيبني الطلبة أيضًا على ما تعلّموه في الصف العاشر عن المشتقة الأولى لكثيرات الحدود؛ لتعلُّم إيجاد المشتقة باستعمال التعريف العام للمشتقة، وإيجاد مشتقة اقترانات القوّة باستعمال القواعد.

إضافةً إلى ما سبق، سيتعرَّف الطلبة كيفية تحديد النقاط الحرجة وفترات التزايد والتناقص لكثيرات الحدود حتى الدرجة الثالثة.

الوحدة
5

النهايات والمشتقات
Limits and Derivatives

ما أهمية هذه الوحدة؟

يُعَدُّ حساب النهايات وبحث الاتصال وإيجاد المشتقات أدوات أساسية لدراسة سلوك الاقترانات وتحليلها؛ ما يساعد على فهم المواقف العلمية والحياتية التي يُمكِن نمذجتها باستعمال الاقترانات، مثل: السرعة، والتسارع. سأتعلَّم في هذه الوحدة بعض مفاهيم النهايات والاتصال والاشتقاق، وأستعملها في سياقات حياتية.

24

الوحدة
5

تعلَّمْتُ سابقًا:

- ✓ تمثيل الاقترانات الخطية والتربيعية والمتشعبة بيانيًّا، وتحديد المجال والمدى لها.
- ✓ تقدير ميل المنحنى عن طريق رسم المماس.
- ✓ إيجاد القِيَم العظمى والقِيَم الصغرى.
- ✓ إيجاد المشتقة الأولى لكثيرات الحدود.

سأتعلَّم في هذه الوحدة:

- ◂ إيجاد نهاية اقتران عند قيمة مُحدَّدة عدديًّا وبيانيًّا وجبريًّا، وبحث اتصال اقتران عند نقطة ما.
- ◂ إيجاد مشتقة اقترانات القوَّة باستعمال كلٍّ من التعريف، والقواعد.
- ◂ تحديد كلٍّ من النقاط الحرجة وتصنيفها، وفترات التزايد والتناقص لكثيرات الحدود.

أستعمل تدريبات (أستعد لدراسة الوحدة) في الصفحات (13 – 21) من كتاب التمارين؛ لمراجعة هذه الموضوعات قبل البدء بدراسة الوحدة.

25

الترابط الرأسي بين الصفوف:

الصف العاشر:

- تعرُّف اقترانات كثيرات الحدود، وتمثيلها بيانيًّا.
- تعرُّف الاقترانات النسبية، وإيجاد مجالها ومداها، وتمثيلها بيانيًّا.
- تقدير ميل المنحنى عن طريق رسم المماس.
- إيجاد المشتقة الأولى لكثيرات الحدود.
- إيجاد القِيَم العظمى والقِيَم الصغرى لكثيرات الحدود.
- حل مسائل حياتية عن القِيَم العظمى والقِيَم الصغرى.

الصف الحادي عشر (الأدبي):

- إيجاد نهاية اقتران عند قيمة مُحدَّدة عدديًّا وجبريًّا.
- البحث في اتصال اقتران عند نقطة ما.
- إيجاد مشتقة اقترانات القوَّة باستعمال التعريف.
- إيجاد مشتقة اقترانات القوَّة باستعمال القواعد.
- إيجاد سرعة جسم يتحرَّك في مسار مستقيم.
- تحديد النقاط الحرجة لكثيرات الحدود.
- إيجاد القِيَم العظمى والقِيَم الصغرى المحلية لكثيرات الحدود باستعمال المشتقة.
- تحديد فترات التزايد والتناقص لكثيرات الحدود حتى الدرجة الثالثة.

الصف الثاني عشر (الأدبي):

- إيجاد مشتقة ضرب اقترانين، ومشتقة قسمة اقترانين.
- إيجاد مشتقات اقترانات مختلفة باستعمال قاعدة السلسلة.
- حل مسائل حياتية تتضمَّن إيجاد مُعدَّل التغيُّر بالنسبة إلى الزمن باستعمال المشتقة.
- إيجاد معادلة المماس ومعادلة العمودي على المماس لمنحنى الاقتران عند نقطة ما باستعمال المشتقة.
- إيجاد السرعة والتسارع لجسم يتحرَّك على خط مستقيم باستعمال المشتقة.
- إيجاد مشتقات العلاقات الضمنية.
- حل مسائل حياتية تتضمَّن إيجاد القِيَم القصوى.

الدرس
1

نتاجات الدرس:

- إيجاد نهاية اقتران عند قيمة مُحدَّدة عدديًّا وجبريًّا.
- البحث في اتصال اقتران عند نقطة ما.

نتاجات التعلُّم القبلي:

- تمثيل الاقترانات المُتشعِّبة بيانيًّا، وتحديد مجالها ومداها.
- تحليل المقادير الجبرية.
- تبسيط المقادير الجبرية.

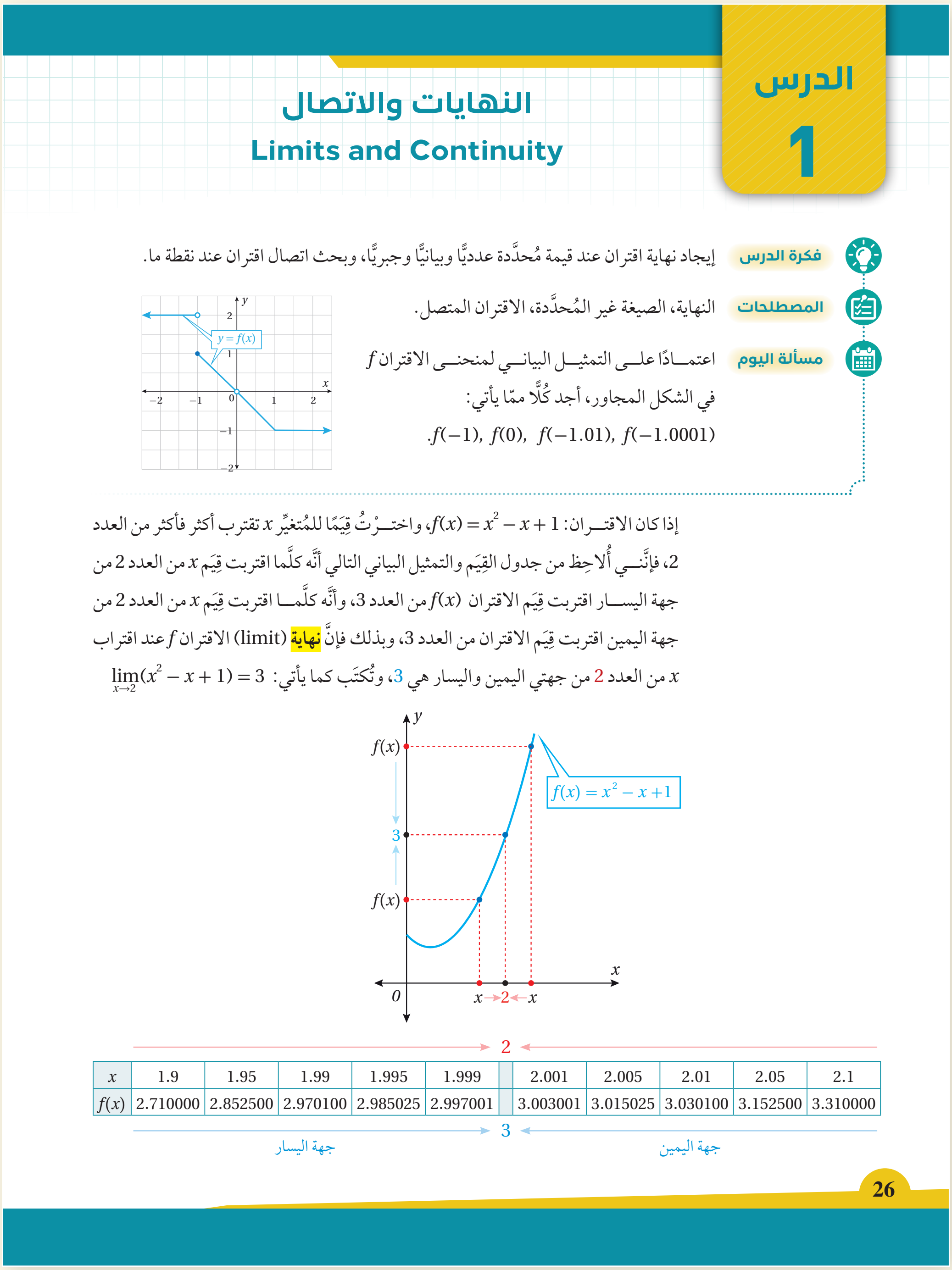
مراجعة التعلُّم القبلي:

- أُوجِّه الطلبة في بداية كل حصة إلى الفقرة (الفقرات) المُرتبِطة بما سيُقدَّم من موضوعات الدرس في الحصة (إنْ وُجِدت) ضمن صفحات **(أستعد لدراسة الوحدة)** في كتاب التمارين، ثم أطلب إليهم حل تدريباتها داخل الغرفة الصفية بصورة فردية.
- أتجوَّل بين الطلبة؛ لمتابعتهم أثناء الحل، وتحديد نقاط ضعفهم، وأُوجِّههم إلى مراجعة المثال عندما يواجهون صعوبة في الحل.

1 التهيئة

- أُوزِّع الطلبة إلى مجموعات ثنائية، ثم أُزوِّد كل مجموعة بورقة **المصادر 1: إيجاد قيمة اقتران عند نقطة**، ومشابك ورقية.
- أطلب إلى أفراد المجموعات التوفيق بين بطاقة كل اقتران وناتج تعويض قيمة x في هذا الاقتران، ثم ربطهما بمشبك ورقي.

إرشاد: أقصُّ البطاقات الموجودة في ورقة المصادر قبل بدء الدرس، ثم أخلطها جيدًا.



الدرس
1

النهايات والاتصال
Limits and Continuity

فكرة الدرس إيجاد نهاية اقتران عند قيمة مُحدَّدة عدديًّا وبيانيًّا وجبريًّا، وبحث اتصال اقتران عند نقطة ما.

المصطلحات النهاية، الصيغة غير المُحدَّدة، الاقتران المتصل.

مسألة اليوم اعتمادًا على التمثيل البياني لمنحنى الاقتران f في الشكل المجاور، أجد كُلًّا ممّا يأتي:
$f(-1),\ f(0),\ f(-1.01),\ f(-1.0001)$.

إذا كان الاقتران: $f(x) = x^2 - x + 1$، واخترْتُ قِيَمًا للمُتغيِّر x تقترب أكثر فأكثر من العدد 2، فإنَّني أُلاحِظ من جدول القِيَم والتمثيل البياني التالي أنَّه كلَّما اقتربت قِيَم x من العدد 2 من جهة اليسار اقتربت قِيَم الاقتران $f(x)$ من العدد 3، وأنَّه كلَّما اقتربت قِيَم x من العدد 2 من جهة اليمين اقتربت قِيَم الاقتران من العدد 3، وبذلك فإنَّ **نهاية** (limit) الاقتران f عند اقتراب x من العدد 2 من جهتي اليمين واليسار هي 3، وتُكتَب كما يأتي: $\lim_{x \to 2}(x^2 - x + 1) = 3$

2

x	1.9	1.95	1.99	1.995	1.999		2.001	2.005	2.01	2.05	2.1
f(x)	2.710000	2.852500	2.970100	2.985025	2.997001		3.003001	3.015025	3.030100	3.152500	3.310000

3

جهة اليسار
جهة اليمين

26

2 الاستكشاف

- أُوجِّه الطلبة إلى قراءة المسألة الواردة في بند (**مسألة اليوم**)، ثم أسألهم:
  - ماذا يُسمّى الاقتران f الظاهر تمثيله البياني في المسألة؟ الاقتران المُتشعِّب.
  - ما مجال هذا الاقتران؟ $R-\{0\}$
  - كيف عرفْتُ أنَّ الاقتران غير مُعرَّف عند 0؟ إجابة مُحتمَلة: بوجود دائرة مفتوحة مُقابِل هذه القيمة على منحنى الاقتران، وعدم وجود أيَّة دائرة مغلقة تقابلها.
  - ما قيمة: $f(-1)$؟ 1
  - ما قيمة: $f(0)$؟ قيمة غير مُعرَّفة.
  - ما قيمة: $f(-1.01)$؟ 2
  - ما قيمة: $f(-1.0001)$؟ 2
- أُعزِّز الإجابات الصحيحة.
- المجال العاطفي لا يقل أهمية عن المجال المعرفي؛ لذا لا يجب أنْ أقول للطالب/ للطالبة: "إجابتك خطأ"، بل أقول له/ لها: "لقد اقتربت من الإجابة الصحيحة، فمَنْ يستطيع إعطاء إجابة أخرى؟"، ثم أشكره/ أشكرها على محاولة الإجابة عن السؤال. بعد ذلك أطلب إلى غيره/ غيرها الإجابة عن السؤال؛ لتعرُّف الإجابة الصحيحة، مُعزِّزًا إيّاه/ إيّاها، ثم أطلب إلى الطالب الأوَّل/ الطالبة الأولى الإجابة عن السؤال مَرَّة أُخرى، وأُعزِّزه/ أُعزِّزها كما عزَّزت مَنْ أجاب عن السؤال نفسه إجابة صحيحة.

3 التدريس

- أرسم على اللوح التمثيل البياني للاقتران: $f(x) = x^2 - x + 1$ (الوارد في كتاب الطالب)، ثم أسأل الطلبة:
  - ما قيمة الاقتران $f(x)$ عند العدد 2؟ 3
  - إذا اخترت قِيَمًا للمُتغيِّر x أصغر من 2، وأخذت هذه القِيَم تقترب كثيرًا من العدد 2 من جهة اليسار، فما القيمة التي تقترب منها قِيَم الاقتران $f(x)$؟ 3
  - إذا اخترت قِيَمًا للمُتغيِّر x أكبر من 2، وأخذت هذه القِيَم تقترب كثيرًا من العدد 2 من جهة اليمين، فما القيمة التي تقترب منها قِيَم الاقتران $f(x)$؟ 3

- أُوضِّح للطلبة أنَّ العدد 3 يُمثِّل نهاية الاقتران $f(x)$ عندما تقترب قِيَم x من العدد 2 من جهتي اليمين واليسار، وأُعبِّر لهم عن هذه الجملة بالرموز، مُبيِّنًا أنَّ نهاية الاقتران عند نقطة ما عامَّةً هي طريقة لدراسة سلوك الاقتران حول هذه النقطة.

إرشادات:

- يُمكِن عرض التمثيل البياني للاقتران $f(x)$ في حال توافر جهاز العرض (Data Show)، ويُمكِن أيضًا إعداد ورقة عمل عن التمثيل البياني للاقتران، والبدء بتنفيذ إجراءات التدريس بعد توزيع ورقة العمل على الطلبة ضمن مجموعات.
- أستعمل الأقلام المُلوَّنة لتوضيح كيف تتغيَّر قِيَم $f(x)$ وَفقًا لتغيُّر قِيَم x عند اقترابها من العدد 2 من جهتي اليمين واليسار؛ لِما لذلك من أثر في تعزيز فهم الطلبة مفهوم النهاية.

- أُبيِّن للطلبة أنَّه يُمكِن التحقُّق عدديًّا من أنَّ نهاية الاقتران $f(x)$ هي 3 عند اقتراب قِيَم x من العدد 2 من جهتي اليمين واليسار، وذلك باختيار قِيَم قريبة جدًّا من العدد 2 من جهتي اليمين واليسار، وملاحظة القيمة التي تقترب منها قِيَم $f(x)$.
- أكتب على اللوح الجدول الآتي:

x	1.9	1.95	1.99	1.995	1.999	2	2.001	2.005	2.01	2.05	2.1
$f(x)$											

- أُوزِّع الطلبة إلى مجموعات ثنائية، ثم أطلب إلى أفراد المجموعات إيجاد قِيَم الاقتران $f(x)$ عند قِيَم x المعطاة في الجدول، وأَلفِت انتباههم إلى إمكانية استعمال الآلة الحاسبة العلمية.
- أُتابِع أفراد المجموعات أثناء العمل، وأُقدِّم لهم التغذية الراجعة اللازمة.
- بعد انتهاء أفراد المجموعات من العمل، أطرح عليهم السؤالين الآتيين:
  - ما القيمة التي تقترب منها قِيَم $f(x)$ عند اقتراب قِيَم x من العدد 2 من جهة اليسار، وَفقًا للنتائج التي توصَّلتم إليها من الجدول؟ 3
  - ما القيمة التي تقترب منها قِيَم $f(x)$ عند اقتراب قِيَم x من العدد 2 من جهة اليمين، وَفقًا للنتائج التي توصَّلتم إليها من الجدول؟ 3

- أناقِش الطلبة في السؤالين السابقين لاستنتاج أنَّ نهاية الاقتران $f(x)$ عند اقتراب قِيَم x من العدد 2 من جهتي اليمين واليسار هي 3، مُنوِّهًا بأنَّ البحث باستعمال التمثيل البياني أو التمثيل العددي يُفْضي دائمًا إلى النتيجة نفسها.
- أُوضِّح للطلبة أنَّه يُمكِن –استنادًا إلى ما سبق– التوصُّل إلى تعريف لنهاية اقتران عند نقطة ما، ثم أطلب إليهم تعريف النهاية بكلماتهم الخاصة، ثم أكتب على اللوح هذا التعريف بالكلمات، وأُعبِّر عنه بالرموز، مُبيِّنًا لهم أنَّه يُقرَأ كما ورد في صندوق (**مفهوم أساسي؛ النهاية عند نقطة**) الموجود في كتاب الطالب.
- أُوضِّح للطلبة الرمز المُستعمَل للدلالة على نهاية اقتران عند نقطة ما من جهة اليمين، وكذلك الرمز المُستعمَل للدلالة على نهاية اقتران عند نقطة ما من جهة اليسار، ثم أسألهم:
  - هل نهاية اقتران عند نقطة من جهة اليمين مساوية دائمًا لنهايته من جهة اليسار عند النقطة نفسها؟ ستختلف إجابات الطلبة.
- أُوضِّح للطلبة أنَّه ليس بالضرورة أنْ تكون النهايتان من جهة اليمين وجهة اليسار متساويتين. ومن ثَمَّ، فإنَّ نهاية الاقتران لن تكون موجودة في هذه الحالة (أيْ في حال عدم تساوي النهايتين).
- أُقدِّم للطلبة شرط وجود النهاية بالكلمات، ثم أُعبِّر عنه بالرموز كما ورد في صندوق (**مفهوم أساسي؛ النهاية من الجهتين**) الموجود في كتاب الطالب.

✓ **إرشاد:** أُناقِش الطلبة في الأفكار الواردة في الصناديق الهامشية؛ لِما لها من أهمية في تعزيز مفاهيم الدرس.

الوحدة 5

مفهوم أساسي **النهاية عند نقطة**

بالكلمات: إذا اقتربت قيمة الاقتران $f(x)$ من قيمة واحدة L عند اقتراب x من c، فإنَّ نهاية الاقتران $f(x)$ هي L عند اقتراب x من c؛ شرط أنْ يكون الاقتران مُعرَّفًا في فترة مفتوحة حول c.

بالرموز: $\lim\limits_{x\to c} f(x) = L$

وتُقرَأ: نهاية الاقتران $f(x)$ عند اقتراب x من c هي L.

لغة الرياضيات

تُقرَأ $\lim\limits_{x\to c} f(x) = L$ أيضًا كما يأتي: الاقتران $f(x)$ يقترب من L عند اقتراب x من c.

يشير الرمز $\lim\limits_{x\to c} f(x) = L$ إلى اقتراب x من c من جهتي اليمين واليسار.

لتحديد جهة اقتراب قِيَم x من القيمة c:

- أستعمل الرمز $\lim\limits_{x\to c^-} f(x)$ للدلالة على النهاية من جهة اليسار، حيث: $x < c$، وتُقرَأ: نهاية الاقتران $f(x)$ عند اقتراب x من c من جهة اليسار.
- أستعمل الرمز $\lim\limits_{x\to c^+} f(x)$ للدلالة على النهاية من جهة اليمين، حيث: $x > c$، وتُقرَأ: نهاية الاقتران $f(x)$ عند اقتراب x من c من جهة اليمين.

إذا كانت النهايتان من جهتي اليمين واليسار موجودتين ومتساويتين، فإنَّ نهاية الاقتران تكون موجودة.

مفهوم أساسي **النهاية من الجهتين**

بالكلمات: تكون نهاية الاقتران $f(x)$ موجودة عند اقتراب x من c إذا وفقط إذا كانت النهايتان من جهتي اليمين واليسار موجودتين ومتساويتين.

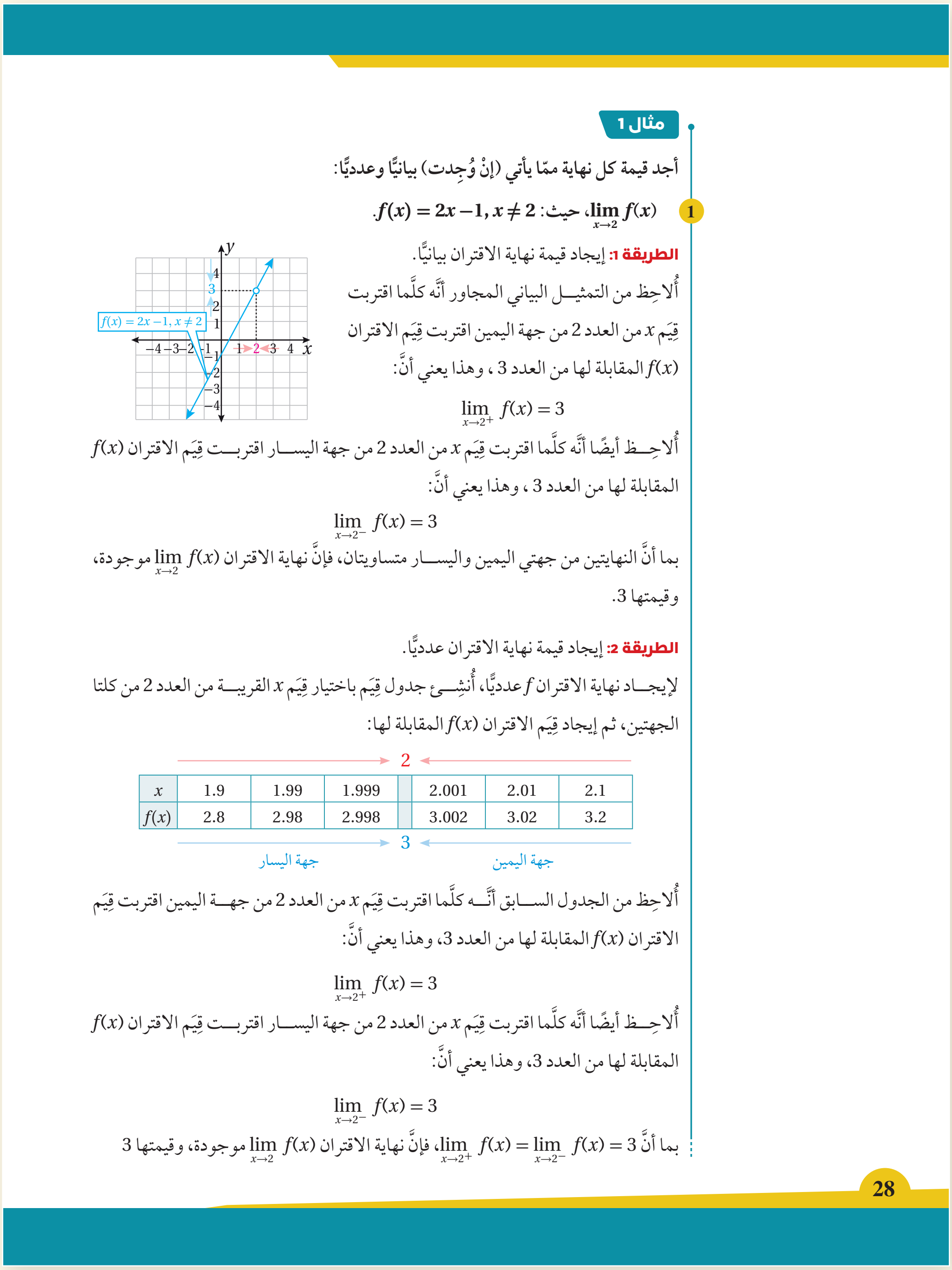
بالرموز:

$$\lim_{x\to c^-} f(x) = \lim_{x\to c^+} f(x) = L \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x\to c} f(x) = L$$

رموز الرياضيات

يُقرَأ الرمز ($\Leftrightarrow$): إذا وفقط إذا، ويعني تحقُّق صحة عبارة الرياضيات في كلا الاتجاهين.

27



مثال 1

أجد قيمة كل نهاية ممّا يأتي (إنْ وُجِدت) بيانيًّا وعدديًّا:

1 $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$، حيث: $f(x) = 2x - 1, x \neq 2$.

الطريقة 1: إيجاد قيمة نهاية الاقتران بيانيًّا.

أُلاحِظ من التمثيل البياني المجاور أنَّه كلّما اقتربت قِيَم x من العدد 2 من جهة اليمين اقتربت قِيَم الاقتران $f(x)$ المقابلة لها من العدد 3 ، وهذا يعني أنَّ:

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = 3$$

أُلاحِظ أيضًا أنَّه كلّما اقتربت قِيَم x من العدد 2 من جهة اليسار اقتربت قِيَم الاقتران $f(x)$ المقابلة لها من العدد 3 ، وهذا يعني أنَّ:

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = 3$$

بما أنَّ النهايتين من جهتي اليمين واليسار متساويتان، فإنَّ نهاية الاقتران $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ موجودة، وقيمتها 3.

الطريقة 2: إيجاد قيمة نهاية الاقتران عدديًّا.

لإيجاد نهاية الاقتران f عدديًّا، أُنشِئ جدول قِيَم باختيار قِيَم x القريبة من العدد 2 من كلتا الجهتين، ثم إيجاد قِيَم الاقتران $f(x)$ المقابلة لها:

2

x	1.9	1.99	1.999		2.001	2.01	2.1
$f(x)$	2.8	2.98	2.998		3.002	3.02	3.2

3

جهة اليسار　جهة اليمين

أُلاحِظ من الجدول السابق أنَّه كلّما اقتربت قِيَم x من العدد 2 من جهة اليمين اقتربت قِيَم الاقتران $f(x)$ المقابلة لها من العدد 3، وهذا يعني أنَّ:

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = 3$$

أُلاحِظ أيضًا أنَّه كلّما اقتربت قِيَم x من العدد 2 من جهة اليسار اقتربت قِيَم الاقتران $f(x)$ المقابلة لها من العدد 3، وهذا يعني أنَّ:

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = 3$$

بما أنَّ $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 3$، فإنَّ نهاية الاقتران $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ موجودة، وقيمتها 3

28

إرشـاد: أُؤكِّد للطلبـة أنَّ إيجاد نهاية الاقتـران بيانيًّا وعدديًّا يُفْضي دائمًا إلى النتيجة نفسها.

مثال 1

- أُناقِش الطلبة في الفرع 1 من المثال 1 لإيجاد قيمة نهاية الاقتران الوارد في هذا الفرع بيانيًّا، وذلك باتباع الإجراءات الآتية:
  - توزيع الطلبة إلى مجموعات رباعية، ثم الطلب إلى أفراد كل مجموعة تحديد مجال الاقتران ومداه.
  - الطلب إلى أفراد المجموعات تمثيل الاقتران $f(x)$ بيانيًّا.
  - الطلب إلى أفراد المجموعات إيجاد قيمة نهاية الاقتران عند النقطة المطلوبة من جهتي اليمين واليسار، والتعبير عن ذلك بالرموز المناسبة.
  - الطلب إلى أفراد المجموعات الحكم على وجود النهاية من عدم وجودها، وتوجيههم – في حال كانت موجودة– إلى التعبير عن قيمتها بالرموز.
- أُتابِع أفراد المجموعات أثناء العمل، وأُقدِّم لهم التغذية الراجعة اللازمة.
- أُناقِش أفراد المجموعات معًا في ما توصَّلوا إليه من نتائج.
- أُوجِّه أفراد المجموعات إلى البحث في نهاية الاقتران الوارد في الفرع 1 عدديًّا، وذلك باتباع الإجراءات الآتية:
  - الطلب إلى أفراد المجموعات اختيار قِيَم لـ x قريبة من العدد المطلوب إيجاد نهاية الاقتران عنده من كلتا الجهتين.
  - الطلب إلى أفراد المجموعات إيجاد قِيَم $f(x)$ المُقابِلة لقِيَم x.
  - الطلب إلى أفراد المجموعات إيجاد قيمة نهاية الاقتران عند النقطة المطلوبة من جهتي اليمين واليسار، والتعبير عن ذلك بالرموز المناسبة.
  - الطلب إلى أفراد المجموعات الحكم على وجود النهاية من عدم وجودها، وتوجيههم – في حال كانت موجودة– إلى التعبير عن قيمتها بالرموز.
- أُتابِع أفراد المجموعات أثناء العمل، وأُقدِّم لهم التغذية الراجعة اللازمة.
- أُناقِش أفراد المجموعات معًا في ما توصَّلوا إليه من نتائج.

2 $\lim_{x\to3} g(x)$، حيث: $g(x) = \begin{cases} x+1 & ,x \le 3 \\ 2x-1 & ,x > 3 \end{cases}$.

الطريقة 1: إيجاد قيمة نهاية الاقتران بيانيًّا.

أُلاحِظ من التمثيل البيانـي المجاور أنَّه كلَّما اقتربت قِيَم x من العدد 3 على المحور x من جهة اليمين اقتربت قِيَم الاقتران $g(x)$ المقابلة لها من العدد 5، وهذا يعني أنَّ:

$$\lim_{x\to3^+} g(x) = 5$$

أُلاحِظ أيضًا أنَّه كلَّما اقتربت قِيَم x من العدد 3 على المحور x من جهة اليسار اقتربت قِيَم الاقتران $g(x)$ المقابلة لها من العدد 4، وهذا يعني أنَّ:

$$\lim_{x\to3^-} g(x) = 4$$

بما أنَّ $\lim_{x\to3^-} g(x) \neq \lim_{x\to3^+} g(x)$، فإنَّ نهاية الاقتران $\lim_{x\to3} g(x)$ غير موجودة.

الطريقة 2: إيجاد قيمة نهاية الاقتران عدديًّا.

لإيجاد نهاية الاقتران g عدديًّا، أُنشِئ جدول قِيَم باختيار قِيَم x القريبة من العدد 3 من كلتا الجهتين، ثم إيجاد قِيَم الاقتران $g(x)$ المقابلة لها:

3

x	2.9	2.99	2.999		3.001	3.01	3.1
$g(x)$	3.9	3.99	3.999		5.002	5.02	5.2

جهة اليسار جهة اليمين

أُلاحِظ من الجدول السابق أنَّه كلَّما اقتربت قِيَم x من العدد 3 من جهة اليمين اقتربت قِيَم الاقتران $g(x)$ المقابلة لها من العدد 5، وهذا يعني أنَّ:

$$\lim_{x\to3^+} g(x) = 5$$

أُلاحِظ أيضًا أنَّه كلَّما اقتربت قِيَم x من العدد 3 من جهة اليسار اقتربت قِيَم الاقتران $g(x)$ المقابلة لها من العدد 4، وهذا يعني أنَّ:

$$\lim_{x\to3^-} g(x) = 4$$

بما أنَّ $\lim_{x\to3^-} g(x) \neq \lim_{x\to3^+} g(x)$، فإنَّ $\lim_{x\to3} g(x)$ غير موجودة.

أتعلَّم

عند إيجاد قيمة نهاية الاقتران بالطريقة العددية، فإنَّ الناتج لا يختلف عنه بالطريقة البيانية.

- أنتقل مع الطلبة إلى مناقشة الفرع 2 من هذا المثال، ثم أسألهم:
  - ما نوع الاقتران $g(x)$؟ اقتران مُتشعِّب.
  - كيف عرفْتُ ذلك؟ إجابة مُحتمَلة: بملاحظة أنَّ الاقتران مُعرَّف بقاعدتين.
  - ما قيمة x الذي تتشعَّب عنده قاعدة الاقتران؟ 3
  - ما القيمة التي يراد إيجاد نهاية الاقتران عندها؟ 3
- أطلب إلى أفراد المجموعات البحث في نهاية الاقتران $g(x)$ الوارد في الفرع 2 من المثال بيانيًّا وعدديًّا، وذلك باتباع الإجراءات نفسها التي اعتمدناها لمناقشة الفرع 1؛ بُغْيَةَ التوصُّل إلى أنَّ $\lim_{x\to3} g(x)$ غير موجودة؛ لأنَّ نهاية $g(x)$ عند العدد 3 من جهة اليمين لا تساوي نهاية $g(x)$ من جهة اليسار عند النقطة نفسها.

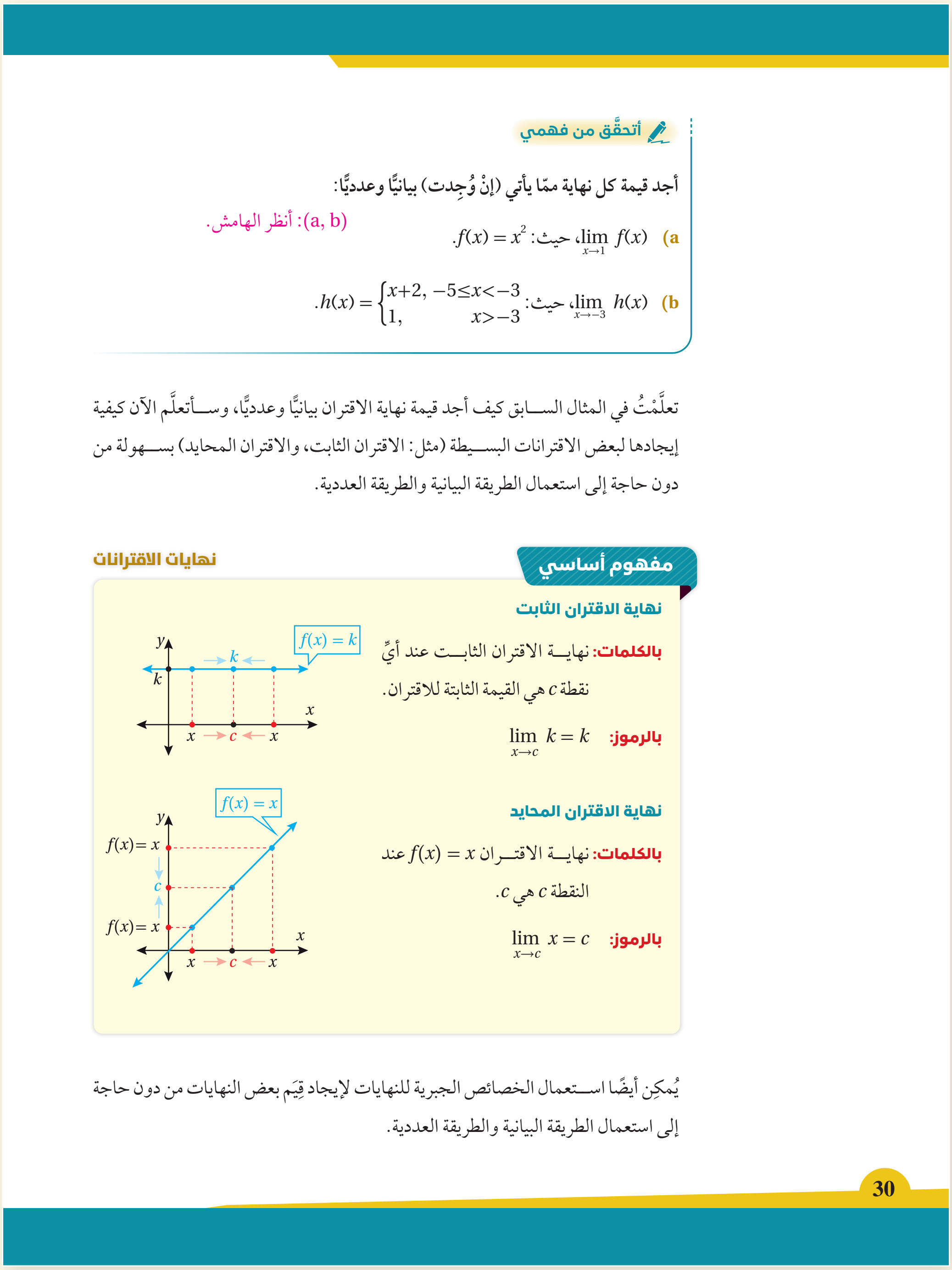
أخطاء شائعة: قد يعتقد بعض الطلبة خطأً أنَّ نهاية أيِّ اقتران مُتشعِّب عند نقطة التشعُّب غير موجودة دائمًا؛ لذا أُوضِّح لهم أنَّ ذلك غير صحيح بتقديم أمثلة مناسبة.

تعزيز اللغة ودعمها:

أُكرِّر المصطلحات الرياضية الوارد ذكرها في الدرس بكلٍّ من اللغة العربية واللغة الإنجليزية، مُحفِّزًا الطلبة على استعمالها.

التقويم التكويني:

أطلب إلى الطلبة حل التدريب الوارد في بند (**أتحقَّق من فهمي**) بعد كل مثال، ثم أختار بعض الإجابات التي تحوي أخطاء مفاهيمية لمناقشتها على اللوح، ولا أذكر اسم مَنْ أخطأ في الإجابة؛ تجنُّبًا لإحراجه.



أتحقَّق من فهمي

أجد قيمة كل نهاية ممّا يأتي (إنْ وُجِدت) بيانيًّا وعدديًّا:

(a $\lim\limits_{x\to1} f(x)$، حيث: $f(x)=x^2$.

(b $\lim\limits_{x\to-3} h(x)$، حيث: $h(x)=\begin{cases}x+2, & -5\le x<-3\\ 1, & x>-3\end{cases}$.

(a, b): أنظر الهامش.

تعلَّمْتُ في المثال السابق كيف أجد قيمة نهاية الاقتران بيانيًّا وعدديًّا، وسأتعلَّم الآن كيفية إيجادها لبعض الاقترانات البسيطة (مثل: الاقتران الثابت، والاقتران المحايد) بسهولة من دون حاجة إلى استعمال الطريقة البيانية والطريقة العددية.

مفهوم أساسي **نهايات الاقترانات**

نهاية الاقتران الثابت

بالكلمات: نهاية الاقتران الثابت عند أيِّ نقطة c هي القيمة الثابتة للاقتران.

بالرموز: $\lim\limits_{x\to c} k=k$

نهاية الاقتران المحايد

بالكلمات: نهاية الاقتران $f(x) = x$ عند النقطة c هي c.

بالرموز: $\lim\limits_{x\to c} x=c$

يُمكِن أيضًا استعمال الخصائص الجبرية للنهايات لإيجاد قِيَم بعض النهايات من دون حاجة إلى استعمال الطريقة البيانية والطريقة العددية.

30

مثال 2

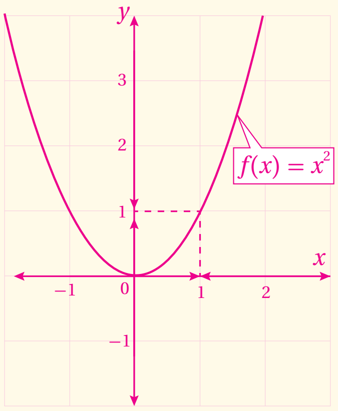
- أُوضِّح للطلبة أنَّه يُمكِن إيجاد النهاية لبعض الاقترانات البسيطة مباشرةً من دون اللجوء إلى الطريقة البيانية أو الطريقة العددية، مثل: الاقتران الثابت، والاقتران المحايد. بعد ذلك أُقدِّم لهم القاعدتين الخاصتين بنهاية كل اقتران من هذين الاقترانين بالكلمات والرموز كما ورد في صندوق **(مفهوم أساسي؛ نهايات الاقترانات)** الموجود في كتاب الطالب..
- أُوضِّح للطلبة أنَّه يُمكِن أيضًا إيجاد قِيَم بعض النهايات باستعمال الخصائص الجبرية للنهايات، ثم أُقدِّم لهم هذه الخصائص كما ورد في صندوق **(مفهوم أساسي؛ خصائص النهايات)** الموجود في كتاب الطالب..
- أُناقِش الطلبة في حل المثال 2 على اللوح، مُؤكِّدًا لهم ضرورة تبرير كل خطوة من خطوات الحل، وتحديد الخصائص التي استُعمِلت لحل كل مسألة.

إجابة الأسئلة في بند (أتحقَّق من فهمي 1):

a) بيانيًّا (من الشكل المجاور).

$$\lim_{x\to1^+}(x^2)=\lim_{x\to1^-}(x^2)=1$$

إذن: $\lim\limits_{x\to1}(x^2)=1$.



عدديًّا (من الجدول الآتي).

x	0.9	0.99	0.999	1	1.001	1.01	1.1
$f(x)$	0.81	0.9801	0.998001	1	1.002001	1.0201	1.21

$$\lim_{x\to1^+}(x^2)=\lim_{x\to1^-}(x^2)=1$$

إذن: $\lim\limits_{x\to1}(x^2)=1$.

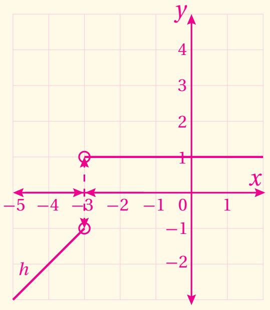
b) بيانيًّا (من الشكل المجاور).

$$\lim_{x\to-3^+} h(x)=1$$

$\lim\limits_{x\to-3^-} h(x)=-1$؛ أيْ إنَّ:

$$\lim_{x\to-3^+} h(x)\neq\lim_{x\to-3^-} h(x)$$

إذن: $\lim\limits_{x\to-3} h(x)$ غير موجودة.



عدديًّا (من الجدول الآتي).

x	−3.1	−3.01	−3.001	−3	−2.999	−2.99	−2.9
$f(x)$	−1.1	−1.01	−1.001		1	1	1

$$\lim_{x\to3^+} h(x)=1$$

$\lim\limits_{x\to-3^-} h(x)=-1$؛ أيْ إنَّ: $\lim\limits_{x\to-3^-} h(x)\neq\lim\limits_{x\to-3^+} h(x)$

إذن: $\lim\limits_{x\to-3} h(x)$ غير موجودة.

إرشاد: يُفضَّل التعزيز بدعم بياني لقاعدة نهاية كلٍّ من الاقتران الثابت والاقتران المحايد عند نقطة ما؛ لتسهيل إيصال المفهوم إلى الطلبة.

أخطاء شائعة:

- قد يُخطِئ بعض الطلبة باستعمال خاصية القسمة عند أصفار المقام؛ لذا أُؤكِّد دائمًا عدم إمكانية استعمال خاصية القسمة إذا كان ناتج تطبيقها في المقام يساوي صفرًا، مُذكِّرًا الطلبة بأنَّ ناتج قسمة عدد على صفر يساوي قيمة غير مُعرَّفة.
- قد يُخطِئ بعض الطلبة باستعمال خاصية الجذر النوني عند قِيَم تعطي قِيَمًا سالبةً أسفل الجذور الزوجية، لذا أُؤكِّد دائمًا عدم إمكانية استعمال خاصية الجذر النوني في هذه الحالة، مُذكِّرًا الطلبة بأنَّ الجذور الزوجية غير مُعرَّفة للأعداد السالبة.

مفهوم أساسي **خصائص النهايات**

إذا كان k, c عددين حقيقيين، وكان n عددًا صحيحًا موجبًا، وكانت النهايتان $\lim_{x\to c} f(x), \lim_{x\to c} g(x)$ موجودتين، فإنَّ كُلًّا من الخصائص الآتية صحيحة:

خاصية المجموع: $$1)\ \lim_{x\to c} (f(x)+g(x)) = \lim_{x\to c} f(x) + \lim_{x\to c} g(x)$$

خاصية الفرق: $$2)\ \lim_{x\to c} (f(x)-g(x)) = \lim_{x\to c} f(x) - \lim_{x\to c} g(x)$$

خاصية الضرب في ثابت: $$3)\ \lim_{x\to c} k\,(f(x)) = k \lim_{x\to c} f(x)$$

خاصية الضرب: $$4)\ \lim_{x\to c} (f(x)\times g(x)) = \lim_{x\to c} f(x) \times \lim_{x\to c} g(x)$$

خاصية القسمة: $$5)\ \lim_{x\to c} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{\lim_{x\to c} f(x)}{\lim_{x\to c} g(x)},\ \lim_{x\to c} g(x) \neq 0$$

خاصية القوَّة: $$6)\ \lim_{x\to c} (f(x))^n = (\lim_{x\to c} f(x))^n$$

خاصية الجذر النوني: $$7)\ \lim_{x\to c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to c} f(x)}$$

إذا كان n عددًا زوجيًّا، فأتحقَّق من أنَّ $\lim_{x\to c} f(x) > 0$

تنبيه

لا يُمكِن استعمال خاصية القسمة إذا نتج من تطبيقها مقام يساوي صفرًا.

أتعلَّم

وُضِع هذا الشرط لعدم وجود النهاية للجذر الزوجي من جهة يسار الصفر؛ ذلك أنَّ الجذر الزوجي غير مُعرَّف للأعداد السالبة.

مثال 2

أستعمل خصائص النهايات لإيجاد قيمة كل نهاية ممّا يأتي:

① $\lim_{x\to 1} (x^2+5x-3)$

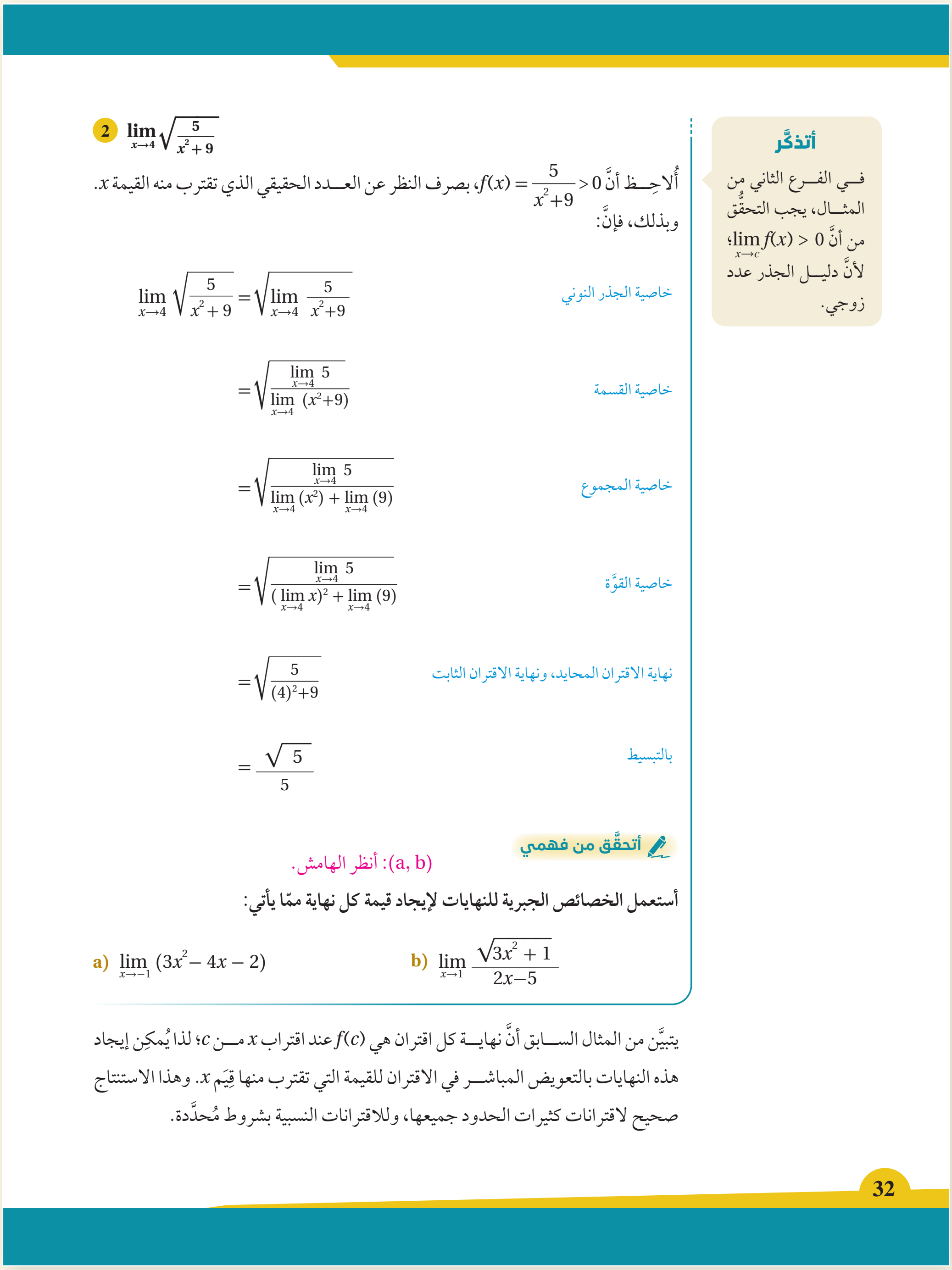
$$\lim_{x\to 1} (x^2+5x-3)$$

خاصيتا المجموع والفرق $$= \lim_{x\to 1} (x^2) + \lim_{x\to 1} (5x) - \lim_{x\to 1} (3)$$

خاصيتا القوَّة والضرب في ثابت $$= (\lim_{x\to 1} x)^2 + 5 \times \lim_{x\to 1} (x) - \lim_{x\to 1} (3)$$

نهاية الاقتران المحايد، ونهاية الاقتران الثابت $$= (1)^2 + 5\times 1 - 3$$

بالتبسيط $$= 3$$



أتذكَّر

فـي الفـرع الثاني من المثـال، يجب التحقُّق من أنَّ $\lim_{x\to c} f(x) > 0$؛ لأنَّ دليـل الجذر عدد زوجي.

② $\lim_{x\to 4}\sqrt{\dfrac{5}{x^2+9}}$

أُلاحِـظ أنَّ $f(x) = \dfrac{5}{x^2+9} > 0$، بصرف النظر عن العـدد الحقيقي الذي تقترب منه القيمة x. وبذلك، فإنَّ:

خاصية الجذر النوني

$$\lim_{x\to 4}\sqrt{\frac{5}{x^2+9}} = \sqrt{\lim_{x\to 4}\frac{5}{x^2+9}}$$

خاصية القسمة

$$= \sqrt{\frac{\lim_{x\to 4} 5}{\lim_{x\to 4}(x^2+9)}}$$

خاصية المجموع

$$= \sqrt{\frac{\lim_{x\to 4} 5}{\lim_{x\to 4}(x^2) + \lim_{x\to 4}(9)}}$$

خاصية القوَّة

$$= \sqrt{\frac{\lim_{x\to 4} 5}{(\lim_{x\to 4} x)^2 + \lim_{x\to 4}(9)}}$$

نهاية الاقتران المحايد، ونهاية الاقتران الثابت

$$= \sqrt{\frac{5}{(4)^2+9}}$$

بالتبسيط

$$= \frac{\sqrt{5}}{5}$$

أتحقَّق من فهمي

(a, b): أنظر الهامش.

أستعمل الخصائص الجبرية للنهايات لإيجاد قيمة كل نهاية ممّا يأتي:

a) $\lim_{x\to -1}(3x^2 - 4x - 2)$

b) $\lim_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{3x^2+1}}{2x-5}$

يتبيَّن من المثال السـابق أنَّ نهايـة كل اقتران هي $f(c)$ عند اقتراب x مـن c؛ لذا يُمكِن إيجاد هذه النهايات بالتعويض المباشـر في الاقتران للقيمة التي تقترب منها قِيَم x. وهذا الاستنتاج صحيح لاقترانات كثيرات الحدود جميعها، وللاقترانات النسبية بشروط مُحدَّدة.

32

مثال إضافي:

أسـتعمل الخصائص الجبرية للنهايـات لإيجاد قيمة كل نهاية ممّا يأتي:

① $\lim_{x\to -3}(x^2 - 13)$ $\quad -4$

② $\lim_{x\to -2}(x^3 - 2x^2 + 4x + 8)$ $\quad -16$

③ $\lim_{x\to 2}\left(\dfrac{2x+5}{11-x^2}\right)$ $\quad \dfrac{9}{7}$

④ $\lim_{x\to 4}\sqrt{x^2 - 10}$ $\quad \sqrt{6}$

إجابة الأسئلة في بند (أتحقَّق من فهمي 2):

a) $\lim_{x\to -1}(3x^2 - 4x - 2)$

$$\lim_{x\to -1}(3x^2 - 4x - 2)$$

$$= \lim_{x\to -1}(3x^2) - \lim_{x\to -1}(4x) - \lim_{x\to -1}(2)$$

$$= 3(\lim_{x\to -1} x)^2 - 4 \times \lim_{x\to -1}(x) - \lim_{x\to -1}(2)$$

$$= 3(-1)^2 - 4 \times -1 - 2$$

$$= 5$$

b) $\lim_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{3x^2+1}}{2x-5}$

$$= \frac{\lim_{x\to 1}\sqrt{3x^2+1}}{\lim_{x\to 1}(2x-5)}$$

$$= \frac{\sqrt{\lim_{x\to 1}(3x^2+1)}}{\lim_{x\to 1}(2x-5)}$$

$$= \frac{\sqrt{3(\lim_{x\to 1} x)^2 + \lim_{x\to 1}(1)}}{2\lim_{x\to 1}(x) - \lim_{x\to 1}(5)}$$

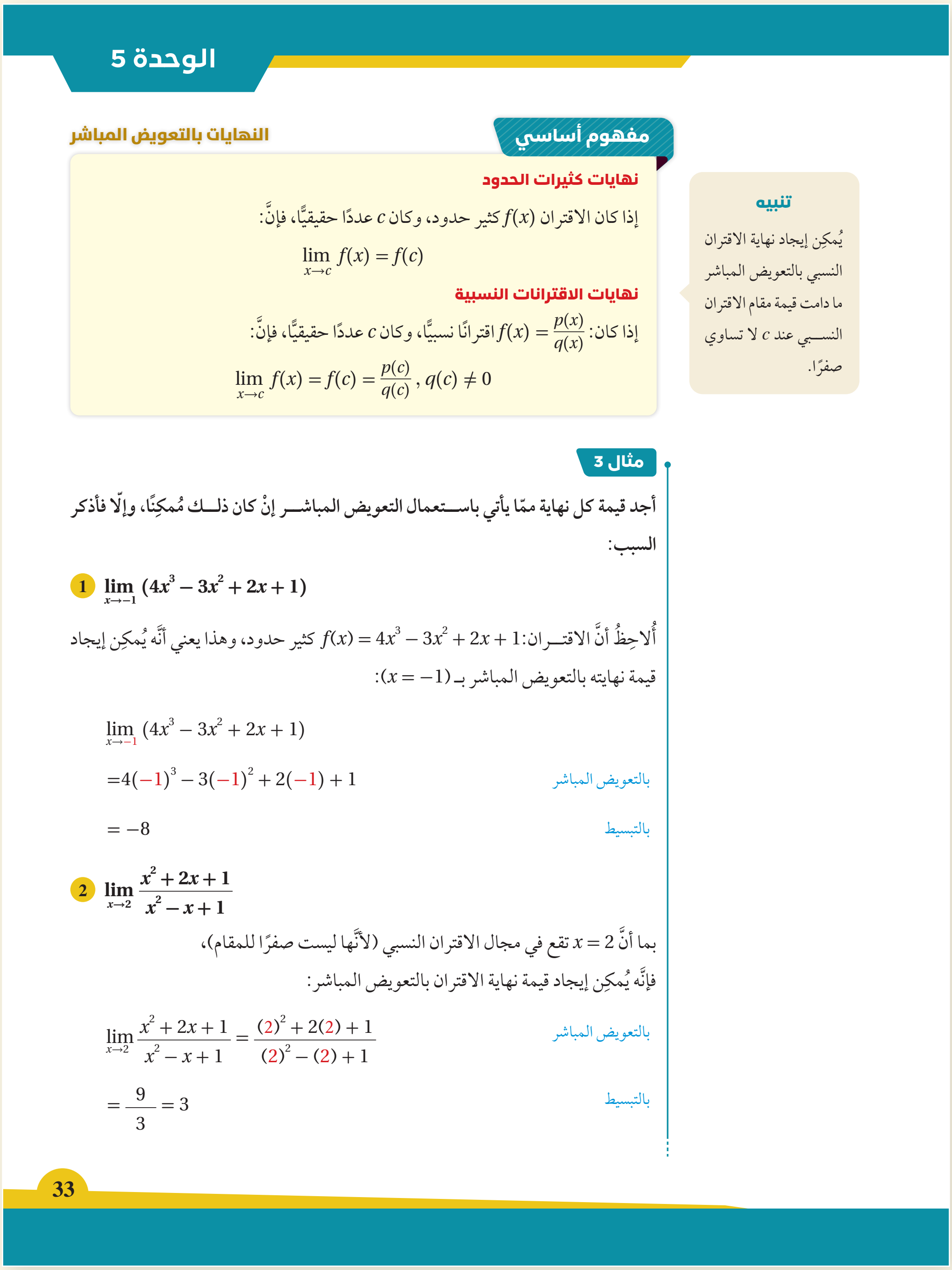
$$= \frac{\sqrt{3(1)^2+(1)}}{2(1)-5}$$

$$= -\frac{2}{3}$$

مثال 3

- أُوجِّه الطلبة إلى استنتاج أنَّه يُمكِن – استنادًا إلى المثال السابق – إيجاد النهايات للاقترانات كثيرات الحدود باستعمال التعويض المباشر؛ ذلك أنَّ نهاية اقتران كثير الحدود عند نقطة ما تساوي قيمته عند تلك النقطة.
- أُوضِّح للطلبة إمكانية استعمال التعويض المباشر أيضًا لإيجاد نهاية الاقترانات النسبية عند نقطة ما؛ شرط ألّا تكون قيمة المقام عند تلك النقطة صفرًا.
- أُقدِّم للطلبة القاعدتين الخاصتين بالتعويض المباشر بالكلمات والرموز كما ورد في صندوق (مفهوم **أساسي**) الموجود في كتاب الطالب.
- أُناقِش الطلبة في حل المثال 3 على اللوح.

تنبيه: أحرص على إبقاء حل الفرع 3 من المثال 3 على اللوح؛ ليكون مُقدِّمة لمناقشة فكرة (الصيغة غير المُحدَّدة).



الوحدة 5

مفهوم أساسي النهايات بالتعويض المباشر

نهايات كثيرات الحدود

إذا كان الاقتران $f(x)$ كثير حدود، وكان c عددًا حقيقيًّا، فإنَّ:

$$\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$$

نهايات الاقترانات النسبية

إذا كان: $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ اقترانًا نسبيًّا، وكان c عددًا حقيقيًّا، فإنَّ:

$$\lim_{x\to c} f(x) = f(c) = \frac{p(c)}{q(c)}, q(c) \neq 0$$

تنبيه

يُمكِن إيجاد نهاية الاقتران النسبي بالتعويض المباشر ما دامت قيمة مقام الاقتران النسبي عند c لا تساوي صفرًا.

مثال 3

أجد قيمة كل نهاية ممّا يأتي باستعمال التعويض المباشر إنْ كان ذلك مُمكِنًا، وإلّا فأذكر السبب:

① $\lim_{x\to -1} (4x^3 - 3x^2 + 2x + 1)$

أُلاحِظ أنَّ الاقتران: $f(x) = 4x^3 - 3x^2 + 2x + 1$ كثير حدود، وهذا يعني أنَّه يُمكِن إيجاد قيمة نهايته بالتعويض المباشر بـ $(x = -1)$:

$$\lim_{x\to -1} (4x^3 - 3x^2 + 2x + 1)$$

$$= 4(-1)^3 - 3(-1)^2 + 2(-1) + 1$$ بالتعويض المباشر

$$= -8$$ بالتبسيط

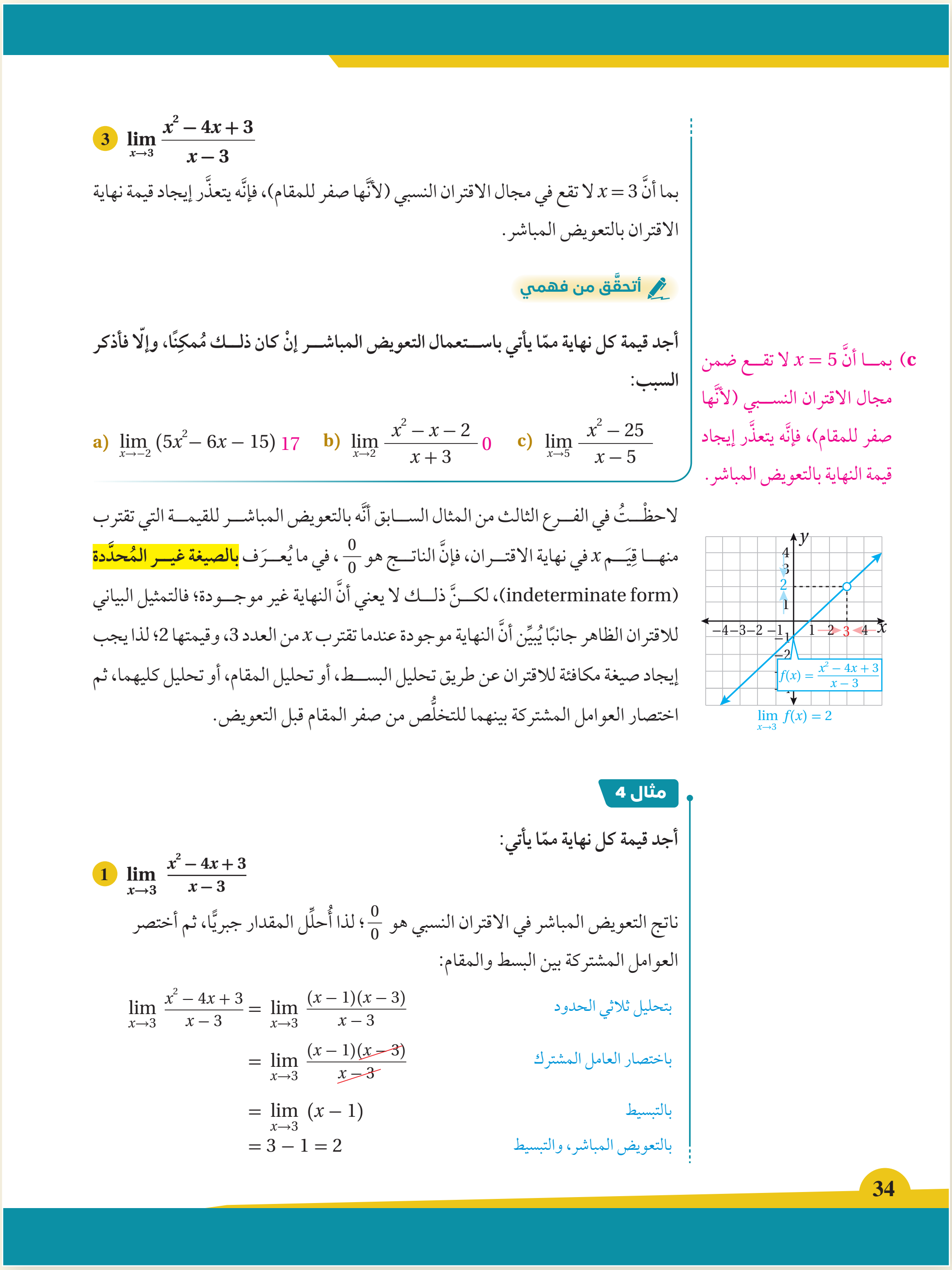
② $\lim_{x\to 2} \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - x + 1}$

بما أنَّ $x = 2$ تقع في مجال الاقتران النسبي (لأنَّها ليست صفرًا للمقام)، فإنَّه يُمكِن إيجاد قيمة نهاية الاقتران بالتعويض المباشر:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - x + 1} = \frac{(2)^2 + 2(2) + 1}{(2)^2 - (2) + 1}$$ بالتعويض المباشر

$$= \frac{9}{3} = 3$$ بالتبسيط

33



3 $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-4x+3}{x-3}$

بما أنَّ $x=3$ لا تقع في مجال الاقتران النسبي (لأنَّها صفر للمقام)، فإنَّه يتعذَّر إيجاد قيمة نهاية الاقتران بالتعويض المباشر.

أتحقَّق من فهمي

أجد قيمة كل نهاية ممّا يأتي باستعمال التعويض المباشر إنْ كان ذلك مُمكِنًا، وإلّا فأذكر السبب:

a) $\lim\limits_{x\to -2} (5x^2-6x-15)$ 17 b) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-x-2}{x+3}$ 0 c) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{x^2-25}{x-5}$

c) بما أنَّ $x=5$ لا تقع ضمن مجال الاقتران النسبي (لأنَّها صفر للمقام)، فإنَّه يتعذَّر إيجاد قيمة النهاية بالتعويض المباشر.

لاحظْتُ في الفرع الثالث من المثال السابق أنَّه بالتعويض المباشر للقيمة التي تقترب منها قِيَم x في نهاية الاقتران، فإنَّ الناتج هو $\frac{0}{0}$، في ما يُعرَف **بالصيغة غير المُحدَّدة** (indeterminate form)، لكنَّ ذلك لا يعني أنَّ النهاية غير موجودة؛ فالتمثيل البياني للاقتران الظاهر جانبًا يُبيِّن أنَّ النهاية موجودة عندما تقترب x من العدد 3، وقيمتها 2؛ لذا يجب إيجاد صيغة مكافئة للاقتران عن طريق تحليل البسط، أو تحليل المقام، أو تحليل كليهما، ثم اختصار العوامل المشتركة بينهما للتخلُّص من صفر المقام قبل التعويض.

مثال 4

أجد قيمة كل نهاية ممّا يأتي:

1 $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-4x+3}{x-3}$

ناتج التعويض المباشر في الاقتران النسبي هو $\frac{0}{0}$؛ لذا أُحلِّل المقدار جبريًّا، ثم أختصر العوامل المشتركة بين البسط والمقام:

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-4x+3}{x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{(x-1)(x-3)}{x-3}$$ بتحليل ثلاثي الحدود

$$= \lim_{x\to 3} \frac{(x-1)\cancel{(x-3)}}{\cancel{x-3}}$$ باختصار العامل المشترك

$$= \lim_{x\to 3} (x-1)$$ بالتبسيط

$$= 3-1=2$$ بالتعويض المباشر، والتبسيط

34

مثال 4

- أُرجِع الطلبة إلى الفرع 3 من المثال 3، ثم أطلب إليهم تعويض القيمة التي تقترب منها قِيَم x في كلٍّ من بسط الاقتران النسبي ومقامه، ثم أسألهم:
  - ما ناتج التعويض المباشر للقيمة التي تقترب منها قِيَم x في الاقتران النسبي؟ $\frac{0}{0}$
  - ما دلالة الناتج $\frac{0}{0}$؟ ستختلف إجابات الطلبة.
  - هل يدلُّ ظهور الناتج $\frac{0}{0}$ على أنَّ النهاية غير موجودة؟ ستختلف إجابات الطلبة.
- أُوضِّح للطلبة أنَّ الناتج $\frac{0}{0}$ يُعرَف بالصيغة غير المُحدَّدة، لكنَّ ظهوره عند التعويض المباشر لا يعني بالضرورة أنَّ النهاية غير موجودة. ولإثبات ذلك للطلبة، أُمثِّل الاقتران النسبي الوارد في المثال على اللوح بيانيًّا، ثم أسألهم:
  - ما قيمة نهاية الاقتران عند قيمة x المطلوبة؟ 2
  - هل النهاية موجودة؟ نعم.
  - ما علاقة ظهور الناتج $\frac{0}{0}$ بالتمثيل البياني للاقتران؟ ستختلف إجابات الطلبة.
- بناءً على مناقشة الأسئلة السابقة، أُؤكِّد للطلبة أنَّ النهاية قد تكون موجودة بالرغم من ظهور الناتج $\frac{0}{0}$؛ ما يُحتِّم إيجاد صيغة مُكافِئة للاقتران النسبي عن طريق تبسيطه؛ للتخلُّص من صفر المقام، ثم التعويض المباشر بعد الاختصار.
- أُناقِش الطلبة في حل المثال 4 على اللوح.

تنويع التعليم:

قد يواجه بعض الطلبة من ذوي المستوى دون المتوسط صعوبة في تبسيط الاقترانات النسبية؛ لذا أُذكِّرهم بما تعلَّموه سابقًا عن تحليل المقادير الجبرية، وتبسيطها.

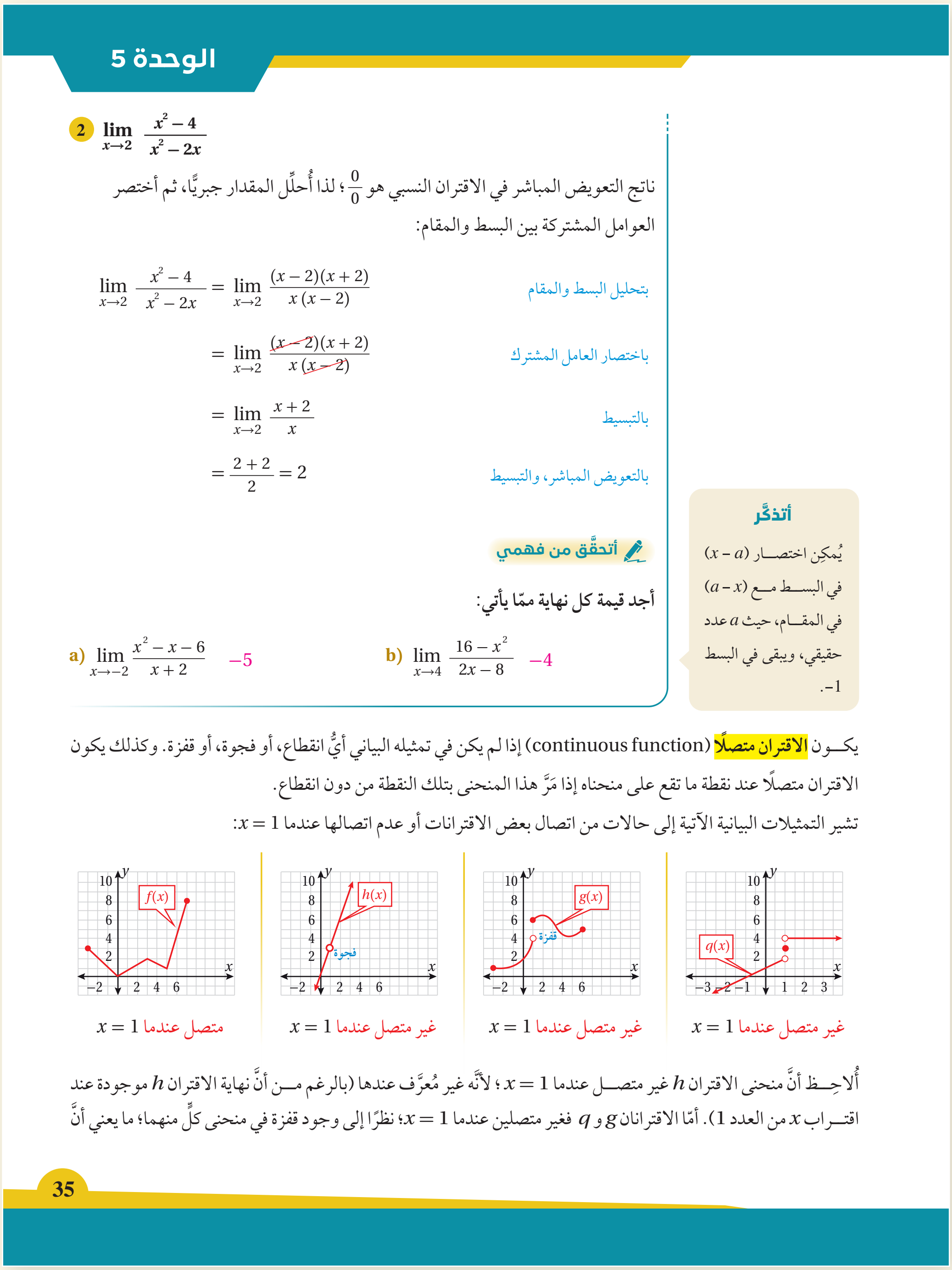
مثال إضافي:

أجد قيمة كل نهاية ممّا يأتي:

1 $\lim_{x \to 2} \frac{x-2}{x^2-3x+2}$ 1

2 $\lim_{x \to -2} \frac{3x+6}{x^3+8}$ $\frac{1}{4}$

3 $\lim_{x \to 3} \left(\frac{3x-9}{x^2-5x+6}\right)$ 3



2 $\lim_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x^2-2x}$

ناتج التعويض المباشر في الاقتران النسبي هو $\frac{0}{0}$؛ لذا أُحلِّل المقدار جبريًّا، ثم أختصر العوامل المشتركة بين البسط والمقام:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x^2-2x} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x(x-2)}$$ بتحليل البسط والمقام

$$= \lim_{x \to 2} \frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{x\cancel{(x-2)}}$$ باختصار العامل المشترك

$$= \lim_{x \to 2} \frac{x+2}{x}$$ بالتبسيط

$$= \frac{2+2}{2} = 2$$ بالتعويض المباشر، والتبسيط

أتذكَّر

يُمكِن اختصار $(x-a)$ في البسط مع $(a-x)$ في المقام، حيث a عدد حقيقي، ويبقى في البسط 1-.

أتحقَّق من فهمي

أجد قيمة كل نهاية ممّا يأتي:

a) $\lim_{x \to -2} \frac{x^2-x-6}{x+2}$ -5

b) $\lim_{x \to 4} \frac{16-x^2}{2x-8}$ -4

يكـون **الاقتران متصلًا** (continuous function) إذا لم يكن في تمثيله البياني أيُّ انقطاع، أو فجوة، أو قفزة. وكذلك يكون الاقتران متصلًا عند نقطة ما تقع على منحناه إذا مَرَّ هذا المنحنى بتلك النقطة من دون انقطاع.

تشير التمثيلات البيانية الآتية إلى حالات من اتصال بعض الاقترانات أو عدم اتصالها عندما $x = 1$:

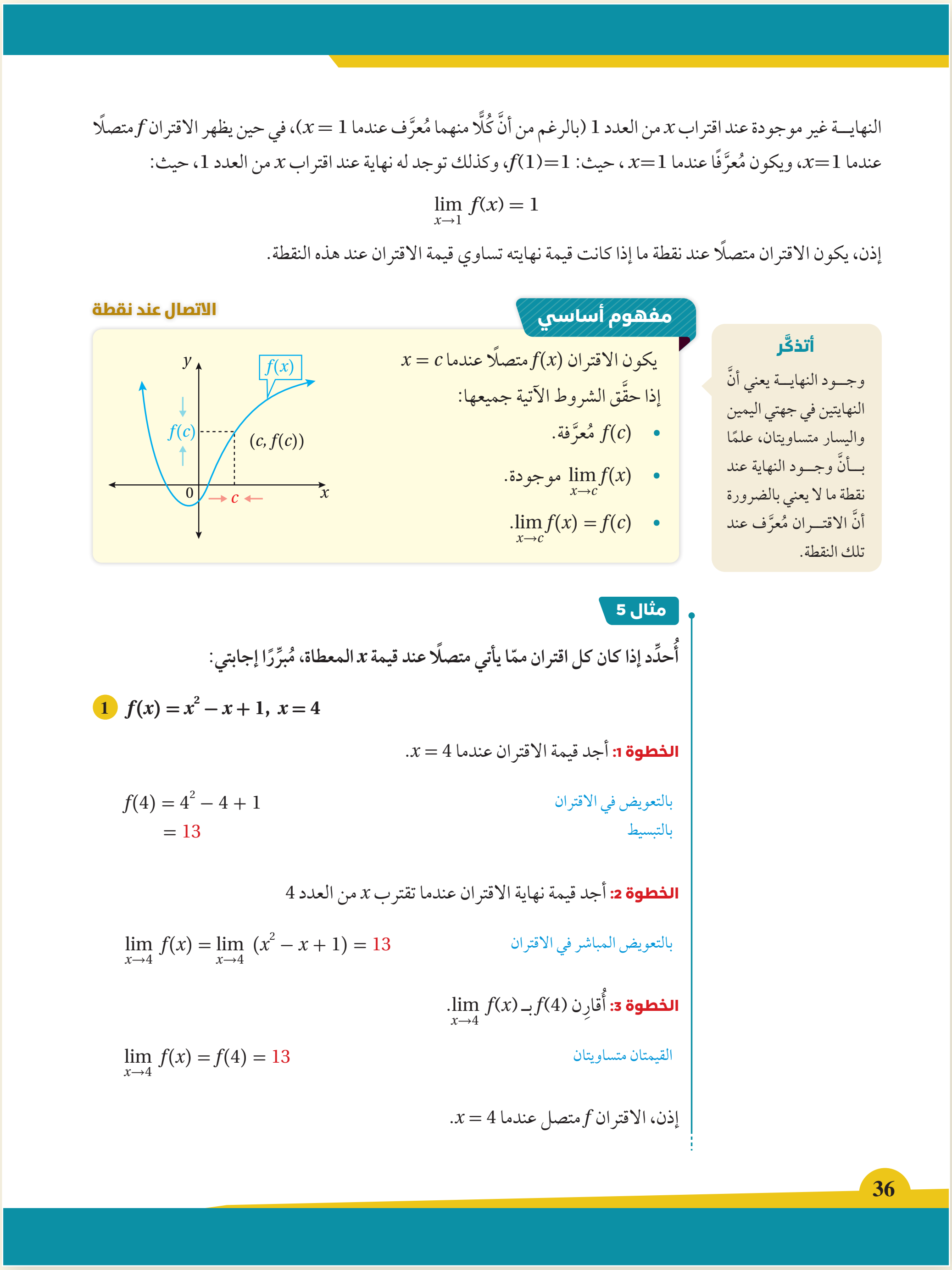
متصل عندما $x = 1$

غير متصل عندما $x = 1$

غير متصل عندما $x = 1$

غير متصل عندما $x = 1$

أُلاحِـظ أنَّ منحنى الاقتران h غير متصـل عندما $x = 1$؛ لأنَّه غير مُعرَّف عندها (بالرغم مـن أنَّ نهاية الاقتران h موجودة عند اقتـراب x من العدد 1). أمّا الاقترانان g و q فغير متصلين عندما $x = 1$؛ نظرًا إلى وجود قفزة في منحنى كلٍّ منهما؛ ما يعني أنَّ



النهايــة غير موجودة عند اقتراب x من العدد 1 (بالرغم من أنَّ كُلًّا منهما مُعرَّف عندما $x = 1$)، في حين يظهر الاقتران f متصلًا عندما $x=1$، ويكون مُعرَّفًا عندما $x=1$ ، حيث: $f(1)=1$، وكذلك توجد له نهاية عند اقتراب x من العدد 1، حيث:

$$\lim_{x\to 1} f(x) = 1$$

إذن، يكون الاقتران متصلًا عند نقطة ما إذا كانت قيمة نهايته تساوي قيمة الاقتران عند هذه النقطة.

مفهوم أساسي

الاتصال عند نقطة

يكون الاقتران $f(x)$ متصلًا عندما $x = c$ إذا حقَّق الشروط الآتية جميعها:

- $f(c)$ مُعرَّفة.
- $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ موجودة.
- $\lim\limits_{x\to c} f(x) = f(c)$.

أتذكَّر

وجـود النهايــة يعني أنَّ النهايتين في جهتي اليمين واليسار متساويتان، علمًا بــأنَّ وجـــود النهاية عند نقطة ما لا يعني بالضرورة أنَّ الاقتــران مُعرَّف عند تلك النقطة.

مثال 5

أُحدِّد إذا كان كل اقتران ممّا يأتي متصلًا عند قيمة x المعطاة، مُبرِّرًا إجابتي:

① $f(x) = x^2 - x + 1,\ x = 4$

الخطوة 1: أجد قيمة الاقتران عندما $x = 4$.

بالتعويض في الاقتران	$f(4) = 4^2 - 4 + 1$
بالتبسيط	$= 13$

الخطوة 2: أجد قيمة نهاية الاقتران عندما تقترب x من العدد 4

بالتعويض المباشر في الاقتران	$\lim\limits_{x\to 4} f(x) = \lim\limits_{x\to 4} (x^2 - x + 1) = 13$

الخطوة 3: أُقارِن $f(4)$ بـ $\lim\limits_{x\to 4} f(x)$.

القيمتان متساويتان	$\lim\limits_{x\to 4} f(x) = f(4) = 13$

إذن، الاقتران f متصل عندما $x = 4$.

36

مثال 5

- أُوضِّح للطلبة مفهوم الاتصال، ثم أُناقِشهم في حالات اتصـال بعـض الاقترانـات أو عدم اتصالهـا، بناءً على التمثيـلات البيانية الـوارد ذكرها فـي الصفحة 35 من كتاب الطالب؛ لاستنتاج الشروط الواجب توافرها في الاقتـران لكي يكون اقترانًا متصلًا عند نقطة ما، وأُقدِّم لهم هذه الشروط مستعينًا بصندوق (**مفهوم أساسي**) الوارد في كتاب الطالب.
- أُناقِش الطلبة في حل المثال 5 على اللوح.

إرشادات:

- إذا توافـر جهـاز العـرض (Data Show)، فإنَّه يُمكِن اسـتعماله لعرض ما في كتاب الطالب من أشـكال تُوضِّح حالات الاتصال وعدم الاتصال لبعض الاقترانات عند نقطة ما.
- ألفِت انتباه الطلبة إلـى أنَّ كثيرات الحدود تكون متصلـة عند أيَّة نقطة داخـل مجالها؛ لأنَّ منحنى كثير الحدود لا يحوي أيَّة فجوات أو قفزات.
- فـي الفـرع 2 مـن المثـال 5، أُوجِّـه الطلبـة إلـى صندوق (**الدعـم البياني**) في هامش حل المثال؛ للتحقُّق بيانيًّا من اتصال الاقتران f عندما $x = 1$.
- أُناقِـش الطلبـة في السـؤال الـوارد فـي صندوق (**أُفكِّر**)، ثم أسـألهم: هل الاقتـران مُعرَّف عندما $x = 3$؟

أخطاء شائعة: قد يُخطِئ بعض الطلبة عند البحث في اتصال اقتــران عند نقطة ما، بعدم التحقُّق من أنَّ الاقتــران مُعرَّف عند تلــك النقطة، والاكتفاء بالبحث في وجود النهاية عنــد تلك النقطة؛ لذا أُذكِّر الطلبة دائمًا بالشروط الثلاثة الواجب تحقُّقها للحكم على اتصال اقتران عند نقطة ما.

مثال إضافي:

أبحث في اتصال كلٍّ من الاقترانين الآتيين عند قيمة x المعطاة إزاء كلٍّ منهما:

① $f(x) = x + \frac{1}{x}, x = 0$

الاقتران غير متصل عندما $x = 0$؛ لأنَّ الاقتران غير مُعرَّف عند هذه القيمة (صفر مقام).

② $f(x) = \begin{cases} x^2 & , x < 1 \\ 2x - 1 & , x \geq 1 \end{cases}, x = 1$

الاقتران متصل عندما $x = 1$؛ لأنَّ نهاية الاقتران تساوي قيمته عند تلك النقطة.

4 التدريب

أتدرَّب وأحل المسائل

- أوجِّه الطلبة إلى بند (**أتدرَّب وأحل المسائل**)، ثم أطلب إليهم حل المسائل (1 – 10)، والمسائل (17 – 22) ضمن مجموعات ثنائية داخل الغرفة الصفية؛ فهذه المسائل تحديدًا ترتبط ارتباطًا مباشرًا بأمثلة الدرس، وهي تُستعمَل خاصةً لتدريب الطلبة على المفاهيم نفسها، بصرف النظر عمّا إذا كانت الأسئلة فردية أم زوجية.
- إذا واجه الطلبة صعوبة في حل أيَّة مسألة، فإنَّني أختار أحد الطلبة مِمَّنْ تمكَّن/ تمكَّنت من حل المسألة؛ لمناقشة استراتيجيته/ استراتيجيتها في حل المسألة على اللوح، مُحفِّزًا الطلبة على طرح أيِّ تساؤل عن خطوات الحل المُقدَّمة من الزميل/ الزميلة.

الوحدة 5

② $g(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}, x = 1$

الاقتران النسبي g غير مُعرَّف عندما $x = 1$؛ لأنَّ ذلك يجعل مقامه صفرًا.

إذن، الاقتران النسبي g غير متصل عندما $x = 1$.

③ $f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & , x < 1 \\ x^3 + 2 & , x \geq 1 \end{cases}, x = 1$

لتحديد إذا كان الاقتران f متصلًا عندما $x = 1$، أتحقَّق من أنَّ $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1)$.

الخطوة 1: أجد قيمة الاقتران عندما $x = 1$.

$f(1) = 1^3 + 2 = 3$ بالتعويض المباشر في الاقتران

الخطوة 2: أجد قيمة نهاية الاقتران عندما تقترب x من العدد 1

$\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} (x^3 + 2) = 3$ النهاية من جهة اليمين

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} (2x + 1) = 3$ النهاية من جهة اليسار

بما أنَّ $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 3$، فإنَّ نهاية الاقتران f موجودة عندما تقترب x من العدد 1، وقيمتها 3.

الخطوة 3: أُقارِن $f(1)$ بـ $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$.

$\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1) = 3$ القيمتان متساويتان

بما أنَّ $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 3 = f(1)$، فإنَّ الاقتران f متصل عندما $x=1$.

الدعم البياني

يُمكِن استعمال برمجية جيوجبرا لتمثيل الاقتران f، والتحقُّق بيانيًّا من اتصاله عندما $x = 1$، كما يظهر في التمثيل البياني الآتي:

أُفكِّر

لماذا يُعَدُّ الاقتران: $g(x) = \begin{cases} x - 1 & , x < 3 \\ 5 - x & , x > 3 \end{cases}$ غير متصل عندما $x=3$؟

أتحقَّق من فهمي (a, b): أنظر الهامش.

أُحدِّد إذا كان كل اقتران ممّا يأتي متصلًا عند قيمة x المعطاة، مُبرِّرًا إجابتي:

a) $g(x) = \frac{x^3 + 1}{x + 1}, x = -1$

b) $h(x) = \begin{cases} x - 1 & , x < 3 \\ 5 - x & , x \geq 3 \end{cases}, x = 3$

37

إجابة الأسئلة في بند (أتحقَّق من فهمي 5):

a) $g(x) = \frac{x^3 + 1}{x + 1}, x = -1$

بما أنَّ الاقتران النسبي g غير مُعرَّف عندما $x = -1$ (لأنَّها تجعل مقامه صفرًا)، فإنَّ g غير متصل عندما $x = -1$.

b) $h(x) = \begin{cases} x - 1 & , x < 3 \\ 5 - x & , x \geq 3 \end{cases}, \quad x = 3$

$h(3) = 5 - 3 = 2$

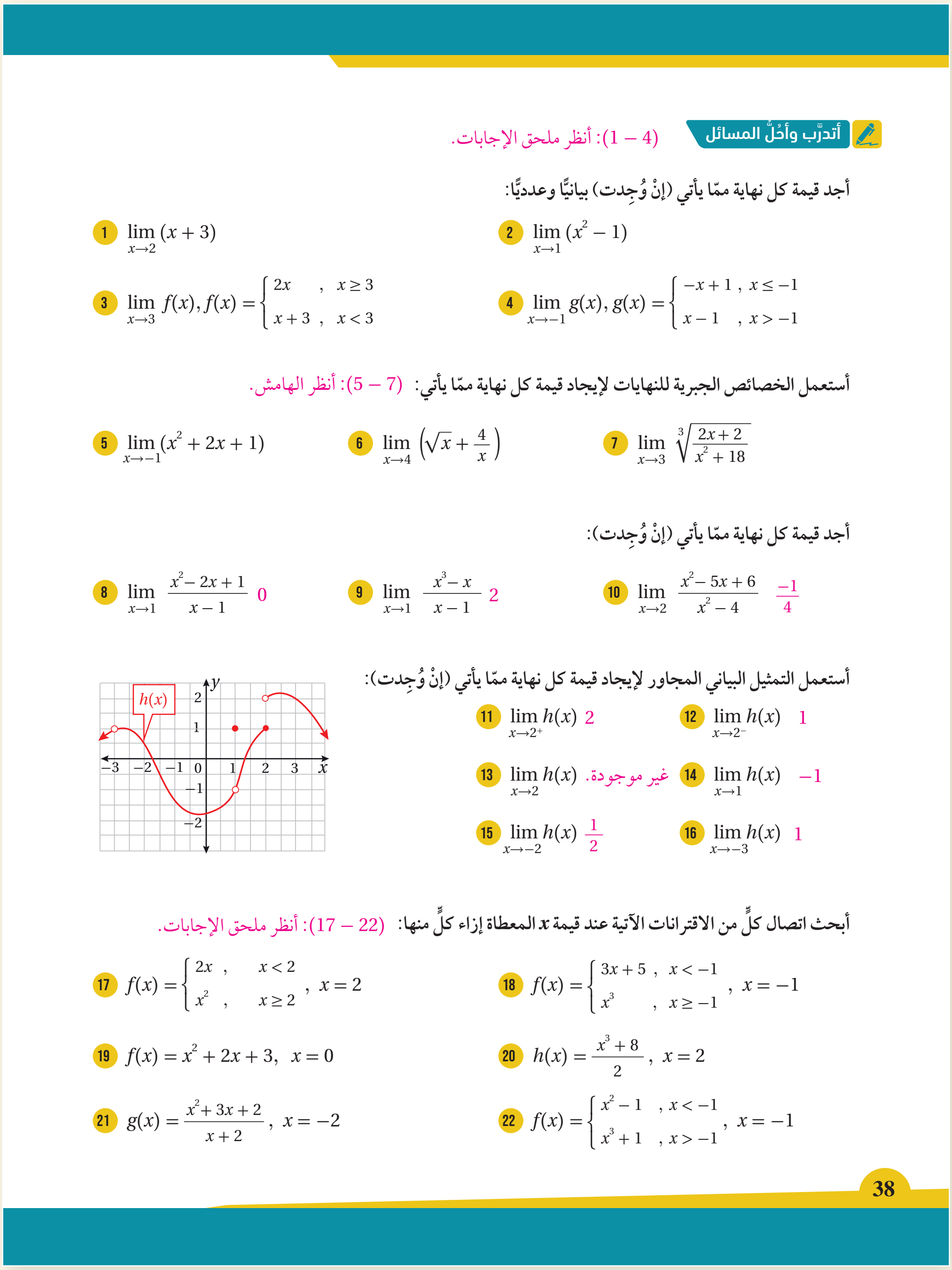
$\lim\limits_{x \to 3^+} h(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} (5 - x) = 2$

$\lim\limits_{x \to 3^-} h(x) = \lim\limits_{x \to 3^-} (x - 1) = 2$

$\lim\limits_{x \to 3^+} h(x) = \lim\limits_{x \to 3^-} h(x)$

$\lim\limits_{x \to 3^-} h(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} h(x) = 2$، إذن: $\lim\limits_{x \to 3} h(x) = 2$

بما أنَّ $\lim\limits_{x \to 3} h(x) = 2 = h(3)$، فإنَّ الاقتران h متصل عندما $x = 3$.



أتدرَّب وأحُلُّ المسائل (1 – 4): أنظر ملحق الإجابات.

أجد قيمة كل نهاية ممّا يأتي (إنْ وُجِدت) بيانيًّا وعدديًّا:

① $\lim\limits_{x\to2}(x+3)$

② $\lim\limits_{x\to1}(x^2-1)$

③ $\lim\limits_{x\to3} f(x), f(x)=\begin{cases}2x & , x\geq3\\ x+3 & , x<3\end{cases}$

④ $\lim\limits_{x\to-1} g(x), g(x)=\begin{cases}-x+1 & , x\leq-1\\ x-1 & , x>-1\end{cases}$

أستعمل الخصائص الجبرية للنهايات لإيجاد قيمة كل نهاية ممّا يأتي: (5 – 7): أنظر الهامش.

⑤ $\lim\limits_{x\to-1}(x^2+2x+1)$

⑥ $\lim\limits_{x\to4}\left(\sqrt{x}+\frac{4}{x}\right)$

⑦ $\lim\limits_{x\to3}\sqrt[3]{\frac{2x+2}{x^2+18}}$

أجد قيمة كل نهاية ممّا يأتي (إنْ وُجِدت):

⑧ $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-2x+1}{x-1}$ 0

⑨ $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^3-x}{x-1}$ 2

⑩ $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-4}$ $\frac{-1}{4}$

أستعمل التمثيل البياني المجاور لإيجاد قيمة كل نهاية ممّا يأتي (إنْ وُجِدت):

⑪ $\lim\limits_{x\to2^+}h(x)$ 2

⑫ $\lim\limits_{x\to2^-}h(x)$ 1

⑬ $\lim\limits_{x\to2}h(x)$ غير موجودة.

⑭ $\lim\limits_{x\to1}h(x)$ -1

⑮ $\lim\limits_{x\to-2}h(x)$ $\frac{1}{2}$

⑯ $\lim\limits_{x\to-3}h(x)$ 1

أبحث اتصال كلٍّ من الاقترانات الآتية عند قيمة x المعطاة إزاء كلٍّ منها: (17 – 22): أنظر ملحق الإجابات.

⑰ $f(x)=\begin{cases}2x & , x<2\\ x^2 & , x\geq2\end{cases}, x=2$

⑱ $f(x)=\begin{cases}3x+5 & , x<-1\\ x^3 & , x\geq-1\end{cases}, x=-1$

⑲ $f(x)=x^2+2x+3,\ x=0$

⑳ $h(x)=\frac{x^3+8}{2}, x=2$

㉑ $g(x)=\frac{x^2+3x+2}{x+2}, x=-2$

㉒ $f(x)=\begin{cases}x^2-1 & , x<-1\\ x^3+1 & , x>-1\end{cases}, x=-1$

38

تنويع التعليم:

إذا واجه الطلبة ذوو المستوى دون المتوسط صعوبة في حل أسئلة بند (**أتدرَّب وأحل المسائل**)، فإنَّني أضع كُلًّا منهم مع طالب آخر/ طالبة أُخرى من ذوي المستوى المتوسط أو مع أحد الطلبة المُتميِّزين؛ ليتشاركا في حل الأسئلة.

مهارات التفكير العليا

- أُوجِّه الطلبة إلى بند (**مهارات التفكير العليا**)، ثم أطلب إليهم حل المسائل (25 – 28).
- أرصد أيَّة أفكار غير تقليدية من الطلبة، ثم أطلب إلى هؤلاء الطلبة كتابة هذه الأفكار على اللوح.

إرشادات:

- في السؤال 26 (**تبرير**)، أُذكِّر الطلبة بأنَّ وجود النهاية عند نقطة ما يعني أنَّ النهاية من جهة اليمين تساوي النهاية من جهة اليسار، ثم أطلب إليهم تحديد أهمية ذلك في إيجاد قيمة الثابت k.
- في السؤال 28 (**تحدٍّ**)، أُذكِّر الطلبة بأنَّ الاقتران المتصل عند نقطة ما يعني أنَّه مُعرَّف عند تلك النقطة، وأنَّ النهاية موجودة، وهي تساوي قيمة الاقتران عند تلك النقطة، ثم أطلب إليهم تحديد أهمية ذلك في إيجاد قيمة الثابت k.

إجابة الأسئلة في بند (أتدرَّب وأحل المسائل):

5) $\lim\limits_{x\to-1}(x^2+2x+1)$

$= \lim\limits_{x\to-1}(x^2)+\lim\limits_{x\to-1}(2x)+\lim\limits_{x\to-1}(1)$

$= (\lim\limits_{x\to-1}x)^2+2\times\lim\limits_{x\to-1}(x)+\lim\limits_{x\to-1}(1)$

$= (-1)^2+2\times-1+1$

$= 0$

6) $\lim\limits_{x\to4}\left(\sqrt{x}+\frac{4}{x}\right)$

$= \lim\limits_{x\to4}\left(\sqrt{x}\right)+\lim\limits_{x\to4}\left(\frac{4}{x}\right)$

$= \sqrt{\lim\limits_{x\to4}(x)}+\frac{\lim\limits_{x\to4}(4)}{\lim\limits_{x\to4}(x)}$

$= \sqrt{4}+\frac{4}{4}$

$=3$

7) $\lim\limits_{x\to3}\sqrt[3]{\frac{2x+2}{x^2+18}}$

$= \sqrt[3]{\lim\limits_{x\to3}\left(\frac{2x+2}{x^2+18}\right)}$

$= \sqrt[3]{\frac{\lim\limits_{x\to3}(2x+2)}{\lim\limits_{x\to3}(x^2+18)}}$

$= \sqrt[3]{\frac{2\times\lim\limits_{x\to3}(x)+\lim\limits_{x\to3}(2)}{(\lim\limits_{x\to3}(x))^2+\lim\limits_{x\to3}(18)}}$

$= \sqrt[3]{\frac{2\times3+2}{3^2+18}} = \frac{2}{3}$

الواجب المنزلي:

أستعين بالجدول الآتي لتحديد الواجب المنزلي للطلبة بحسب مستوياتهم:

المستويات	الأسئلة
دون المتوسط	كتاب الطالب: 27 ,(16 – 11) كتاب التمارين: (10 – 6) ,(3 – 1)
ضمن المتوسط	كتاب الطالب: 27 ,24 ,23 ,(16 – 11) كتاب التمارين: ,10 ,8 ,6 ,4 ,(3 – 1) 14 ,12
فوق المتوسط	كتاب الطالب: (28 – 23) ,(16 – 11) كتاب التمارين: 13 ,11 ,9 ,5

إرشــاد: قد يختلف تصنيف الطلبة من درس إلــى آخر تبعًا لأدائهـــم. فمثلًا، قد يكـــون أداء أحد الطلبة دون المتوســـط في درس، وفوق المتوسط في درس آخر.

5 الإثراء

- أطلب إلى الطلبة حل السؤال الآتي بوصفه إثراءً لهم:

◄ إذا كان: $f(x) = mx + b$، وكان:

$\lim\limits_{x\to 1} f(x) = -2, \lim\limits_{x\to -1} f(x) = 4$،

فأجد قيمة كلٍّ من الثابتين m، و b.

$b = 1, m = -3$

6 الختام

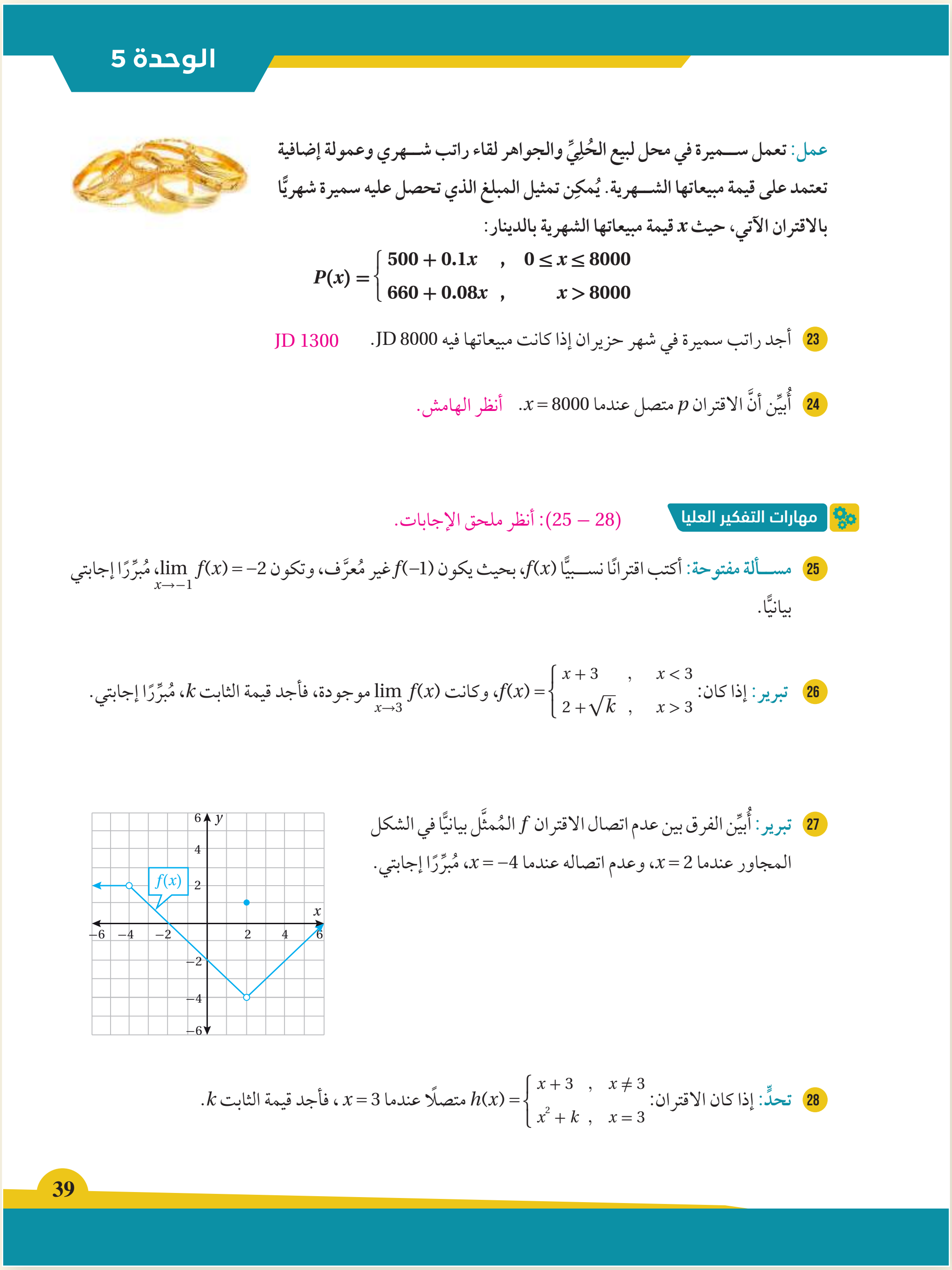
- أتحقَّق من فهم الطلبة موضوع الدرس، بطرح السؤال الآتي عليهم:

◄ أجد قيمة كل نهاية ممّا يأتي (إنْ وُجِدت):

1 $\lim\limits_{x\to -2} (4 - 3x^2)$ -8

2 $\lim\limits_{x\to 4} f(x), f(x)=\begin{cases} 1 & , x < 4 \\ -1 & , x \geq 4 \end{cases}$ غير موجودة.

3 $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2}$ 3



الوحدة 5

عمل: تعمل سـميرة في محل لبيع الحُلِيِّ والجواهر لقاء راتب شـهري وعمولة إضافية تعتمد على قيمة مبيعاتها الشـهرية. يُمكِن تمثيل المبلغ الذي تحصل عليه سميرة شهريًّا بالاقتران الآتي، حيث x قيمة مبيعاتها الشهرية بالدينار:

$$P(x) = \begin{cases} 500 + 0.1x & , \quad 0 \leq x \leq 8000 \\ 660 + 0.08x & , \quad x > 8000 \end{cases}$$

23 أجد راتب سميرة في شهر حزيران إذا كانت مبيعاتها فيه JD 8000. JD 1300

24 أُبيِّن أنَّ الاقتران p متصل عندما $x = 8000$. أنظر الهامش.

مهارات التفكير العليا (28 – 25): أنظر ملحق الإجابات.

25 **مسـألة مفتوحة:** أكتب اقترانًا نسـبيًّا $f(x)$، بحيث يكون $f(-1)$ غير مُعرَّف، وتكون $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = -2$، مُبرِّرًا إجابتي بيانيًّا.

26 **تبرير:** إذا كان: $f(x) = \begin{cases} x+3 & , \quad x < 3 \\ 2+\sqrt{k} & , \quad x > 3 \end{cases}$، وكانت $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ موجودة، فأجد قيمة الثابت k، مُبرِّرًا إجابتي.

27 **تبرير:** أُبيِّن الفرق بين عدم اتصال الاقتران f المُمثَّل بيانيًّا في الشكل المجاور عندما $x = 2$، وعدم اتصاله عندما $x = -4$، مُبرِّرًا إجابتي.

28 **تحدٍّ:** إذا كان الاقتران: $h(x) = \begin{cases} x+3 & , \quad x \neq 3 \\ x^2 + k & , \quad x = 3 \end{cases}$ متصلًا عندما $x = 3$ ، فأجد قيمة الثابت k.

39

إجابة الأسئلة في بند (أتدرَّب وأحل المسائل):

24) $P(x) = \begin{cases} 500 + 0.1x & , \ 0 \leq x \leq 8000 \\ 660 + 0.08x & , \ x > 8000 \end{cases}$

$P(8000) = 1300$

$\lim\limits_{x\to 8000^+} P(x) = \lim\limits_{x\to 8000^+} (660 + 0.08x) = 1300$

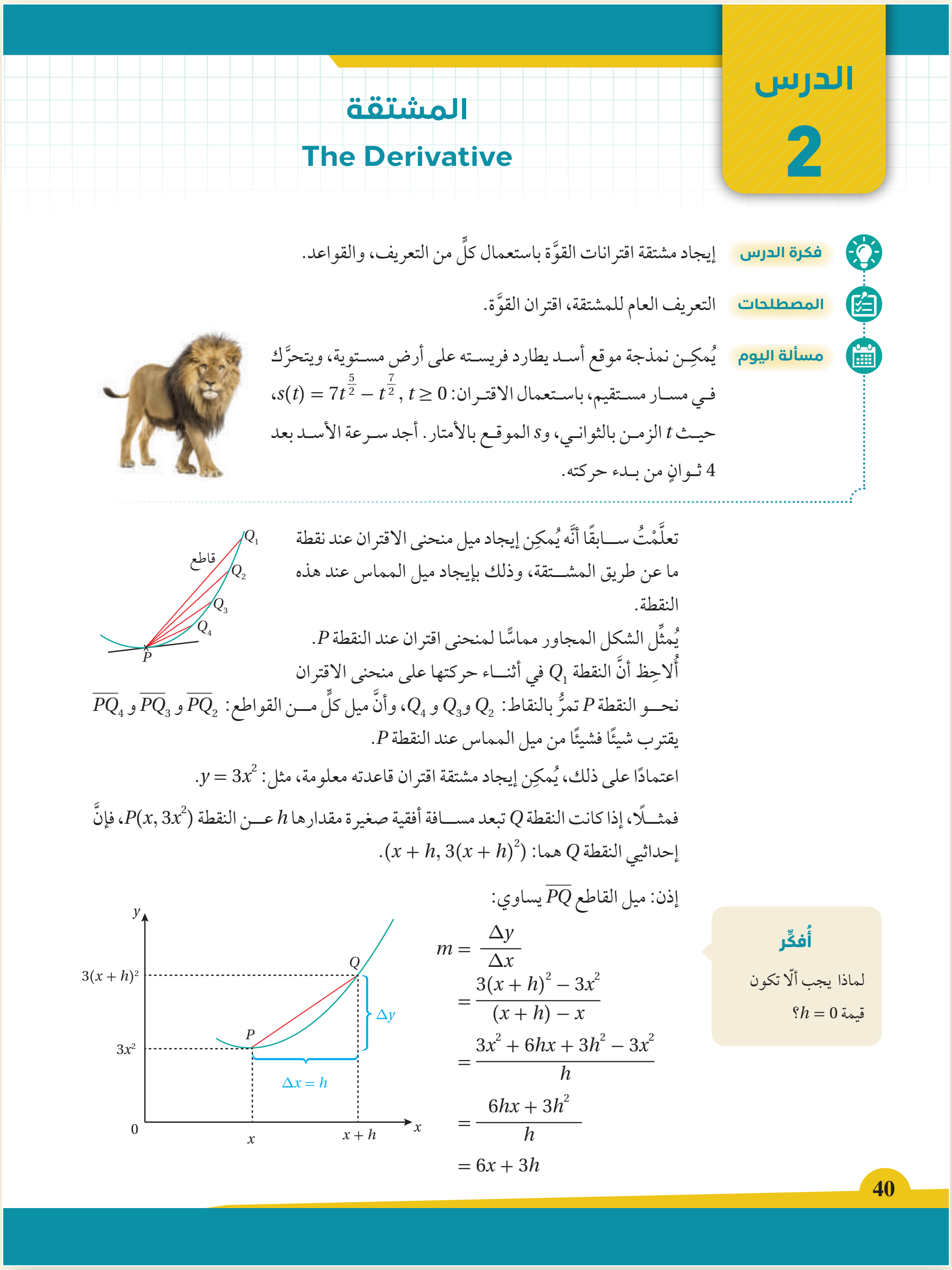
$\lim\limits_{x\to 8000^-} P(x) = \lim\limits_{x\to 8000^-} (500 + 0.1x) = 1300$

$\lim\limits_{x\to 8000} P(x) = 1300$

أيْ إنَّ: $\lim\limits_{x\to 8000} P(x) = 1300 = P(8000)$.

إذن: الاقتران P متصل عندما $x = 8000$.

الدرس
2



الدرس 2

المشتقة
The Derivative

فكرة الدرس إيجاد مشتقة اقترانات القوَّة باستعمال كلٍّ من التعريف، والقواعد.

المصطلحات التعريف العام للمشتقة، اقتران القوَّة.

مسألة اليوم يُمكِن نمذجة موقع أسد يطارد فريسته على أرض مستوية، ويتحرَّك في مسار مستقيم، باستعمال الاقتران: $s(t) = 7t^{\frac{5}{2}} - t^{\frac{7}{2}}, t \geq 0$، حيث t الزمن بالثواني، وs الموقع بالأمتار. أجد سرعة الأسد بعد 4 ثوانٍ من بدء حركته.

تعلَّمْتُ سابقًا أنَّه يُمكِن إيجاد ميل منحنى الاقتران عند نقطة ما عن طريق المشتقة، وذلك بإيجاد ميل المماس عند هذه النقطة.

يُمثِّل الشكل المجاور مماسًّا لمنحنى اقتران عند النقطة P.

أُلاحِظ أنَّ النقطة Q_1 في أثناء حركتها على منحنى الاقتران نحو النقطة P تمرُّ بالنقاط: Q_2 وQ_3 و Q_4، وأنَّ ميل كلٍّ من القواطع: $\overline{PQ_2}$ و $\overline{PQ_3}$ و $\overline{PQ_4}$ يقترب شيئًا فشيئًا من ميل المماس عند النقطة P.

اعتمادًا على ذلك، يُمكِن إيجاد مشتقة اقتران قاعدته معلومة، مثل: $y = 3x^2$.

فمثلًا، إذا كانت النقطة Q تبعد مسافة أفقية صغيرة مقدارها h عن النقطة $P(x, 3x^2)$، فإنَّ إحداثيي النقطة Q هما: $(x + h, 3(x + h)^2)$.

إذن: ميل القاطع $\overline{PQ}$ يساوي:

$$\begin{aligned} m &= \frac{\Delta y}{\Delta x} \\ &= \frac{3(x+h)^2 - 3x^2}{(x+h) - x} \\ &= \frac{3x^2 + 6hx + 3h^2 - 3x^2}{h} \\ &= \frac{6hx + 3h^2}{h} \\ &= 6x + 3h \end{aligned}$$

أُفكِّر

لماذا يجب ألّا تكون قيمة $h = 0$؟

نتاجات الدرس:

- إيجاد مشتقة اقترانات القوَّة باستعمال التعريف.
- إيجاد مشتقة اقترانات القوَّة باستعمال القواعد.
- إيجاد سرعة جسم يتحرَّك في مسار مستقيم.

نتاجات التعلُّم القبلي:

- كتابة الأُسس النسبية بالصورة الجذرية، وبالعكس.
- استعمال خاصية الأُسِّ السالب لتبسيط مقادير عددية.
- تقدير ميل المنحنى.
- إيجاد مشتقة كثيرات الحدود.
- إيجاد السرعة والتسارع لجسم يتحرَّك في مسار مستقيم.

مراجعة التعلُّم القبلي:

- أُوجِّه الطلبة في بداية كل حصة إلى الفقرة (الفقرات) المُرتبِطة بما سيُقدَّم من موضوعات الدرس في الحصة (إنْ وُجِدت) ضمن صفحات **(أستعد لدراسة الوحدة)** في كتاب التمارين، ثم أطلب إليهم حل تدريباتها داخل الغرفة الصفية بصورة فردية.
- أتجوَّل بين الطلبة؛ لمتابعتهم أثناء الحل، وتحديد نقاط ضعفهم، وأُوجِّههم إلى مراجعة المثال عندما يواجهون صعوبة في الحل.

1 التهيئة

- أوزِّع الطلبة إلى مجموعات ثنائية، ثم أطلب إلى كل فرد في المجموعة إيجاد مشتقة الاقترانات الآتية بسرعة، وعلى نحوٍ منفصل عن زميله:

① $f(x) = x^4$

② $f(x) = 8x - 9$

③ $f(x) = 6x^7$

④ $f(x) = 2x^2 - 3x^4$

⑤ $f(x) = \pi x^2$

- الفوز لـمَنْ يجد أوَّلًا مشتقة الاقترانات السابقة بصورة صحيحة.

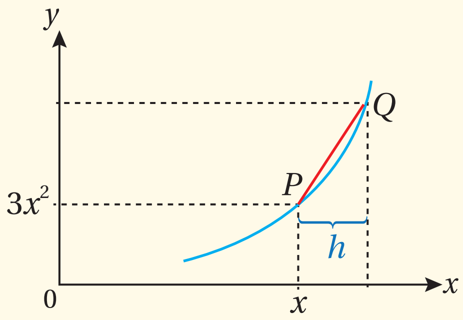
2 الاستكشاف

- أوجِّه الطلبة إلى قراءة المسألة الواردة في بند (**مسألة اليوم**)، ثم أسألهم:
  - ما المقصود باقتران الموقع؟ اقتران يربط موقع الجسم $s(t)$ بالزمن (t).
  - هل اقتران الموقع الوارد في المسألة كثير حدود؟ لماذا؟ لا؛ لأنَّ أُسَّ المُتغيِّر فيه يجب أنْ يكون عددًا صحيحًا غيرَ سالب، والأُسس في هذا الاقتران ليست أعدادًا صحيحةً.
  - في رأيكم، ما اسم هذا الاقتران؟ ستختلف إجابات الطلبة.
  - كيف يُمكِن إيجاد سرعة الأسد بعد 4 ثوانٍ؟ بإيجاد اقتران السرعة عن طريق اشتقاق اقتران الموقع، وتعويض الزمن المطلوب.
  - كيف يُمكِن إيجاد مشتقة هذا الاقتران؟
- أُخبِر الطلبة أنَّهم سيتعرَّفون إجابة السؤال السابق في هذا الدرس.
- أُعزِّز الإجابات الصحيحة.

3 التدريس

مثال 1

- أرسم على اللوح منحنى اقتران، ثم أُحدِّد عليه النقطة P، والنقاط: Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 (يُمكِنني الاستعانة بالشكل الوارد في كتاب الطالب). بعد ذلك أرسم القاطع $\overline{PQ_1}$، ثم أسأل الطلبة:
  - ماذا تُسمّى القطعة المستقيمة $\overline{Q_1P}$؟ القاطع.
  - إذا تحرَّكت النقطة Q_1 على منحنى الاقتران في اتجاه P لتتوقَّف عند النقطة Q_2، ففيمَ يختلف ميل القاطع $\overline{PQ_2}$ عن ميل القاطع $\overline{PQ_1}$؟ ميل القاطع $\overline{PQ_2}$ أقل من ميل القاطع $\overline{PQ_1}$.
  - إذا تحرَّكت النقطة Q_1 على منحنى الاقتران في اتجاه P من Q_2 لتتوقَّف عند النقطة Q_3، ففيمَ يختلف ميل القاطع $\overline{PQ_3}$ عن ميل القاطع $\overline{PQ_2}$؟ ميل القاطع $\overline{PQ_3}$ أقل من ميل القاطع $\overline{PQ_2}$.
  - إذا تحرَّكت النقطة Q_1 على منحنى الاقتران في اتجاه P من Q_3 لتتوقَّف عند النقطة Q_4، ففيمَ يختلف ميل القاطع $\overline{PQ_4}$ عن ميل القاطع $\overline{PQ_3}$؟ ميل القاطع $\overline{PQ_4}$ أقل من ميل القاطع $\overline{PQ_3}$.
  - في رأيكم، إذا استمرَّت النقطة Q_1 في الحركة بحيث تقترب شيئًا فشيئًا من النقطة P، فماذا سيحدث؟ ستختلف إجابات الطلبة.
- أُوضِّح للطلبة أنَّ اقتراب النقطة Q_1 شيئًا فشيئًا من النقطة P سيجعل القاطع مماسًّا لمنحنى الاقتران عند النقطة P، وسيصغر ميل القاطع شيئًا فشيئًا ليساوي في نهاية الحركة ميل المماس عند النقطة P.
- أرسم على اللوح الشكل الآتي الذي يُمثِّل جزءًا من منحنى الاقتران: $y = 3x^2$.

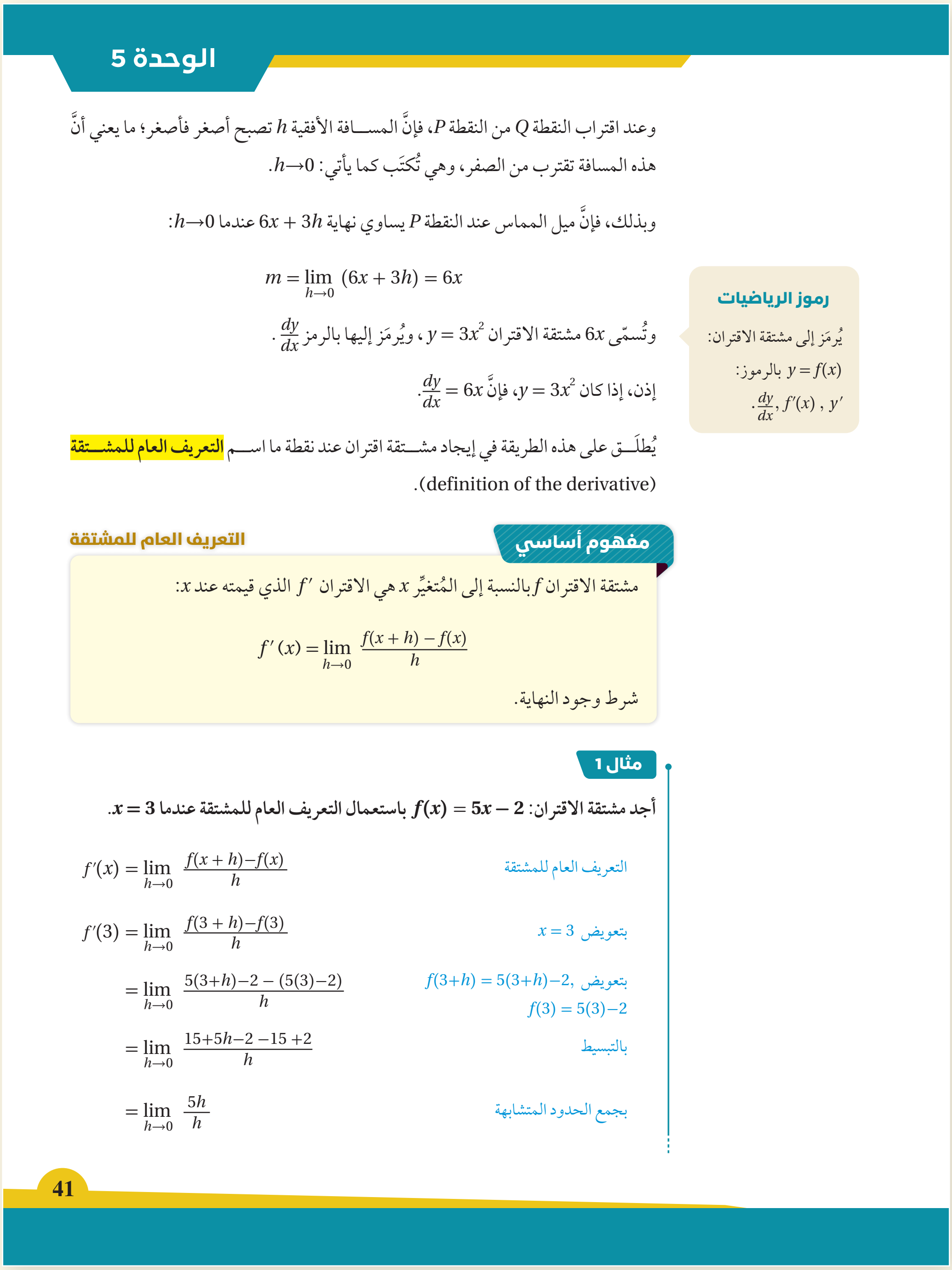


- أطلب إلى الطلبة تأمُّل الشكل، ثم أسألهم:
  - إذا كانت النقطة Q تبعد مسافة أفقية مقدارها h عن النقطة P، فما إحداثيا النقطة Q بدلالة h؟ $(x + h, 3(x + h)^2)$
  - ما ميل القاطع $\overline{QP}$ باستعمال إحداثيات النقطة Q والنقطة P؟

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3(x+h)^2 - 3x^2}{(x+h)-x}$$

  - ما أبسط صورة لميل القاطع؟ (أمنح الطلبة دقيقتين لتبسيط المقدار في دفاترهم). $m = 6x + 3h$
- أكتب على اللوح ميل القاطع في أبسط صورة، ثم أُوضِّح للطلبة أنَّ المسافة الأفقية h تصغر تدريجيًّا عند اقتراب النقطة Q من النقطة P، بحيث تقترب هذه المسافة من الصفر، وبذلك يقترب ميل القاطع $\overline{QP}$ تدريجيًّا من ميل المماس عند النقطة P، ليصبح في النهاية مساويًا لميل المماس عند تلك النقطة، وأُبيِّن لهم أنَّه يُمكِن استعمال النهايات للتعبير عن ذلك، ثم أكتب على اللوح التعبير الآتي:

$$m = \lim_{h \to 0} (6x + 3h)$$



الوحدة 5

وعند اقتراب النقطة Q من النقطة P، فإنَّ المســـافة الأفقية h تصبح أصغر فأصغر؛ ما يعني أنَّ هذه المسافة تقترب من الصفر، وهي تُكتَب كما يأتي: $h \to 0$.

وبذلك، فإنَّ ميل المماس عند النقطة P يساوي نهاية $6x + 3h$ عندما $h \to 0$:

$$m = \lim_{h \to 0} (6x + 3h) = 6x$$

وتُسمّى $6x$ مشتقة الاقتران $y = 3x^2$، ويُرمَز إليها بالرمز $\frac{dy}{dx}$.

إذن، إذا كان $y = 3x^2$، فإنَّ $\frac{dy}{dx} = 6x$.

يُطلَــق على هذه الطريقة في إيجاد مشــتقة اقتران عند نقطة ما اســم **التعريف العام للمشــتقة** (definition of the derivative).

رموز الرياضيات

يُرمَز إلى مشتقة الاقتران: $y = f(x)$ بالرموز: $\frac{dy}{dx}, f'(x) , y'$.

مفهوم أساسي **التعريف العام للمشتقة**

مشتقة الاقتران f بالنسبة إلى المُتغيِّر x هي الاقتران f' الذي قيمته عند x:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

شرط وجود النهاية.

مثال 1

أجد مشتقة الاقتران: $f(x) = 5x - 2$ باستعمال التعريف العام للمشتقة عندما $x = 3$.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$
التعريف العام للمشتقة

$$f'(3) = \lim_{h \to 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h}$$
بتعويض $x = 3$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{5(3+h)-2 - (5(3)-2)}{h}$$
بتعويض $f(3+h) = 5(3+h)-2$, $f(3) = 5(3)-2$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{15+5h-2 -15 +2}{h}$$
بالتبسيط

$$= \lim_{h \to 0} \frac{5h}{h}$$
بجمع الحدود المتشابهة

41

التقويم التكويني:

أطلب إلى الطلبة حل التدريب الوارد في بند (**أتحقَّق من فهمي**) بعد كل مثال، ثم أختار بعض الإجابات التي تحوي أخطاء مفاهيمية لمناقشتها على اللوح، ولا أذكر اسم مَنْ أخطأ في الإجابة؛ تجنُّبًا لإحراجه.

- أطلب إلى أحد الطلبة إيجاد قيمة $\left(\lim_{h \to 0} (6x + 3h)\right)$ على اللوح للحصول على الناتج $6x$
- أَلفِت انتباه الطلبة إلى أنَّ الناتج $(6x)$ يساوي مشتقة الاقتران: $y = 3x^2$، وأُبيِّن لهم –استنادًا إلى ما سبق– أنَّ مشتقة الاقتران عند نقطة ما تساوي ميل المماس عند تلك النقطة.
- أُبيِّن للطلبة أنَّ طريقة إيجاد مشتقة الاقتران عند نقطة ما باستعمال النهايات تُسمّى التعريف العام للمشتقة، ثم أُقدِّم لهم التعريف العام للمشتقة بالرموز مستعينًا بصندوق (**مفهوم أساسي**) الوارد في كتاب الطالب.
- أُناقِش الطلبة في حل المثال 1 على اللوح، مُؤكِّدًا لهم ضرورة تبرير كل خطوة من خطوات الحل.
- إنْ لزم الأمر، أُناقِش الطلبة في مزيد من الأمثلة؛ للتحقُّق من إتقانهم مهارة إيجاد مشتقة اقتران عند نقطة باستعمال التعريف العام.

إرشادات:

- أَلفِت انتباه الطلبة إلى أنَّ مشتقة الاقتران عند نقطة ما تكون موجودة شرط وجود النهاية.
- أُوضِّح للطلبة وجود رموز مختلفة للتعبير عن المشتقة، ثم أُقدِّم لهم الرموز الواردة في صندوق (**رموز رياضية**) الموجود في كتاب الطالب.

أخطاء شائعة: قد يُخطِئ بعض الطلبة بعدم توزيع الإشارة السالبة على المقدار الذي يلي عملية الطرح في التعريف العام للمشتقة أثناء عملية التبسيط؛ لذا أُنبِّههم دائمًا أنَّ التوزيع ضروري للحصول على إجابة صحيحة، ويُمكِنني علاج هذا الخطأ بتقديم أمثلة بسيطة على ذلك.

تعزيز اللغة ودعمها:

أُكرِّر المصطلحات الرياضية الوارد ذكرها في الدرس بكلٍّ من اللغة العربية واللغة الإنجليزية، مُحفِّزًا الطلبة على استعمالها.

مثال 2

- أُوضِّح للطلبة إمكانية استعمال التعريف العام للمشتقة في إيجاد مشتقة أيِّ اقتران.
- أُناقِش الطلبة في حل المثال 2 على اللوح، مُؤكِّدًا لهم ضرورة تبرير كل خطوة من خطوات الحل.
- إنْ لزم الأمر، أُناقِش الطلبة في مزيد من الأمثلة؛ للتحقُّق من إتقانهم مهارة إيجاد مشتقة اقتران عند نقطة ما باستعمال التعريف العام.

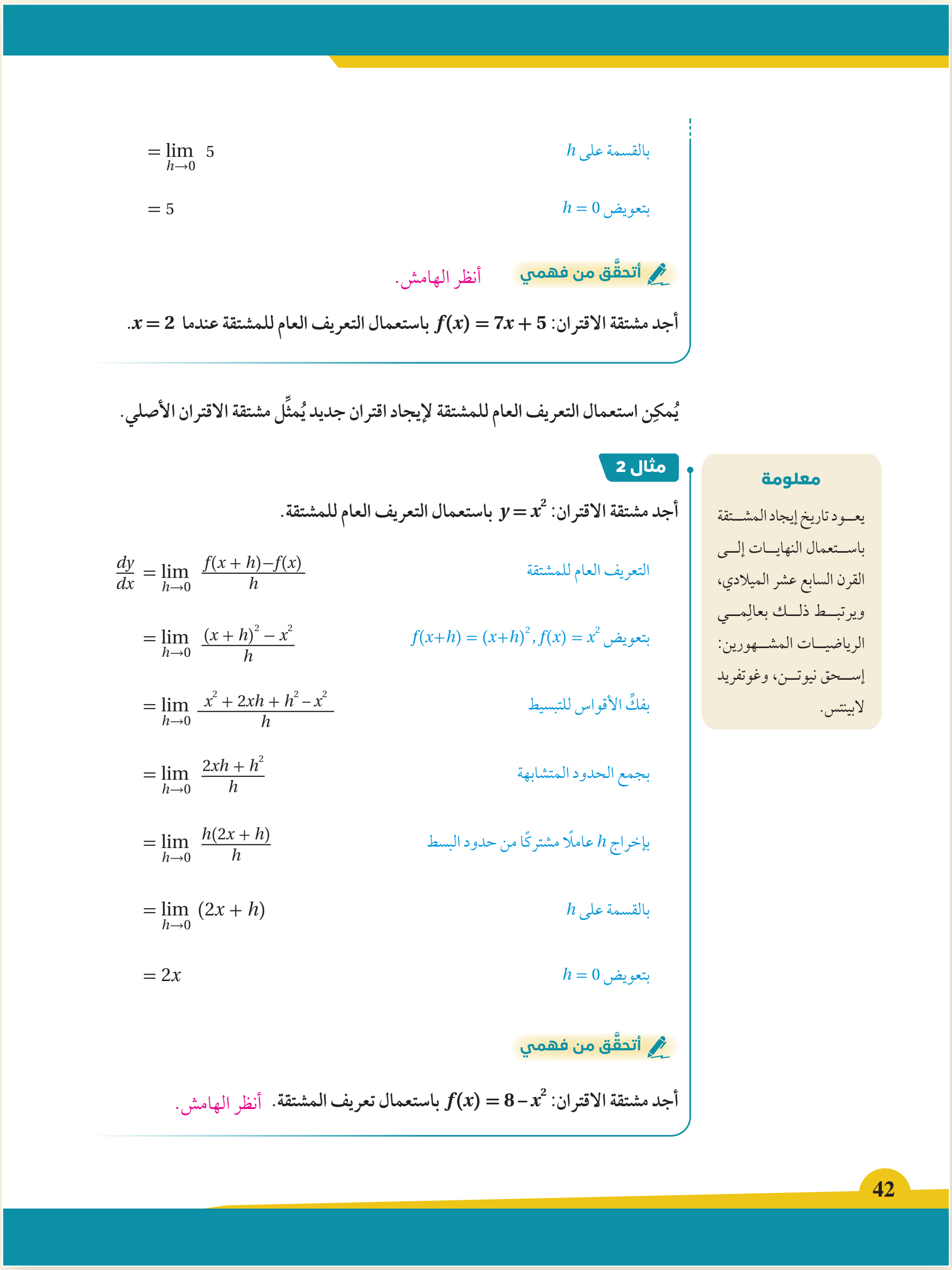
••• توسعة:

أطلب إلى الطلبة البحث في شبكة الإنترنت عن تاريخ نشأة المشتقات، وأبرز العلماء المُؤسِّسين لهذا العلم، وكتابة فقرة قصيرة عن ذلك.

مثال إضافي:

أجد مشتقة كلٍّ من الاقترانات الآتية باستعمال التعريف العام للمشتقة:

1	$f(x) = 4$	$f'(x) = 0$
2	$f(x) = 1 - 5x$	$f'(x) = -5$
3	$f(x) = x^2 - 13$	$f'(x) = 2x$
4	$f(x) = x^3 + x$	$f'(x) = 3x^2 + 1$



بالقسمة على h	$= \lim\limits_{h\to 0} 5$
بتعويض $h = 0$	$= 5$

أتحقَّق من فهمي أنظر الهامش.

أجد مشتقة الاقتران: $f(x) = 7x + 5$ باستعمال التعريف العام للمشتقة عندما $x = 2$.

يُمكِن استعمال التعريف العام للمشتقة لإيجاد اقتران جديد يُمثِّل مشتقة الاقتران الأصلي.

معلومة

يعود تاريخ إيجاد المشتقة باستعمال النهايات إلى القرن السابع عشر الميلادي، ويرتبط ذلك بعالِمي الرياضيات المشهورين: إسحق نيوتن، وغوتفريد لايبنتس.

مثال 2

أجد مشتقة الاقتران: $y = x^2$ باستعمال التعريف العام للمشتقة.

التعريف العام للمشتقة	$\frac{dy}{dx} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$
بتعويض $f(x+h) = (x+h)^2, f(x) = x^2$	$= \lim\limits_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h}$
بفكِّ الأقواس للتبسيط	$= \lim\limits_{h\to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h}$
بجمع الحدود المتشابهة	$= \lim\limits_{h\to 0} \frac{2xh + h^2}{h}$
بإخراج h عاملًا مشتركًا من حدود البسط	$= \lim\limits_{h\to 0} \frac{h(2x+h)}{h}$
بالقسمة على h	$= \lim\limits_{h\to 0} (2x+h)$
بتعويض $h = 0$	$= 2x$

أتحقَّق من فهمي

أجد مشتقة الاقتران: $f(x) = 8 - x^2$ باستعمال تعريف المشتقة. أنظر الهامش.

42

إجابة الأسئلة في بند (أتحقَّق من فهمي 1):

$$f(x) = 7x + 5, x = 2$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$f'(2) = \lim_{h\to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{7(2+h) + 5 - 19}{h}$$

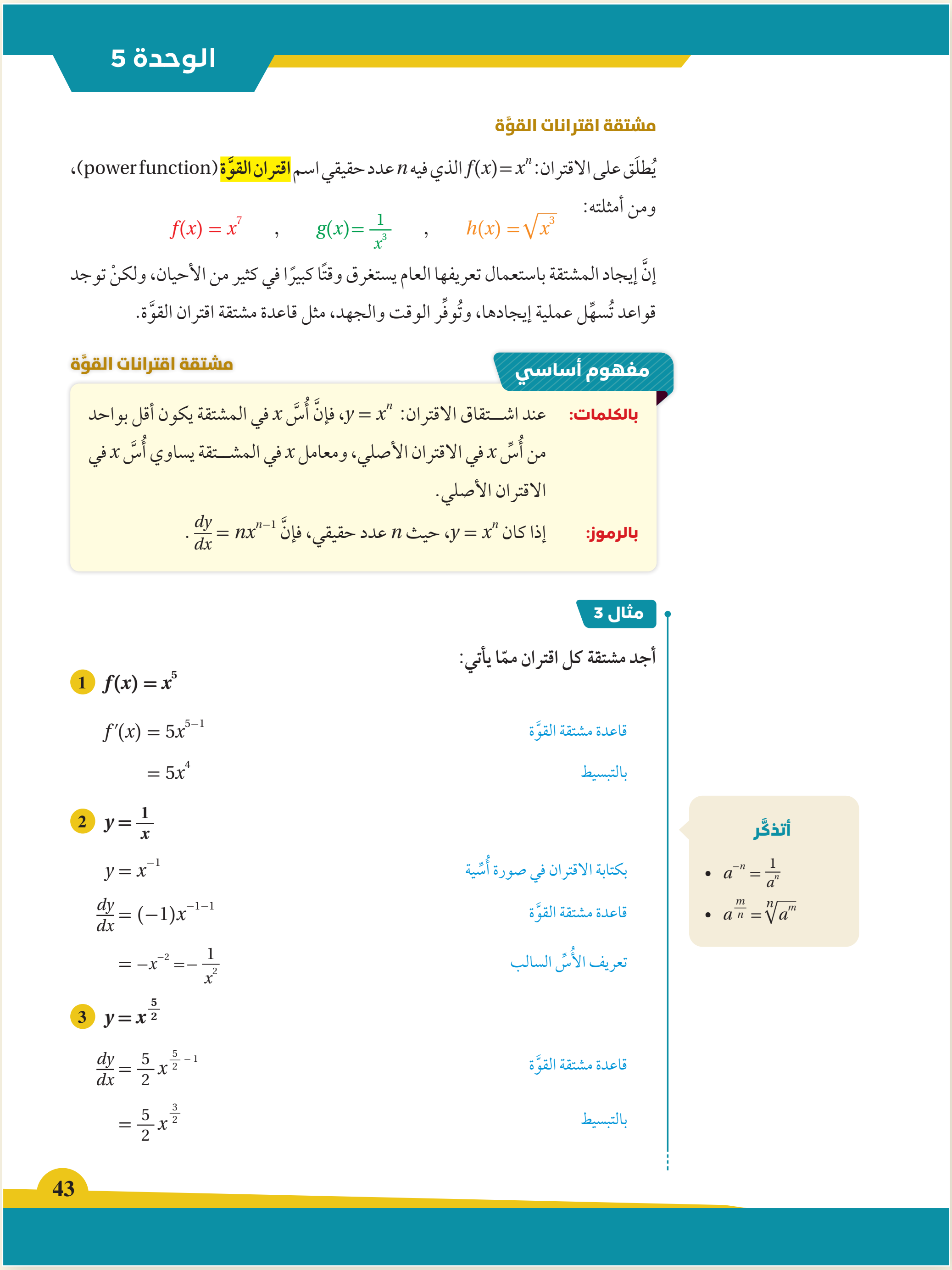
$$= \lim_{h\to 0} \frac{14 + 7h + 5 - 19}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{7h}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{7h}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} 7$$

$$= 7$$



الوحدة 5

مشتقة اقترانات القوَّة

يُطلَق على الاقتران: $f(x)=x^n$ الذي فيه n عدد حقيقي اسم **اقتران القوَّة** (power function)،

ومن أمثلته:

$$f(x)=x^7 \quad , \quad g(x)=\frac{1}{x^3} \quad , \quad h(x)=\sqrt{x^3}$$

إنَّ إيجاد المشتقة باستعمال تعريفها العام يستغرق وقتًا كبيرًا في كثير من الأحيان، ولكنْ توجد قواعد تُسهِّل عملية إيجادها، وتُوفِّر الوقت والجهد، مثل قاعدة مشتقة اقتران القوَّة.

مفهوم أساسي **مشتقة اقترانات القوَّة**

بالكلمات: عند اشـــتقاق الاقتران: $y = x^n$، فإنَّ أُسَّ x في المشتقة يكون أقل بواحد من أُسِّ x في الاقتران الأصلي، ومعامل x في المشـــتقة يساوي أُسَّ x في الاقتران الأصلي.

بالرموز: إذا كان $y = x^n$، حيث n عدد حقيقي، فإنَّ $\frac{dy}{dx} = nx^{n-1}$.

مثال 3

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

1) $f(x) = x^5$

$f'(x) = 5x^{5-1}$ قاعدة مشتقة القوَّة

$= 5x^4$ بالتبسيط

2) $y = \frac{1}{x}$

$y = x^{-1}$ بكتابة الاقتران في صورة أُسِّية

$\frac{dy}{dx} = (-1)x^{-1-1}$ قاعدة مشتقة القوَّة

$= -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$ تعريف الأُسِّ السالب

3) $y = x^{\frac{5}{2}}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{5}{2}x^{\frac{5}{2}-1}$ قاعدة مشتقة القوَّة

$= \frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}}$ بالتبسيط

أتذكَّر

- $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
- $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

43

إجابة الأسئلة في بند (أتحقَّق من فهمي 2):

$$f(x) = 8 - x^2$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{8-(x+h)^2 - (8-x^2)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{8-(x^2 +2xh +h^2) - 8+x^2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-2xh - h^2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-h\,(2x + h)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} -(2x + h)$$

$$= -2x$$

مثال 3

- أكتب على اللوح الاقتران: $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$، ثم أسأل الطلبة:
  - هل الاقتران $f(x)$ كثير الحدود؟ لماذا؟ لا؛ لأنَّ أُسَّ المُتغيِّر فيه يجب أنْ يكون عددًا صحيحًا غيرَ سالب، وأُسُّ المُتغيِّر في هذا الاقتران جاء في صورة كسر.
  - في رأيكم، ما اسم هذا الاقتران؟ ستختلف إجابات الطلبة.
- أُوضِّح للطلبة أنَّ الاقتران $f(x)$ يُسمّى اقتران القوَّة، ثم أُبيِّن لهم المقصود باقترانات القوَّة، وأُقدِّم لهم أمثلة عليها.
- أُقدِّم للطلبة قاعدة إيجاد مشتقة اقترانات القوَّة بالكلمات والرموز كما ورد في صندوق **(مفهوم أساسي)** الموجود في كتاب الطالب.
- أُناقِش الطلبة في حل المثال 3 على اللوح، مُؤكِّدًا لهم ضرورة تبرير كل خطوة من خطوات الحل.
- إنْ لزم الأمر، أُناقِش الطلبة في مزيد من الأمثلة؛ للتحقُّق من إتقانهم هذه المهارة.

إرشادات:

- أَلفِت انتباه الطلبة إلى إعادة كتابة الاقتران بالصورة التي كان عليها قبل عملية الاشتقاق. فمثلًا، إذا كان الاقتران مكتوبًا بالصورة الجذرية قبل الاشتقاق، فيُفضَّل إعادة كتابته بالصورة نفسها بعد الانتهاء من الاشتقاق.
- أُذكِّر الطلبة بقاعدة الأُسِّ السالب، وقاعدة تحويل الأُسس النسبية إلى جذور؛ لِما لهاتين القاعدتين من أهمية في حل الفرع 2 والفرع 4 من المثال 3.

تنويع التعليم:

قد يواجه بعض الطلبة من ذوي المستوى دون المتوسط صعوبة في الحل عند خطوة (طرح العدد الصحيح من الكسر) في الفرع 3 من المثال 3؛ لذا أُبيِّن لهم خطوات عملية الطرح بطريقة تفصيلية، ويُمكِنني استعمال النماذج أو الرسوم في ذلك.

مثال إضافي:

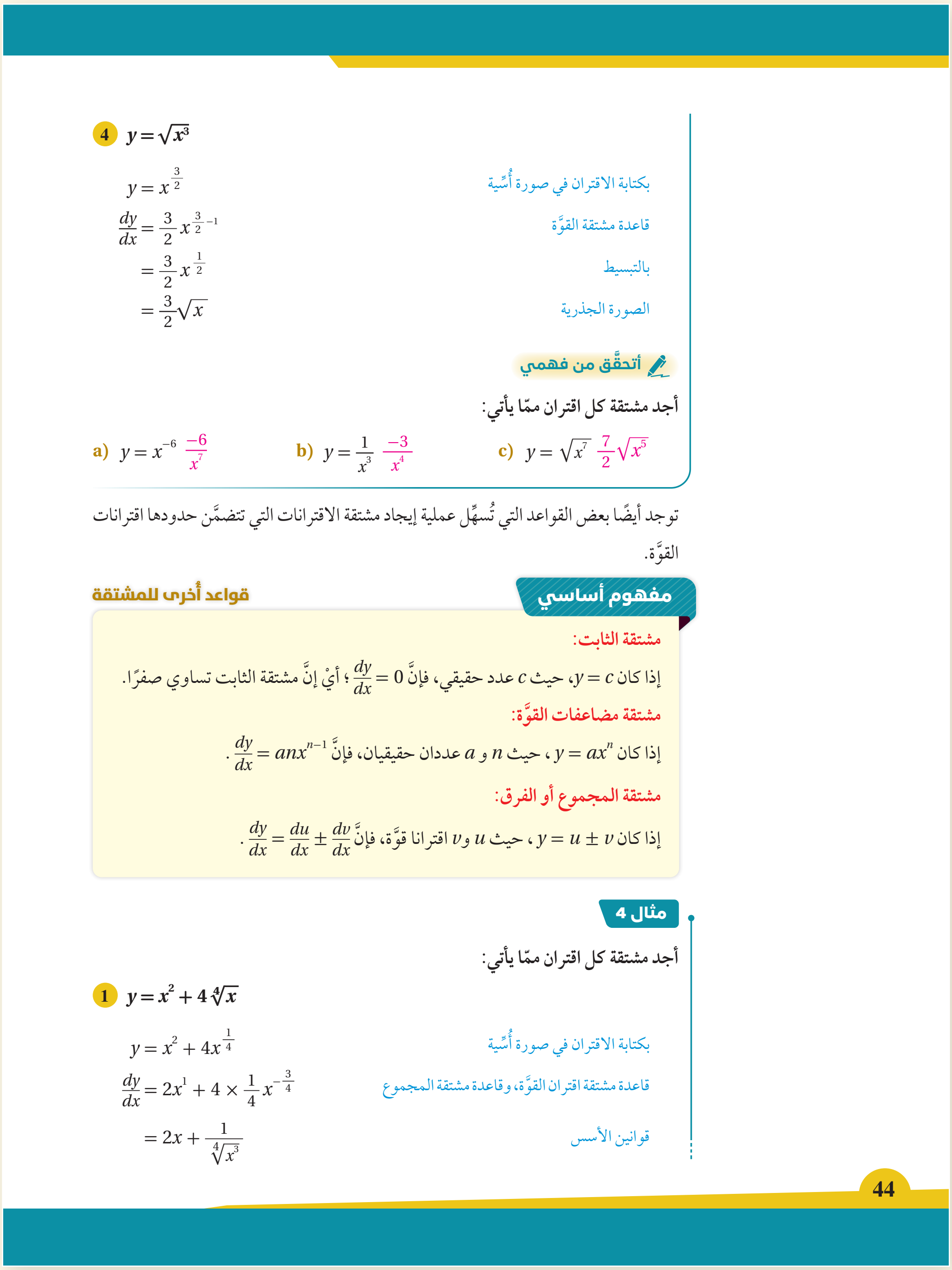
أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

1. $f(x) = x^{-4}$ $\quad f'(x) = -4x^{-5}$
2. $f(x) = \sqrt[7]{x}$ $\quad f'(x) = \dfrac{1}{7\sqrt[7]{x^6}}$
3. $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ $\quad f'(x) = -\dfrac{2}{x^3}$

مثال 4

- أكتب على اللوح الاقتران: $f(x) = x^{\frac{3}{2}} + 4x + 7$، ثم أسأل الطلبة:
  - من كم اقترانًا يتكوَّن $f(x)$؟ 3
  - كيف يُمكِن إيجاد مشتقة $f(x)$؟ ستختلف إجابات الطلبة.
- أُوضِّح للطلبة أنَّه توجد قواعد تُسهِّل اشتقاق الاقترانات التي تتضمَّن حدودها اقترانات قوَّة، مثل: قاعدة مشتقة الثابت، وقاعدة مشتقة مضاعفات القوَّة، وقاعدة مشتقة المجموع أو الفرق. بعد ذلك أُقدِّم للطلبة هذه القواعد الثلاث بالكلمات والرموز كما ورد في صندوق (**مفهوم أساسي**) الموجود في كتاب الطالب.
- أُناقِش الطلبة في حل المثال 4 على اللوح، مُؤكِّدًا لهم ضرورة تبرير كل خطوة من خطوات الحل.

✓ إرشاد: أُبيِّن للطلبة أهمية تجهيز الاقتران قبل البدء بعملية الاشتقاق، مثل: كتابة الاقتران بالصورة الأُسِّية، وتوزيع البسط على المقام، واستعمال قاعدة الأُسِّ السالب.



4) $y=\sqrt{x^3}$

$y = x^{\frac{3}{2}}$ بكتابة الاقتران في صورة أُسِّية

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-1}$ قاعدة مشتقة القوَّة

$= \dfrac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$ بالتبسيط

$= \dfrac{3}{2}\sqrt{x}$ الصورة الجذرية

أتحقَّق من فهمي

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

a) $y = x^{-6}$ $\quad \dfrac{-6}{x^7}$

b) $y = \dfrac{1}{x^3}$ $\quad \dfrac{-3}{x^4}$

c) $y = \sqrt{x^7}$ $\quad \dfrac{7}{2}\sqrt{x^5}$

توجد أيضًا بعض القواعد التي تُسهِّل عملية إيجاد مشتقة الاقترانات التي تتضمَّن حدودها اقترانات القوَّة.

مفهوم أساسي **قواعد أُخرى للمشتقة**

مشتقة الثابت:

إذا كان $y = c$، حيث c عدد حقيقي، فإنَّ $\dfrac{dy}{dx} = 0$ ؛ أيْ إنَّ مشتقة الثابت تساوي صفرًا.

مشتقة مضاعفات القوَّة:

إذا كان $y = ax^n$ ، حيث n و a عددان حقيقيان، فإنَّ $\dfrac{dy}{dx} = anx^{n-1}$.

مشتقة المجموع أو الفرق:

إذا كان $y = u \pm v$ ، حيث u و v اقترانا قوَّة، فإنَّ $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{du}{dx} \pm \dfrac{dv}{dx}$.

مثال 4

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

1) $y = x^2 + 4\sqrt[4]{x}$

$y = x^2 + 4x^{\frac{1}{4}}$ بكتابة الاقتران في صورة أُسِّية

$\dfrac{dy}{dx} = 2x^1 + 4 \times \dfrac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}}$ قاعدة مشتقة اقتران القوَّة، وقاعدة مشتقة المجموع

$= 2x + \dfrac{1}{\sqrt[4]{x^3}}$ قوانين الأسس

44

! تنبيه: قد يُخطِئ بعض الطلبة باشتقاق بعض الحدود في خطوة كتابة الاقتران بالصورة الأُسِّية ثم اشتقاقها مَرَّة أُخرى عند البدء بعملية الاشتقاق؛ لذا أُبيِّن لهم أهمية التسلسل في خطوات الحل.

مثال على الخطأ الشائع:

$$f(x) = 2x + \sqrt{x^3}$$
$$= 2 + x^{\frac{3}{2}}$$
$$f'(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$$

✗

الوحدة 5

② $y = \dfrac{3 - 8x}{x}$

بتوزيع البسط على المقام	$y = \dfrac{3}{x} - \dfrac{8x}{x}$
بكتابة الاقتران في صورة أُسِّية، والاختصار	$= 3x^{-1} - 8$
قواعد مشتقات الثابت، ومضاعفات القوَّة، والفرق	$\dfrac{dy}{dx} = (-3)x^{-2} - 0$
تعريف الأُسِّ السالب	$= -\dfrac{3}{x^2}$

أتحقَّق من فهمي

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

a) $y = \sqrt[4]{x^3} - \dfrac{6}{x^2}$ $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3}{4\sqrt[4]{x}} + \dfrac{12}{x^3}$

b) $y = \dfrac{x^6 - 4x^5 - 8x^2}{4x^2}$ $\dfrac{dy}{dx} = x^3 - 3x^2$

تعلَّمْتُ سابقًا أنَّ السرعة اللحظية لجسم يتحرَّك في مسار مستقيم تساوي مشتقة اقتران الموقع عند لحظة مُعيَّنة، والآن سأستعمل قواعد المشتقة التي تعرَّفْتُها في هذا الدرس لإيجاد السرعة اللحظية لأجسام تتحرَّك في مسار مستقيم، ويعطى موقعها في صورة اقترانات قوَّة.

رموز رياضية

يشير الرمز v إلى السرعة المتجهة التي تُسمّى اختصارًا السرعة في هذا الكتاب.

مثال 5

يُمثِّل الاقتران: $s(t) = 8t^{\frac{3}{2}} + t^2$ موقع جسم يتحرَّك في مسار مستقيم، حيث s الموقع بالأمتار، وt الزمن بالثواني. أجد سرعة الجسم بعد ثانية واحدة من بدء حركته.

السرعة هي مشتقة اقتران الموقع. وفي هذه الحالة، فإنَّ المطلوب هو إيجاد السرعة عندما $t = 1$.

اقتران السرعة	$v(t) = s'(t) = 12t^{\frac{1}{2}} + 2t$
بتعويض $t = 1$	$v(1) = 12(1)^{\frac{1}{2}} + 2(1)$
بالتبسيط	$= 14$

إذن، سرعة الجسم عندما $t = 1$ هي: 14 m/s

45

مثال 5

- أُذكِّر الطلبة بما تعلَّموه سابقًا عن اقتران الموقع لجسم يتحرَّك في مسار مستقيم، والسرعة اللحظية، والتسارع اللحظي، وإمكانية إيجاد السرعة اللحظية بسهولة عن طريق إيجاد مشتقة اقتران الموقع.
- أُبيِّن للطلبة أنَّ بعض اقترانات الموقع تتضمَّن اقترانات قوَّة؛ لذا يَلزم استعمال قواعد اشتقاق اقترانات القوَّة عند إيجاد السرعة.
- أُناقِش الطلبة في حل المثال 5 على اللوح.

مثال إضافي:

يُمثِّل الاقتران: $s(t) = t^2 - 12\sqrt[3]{t}$ موقع جسم يتحرَّك في مسار مستقيم، حيث s الموقع بالأمتار، و t الزمن بالثواني:

① أجد الاقتران الذي يُمثِّل سرعة الجسم.

$$v(t) = 2t - \frac{4}{\sqrt[3]{t^2}}$$

② أجد سرعة الجسم عندما $t = 8$.

$$v(8) = 15 \text{ m/s}$$

4 التدريب

أتدرَّب وأحل المسائل

- أُوجِّه الطلبة إلى بند (**أتدرَّب وأحل المسائل**)، ثم أطلب إليهم حل المسائل (16 – 1) ضمن مجموعات ثنائية داخل الغرفة الصفية؛ فهذه المسائل تحديدًا ترتبط ارتباطًا مباشرًا بأمثلة الدرس، وهي تُستعمَل خاصةً لتدريب الطلبة على المفاهيم نفسها، بصرف النظر عمّا إذا كانت الأسئلة فردية أم زوجية.
- إذا واجه الطلبة صعوبة في حل أيَّة مسألة، فإنَّني أختار أحد الطلبة مِمَّنْ تمكَّن/ تمكَّنت من حل المسألة؛ لمناقشة استراتيجيته/ استراتيجيتها في حل المسألة على اللوح، مُحفِّزًا الطلبة على طرح أيِّ تساؤل عن خطوات الحل المُقدَّمة من الزميل/ الزميلة.

تنويع التعليم:

إذا واجه الطلبة ذوو المستوى دون المتوسط صعوبة في حل أسئلة بند (**أتدرَّب وأحل المسائل**)، فإنَّني أضع كُلًّا منهم مع طالب آخر/ طالبة أُخرى من ذوي المستوى المتوسط أو مع أحد الطلبة المُتميِّزين؛ ليتشاركا في حل الأسئلة.

مهارات التفكير العليا

- أُوجِّه الطلبة إلى بند (**مهارات التفكير العليا**)، ثم أطلب إليهم حل المسائل (23 – 21).
- أرصد أيَّة أفكار غير تقليدية من الطلبة، ثم أطلب إلى هؤلاء الطلبة كتابة هذه الأفكار على اللوح.

✓ إرشادات:

- في السؤال 22 (**تحدٍّ**)، أُوجِّه الطلبة إلى إيجاد قِيَم t التي تكون عندها السرعة صفرًا، تمهيدًا لإيجاد موقع الجسم عند تلك القِيَم.
- في السؤال 23 (**تحدٍّ**)، أُذكِّر الطلبة بأنَّ ميل المستقيم الأفقي يساوي صفرًا.

أتحقَّق من فهمي

يُمثِّل الاقتران: $s(t) = t^3+\sqrt{t}$ موقع جسم يتحرَّك في مسار مستقيم بالأمتار، حيث t الزمن بالثواني. أجد سرعة الجسم بعد 4 ثوانٍ من بدء حركته.

$v(t) = 3t^2 + \frac{1}{2\sqrt{t}}$

$v(4) = 48.25 \text{ m/s}$

أتدرَّب وأحُلُّ المسائل

أجد مشتقة كلٍّ من الاقترانات الآتية عند قيمة x المعطاة إزاء كلٍّ منها باستعمال التعريف العام للمشتقة:

① $f(x) = 4x^2, \quad x = 1$ أنظر الهامش.

② $f(x) = 1 - x^2, \quad x = -2$ أنظر الهامش.

③ $f(x) = x^2 + x, \quad x = 2$ أنظر ملحق الإجابات.

④ $f(x) = x^2 - 2x + 3, \quad x = -1$ أنظر ملحق الإجابات.

أجد مشتقة كلٍّ من الاقترانات الآتية باستعمال تعريف المشتقة: (8 – 5): أنظر ملحق الإجابات.

⑤ $f(x) = 4x + 1$

⑥ $y = 1 - x$

⑦ $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 1$

⑧ $y = \frac{2x+4}{6}$

أستعمل القواعد لإيجاد $\frac{dy}{dx}$ لكلٍّ ممّا يأتي:

⑨ $y = \frac{1}{3}x + 1 \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{3}$

⑩ $y = 8 - 3x \quad \frac{dy}{dx} = -3$

⑪ $y = \frac{1}{2}x^2 + 5x + 7 \quad \frac{dy}{dx} = x + 5$

⑫ $y = \frac{2x^3 + 4x^2 + x}{4x} \quad \frac{dy}{dx} = x + 1$

⑬ $y = \sqrt{8} + 3\sqrt{x} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{3}{2\sqrt{x}}$

⑭ $y = 5\sqrt[3]{x^2} + \frac{4}{x^3} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{10}{3\sqrt[3]{x}} - \frac{12}{x^4}$

⑮ $y = \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{2}{x^2} + 4 \quad \frac{dy}{dx} = \frac{-1}{\sqrt{x^3}} - \frac{4}{x^3}$

⑯ $y = \frac{\sqrt[5]{x^7} + 4x - 1}{2} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{7}{10}\sqrt[5]{x^2} + 2$

46

إجابة الأسئلة في بند (أتدرَّب وأحل المسائل):

1)
$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{4(1+h)^2 - 4}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{4(1+2h+h^2) - 4}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{4 + 8h + 4h^2 - 4}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{8h + 4h^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{h(8+4h)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} (8 + 4h) = 8 \end{aligned}$$

2)
$$\begin{aligned} f'(-2) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1-(-2+h)^2 - (-3)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1-(4-4h+h^2) + 3}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{-3 + 4h - h^2 + 3}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{4h - h^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{h(4-h)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} (4 - h) = 4 \end{aligned}$$

الوحدة 5

17 يُمثِّل الاقتران: $s(t) = 5t^{\frac{3}{2}} - 1.5t^2, 0 \le t \le 5$ موقع عدّاء يركض في مسار مستقيم خلال 5 ثوانٍ، حيث s موقع العدّاء بالأمتار، و t الزمن بالثواني. أجد سرعة العدّاء بعد 3 ثوانٍ من بدء حركته.

$v(t) = 7.5\sqrt{t} - 3t$

$v(3) \approx 4 \text{ m/s}$

يمثل الاقتران: $s(t) = 10\sqrt{t} + t + \pi$، موقع جسم يتحرك في مسار مستقيم، حيث s الموقع بالأمتار، و t الزمن بالثواني.

18 أجد الاقتران الذي يمثل سرعة الجسم. $v(t) = \frac{5}{\sqrt{t}} + 1$

19 أجد سرعة الجسم عندما $t = 1$، وعندما $t = 2$.

$v(1) = 6 \text{ m/s}$

$v(2) \approx 4.5 \text{ m/s}$

20 أحُلّ المسألة الواردة في بند (مسألة اليوم).

$v(t) = \frac{35}{2} t^{\frac{3}{2}} - \frac{7}{2} t^{\frac{5}{2}}$

$v(4) = 28 \text{ m/s}$

مهارات التفكير العليا

21 **تبرير:** قال طارق إنَّه استعمل الصيغة: $f'(x) = \lim\limits_{t \to x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x}$ لإيجاد المشتقة اعتمادًا على التعريف العام للاقتران f، وإنَّ الناتج لن يتغيَّر في حال استعمل الصيغة:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

أُثبِت صحة ما قاله طارق، مُبرِّرًا إجابتي. أنظر الهامش.

22 **تحدٍّ:** يُمثِّل الاقتران: $s(t) = 100 - 5t^2$، موقع جسم يتحرَّك في مسار مستقيم، حيث s الموقع بالأمتار، و t الزمن بالثواني. ما موقع الجسم عندما تكون سرعته صفرًا؟

$v(t) = -10t$

$0 = -10t$

$t = 0$

$s(0) = 100 - 5(0) = 100 \text{ m}$

23 **تحدٍّ:** أجد النقاط على منحنى الاقتران: $f(x) = x^3 - 3x^2$ إذا كان مماس المنحنى عندها أفقيًّا.

$f'(x) = 3x^2 - 6x = 0 \Rightarrow 3x(x-2) = 0 \Rightarrow x = 0 , x = 2$

إذن: المماس أفقي عند $(0, f(0)) = (0, 0)$، وعند $(2, f(2)) = (2, -4)$.

47

إجابة الأسئلة في بند (أتدرَّب وأحل المسائل):

$$21) \quad f'(x) = \lim_{t \to x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x}$$

أفترض أنَّ $t = x + h$

إذن: $h = t - x$

$$t \to x \Rightarrow h \to 0$$

بالتعويض في صيغة تعريف المشتقة أعلاه، فإنَّ:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

الواجب المنزلي:

أستعين بالجدول الآتي لتحديد الواجب المنزلي للطلبة بحسب مستوياتهم:

المستويات	الأسئلة
دون المتوسط	كتاب الطالب: (19 – 17) كتاب التمارين: (12 – 7) ,2 ,1
ضمن المتوسط	كتاب الطالب: (21 – 18) كتاب التمارين: (14 – 11) ,4 ,3
فوق المتوسط	كتاب الطالب: (23 – 20) كتاب التمارين: (17 – 15) ,6 ,5

5 الإثراء

- أطلب إلى الطلبة حل السؤال الآتي بوصفه إثراءً لهم:

◄ إذا كان: $f(x) = 2x + \frac{8}{x}$، فأجد ميل المماس عند نقطة (نقاط) تقاطع مع المستقيم: $y = 10$.

$m = -6, m = 1.5$

6 الختام

- أمنح الطلبة دقائق معدودة لكتابة فقرة عمّا تعلَّموه في هذا الدرس، ثم أطلب إلى بعضهم قراءة الفقرات التي كتبوها.
- أتحقَّق من فهم الطلبة موضوع الدرس، بطرح السؤال الآتي عليهم:

◄ أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

1 $f(x) = 4 - \frac{1}{x^5}$ $\quad f'(x) = \frac{5}{x^6}$

2 $f(x) = 4\sqrt{x} - \frac{6}{x}$ $\quad f'(x) = \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{6}{x^2}$

3 $f(x) = x^8 - x^{-8}$ $\quad f'(x) = 8x^7 + 8x^{-9}$

الدرس

3

نتاجات الدرس:

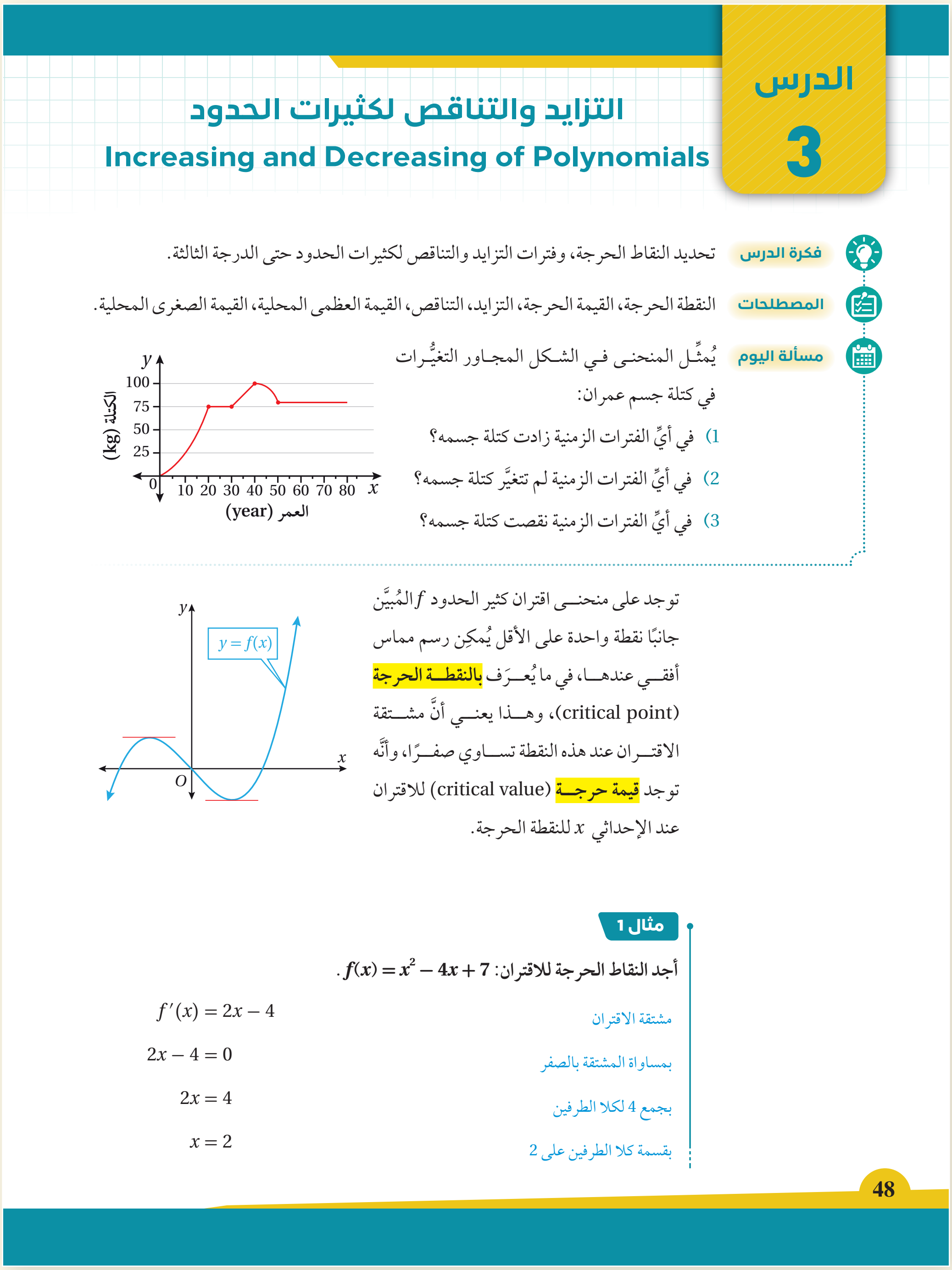
- تحديد النقاط الحرجة لكثيرات الحدود.
- إيجاد القِيَم العظمى والقِيَم الصغرى المحلية لكثيرات الحدود باستعمال المشتقة.
- تحديد فترات التزايد والتناقص لكثيرات الحدود حتى الدرجة الثالثة.

نتاجات التعلُّم القبلي:

- حل المعادلات التربيعية.
- إيجاد مشتقة اقترانات كثيرات الحدود.
- تحديد النقاط الحرجة لكثيرات الحدود.
- إيجاد القِيَم العظمى والقِيَم الصغرى المحلية لكثيرات الحدود باستعمال المشتقة.

مراجعة التعلُّم القبلي:

- أُوجِّه الطلبة في بداية كل حصة إلى الفقرة (الفقرات) المُرتبطة بما سيُقدَّم من موضوعات الدرس في الحصة (إنْ وُجِدت) ضمن صفحات **(أستعد لدراسة الوحدة)** في كتاب التمارين، ثم أطلب إليهم حل تدريباتها داخل الغرفة الصفية بصورة فردية.
- أتجوَّل بين الطلبة؛ لمتابعتهم أثناء الحل، وتحديد نقاط ضعفهم، وأُوجِّههم إلى مراجعة المثال عندما يواجهون صعوبة في الحل.



الدرس 3

التزايد والتناقص لكثيرات الحدود

Increasing and Decreasing of Polynomials

فكرة الدرس تحديد النقاط الحرجة، وفترات التزايد والتناقص لكثيرات الحدود حتى الدرجة الثالثة.

المصطلحات النقطة الحرجة، القيمة الحرجة، التزايد، التناقص، القيمة العظمى المحلية، القيمة الصغرى المحلية.

مسألة اليوم يُمثِّل المنحنى في الشكل المجاور التغيُّرات في كتلة جسم عمران:

1) في أيِّ الفترات الزمنية زادت كتلة جسمه؟

2) في أيِّ الفترات الزمنية لم تتغيَّر كتلة جسمه؟

3) في أيِّ الفترات الزمنية نقصت كتلة جسمه؟

توجد على منحنى اقتران كثير الحدود f المُبيَّن جانبًا نقطة واحدة على الأقل يُمكِن رسم مماس أفقي عندها، في ما يُعرَف **بالنقطة الحرجة** (critical point)، وهذا يعني أنَّ مشتقة الاقتران عند هذه النقطة تساوي صفرًا، وأنَّه توجد **قيمة حرجة** (critical value) للاقتران عند الإحداثي x للنقطة الحرجة.

مثال 1

أجد النقاط الحرجة للاقتران: $f(x) = x^2 - 4x + 7$.

مشتقة الاقتران $f'(x) = 2x - 4$

بمساواة المشتقة بالصفر $2x - 4 = 0$

بجمع 4 لكلا الطرفين $2x = 4$

بقسمة كلا الطرفين على 2 $x = 2$

48

1 التهيئة

- أُوزِّع الطلبة إلى مجموعات ثنائية، ثم أُزوِّد كل مجموعة بورقة **المصادر 2: النقطة العظمى والنقطة الصغرى**.
- أطلب إلى أفراد المجموعات الإجابة عن الأسئلة الوارد ذكرها في ورقة المصادر.
- أُناقِش الطلبة في حل هذه الأسئلة ، وأطلب إليهم تبرير إجاباتهم.

2 الاستكشاف

- أُوجِّه الطلبة إلى قراءة المسألة الواردة في بند (**مسألة اليوم**)، ثم أسألهم:
  - كم بلغت كتلة جسم عمران عندما كان عمره 35 سنة؟ 77 kg
  - كيف تغيَّرت كتلة جسم عمران خلال حياته؟ زادت كتلة جسمه في بعض الأحيان، ونقصت أحيانًا أُخرى، واستقرَّت في غير ذلك من الأحيان.
  - في أيِّ الفترات الزمنية زادت كتلة جسم عمران؟ من عمر 0 سنة إلى عمر 20 سنة، ومن عمر 30 سنة إلى عمر 40 سنة.
  - في أيِّ الفترات الزمنية بقيت كتلة جسم عمران ثابتة؟ من عمر 20 سنة إلى عمر 30 سنة، ومن عمر 50 سنة إلى عمر 80 سنة.
  - في أيِّ الفترات الزمنية نقصت كتلة عمران؟ من عمر 40 سنة إلى عمر 50 سنة.
  - لماذا تناقصت كتلة جسم عمران؟ ستختلف إجابات الطلبة. من الإجابات المُحتمَلة: بسبب إصابته بمرض ما، أو رغبته في إنقاص كتلة جسمه باتباع نظام تغذية مُعيَّن.
- أُعزِّز الإجابات الصحيحة.

3 التدريس

مثال 1

- أرسم على اللوح منحنى الاقتران $f(x)$ الوارد ذكره في الصفحة 48 من كتاب الطالب؛ لكي أُوضِّح للطلبة مفهوم النقطة الحرجة، ثم أُوضِّح لهم مفهوم القيمة الحرجة.
- أُناقِش الطلبة في حل المثال 1 على اللوح، مُؤكِّدًا لهم ضرورة تبرير كل خطوة من خطوات الحل.
- إنْ لزم الأمر، أُناقِش الطلبة في مزيد من الأمثلة؛ للتحقُّق من إتقانهم مهارة إيجاد النقاط الحرجة لكثيرات الحدود باستعمال المشتقة.

✓ **إرشاد:** يُمكِن عرض التمثيل البياني للاقتران $f(x)$ في حال توافر جهاز العرض (Data Show).

ملاحظات المُعلِّم/ المُعلِّمة

إذن، توجد قيمة حرجة للاقتران f عندما $x = 2$.

أمّا النقطة الحرجة على منحنى الاقتران f فهي: $(2, f(2)) = (2, 3)$.

أتحقَّق من فهمي

أجد النقاط الحرجة لكل اقتران ممّا يأتي:

a) $f(x) = 6x^2 - 12x + 12$

b) $h(x) = \frac{2}{3}x^3 - 3x^2 + 4x + 3$

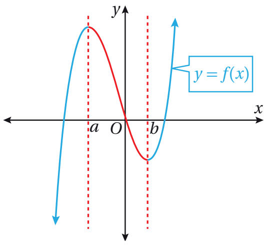
a) $(1, 6)$ **b)** $(1, \frac{14}{3}), (2, \frac{13}{3})$

أتذكَّر

إذا كان $a \times b = 0$، فإنَّ $a = 0$، أو $b = 0$، أو كُلًّا منهما يساوي صفرًا.

أتذكَّر

مجال الاقتران كثير الحدود هو جميع قِيَم x الحقيقية؛ أيِ الفترة $(-\infty, \infty)$.



بالنظر إلى منحنى اقتران كثير الحدود $y = f(x)$ المُبيَّن جانبًا، أُلاحِظ أنَّ قِيَم y تزداد في الفترة $-\infty < x < a$، والفترة $b < x < \infty$، وأنَّ منحنى الاقتران يرتفع من اليسار إلى اليمين في هاتين الفترتين؛ لذا يكون الاقتران f **متزايدًا** (increasing) فيهما.

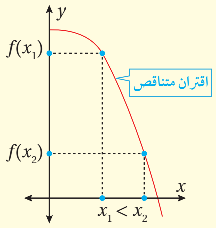
أُلاحِظ أيضًا أنَّ قِيَمَ y تقل في الفترة $a < x < b$، وأنَّ منحنى الاقتران ينخفض من اليسار إلى اليمين؛ لذا يكون الاقتران f **متناقصًا** (decreasing) في هذه الفترة.

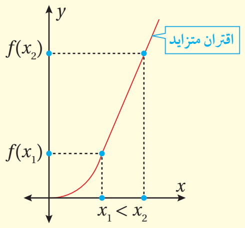
مفهوم أساسي

تزايد الاقتران وتناقصه

إذا كان $f(x)$ اقترانًا معرفًا على الفترة المفتوحة I، فيكون:

- الاقتران f متناقصًا في الفترة المفتوحة I إذا كان لكل $x_1 < x_2$ في الفترة $f(x_1) > f(x_2)$.
- الاقتران f متزايدًا في الفترة المفتوحة I إذا كان لكل $x_1 < x_2$ في الفترة $f(x_1) < f(x_2)$.





تنويع التعليم:

قد يواجه بعض الطلبة من ذوي المستوى دون المتوسط صعوبة في حل المعادلة الناتجة من مساواة المشتقة بالصفر؛ لذا أُقدِّم لهم أمثلة مختلفة على حل المعادلات الخطية والمعادلات التربيعية.

أخطاء شائعة:

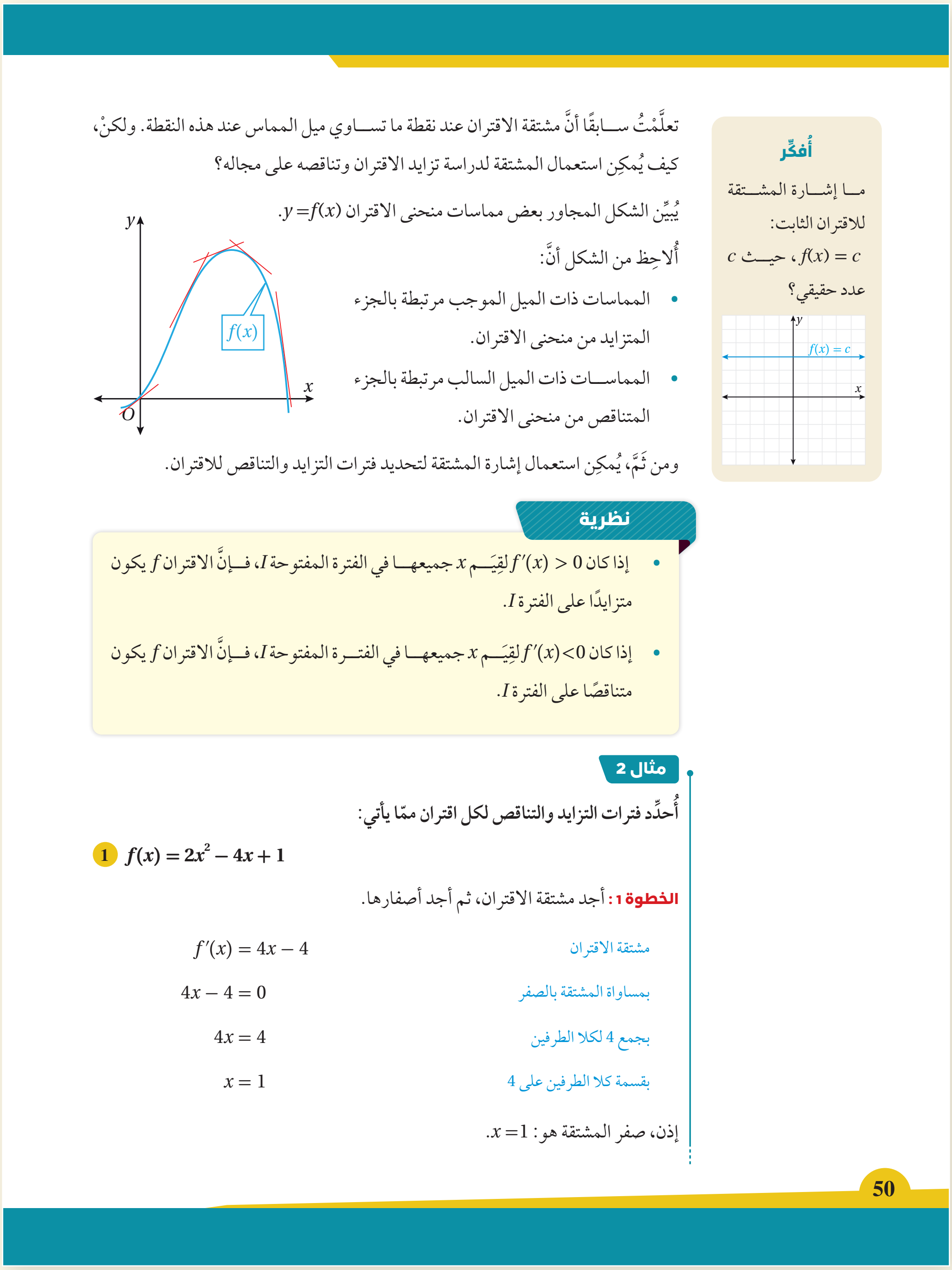
قد يُخطِئ بعض الطلبة عند تحديد النقاط الحرجة لاقتران ما، بالاكتفاء بذكر الإحداثي x فقط؛ لذا أُنبِّههم أنَّ مصطلح (النقطة الحرجة) يشير إلى النقطة (x, y)، وأنَّ مصطلح (القيمة الحرجة) يشير إلى الإحداثي x للنقطة الحرجة.

تعزيز اللغة ودعمها:

أُكرِّر المصطلحات الرياضية الوارد ذكرها في الدرس بكلٍّ من اللغة العربية واللغة الإنجليزية، مُحفِّزًا الطلبة على استعمالها.

التقويم التكويني:

أطلب إلى الطلبة حل التدريب الوارد في بند (**أتحقَّق من فهمي**) بعد كل مثال، ثم أختار بعض الإجابات التي تحوي أخطاء مفاهيمية لمناقشتها على اللوح، ولا أذكر اسم مَنْ أخطأ في الإجابة؛ تجنُّبًا لإحراجه.



أُفكِّر

مـا إشـارة المشـتقة للاقتران الثابت: $f(x) = c$، حيـث c عدد حقيقي؟

تعلَّمْتُ سابقًا أنَّ مشتقة الاقتران عند نقطة ما تساوي ميل المماس عند هذه النقطة. ولكنْ، كيف يُمكِن استعمال المشتقة لدراسة تزايد الاقتران وتناقصه على مجاله؟

يُبيِّن الشكل المجاور بعض مماسات منحنى الاقتران $y = f(x)$.

أُلاحِظ من الشكل أنَّ:

- المماسات ذات الميل الموجب مرتبطة بالجزء المتزايد من منحنى الاقتران.
- المماسات ذات الميل السالب مرتبطة بالجزء المتناقص من منحنى الاقتران.

ومن ثَمَّ، يُمكِن استعمال إشارة المشتقة لتحديد فترات التزايد والتناقص للاقتران.

نظرية

- إذا كان $f'(x) > 0$ لقِيَم x جميعها في الفترة المفتوحة I، فإنَّ الاقتران f يكون متزايدًا على الفترة I.
- إذا كان $f'(x)<0$ لقِيَم x جميعها في الفترة المفتوحة I، فإنَّ الاقتران f يكون متناقصًا على الفترة I.

مثال 2

أُحدِّد فترات التزايد والتناقص لكل اقتران ممّا يأتي:

① $f(x) = 2x^2 - 4x + 1$

الخطوة 1: أجد مشتقة الاقتران، ثم أجد أصفارها.

$f'(x) = 4x - 4$ مشتقة الاقتران

$4x - 4 = 0$ بمساواة المشتقة بالصفر

$4x = 4$ بجمع 4 لكلا الطرفين

$x = 1$ بقسمة كلا الطرفين على 4

إذن، صفر المشتقة هو: $x = 1$.

50

مثال 2

- أرسم على اللوح منحنى الاقتران $f(x)$ الوارد ذكره في الصفحة 49 من كتاب الطالب؛ لكي أُوضِّح للطلبة كيفية تزايد الاقتران وتناقصه.
- أُقدِّم للطلبة تعريف تزايد الاقتران وتناقصه مستعينًا بصندوق (**مفهوم أساسي**) الوارد في كتاب الطالب.
- أرسم على اللوح منحنى الاقتران $f(x)$ الوارد ذكره في الصفحة 50 من كتاب الطالب، ثم أسأل الطلبة:
  - هل ميل المماسّات المرسومة على الجزء المُتزايِد من منحنى الاقتران موجب أم سالب؟ موجب.
  - هل ميل المماسّات المرسومة على الجزء المُتناقِص من منحنى الاقتران موجب أم سالب؟ سالب.
  - في رأيكم، هل توجد علاقة بين إشارة المشتقة وفترات التزايد والتناقص للاقتران؟ ستختلف إجابات الطلبة.
- أُوضِّح للطلبة العلاقة بين إشارة المشتقة وتزايد الاقتران وتناقصه؛ إذ يكون الاقتران مُتزايِدًا على فترة مفتوحة إذا كانت إشارة مشتقة الاقتران في تلك الفترة موجبة، ويكون مُتناقِصًا على فترة مفتوحة إذا كانت إشارة مشتقة الاقتران في تلك الفترة سالبة.
- أُناقِش الطلبة في حل المثال 2 على اللوح، مُؤكِّدًا لهم ضرورة تبرير كل خطوة من خطوات الحل.
- إنْ لزم الأمر، أُناقِش الطلبة في مزيد من الأمثلة؛ للتحقُّق من إتقانهم هذه المهارة.

✓ **إرشاد:** أُناقِش الطلبة في الأفكار الواردة في الصناديق الهامشية؛ لِما لها من أهمية في تعزيز مفاهيم الدرس.

مثال إضافي:

أُحدِّد فترات التزايد والتناقص لكل اقتران ممّا يأتي:

1 $f(x) = x^3 + 3x^2 - 2$

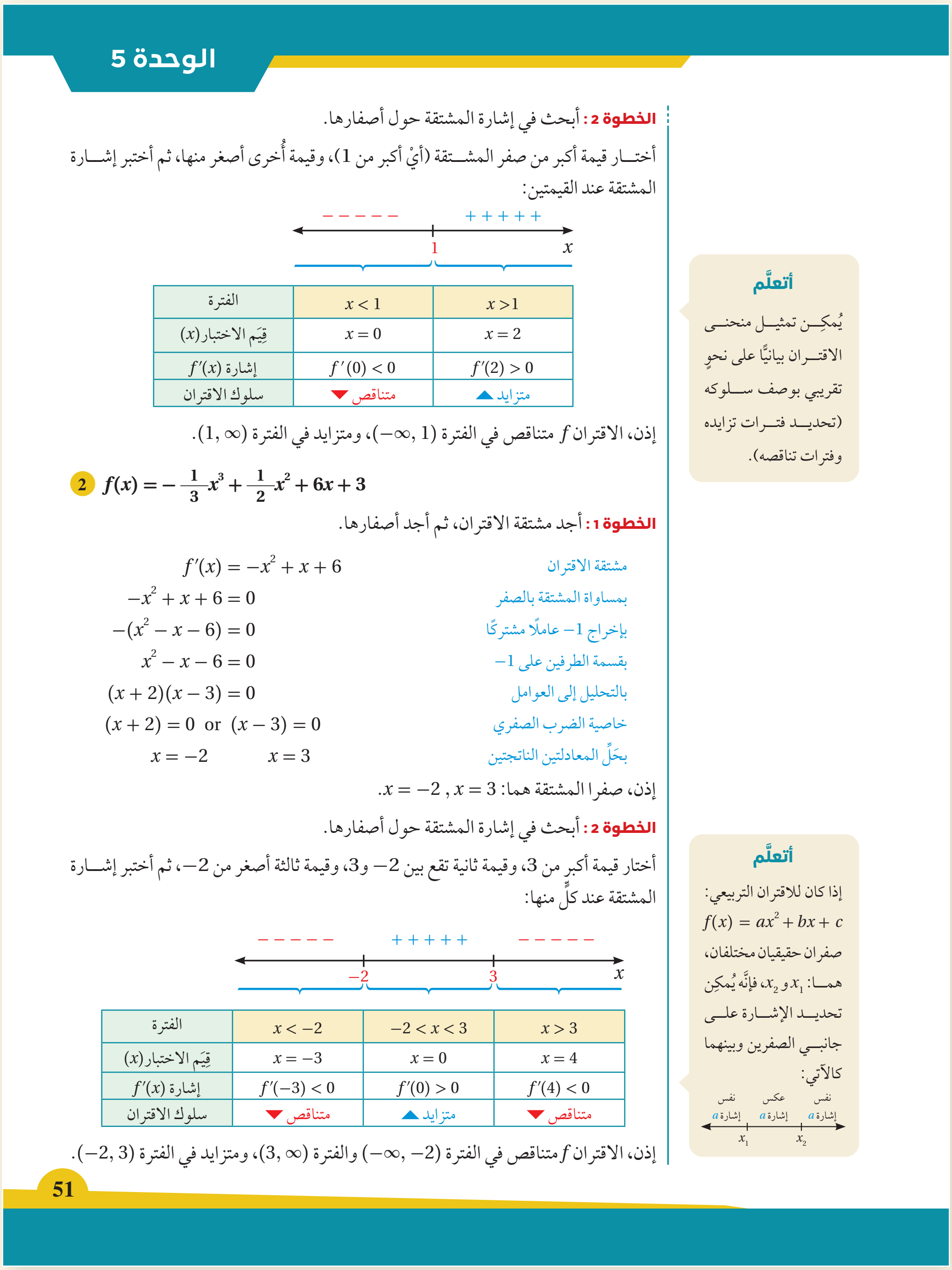
فترات التزايد: $(-\infty, -2), (0, \infty)$.

فترات التناقص: $(-2, 0)$.

2 $f(x) = 3x^2 + 2x - 6$

فترات التزايد: $(\frac{-1}{3}, \infty)$.

فترات التناقص: $(-\infty, \frac{-1}{3})$.



الخطوة 2 : أبحث في إشارة المشتقة حول أصفارها.

أختار قيمة أكبر من صفر المشتقة (أيْ أكبر من 1)، وقيمة أُخرى أصغر منها، ثم أختبر إشارة المشتقة عند القيمتين:

الفترة	$x < 1$	$x > 1$
قِيَم الاختبار (x)	$x = 0$	$x = 2$
إشارة $f'(x)$	$f'(0) < 0$	$f'(2) > 0$
سلوك الاقتران	متناقص ▼	متزايد ▲

إذن، الاقتران f متناقص في الفترة $(-\infty, 1)$، ومتزايد في الفترة $(1, \infty)$.

2 $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 6x + 3$

الخطوة 1 : أجد مشتقة الاقتران، ثم أجد أصفارها.

$f'(x) = -x^2 + x + 6$ مشتقة الاقتران

$-x^2 + x + 6 = 0$ بمساواة المشتقة بالصفر

$-(x^2 - x - 6) = 0$ بإخراج 1– عاملًا مشتركًا

$x^2 - x - 6 = 0$ بقسمة الطرفين على 1–

$(x + 2)(x - 3) = 0$ بالتحليل إلى العوامل

$(x + 2) = 0 \text{ or } (x - 3) = 0$ خاصية الضرب الصفري

$x = -2 \qquad x = 3$ بحَلِّ المعادلتين الناتجتين

إذن، صفرا المشتقة هما: $x = -2 , x = 3$.

الخطوة 2 : أبحث في إشارة المشتقة حول أصفارها.

أختار قيمة أكبر من 3، وقيمة ثانية تقع بين 2– و3، وقيمة ثالثة أصغر من 2–، ثم أختبر إشارة المشتقة عند كلٍّ منها:

الفترة	$x < -2$	$-2 < x < 3$	$x > 3$
قِيَم الاختبار (x)	$x = -3$	$x = 0$	$x = 4$
إشارة $f'(x)$	$f'(-3) < 0$	$f'(0) > 0$	$f'(4) < 0$
سلوك الاقتران	متناقص ▼	متزايد ▲	متناقص ▼

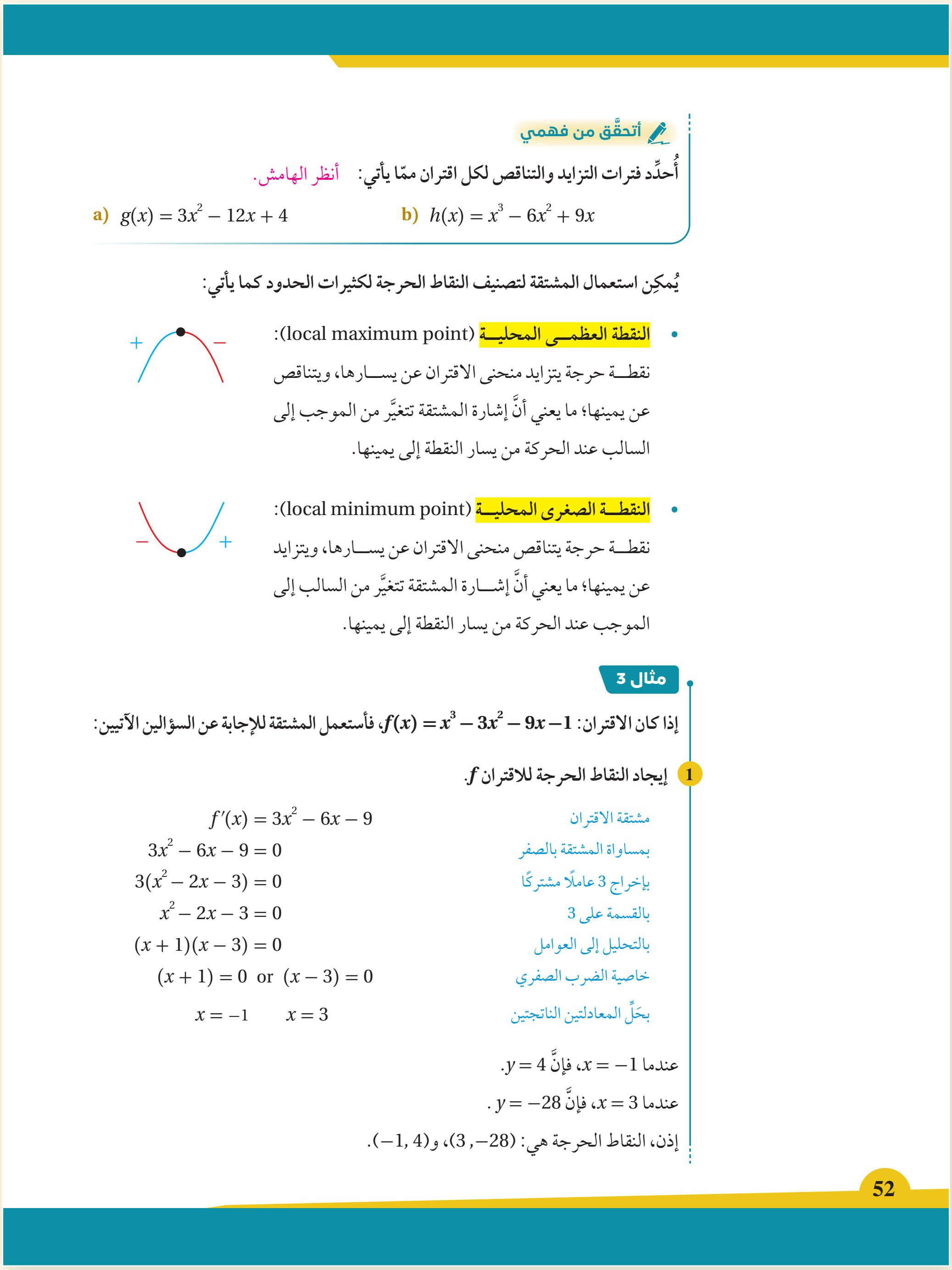
إذن، الاقتران f متناقص في الفترة $(-\infty, -2)$ والفترة $(3, \infty)$، ومتزايد في الفترة $(-2, 3)$.

أتعلَّم

يُمكِن تمثيل منحنى الاقتران بيانيًّا على نحوٍ تقريبي بوصف سلوكه (تحديد فترات تزايده وفترات تناقصه).

أتعلَّم

إذا كان للاقتران التربيعي: $f(x) = ax^2 + bx + c$ صفران حقيقيان مختلفان، هما: x_1 و x_2، فإنَّه يُمكِن تحديد الإشارة على جانبي الصفرين وبينهما كالآتي:



أتحقَّق من فهمي

أُحدِّد فترات التزايد والتناقص لكل اقتران ممّا يأتي: أنظر الهامش.

a) $g(x) = 3x^2 - 12x + 4$

b) $h(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$

يُمكِن استعمال المشتقة لتصنيف النقاط الحرجة لكثيرات الحدود كما يأتي:

- **النقطة العظمى المحلية** (local maximum point): نقطة حرجة يتزايد منحنى الاقتران عن يسارها، ويتناقص عن يمينها؛ ما يعني أنَّ إشارة المشتقة تتغيَّر من الموجب إلى السالب عند الحركة من يسار النقطة إلى يمينها.
- **النقطة الصغرى المحلية** (local minimum point): نقطة حرجة يتناقص منحنى الاقتران عن يسارها، ويتزايد عن يمينها؛ ما يعني أنَّ إشارة المشتقة تتغيَّر من السالب إلى الموجب عند الحركة من يسار النقطة إلى يمينها.

مثال 3

إذا كان الاقتران: $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x - 1$، فأستعمل المشتقة للإجابة عن السؤالين الآتيين:

1 إيجاد النقاط الحرجة للاقتران f.

مشتقة الاقتران	$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$
بمساواة المشتقة بالصفر	$3x^2 - 6x - 9 = 0$
بإخراج 3 عاملًا مشتركًا	$3(x^2 - 2x - 3) = 0$
بالقسمة على 3	$x^2 - 2x - 3 = 0$
بالتحليل إلى العوامل	$(x + 1)(x - 3) = 0$
خاصية الضرب الصفري	$(x + 1) = 0$ or $(x - 3) = 0$
بحَلِّ المعادلتين الناتجتين	$x = -1 \qquad x = 3$

عندما $x = -1$، فإنَّ $y = 4$.

عندما $x = 3$، فإنَّ $y = -28$.

إذن، النقاط الحرجة هي: $(3, -28)$، و$(-1, 4)$.

مثال 3

- أُناقِش الطلبة في ما تعلَّموه سابقًا عن مفهوم النقطة العظمى ومفهوم النقطة الصغرى، ثم أُبيِّن لهم كيف يُمكِن استعمال إشارة المشتقة لتصنيف النقاط الحرجة إلى عظمى محلية وصغرى محلية.
- أُناقِش الطلبة في حل المثال 3 على اللوح، مُؤكِّدًا لهم ضرورة تبرير كل خطوة من خطوات الحل.
- إنْ لزم الأمر، أُناقِش الطلبة في مزيد من الأمثلة؛ للتحقُّق من إتقانهم هذه المهارة.

✓ إرشاد: أَلفِت انتباه الطلبة إلى أنَّ مصطلح (النقطة العظمى المحلية) يشير إلى النقطة (x, y)، وأنَّ مصطلح (القيمة العظمى المحلية) يشير إلى الإحداثي y للنقطة العظمى المحلية، وأنَّ مصطلح (النقطة الصغرى المحلية) يشير إلى النقطة (x, y)، في حين يشير مصطلح (القيمة الصغرى المحلية) إلى الإحداثي y للنقطة الصغرى المحلية.

إجابة الأسئلة في بند (أتحقَّق من فهمي 2):

a) مُتناقِص في الفترة $(-\infty, 2)$، ومُتزايِد في الفترة $(2, \infty)$.

b) مُتناقِص في الفترة $(1, 3)$، ومُتزايِد في الفترة $(-\infty, 1)$ والفترة $(3, \infty)$.

مثال إضافي:

إذا كان الاقتران: $f(x) = x^3 - 6x^2$، فأستعمل المشتقة للإجابة عن السؤالين الآتيين:

1 أجد النقاط الحرجة للاقتران f.

$.(0, 0), (4, -32)$

2 أُصنِّف النقاط الحرجة إلى عظمى محلية، وصغرى محلية.

النقطة $(0, 0)$ عظمى محلية، والنقطة $(4, -32)$ صغرى محلية.

مثال 4 : من الحياة

- أُوضِّح للطلبة أهمية تحديد فترات التزايد والتناقص والقِيَم العظمى والقِيَم الصغرى في كثير من التطبيقات الحياتية، وأذكر لهم أمثلة على ذلك.
- أطلب إلى أحد الطلبة قراءة المثال 4، ثم أطلب إلى طالب آخر/ طالبة أُخرى تحديد المعطيات والمطلوب.
- أُناقِش الطلبة في حل المثال 4 على اللوح، مُؤكِّدًا لهم ضرورة تبرير كل خطوة من خطوات الحل.

تنويع التعليم:

في المثال 4، قد يواجه بعض الطلبة من ذوي المستوى دون المتوسط صعوبة في التعبير عن المسألة اللفظية جبريًّا؛ لذا أمنحهم بعض الوقت، وأُقدِّم لهم أمثلة سهلة عند اللزوم، مُنوِّهًا إيّاهم بضرورة قراءة المسألة بِرَوِيَّة؛ ما يساعدهم على حل المسائل بسهولة.

الوحدة 5

2 تصنيف النقاط الحرجة إلى عظمى محلية، وصغرى محلية.

الفترة	$x > 3$	$-1 < x < 3$	$x < -1$
قِيَم الاختبار (x)	$x = 4$	$x = 0$	$x = -4$
إشارة $f'(x)$	$f'(4) > 0$	$f'(0) < 0$	$f'(-4) > 0$
سلوك الاقتران	متزايد ▲	متناقص ▼	متزايد ▲

إذن، النقطة $(-1, 4)$ عظمى محلية؛ لأنَّ الاقتران متزايد عن يسارها، ومتناقص عن يمينها، والنقطة $(3, -28)$ صغرى محلية؛ لأنَّ الاقتران متناقص عن يسارها، ومتزايد عن يمينها.

أتحقَّق من فهمي أنظر الهامش.

إذا كان الاقتران: $f(x) = 2x^3 + 9x^2 - 24x + 8$، فأستعمل المشتقة للإجابة عن السؤالين الآتيين:

a) إيجاد النقاط الحرجة للاقتران f.

b) تصنيف النقاط الحرجة إلى عظمى محلية، وصغرى محلية.

يُمكِن نمذجة كثير من المواقف الحياتية باقترانات، يستفاد من تحديد تزايدها أو تناقصها، وتحديد قِيَمها العظمى أو قِيَمها الصغرى.

مثال 4 : من الحياة

درجات حرارة: **يُمثِّل الاقتران الآتي درجة الحرارة لجسم مريض بعد t يومًا من دخوله المستشفى:**

$$T(t) = -0.1t^2 + 1.2t + 38, \quad t \geq 0$$

حيث T درجة الحرارة بالسيلسيوس (°C). أُحدِّد أعلى درجة حرارة للمريض، واليوم الذي سُجِّلت فيه، علمًا بأنَّه تلقّى العلاج في المستشفى مدَّة 12 يومًا.

الخطوة 1: أجد مشتقة الاقتران المعطى.

$$T'(t) = -0.2t + 1.2$$ مشتقة الاقتران

53

إجابة الأسئلة في بند (أتحقَّق من فهمي 3):

a) النقاط الحرجة هي: $(1, -5)$، و $(-4, 120)$.

b) $(1, -5)$ صغرى محلية، و $(-4, 120)$ عظمى محلية.

معلومة

يختلف مدى درجة حرارة جسم الإنسان الطبيعية مع التقدُّم بالعُمُـــر على النحو الآتي:

- الرُّضَّع والأطفال: من 36.6°C إلى 37.2°C
- البالغون: من 36.1°C إلى 37.2°C
- كبار السن (أكثر من 65 عامًا): قد تنخفض إلى 36.2°C

الخطوة 2 : أجد أصفار المشتقة.

بمساواة المشتقة بالصفر $-0.2t + 1.2 = 0$

بطرح 1.2 من طرفي المعادلة $-0.2t = -1.2$

بالقسمة على -0.2 $t = 6$

الخطوة 3 : أُحدِّد إشارة المشتقة حول أصفارها.

الخطوة 4 : أُحدِّد القِيَم العظمى والقِيَم الصغرى.

منحنى الاقتران T متزايد عن يســار $t = 6$، ومتناقــص عن يمينها؛ ما يعني أنَّ للاقتران T قيمة عظمى محلية عندما $t = 6$، وهي:

بتعويض $t = 6$ $T(6) = -0.1(6)^2 + 1.2(6) + 38 = 41.6$

إذن، أعلى درجة حرارة للمريض هي 41.6°C، وقد سُجِّلت في اليوم السادس من بدء علاجه.

أتحقَّق من فهمي أنظر الهامش.

لوحِظ أنَّ عــدد الضفادع في بحيرة ما يُمكِن نمذجته بالاقتران: $P(t) = 120t - 0.4t^2 + 1000$، حيــث P عدد الضفادع، وt الزمن بالأشــهر منذ بدء ملاحظة الضفــادع. أجد أكبر عدد يُمكِن أنْ تصل إليه الضفادع في البحيرة منذ بدء ملاحظتها.

أتدرَّب وأحُلُّ المسائل

أجد النقاط الحرجة لكل اقتران ممّا يأتي:

① $f(x) = x^2 - 6x + 10$ $(3, 1)$

② $f(x) = 1 - 12x + 2x^2$ $(3, -17)$

③ $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x$ $(1, \frac{-2}{3}), (-1, \frac{2}{3})$

④ $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2$ $(0, 0), (2, \frac{-4}{3})$

54

إجابة الأسئلة في بند (أتحقَّق من فهمي 4):

أكبر عدد يُمكِن أنْ تصل إليه الضفادع هو 10000 ضفدع.

4 التدريب

أتدرَّب وأحل المسائل

- أُوجِّه الطلبة إلى بند (**أتدرَّب وأحل المســائل**)، ثم أطلب إليهم حل المســائل (10 – 1) ، والمســائل (17, 18, 21) ضمن مجموعات ثنائية داخل الغرفة الصفية؛ فهذه المسائل تحديدًا ترتبط ارتباطًا مباشرًا بأمثلة الدرس، وهي تُستعمَل خاصةً لتدريب الطلبة على المفاهيم نفســها، بصرف النظر عمّا إذا كانت الأسئلة فردية أم زوجية.
- إذا واجه الطلبة صعوبة في حل أيَّة مسألة، فإنَّني أختار أحد الطلبة مِمَّنْ تمكَّن/ تمكَّنت من حل المســألة؛ لمناقشة استراتيجيته/ استراتيجيتها في حل المسألة على اللوح، مُحفِّزًا الطلبة على طرح أيِّ تساؤل عن خطوات الحل المُقدَّمة من الزميل/ الزميلة.

تنويع التعليم:

إذا واجه الطلبة ذوو المســتوى دون المتوسط صعوبة في حل أسئلة بند (**أتدرَّب وأحل المســائل**)، فإنَّني أضع كُلًّا منهــم مع طالب آخــر/ طالبة أُخرى من ذوي المســتوى المتوســط أو مع أحد الطلبة المُتميِّزين؛ ليتشاركا في حل الأسئلة.

مهارات التفكير العليا

- أُوجِّـه الطلبـة إلـى بنـد (**مهـارات التفكير العليـا**)، ثم أطلب إليهم حل المسألة 23 والمسألة 24
- أرصـد أيَّة أفكار غيـر تقليدية من الطلبة، ثم أطلب إلى هؤلاء الطلبة كتابة هذه الأفكار على اللوح.

إرشادات:

- فـي السـؤال 23 (**تبرير**)، أسـأل الطلبة عن إشـارة مشتقة الاقتران لقِيَم x جميعها.
- فـي السـؤال 24 (**تحـدٍّ**)، أُذكِّر الطلبة بأنَّ مشـتقة الاقتران عند القيمة الحرجة تساوي صفرًا.

الواجب المنزلي:

أستعين بالجدول الآتي لتحديد الواجب المنزلي للطلبة بحسب مستوياتهم:

المستويات	الأسئلة
دون المتوسط	كتاب الطالب: (13 – 16), 19 كتاب التمارين: (1 – 3), 8, 10, 12, 13
ضمن المتوسط	كتاب الطالب: 11 , 15, 16, 20, 22, 23 كتاب التمارين: 1, (4 – 7), 9, 11, 14
فوق المتوسط	كتاب الطالب: 12, 19, 20, (22 – 24) كتاب التمارين: 1, 6, 7, 11, 14, 15

5 الإثراء

- أطلب إلى الطلبة حل السؤال الآتي بوصفه إثراءً لهم:

◂ إذا كان: $f(x) = px^3 - 4px^2 + 5x - 11$، حيث $p > 0$، فأجد مجموعة قِيَم p التي يكون عندها للاقتران نقطتان حرجتان.

$$p \in \left(\frac{15}{16}, \infty\right)$$

6 الختام

- أمنح الطلبة دقائق معدودة لكتابة فقرة عمّا تعلّموه في هذا الدرس، ثم أطلب إلى بعضهم قراءة الفقرات التي كتبوها.
- أتحقَّق من فهم الطلبة موضوع الدرس، بطرح السؤال الآتي عليهم:

◂ أجد النقاط الحرجة (إنْ وُجِدت) لكل اقتران ممّا يأتي، ثم أُحدِّد نوعها باستعمال المشتقة:

① $f(x) = x^2 - 4x + 3$

(صغرى محلية) $(2, -1)$

② $f(x) = x^3 - 3x^2$

(عظمى محلية) $(0, 0)$، (صغرى محلية) $(2, -4)$

الوحدة 5

أُحدِّد فترات التزايد والتناقص لكل اقتران ممّا يأتي:

(5 – 20): أنظر ملحق الإجابات.

⑤ $f(x) = 4x + 3$

⑥ $f(x) = 7 - 5x$

⑦ $f(x) = x^2 + 7$

⑧ $f(x) = x^2 - x$

⑨ $f(x) = x^2 - 5x + 2$

⑩ $f(x) = 2x^3 - 3x^2$

⑪ $f(x) = (x - 3)^2$

⑫ $f(x) = (1 - x)^2$

⑬ $f(x) = x^3 + 3x$

⑭ $f(x) = 6 - x - x^3$

⑮ $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x - 20$

⑯ $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x$

أجد النقاط الحرجة (إنْ وُجِدت) لكل اقتران ممّا يأتي، ثم أُحدِّد نوعها باستعمال المشتقة:

⑰ $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x$

⑱ $y = \frac{2}{3}x^3 - 8x^2 + 30x$

⑲ $f(x) = \frac{4}{3}x^3 + 2x^2 - 8x$

⑳ $h(x) = -(x - 2)^2 + 1$

㉑ **صناعة:** تُنتِج إحدى الشركات صناديق لتخزين البضائع على شكل متوازي مستطيلات. إذا أمكن نمذجة حجم كلٍّ من هذه الصناديق بالاقتران: $V(x) = 18x - \frac{2}{3}x^3$، فأجد قيمة x التي تجعل حجم الصندوق أكبر ما يُمكِن.

$x = 3$

㉒ إذا كانت مشتقة الاقتران f تعطى بالاقتران: $g(x) = (x - 2)^2 (x + 4)$، فأجد قِيَم x التي توجد عندها نقاط حرجة للاقتران f.

$x = -2, x = 2$

مهارات التفكير العليا

(23, 24): أنظر الهامش.

㉓ **تبرير:** أُبيِّن أنَّ الاقتران: $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ متزايد لِقِيَم x الحقيقية جميعها، مُبرِّرًا إجابتي.

㉔ **تحدٍّ:** إذا كان للاقتران: $f(x) = ax^2 - 4x + c$، حيث a و c عددان حقيقيان، نقطة حرجة هي $(2, -7)$، فما قيمة كلٍّ من a و c؟

55

إجابة الأسئلة في بند (أتدرَّب وأحل المسائل):

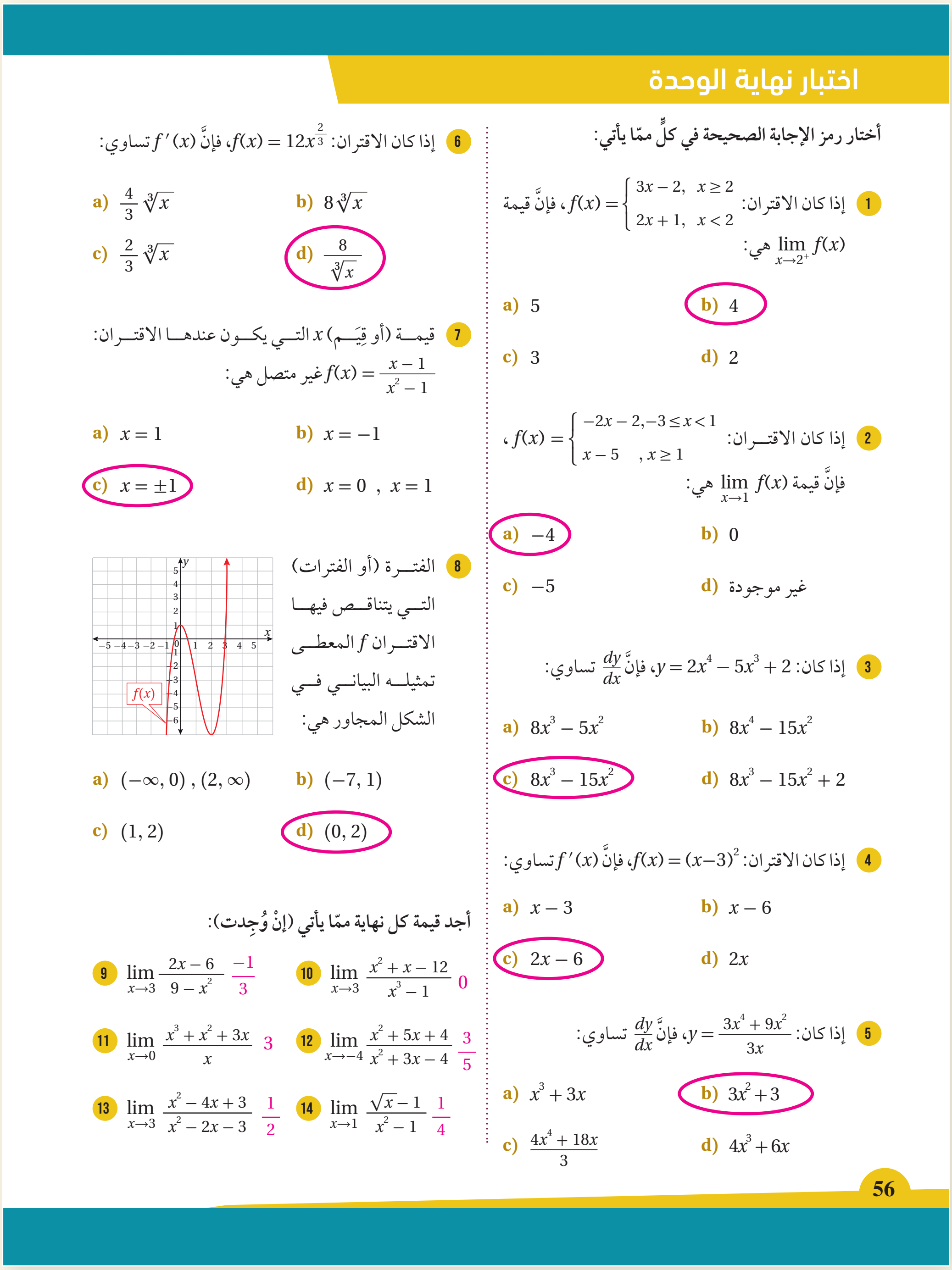
23)

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 3$$
$$= 3(x^2 - 2x + 1)$$
$$= 3(x-1)^2 \geq 0, x \in (-\infty, \infty)$$

إذن: الاقتران f مُتزايِد في الفترة $(-\infty, \infty)$.

24)

$$f(2) = 4a - 8 + c = -7$$
$$4a + c = 1$$
$$f'(x) = 2ax - 4$$
$$f'(2) = 4a - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 1 \text{ , } c = -3$$



اختبار نهاية الوحدة

أختار رمز الإجابة الصحيحة في كلٍّ ممّا يأتي:

1 إذا كان الاقتران: $f(x)=\begin{cases}3x-2, & x\geq 2\\ 2x+1, & x<2\end{cases}$، فإنَّ قيمة $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$ هي:

a) 5 [✓ b) 4]

c) 3 d) 2

2 إذا كان الاقتـــران: $f(x)=\begin{cases}-2x-2, -3\leq x<1\\ x-5 \quad , x\geq 1\end{cases}$، فإنَّ قيمة $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ هي:

[✓ a) -4] b) 0

c) -5 d) غير موجودة

3 إذا كان: $y=2x^4-5x^3+2$، فإنَّ $\frac{dy}{dx}$ تساوي:

a) $8x^3-5x^2$ b) $8x^4-15x^2$

[✓ c) $8x^3-15x^2$] d) $8x^3-15x^2+2$

4 إذا كان الاقتران: $f(x)=(x-3)^2$، فإنَّ $f'(x)$ تساوي:

a) $x-3$ b) $x-6$

[✓ c) $2x-6$] d) $2x$

5 إذا كان: $y=\frac{3x^4+9x^2}{3x}$، فإنَّ $\frac{dy}{dx}$ تساوي:

a) x^3+3x [✓ b) $3x^2+3$]

c) $\frac{4x^4+18x}{3}$ d) $4x^3+6x$

6 إذا كان الاقتران: $f(x)=12x^{\frac{2}{3}}$، فإنَّ $f'(x)$ تساوي:

a) $\frac{4}{3}\sqrt[3]{x}$ b) $8\sqrt[3]{x}$

c) $\frac{2}{3}\sqrt[3]{x}$ [✓ d) $\frac{8}{\sqrt[3]{x}}$]

7 قيمة (أو قِيَم) x التي يكون عندها الاقتران: $f(x)=\frac{x-1}{x^2-1}$ غير متصل هي:

a) $x=1$ b) $x=-1$

[✓ c) $x=\pm 1$] d) $x=0 \ , \ x=1$

8 الفترة (أو الفترات) التي يتناقص فيها الاقتران f المعطى تمثيله البياني في الشكل المجاور هي:

a) $(-\infty, 0) , (2, \infty)$ b) $(-7, 1)$

c) $(1, 2)$ [✓ d) $(0, 2)$]

أجد قيمة كل نهاية ممّا يأتي (إنْ وُجِدت):

9 $\lim\limits_{x\to 3}\frac{2x-6}{9-x^2}$ $\frac{-1}{3}$

10 $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2+x-12}{x^3-1}$ 0

11 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^3+x^2+3x}{x}$ 3

12 $\lim\limits_{x\to -4}\frac{x^2+5x+4}{x^2+3x-4}$ $\frac{3}{5}$

13 $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-4x+3}{x^2-2x-3}$ $\frac{1}{2}$

14 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x^2-1}$ $\frac{1}{4}$

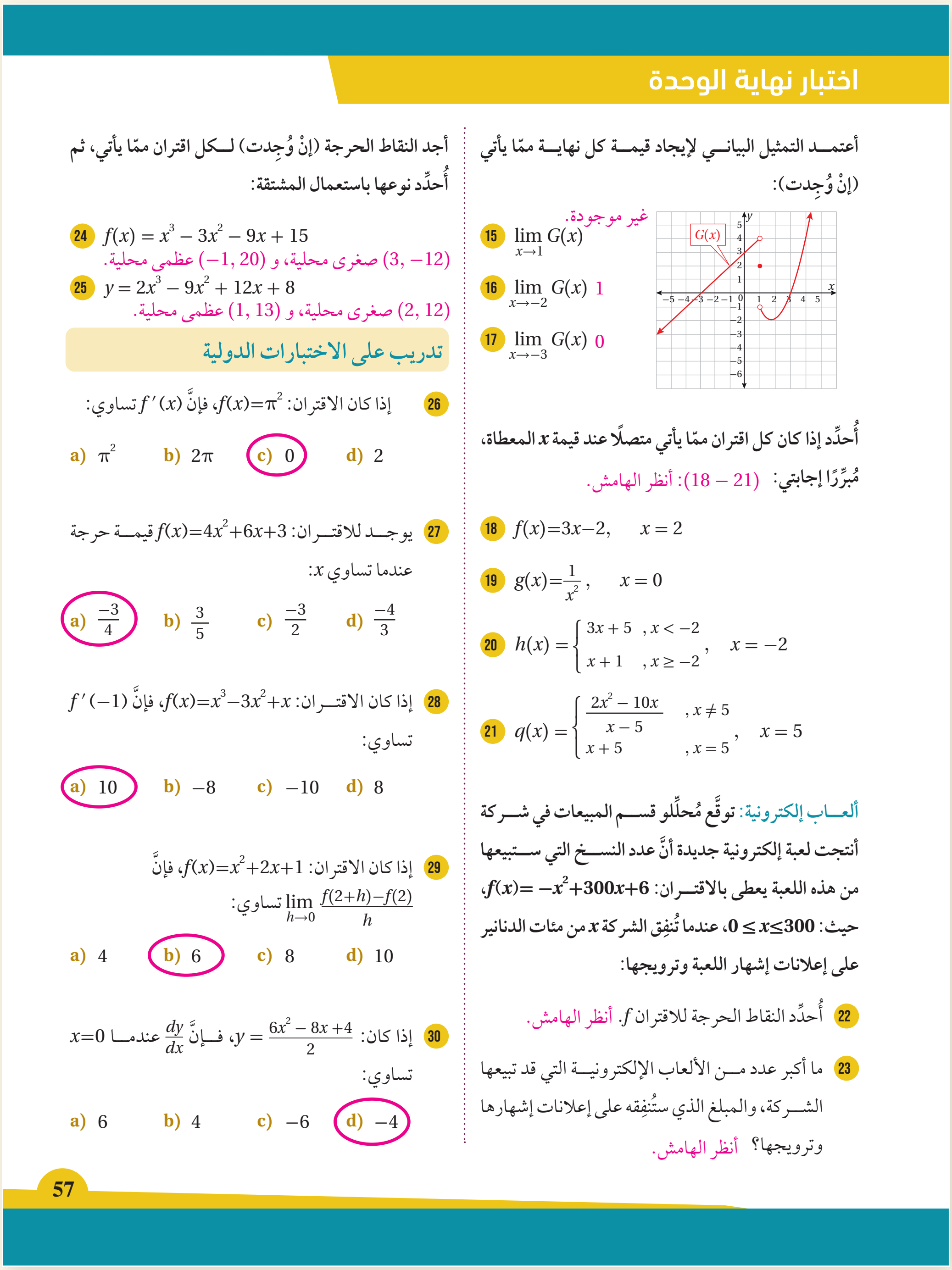
56

اختبار نهاية الوحدة:

- أطلب إلى الطلبة حل الأسئلة (8 – 1) فرديًّا، وأتجوَّل بينهم مُساعِدًا ومُرشِدًا ومُوجِّهًا، وأُقدِّم لهم التغذية الراجعة اللازمة، ثم أُناقِشهم جميعًا في حل بعض المسائل على اللوح.
- أُوزِّع الطلبة إلى مجموعات رباعية، ثم أطلب إلى أفراد المجموعات حل المسائل (25 – 9)، وأتجوَّل بينهم مُساعِدًا ومُرشِدًا ومُوجِّهًا، وأُقدِّم لهم التغذية الراجعة اللازمة، ثم أُحدِّد المسائل التي واجه الطلبة صعوبة في حلها لمناقشتها على اللوح.

✓ إرشادات:

- في السؤال 5، أُذكِّر الطلبة بأهمية توزيع البسط على المقام في تبسيط الاقتران قبل عملية الاشتقاق.
- أطلب إلى الطلبة حل السؤال 14 بطريقتين.



اختبار نهاية الوحدة

أعتمد التمثيل البياني لإيجاد قيمة كل نهاية ممّا يأتي (إنْ وُجِدت):

15) $\lim_{x\to 1} G(x)$ غير موجودة.

16) $\lim_{x\to -2} G(x)$ 1

17) $\lim_{x\to -3} G(x)$ 0

أُحدِّد إذا كان كل اقتران ممّا يأتي متصلًا عند قيمة x المعطاة، مُبرِّرًا إجابتي: (18 – 21): أنظر الهامش.

18) $f(x)=3x-2, \quad x=2$

19) $g(x)=\frac{1}{x^2}, \quad x=0$

20) $h(x)=\begin{cases} 3x+5 &, x<-2 \\ x+1 &, x\geq -2 \end{cases}, \quad x=-2$

21) $q(x)=\begin{cases} \frac{2x^2-10x}{x-5} &, x\neq 5 \\ x+5 &, x=5 \end{cases}, \quad x=5$

ألعاب إلكترونية: توقَّع مُحلِّلو قسم المبيعات في شركة أنتجت لعبة إلكترونية جديدة أنَّ عدد النسخ التي ستبيعها من هذه اللعبة يعطى بالاقتران: $f(x)=-x^2+300x+6$، حيث: $0\leq x\leq 300$، عندما تُنفِق الشركة x من مئات الدنانير على إعلانات إشهار اللعبة وترويجها:

22) أُحدِّد النقاط الحرجة للاقتران f. أنظر الهامش.

23) ما أكبر عدد من الألعاب الإلكترونية التي قد تبيعها الشركة، والمبلغ الذي ستُنفِقه على إعلانات إشهارها وترويجها؟ أنظر الهامش.

أجد النقاط الحرجة (إنْ وُجِدت) لكل اقتران ممّا يأتي، ثم أُحدِّد نوعها باستعمال المشتقة:

24) $f(x)=x^3-3x^2-9x+15$
$(3,-12)$ صغرى محلية، و $(-1,20)$ عظمى محلية.

25) $y=2x^3-9x^2+12x+8$
$(2,12)$ صغرى محلية، و $(1,13)$ عظمى محلية.

تدريب على الاختبارات الدولية

26) إذا كان الاقتران: $f(x)=\pi^2$، فإنَّ $f'(x)$ تساوي:

a) π^2 b) 2π [✓ c) 0] d) 2

27) يوجد للاقتران: $f(x)=4x^2+6x+3$ قيمة حرجة عندما تساوي x:

[✓ a) $\frac{-3}{4}$] b) $\frac{3}{5}$ c) $\frac{-3}{2}$ d) $\frac{-4}{3}$

28) إذا كان الاقتران: $f(x)=x^3-3x^2+x$، فإنَّ $f'(-1)$ تساوي:

[✓ a) 10] b) −8 c) −10 d) 8

29) إذا كان الاقتران: $f(x)=x^2+2x+1$، فإنَّ $\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$ تساوي:

a) 4 [✓ b) 6] c) 8 d) 10

30) إذا كان: $y=\frac{6x^2-8x+4}{2}$، فإنَّ $\frac{dy}{dx}$ عندما $x=0$ تساوي:

a) 6 b) 4 c) −6 [✓ d) −4]

57

تدريب على الاختبارات الدولية

- أطلب إلى الطلبة حل الأسئلة الواردة في بند **(تدريب على الاختبارات الدولية)** فرديًّا، ثم أُناقِشهم جميعًا في حلها على اللوح، مُبيِّنًا لهم المقصود بالاختبارات الدولية.

إجابة الأسئلة في بند (اختبار نهاية الوحدة):

18) $f(2)=4=\lim_{x\to 2}(3x-2)$

أيْ إنَّ الاقتران f متصل عندما $x=2$.

19) بما أنَّ $x=0$ لا تنتمي إلى مجال الاقتران النسبي g (لأنَّها تجعل مقامه صفرًا)، فإنَّ الاقتران g غير متصل عندما $x=0$.

20) $h(-2)=-2+1=-1$

$$\lim_{x\to -2^+} h(x)=\lim_{x\to -2^+}(x+1)=-1$$

$$\lim_{x\to -2^-} h(x)=\lim_{x\to -2^-}(3x+5)=-1$$

أيْ إنَّ: $\lim_{x\to -2} h(x)=-1$.

وبما أنَّ $h(-2)=\lim_{x\to -2} h(x)=1$، فإنَّ الاقتران h غير متصل عندما $x=-2$.

21) $q(5)=5+5=10$

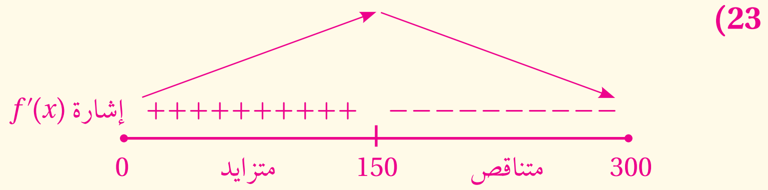
$$\lim_{x\to 5} q(x)=\lim_{x\to 5}\frac{2x^2-10x}{x-5}=\lim_{x\to 5}\frac{2x(x-5)}{x-5}$$

$$=\lim_{x\to 5}\frac{2x(x-5)}{x-5}=\lim_{x\to 5}2x=10$$

وبما أنَّ $q(5)=\lim_{x\to 5} q(x)=10$، فإنَّ الاقتران q متصل عندما $x=5$.

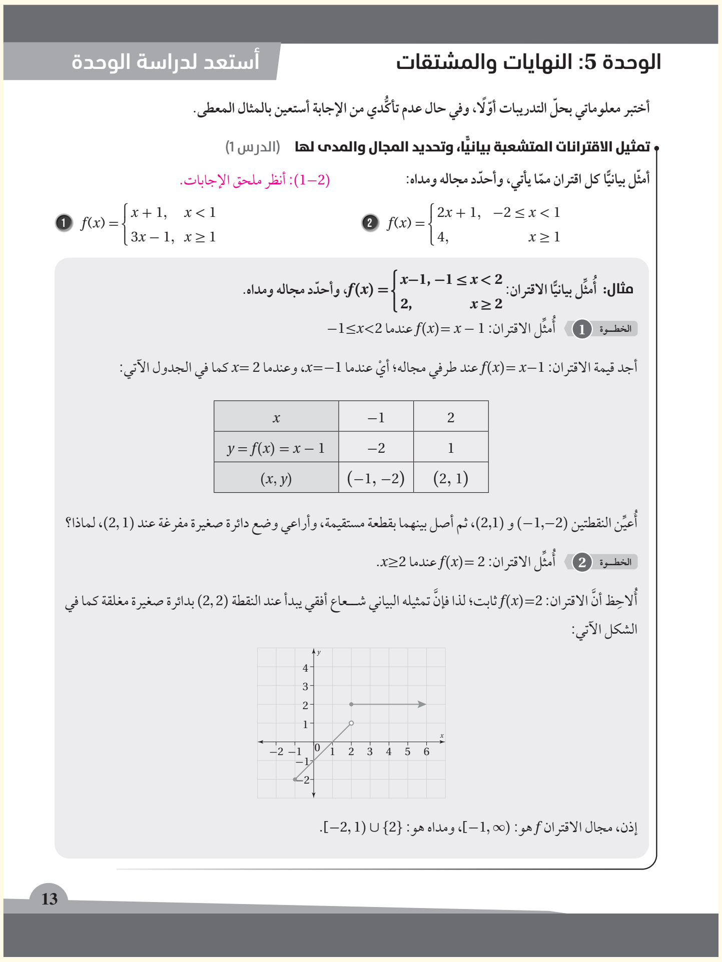
22) $(150, 22506)$ نقطة حرجة للاقتران f.

23)



إذن: أكبر عدد من الألعاب الإلكترونية يُمكِن بيعه هو 22506 لُعَب عند إنفاق 15000 دينار على إعلانات الإشهار والترويج.

كتاب التمارين



الوحدة 5: النهايات والمشتقات

أستعد لدراسة الوحدة

أختبر معلوماتي بحلّ التدريبات أوّلًا، وفي حال عدم تأكُّدي من الإجابة أستعين بالمثال المعطى.

تمثيل الاقترانات المتشعبة بيانيًّا، وتحديد المجال والمدى لها (الدرس 1)

أمثّل بيانيًّا كل اقتران ممّا يأتي، وأحدّد مجاله ومداه: (1–2): أنظر ملحق الإجابات.

① $f(x)=\begin{cases} x+1, & x<1 \\ 3x-1, & x\ge 1\end{cases}$

② $f(x)=\begin{cases} 2x+1, & -2\le x<1 \\ 4, & x\ge 1\end{cases}$

مثال: أُمثِّل بيانيًّا الاقتران: $f(x)=\begin{cases} x-1, & -1\le x<2 \\ 2, & x\ge 2\end{cases}$، وأحدّد مجاله ومداه.

الخطـوة 1 أُمثِّل الاقتران: $f(x)=x-1$ عندما $-1\le x<2$

أجد قيمة الاقتران: $f(x)=x-1$ عند طرفي مجاله؛ أيْ عندما $x=-1$، وعندما $x=2$ كما في الجدول الآتي:

x	-1	2
$y=f(x)=x-1$	-2	1
(x, y)	$(-1, -2)$	$(2, 1)$

أُعيِّن النقطتين $(-1,-2)$ و $(2,1)$، ثم أصل بينهما بقطعة مستقيمة، وأراعي وضع دائرة صغيرة مفرغة عند $(2, 1)$، لماذا؟

الخطـوة 2 أُمثِّل الاقتران: $f(x)=2$ عندما $x\ge 2$.

أُلاحِظ أنَّ الاقتران: $f(x)=2$ ثابت؛ لذا فإنَّ تمثيله البياني شــعاع أفقي يبدأ عند النقطة $(2, 2)$ بدائرة صغيرة مغلقة كما في الشكل الآتي:

إذن، مجال الاقتران f هو: $[-1, \infty)$، ومداه هو: $[-2, 1) \cup \{2\}$.

13

الوحدة 5: النهايات والمشتقات

أستعد لدراسة الوحدة

تحليل المقادير الجبرية (الدرس 1)

أُحلِّل كل مقدار جبري ممّا يأتي إلى عوامله الأولية:

⑤ x^2+3x+2 $(x+1)(x+2)$

④ x^2-36 $(x-6)(x+6)$

③ $3x^2-6x$ $3x(x-2)$

⑧ $2x^2-6x+4$ $2(x-2)(x-1)$

⑦ x^2-x-2 $(x-2)(x+1)$

⑥ x^2-5x+6 $(x-3)(x-2)$

⑪ $16-x^2$ $(4-x)(4+x)$

⑩ $2x^3+128$ $2(x+4)(x^2-4x+16)$

⑨ x^3-27 $(x-3)(x^2+3x+9)$

مثال: أُحلِّل كل مقدار جبري ممّا يأتي إلى عوامله الأولية:

a) $\mathbf{3x^3-12x}$

$3x^3-12x=3x\,(x^2-4)$ بإخراج العامل المشترك

$=3x\,(x-2)\,(x+2)$ بتحليل الفرق بين مربعين

b) $\mathbf{5x^3-5}$

$5x^3-5=5\,(x^3-1)$ بإخراج العامل المشترك

$=5\,(x-1)\,(x^2+x+1)$ بتحليل الفرق بين مكعبين

c) $\mathbf{3x^2-12x-15}$

$3x^2-12x-15=3\,(x^2-4x-5)$ بإخراج العامل المشترك

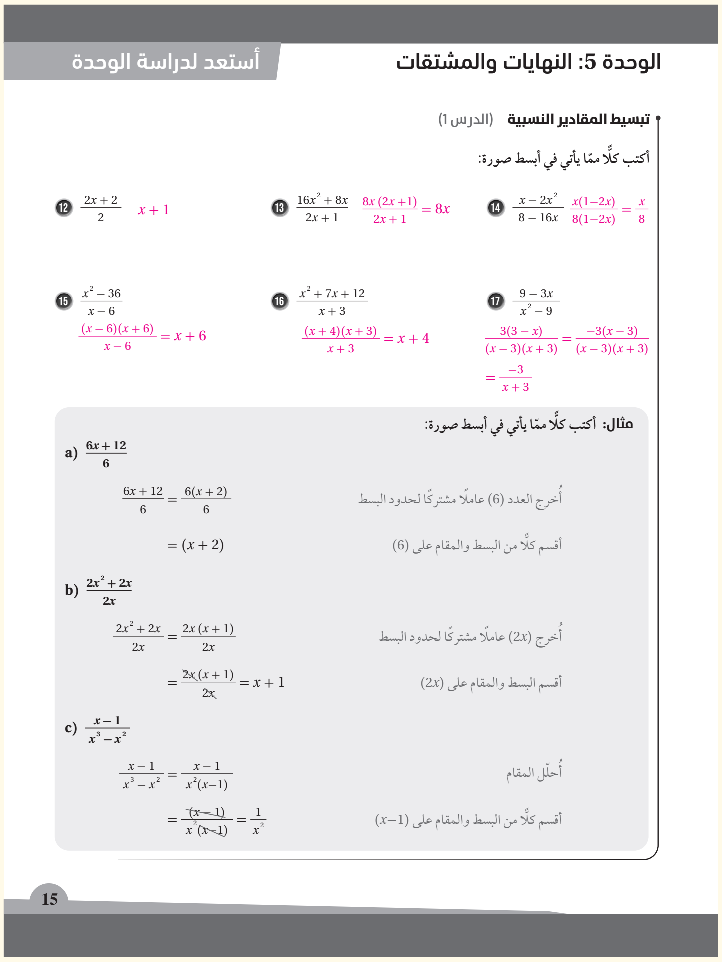
$=3\,(x-5)\,(x+1)$ بتحليل العبارة التربيعية ذات الحدود الثلاثة

d) $\mathbf{x^3-6x^2+8x}$

$x^3-6x^2+8x=x\,(x^2-6x+8)$ بإخراج العامل المشترك

$=x\,(x-2)\,(x-4)$ بتحليل العبارة التربيعية ذات الحدود الثلاثة

14



الوحدة 5: النهايات والمشتقات

أستعد لدراسة الوحدة

تبسيط المقادير النسبية (الدرس 1)

أكتب كلًّا ممّا يأتي في أبسط صورة:

⑭ $\frac{x-2x^2}{8-16x}$ $\frac{x(1-2x)}{8(1-2x)}=\frac{x}{8}$

⑬ $\frac{16x^2+8x}{2x+1}$ $\frac{8x\,(2x+1)}{2x+1}=8x$

⑫ $\frac{2x+2}{2}$ $x+1$

⑰ $\frac{9-3x}{x^2-9}$ $\frac{3(3-x)}{(x-3)(x+3)}=\frac{-3(x-3)}{(x-3)(x+3)}$ $=\frac{-3}{x+3}$

⑯ $\frac{x^2+7x+12}{x+3}$ $\frac{(x+4)(x+3)}{x+3}=x+4$

⑮ $\frac{x^2-36}{x-6}$ $\frac{(x-6)(x+6)}{x-6}=x+6$

مثال: أكتب كلًّا ممّا يأتي في أبسط صورة:

a) $\mathbf{\frac{6x+12}{6}}$

$\frac{6x+12}{6}=\frac{6(x+2)}{6}$ أُخرج العدد (6) عاملًا مشتركًا لحدود البسط

$=(x+2)$ أقسم كلًّا من البسط والمقام على (6)

b) $\mathbf{\frac{2x^2+2x}{2x}}$

$\frac{2x^2+2x}{2x}=\frac{2x\,(x+1)}{2x}$ أُخرج $(2x)$ عاملًا مشتركًا لحدود البسط

$=\frac{\cancel{2x}\,(x+1)}{\cancel{2x}}=x+1$ أقسم البسط والمقام على $(2x)$

c) $\mathbf{\frac{x-1}{x^3-x^2}}$

$\frac{x-1}{x^3-x^2}=\frac{x-1}{x^2(x-1)}$ أُحلّل المقام

$=\frac{\cancel{(x-1)}}{x^2\cancel{(x-1)}}=\frac{1}{x^2}$ أقسم كلًّا من البسط والمقام على $(x-1)$

15

الوحدة 5: النهايات والمشتقات

أستعد لدراسة الوحدة

الأسس النسبية والجذور (الدرس 2)

أكتب الصورة الأُسّية في صورة جذرية والصورة الجذرية في صورة أُسّيةٍ في كلّ ممّا يأتي:

⑲ $\sqrt[8]{u}$ $u^{\frac{1}{8}}$

⑱ $p^{\frac{1}{6}}$ $\sqrt[6]{p}$

㉑ $\sqrt[5]{-8}$ $(-8)^{\frac{1}{5}}$

⑳ $9^{\frac{1}{4}}$ $\sqrt[4]{9}$

㉓ $\sqrt[6]{v^5}$ $v^{\frac{5}{6}}$

㉒ $w^{\frac{8}{3}}$ $\sqrt[3]{w^8}$

㉕ $\sqrt[5]{(-35)^9}$ $(-35)^{\frac{9}{5}}$

㉔ $16^{\frac{3}{4}}$ $\sqrt[4]{16^3}$

مثال: أكتب الصورة الأُسّية في صورة جذرية والصورة الجذرية في صورة أُسّية في كلّ ممّا يأتي:

b) $\sqrt[6]{w}$

$\sqrt[6]{w}=w^{\frac{1}{6}}$ تعريف $a^{\frac{1}{n}}$

a) $y^{\frac{1}{4}}$

$y^{\frac{1}{4}}=\sqrt[4]{y}$ تعريف $a^{\frac{1}{n}}$

d) $\sqrt[7]{-20}$

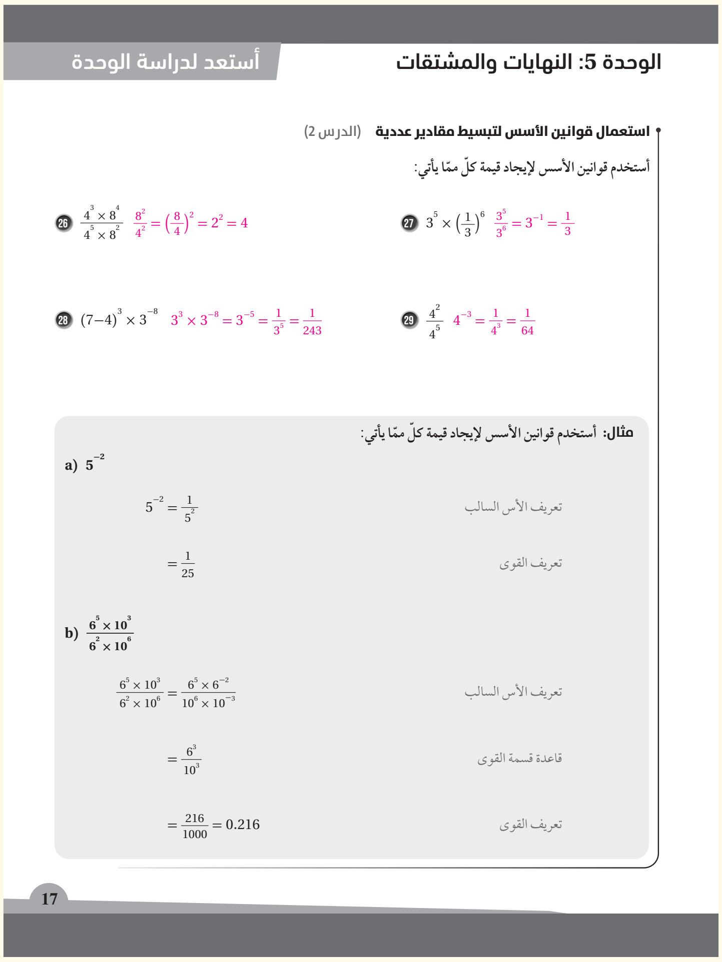
$\sqrt[7]{-20}=(-20)^{\frac{1}{7}}$ تعريف $a^{\frac{1}{n}}$

c) $8^{\frac{2}{5}}$

$8^{\frac{2}{5}}=\sqrt[5]{8^2}$ تعريف $a^{\frac{m}{n}}$

16

كتاب التمارين



الوحدة 5: النهايات والمشتقات

أستعد لدراسة الوحدة

استعمال قوانين الأسس لتبسيط مقادير عددية (الدرس 2)

أستخدم قوانين الأسس لإيجاد قيمة كلّ ممّا يأتي:

㉖ $\frac{4^3\times 8^4}{4^5\times 8^2}$ $\frac{8^2}{4^2}=\left(\frac{8}{4}\right)^2=2^2=4$

㉗ $3^5\times\left(\frac{1}{3}\right)^6$ $\frac{3^5}{3^6}=3^{-1}=\frac{1}{3}$

㉘ $(7-4)^3\times 3^{-8}$ $3^3\times 3^{-8}=3^{-5}=\frac{1}{3^5}=\frac{1}{243}$

㉙ $\frac{4^2}{4^5}$ $4^{-3}=\frac{1}{4^3}=\frac{1}{64}$

مثال: أستخدم قوانين الأسس لإيجاد قيمة كلّ ممّا يأتي:

a) $\mathbf{5^{-2}}$

تعريف الأس السالب	$5^{-2}=\frac{1}{5^2}$
تعريف القوى	$=\frac{1}{25}$

b) $\mathbf{\frac{6^5\times 10^3}{6^2\times 10^6}}$

تعريف الأس السالب	$\frac{6^5\times 10^3}{6^2\times 10^6}=\frac{6^5\times 6^{-2}}{10^6\times 10^{-3}}$
قاعدة قسمة القوى	$=\frac{6^3}{10^3}$
تعريف القوى	$=\frac{216}{1000}=0.216$

17

الوحدة 5: النهايات والمشتقات

أستعد لدراسة الوحدة

مشتقّة كثيرات الحدود (الدرس 2)

أجد مشتقّة كُلّ من الاقترانات الآتية:

㉚ $f(x)=2x^3+6$
$f'(x)=6x^2$

㉛ $f(x)=x^5-5x^2+6x-10$
$f'(x)=5x^4-10x+6$

㉜ $f(x)=x^4+8x^2$
$f'(x)=4x^3+16x$

مثال: أجد مشتقة الاقتران $\boldsymbol{f(x)=x^4-7x^2}$

الاقتران الأصلي	$f(x)=x^4-7x^2$
قانون مشتقّة مضاعف القوة	$f'(x)=4x^{4-1}-7(2x^{2-1})$
بالتبسيط	$=4x^3-14x$

ضرب المقادير الجبرية (الدرس 2)

أجد ناتج ضرب كُلّ ممّا يأتي بأبسط صورة:

㉝ $2x(x-4)$
$2x^2-8x$

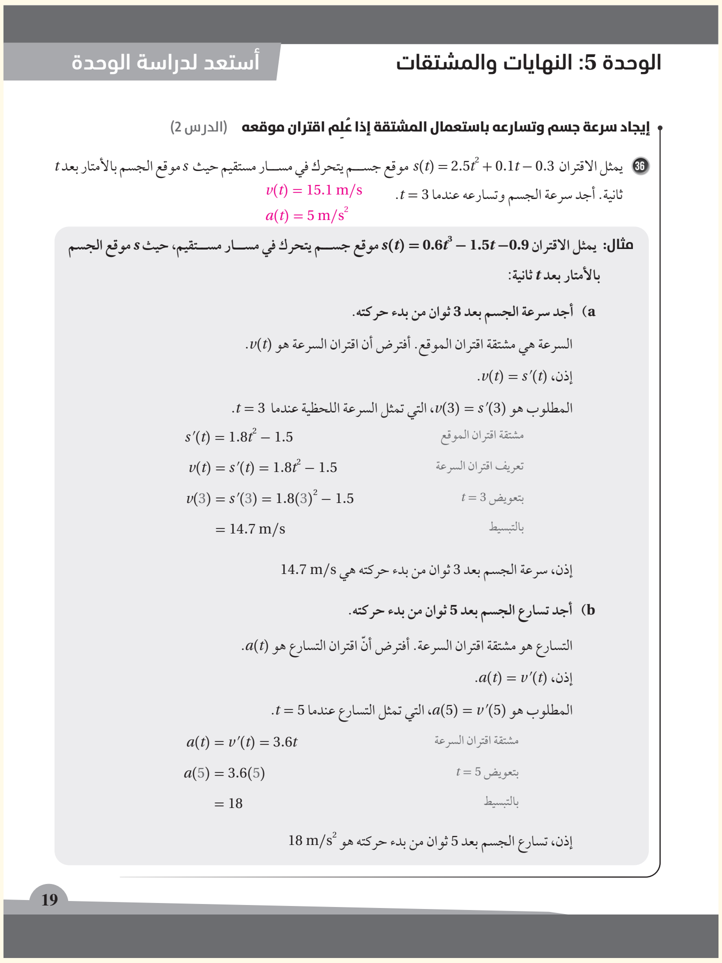
㉞ $(x+4)(x-5)$
x^2-x-20

㉟ $(3x+1)^2$
$9x^2+6x+1$

مثال: أجد ناتج ضرب $\boldsymbol{(2x+1)(5x-2)}$.

بفصل المقدار $2x+3$ إلى حدّين وضرب كُلٍّ منهما في المقدار $5x-2$	$(2x+3)(5x-2)=2x(5x-2)+3(5x-2)$
باستعمال خاصية التوزيع	$=(10x^2-4x)+(15x-6)$
بجمع الحدود المتشابهة	$=10x^2-4x+15x-6$
بالتبسيط	$=10x^2-11x-6$

18



الوحدة 5: النهايات والمشتقات

أستعد لدراسة الوحدة

إيجاد سرعة جسم وتسارعه باستعمال المشتقة إذا عُلِم اقتران موقعه (الدرس 2)

㊱ يمثل الاقتران $s(t)=2.5t^2+0.1t-0.3$ موقع جسم يتحرك في مسار مستقيم حيث s موقع الجسم بالأمتار بعد t ثانية. أجد سرعة الجسم وتسارعه عندما $t=3$.

$v(t)=15.1\text{ m/s}$

$a(t)=5\text{ m/s}^2$

مثال: يمثل الاقتران $\boldsymbol{s(t)=0.6t^3-1.5t-0.9}$ موقع جسم يتحرك في مسار مستقيم، حيث $\boldsymbol{s}$ موقع الجسم بالأمتار بعد $\boldsymbol{t}$ ثانية:

a) أجد سرعة الجسم بعد 3 ثوان من بدء حركته.

السرعة هي مشتقة اقتران الموقع. أفترض أن اقتران السرعة هو $v(t)$.

إذن، $v(t)=s'(t)$.

المطلوب هو $v(3)=s'(3)$، التي تمثل السرعة اللحظية عندما $t=3$.

مشتقة اقتران الموقع	$s'(t)=1.8t^2-1.5$
تعريف اقتران السرعة	$v(t)=s'(t)=1.8t^2-1.5$
بتعويض $t=3$	$v(3)=s'(3)=1.8(3)^2-1.5$
بالتبسيط	$=14.7\text{ m/s}$

إذن، سرعة الجسم بعد 3 ثوان من بدء حركته هي 14.7 m/s

b) أجد تسارع الجسم بعد 5 ثوان من بدء حركته.

التسارع هو مشتقة اقتران السرعة. أفترض أنّ اقتران التسارع هو $a(t)$.

إذن، $a(t)=v'(t)$.

المطلوب هو $a(5)=v'(5)$، التي تمثل التسارع عندما $t=5$.

مشتقة اقتران السرعة	$a(t)=v'(t)=3.6t$
بتعويض $t=5$	$a(5)=3.6(5)$
بالتبسيط	$=18$

إذن، تسارع الجسم بعد 5 ثوان من بدء حركته هو 18 m/s^2

19

الوحدة 5: النهايات والمشتقات

أستعد لدراسة الوحدة

حلّ المعادلات التربيعية (الدرس 3)

أحلّ كلًّا من المعادلات الآتية: (37–42): أنظر ملحق الإجابات.

㊲ $x^2-9x+8=0$

㊳ $x^2-9=0$

㊴ $x^2=3x$

㊵ $x^2+8x=20$

㊶ $x^2=121$

㊷ $x^2+1=0$

مثال: أحلّ كلًّا من المعادلات الآتية:

a) $\boldsymbol{x^2=-5x}$

المعادلة المعطاة	$x^2=-5x$
بجمع $5x$ إلى طرفي المعادلة	$x^2+5x=0$
بإخراج العامل المشترك الأكبر	$x(x+5)=0$
خاصية الضرب الصفري	$x=0 \quad \text{or} \quad x+5=0$
بحلّ كلّ معادلة	$x=-5$

إذن، الجذران هما: 0, −5

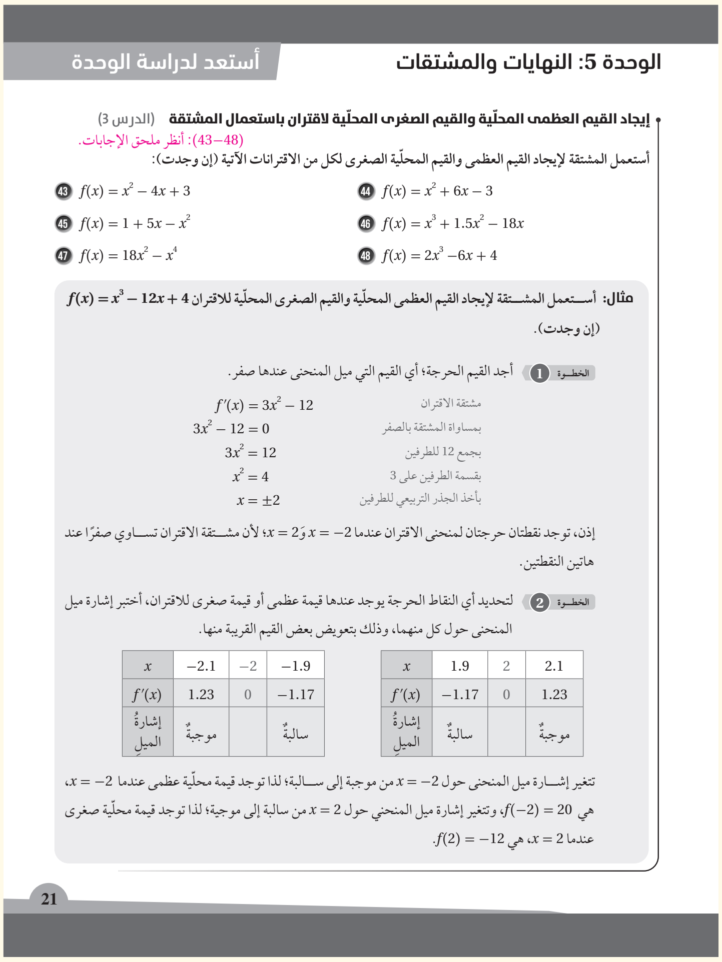
b) $\boldsymbol{x^2-8x+12=0}$

المعادلة المعطاة	$x^2-8x+12=0$
بالتحليل إلى العوامل	$(x-6)(x-2)=0$
خاصية الضرب الصفري	$x-6=0 \quad \text{or} \quad x-2=0$
بحلّ كلّ معادلة	$x=6 \qquad x=2$

إذن، الجذران هما: 6, 2

20

كتاب التمارين



- **إيجاد القيم العظمى المحلّية والقيم الصغرى المحلّية لاقتران باستعمال المشتقة** (الدرس 3)

(43–48): أنظر ملحق الإجابات.

أستعمل المشتقة لإيجاد القيم العظمى والقيم المحلّية الصغرى لكل من الاقترانات الآتية (إن وجدت):

㊸ $f(x) = x^2 - 4x + 3$

㊹ $f(x) = x^2 + 6x - 3$

㊺ $f(x) = 1 + 5x - x^2$

㊻ $f(x) = x^3 + 1.5x^2 - 18x$

㊼ $f(x) = 18x^2 - x^4$

㊽ $f(x) = 2x^3 - 6x + 4$

مثال: أستعمل المشتقة لإيجاد القيم العظمى المحلّية والقيم الصغرى المحلّية للاقتران $f(x) = x^3 - 12x + 4$ (إن وجدت).

الخطوة ① أجد القيم الحرجة؛ أي القيم التي ميل المنحنى عندها صفر.

$f'(x) = 3x^2 - 12$ مشتقة الاقتران

$3x^2 - 12 = 0$ بمساواة المشتقة بالصفر

$3x^2 = 12$ بجمع 12 للطرفين

$x^2 = 4$ بقسمة الطرفين على 3

$x = \pm 2$ بأخذ الجذر التربيعي للطرفين

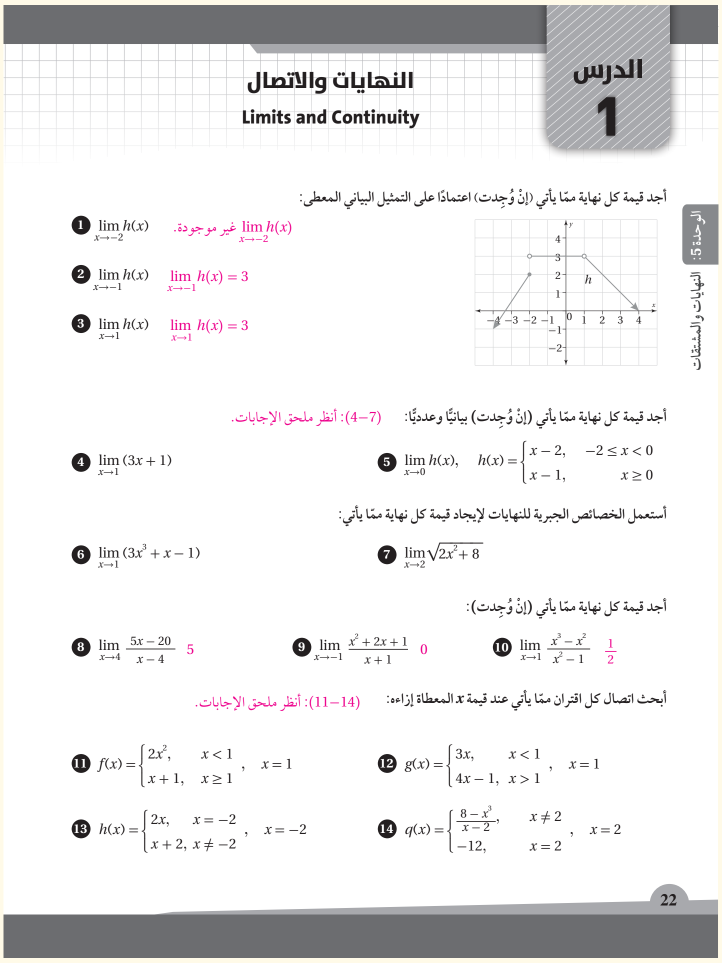
إذن، توجد نقطتان حرجتان لمنحنى الاقتران عندما $x = -2$ وَ $x = 2$؛ لأن مشتقة الاقتران تساوي صفرًا عند هاتين النقطتين.

الخطوة ② لتحديد أي النقاط الحرجة يوجد عندها قيمة عظمى أو قيمة صغرى للاقتران، أختبر إشارة ميل المنحنى حول كل منهما، وذلك بتعويض بعض القيم القريبة منها.

x	1.9	2	2.1
$f'(x)$	−1.17	0	1.23
إشارةُ الميلِ	سالبةٌ		موجبةٌ

x	−2.1	−2	−1.9
$f'(x)$	1.23	0	−1.17
إشارةُ الميلِ	موجبةٌ		سالبةٌ

تتغير إشارة ميل المنحنى حول $x = -2$ من موجبة إلى سالبة؛ لذا توجد قيمة محلّية عظمى عندما $x = -2$، هي $f(-2) = 20$، وتتغير إشارة ميل المنحني حول $x = 2$ من سالبة إلى موجبة؛ لذا توجد قيمة محلّية صغرى عندما $x = 2$، هي $f(2) = -12$.



الدرس 1

النهايات والاتصال
Limits and Continuity

أجد قيمة كل نهاية ممّا يأتي (إنْ وُجِدت) اعتمادًا على التمثيل البياني المعطى:

❶ $\lim_{x\to -2} h(x)$ — $\lim_{x\to -2} h(x)$ غير موجودة.

❷ $\lim_{x\to -1} h(x)$ — $\lim_{x\to -1} h(x) = 3$

❸ $\lim_{x\to 1} h(x)$ — $\lim_{x\to 1} h(x) = 3$

أجد قيمة كل نهاية ممّا يأتي (إنْ وُجِدت) بيانيًّا وعدديًّا: (4–7): أنظر ملحق الإجابات.

❹ $\lim_{x\to 1} (3x + 1)$

❺ $\lim_{x\to 0} h(x), \quad h(x) = \begin{cases} x - 2, & -2 \le x < 0 \\ x - 1, & x \ge 0 \end{cases}$

أستعمل الخصائص الجبرية للنهايات لإيجاد قيمة كل نهاية ممّا يأتي:

❻ $\lim_{x\to 1} (3x^3 + x - 1)$

❼ $\lim_{x\to 2} \sqrt{2x^2 + 8}$

أجد قيمة كل نهاية ممّا يأتي (إنْ وُجِدت):

❽ $\lim_{x\to 4} \frac{5x - 20}{x - 4}$ — 5

❾ $\lim_{x\to -1} \frac{x^2 + 2x + 1}{x + 1}$ — 0

❿ $\lim_{x\to 1} \frac{x^3 - x^2}{x^2 - 1}$ — $\frac{1}{2}$

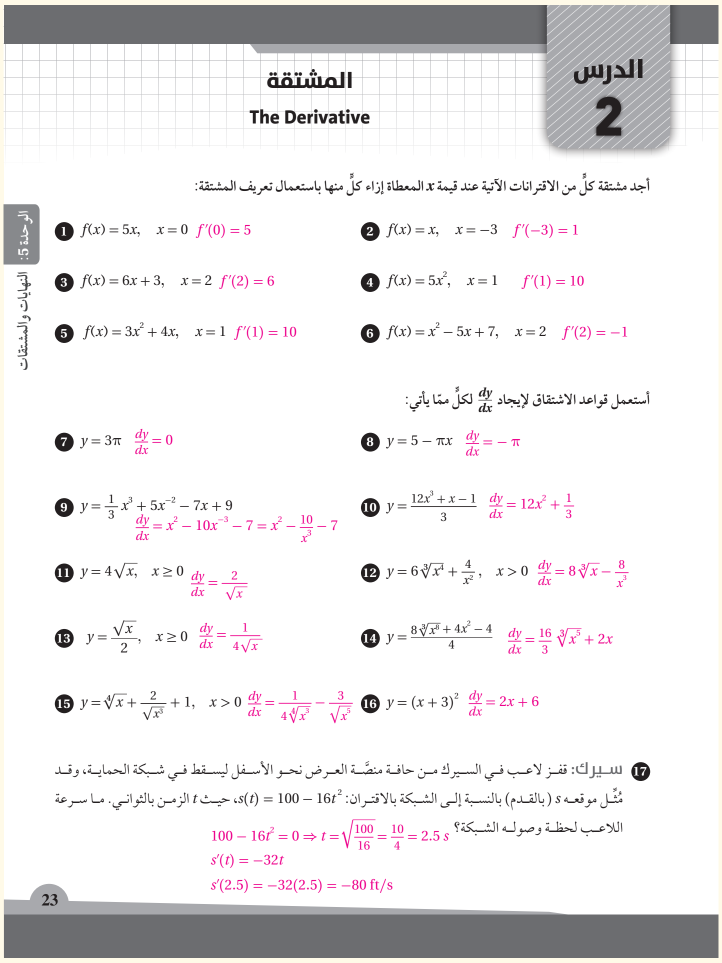
أبحث اتصال كل اقتران ممّا يأتي عند قيمة x المعطاة إزاءه: (11–14): أنظر ملحق الإجابات.

⓫ $f(x) = \begin{cases} 2x^2, & x < 1 \\ x + 1, & x \ge 1 \end{cases}, \quad x = 1$

⓬ $g(x) = \begin{cases} 3x, & x < 1 \\ 4x - 1, & x > 1 \end{cases}, \quad x = 1$

⓭ $h(x) = \begin{cases} 2x, & x = -2 \\ x + 2, & x \ne -2 \end{cases}, \quad x = -2$

⓮ $q(x) = \begin{cases} \frac{8 - x^3}{x - 2}, & x \ne 2 \\ -12, & x = 2 \end{cases}, \quad x = 2$



الدرس 2

المشتقة
The Derivative

أجد مشتقة كلٍّ من الاقترانات الآتية عند قيمة x المعطاة إزاء كلٍّ منها باستعمال تعريف المشتقة:

❶ $f(x) = 5x, \quad x = 0$ — $f'(0) = 5$

❷ $f(x) = x, \quad x = -3$ — $f'(-3) = 1$

❸ $f(x) = 6x + 3, \quad x = 2$ — $f'(2) = 6$

❹ $f(x) = 5x^2, \quad x = 1$ — $f'(1) = 10$

❺ $f(x) = 3x^2 + 4x, \quad x = 1$ — $f'(1) = 10$

❻ $f(x) = x^2 - 5x + 7, \quad x = 2$ — $f'(2) = -1$

أستعمل قواعد الاشتقاق لإيجاد $\frac{dy}{dx}$ لكلٍّ ممّا يأتي:

❼ $y = 3\pi$ — $\frac{dy}{dx} = 0$

❽ $y = 5 - \pi x$ — $\frac{dy}{dx} = -\pi$

❾ $y = \frac{1}{3}x^3 + 5x^{-2} - 7x + 9$ — $\frac{dy}{dx} = x^2 - 10x^{-3} - 7 = x^2 - \frac{10}{x^3} - 7$

❿ $y = \frac{12x^3 + x - 1}{3}$ — $\frac{dy}{dx} = 12x^2 + \frac{1}{3}$

⓫ $y = 4\sqrt{x}, \quad x \ge 0$ — $\frac{dy}{dx} = \frac{2}{\sqrt{x}}$

⓬ $y = 6\sqrt[3]{x^4} + \frac{4}{x^2}, \quad x > 0$ — $\frac{dy}{dx} = 8\sqrt[3]{x} - \frac{8}{x^3}$

⓭ $y = \frac{\sqrt{x}}{2}, \quad x \ge 0$ — $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{4\sqrt{x}}$

⓮ $y = \frac{8\sqrt[3]{x^8} + 4x^2 - 4}{4}$ — $\frac{dy}{dx} = \frac{16}{3}\sqrt[3]{x^5} + 2x$

⓯ $y = \sqrt[4]{x} + \frac{2}{\sqrt{x^3}} + 1, \quad x > 0$ — $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}} - \frac{3}{\sqrt{x^5}}$

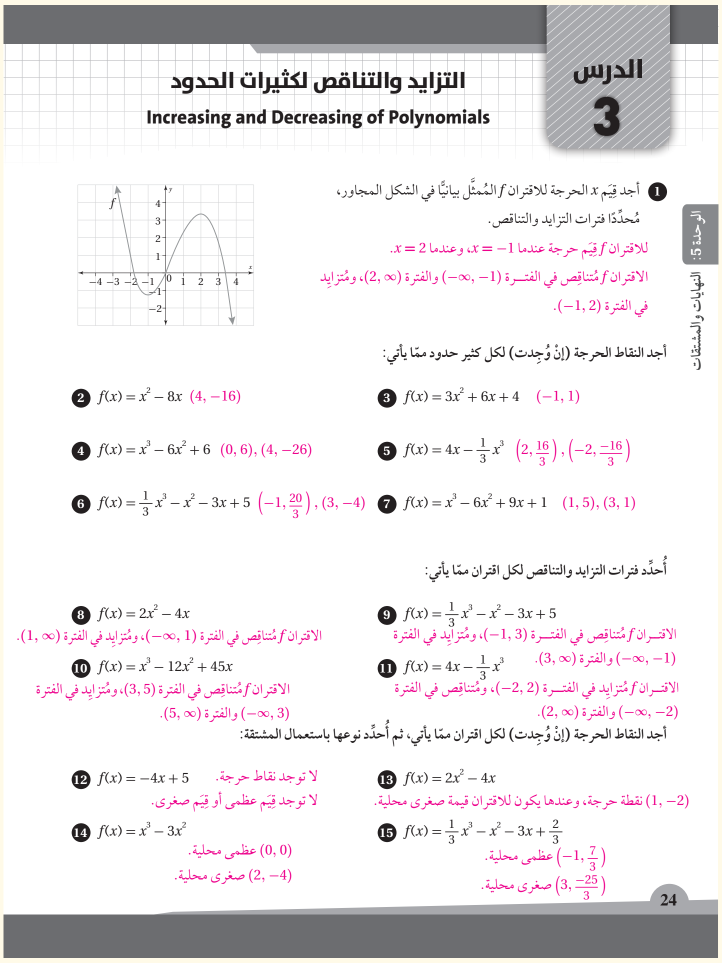
⓰ $y = (x + 3)^2$ — $\frac{dy}{dx} = 2x + 6$

⓱ **سيرك:** قفز لاعب في السيرك من حافة منصّة العرض نحو الأسفل ليسقط في شبكة الحماية، وقد مُثِّل موقعه s (بالقدم) بالنسبة إلى الشبكة بالاقتران: $s(t) = 100 - 16t^2$، حيث t الزمن بالثواني. ما سرعة اللاعب لحظة وصوله الشبكة؟

$100 - 16t^2 = 0 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{100}{16}} = \frac{10}{4} = 2.5\ s$

$s'(t) = -32t$

$s'(2.5) = -32(2.5) = -80$ ft/s



الدرس 3

التزايد والتناقص لكثيرات الحدود
Increasing and Decreasing of Polynomials

❶ أجد قِيَم x الحرجة للاقتران f المُمثَّل بيانيًّا في الشكل المجاور، مُحدِّدًا فترات التزايد والتناقص.

للاقتران f قِيَم حرجة عندما $x = -1$، وعندما $x = 2$.

الاقتران f مُتناقِص في الفترة $(-\infty, -1)$ والفترة $(2, \infty)$، ومُتزايِد في الفترة $(-1, 2)$.

أجد النقاط الحرجة (إنْ وُجِدت) لكل كثير حدود ممّا يأتي:

❷ $f(x) = x^2 - 8x$ — $(4, -16)$

❸ $f(x) = 3x^2 + 6x + 4$ — $(-1, 1)$

❹ $f(x) = x^3 - 6x^2 + 6$ — $(0, 6), (4, -26)$

❺ $f(x) = 4x - \frac{1}{3}x^3$ — $\left(2, \frac{16}{3}\right), \left(-2, \frac{-16}{3}\right)$

❻ $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 5$ — $\left(-1, \frac{20}{3}\right), (3, -4)$

❼ $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$ — $(1, 5), (3, 1)$

أُحدِّد فترات التزايد والتناقص لكل اقتران ممّا يأتي:

❽ $f(x) = 2x^2 - 4x$

الاقتران f مُتناقِص في الفترة $(-\infty, 1)$، ومُتزايِد في الفترة $(1, \infty)$.

❾ $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 5$

الاقتران f مُتناقِص في الفترة $(-1, 3)$، ومُتزايِد في الفترة $(-\infty, -1)$ والفترة $(3, \infty)$.

❿ $f(x) = x^3 - 12x^2 + 45x$

الاقتران f مُتناقِص في الفترة $(3, 5)$، ومُتزايِد في الفترة $(-\infty, 3)$ والفترة $(5, \infty)$.

⓫ $f(x) = 4x - \frac{1}{3}x^3$

الاقتران f مُتزايِد في الفترة $(-2, 2)$، ومُتناقِص في الفترة $(-\infty, -2)$ والفترة $(2, \infty)$.

أجد النقاط الحرجة (إنْ وُجِدت) لكل اقتران ممّا يأتي، ثم أُحدِّد نوعها باستعمال المشتقة:

⓬ $f(x) = -4x + 5$

لا توجد نقاط حرجة.
لا توجد قِيَم عظمى أو قِيَم صغرى.

⓭ $f(x) = 2x^2 - 4x$

$(1, -2)$ نقطة حرجة، وعندها يكون للاقتران قيمة صغرى محلية.

⓮ $f(x) = x^3 - 3x^2$

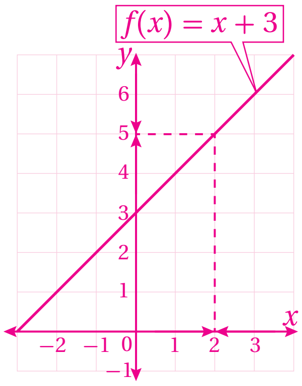
$(0, 0)$ عظمى محلية.
$(2, -4)$ صغرى محلية.

⓯ $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + \frac{2}{3}$

$\left(-1, \frac{7}{3}\right)$ عظمى محلية.
$\left(3, \frac{-25}{3}\right)$ صغرى محلية.

الدرس 1 – إجابة الأسئلة في بند (أتدرّب وأحل المسائل):

1) بيانيًّا (من الشكل المجاور).



$\lim_{x\to 2^+}(x+3) = \lim_{x\to 2^-}(x+3) = 5$

إذن: $\lim_{x\to 2}(x+3) = 5$.

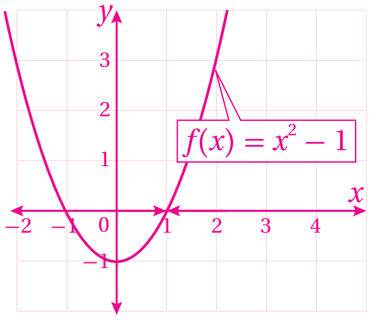
عدديًّا (من الجدول الآتي).

x	1.9	1.99	1.999	2	2.001	2.01	2.1
$f(x)$	4.9	4.99	4.999	5	5.001	5.01	5.1

$\lim_{x\to 2^+}(x+3) = \lim_{x\to 2^-}(x+3) = 5$

إذن: $\lim_{x\to 2}(x+3) = 5$.

2) بيانيًّا (من الشكل المجاور).



$\lim_{x\to 1^+}(x^2-1) = \lim_{x\to 1^-}(x^2-1)=0$

إذن: $\lim_{x\to 1}(x^2-1) = 0$.

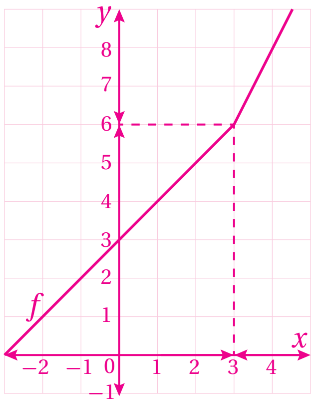
عدديًّا (من الجدول الآتي).

x	0.9	0.99	0.999	1	1.001	1.01	1.1
$f(x)$	−0.19	−0.0199	−0.001999	0	0.002001	0.0201	0.21

$\lim_{x\to 1^+}(x^2-1) = \lim_{x\to 1^-}(x^2-1) = 0$

إذن: $\lim_{x\to 1}(x^2-1) = 0$.

3) بيانيًّا (من الشكل المجاور).



$\lim_{x\to 3^+} f(x) = 6$

$\lim_{x\to 3^-} f(x) = 6$

إذن: $\lim_{x\to 3} f(x) = 6$.

عدديًّا (من الجدول الآتي).

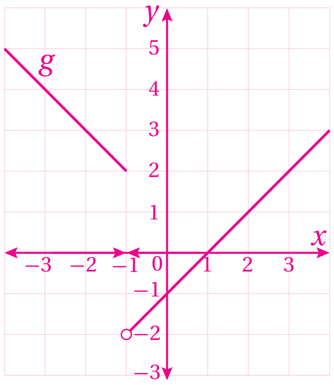
x	2.9	2.99	2.999	3	3.001	3.01	3.1
$f(x)$	5.9	5.99	5.999	6	6.002	6.02	6.2

$\lim_{x\to 3^+} f(x) = 6$

$\lim_{x\to 3^-} f(x) = 6$

إذن: $\lim_{x\to 3} f(x) = 6$.

4) بيانيًّا (من الشكل المجاور).



$\lim_{x\to -1^+} g(x) = -2$

$\lim_{x\to -1^-} g(x) = 2$

أيْ إنَّ: $\lim_{x\to -1^+} g(x) \neq \lim_{x\to -1^-} g(x)$

إذن: $\lim_{x\to -1} g(x)$ غير موجودة.

عدديًّا (من الجدول الآتي).

x	−1.1	−1.01	−1.001	−1	−0.999	−0.99	−0.9
$f(x)$	2.1	2.01	2.001		−1.999	−1.99	−1.9

$\lim_{x\to -1^+} g(x) = -2$

$\lim_{x\to -1^-} g(x) = 2$

أيْ إنَّ: $\lim_{x\to -1^+} g(x) \neq \lim_{x\to -1^-} g(x)$

إذن: $\lim_{x\to -1} g(x)$ غير موجودة.

17) $f(x)=\begin{cases}2x & ,x<2\\ x^2 & ,x\geq 2\end{cases}\quad ,\quad x=2$

$f(2)=2^2=4$

$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}(x^2)=4$

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}(2x)=4$

$\lim\limits_{x\to 2} f(x)=4$

أيْ إنَّ: $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=4=f(2)$.

إذن: الاقتران f متصل عندما $x=2$.

18) $f(x)=\begin{cases}3x+5 & ,x<-1\\ x^3 & ,x\geq -1\end{cases}\quad ,\quad x=-1$

$f(-1)=(-1)^3=-1$

$\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+}(x^3)=-1$

$\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^-}(3x+5)=2$

بما أنَّ $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)\neq\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)$، فإنَّ $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ غير موجودة.

إذن: الاقتران f غير متصل عندما $x=-1$.

19) $f(x)=x^2+2x+3,\ x=0$

$f(0)=3$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}(x^2+2x+3)=3$

أيْ إنَّ: $\lim\limits_{x\to 0}(x)=3=f(0)$.

إذن: الاقتران f متصل عندما $x=0$.

20) $h(x)=\dfrac{x^3+8}{2},\ x=2$

$h(2)=\dfrac{2^3+8}{2}=8$

$\lim\limits_{x\to 2} h(x)=\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{x^3+8}{2}\right)=8$

أيْ إنَّ: $\lim\limits_{x\to 2} h(x)=8=h(2)$.

إذن: الاقتران h متصل عندما $x=2$.

21) $g(x)=\dfrac{2x^2+3x+2}{x+2},\ x=-2$

بما أنَّ الاقتران النسبي g غير مُعرَّف عندما $x=-2$ (لأنَّها تجعل مقامه صفرًا)، فإنَّ g غير متصل عندما $x=-2$.

22) بما أنَّ الاقتران f غير مُعرَّف عندما $x=-1$، فإنَّه غير متصل عندما $x=-1$.

25) إجابة مُحتمَلة: $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x+1}$

أنظر تبرير الطلبة.

26) بما أنَّ $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ موجودة، فإنَّ $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)$

$$\lim_{x\to 3^+}(2+\sqrt{k})=\lim_{x\to 3^-}(x+3)$$

$$2+\sqrt{k}=6$$

$$\sqrt{k}=4$$

$$k=16$$

27) عندما $x=-4$، فإنَّ الاقتران f لا يكون متصلًا؛ لأنَّه غير مُعرَّف عندما $x=-4$، لوجود الفجوة في تمثيله البياني. أمّا إذا كان $x=2$، وبالرغم من أنَّ الاقتران f مُعرَّف عند ذلك، حيث: $f(2)=1$، فإنَّه لا يكون متصلًا عندما $x=2$؛ نظرًا إلى اختلاف قيمته عند العدد 2 عن قيمة نهايته عندما تقترب x من العدد 2، حيث: $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=-4$.

28) بما أنَّ الاقتران f متصل عندما $x=3$، فإنَّ:

$$f(3)=\lim_{x\to 3} f(x)$$

$$3^2+k=\lim_{x\to 3}(x+3)$$

$$9+k=6$$

$$k=-3$$

الدرس 2 – إجابة الأسئلة في بند (أتدرَّب وأحل المسائل):

3)
$$f'(2) = \lim_{h\to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{(2+h)^2 + (2+h) - (6)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{(4+4h+h^2) + (2+h) - 6}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{6 + 5h + h^2 - 6}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{5h + h^2}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{h(5+h)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} (5+h) = 5$$

4)
$$f'(-1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{(-1+h)^2 - 2(-1+h) + 3 - (6)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{(1 - 2h + h^2) + (2 - 2h) - 3}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{3 - 4h + h^2 - 3}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{-4h + h^2}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{h(-4+h)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} (-4+h) = -4$$

5)
$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{4(x+h) + 1 - (4x+1)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{4x + 4h + 1 - 4x - 1}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{4h}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} 4$$
$$= 4$$

6)
$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{1 - (x+h) - (1-x)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{1 - x - h - 1 + x}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{-h}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} (-1)$$
$$= -1$$

7)
$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{2}(x+h)^2 - 1 - (\frac{1}{2}x^2 - 1)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{2}(x^2 + 2xh + h^2) - 1 - (\frac{1}{2}x^2 - 1)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{2}x^2 + xh + \frac{1}{2}h^2 - 1 - \frac{1}{2}x^2 + 1}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{xh + \frac{1}{2}h^2}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{h(x + \frac{1}{2}h)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} (x + \frac{1}{2}h)$$
$$= x$$

8) $y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$
$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{3}(x+h) + \frac{2}{3} - (\frac{1}{3}x + \frac{2}{3})}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}h + \frac{2}{3} - \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{3}h}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{3}$$
$$= \frac{1}{3}$$

الدرس 3 – إجابة الأسئلة في بند (أتدرَّب وأحل المسائل):

5) مُتزايِد في الفترة $(-\infty, \infty)$.

6) مُتناقِص في الفترة $(-\infty, \infty)$.

7) مُتناقِص في $(-\infty, 0)$، ومُتزايِد في الفترة $(0, \infty)$.

8) مُتناقِص في الفترة $(-\infty, \frac{1}{2})$، ومُتزايِد في الفترة $(\frac{1}{2}, \infty)$.

9) مُتناقِص في الفترة $(-\infty, 2.5)$، ومُتزايِد في الفترة $(2.5, \infty)$.

10) مُتناقِص في الفترة $(0, 1)$، ومُتزايِد في الفترة $(-\infty, 0)$ والفترة $(1, \infty)$.

11) مُتناقِص في الفترة $(-\infty, 3)$، ومُتزايِد في الفترة $(3, \infty)$.

12) مُتناقِص في الفترة $(-\infty, 1)$، ومُتزايِد في الفترة $(1, \infty)$.

13) مُتزايِد في الفترة $(-\infty, \infty)$.

14) مُتناقِص في الفترة $(-\infty, \infty)$.

15) مُتزايِد في الفترة $(-\infty, \infty)$.

16) مُتناقِص في الفترة $(-1, 3)$، ومُتزايِد في الفترة $(-\infty, -1)$ والفترة $(3, \infty)$.

17) $(3, -81)$ صغرى محلية، و $(-2, 44)$ عظمى محلية.

18) $(5, \frac{100}{3})$ صغرى محلية، و $(3, 36)$ عظمى محلية.

19) $(1, \frac{-14}{3})$ صغرى محلية، و $(-2, \frac{40}{3})$ عظمى محلية.

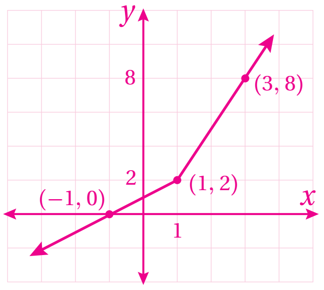
20) $(2, 1)$ عظمى محلية.

كتاب التمارين – إجابة الأسئلة في بند (أستعد لدراسة الوحدة):

1)

x	-1	1
$y = f(x) = x + 1$	0	2
(x, y)	$(-1, 0)$	$(1, 2)$

x	1	3
$y = f(x) = 3x - 1$	2	8
(x, y)	$(1, 2)$	$(3, 8)$

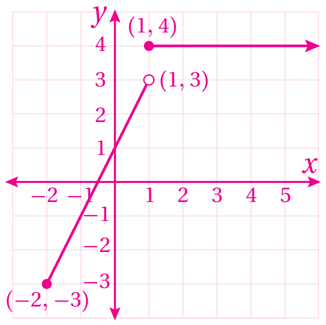


المجال هو: مجموعة الأعداد الحقيقية جميعها.

المدى هو: مجموعة الأعداد الحقيقية جميعها.

2)

x	-2	1
$y = f(x) = 2x + 1$	-3	3
(x, y)	$(-2, -3)$	$(1, 3)$



المجال هو: الفترة $[-2, \infty)$.

المدى هو: $[-3, 3) \cup \{4\}$.

37) $(x-8)(x-1)=0$

$\Rightarrow x-8=0, \text{ or } \ x-1=0$

$\Rightarrow x=8 \ \text{ or } \ x=1$

38) $(x-3)(x+3)=0$

$\Rightarrow x-3=0 \quad \text{or} \quad x+3=0$

$\Rightarrow x=3 \quad \text{or} \quad x=-3$

39) $x^2-3x=0$

$x(x-3)=0$

$\Rightarrow x=0 \quad \text{or} \quad x-3=0$

$\Rightarrow x=0 \quad \text{or} \quad x=3$

40) $x^2+8x-20=0$

$(x-2)(x+10)=0$

$\Rightarrow x-2=0 \quad \text{or} \quad x+10=0$

$\Rightarrow x=2 \quad \text{or} \quad x=-10$

41) $x^2-121=0$

$(x-11)(x+11)=0$

$\Rightarrow x-11=0 \quad \text{or} \quad x+11=0$

$\Rightarrow x=11 \quad \text{or} \quad x=-11$

42) $x^2=-1$

ليس لها حل حقيقي؛ لأنَّه لا يوجد عدد حقيقي مربعه يساوي 1−، ولأنَّ مُميِّز المعادلة: $x^2+1=0$ هو: $\Delta = 0^2-4\times1\times1=-4$.

43) $f(2)=-1$ قيمة صغرى محلية.

44) $f(-3)=-12$ قيمة صغرى محلية.

45) $f(2.5)=7.25$ قيمة عظمى محلية.

46) $f(-3)=40.5$ قيمة عظمى محلية.

$f(2)=-22$ قيمة صغرى محلية.

47) $f(-3)=81$ قيمة عظمى محلية.

$f(3)=81$ قيمة عظمى محلية.

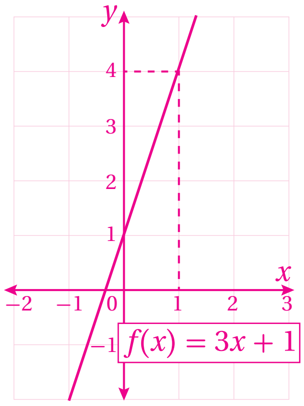
$f(0)=0$ قيمة صغرى محلية.

48) $f(-1)=8$ قيمة عظمى محلية.

$f(1)=0$ قيمة صغرى محلية.

كتاب التمارين – إجابة أسئلة الدرس (1):

4) بيانيًا (من الشكل المجاور).



$$\lim_{x\to1^+}(3x+1)=\lim_{x\to1^-}(3x+1)=4$$

إذن: $\lim_{x\to1}(3x+1)=4$.

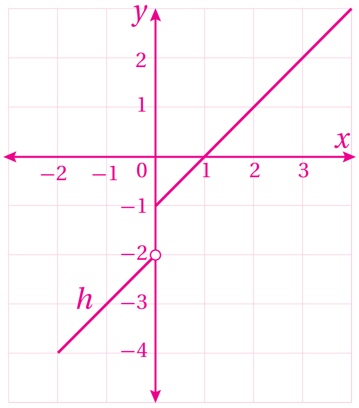
عدديًا (من الجدول الآتي).

x	0.9	0.99	0.999	1	1.001	1.01	1.1
$f(x)$	3.7	3.97	3.997	4	4.003	4.03	4.3

$$\lim_{x\to1^+}(3x+1)=\lim_{x\to1^-}(3x+1)=4$$

إذن: $\lim_{x\to1}(3x+1)=4$.

5) بيانيًّا (من الشكل المجاور).



$$\lim_{x\to 0^+} h(x) = -1$$

$$\lim_{x\to 0^-} h(x) = -2$$

أيْ إنَّ: $\lim_{x\to 0^+} h(x) \neq \lim_{x\to 0^-} h(x)$

إذن: $\lim_{x\to 0} h(x)$ غير موجودة.

عدديًّا (من الجدول الآتي).

x	-0.1	-0.01	$-.001$	0	0.001	0.01	0.1
$f(x)$	-2.1	-2.01	-2.001		-0.999	-0.99	-0.9

$$\lim_{x\to 0^+} h(x) = -1$$

$$\lim_{x\to 0^-} h(x) = -2$$

أيْ إنَّ: $\lim_{x\to 0^+} h(x) \neq \lim_{x\to 0^-} h(x)$

إذن: $\lim_{x\to 0} h(x)$ غير موجودة.

6) $\lim_{x\to 1} (3x^3 + x - 1)$

$$= \lim_{x\to 1} (3x^3) + \lim_{x\to 1} (x) - \lim_{x\to 1} (1)$$

$$= 3(\lim_{x\to 1} x)^3 + \lim_{x\to 1} (x) - \lim_{x\to 1} (1)$$

$$= 3(1)^3 + 1 - 1$$

$$= 3$$

7) $\lim_{x\to 2} \sqrt{2x^2 + 8}$

$$= \sqrt{\lim_{x\to 2} (2x^2 + 8)} = \sqrt{\lim_{x\to 2} (2x^2) + \lim_{x\to 2} (8)}$$

$$= \sqrt{2\times (\lim_{x\to 2} (x))^2 + \lim_{x\to 2} (8)} = \sqrt{2\times (2)^2 + 8}$$

$$= \sqrt{16}$$

$$= 4$$

11) $f(1) = 1 + 1 = 2$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (x + 1) = 2$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} (2x^2) = 2$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 1} f(x) = 2 = f(1)$$

إذن: f متصل عندما $x = 1$.

12) بما أنَّ g غير مُعرَّف عندما $x = 1$، فإنَّه غير متصل عندما $x = 1$.

13) $h(-2) = 2(-2) = -4$

$$\lim_{x\to -2} h(x) = \lim_{x\to -2} (x + 2) = 0$$

$$h(-2) \neq \lim_{x\to -2} h(x)$$

إذن: h غير متصل عندما $x = -2$.

14) $q(2) = -12$

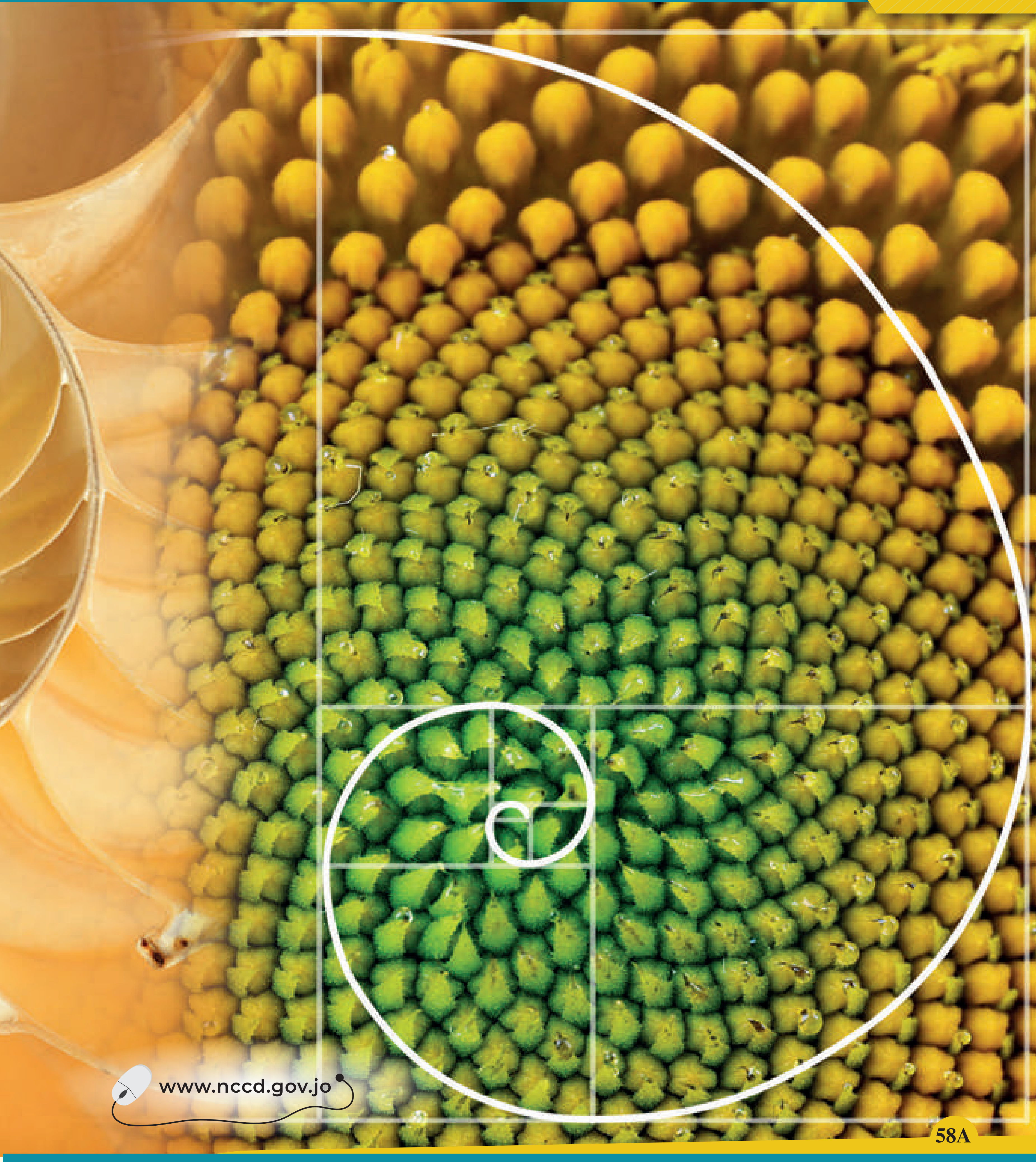
$$\lim_{x\to 2} q(x) = \lim_{x\to 2} \frac{8 - x^3}{x - 2} = -12$$

$$q(2) = \lim_{x\to 2} q(x) = -12$$

إذن: q متصل عندما $x = 2$.

المتتاليات والمتسلسلات

Sequences and Series



مُخطَّط الوحدة

اسم الدرس	النتاجات	المصطلحات	الأدوات اللازمة	عدد الحصص
الدرس 1: **المتتاليات والمتسلسلات.**	• تعرُّف المتتالية، والمتسلسلة، والحد، ورتبة الحد، والحد العام. • تصنيف المتتاليات والمتسلسلات إلى منتهية، وغير منتهية. • كتابة المتسلسلة باستعمال رمز المجموع. • كتابة حدود المتسلسلة: $\sum_{k=1}^{n} a_k$، وإيجاد مجموعها. • حساب مجموع متسلسلة باستعمال صيغ مجموع متسلسلات خاصة.	المتسلسلة. المتسلسلة المنتهية. المتسلسلة غير المنتهية. مجموع المتسلسلة. رمز المجموع.	• أقلام مُلوَّنة. • صور أنماط هندسية مُتنوِّعة.	4
الدرس 2: **المتتاليات والمتسلسلات الحسابية.**	• تعرُّف المتتالية الحسابية، والمتسلسلة الحسابية. • إيجاد الحد العام للمتتالية الحسابية. • إيجاد مجموع أوَّل n حدًّا من متتالية حسابية أو متسلسلة حسابية.	المتتالية الحسابية. أساس المتتالية الحسابية. المتسلسلة الحسابية.	• آلة حاسبة.	4
الدرس 3: **المتتاليات والمتسلسلات الهندسية.**	• تعرُّف المتتالية الهندسية، والمتسلسلة الهندسية. • إيجاد الحد العام للمتتالية الهندسية. • إيجاد مجموع أوَّل n حدًّا من متتالية هندسية أو متسلسلة هندسية.	المتتالية الهندسية. أساس المتتالية الهندسية. المتسلسلة الهندسية.	• آلة حاسبة. • مجموعة أوراق من حجم (A4).	4
الدرس 4: **المتسلسلات الهندسية اللانهائية.**	• تعرُّف المتسلسلات الهندسية المتقاربة، والمتسلسلات الهندسية المتباعدة. • إيجاد مجموع المتسلسلة الهندسية المتقاربة. • استعمال مجموع المتسلسلة الهندسية اللانهائية لكتابة الكسر العشري الدوري في صورة كسر عادي. • حل مسائل حياتية عن المتسلسلات الهندسية اللانهائية.	المتسلسلة الهندسية اللانهائية. المجموع الجزئي. المتسلسلة المتقاربة. المتسلسلة المتباعدة.	• لوح رسم بياني. • آلة حاسبة.	4
اختبار نهاية الوحدة.				2
مجموع الحصص:				18 حصة

الوحدة
6

نظرة عامة على الوحدة:

تعلَّم الطلبة سابقًا إكمال أنماط عددية تُمثِّل متتاليات خطية وتربيعية وتكعيبية، وإيجاد الحد العام لهذه المتتاليات إذا عُلِمت بعض حدودها، والتعبير عن أنماط هندسية بمتتاليات عددية وكتابة الحد العام لكلٍّ منها.

سيتعرَّف الطلبة في هذه الوحدة كُلًّا من المتسلسلات وعلاقتها بالمتتاليات، والمتتاليات الحسابية، والمتسلسلات الحسابية، والمتتاليات الهندسية، والمتسلسلات الهندسية المنتهية واللانهائية، وإيجاد الحد العام لكلٍّ منها، وكذا إيجاد مجموع المتسلسلة المنتهية، ومجموع المتسلسلة الهندسية اللانهائية المتقاربة. بعد ذلك سيُوظِّف الطلبة معرفتهم تلك في حل مسائل عملية حياتية عن المتتاليات والمتسلسلات.

الوحدة
6

المتتاليات والمتسلسلات
Sequences and Series

ما أهمية هذه الوحدة؟

يُمكِن نمذجة كثير من المواقف الحياتية والعلمية باستعمال المتتاليات والمتسلسلات، وهي أنماط عددية؛ ما يساعد على تحليل تلك المواقف وفهمها. تظهر المتتاليات في العديد من المخلوقات، مثل: زهرة دوّار الشمس، وصدفة الحلزون، ويُمكِن عن طريقها إجراء حسابات دقيقة عن تلك المخلوقات.

58

الوحدة 6

تعلَّمْتُ سابقًا:

- ✓ إكمال نمط عددي معطى.
- ✓ تحديد المجال والمدى لاقترانات كثيرات الحدود.
- ✓ إيجاد الحد العام لكلٍّ من المتتالية التربيعية، والمتتالية التكعيبية.
- ✓ التعبير عن الأنماط الهندسية بمتتاليات عددية.

سأتعلَّم في هذه الوحدة:

- ◄ المتسلسلات، وعلاقتها بالمتتاليات.
- ◄ المتتاليات والمتسلسلات الحسابية المنتهية.
- ◄ المتتاليات والمتسلسلات الهندسية المنتهية.
- ◄ المتتاليات والمتسلسلات الهندسية اللانهائية.

أستعمل تدريبات (أستعد لدراسة الوحدة) في الصفحات (25 – 27) من كتاب التمارين؛ لمراجعة هذه الموضوعات قبل البدء بدراسة الوحدة.

59

الترابط الرأسي بين الصفوف:

الصف العاشر:

- إكمال أنماط عددية معطاة.
- تحديد المجال والمدى لاقترانات كثيرات الحدود.
- إيجاد الحد العام لكلٍّ من المتتاليات الخطية، والمتتاليات التربيعية، والمتتاليات التكعيبية.
- التعبير عن أنماط هندسية بمتتاليات عددية، وإكمال النمط، وكتابة حده العام.

الصف الحادي عشر (الأدبي):

- إيجاد الحد العام، ومجموع أوَّل n حدًّا لمتتاليات حسابية ومتسلسلات حسابية.
- إيجاد الحد العام، ومجموع أوَّل n حدًّا لمتتاليات هندسية ومتسلسلات هندسية.
- إيجاد مجموع المتسلسلة الهندسية اللانهائية المتقاربة.
- حل مسائل حياتية عملية عن المتتاليات والمتسلسلات.

الصف الثاني عشر (الأدبي):

- توظيف المتسلسلات الهندسية في حساب الاحتمال للمُتغيِّر العشوائي الهندسي.

الدرس 1

نتاجات الدرس:

- تعـرُّف المتتالية، والمتسلسـلة، والحـد، ورتبة الحد، والحد العام.
- تصنيف المتتاليات والمتسلسـلات إلـى منتهية، وغير منتهية.
- كتابة المتسلسلة باستعمال رمز المجموع.
- كتابة حدود المتسلسلة: $\sum_{k=1}^{n} a_k$، وإيجاد مجموعها.
- حسـاب مجموع متسلسـلة باسـتعمال صيـغ مجموع متسلسلات خاصة.

نتاجات التعلُّم القبلي:

- إكمال أنماط عددية معطاة.
- كتابـة حـدود متتالية خطيـة، وتربيعيـة، وتكعيبية عُلِم حدها العام.
- إيجاد الحد العام لمتتاليات خطية، وتربيعية، وتكعيبية عُلِمت حدودها الأربعة أو الخمسة الأولى.
- التعبير عـن أنماط هندسـية بمتتاليات عدديـة وإيجاد حدها العام.

مراجعة التعلُّم القبلي:

- أُوجِّـه الطلبة في بداية كل حصة إلى الفقرة (الفقرات) المُرتبِطة بمـا سـيُقدَّم مـن موضوعـات الـدرس في الحصة (إنْ وُجِدت) ضمن صفحات **(أستعد لدراسة الوحـدة)** فـي كتـاب التمارين، ثـم أطلـب إليهم حل تدريباتها داخل الغرفة الصفية بصورة فردية.
- أتجـوَّل بين الطلبـة؛ لمتابعتهـم أثناء الحـل، وتحديد نقـاط ضعفهـم، وأُوجِّههم إلى مراجعـة المثال عندما يواجهون صعوبة في الحل.

الدرس 1

المتتاليات والمتسلسلات

Sequences and Series

فكرة الدرس تعرُّف المتسلسلة المنتهية، وإيجاد مجموعها.

المصطلحات المتسلسلة، المتسلسلة المنتهية، المتسلسلة غير المنتهية، رمز المجموع، مجموع المتسلسلة.

مسألة اليوم يمارس هيثم تمارين الضغط بانتظام، وقد استطاع أداء 25 ضغطة في الأسـبوع الأول، ثم تمكَّن من زيادة عددها أسبوعيًّا بمقدار 10 ضغطات. ما عدد الضغطات التي يُمكِنه أداؤها في الأسـبوع السادس عشر؟

تعلَّمْتُ سـابقًا أنَّ **المتتالية** هي مجموعة من الأعداد تَتْبَع ترتيبًا مُعيَّنًا، وأنَّ كل عدد فيها يُسمّى حدًّا. تكـون المتتالية **منتهية** إذا حوت عددًا منتهيًا من الحـدود، وتكون **غير منتهية** إذا حوت عددًا لانهائيًّا من الحدود.

متتالية غير منتهية	متتالية منتهية
2, 4, 6, 8, …	2, 4, 6, 8

تُعَـدُّ المتتالية اقترانًا مجالـه مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبـة، أو مجموعة جزئية منها، ومداه مجموعة جزئية من مجموعة الأعـداد الحقيقية؛ إذ يرتبط كل عدد صحيح في المجال بعدد حقيقي في المدى، هو أحد حدود المتتالية.

عند وضع إشـارات جمع (+) بين حدود المتتالية بدلًا من الفواصل، فإنَّها تُسـمّى **متسلسلة** (series).

أتذكَّر

الحد العـام هو علاقة تربـط كل حـد فـي المتتالية برتبته. ويُمكِن اسـتعمال الحـد العام لإيجـاد قيمـة أيِّ حد فـي المتتاليـة، وذلك بتعويـض رتبـة ذلك الحد في الحد العام.

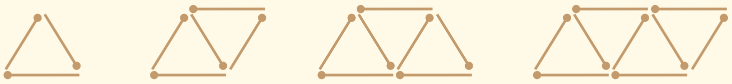
1 التهيئة

- أطرح على الطلبة السؤالين الآتيين:
  - أجد الحدين التاليين لكل متتالية ممّا يأتي:

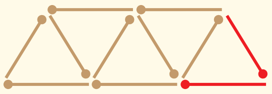
① $4, 8, 16, 32, \ldots$ $64, 128$

② $5, 9, 17, 33, \ldots$ $65, 129$

- يُمثِّل عدد أعواد الثقاب في النمط الهندسي الآتي متتالية عددية:



③ أرسم الشكل الخامس في هذا النمط.



④ أجد عدد أعواد الثقاب في الشكل رقم n. $2n + 1$

- أُناقِش الطلبة في حل الأسئلة السابقة، وأطلب إليهم تبرير إجاباتهم.

2 الاستكشاف

- أُوجِّه الطلبة إلى قراءة المسألة الواردة في بند (**مسألة اليوم**)، ثم أسألهم:
  - كم ضغطةً أدّى حسام في الأسبوع الأوَّل؟ 25
  - كم ضغطةً أدّى حسام في الأسبوع الثاني؟ 35
  - كم ضغطةً يُمكِن لحسام أداؤها في الأسبوع الرابع؟ 55
  - ما العلاقة بين عدد الضغطات التي يؤدّيها حسام في أيِّ أسبوع وعددها في الأسبوع السابق؟ تزيد بمقدار 10 ضغطات.
  - أكتب عدد الضغطات التي يؤدّيها حسام في الأسابيع الخمسة الأولى؟ $25, 35, 45, 55, 65$
  - كيف يُمكِن إيجاد عدد الضغطات التي يُمكِن لحسام أداؤها في الأسبوع السادس عشر؟
- أُخبِر الطلبة أنَّهم سيتعرَّفون إجابة السؤال السابق في هذا الدرس.
- أُناقِش الطلبة في إجاباتهم، ثم أسألهم:
  - ما رأيكم/ رأيكن في إجابة زميلكم/ زميلتكن؟
  - مَنْ يتفق/ تتفق مع إجابة زميله/ زميلتها؟
- أُعزِّز الإجابات الصحيحة.

- المجال العاطفي لا يقل أهمية عن المجال المعرفي؛ لذا لا يجب أنْ أقول للطالب/ للطالبة: "إجابتك خطأ"، بل أقول له/ لها: "لقد اقتربت من الإجابة الصحيحة، فمَنْ يستطيع إعطاء إجابة أُخرى؟"، ثم أشكره/ أشكرها على محاولة الإجابة عن السؤال. بعد ذلك أطلب إلى غيره/ غيرها الإجابة عن السؤال؛ لتعرُّف الإجابة الصحيحة، مُعزِّزًا إيّاه/ إيّاها، ثم أطلب إلى الطالب الأوَّل/ الطالبة الأولى الإجابة عن السؤال مَرَّة أُخرى، وأُعزِّزه/ أُعزِّزها كما عزَّزت مَنْ أجاب عن السؤال نفسه إجابة صحيحة.

المفاهيم العابرة للمواد:

أُؤكِّد المفاهيم العابرة للمواد حيثما وردت في كتاب الطالب أو كتاب التمارين. ففي مسألة اليوم، أُعزِّز لدى الطلبة الوعي بأهمية ممارسة التمارين الرياضية بوجه عام، ودورها في الحفاظ على لياقة الجسم وصحَّة الجهاز الدوري، وتحسين الحالة المزاجية، وتعزيز الثقة بالنفس، وتقدير الذات.

3 التدريس

مثال 1

- أُوضِّح للطلبة العلاقة بين المتسلسلات والمتتاليات، وأنَّه في حال وضع إشارة جمع $(+)$ بين حدود المتتالية بدلًا من الفاصلة، فإنَّ المتتالية تتحوَّل إلى متسلسلة، ويُمكِن عندئذٍ إيجاد مجموعها إنْ كانت منتهية.
- أُوضِّح للطلبة كيف يُمكِن كتابة المتسلسلة بصورة مختصرة باستعمال رمز المجموع $\sum$، وذلك بمناقشتهم في المثال الآتي:
  - أكتب المتسلسلة الآتية باستعمال رمز المجموع $\sum$:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots\ldots + 20$$

  - ماذا يُلاحَظ على حدود هذه المتسلسلة؟ حدودها هي الأعداد الصحيحة المتتالية من 1 إلى 20
  - كيف يُمكِن التعبير عن الحد العام لها؟ كل حد في هذه المتسلسلة يساوي رتبته، ومن ثَمَّ يُمكِن التعبير عن الحد الذي رتبته n كما يأتي: $a_n = n$.

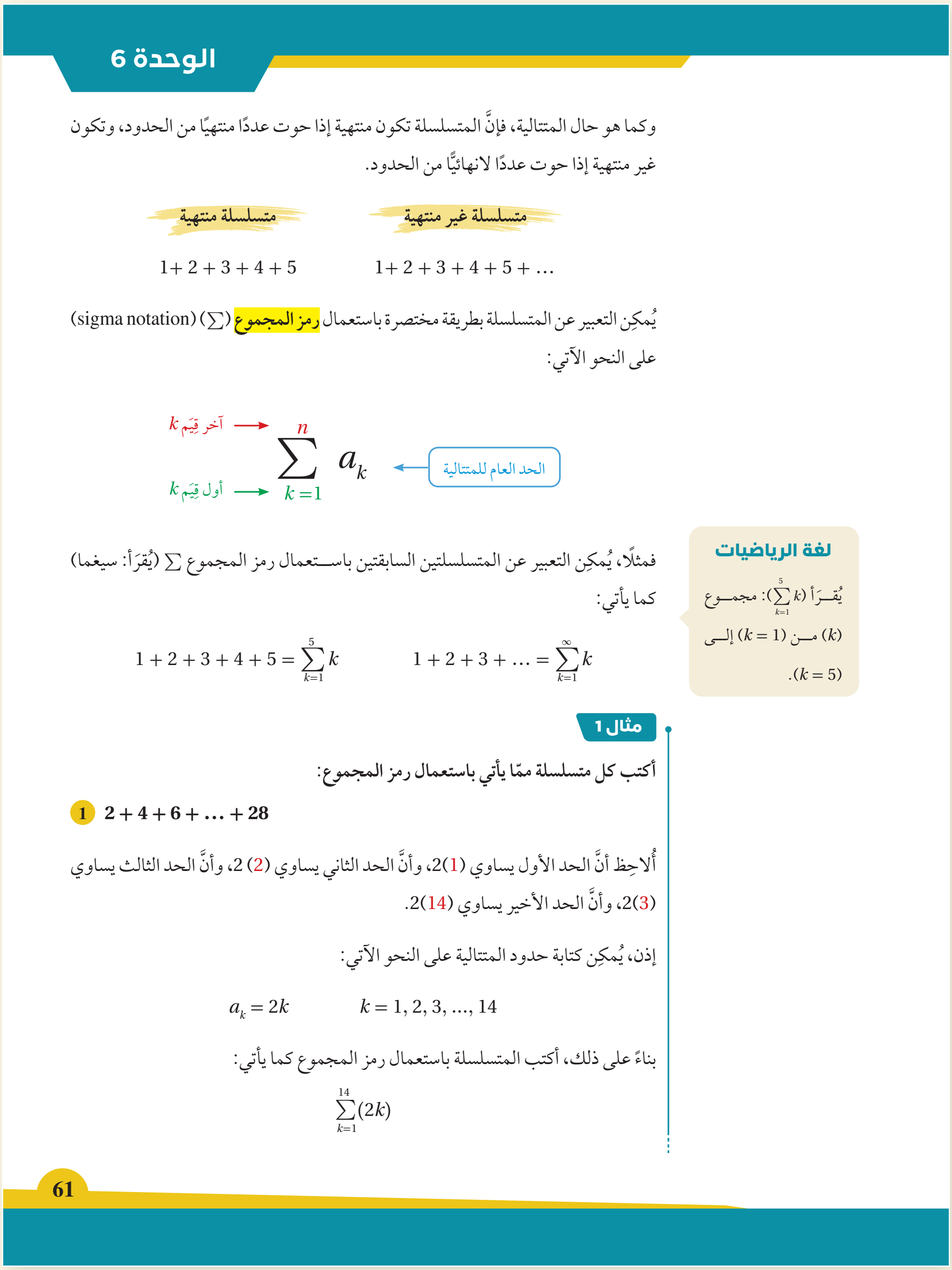
- لكتابة هذه المتسلسلة باستعمال رمز المجموع، يُكتَب رمز المجموع، ثم يُكتَب إلى يمينه رمز الحد العام. ولكن، هل يكفي ذلك؟ لماذا؟ لا، لا يكفي ذلك؛ إذ يجب تحديد أقل قيمة للمُتغيِّر n، وأكبر قيمة له. ويُمكِن عندئذٍ التعبير عن هذه المتسلسلة على النحو الآتي: $\sum_{n=1}^{20} n = 1+2+3+3+.....+20$
- أُناقِش الطلبة في حل المثال 1 على اللوح، وذلك بطرح أسئلة عن الحد العام للمتسلسلة في كل فرع، وعن أقل قيمة للمُتغيِّر وأعلى قيمة له.

إرشادات:

- أُناقِش الطلبة في الأفكار الواردة في الصناديق الهامشية؛ لِما لها من أهمية في تعزيز مفاهيم الدرس.
- أَلفِت انتباه الطلبة إلى أنَّه يُمكِن استعمال أيِّ مُتغيِّر آخر غير n للدلالة على الرتبة، مثل: m، وk.

أخطاء شائعة:

- قد يُخطِئ بعض الطلبة عند كتابة المتسلسلة باستعمال الرمز $\sum$، بكتابة صيغة غير صحيحة للحد العام للمتسلسلة؛ لذا أُنبِّههم دائمًا أنْ يتحقَّقوا من صحَّة صيغة الحد العام، وذلك بتعويض قِيَم k من 1 إلى أكبر قيمة؛ للتحقُّق أنَّها تعطي حدود المتسلسلة نفسها.
- قد يُخطِئ بعض الطلبة في كتابة أكبر قيمة وأدنى قيمة للمُتغيِّر k (رتبة الحد)، بكتابة الحد الأوَّل في المتسلسلة بوصفه أقل قيمة بدلًا من 1، وكتابة آخر حد في المتسلسلة بوصفه أعلى قيمة لها؛ لذا أُنبِّههم أنَّ أقل قيمة هي 1، وأنَّها تُمثِّل رتبة الحد الأوَّل، وأنَّه يجب مساواة الحد الأخير بصيغة الحد العام وحل المعادلة لإيجاد رتبة الحد الأخير (أكبر قيمة للمُتغيِّر k)، أو أُذكِّرهم بأنَّ أعلى قيمة للمُتغيِّر k هي عدد حدود المتسلسلة إذا كانت جميع حدودها معلومة.



وكما هو حال المتتالية، فإنَّ المتسلسلة تكون منتهية إذا حوت عددًا منتهيًا من الحدود، وتكون غير منتهية إذا حوت عددًا لانهائيًّا من الحدود.

متسلسلة غير منتهية	متسلسلة منتهية
$1+2+3+4+5+\ldots$	$1+2+3+4+5$

يُمكِن التعبير عن المتسلسلة بطريقة مختصرة باستعمال **رمز المجموع** $(\sum)$ (sigma notation) على النحو الآتي:

$$\text{آخر قِيَم } k \rightarrow \sum_{k=1}^{n} a_k \leftarrow \boxed{\text{الحد العام للمتتالية}}$$

أول قِيَم k

لغة الرياضيات

يُقرَأ $(\sum_{k=1}^{5} k)$: مجموع (k) من $(k=1)$ إلى $(k=5)$.

فمثلًا، يُمكِن التعبير عن المتسلسلتين السابقتين باستعمال رمز المجموع $\sum$ (يُقرَأ: سيغما) كما يأتي:

$$1+2+3+\ldots=\sum_{k=1}^{\infty} k \qquad 1+2+3+4+5=\sum_{k=1}^{5} k$$

مثال 1

أكتب كل متسلسلة ممّا يأتي باستعمال رمز المجموع:

1 $2+4+6+\ldots+28$

أُلاحِظ أنَّ الحد الأول يساوي $2(1)$، وأنَّ الحد الثاني يساوي $2(2)$، وأنَّ الحد الثالث يساوي $2(3)$، وأنَّ الحد الأخير يساوي $2(14)$.

إذن، يُمكِن كتابة حدود المتتالية على النحو الآتي:

$$k=1, 2, 3, \ldots, 14 \qquad a_k=2k$$

بناءً على ذلك، أكتب المتسلسلة باستعمال رمز المجموع كما يأتي:

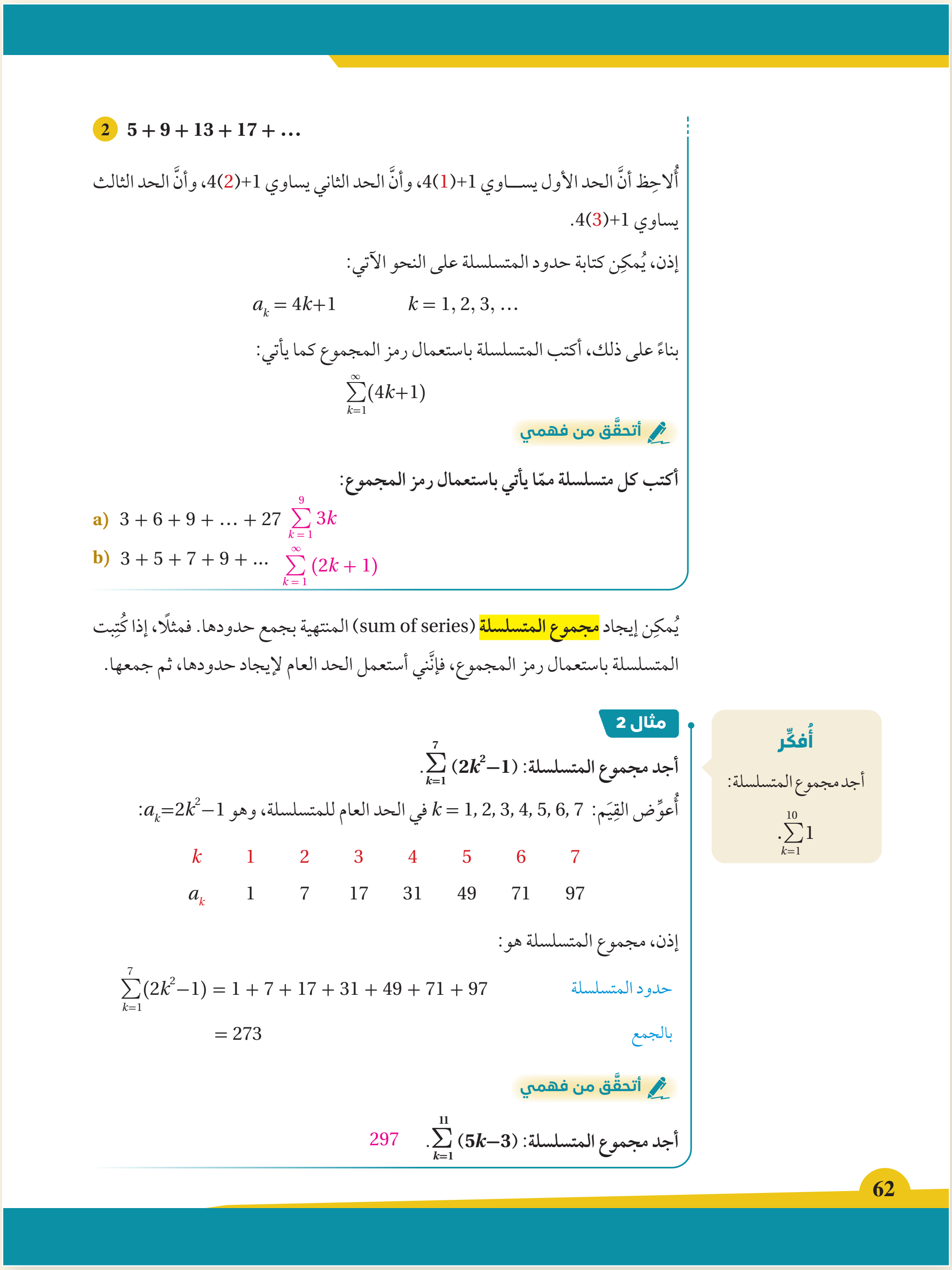
$$\sum_{k=1}^{14}(2k)$$

مثال إضافي:

أكتب كل متسلسلة ممّا يأتي باستعمال رمز المجموع $\sum$:

1 $1+5+9+13+\ldots+45$ $\quad \sum_{k=1}^{12}(4k-3)$

2 $2+5+10+17+26+\ldots.$ $\quad \sum_{k=1}^{\infty}(k^2+1)$



2 $5+9+13+17+\ldots$

أُلاحِظ أنَّ الحد الأول يساوي $4(1)+1$، وأنَّ الحد الثاني يساوي $4(2)+1$، وأنَّ الحد الثالث يساوي $4(3)+1$.

إذن، يُمكِن كتابة حدود المتسلسلة على النحو الآتي:

$$a_k = 4k+1 \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$$

بناءً على ذلك، أكتب المتسلسلة باستعمال رمز المجموع كما يأتي:

$$\sum_{k=1}^{\infty}(4k+1)$$

أتحقَّق من فهمي

أكتب كل متسلسلة ممّا يأتي باستعمال رمز المجموع:

a) $3+6+9+\ldots+27$ $\sum_{k=1}^{9} 3k$

b) $3+5+7+9+\ldots$ $\sum_{k=1}^{\infty} (2k+1)$

يُمكِن إيجاد **مجموع المتسلسلة** (sum of series) المنتهية بجمع حدودها. فمثلًا، إذا كُتِبت المتسلسلة باستعمال رمز المجموع، فإنَّني أستعمل الحد العام لإيجاد حدودها، ثم جمعها.

مثال 2

أجد مجموع المتسلسلة: $\sum_{k=1}^{7} (2k^2-1)$.

أُعوِّض القِيَم: $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ في الحد العام للمتسلسلة، وهو $a_k=2k^2-1$:

k	1	2	3	4	5	6	7
a_k	1	7	17	31	49	71	97

إذن، مجموع المتسلسلة هو:

$$\sum_{k=1}^{7}(2k^2-1) = 1+7+17+31+49+71+97$$ حدود المتسلسلة

$$= 273$$ بالجمع

أتحقَّق من فهمي

أجد مجموع المتسلسلة: $\sum_{k=1}^{11} (5k-3)$. 297

أُفكِّر

أجد مجموع المتسلسلة: $\sum_{k=1}^{10} 1$.

62

تعزيز اللغة ودعمها:

أُكرِّر المصطلحات الرياضية الوارد ذكرها في الدرس بكلٍّ من اللغة العربيــة واللغة الإنجليزية، مُحفِّــزًا الطلبة على استعمالها.

التقويم التكويني:

أطلب إلى الطلبة حـــل التدريب الوارد في بند (**أتحقَّق من فهمي**) بعد كل مثال، ثم أختار بعض الإجابات التي تحوي أخطاء مفاهيمية لمناقشـــتها على اللوح، ولا أذكر اسم مَنْ أخطأ في الإجابة؛ تجنُّبًا لإحراجه.

مثال 2

- أُذكِّـر الطلبـة بكتابة حـدود المتتالية أو المتسلسـلة إذا عُلِم حدها العام، وذلك بتعويض رتب الحدود مُتتابِعةً من 1 إلى أعلى رتبة؛ للتمكُّن من كتابة جميع الحدود. فمثلاً، يُمكِن كتابة حدود المتسلسـلة: $\sum_{k=1}^{5} (3k-1)$ بالصورة الآتية:

$$\sum_{k=1}^{5} (3k-1)= (3(1)-1) + (3(2)-1) + (3(3)-1) + (3(4)-1) + (3(5)-1)$$

$$= 2 + 5 + 8 + 11 + 14$$

- أُناقِـش الطلبـة في حـل المثـال 2 الذي يُوضِّـح كيفية كتابة المتسلسلة بالصورة المُطوَّلة وإيجاد مجموعها، وذلك بطرح الأسئلة الآتية عليهم:
  - ما الحد العام لهذه المتسلسلة؟ $(2k^2-1)$
  - ما عدد حدودها؟ 7
  - ما الحد الأوَّل لها؟ 1
  - ما الحد الخامس لها؟ 49

مثال إضافي:

أجد مجموع كل متسلسلة ممّا يأتي:

1 $\sum_{k=1}^{6}(4k+5)$ 114

2 $\sum_{k=1}^{4}(15+k^2)$ 90

مثال 3: من الحياة

- أناقِش الطلبة في صيغ مجموع حالات خاصة من المتسلسلات الواردة في صندوق **(مفهوم أساسي)** الوارد في كتاب الطالب، واستعمالها لإيجاد مجموع متسلسلات من دون كتابة جميع حدودها وجمعها، وبخاصة عندما يكون عدد حدودها كبيرًا. أكتب هذه الصيغ، ثم أذكر أمثلة عليها للتحقُّق من صحّتها، مثل: $\sum_{k=1}^{4}5 = 5+5+5+5 = 4\times5 = 20$؛ فهذا المثال يتفق مع قولنا: $\sum_{k=1}^{n}c = nc$.
- أناقِش الطلبة في حل المثال 3 على اللوح، وذلك بطرح الأسئلة الآتية عليهم:
  - ما الهرم الرباعي؟ مُجسَّم قاعدته مُربَّعة، وأوجهه الجانبية مُثلَّثات متطابقة الضلعين، وجميعها متطابقة.
  - ما شكل كل طبقة من طبقات الفاكهة؟ مُربَّع.
  - ما عدد حبّات الفاكهة في كل طبقة؟ مُربَّع عدد الحبّات على كل جانب.
- أُوضِّح للطلبة كيف يُمكِن كتابة الحد العام للمتسلسلة التي تُمثِّل مجموع عدد حبّات البرتقال في الهرم مستعينًا بالخطوات الواردة في المثال، ثم أطلب إليهم حساب مجموع متسلسلة، وذلك بتطبيق صيغة مجموع مُربَّعات الأعداد الصحيحة المتتالية من 1 إلى n.

الوحدة 6

إذا كان في المتسلسلة عدد كبير من الحدود، فإنَّ إيجاد مجموعها لن يكون سهلًا. ولكنْ توجد قواعد يُمكِن استعمالها لإيجاد مجموع بعض المتسلسلات الخاصة على نحوٍ سهل كما يأتي.

مفهوم أساسي **صيغ لمجموع حالات خاصة من المتسلسلات**

- مجموع الحد الثابت (c) إلى نفسه (n) من المرّات. $\sum_{k=1}^{n} c = n\times c$
- مجموع الأعداد الصحيحة المتتالية من (1) إلى (n). $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$
- مجموع مربعات الأعداد الصحيحة المتتالية من (1) إلى (n). $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

مثال 3 : من الحياة

فاكهة: يعرض محل لبيع الفاكهة البرتقال مُرتَّبًا في طبقات تُشكِّل هرمًا رباعيًّا كما في الصورة المجاورة. أكتب باستعمال رمز المجموع متسلسلة يُمثِّل مجموعها عدد حبّات البرتقال في الهرم، ثم أجد مجموع المتسلسلة.

معلومة

يُعَدُّ البرتقال مصدرًا رئيسًا للألياف والفيتامينات، لا سيَّما فيتامين c.

الخطوة 1: أُنشِئ جدولًا أكتب فيه عدد حبّات البرتقال في أول ثلاث طبقات، بدءًا بقمَّة الهرم.

3	2	1	الطبقة
9	4	1	عدد حبّات البرتقال في الطبقة

الخطوة 2: أجد الحد العام للمتتالية التي يُمثِّلها عدد حبّات البرتقال في كل طبقة.

أُلاحِظ أنَّ الحد الأول في هذه المتتالية يساوي 1^2، وأنَّ الحد الثاني يساوي 2^2، وأنَّ الحد الثالث يساوي 3^2.

إذن، يُمكِن كتابة الحد العام لهذه المتتالية على النحو الآتي:

$$a_k = k^2 \qquad k = 1, 2, 3, \dots$$

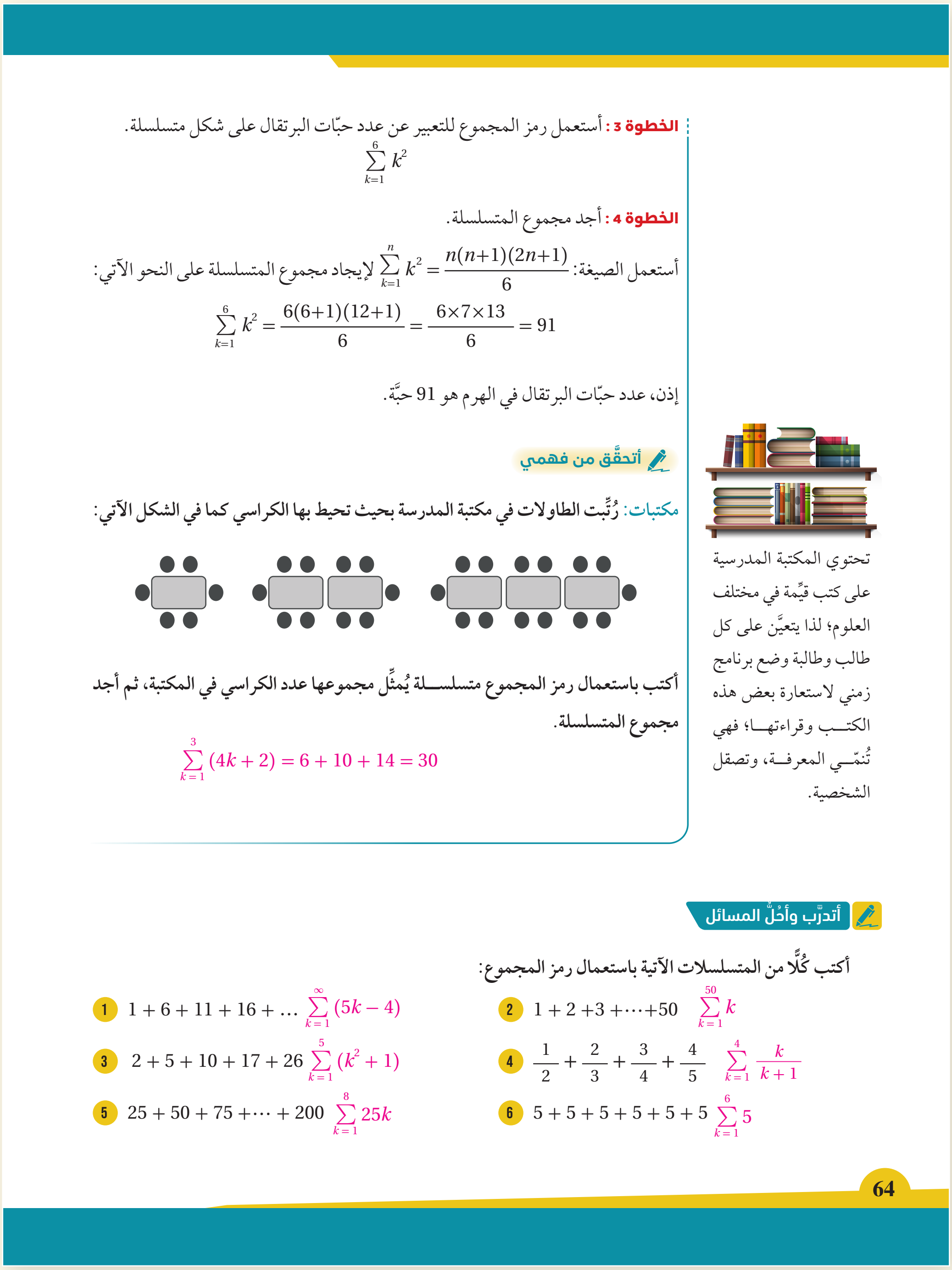
63

إرشاد:

- أُعرِّف الطلبة بخصائص رمز المجموع الآتية؛ لأهميتها في حل سؤال بند **(أتحقَّق من فهمي)**:
  - إذا كان c عددًا ثابتًا، فإنَّ:

1 $\sum_{k=1}^{n} c\,a_k = c\sum_{k=1}^{n} a_k$

2 $\sum_{k=1}^{n}(a_k \pm b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k \pm \sum_{k=1}^{n} b_k$



الخطوة 3 : أستعمل رمز المجموع للتعبير عن عدد حبّات البرتقال على شكل متسلسلة.

$$\sum_{k=1}^{6} k^2$$

الخطوة 4 : أجد مجموع المتسلسلة.

أستعمل الصيغة: $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ لإيجاد مجموع المتسلسلة على النحو الآتي:

$$\sum_{k=1}^{6} k^2 = \frac{6(6+1)(12+1)}{6} = \frac{6\times7\times13}{6} = 91$$

إذن، عدد حبّات البرتقال في الهرم هو 91 حبَّة.

أتحقَّق من فهمي

مكتبات: رُتِّبت الطاولات في مكتبة المدرسة بحيث تحيط بها الكراسي كما في الشكل الآتي:

أكتب باستعمال رمز المجموع متسلسلة يُمثِّل مجموعها عدد الكراسي في المكتبة، ثم أجد مجموع المتسلسلة.

$$\sum_{k=1}^{3} (4k+2) = 6 + 10 + 14 = 30$$

تحتوي المكتبة المدرسية على كتب قيّمة في مختلف العلوم؛ لذا يتعيَّن على كل طالب وطالبة وضع برنامج زمني لاستعارة بعض هذه الكتب وقراءتها؛ فهي تُنمّي المعرفة، وتصقل الشخصية.

أتدرَّب وأحُلُّ المسائل

أكتب كُلًّا من المتسلسلات الآتية باستعمال رمز المجموع:

① $1 + 6 + 11 + 16 + \dots$ $\sum_{k=1}^{\infty} (5k-4)$

② $1 + 2 + 3 + \cdots + 50$ $\sum_{k=1}^{50} k$

③ $2 + 5 + 10 + 17 + 26$ $\sum_{k=1}^{5} (k^2+1)$

④ $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5}$ $\sum_{k=1}^{4} \frac{k}{k+1}$

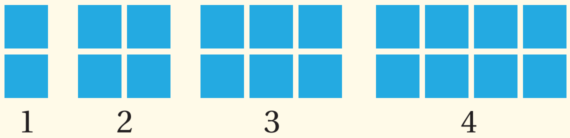
⑤ $25 + 50 + 75 + \cdots + 200$ $\sum_{k=1}^{8} 25k$

⑥ $5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5$ $\sum_{k=1}^{6} 5$

64

مثال إضافي:

يُبيِّن الشكل الآتي الحدود الأربعة الأولى من نمط هندسي مُكوَّن من مُربَّعات. أكتب باستعمال رمز المجموع متسلسلةً يُمثِّل مجموعها عدد المُربَّعات في أوَّل 10 حدود من هذا النمط، ثم أجد مجموعها.



$$\sum_{k=1}^{10} 2k = 2\left(\sum_{k=1}^{10} k\right) = 2 \times \frac{(10)\,(10+1)}{2} = 110$$

4 التدريب

أتدرَّب وأحل المسائل

- أُوجِّه الطلبة إلى بند (**أتدرَّب وأحل المسائل**)، ثم أطلب إليهم حل المسائل (1 – 12) ضمن مجموعات ثنائية داخل الغرفة الصفية؛ فهذه المسائل تحديدًا ترتبط ارتباطًا مباشرًا بأمثلة الدرس، وهي تُستعمَل خاصةً لتدريب الطلبة على المفاهيم نفسها، بصرف النظر عمّا إذا كانت الأسئلة فردية أم زوجية.
- إذا واجه الطلبة صعوبة في حل أيّة مسألة، فإنّني أختار أحد الطلبة مِمَّنْ تمكَّن/ تمكَّنت من حل المسألة؛ لمناقشة استراتيجيته/ استراتيجيتها في حل المسألة على اللوح، مُحفِّزًا الطلبة على طرح أيّ تساؤل عن خطوات الحل المُقدَّمة من الزميل/ الزميلة.

تنويع التعليم:

إذا واجه الطلبة ذوو المستوى دون المتوسط صعوبة في حل أسئلة بند (**أتدرَّب وأحل المسائل**)، فإنّني أضع كُلًّا منهم مع طالب آخر/ طالبة أُخرى من ذوي المستوى المتوسط أو مع أحد الطلبة المُتميِّزين؛ ليتشاركا في حل الأسئلة.

مهارات التفكير العليا

- أوجِّه الطلبة إلى قراءة الأسئلة الواردة في بند **(مهارات التفكير العليا)**، ثم أطلب إليهم حل المسائل (16 – 18).
- أرصد أيَّة أفكار غير تقليدية من الطلبة، ثم أطلب إلى هؤلاء الطلبة كتابة هذه الأفكار على اللوح.

الواجب المنزلي:

أستعين بالجدول الآتي لتحديد الواجب المنزلي للطلبة بحسب مستوياتهم:

المستويات	الأسئلة
دون المتوسط	كتاب الطالب: 13, 14 كتاب التمارين: (7 – 4) ,2 ,1
ضمن المتوسط	كتاب الطالب: (16 – 14) كتاب التمارين: (12 – 8) ,3
فوق المتوسط	كتاب الطالب: (18 – 16) كتاب التمارين: 14 ,13 ,(9–3) (فردي).

5 الإثراء

- أطلب إلى الطلبة حل السؤالين الآتيين بوصفهما إثراءً لهم:
  - ◂ أكتب كل متسلسلة ممّا يأتي باستعمال رمز المجموع، ثم أجد مجموعها:

① $37 + 34 + 31 + \dots + 1$

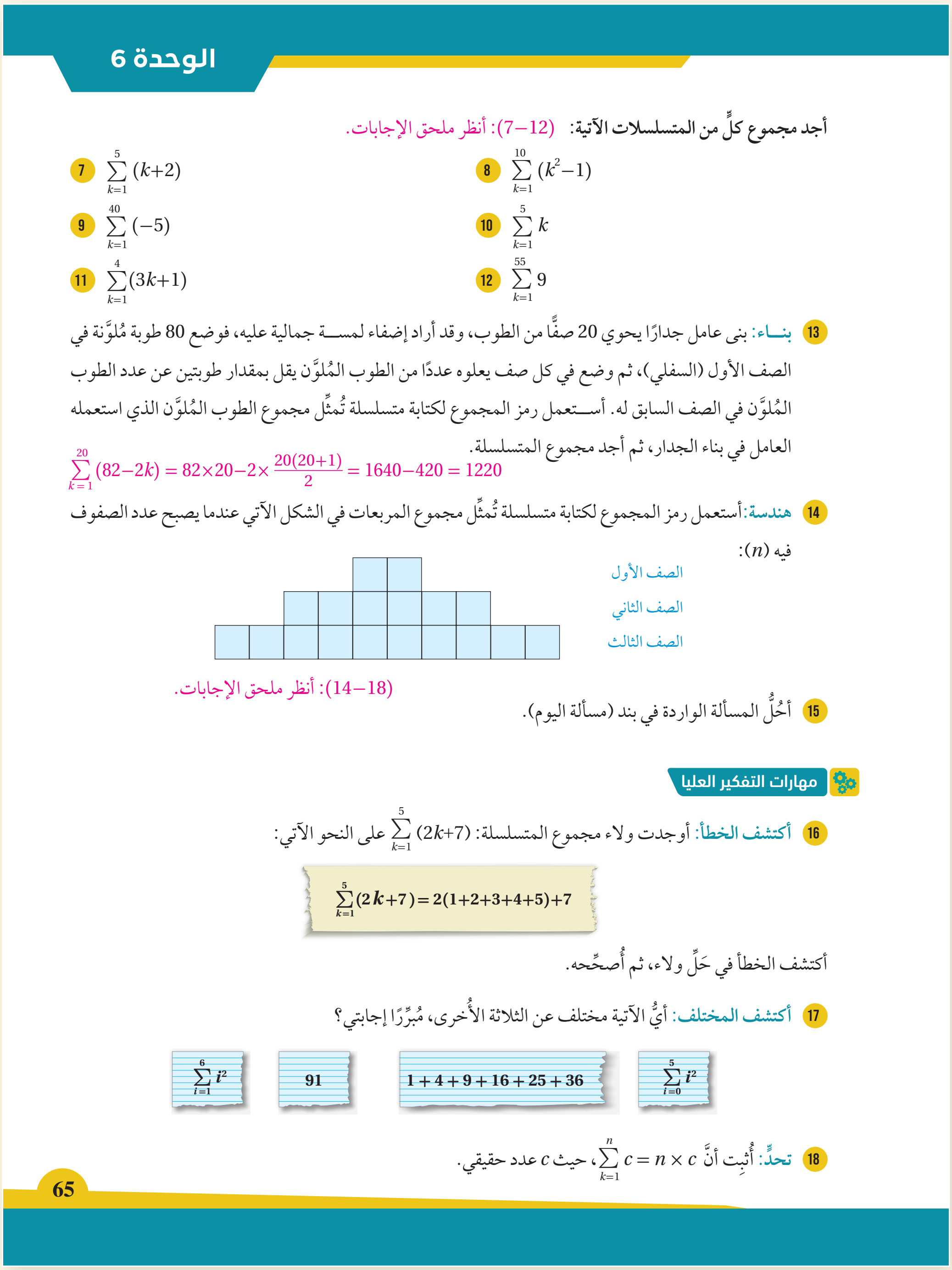
$$\sum_{k=1}^{13} (40 - 3k) = 40\times13 - 3\times\frac{13\,(13+1)}{2} = 247$$

② $2 + 8 + 18 + 32 + 50 + \dots + 200$

$$\sum_{k=1}^{10} 2k^2 = 2\times\frac{10(10+1)(20+1)}{6} = 770$$

- ◂ رُتِّبت علب حساء في متجر ضمن صفوف بعضها فوق بعض، بحيث وُضِع في الصف الأوَّل العلوي علبة حساء واحدة، وزاد عدد العلب في كل صف علبة واحدة على عددها في الصف الذي فوقه. أكتب باستعمال رمز المجموع متسلسلةً تُمثِّل عدد علب الحساء في عرض مُكوَّن من 10 صفوف، ثم أجد مجموعها.

$$\sum_{k=1}^{10} k = 10\,\frac{(1+10)}{2} = 55$$



الوحدة 6

أجد مجموع كلٍّ من المتسلسلات الآتية: (7–12): أنظر ملحق الإجابات.

⑦ $\sum_{k=1}^{5} (k+2)$

⑧ $\sum_{k=1}^{10} (k^2-1)$

⑨ $\sum_{k=1}^{40} (-5)$

⑩ $\sum_{k=1}^{5} k$

⑪ $\sum_{k=1}^{4} (3k+1)$

⑫ $\sum_{k=1}^{55} 9$

⑬ **بنـاء:** بنى عامل جدارًا يحوي 20 صفًّا من الطوب، وقد أراد إضفاء لمسة جمالية عليه، فوضع 80 طوبة مُلوَّنة في الصف الأول (السفلي)، ثم وضع في كل صف يعلوه عددًا من الطوب المُلوَّن يقل بمقدار طوبتين عن عدد الطوب المُلوَّن في الصف السابق له. أستعمل رمز المجموع لكتابة متسلسلة تُمثِّل مجموع الطوب المُلوَّن الذي استعمله العامل في بناء الجدار، ثم أجد مجموع المتسلسلة.

$$\sum_{k=1}^{20} (82-2k) = 82\times20 - 2\times\frac{20(20+1)}{2} = 1640-420 = 1220$$

⑭ **هندسة:** أستعمل رمز المجموع لكتابة متسلسلة تُمثِّل مجموع المربعات في الشكل الآتي عندما يصبح عدد الصفوف فيه (n):

الصف الأول

الصف الثاني

الصف الثالث

(14–18): أنظر ملحق الإجابات.

⑮ أحُلُّ المسألة الواردة في بند (مسألة اليوم).

مهارات التفكير العليا

⑯ **أكتشف الخطأ:** أوجدت ولاء مجموع المتسلسلة: $\sum_{k=1}^{5} (2k+7)$ على النحو الآتي:

$$\sum_{k=1}^{5} (2k+7) = 2(1+2+3+4+5)+7$$

أكتشف الخطأ في حَلِّ ولاء، ثم أُصحِّحه.

⑰ **أكتشف المختلف:** أيُّ الآتية مختلف عن الثلاثة الأُخرى، مُبرِّرًا إجابتي؟

$\sum_{i=0}^{5} i^2$ $1+4+9+16+25+36$ 91 $\sum_{i=1}^{6} i^2$

⑱ **تحدٍّ:** أُثبِت أنَّ $\sum_{k=1}^{n} c = n \times c$، حيث c عدد حقيقي.

65

6 الختام

- أتحقَّق من فهم الطلبة موضوع الدرس، بطرح السؤال الآتي عليهم:
  - ◂ أشرح كيف أجد قيمة التعبير الآتي، مُحدِّدًا قيمته.

$$\sum_{k=3}^{6} (5k - 4)$$

بتعويض $k = 3, 4, 5, 6$ في صيغة الحد العام، وجمع النواتج الأربعة، فإنَّ قيمته هي: $11 + 16 + 21 + 26 = 74$

الدرس
2

المتتاليات والمتسلسلات الحسابية
Arithmetic Sequences and Series

فكرة الدرس تعرُّف المتتالية الحسابية، وإيجاد مجموع المتسلسلة الحسابية المنتهية.

المصطلحات المتتالية الحسابية، أساس المتتالية الحسابية، المتسلسلة الحسابية.

مسألة اليوم اصطفَّ أعضاء فِرقة الكشّافة المدرسية في اثني عشر صفًّا، بحيث وقف في الصف الأول ثلاثة أعضاء، ووقف في كل صف يلي الصف الأول عضوان أكثر ممّا في الصف الذي يسبقه مباشرة. كيف يُمكِن حساب العدد الكلي لأعضاء الفِرقة؟

إذا كان الفرق بين كل حدين متتاليين في متتالية عددية يساوي قيمة ثابتة، فإنَّ هذه المتتالية تُسمّى **متتالية حسابية** (arithmetic sequence)، ويُسمّى الفرق الثابت **أساس المتتالية الحسابية** (common difference)، ويُرمَز إليه بالحرف *d*.

أتعلَّم

تُعَدُّ المتتاليات الخطية من المتتاليات الحسابية.

مفهوم أساسي **المتتالية الحسابية**

بالكلمات: تكون المتتالية حسابية إذا كان الفرق بين كل حد فيها والحد الذي يسبقه يساوي قيمة ثابتة.

بالرموز: تكون المتتالية: $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ حسابية إذا كان:

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \ldots = a_n - a_{n-1} = d$$

مثال 1

أُحدِّد إذا كانت كل متتالية ممّا يأتي حسابية أم لا:

① **2, 5, 8, 11, …**

أطرح كل حدين متتاليين:

$a_2 - a_1 = 5 - 2 = 3$ بطرح الحد الأول من الحد الثاني

$a_3 - a_2 = 8 - 5 = 3$ بطرح الحد الثاني من الحد الثالث

الدرس
2

نتاجات الدرس:

- تعرُّف المتتالية الحسابية، والمتسلسلة الحسابية.
- إيجاد الحد العام للمتتالية الحسابية.
- إيجاد مجموع أوَّل *n* حدًّا من متتالية حسابية أو متسلسلة حسابية.

نتاجات التعلُّم القبلي:

- تعرُّف كلٍّ من المتتالية، والمتسلسلة.
- كتابة المتسلسلة باستعمال رمز المجموع $\sum$، وإيجاد مجموعها.

مراجعة التعلُّم القبلي:

- أُوجِّه الطلبة في بداية كل حصة إلى الفقرة (الفقرات) المُرتبِطة بما سيُقدَّم من موضوعات الدرس في الحصة (إنْ وُجِدت) ضمن صفحات (**أستعد لدراسة الوحدة**) في كتاب التمارين، ثم أطلب إليهم حل تدريباتها داخل الغرفة الصفية بصورة فردية.
- أتجوَّل بين الطلبة؛ لمتابعتهم أثناء الحل، وتحديد نقاط ضعفهم، وأُوجِّههم إلى مراجعة المثال عندما يواجهون صعوبة في الحل.

1 التهيئة

- أطرح على الطلبة الأسئلة الآتية:
  - ◂ ما الفرق بين المتتالية والمتسلسلة؟

المتتاليـة: مجموعـة أعداد تَتْبَـع ترتيبًا مُعيَّنًا، وتُكتَـب بالصورة الآتية: $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$.

المتسلسـلة: مجمـوع حـدود المتتالية، وهـي تُكتَب بالصـورة الآتية: $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots$.

◂ أكتب كل متسلسلة ممّا يأتي باستعمال رمز المجموع:

① $5 + 8 + 11 + 14 + \ldots \quad \sum_{k=1}^{\infty} (3k + 2)$

② $16 + 14 + 12 + 10 + 8 \quad \sum_{k=1}^{5} (18 - 2k)$

◂ أُبيِّن أوجه الاختلاف بين المتتاليات الآتية:

- 3, 7, 11, 15, ...
- 3, 8, 13, 18, ...
- 4, 7, 11, 16, ...
- 2, 6, 18, 54, ...

ينتج كل حد في المتتالية الأولى من زيادة 4 للحد الذي يسبقه، وينتج كل حـد في المتتاليـة الثانية من زيادة 5 للحد الذي يسـبقه. أمّا الزيادة بيـن حدود المتتالية الثالثة فهـي مختلفة من حد إلى آخر. وهي كذلك في المتتالية الرابعة، ولكن يُمكِن الحصول على كل حد بضرب الحد السابق في 3

◂ أُناقِش الطلبة في حل الأسـئلة السـابقة، وأطلـب إليهم تبرير إجاباتهم.

المفاهيم العابرة للمواد:

أُؤكِّد المفاهيـم العابرة للمواد حيثما وردت في كتـاب الطالب أو كتاب التمارين. ففي مسـألة اليوم، أُعزِّز لدى الطلبة الوعي بأهمية المشاركة في جمعيات الكشّافة والمرشدات وفِرقها؛ لِما لها من أثر في صقل شخصيات الطلبة، وتعزيز الثقـة بالنفس، وتنمية الحِسِّ بالمسـؤولية، وحُبِّ العمل الجماعي والمغامرة، والتحفيز على المشاركة في العمل التطوُّعي وتقديم العـون والخدمة للآخرين. ثم أطلب إلى بعض الطلبة الذين شـاركوا في العمل الكشـفي أنْ يتحدَّثوا عن تجاربهم وخبراتهم في هذا المجال، وما قُدِّم لهم وما قدَّموه للآخرين آنذاك.

2 الاستكشاف

- أُوجِّـه الطلبـة إلـى قراءة المسـألة الـواردة في بند (**مسـألة اليـوم**)، ثم أسألهـم:
  - ◂ كم عضوًا من فِرقة الكشّافة وقف في الصف الأوَّل؟ 3
  - ◂ كم عضوًا من فِرقة الكشّافة وقف في الصف الثاني؟ 5
  - ◂ ما متتالية أعضاء فِرقة الكشّافة الواقفين في اثني عشر صفًّا؟

3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25

◂ ما الحد العام لهذه المتتالية؟ $a_n = 2n + 1$

◂ ما المتسلسلة بدلالة $\sum$ التي تُمثِّل مجموع أعضاء فِرقة الكشّافة؟ $\sum_{n=1}^{12} (2n + 1)$

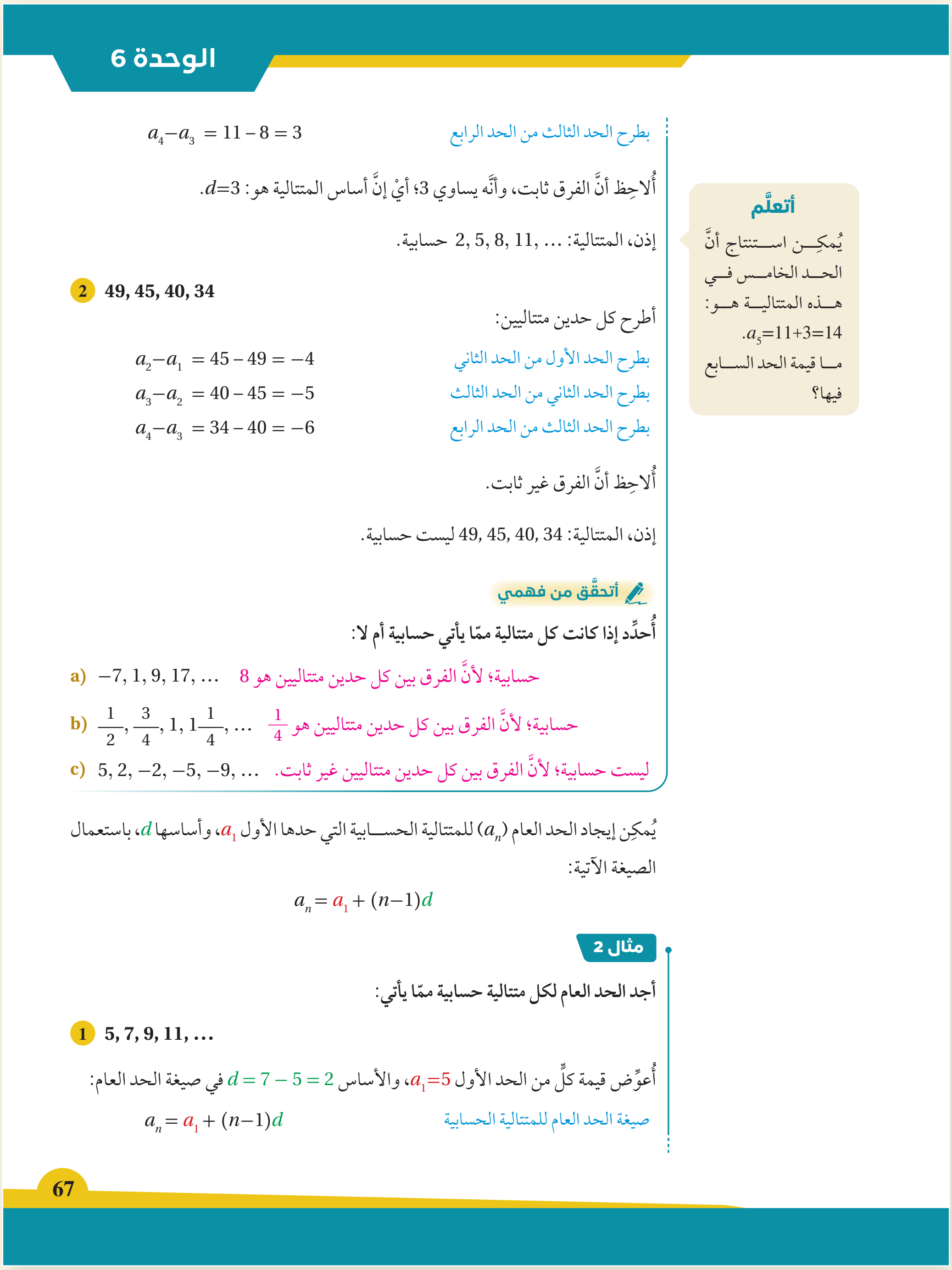
◂ كيف يُمكِن إيجاد العدد الكلي لأعضاء فِرقة الكشّـافة من دون جمع حدود المتسلسلة؟

- أُخبِـر الطلبـة أنَّهم سـيتعرَّفون في هذا الـدرس طريقةً لإجابة السـؤال السابق من دون جمع حدود المتسلسلة.
- أُعزِّز الإجابات الصحيحة.

3 التدريس

مثال 1

- أُوضِّـح للطلبة مفهـوم المتتاليـة الحسـابية التي يكون الفـرق بين كل حديـن متتالييـن فيها مقدارًا ثابتًا، يُسـمّى أسـاس المتتالية الحسـابية، ويُرمَـز إليه بالحرف d، ثم أطرح أمثلة على متتاليات حسـابية وأُخرى غيـر حسـابية، مُؤكِّدًا ضرورة طـرح كل حديـن متتاليين مـن المتتالية المعطاة؛ لتصنيف المتتالية إلى حسابية أو غير حسابية.
- أُناقِش الطلبة في حل المثال 1 على اللوح.



$a_4 - a_3 = 11 - 8 = 3$ بطرح الحد الثالث من الحد الرابع

أُلاحِظ أنَّ الفرق ثابت، وأنَّه يساوي 3؛ أيْ إنَّ أساس المتتالية هو: $d=3$.

إذن، المتتالية: … ,11 ,8 ,5 ,2 حسابية.

أتعلَّم

يُمكِن استنتاج أنَّ الحد الخامس في هذه المتتالية هو: $a_5=11+3=14$. ما قيمة الحد السابع فيها؟

② **49, 45, 40, 34**

أطرح كل حدين متتاليين:

$a_2 - a_1 = 45 - 49 = -4$ بطرح الحد الأول من الحد الثاني

$a_3 - a_2 = 40 - 45 = -5$ بطرح الحد الثاني من الحد الثالث

$a_4 - a_3 = 34 - 40 = -6$ بطرح الحد الثالث من الحد الرابع

أُلاحِظ أنَّ الفرق غير ثابت.

إذن، المتتالية: 34 ,40 ,45 ,49 ليست حسابية.

أتحقَّق من فهمي

أُحدِّد إذا كانت كل متتالية ممّا يأتي حسابية أم لا:

a) $-7, 1, 9, 17, \dots$ حسابية؛ لأنَّ الفرق بين كل حدين متتاليين هو 8

b) $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1, 1\frac{1}{4}, \dots$ حسابية؛ لأنَّ الفرق بين كل حدين متتاليين هو $\frac{1}{4}$

c) $5, 2, -2, -5, -9, \dots$ ليست حسابية؛ لأنَّ الفرق بين كل حدين متتاليين غير ثابت.

يُمكِن إيجاد الحد العام (a_n) للمتتالية الحسابية التي حدها الأول a_1، وأساسها d، باستعمال الصيغة الآتية:

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

مثال 2

أجد الحد العام لكل متتالية حسابية ممّا يأتي:

① **5, 7, 9, 11, …**

أُعوِّض قيمة كلٍّ من الحد الأول $a_1=5$، والأساس $d = 7 - 5 = 2$ في صيغة الحد العام:

$a_n = a_1 + (n-1)d$ صيغة الحد العام للمتتالية الحسابية

- إنْ لزم الأمر، أُناقِش الطلبة في مزيد من الأمثلة، مثل:
  - أيُّ المتتاليات الآتية حسابية؟

a) $10, 6, 2, -2, \dots$

حسابية؛ لأنَّ الفرق بين كل حدين متتاليين هو -4

b) $6, 11, 16, 21, \dots$

حسابية؛ لأنَّ الفرق بين كل حدين متتاليين هو 5

c) $2, 3, 4, 5, 7, \dots$

ليست حسابية؛ لأنَّ الفرق بين كل حدين متتاليين غير ثابت.

d) $1.5, 2, 2.5, 3, 3.5, \dots$

حسابية، لأنَّ الفرق بين كل حدين متتاليين هو 0.5

إرشادات:

- أَلفِت انتباه الطلبة إلى أنَّ الحرف d الذي يُستعمَل للدلالة على أساس المتتالية الحسابية هو الحرف الأوَّل من كلمة (فَرْق) باللغة الإنجليزية (difference).
- أُناقِش الطلبة في الأفكار الواردة في الصناديق الهامشية؛ لِما لها من أهمية في تعزيز مفاهيم الدرس.

تعزيز اللغة ودعمها:

أُكرِّر المصطلحات الرياضية الوارد ذكرها في الدرس بكلٍّ من اللغة العربيــة واللغة الإنجليزية، مُحفِّــزًا الطلبة على استعمالها.

التقويم التكويني:

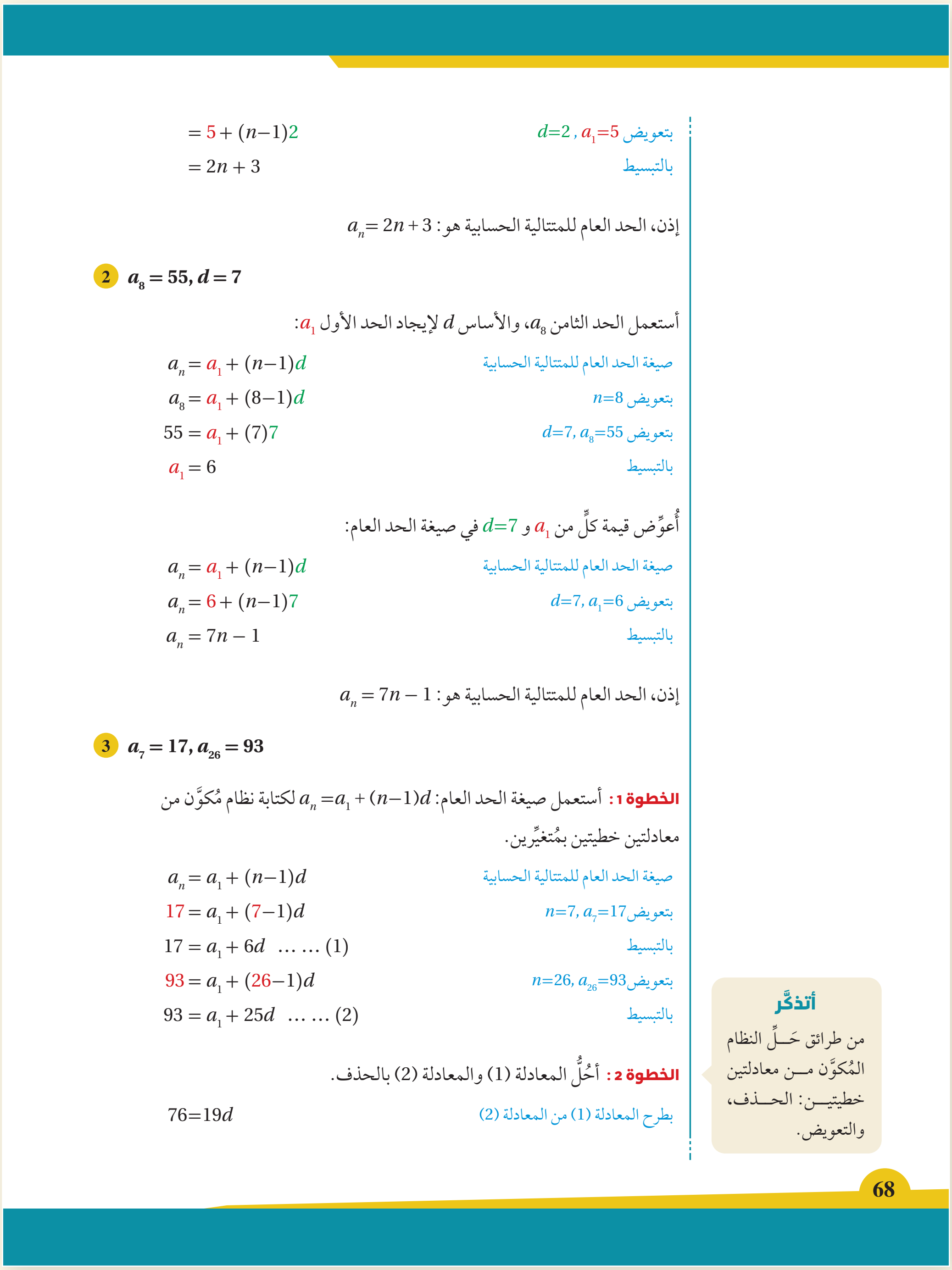
أطلب إلى الطلبة حــل التدريب الوارد في بند (**أتحقَّق من فهمي**) بعد كل مثال، ثم أختار بعض الإجابات التي تحوي أخطاء مفاهيمية لمناقشــتها على اللوح، ولا أذكر اسم مَنْ أخطأ في الإجابة؛ تجنُّبًا لإحراجه.

مثال 2

- أطلب إلى الطلبة كتابة أوَّل 6 حدود من المتتالية الحسابية التي حدها الأوَّل 7، وأساسها 4، ثم أطلب إليهم كتابة أوَّل 6 حدود من المتتالية الحسابية التي حدها الأوَّل a_1، وأساسها d. بعد ذلك أسألهم عن ملاحظاتهم بخصوص حدود هذه المتتالية؛ لاستنتاج أنَّ معامل d في كل حد يقل بمقدار 1 عن رتبة ذلك الحد؛ أيْ إنَّ الحد العام للمتتالية الحسابية التي حدها الأوَّل a_1، وأساسها d، يعطى بالعلاقة الآتية:

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

- أُناقِش الطلبة في حل الفرع 1 من المثال 2، الذي يُوضِّح كيفية إيجاد الحد العام إذا عُلِمت الحدود الأربعة الأولى من المتتالية الحسابية، وذلك بطرح الأسئلة الآتية عليهم:
  - ما الحد الأوَّل لهذه المتتالية؟ $a_1 = 5$
  - ما أساسها؟ $d = 7-5 = 9-7 = 11-9 = 2$
  - كيف يُمكِن إيجاد حدها العام؟ بتعويض قيمة كلٍّ من a_1، و d في الصيغة: $a_n = a_1+(n-1)d$
- أُناقِش الطلبة في حل الفرع 2 من هذا المثال، الذي يُوضِّح كيفية إيجاد الحد العام إذا عُلِم حد غير الحد الأوَّل لمتتالية حسابية وأساسها.
- أُناقِش الطلبة في حل الفرع 3 من هذا المثال، الذي يُوضِّح كيفية إيجاد الحد العام إذا عُلِم حدان غير الحد الأوَّل لمتتالية حسابية، حيث يلزم تكوين معادلتين في المُتغيِّرين a_1، و d وحلهما، ثم كتابة الحد العام للمتتالية.



بتعويض $d=2 , a_1=5$	$= 5 + (n-1)2$
بالتبسيط	$= 2n + 3$

إذن، الحد العام للمتتالية الحسابية هو: $a_n = 2n + 3$

2 $a_8 = 55, d = 7$

أستعمل الحد الثامن a_8، والأساس d لإيجاد الحد الأول a_1:

صيغة الحد العام للمتتالية الحسابية	$a_n = a_1 + (n-1)d$
بتعويض $n=8$	$a_8 = a_1 + (8-1)d$
بتعويض $d=7, a_8=55$	$55 = a_1 + (7)7$
بالتبسيط	$a_1 = 6$

أُعوِّض قيمة كلٍّ من a_1 و $d=7$ في صيغة الحد العام:

صيغة الحد العام للمتتالية الحسابية	$a_n = a_1 + (n-1)d$
بتعويض $d=7, a_1=6$	$a_n = 6 + (n-1)7$
بالتبسيط	$a_n = 7n - 1$

إذن، الحد العام للمتتالية الحسابية هو: $a_n = 7n - 1$

3 $a_7 = 17, a_{26} = 93$

الخطوة 1: أستعمل صيغة الحد العام: $a_n = a_1 + (n-1)d$ لكتابة نظام مُكوَّن من معادلتين خطيتين بمُتغيِّرين.

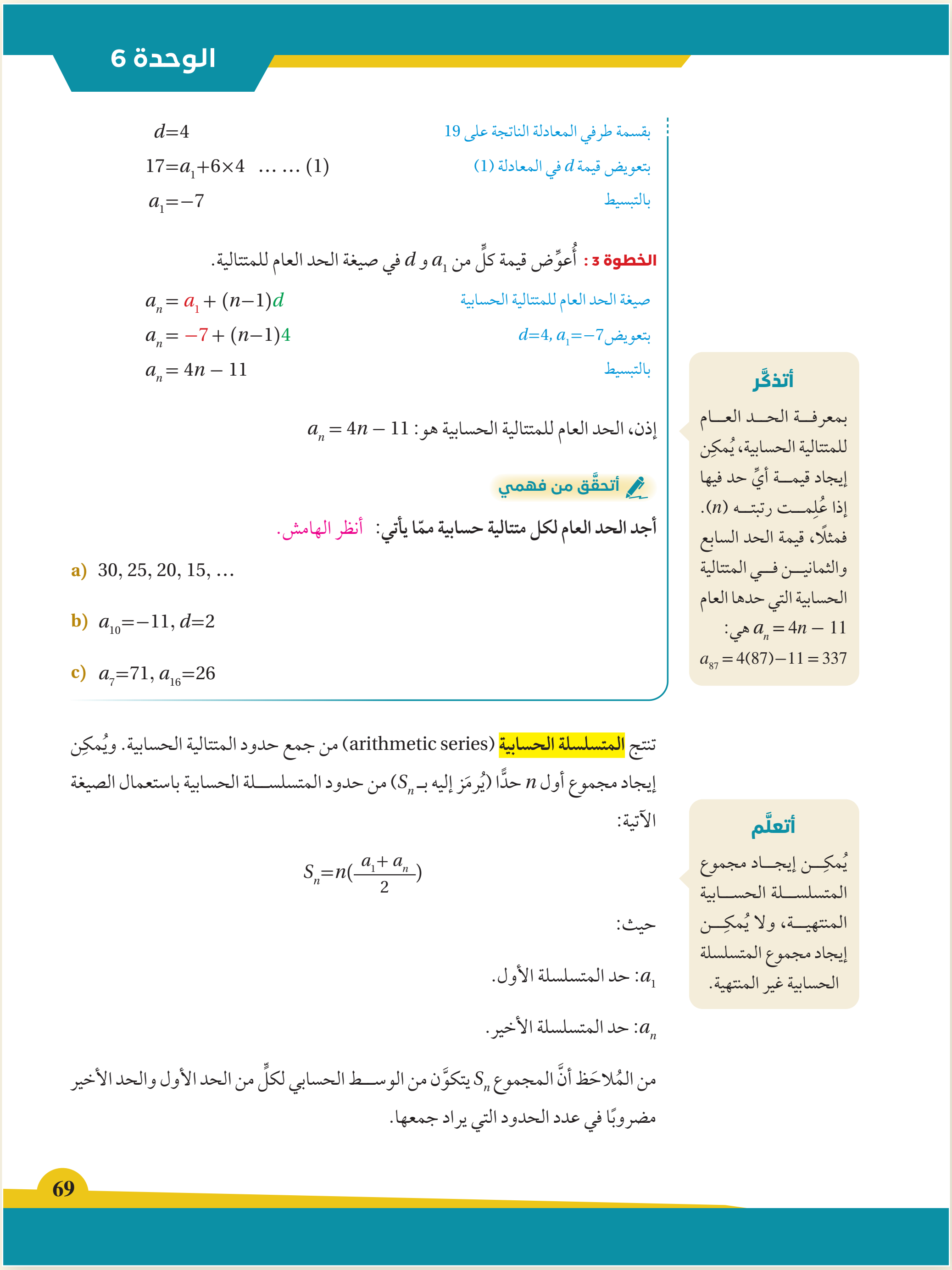
صيغة الحد العام للمتتالية الحسابية	$a_n = a_1 + (n-1)d$
بتعويض $n=7, a_7=17$	$17 = a_1 + (7-1)d$
بالتبسيط	$17 = a_1 + 6d \quad \ldots\ldots (1)$
بتعويض $n=26, a_{26}=93$	$93 = a_1 + (26-1)d$
بالتبسيط	$93 = a_1 + 25d \quad \ldots\ldots (2)$

الخطوة 2: أَحُلُّ المعادلة (1) والمعادلة (2) بالحذف.

بطرح المعادلة (1) من المعادلة (2)	$76=19d$

أتذكَّر

من طرائق حَلِّ النظام المُكوَّن من معادلتين خطيتين: الحذف، والتعويض.



الوحدة 6

بقسمة طرفي المعادلة الناتجة على 19	$d=4$
بتعويض قيمة d في المعادلة (1)	$17=a_1+6\times4 \quad \dots\dots (1)$
بالتبسيط	$a_1=-7$

الخطوة 3 : أُعوِّض قيمة كلٍّ من a_1 و d في صيغة الحد العام للمتتالية.

صيغة الحد العام للمتتالية الحسابية	$a_n = a_1 + (n-1)d$
بتعويض $d=4,\ a_1=-7$	$a_n = -7 + (n-1)4$
بالتبسيط	$a_n = 4n - 11$

إذن، الحد العام للمتتالية الحسابية هو: $a_n = 4n - 11$

أتحقَّق من فهمي

أجد الحد العام لكل متتالية حسابية ممّا يأتي: أنظر الهامش.

a) $30, 25, 20, 15, \dots$

b) $a_{10}=-11,\ d=2$

c) $a_7=71,\ a_{16}=26$

أتذكَّر

بمعرفة الحد العام للمتتالية الحسابية، يُمكِن إيجاد قيمة أيِّ حد فيها إذا عُلِمت رتبته (n). فمثلًا، قيمة الحد السابع والثمانين في المتتالية الحسابية التي حدها العام $a_n = 4n - 11$ هي:

$a_{87} = 4(87) - 11 = 337$

تنتج **المتسلسلة الحسابية** (arithmetic series) من جمع حدود المتتالية الحسابية. ويُمكِن إيجاد مجموع أول n حدًّا (يُرمَز إليه بـ S_n) من حدود المتسلسلة الحسابية باستعمال الصيغة الآتية:

$$S_n = n\left(\frac{a_1 + a_n}{2}\right)$$

حيث:

a_1: حد المتسلسلة الأول.

a_n: حد المتسلسلة الأخير.

من المُلاحَظ أنَّ المجموع S_n يتكوَّن من الوسط الحسابي لكلٍّ من الحد الأول والحد الأخير مضروبًا في عدد الحدود التي يراد جمعها.

أتعلَّم

يُمكِن إيجاد مجموع المتسلسلة الحسابية المنتهية، ولا يُمكِن إيجاد مجموع المتسلسلة الحسابية غير المنتهية.

69

إجابة الأسئلة في بند (أتحقَّق من فهمي 2):

a) $a_n = 30 + (n-1)(-5) = 35 - 5n$

b) $a_1 + 9(2) = -11 \Rightarrow a_1 = -29$

$a_n = -29 + (n-1)(2)$

$\Rightarrow a_n = 2n - 31$

c) $a_{16} - a_7 = (16-7)d$

$26 - 71 = 9d \Rightarrow -45 = 9d \Rightarrow d = -5$

$a_7 = a_1 + 6d \Rightarrow a_1 = 71 - 6(-5) = 101$

$\Rightarrow a_n = 101 - 5(n-1)$

$a_n = 106 - 5n$

••• توسعة:

يُمكِن تبسيط عملية إيجاد الأساس إذا عُلِم حدان في المتتالية الحسابية، وذلك باستعمال حقيقة أنَّ الفرق بين أيِّ حدين يساوي أساس المتتالية مضروبًا في الفرق بين رتبتي الحدين. ففي الفرع 3 من المثال 2، نجد أنَّ:

$$a_{26} - a_7 = d(26-7)$$
$$\Rightarrow 93 - 17 = 19d$$
$$\Rightarrow 76 = 19d \Rightarrow d = 4$$

ويُمكِن إيجاد الحد العام باستعمال الفكرة نفسها على النحو الآتي:

$$a_n - a_7 = d(n-7)$$
$$\Rightarrow a_n - 17 = 4(n-7)$$
$$\Rightarrow a_n = 17 + 4n - 28$$
$$\Rightarrow a_n = 4n - 11$$

أطلب إلى الطلبة حل السؤال 11 من بند (**أتدرَّب وأحل المسائل**) باستعمال الفكرة المطروحة هنا.

مثال إضافي:

أجد الحد العام لكل متتالية حسابية ممّا يأتي:

1 $11, 4, -3, -10, \dots$

$a_n = a_1 + (n-1)d = 11 + (n-1)(-7) = 18 - 7n$

2 $a_1 = 9,\ a_6 = 24$

$a_6 = 9 + 5d \Rightarrow 24 = 9 + 5d \Rightarrow d = 3$

$a_n = 9 + 3(n-1) = 6 + 3n$

3 $a_4 = 35,\ a_{15} = 57$

$a_n = 27 + 2n$

مثال 3

- أطرح على الطلبة السؤال الآتي:
  - هل يختلف مجموع المتسلسلة: $2+5+8+11+14+17$ عن مجموع المتسلسلة: $17+14+11+8+5+2$؟ لماذا؟ لا؛ لأنَّ الجمع تبديلي.
- أُوضِّح للطلبة أنَّه إذا رُمِز إلى المجموع بالحرف S، فإنَّه يُمكِن كتابة المتسلسلتين على النحو الآتي:

$$S = 2+5+8+11+14+17$$
$$S = 17+14+11+8+5+2$$

وبجمع هاتين المعادلتين، فإنَّ:

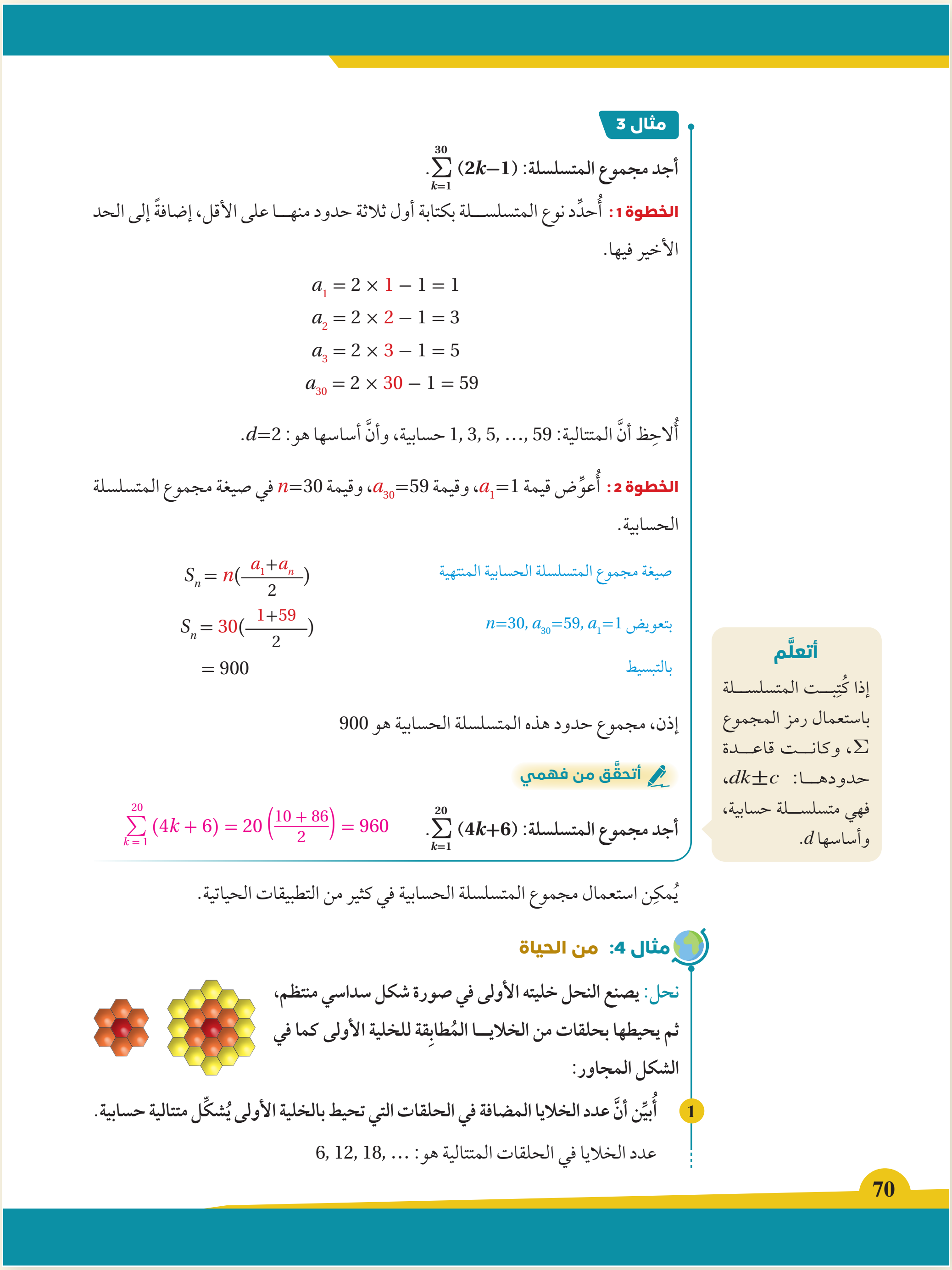
$$2S = 19+19+19+19+19+19 = 6(19)$$

إذن، $S = \frac{6(19)}{2}$

- أسأل الطلبة:
  - ماذا يُمثِّل العدد 19 في هذا المثال؟ مجموع الحد الأوَّل والحد الأخير في المتسلسلة.
  - ماذا يُمثِّل العدد 6؟ عدد حدود المتسلسلة.
- أُوضِّح للطلبة أنَّه يُمكِن تعميم نتيجة السؤال السابق لإيجاد مجموع أوَّل n حدًّا من حدود متسلسلة حسابية، وهو ما يُرمَز إليه بالرمز S_n، وذلك على النحو الآتي:

$$S_n = \frac{n(\text{الحد الأوَّل} + \text{الحد الأخير})}{2}$$
$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

- أُناقِش الطلبة في حل المثال 3 على اللوح، وذلك بطرح الأسئلة الآتية عليهم:
  - كيف أعرف أنَّ هذه المتسلسلة حسابية؟ بإيجاد الحدود الثلاثة الأولى للمتسلسلة، وحساب الفرق بين كل حدين متتاليين. أو بملاحظة أنَّ قاعدة الحد العام خطية؛ ما يعني أنَّ المتسلسلة حسابية.
  - ماذا يَلزم لحساب مجموعها؟ معرفة حدها الأوَّل، وحدها الأخير، وعدد حدودها.
  - ما الحد الأوَّل فيها؟ $2\times1-1=1$
  - ما حدها الأخير؟ $a_{30} = 2(30)-1 = 59$
  - ما عدد حدودها؟ 30 حدًّا، وهو العدد المكتوب فوق الرمز $\sum$.
- أطلب إلى أحد الطلبة تعويض هذه القِيَم في صيغة المجموع، ثم تبسيطها.



مثال 3

أجد مجموع المتسلسلة: $\sum_{k=1}^{30}(2k-1)$.

الخطوة 1: أُحدِّد نوع المتسلسلة بكتابة أول ثلاثة حدود منها على الأقل، إضافةً إلى الحد الأخير فيها.

$$a_1 = 2\times1-1=1$$
$$a_2 = 2\times2-1=3$$
$$a_3 = 2\times3-1=5$$
$$a_{30} = 2\times30-1=59$$

أُلاحِظ أنَّ المتتالية: 59 ,... ,5 ,3 ,1 حسابية، وأنَّ أساسها هو: $d=2$.

الخطوة 2: أُعوِّض قيمة $a_1=1$، وقيمة $a_{30}=59$، وقيمة $n=30$ في صيغة مجموع المتسلسلة الحسابية.

$S_n = n(\frac{a_1+a_n}{2})$ صيغة مجموع المتسلسلة الحسابية المنتهية

$S_n = 30(\frac{1+59}{2})$ بتعويض $n=30, a_{30}=59, a_1=1$

$= 900$ بالتبسيط

إذن، مجموع حدود هذه المتسلسلة الحسابية هو 900

أتحقَّق من فهمي

أجد مجموع المتسلسلة: $\sum_{k=1}^{20}(4k+6)$. $\sum_{k=1}^{20}(4k+6) = 20\left(\frac{10+86}{2}\right) = 960$

أتعلَّم

إذا كُتِبت المتسلسلة باستعمال رمز المجموع Σ، وكانت قاعدة حدودها: $dk\pm c$، فهي متسلسلة حسابية، وأساسها d.

يُمكِن استعمال مجموع المتسلسلة الحسابية في كثير من التطبيقات الحياتية.

مثال 4: من الحياة

نحل: يصنع النحل خليته الأولى في صورة شكل سداسي منتظم، ثم يحيطها بحلقات من الخلايا المُطابِقة للخلية الأولى كما في الشكل المجاور:

① **أُبيِّن أنَّ عدد الخلايا المضافة في الحلقات التي تحيط بالخلية الأولى يُشكِّل متتالية حسابية.**

عدد الخلايا في الحلقات المتتالية هو: ... ,18 ,12 ,6

70

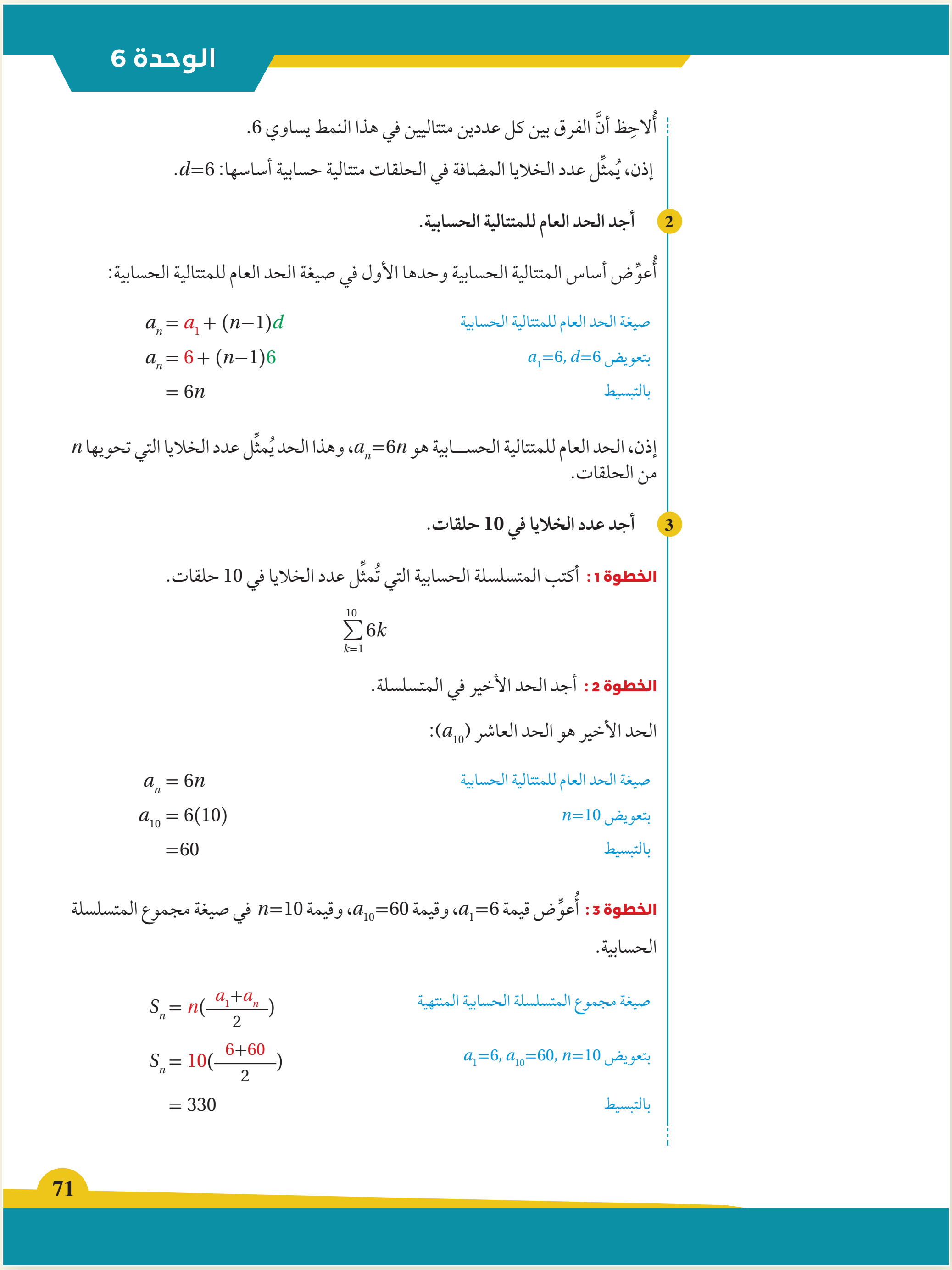
مثال إضافي:

أجد مجموع كلٍّ من المتسلسلات الحسابية الآتية:

① $\sum_{k=1}^{18}(5+2k)$ 432

② مجموع أوَّل 13 حدًّا من المتسلسلة الآتية: $50+45+40+35+\dots$ 260

③ مجموع أوَّل 40 حدًّا من المتسلسلة الآتية: $2+9+16+23+\dots$ 5540



أُلاحِظ أنَّ الفرق بين كل عددين متتاليين في هذا النمط يساوي 6.

إذن، يُمثِّل عدد الخلايا المضافة في الحلقات متتالية حسابية أساسها: $d=6$.

2 أجد الحد العام للمتتالية الحسابية.

أُعوِّض أساس المتتالية الحسابية وحدها الأول في صيغة الحد العام للمتتالية الحسابية:

صيغة الحد العام للمتتالية الحسابية $a_n = a_1 + (n-1)d$

بتعويض $a_1=6, d=6$ $a_n = 6 + (n-1)6$

بالتبسيط $= 6n$

إذن، الحد العام للمتتالية الحسابية هو $a_n=6n$، وهذا الحد يُمثِّل عدد الخلايا التي تحويها n من الحلقات.

3 أجد عدد الخلايا في 10 حلقات.

الخطوة 1: أكتب المتسلسلة الحسابية التي تُمثِّل عدد الخلايا في 10 حلقات.

$$\sum_{k=1}^{10} 6k$$

الخطوة 2: أجد الحد الأخير في المتسلسلة.

الحد الأخير هو الحد العاشر (a_{10}):

صيغة الحد العام للمتتالية الحسابية $a_n = 6n$

بتعويض $n=10$ $a_{10} = 6(10)$

بالتبسيط $=60$

الخطوة 3: أُعوِّض قيمة $a_1=6$، وقيمة $a_{10}=60$، وقيمة $n=10$ في صيغة مجموع المتسلسلة الحسابية.

صيغة مجموع المتسلسلة الحسابية المنتهية $S_n = n(\frac{a_1+a_n}{2})$

بتعويض $a_1=6, a_{10}=60, n=10$ $S_n = 10(\frac{6+60}{2})$

بالتبسيط $= 330$

مثال 4: من الحياة

- أُناقِش الطلبة في حل المثال 4 الذي يُبيِّن كيف يُمكِن تطبيق مجموع المتسلسلة الحسابية في موقف حياتي، مُنوِّهًا إيّاهم بضرورة التحقُّق من أنَّ المتتالية حسابية، وإيجاد حدها العام وحدها الأخير الذي تساوي رتبته عدد الحدود المراد جمعها.

أخطاء شائعة:

قد يُخطِئ بعض الطلبة في كتابة قاعدة الحد العام للمتسلسلة؛ لذا أُنبِّههم دائمًا لضرورة التأكُّد أنَّ القاعدة التي كتبوها تعطي حدود المتسلسلة فعلًا.

مثال إضافي:

هندسة معمارية: بُنِي هرم اللوفر في باريس من هيكل معدني ثُبِّتت فيه ألواح زجاجية. وقد اشتمل الصف العلوي من قِمَّة الهرم على 4 ألواح، وضمَّ كل صف تحته 4 ألواح زيادة على عدد الألواح في الصف الذي فوقه. إذا تألَّف الهرم من 18 صفًّا من الألواح، وكان عدد الألواح الفعلي يقل بمقدار 11 لوحًا عن عدد ألواح 18 صفًّا كاملةً بسبب مدخل الهرم، فما عدد الألواح الزجاجية التي استُعمِلت لبناء هرم اللوفر؟ 673 لوحًا.

4 التدريب

أتدرَّب وأحل المسائل

- أُوجِّه الطلبة إلى بند (**أتدرَّب وأحل المسائل**)، ثم أطلب إليهم حل المسائل (18 – 1) ضمن مجموعات ثنائية داخل الغرفة الصفية؛ فهذه المسائل تحديدًا ترتبط ارتباطًا مباشرًا بأمثلة الدرس، وهي تُستعمَل خاصةً لتدريب الطلبة على المفاهيم نفسها، بصرف النظر عمّا إذا كانت الأسئلة فردية أم زوجية.
- إذا واجه الطلبة صعوبة في حل أيَّة مسألة، فإنَّني أختار أحد الطلبة مِمَّنْ تمكَّن/ تمكَّنت من حل المسألة؛ لمناقشة استراتيجيته/ استراتيجيتها في حل المسألة على اللوح، مُحفِّزًا الطلبة على طرح أيِّ تساؤل عن خطوات الحل المُقدَّمة من الزميل/ الزميلة.

مهارات التفكير العليا

- أُوجِّه الطلبة إلى قراءة الأسئلة الواردة في بند (**مهارات التفكير العليا**)، ثم أطلب إليهم حل المسائل (24 – 22).
- أرصد أيَّة أفكار غير تقليدية من الطلبة، ثم أطلب إلى هؤلاء الطلبة كتابة هذه الأفكار على اللوح.

الواجب المنزلي:

أستعين بالجدول الآتي لتحديد الواجب المنزلي للطلبة بحسب مستوياتهم:

المستويات	الأسئلة
دون المتوسط	كتاب الطالب: 19, 20 كتاب التمارين: (18 – 1) (فردي).
ضمن المتوسط	كتاب الطالب: (22 – 20) كتاب التمارين: (18 – 1) (فردي).
فوق المتوسط	كتاب الطالب: (24 – 21) كتاب التمارين: (19 – 13)

أتحقَّق من فهمي

مقاعد: يوجد في الصف الأول من المقاعد في أحد المسارح **13** مقعدًا، وفي الصف الثاني **16** مقعدًا، وفي الصف الثالث **19** مقعدًا، ... وهكذا حتى الصف الأخير في المسرح: أنظر الهامش.

a) أُبيِّن أنَّ عدد المقاعد في صفوف المسرح يُشكِّل متتالية حسابية.

b) أجد الحد العام للمتتالية الحسابية.

c) إذا كان في المسرح 25 صفًّا من المقاعد، فكم مقعدًا في المسرح؟

أتدرَّب وأحُلُّ المسائل

أُحدِّد إذا كانت كل متتالية ممّا يأتي حسابية أم لا:

1. $-9, -5, -1, 3, \ldots$ حسابية؛ لأنَّ الفرق بين كل حدين متتاليين هو 4
2. $0, 4, 9, 14, \ldots$ ليست حسابية؛ لأنَّ الفرق بين كل حدين متتاليين غير ثابت.
3. $27, 21, 15, 9, \ldots$ حسابية؛ لأنَّ الفرق بين كل حدين متتاليين هو -6
4. $-2, -4, -6, -8, \ldots$ حسابية؛ لأنَّ الفرق بين كل حدين متتاليين هو -2
5. $-7, 0, 7, 14, \ldots$ حسابية؛ لأنَّ الفرق بين كل حدين متتاليين هو 7
6. $5, 10, 20, 40, \ldots$ ليست حسابية؛ لأنَّ الفرق بين كل حدين متتاليين غير ثابت.

أجد الحد العام لكل متتالية حسابية ممّا يأتي:

7. $8, 18, 28, 38, \ldots$ $a_n = 10n - 2$
8. $45, 40, 35, 30, \ldots$ $a_n = 50 - 5n$
9. $a_5=7, d=3$ $a_n = 3n - 8$
10. $a_{21}=41, d=-2$ $a_n = 83 - 2n$
11. $a_7=58, a_{11}=94$ $a_n = 9n - 5$
12. $a_6=-8, a_{15}=-62$ $a_n = 28 - 6n$

أجد مجموع كلٍّ من المتسلسلات الحسابية الآتية:

13. $\sum_{k=1}^{25}(5k-7)$ $S_{25} = 25\left(\frac{-2+118}{2}\right) = 1450$
14. $\sum_{k=1}^{31}(23-4k)$ $S_{31} = 31\left(\frac{19-101}{2}\right) = -1271$
15. $\sum_{k=1}^{17}(k+6)$ $S_{17} = 17\left(\frac{7+23}{2}\right) = 255$
16. $\sum_{k=1}^{15}(16-k)$ $S_{15} = 15\left(\frac{15+1}{2}\right) = 120$
17. $\sum_{k=1}^{13}(2k)$ $S_{13} = 13\left(\frac{2+26}{2}\right) = 182$
18. $\sum_{k=1}^{99}(3k-4)$ $S_{99} = 99\left(\frac{-1+293}{2}\right) = 14454$

72

إجابة الأسئلة في بند (أتحقَّق من فهمي 4):

a) المتتالية حسابية؛ لأنَّ الفرق بين عدد مقاعد كل صف والصف الذي يسبقه مقدار ثابت، وهو 3

$$16 - 13 = 3; 19 - 16 = 3$$

b) $a_n = 13 + 3(n - 1) = 3n + 10$

c) $\sum_{k=1}^{25}(3k + 10) = 25\left(\frac{13 + 85}{2}\right) = 1225$

معلومة

عنترة بن شدّاد العبسي هو أحد أشهر شعراء العرب وفرسانها في عصر ما قبل الإسلام، وقد اشتُهِر بشِعْر الفروسية الجميل.

19 **شِعْر:** حفظ محمد في أحد الأيام 4 أبيات من قصيدة لعنترة بن شدّاد، وحفظ في اليوم الثاني 7 أبيات أخرى من هذه القصيدة، وحفظ في اليوم الثالث 10 أبيات أخرى منها. أجد عدد الأبيات التي سيحفظها محمد من هذه القصيدة في نهاية اليوم السادس إذا استمر في الحفظ وَفق النمط نفسه.

$$S_6 = \sum_{k=1}^{6} (3k+1) = 6\left(\frac{4+19}{2}\right) = 69$$

20 **ثقافة مالية:** اقترض عيسى مبلغًا من صديقه؛ على أنْ يعيده إليه خلال 8 أشهر في صورة دفعات شهرية، قيمة الدفعة الأولى منها JD 100، وأنْ يزيد هذه القيمة بمقدار JD 20 كل شهر، بدءًا بالشهر الثاني. ما المبلغ الذي اقترضه عيسى من صديقه؟ أنظر الهامش.

21 أحُلُّ المسألة الواردة في بند (مسألة اليوم). أنظر الهامش.

مهارات التفكير العليا

22 **أكتشف الخطأ:** أوجد معتز الحد العام للمتتالية: $21, 12, 3, -6, \ldots$ على النحو الآتي:

$$a_1 = 21,\ d = 9$$
$$a_n = 21 + 9n$$

أكتشف الخطأ في حَلِّ معتز، ثم أُصحِّحه. أخطأ معتز في حساب قيمة d؛ فقيمة d الصحيحة هي -9، وأخطأ أيضًا في صيغة الحد العام؛ فالصحيح أنَّ: $a_n = 30 - 9n$

23 **تبرير:** أُبيِّن لماذا تُعَدُّ المتسلسلة: $\sum_{k=1}^{\infty} c$ حسابية، حيث c عدد حقيقي، مُبرِّرًا إجابتي.

$\sum_{k=1}^{\infty} c = c+c+c+c+\cdots$ وهذه متسلسلة حسابية؛ لأنَّ الفرق بين كل حدين متتاليين ثابت، وهو صفر.

24 **تبرير:** أُبيِّن أنَّ مجموع أول n حدًّا من متسلسلة الأعداد الفردية: $(1+3+5+7+\ldots)$ هو n^2، مُبرِّرًا إجابتي.

الحد العام لهذه المتسلسلة هو: $a_n = 2n-1$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n\left(\frac{1+2n-1}{2}\right) = n(n) = n^2$$

73

إجابة الأسئلة في بند (أتدرَّب وأحل المسائل)

20) $n = 8$

$d = 20$

$a_1 = 100$

$a_n = 20k + 80$

$$S_8 = \sum_{k=1}^{8} (20k+80) = 8\left(\frac{100+240}{2}\right) = 1360$$

21) $n = 12$

$d = 2$

$a_1 = 3$

$a_n = 2n + 1$

$$S_{12} = 12\left(\frac{3+25}{2}\right) = 168$$

5 الإثراء

- أطلب إلى الطلبة حل السؤال الآتي بوصفه إثراءً لهم:

◂ أجد مجموع كل متسلسلة ممّا يأتي:

1 $7 + 15 + 23 + \ldots + 159$

$n = 20;\ S_{20} = 1660$

2 $\sum_{k=5}^{14} (2k+3)$ 220

$$S_{14} = \overbrace{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}^{S_4} + \overbrace{a_5 + a_6 + \ldots + a_{14}}^{\text{المطلوب}}$$

$$\sum_{k=5}^{14} (2k+3) = S_{14} - S_4 = 252 - 32 = 220$$

حل آخر:

يُمكِن عَدُّ الحد الأوَّل: $a_5 = 2 \times 5 + 3 = 13$

وعَدُّ الحد الأخير: $a_{14} = 2 \times 14 + 3 = 31$

وعَدُّ عدد الحدود: $14 - 5 + 1 = 10$

إذن، $S = 10 \times \frac{(13+31)}{2} = 220$

6 الختام

- أتحقَّق من فهم الطلبة موضوع الدرس، بطرح السؤال الآتي عليهم:

◂ أُحدِّد إذا كانت كل متتالية ممّا يأتي حسابية أو غير حسابية، ثم أجد الحد العام ومجموع أوَّل 20 حدًّا فيها إنْ كانت حسابية:

1 $2, 4, 6, 10, 14, \ldots$ ليست حسابية.

2 $30, 10, -10, -30, \ldots$

حسابية؛ $a_n = 50 - 20n;\ S_{20} = -3200$

3 $2, \frac{8}{3}, \frac{10}{3}, 4, \ldots$

حسابية؛ $a_n = \frac{4}{3} + \frac{2}{3}n;\ S_{20} = 166\frac{2}{3}$

الدرس
3

نتاجات الدرس:

- تعرُّف المتتالية الهندسية، والمتسلسلة الهندسية.
- إيجاد الحد العام للمتتالية الهندسية.
- إيجاد مجموع أوَّل n حدًّا من متتالية هندسية أو متسلسلة هندسية.

نتاجات التعلُّم القبلي:

- تعرُّف المتتالية الحسابية، والمتسلسلة الحسابية.
- إيجاد مجموع المتسلسلة الحسابية المنتهية.

مراجعة التعلُّم القبلي:

- أُوجِّه الطلبة في بداية كل حصة إلى الفقرة (الفقرات) المُرتبِطة بما سيُقدَّم من موضوعات الدرس في الحصة (إنْ وُجِدت) ضمن صفحات (**أستعد لدراسة الوحدة**) في كتاب التمارين، ثم أطلب إليهم حل تدريباتها داخل الغرفة الصفية بصورة فردية.
- أتجوَّل بين الطلبة؛ لمتابعتهم أثناء الحل، وتحديد نقاط ضعفهم، وأُوجِّههم إلى مراجعة المثال عندما يواجهون صعوبة في الحل.

1 التهيئة

- أطرح على الطلبة الأسئلة الآتية:
  - ◂ أكتب مثالًا على متتالية حسابية وأُخرى غير حسابية؟ إجابة مُحتمَلة:

    متتالية حسابية: $1, 5, 9, 13, \ldots$

    أو: أيُّ مثال يكون الفرق بين كل حدين متتاليين فيه مقدارًا ثابتًا.

    متتالية غير حسابية: $1, 5, 7, 10, \ldots$

    أو: أيُّ مثال لا يكون الفرق بين كل حدين متتاليين فيه مقدارًا ثابتًا.
  - ◂ ماذا يَلزم لإيجاد مجموع متسلسلة حسابية منتهية؟ إيجاد الحد الأوَّل والحد الأخير منها، وتعرُّف عدد حدودها.
  - ◂ ما مجموع المتسلسلة: $\sum_{k=1}^{8}(15-2k)$؟ 48
- أُناقِش الطلبة في حل الأسئلة السابقة، وأطلب إليهم تبرير إجاباتهم.

الدرس 3

المتتاليات والمتسلسلات الهندسية
Geometric Sequences and Series

فكرة الدرس تعرُّف المتتالية الهندسية، وإيجاد مجموع المتسلسلة الهندسية المنتهية.

المصطلحات المتتالية الهندسية، المتسلسلة الهندسية، أساس المتتالية الهندسية، أساس المتسلسلة الهندسية.

مسألة اليوم ورقة مقاسها A4، وسُمْكها 0.1 mm، طُوِيت من المنتصف، فتضاعف سُمْكها. بافتراض أنَّه يُمكِن طيُّ هذه الورقة 15 مرَّة، أجد السُّمْك الناتج.

أتعلَّم
يُمكِن تمييز المتتالية الهندسية بملاحظة ناتج قسمة كل حد فيها على الحد الذي يسبقه.

إذا كانت النسبة ثابتة بين كل حدين متتاليين في متتالية، فإنَّها تُسمّى **متتالية هندسية** (geometric sequence)، وتُسمّى النسبة الثابتة **أساس المتتالية الهندسية** (common ratio)، ويُرمَز إليها بالحرف r.

مفهوم أساسي **المتتالية الهندسية**

بالكلمات: تكون المتتالية هندسية إذا كانت النسبة ثابتة بين كل حد فيها والحد الذي يسبقه.

بالرموز: تكون المتتالية: $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ هندسية إذا كان:

$$\frac{a_2}{a_1}=\frac{a_3}{a_2}=\ldots=\frac{a_n}{a_{n-1}}=r$$

مثال 1

أُحدِّد إذا كانت كل متتالية ممّا يأتي هندسية أم لا:

① **32, 16, 8, 4**

أقسم كل حد في المتتالية على الحد السابق له:

$$\frac{a_2}{a_1}=\frac{16}{32}=\frac{1}{2}$$ نسبة الحد الثاني إلى الحد الأول

2 الاستكشاف

- أُوجِّه الطلبة إلى قراءة المسألة الواردة في بند (**مسألة اليوم**)، ثم أسألهم:
  - ما مقاس الورق من نوع (A4)؟ ورق مستطيل، عرض الورقة الواحدة منه 21 cm، وطولها 29.7 cm
  - كم يصبح سُـمْك الورقة بعد طيِّها من منتصفها مَرَّة واحدة؟ لماذا؟ 0.2 mm؛ لأنَّه نتج من طيِّها طبقتان من الورق.
  - كم يصبح السُّمْك الناتج بعد طيِّ الورقة من منتصفها مَرَّتين؟ 0.4 mm
  - كم يصبح السُّمْك الناتج بعد طيِّ الورقة من منتصفها 4 مَرّات؟ 1.6 mm
  - ما متتالية السُّمْك التي تبدأ بالحد 0.2؟ ... ,0.2, 0.4. 0.8, 1.6, 3.2
  - كم يصبح السُّمْك الناتج بعد طيِّ الورقة من منتصفها 15 مَرَّة؟
- أُخبِر الطلبة أنَّهم سيتعرَّفون إجابة السؤال السابق في هذا الدرس.
- أُعزِّز الإجابات الصحيحة.

3 التدريس

مثال 1

- أُوضِّح للطلبة مفهوم المتتالية الهندسية التي تكون النسبة بين كل حدين متتاليين فيها مقدارًا ثابتًا، يُسـمّى أسـاس المتتالية الهندسـية، ويُرمَز إليه بالحرف r، ثم أطرح أمثلة على متتاليات هندسـية وأُخرى غير هندسـية، مُؤكِّدًا ضرورة قسـمة كل حد من المتتالية المعطاة على الحد الذي يسـبقه؛ لتصنيف المتتالية إلى هندسية أو غير هندسية.
- أُناقِش الطلبة في حل المثال 1 على اللوح.
- إنْ لزم الأمر، أُناقِش الطلبة في مزيد من الأمثلة، مثل:
  - أيُّ المتتاليات الآتية هندسية؟

a) $10, 5, 2.5, 1.25, \ldots$ هندسية؛ لأنَّ النسبة بين كل حدين متتاليين هي $\frac{1}{2}$

b) $6, 18, 54, 162, \ldots$ هندسية: لأنَّ النسبة بين كل حدين متتاليين هي 3

c) $2, 4, 8, 12, 16, \ldots$ ليست هندسية؛ لأنَّ النسبة بين كل حدين متتاليين غير ثابتة.

d) $2, -8, 32, -128, 512, \ldots$ هندسية؛ لأنَّ النسبة بين كل حدين متتاليين هي -4

ملاحظات المُعلِّم/ المُعلِّمة

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

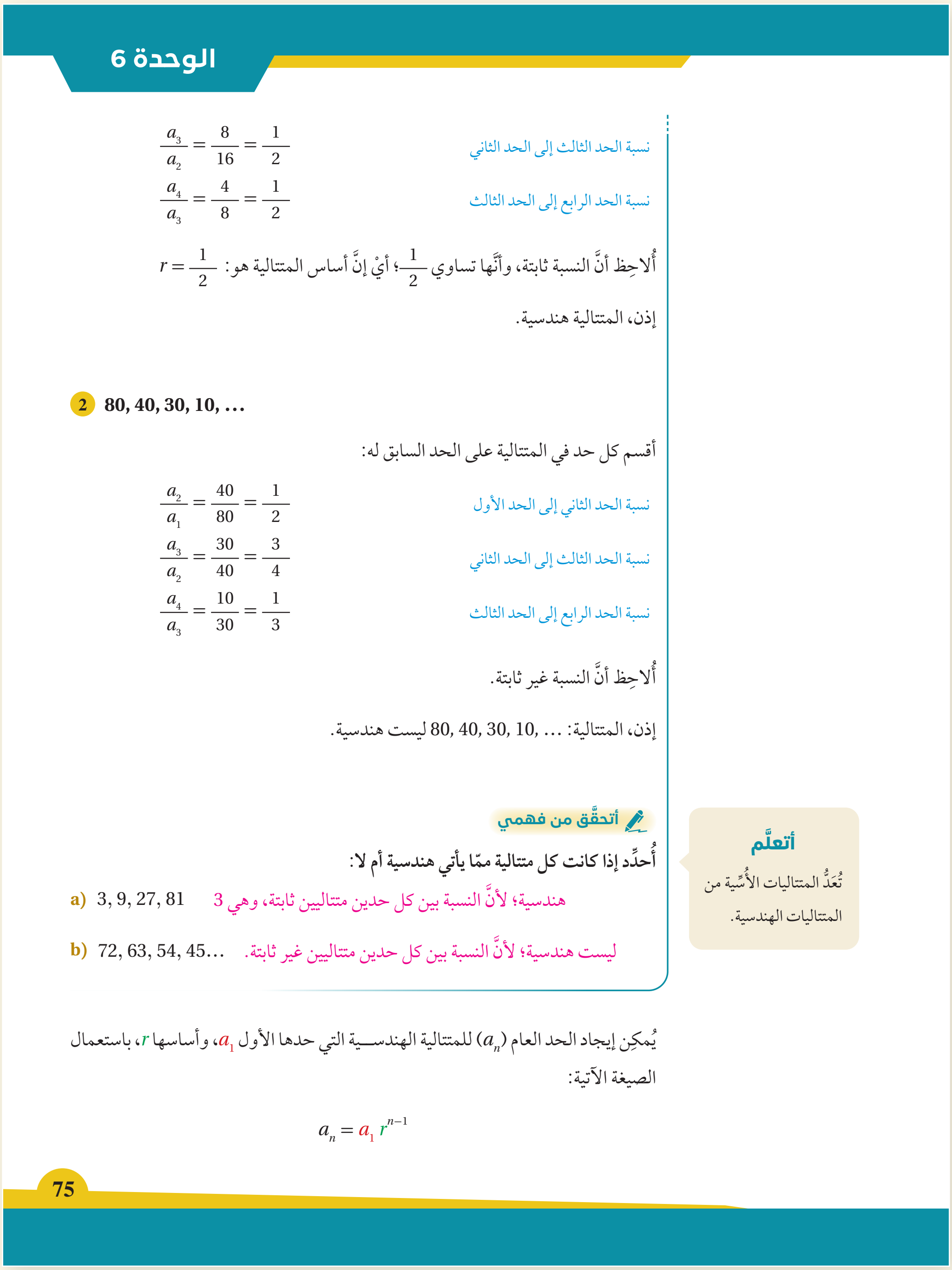
....

....

....

....

....



نسبة الحد الثالث إلى الحد الثاني $\frac{a_3}{a_2} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$

نسبة الحد الرابع إلى الحد الثالث $\frac{a_4}{a_3} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

أُلاحِظ أنَّ النسبة ثابتة، وأنّها تساوي $\frac{1}{2}$؛ أيْ إنَّ أساس المتتالية هو: $r = \frac{1}{2}$

إذن، المتتالية هندسية.

② 80, 40, 30, 10, …

أقسم كل حد في المتتالية على الحد السابق له:

نسبة الحد الثاني إلى الحد الأول $\frac{a_2}{a_1} = \frac{40}{80} = \frac{1}{2}$

نسبة الحد الثالث إلى الحد الثاني $\frac{a_3}{a_2} = \frac{30}{40} = \frac{3}{4}$

نسبة الحد الرابع إلى الحد الثالث $\frac{a_4}{a_3} = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$

أُلاحِظ أنَّ النسبة غير ثابتة.

إذن، المتتالية: … ,80, 40, 30, 10 ليست هندسية.

أتحقّق من فهمي

أُحدِّد إذا كانت كل متتالية ممّا يأتي هندسية أم لا:

a) 3, 9, 27, 81   هندسية؛ لأنَّ النسبة بين كل حدين متتاليين ثابتة، وهي 3

b) 72, 63, 54, 45…   ليست هندسية؛ لأنَّ النسبة بين كل حدين متتاليين غير ثابتة.

أتعلَّم

تُعَدُّ المتتاليات الأُسِّية من المتتاليات الهندسية.

يُمكِن إيجاد الحد العام (a_n) للمتتالية الهندسية التي حدها الأول a_1، وأساسها r، باستعمال الصيغة الآتية:

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

إرشادات:

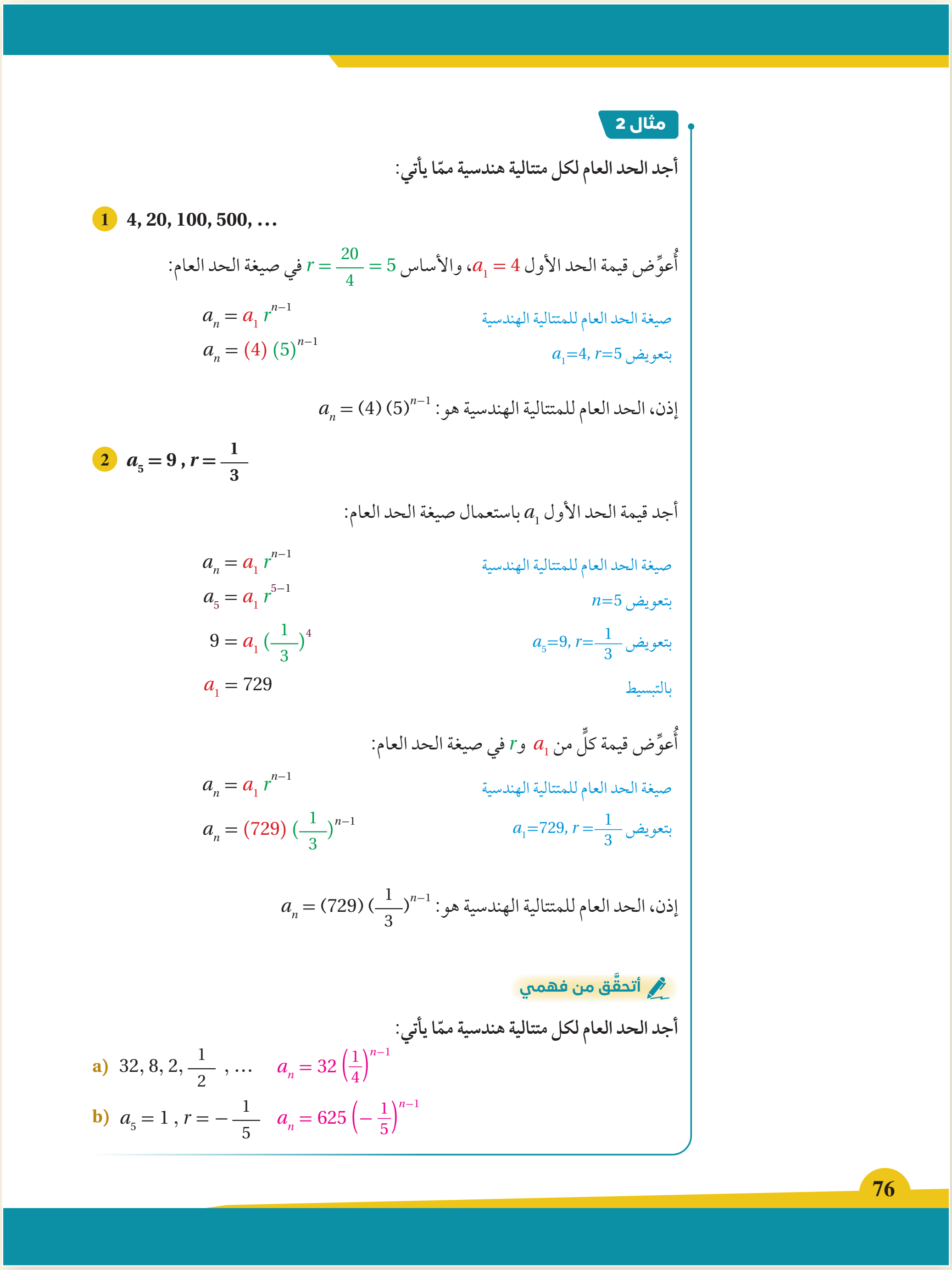
- أَلفِت انتباه الطلبة إلى أنَّ الحرف r الذي يُستعمَل للدلالة على أساس المتتالية الهندسية هو الحرف الأوَّل من كلمة (نسبة) باللغة الإنجليزية (ratio).
- أُناقِش الطلبة في الأفكار الواردة في الصناديق الهامشية؛ لِما لها من أهمية في تعزيز مفاهيم الدرس.

تعزيز اللغة ودعمها:

أُكرِّر المصطلحات الرياضية الوارد ذكرها في الدرس بكلٍّ من اللغة العربية واللغة الإنجليزية، مُحفِّزًا الطلبة على استعمالها.

التقويم التكويني:

أطلب إلى الطلبة حل التدريب الوارد في بند (**أتحقَّق من فهمي**) بعد كل مثال، ثم أختار بعض الإجابات التي تحوي أخطاء مفاهيمية لمناقشتها على اللوح، ولا أذكر اسم مَنْ أخطأ في الإجابة؛ تجنُّبًا لإحراجه.



مثال 2

أجد الحد العام لكل متتالية هندسية ممّا يأتي:

1 **4, 20, 100, 500, ...**

أُعوِّض قيمة الحد الأول $a_1 = 4$، والأساس $r = \frac{20}{4} = 5$ في صيغة الحد العام:

$a_n = a_1\, r^{n-1}$ صيغة الحد العام للمتتالية الهندسية

$a_n = (4)\,(5)^{n-1}$ بتعويض $a_1=4,\ r=5$

إذن، الحد العام للمتتالية الهندسية هو: $a_n = (4)\,(5)^{n-1}$

2 $a_5 = 9\,,\ r = \frac{1}{3}$

أجد قيمة الحد الأول a_1 باستعمال صيغة الحد العام:

$a_n = a_1\, r^{n-1}$ صيغة الحد العام للمتتالية الهندسية

$a_5 = a_1\, r^{5-1}$ بتعويض $n=5$

$9 = a_1\, (\frac{1}{3})^4$ بتعويض $a_5=9,\ r=\frac{1}{3}$

$a_1 = 729$ بالتبسيط

أُعوِّض قيمة كلٍّ من a_1 وr في صيغة الحد العام:

$a_n = a_1\, r^{n-1}$ صيغة الحد العام للمتتالية الهندسية

$a_n = (729)\,(\frac{1}{3})^{n-1}$ بتعويض $a_1=729,\ r=\frac{1}{3}$

إذن، الحد العام للمتتالية الهندسية هو: $a_n = (729)\,(\frac{1}{3})^{n-1}$

أتحقَّق من فهمي

أجد الحد العام لكل متتالية هندسية ممّا يأتي:

a) $32, 8, 2, \frac{1}{2}, \ldots$ $a_n = 32\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

b) $a_5 = 1\,,\ r = -\frac{1}{5}$ $a_n = 625\left(-\frac{1}{5}\right)^{n-1}$

76

مثال إضافي:

أجد الحد العام لكل متتالية هندسية ممّا يأتي:

1 $2, 6, 18, 54, \ldots$ $a_n = 2(3)^{n-1}$

2 $3, -6, 12, -24, 48, \ldots$ $a_n = 3(-2)^{n-1}$

3 $a_4 = 9,\ r = \frac{2}{3}$ $a_1 = \frac{243}{8} \Rightarrow a_n = \frac{243}{8}\,(\frac{2}{3})^{n-1}$

4 $a_3 = 36,\ a_5 = 9$

$$\frac{9}{36} = r^2 \Rightarrow r = \pm\frac{1}{2} \Rightarrow a_1 = 144 \Rightarrow a_n = 144(\pm\frac{1}{2})^{n-1}$$

مثال 2

- أطلب إلى الطلبة كتابة أوَّل 4 حدود من المتتالية الهندسية التي حدها الأوَّل 4، وأساسها 2، ثم أطلب إليهم كتابة أوَّل 4 حدود من المتتالية الهندسية التي حدها الأوَّل a_1، وأساسها r. بعد ذلك أسألهم عن ملاحظاتهم بخصوص حدود هذه المتتالية؛ لاستنتاج أنَّ أُسَّ r في كل حد يقل بمقدار 1 عن رتبة ذلك الحد؛ أيْ إنَّ الحد العام للمتتالية الهندسية التي حدها الأوَّل a_1، وأساسها r، يعطى بالعلاقة الآتية:

$$a_n = a_1\, r^{n-1}$$

- أُناقِش الطلبة في حل الفرع 1 من هذا المثال، الذي يُوضِّح كيفية إيجاد الحد العام إذا عُلِمت الحدود الأربعة الأولى من المتتالية الهندسية، وذلك بطرح الأسئلة الآتية عليهم:
  - ما الحد الأوَّل لهذه المتتالية؟ $a_1 = 4$
  - ما أساسها؟ $r = \frac{20}{4} = \frac{100}{20} = \frac{500}{100} = 5$
  - كيف يُمكِن إيجاد حدها العام؟ بتعويض قيمة كلٍّ من a_1، وr في الصيغة: $a_n = a_1\, r^{n-1}$

- أُناقِش الطلبة في حل الفرع 2 من هذا المثال، الذي يُوضِّح كيفية إيجاد الحد العام إذا عُلِم حد غير الحد الأوَّل لمتتالية هندسية وأساسها.

••• توسعة:

يُمكِن إيجاد أساس المتتالية الهندسية إذا عُلِم حدان فيها، وذلك باستعمال حقيقة أنَّ النسبة بين أيِّ حدين تساوي أساس المتتالية مرفوعًا إلى أُسٍّ يساوي الفرق بين رتبتي الحدين. فمثلًا، إذا كان: $a_3 = 9,\ a_6 = 72$، فإنَّ:

$$\frac{a_6}{a_3} = \frac{a_1 r^5}{a_1 r^2} = r^3 = r^{6-3} \Rightarrow \frac{72}{9} = r^3 \Rightarrow 8 = r^3 \Rightarrow r = 2$$

بعد ذلك يُمكِن إيجاد الحد الأوَّل a_1 بتعويض قيمة الأساس في صيغة أحد الحدين المعلومين:

$$a_3 = a_1\, r^2 \Rightarrow 9 = a_1\,(4) \Rightarrow a_1 = \frac{9}{4}$$

فيكون الحد العام هو: $a_n = \frac{9}{4}\,(2)^{n-1}$

مثال 3

- أطرح على الطلبة السؤال الآتي:
  - ما نوع المتسلسلة الآتية:
    $4 + 12 + 36 + 108 + 324$؟
    متسلسلة هندسية، حدها الأوَّل 4، وأساسها 3
- أُوضِّح للطلبة أنَّه إذا رُمِز إلى المجموع بالحرف S، فإنَّه يُمكِن كتابة المتسلسلة على النحو الآتي:

$$S = 4 + 12 + 36 + 108 + 324$$

وأنَّه إذا ضُرِب طرفا هذه المعادلة في الأساس 3، فإنَّ:

$$3S = 12 + 36 + 108 + 324 + 972$$

وبطرح المعادلة الأولى من المعادلة الثانية، فإنَّ:

$$3S = 12 + 36 + 108 + 324 + 972$$
$$-S = -4 - 12 - 36 - 108 - 324$$
$$2S = 972 - 4$$

إذن، $S = \dfrac{972 - 4}{2}$

- أسأل الطلبة:
  - ماذا يُمثِّل العدد 972 في هذا المثال؟ ناتج ضرب حد المتسلسلة الأخير في أساسها.
  - ماذا يُمثِّل العدد 4؟ الحد الأوَّل من المتسلسلة.
  - ماذا يُمثِّل العدد 2 هنا؟ أساس المتسلسلة مطروحًا منه 1
- أُوضِّح للطلبة أنَّه يُمكِن تعميم نتيجة المثال السابق لإيجاد مجموع أوَّل n حدًّا من حدود متسلسلة هندسية، حدها الأوَّل a_1، وأساسها r، وهو ما يُرمَز إليه بالرمز S_n، وذلك على النحو الآتي:

$$S_n = \frac{(a_1\, r^{n-1} \times r - a_1)}{r-1} = \frac{a_1\,(r^n - 1)}{r - 1}, r \neq 1$$

وإذا ضُرِب البسط والمقام في -1، فإنَّه تنتج صيغة ثانية مُكافِئة لمجموع المتسلسلة الهندسية، وهي:

$$S_n = \frac{a_1\,(1 - r^n)}{1 - r}, r \neq 1$$

- أُناقِش الطلبة في حل المثال 3 على اللوح، وذلك بطرح الأسئلة الآتية عليهم:
  - كيف أعرف أنَّ هذه المتسلسلة هندسية؟ بإيجاد الحدود الثلاثة الأولى، وحساب النسبة بين كل حدين متتاليين. أو بملاحظة أنَّ قاعدة الحد العام أُسِّية؛ ما يعني أنَّ المتسلسلة هندسية.

الوحدة 6

تنتج **المتسلسلة الهندسية** (geometric series) من جمع حدود المتتالية الهندسية. ويُمكِن إيجاد مجموع أول n حدًّا (يُرمَز إليه بـ S_n) من حدود المتسلسلة الهندسية باستعمال الصيغة الآتية:

$$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$$

حيث:

a_1: حد المتسلسلة الأول.

$r \neq 1$: أساس المتسلسلة.

مثال 3

أجد مجموع المتسلسلة الهندسية: $\sum_{k=1}^{8} 5(2)^{k-1}$.

أجد الحد الأول a_1، والأساس r:

$a_k = 5(2)^{k-1}$ الحد العام للمتتالية الهندسية

$a_1 = 5(2)^{1-1}$ أُعوِّض $k=1$ لإيجاد الحد الأول

$= 5(2)^0 = 5$ بالتبسيط، حيث: $2^0=1$

أُقارِن صيغة الحد رقم k بصيغة الحد العام للمتسلسلة الهندسية، فأستنتج أنَّ $r=2$.

أُعوِّض قيمة $a_1=5$، وقيمة $r=2$، وقيمة $n=8$ في صيغة مجموع المتسلسلة الهندسية:

$S_n = \dfrac{a_1(1-r^n)}{1-r}$ صيغة مجموع المتسلسلة الهندسية

$S_8 = \dfrac{5(1-2^8)}{1-2}$ بتعويض $a_1=5, r=2, n=8$

$S_8 = 1275$ بالتبسيط

إذن، مجموع حدود المتسلسلة الهندسية هو 1275.

أُفكِّر

أجد مجموع المتسلسلة: $\sum_{k=1}^{n} c^k$، حيث c عدد ثابت.

أتحقَّق من فهمي

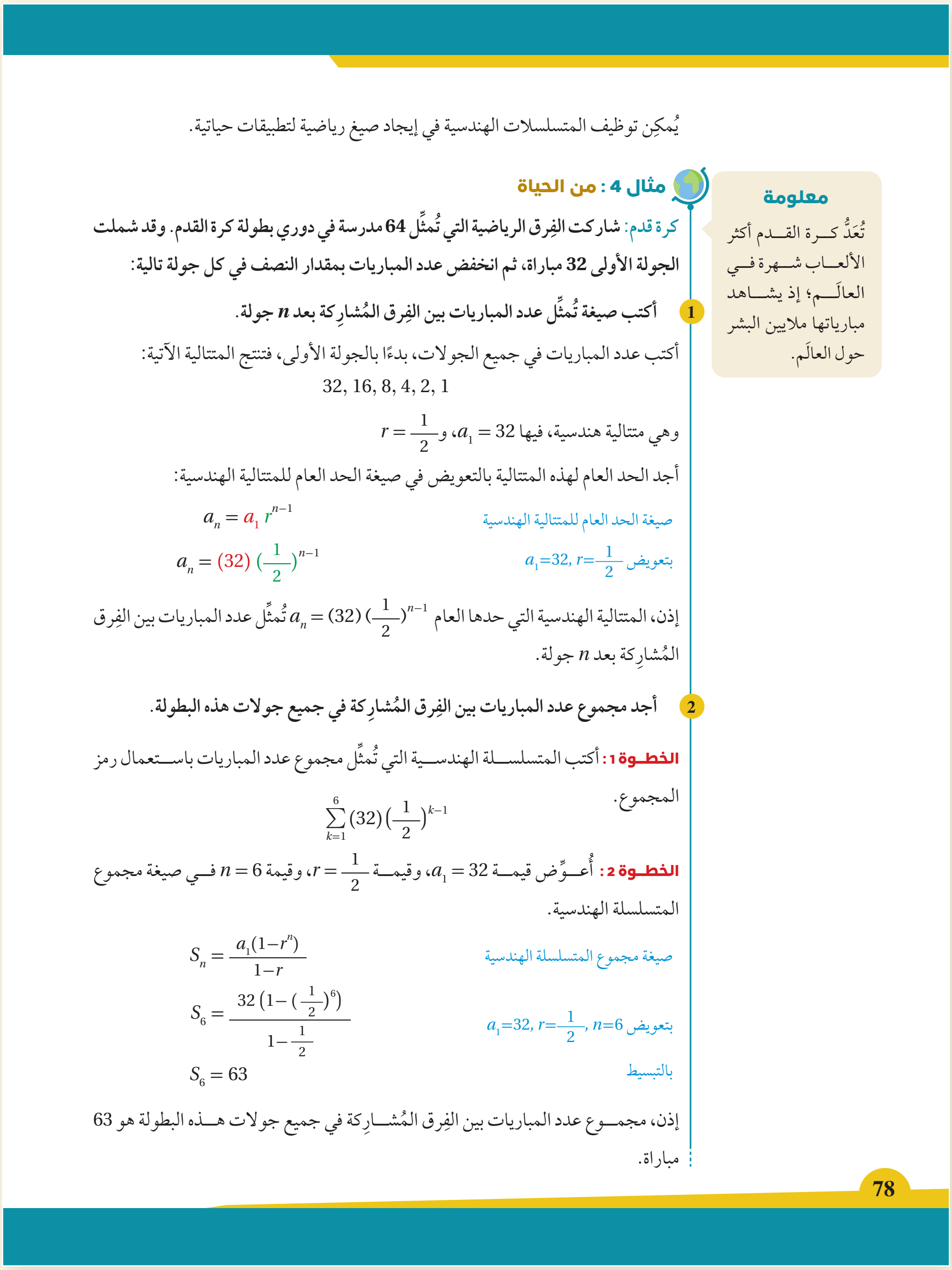
أجد مجموع المتسلسلة الهندسية: $\sum_{k=1}^{6} 4(\frac{1}{2})^{k-1}$. أنظر الهامش.

77

- ماذا يَلزم لحساب مجموعها؟ معرفة حدها الأوَّل، وأساسها، وعدد حدودها.
- ما الحد الأوَّل فيها؟ $5(2)^{1-1} = 5$
- ما أساسها؟ $r = \dfrac{a_2}{a_1} = \dfrac{5(2)^{2-1}}{5} = 2$
- ما عدد حدودها؟ 8 (الرقم المكتوب فوق الرمز $\sum$).

- أطلب إلى أحد الطلبة تعويض هذه القِيَم في صيغة المجموع، ثم تبسيطها.

إرشاد: أُوضِّح للطلبة أنَّه يُمكِن استعمال أيٍّ من الصيغتين المُتكافِئتين لإيجاد مجموع المتسلسلة الهندسية، ولكن يُفضَّل استعمال الصيغة الأولى عندما يكون $r > 1$، واستعمال الصيغة الثانية عندما يكون $r < 1$.



يُمكِن توظيف المتسلسلات الهندسية في إيجاد صيغ رياضية لتطبيقات حياتية.

معلومة

تُعَدُّ كرة القدم أكثر الألعاب شهرة في العالَم؛ إذ يشاهد مبارياتها ملايين البشر حول العالَم.

مثال 4 : من الحياة

كرة قدم: شاركت الفِرق الرياضية التي تُمثِّل 64 مدرسة في دوري بطولة كرة القدم. وقد شملت الجولة الأولى 32 مباراة، ثم انخفض عدد المباريات بمقدار النصف في كل جولة تالية:

① **أكتب صيغة تُمثِّل عدد المباريات بين الفِرق المُشارِكة بعد n جولة.**

أكتب عدد المباريات في جميع الجولات، بدءًا بالجولة الأولى، فتنتج المتتالية الآتية:

$$32, 16, 8, 4, 2, 1$$

وهي متتالية هندسية، فيها $a_1 = 32$، و $r = \frac{1}{2}$

أجد الحد العام لهذه المتتالية بالتعويض في صيغة الحد العام للمتتالية الهندسية:

$$a_n = a_1\, r^{n-1}$$ صيغة الحد العام للمتتالية الهندسية

$$a_n = (32)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$ بتعويض $a_1=32, r=\frac{1}{2}$

إذن، المتتالية الهندسية التي حدها العام $a_n = (32)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ تُمثِّل عدد المباريات بين الفِرق المُشارِكة بعد n جولة.

② **أجد مجموع عدد المباريات بين الفِرق المُشارِكة في جميع جولات هذه البطولة.**

الخطوة 1: أكتب المتسلسلة الهندسية التي تُمثِّل مجموع عدد المباريات باستعمال رمز المجموع.

$$\sum_{k=1}^{6} (32)\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$$

الخطوة 2: أُعوِّض قيمة $a_1 = 32$، وقيمة $r = \frac{1}{2}$، وقيمة $n = 6$ في صيغة مجموع المتسلسلة الهندسية.

$$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$$ صيغة مجموع المتسلسلة الهندسية

$$S_6 = \frac{32\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^6\right)}{1-\frac{1}{2}}$$ بتعويض $a_1=32, r=\frac{1}{2}, n=6$

$$S_6 = 63$$ بالتبسيط

إذن، مجموع عدد المباريات بين الفِرق المُشارِكة في جميع جولات هذه البطولة هو 63 مباراة.

إجابة الأسئلة في بند (أتحقق من فهمي 3):

$$a_1 = 4\left(\frac{1}{2}\right)^{1-1} = 4$$

$$r = \frac{4\left(\frac{1}{2}\right)^{2-1}}{4} = \frac{1}{2}$$

$$S_6 = \sum_{k=1}^{6} 4\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = \frac{4\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^6\right)}{1-\frac{1}{2}} = 4\left(\frac{63}{64}\right)\times 2 = \frac{63}{8} = 7.875$$

مثال إضافي:

أجد مجموع كلٍّ من المتسلسلات الهندسية الآتية:

① مجموع أوَّل 10 حدود من المتسلسلة الآتية:

$1 + 4 + 16 + 64 + \dots$ 349525

② مجموع أوَّل 8 حدود من المتسلسلة الآتية:

$36 + 9 + \frac{9}{4} + \frac{9}{16} + \dots$ $\frac{196605}{4096}$

③ $\sum_{k=1}^{7} 9\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}$ $\frac{2059}{81}$

مثال 4: من الحياة

- أُناقِش الطلبة في حل المثال 4 الذي يُبيِّن كيف يُمكِن تطبيق مجموع المتسلسلة الهندسية في موقف حياتي، مُنوِّهًا إيّاهم بضرورة التحقُّق من أنَّ المتتالية هندسية، وإيجاد حدها الأوَّل، وأساسها، وعدد الحدود المراد جمعها.

إرشاد: عند حل مسائل المتتاليات والمتسلسلات الهندسية، أُحفِّز الطلبة على كتابة قِيَم كلٍّ من: a_1، و n، و r.

أخطاء شائعة:

قد يُخطِئ بعض الطلبة عند حساب مجموع المتسلسلة الهندسية، بطرح الأعداد في البسط قبل حساب القوَّة؛ لذا أُذكِّرهم بأولويات العمليات، وأنَّ الرفع إلى الأُسِّ يسبق الطرح والجمع في أولويات العمليات.

مثالان إضافيان:

1 **مسابقة شعرية:** شارك 81 طالبًا من مدارس إحدى مديريات التربية والتعليم في مسابقة شعرية. كان من شروط المسابقة أنْ يتنافس الطلبة ضمن مجموعات ثلاثية، وينتقل الفائز من بينهم إلى الدور التالي، وتستمرَّ المنافسات إلى أنْ تُسفِر عن فائز واحد في نهاية المسابقة. ما عدد المنافسات التي ستُعقَد بين الطلبة حتى يتمَّ تحديد الفائز النهائي في هذه المسابقة؟ 40

2 **بريد إلكتروني:** أرسل توفيق رسالة من بريده الإلكتروني إلى 3 أصدقاء له، وطلب فيها أنْ يُرسِل كلٌّ منهم الرسالة نفسها إلى 3 أصدقاء آخرين، ثم يُرسِل كلٌّ من هؤلاء الرسالة إلى 3 أصدقاء آخرين، علمًا بأنَّ كل واحد من الأصدقاء تسلَّم الرسالة مَرَّة واحدة:

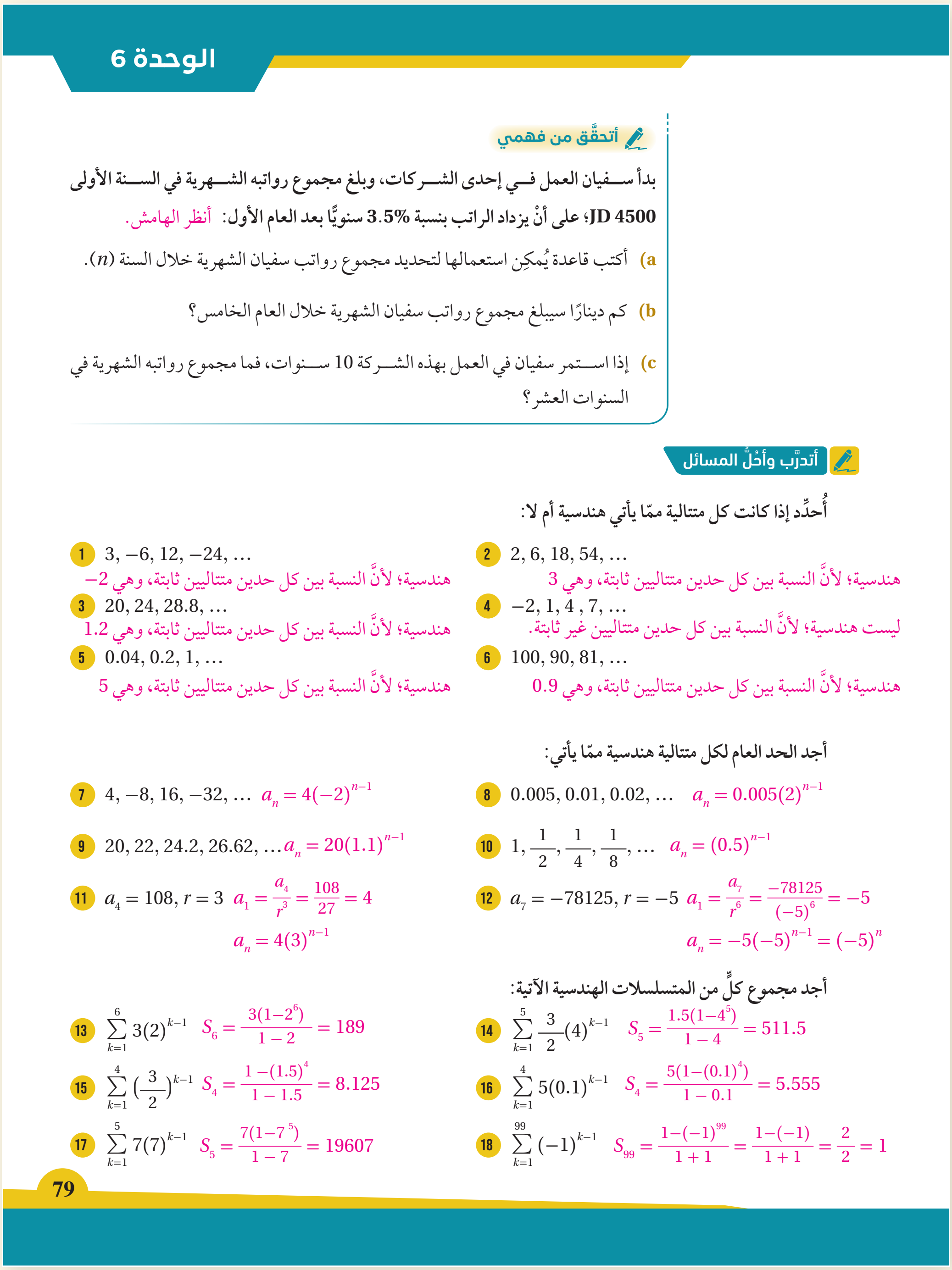
a) إذا استمرَّت هذه العملية، فما عدد الأصدقاء الذين ستصلهم الرسالة في المرحلة السابعة؟ 2187

b) ما المجموع الكلي للأصدقاء الذين تسلَّموا الرسالة في جميع المراحل وصولًا إلى نهاية المرحلة السابعة؟ 3279

4 التدريب

أتدرَّب وأحل المسائل

- أُوجِّه الطلبة إلى بند **(أتدرَّب وأحل المسائل)**، ثم أطلب إليهم حل المسائل (1 – 18) ضمن مجموعات ثنائية داخل الغرفة الصفية؛ فهذه المسائل تحديدًا ترتبط ارتباطًا مباشرًا بأمثلة الدرس، وهي تُستعمَل خاصةً لتدريب الطلبة على المفاهيم نفسها، بصرف النظر عمّا إذا كانت الأسئلة فردية أم زوجية.
- إذا واجه الطلبة صعوبة في حل أيَّة مسألة، فإنَّني أختار أحد الطلبة مِمَّنْ تمكَّن/ تمكَّنت من حل المسألة؛ لمناقشة استراتيجيته/ استراتيجيتها في حل المسألة على اللوح، مُحفِّزًا الطلبة على طرح أيِّ تساؤل عن خطوات الحل المُقدَّمة من الزميل/ الزميلة.



الوحدة 6

أتحقَّق من فهمي

بدأ سفيان العمل في إحدى الشركات، وبلغ مجموع رواتبه الشهرية في السنة الأولى JD 4500؛ على أنْ يزداد الراتب بنسبة 3.5% سنويًّا بعد العام الأول: أنظر الهامش.

a) أكتب قاعدة يُمكِن استعمالها لتحديد مجموع رواتب سفيان الشهرية خلال السنة (n).

b) كم دينارًا سيبلغ مجموع رواتب سفيان الشهرية خلال العام الخامس؟

c) إذا استمر سفيان في العمل بهذه الشركة 10 سنوات، فما مجموع رواتبه الشهرية في السنوات العشر؟

أتدرَّب وأحُلُّ المسائل

أُحدِّد إذا كانت كل متتالية ممّا يأتي هندسية أم لا:

1 $3, -6, 12, -24, \ldots$ هندسية؛ لأنَّ النسبة بين كل حدين متتاليين ثابتة، وهي -2

2 $2, 6, 18, 54, \ldots$ هندسية؛ لأنَّ النسبة بين كل حدين متتاليين ثابتة، وهي 3

3 $20, 24, 28.8, \ldots$ هندسية؛ لأنَّ النسبة بين كل حدين متتاليين ثابتة، وهي 1.2

4 $-2, 1, 4, 7, \ldots$ ليست هندسية؛ لأنَّ النسبة بين كل حدين متتاليين غير ثابتة.

5 $0.04, 0.2, 1, \ldots$ هندسية؛ لأنَّ النسبة بين كل حدين متتاليين ثابتة، وهي 5

6 $100, 90, 81, \ldots$ هندسية؛ لأنَّ النسبة بين كل حدين متتاليين ثابتة، وهي 0.9

أجد الحد العام لكل متتالية هندسية ممّا يأتي:

7 $4, -8, 16, -32, \ldots \quad a_n = 4(-2)^{n-1}$

8 $0.005, 0.01, 0.02, \ldots \quad a_n = 0.005(2)^{n-1}$

9 $20, 22, 24.2, 26.62, \ldots a_n = 20(1.1)^{n-1}$

10 $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots \quad a_n = (0.5)^{n-1}$

11 $a_4 = 108, r = 3 \quad a_1 = \frac{a_4}{r^3} = \frac{108}{27} = 4$

$a_n = 4(3)^{n-1}$

12 $a_7 = -78125, r = -5 \quad a_1 = \frac{a_7}{r^6} = \frac{-78125}{(-5)^6} = -5$

$a_n = -5(-5)^{n-1} = (-5)^n$

أجد مجموع كلٍّ من المتسلسلات الهندسية الآتية:

13 $\sum_{k=1}^{6} 3(2)^{k-1} \quad S_6 = \frac{3(1-2^6)}{1-2} = 189$

14 $\sum_{k=1}^{5} \frac{3}{2}(4)^{k-1} \quad S_5 = \frac{1.5(1-4^5)}{1-4} = 511.5$

15 $\sum_{k=1}^{4} (\frac{3}{2})^{k-1} \quad S_4 = \frac{1-(1.5)^4}{1-1.5} = 8.125$

16 $\sum_{k=1}^{4} 5(0.1)^{k-1} \quad S_4 = \frac{5(1-(0.1)^4)}{1-0.1} = 5.555$

17 $\sum_{k=1}^{5} 7(7)^{k-1} \quad S_5 = \frac{7(1-7^5)}{1-7} = 19607$

18 $\sum_{k=1}^{99} (-1)^{k-1} \quad S_{99} = \frac{1-(-1)^{99}}{1+1} = \frac{1-(-1)}{1+1} = \frac{2}{2} = 1$

79

إجابة الأسئلة في بند (أتحقَّق من فهمي 4):

a) $a_n = 4500\,(1.035)^{n-1}$

b) $a_5 = 4500\,(1.035)^{5-1} \approx 5163.9$

c) $S_{10} = \sum_{k=1}^{10} 4500\,(1.035)^{k-1}$

$$= \frac{4500(1-(1.035)^{10})}{1-1.035} \approx 52791.3$$

مهارات التفكير العليا

- أُوجِّه الطلبة إلى قراءة الأسئلة الواردة في بند **(مهارات التفكير العليا)**، ثم أطلب إليهم حل المسائل (26 – 23).
- أرصد أيَّة أفكار غير تقليدية من الطلبة، ثم أطلب إلى هؤلاء الطلبة كتابة هذه الأفكار على اللوح.

19 **حواسيب:** اشترت شروق حاسوبًا، واتفقت مع البائع على أنْ تدفع من ثمنه 100 JD في الشهر الأول، ثم تدفع في بقية الشهور ما نسبته 80% من قيمة دُفعة الشهر السابق مدَّة عام كامل. كم دينارًا سعر الحاسوب؟ أنظر الهامش.

استعان خالد بموقع تعليمي في شبكة الإنترنت لقياس مستوى المعرفة لديه، فبدأ بحَلِّ خمسة أسئلة ضمن وقت مُحدَّد لينتقل إلى المرحلة التالية. إذا كان عدد الأسئلة في كل مرحلة تالية مثلي عدد الأسئلة في المرحلة السابقة، فأُجيب عمّا يأتي:

20 أكتب صيغة تُمثِّل عدد الأسئلة بعد n مرحلة.

$a_1 = 5$
$r = 2$
$a_n = 5(2)^{n-1}$

21 أجد مجموع عدد الأسئلة إذا اجتاز خالد أربع مراحل فقط. $S_4 = \frac{5(1-2^4)}{1-2} = 75$

22 أحُلُّ المسألة الواردة في بند (مسألة اليوم). الحد الأول لمتتالية السُمْك هو: $a_1 = 0.2$ (سُمْك الورقة بعد الطيَّة الأولى)، والأساس هو: $r=2$، والمطلوب هو الحد الخامس عشر a_{15}

$a_{15} = 0.2(2)^{14} = 3276.8 \text{ mm} \approx 3.3 \text{ m}$

مهارات التفكير العليا

23 **تبرير:** أُبيِّن لماذا تُعَدُّ المتسلسلة: $\sum_{k=1}^{\infty} c$ هندسية، حيث c عدد حقيقي لا يساوي صفرًا، مُبرِّرًا إجابتي.

$\sum_{k=1}^{\infty} c = c+c+c+c+\cdots$ وهذه متسلسلة هندسية؛ لأنَّ النسبة بين كل حدين متتاليين ثابتة، وهي: $\frac{c}{c} = 1$، حيث: $c \neq 0$.

24 **تحدٍّ:** إذا كانت الحدود الثلاثة الأولى من متتالية هندسية هي: $x-4, x, 5x-12$، وكانت جميعها موجبة، فما قيمة x؟ أنظر الهامش.

25 **تحدٍّ:** أجد الحد العام للمتتالية الهندسية التي فيها $a_5=-768$، و $a_2=12$. أنظر ملحق الإجابات.

26 **تحدٍّ:** أُثبِت أنَّ مجموع أول n حدًّا من متسلسلة هندسية يُعطى بالصيغة الآتية:

$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}, r \neq 1$ أنظر ملحق الإجابات.

إجابة الأسئلة في بند (أتدرَّب وأحل المسائل)

19) $a_1 = 100$

$r = 0.8$

$n = 12$

$$S_{12} = \frac{100(1-(0.8)^{12})}{1-0.8} \approx 465.6$$

24) $\frac{x}{x-4} = \frac{5x-12}{x} \Rightarrow x^2 = 5x^2 - 32x + 48$

$4x^2 - 32x + 48 = 0 \Rightarrow x^2 - 8x + 12 = 0$

$(x-6)(x-2) = 0 \Rightarrow x = 6; \text{ or } x = 2$

لكنَّ القيمة $x = 2$ تجعل الحد الأوَّل $x - 4$ سالبًا. وبما أنَّ جميع الحدود موجبة، فإنَّ قيمة x المقبولة هي: $x = 6$.

الواجب المنزلي:

أستعين بالجدول الآتي لتحديد الواجب المنزلي للطلبة بحسب مستوياتهم:

المستويات	الأسئلة
دون المتوسط	كتاب الطالب: 19, 20, 22 كتاب التمارين: (1–18) (فردي).
ضمن المتوسط	كتاب الطالب: 20, 21, 23 كتاب التمارين: (1–18) (زوجي).
فوق المتوسط	كتاب الطالب: (22 – 26) كتاب التمارين: (11 – 19)

5 الإثراء

- أطلب إلى الطلبة حل السؤالين الآتيين بوصفهما إثراءً لهم:
  - أجد مجموع المتسلسلة الآتية:

$4 + 12 + 36 + \ldots + 972$ $\quad n = 6; S_6 = 1465$

  - أجد قيمة الحد الأوَّل a_1 في المتسلسلة الهندسية التي أساسها 2، ومجموع أوَّل 10 حدود منها هو 341 $\frac{1}{3}$

6 الختام

- أتحقَّق من فهم الطلبة موضوع الدرس، بطرح السؤال الآتي عليهم:
  - أُحدِّد إذا كانت كل متتالية ممّا يأتي حسابية، أو هندسية، أو غير ذلك، ثم أجد الحد العام ومجموع أوَّل 8 حدود منها إنْ كانت هندسية:

1 $5, 8, 11, 16, \ldots$

ليست حسابية، وليست هندسية.

2 $1.5, 4, 6.5, 9, \ldots$ حسابية.

3 $2, 3, \frac{9}{2}, \frac{27}{4}, \ldots$

هندسية؛ $a_n = 2(\frac{3}{2})^{n-1}; S_8 \approx 98.5$

الدرس 4

نتاجات الدرس:

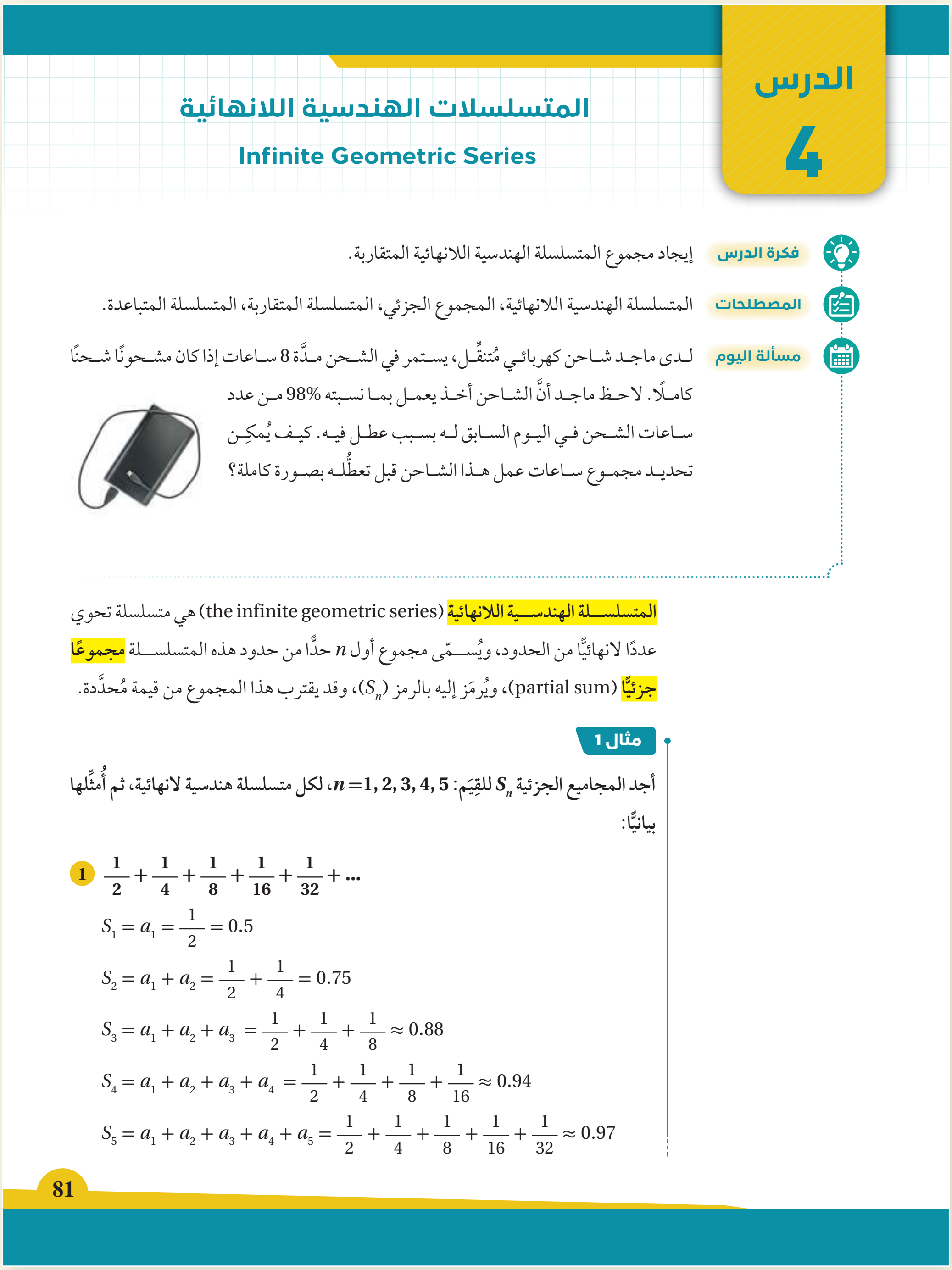
- تعرُّف المتسلسلات الهندسية المتقاربة، والمتسلسلات الهندسية غير المتقاربة.
- إيجاد مجموع المتسلسلة الهندسية المتقاربة.
- استعمال مجموع المتسلسلة الهندسية اللانهائية لكتابة الكسر العشري الدوري في صورة كسر عادي.
- حل مسائل حياتية عن المتسلسلات الهندسية اللانهائية.

نتاجات التعلُّم القبلي:

- تعرُّف المتتالية الهندسية المنتهية، والمتسلسلة الهندسية المنتهية.
- إيجاد الحد العام للمتتالية الهندسية.
- إيجاد مجموع أوَّل n حدًّا من متسلسلة هندسية.

مراجعة التعلُّم القبلي:

- أُوجِّه الطلبة في بداية كل حصة إلى الفقرة (الفقرات) المُرتبِطة بما سيُقدَّم من موضوعات الدرس في الحصة (إنْ وُجِدت) ضمن صفحات **(أستعد لدراسة الوحدة)** في كتاب التمارين، ثم أطلب إليهم حل تدريباتها داخل الغرفة الصفية بصورة فردية.
- أتجوَّل بين الطلبة؛ لمتابعتهم أثناء الحل، وتحديد نقاط ضعفهم، وأُوجِّههم إلى مراجعة المثال عندما يواجهون صعوبة في الحل.



الدرس 4

المتسلسلات الهندسية اللانهائية

Infinite Geometric Series

فكرة الدرس إيجاد مجموع المتسلسلة الهندسية اللانهائية المتقاربة.

المصطلحات المتسلسلة الهندسية اللانهائية، المجموع الجزئي، المتسلسلة المتقاربة، المتسلسلة المتباعدة.

مسألة اليوم لدى ماجد شاحن كهربائي مُتنقِّل، يستمر في الشحن مدَّة 8 ساعات إذا كان مشحونًا شحنًا كاملًا. لاحظ ماجد أنَّ الشاحن أخذ يعمل بما نسبته 98% من عدد ساعات الشحن في اليوم السابق له بسبب عطل فيه. كيف يُمكِن تحديد مجموع ساعات عمل هذا الشاحن قبل تعطُّله بصورة كاملة؟

المتسلسلة الهندسية اللانهائية (the infinite geometric series) هي متسلسلة تحوي عددًا لانهائيًّا من الحدود، ويُسمّى مجموع أول n حدًّا من حدود هذه المتسلسلة **مجموعًا جزئيًّا** (partial sum)، ويُرمَز إليه بالرمز (S_n)، وقد يقترب هذا المجموع من قيمة مُحدَّدة.

مثال 1

أجد المجاميع الجزئية S_n للقِيَم: $n = 1, 2, 3, 4, 5$، لكل متسلسلة هندسية لانهائية، ثم أُمثِّلها بيانيًّا:

① $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \dots$

$$S_1 = a_1 = \frac{1}{2} = 0.5$$

$$S_2 = a_1 + a_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 0.75$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \approx 0.88$$

$$S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} \approx 0.94$$

$$S_5 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} \approx 0.97$$

81

1 التهيئة

- أطرح على الطلبة الأسئلة الآتية:
  - ◂ أيُّ المتتاليات والمتسلسلات الآتية منتهية؟ أيُّها غير منتهية؟

① $5+8+11+14+\ldots$ غير منتهية.

② $16+14+12+10+8$ منتهية.

③ $2, 4, 8, 16, 32, 64$ منتهية.

④ $5, 20, 80, 320, 1280, \ldots$ غير منتهية.

◂ ما مجموع أوَّل 8 حدود من كل متسلسلة ممّا يأتي:

① $1+3+9+27+\ldots$ 3280

② $\sum_{k=1}^{100} 5(2)^{k-1}$ 1275

- أُناقِش الطلبة في حل الأسئلة السابقة، وأطلب إليهم تبرير إجاباتهم.

2 الاستكشاف

- أُوجِّه الطلبة إلى قراءة المسألة الواردة في بند (**مسألة اليوم**)، ثم أسألهم:
  - ◂ ما الشاحن المُتنقِّل؟ جهاز يُخزِّن الطاقة الكهربائية، ويُشحَن من مَقبِس الكهرباء في الحائط، ويصبح بعد شحنه مصدرًا للطاقة يُستعمَل لشحن أجهزة أُخرى (مثل: جهاز الهاتف المحمول، وجهاز الحاسوب الشخصي) في أماكن لا يتوافر فيها مصدر للكهرباء.
  - ◂ كم ساعةً سيعمل شاحن ماجد في أوَّل استعمال له إذا كان مشحونًا شحنًا كاملًا؟ 8
  - ◂ كم ساعةً سيعمل شاحن ماجد عند شحنه شحنًا كاملًا مَرَّة ثانية، بعد نفاد طاقته من شحنه الأوَّل؟ $8 \times 98\% = 7.84$
  - ◂ كم ساعةً سيعمل شاحن ماجد عند شحنه شحنًا كاملًا مَرَّة ثالثة؟ $(8 \times 98\%) \times 98\% = 7.84 \times 98\% \approx 7.68$
  - ◂ ما الحد العام لمتتالية ساعات عمل الشاحن؟ $a_n = 8\left(\frac{98}{100}\right)^{n-1}$
  - ◂ ماذا يُلاحَظ على عدد ساعات عمل الشاحن بعد كل عملية إعادة شحن؟ تناقص عدد ساعات عمل الشاحن حتى يتعطَّل في نهاية المطاف.
  - ◂ كم ساعةً سيعمل هذا الشاحن قبل أنْ يتعطَّل بصورة كاملة؟
- أُخبِر الطلبة أنَّهم سيتعرَّفون إجابة السؤال السابق في هذا الدرس.
- أُناقِش الطلبة في إجاباتهم، ثم أسألهم:
  - ◂ ما رأيكم/ رأيكن في إجابة زميلكم/ زميلتكن؟
  - ◂ مَنْ يتفق/ تتفق مع إجابة زميله/ زميلتها؟
- أُعزِّز الإجابات الصحيحة.

3 التدريس

مثال 1

- أُوضِّح للطلبة مفهوم المتسلسلة الهندسية اللانهائية، وكيف يُمكِن حساب مجموع أوَّل n حدًّا من حدودها الذي يُسمّى المجموع الجزئي، ويُرمَز إليه بالرمز S_n، مُبيِّنًا لهم أنَّ هذا المجموع قد يقترب من قيمة مُحدَّدة عند زيادة قيمة n، فتُسمّى المتسلسلة في هذه الحالة متسلسلة متقاربة، وأنَّ المجموع قد لا يقترب من قيمة مُحدَّدة، فتُسمّى المتسلسلة عندئذٍ متسلسلة متباعدة.
- أُناقِش الطلبة في حل الفرع 1 من هذا المثال على اللوح، طالبًا إليهم حساب S_{10} باستعمال صيغة مجموع المتسلسلة الهندسية. بعد ذلك أسألهم عن ملاحظاتهم بخصوص قِيَم المجاميع الجزئية لهذه المتسلسلة؛ لاستنتاج أنَّه كلَّما كبرت قيمة n اقتربت قيمة المجموع الجزئي من 1 أكثر فأكثر، وأنَّه عند تمثيل الأزواج (n, S_n) في المستوى الإحداثي فإنَّ النقاط تقترب من المستقيم: $S_n = 1$.
- أُناقِش الطلبة في حل الفرع 2 من هذا المثال، وأسألهم عمّا بين المتسلسلتين من فرق جعل قِيَم S_n في إحداهما تقترب من قيمة مُحدَّدة، وجعل الأُخرى تتزايد إلى ما لا نهاية. أساس الأولى $\frac{1}{2}$ وهو أقل من 1، وأساس الثانية 3 وهو أكبر من 1

✓ **إرشاد:** أُناقِش الطلبة في الأفكار الواردة في الصناديق الهامشية؛ لِما لها من أهمية في تعزيز مفاهيم الدرس.

مثال إضافي:

أجد المجاميع الجزئية S_n للقِيَم: $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ لكل متسلسلة ممّا يأتي، ثم أُمثِّلها بيانيًّا:

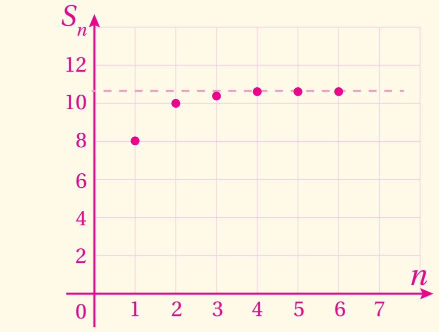
1 $8 + 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \ldots.$

2 $4 + 8 + 16 + 32 + \cdots$

الحل:

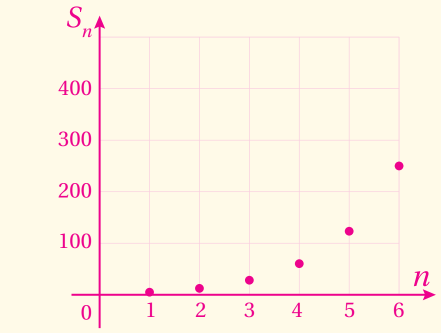
1) $S_1 = 8; S_2 = 10; S_3 = 10.5; S_4 = 10.625;$

$S_5 \approx 10.656; S_6 \approx 10.664$



2) $S_1 = 4; S_2 = 12; S_3 = 28; S_4 = 60;$

$S_5 = 124; S_6 = 252$

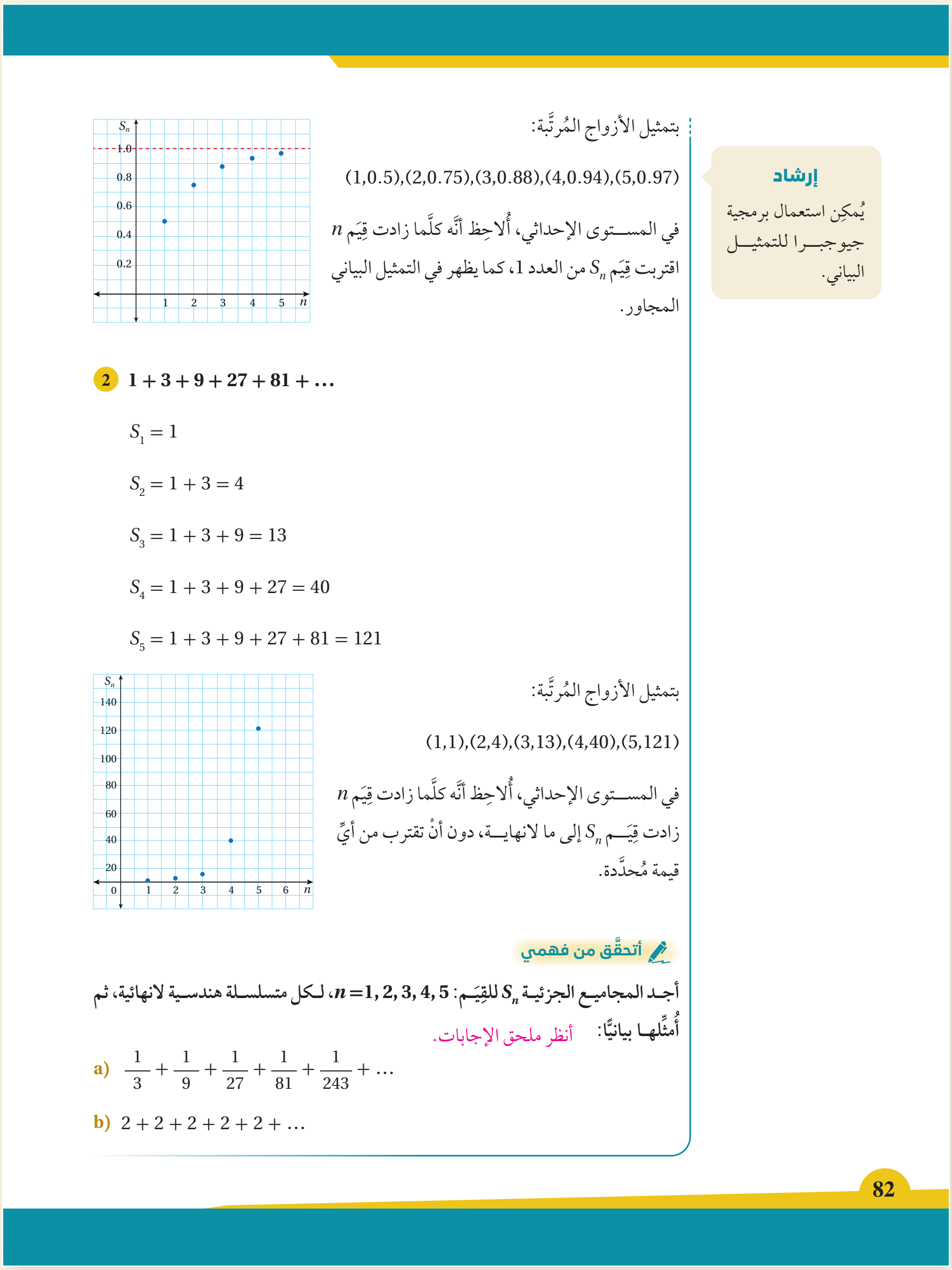


تعزيز اللغة ودعمها:

أُكرِّر المصطلحات الرياضية الوارد ذكرها في الدرس بكلٍّ من اللغة العربيــة واللغة الإنجليزية، مُحفـِّــزًا الطلبة على استعمالها.

التقويم التكويني:

أطلب إلى الطلبة حــل التدريب الوارد في بند (**أتحقَّق من فهمي**) بعد كل مثال، ثم أختار بعض الإجابات التي تحوي أخطاء مفاهيمية لمناقشـــتها على اللوح، ولا أذكر اسم مَنْ أخطأ في الإجابة؛ تجنُّبًا لإحراجه.



إرشاد

يُمكِن استعمال برمجية جيوجبـــرا للتمثيـــل البياني.

بتمثيل الأزواج المُرتَّبة:

(1,0.5),(2,0.75),(3,0.88),(4,0.94),(5,0.97)

في المســتوى الإحداثي، أُلاحِظ أنَّه كلَّما زادت قِيَم n اقتربت قِيَم S_n من العدد 1، كما يظهر في التمثيل البياني المجاور.

2 $1 + 3 + 9 + 27 + 81 + \ldots$

$S_1 = 1$

$S_2 = 1 + 3 = 4$

$S_3 = 1 + 3 + 9 = 13$

$S_4 = 1 + 3 + 9 + 27 = 40$

$S_5 = 1 + 3 + 9 + 27 + 81 = 121$

بتمثيل الأزواج المُرتَّبة:

(1,1),(2,4),(3,13),(4,40),(5,121)

في المســتوى الإحداثي، أُلاحِظ أنَّه كلَّما زادت قِيَم n زادت قِيَــم S_n إلى ما لانهايــة، دون أنْ تقترب من أيِّ قيمة مُحدَّدة.

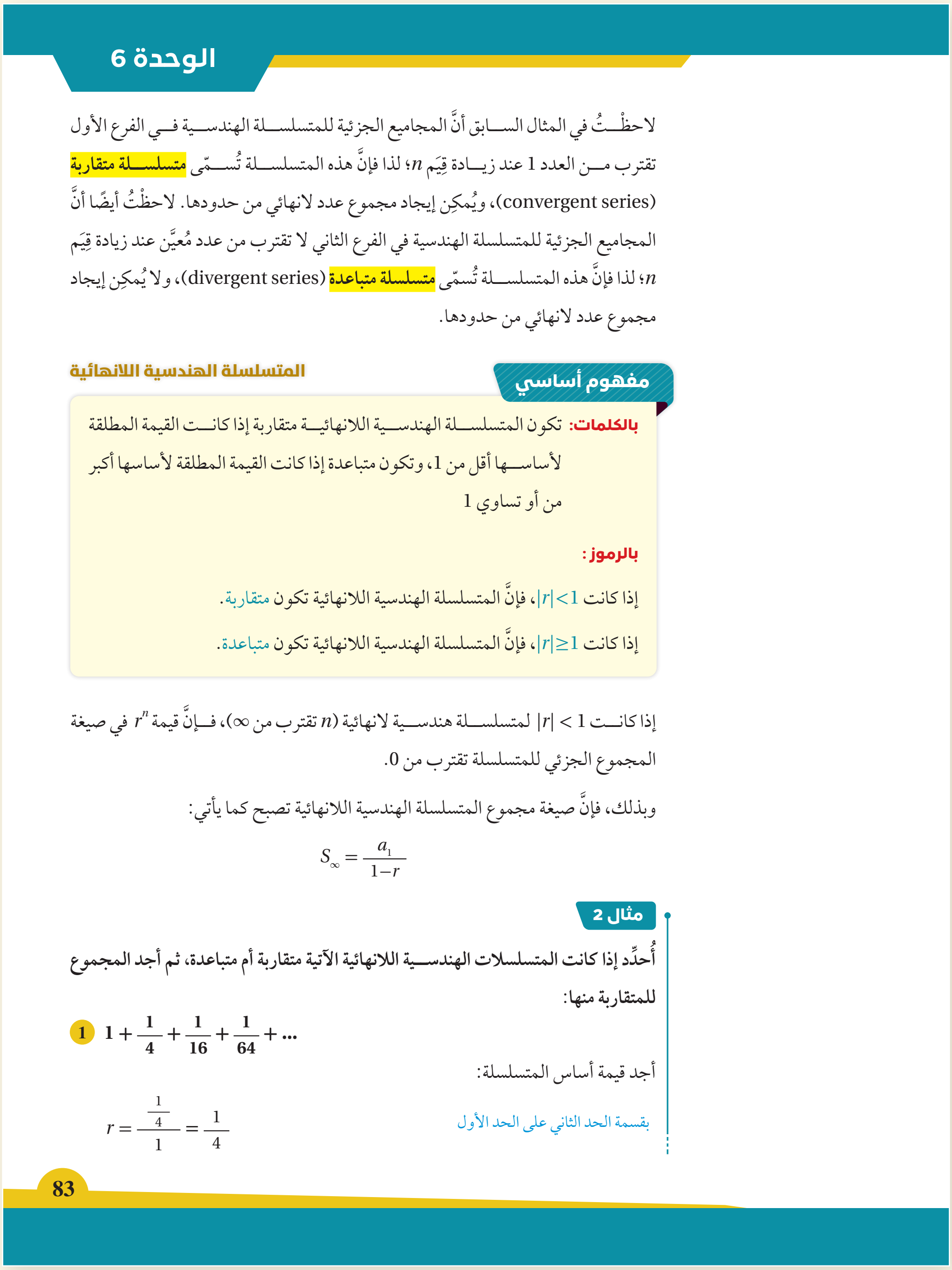
أتحقَّق من فهمي

أجـد المجاميـع الجزئيـة S_n للقِيَـم: $n = 1, 2, 3, 4, 5$، لـكل متسلسـلة هندسـية لانهائية، ثم أُمثِّلهـا بيانيًّا: أنظر ملحق الإجابات.

a) $\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \frac{1}{243} + \ldots$

b) $2 + 2 + 2 + 2 + 2 + \ldots$

82



الوحدة 6

لاحظْتُ في المثال السابق أنَّ المجاميع الجزئية للمتسلسلة الهندسية في الفرع الأول تقترب من العدد 1 عند زيادة قِيَم n؛ لذا فإنَّ هذه المتسلسلة تُسمّى **متسلسلة متقاربة** (convergent series)، ويُمكِن إيجاد مجموع عدد لانهائي من حدودها. لاحظْتُ أيضًا أنَّ المجاميع الجزئية للمتسلسلة الهندسية في الفرع الثاني لا تقترب من عدد مُعيَّن عند زيادة قِيَم n؛ لذا فإنَّ هذه المتسلسلة تُسمّى **متسلسلة متباعدة** (divergent series)، ولا يُمكِن إيجاد مجموع عدد لانهائي من حدودها.

مفهوم أساسي

المتسلسلة الهندسية اللانهائية

بالكلمات: تكون المتسلسلة الهندسية اللانهائية متقاربة إذا كانت القيمة المطلقة لأساسها أقل من 1، وتكون متباعدة إذا كانت القيمة المطلقة لأساسها أكبر من أو تساوي 1

بالرموز :

إذا كانت $|r|<1$، فإنَّ المتسلسلة الهندسية اللانهائية تكون متقاربة.

إذا كانت $|r|\geq 1$، فإنَّ المتسلسلة الهندسية اللانهائية تكون متباعدة.

إذا كانت $|r| < 1$ لمتسلسلة هندسية لانهائية (n تقترب من ∞)، فإنَّ قيمة r^n في صيغة المجموع الجزئي للمتسلسلة تقترب من 0.

وبذلك، فإنَّ صيغة مجموع المتسلسلة الهندسية اللانهائية تصبح كما يأتي:

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-r}$$

مثال 2

أُحدِّد إذا كانت المتسلسلات الهندسية اللانهائية الآتية متقاربة أم متباعدة، ثم أجد المجموع للمتقاربة منها:

① $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\ldots$

أجد قيمة أساس المتسلسلة:

$$r=\frac{\frac{1}{4}}{1}=\frac{1}{4}$$ بقسمة الحد الثاني على الحد الأول

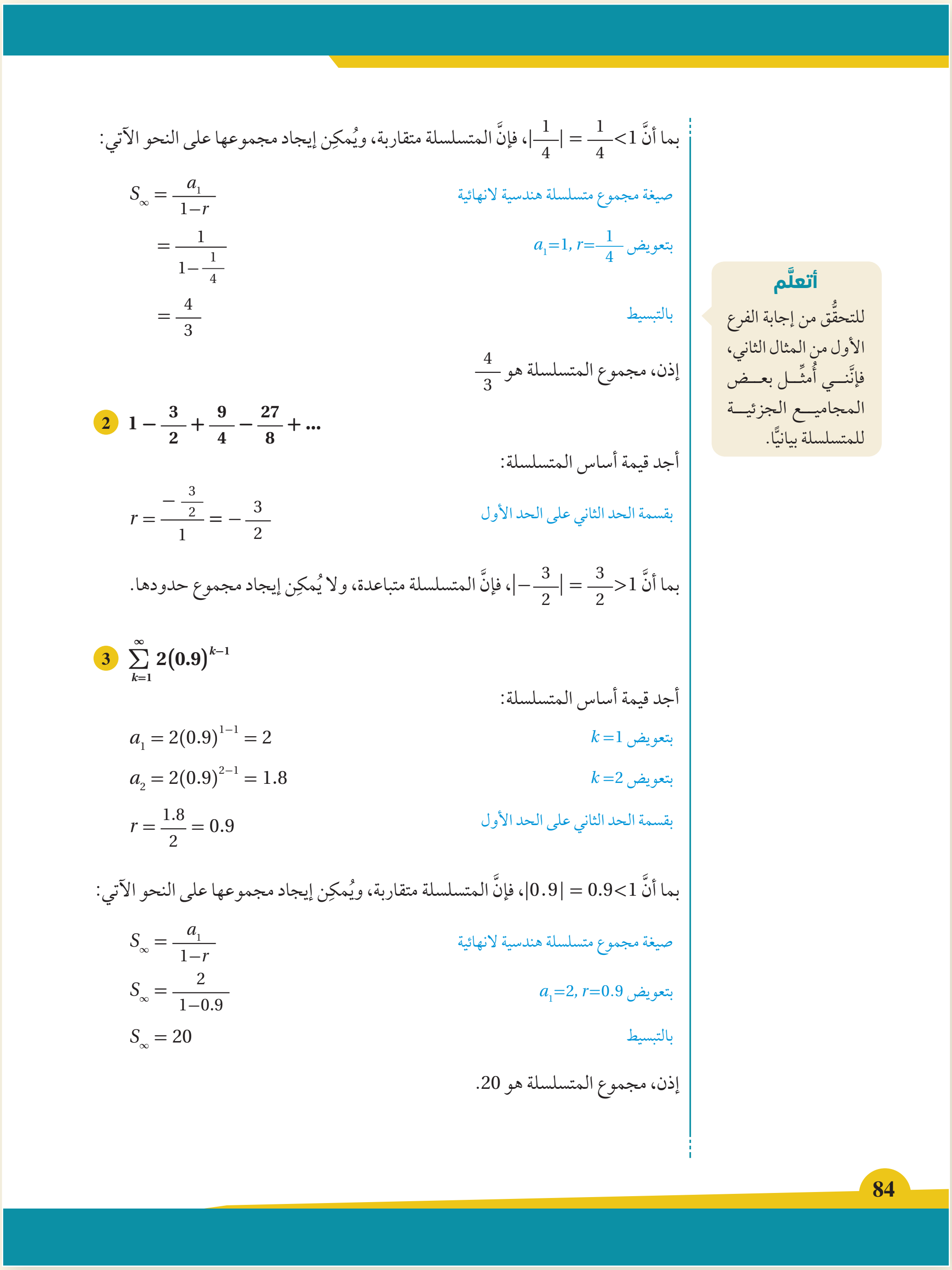
83

مثال 2

- أُذكِّر الطلبة بالنتائج التي تُوصِّل إليها في المثال الأوَّل، ثم أُوضِّح لهم مفهوم المتسلسلة الهندسية المتقاربة، ومفهوم المتسلسلة الهندسية المتباعدة، مُبيِّنًا أنَّ المتسلسلة المتقاربة هي متسلسلة يُمكِن إيجاد مجموعها إلى ما لا نهاية باستعمال قانون المجموع الجزئي للمتسلسلة الهندسية، مع ملاحظة أنَّ r^n يقترب من الصفر إذا كانت القيمة المطلقة للأساس r هي أقل من 1 وبذلك، فإنَّ: $S_\infty = \frac{a_1}{1-r}$
- أُوضِّح للطلبة المفهوم الأساسي (المتسلسلة الهندسية اللانهائية) الوارد ذكره في الصفحة 83 من كتاب الطالب.
- أُناقِش الطلبة في حل الفرع 1 من هذا المثال على اللوح، وذلك بطرح الأسئلة الآتية عليهم:
  - ◄ ما الحد الأوَّل في المتسلسلة؟ 1
  - ◄ ما أساسها؟ $\frac{1}{4}$
  - ◄ ما قيمة $|r|$؟ $\frac{1}{4}$
  - ◄ هل هي متقاربة؟ نعم.
- أطلب إلى الطلبة إيجاد مجموع المتسلسلة باستعمال صيغة مجموع المتسلسلة الهندسية اللانهائية.
- أُناقِش الطلبة في بقية فروع هذا المثال، وذلك بطرح الأسئلة السابقة نفسها.

مثال 3

- أُناقِش الطلبة في مفهوم الكسر العشري الدوري، وكيفية تحويله إلى كسر عادي في صورة $\frac{a}{b}$، حيث: a، و b عددان صحيحان، و $b \neq 0$، باستعمال المتسلسلة الهندسية اللانهائية، وذلك بطرح الأسئلة الآتية عليهم:
  - ◄ ما الكسر العشري الدوري؟ كسر عشري غير مُنتهٍ، وفيه يتكرَّر رقم أو مجموعة أرقام بصورة دورية إلى ما لا نهاية، وتوضَع فيه شرطة فوق الرقم المُتكرِّر أو فوق مجموعة الأرقام المُتكرِّرة.
  - ◄ أذكر أمثلة على الكسور العشرية الدورية.
    من الإجابات المُحتمَلة:
    $0.\overline{5} = 0.55555...; 0.\overline{38} = 0.383838...;$
    $0.1\overline{23} = 0.1232323...$
  - ◄ كيف تُكتَب $0.\overline{5}$ بالصورة التحليلية؟
    $0.\overline{5} = 0.5 + 0.05 + 0.005 + \cdots$
  - ◄ ماذا تُمثِّل الصورة التحليلية للعدد $0.\overline{5}$؟
    متسلسلة هندسية لا نهائية، حدها الأوَّل 0.5، وأساسها 0.1
  - ◄ هل هي متقاربة؟ لماذا؟
    نعم؛ لأنَّ $|0.1| = 0.1 < 1$
  - ◄ ما مجموعها؟
    $S_\infty = \frac{0.5}{1 - 0.1} = \frac{0.5}{0.9} = \frac{5}{9}$
  - ◄ ماذا يُستنتَج من هذه الخطوات؟ $0.\overline{5} = \frac{5}{9}$
- أُناقِش الطلبة في حل المثال 3 الذي يُوضِّح كيف يُمكِن تحويل كسر عشري دوري إلى كسر عادي باستعمال المتسلسلة الهندسية اللانهائية، وأُشارِكهم خطوات الحل، وأطلب إليهم تبرير إجاباتهم.



بما أنَّ $\frac{1}{4} < 1 = |\frac{1}{4}|$، فإنَّ المتسلسلة متقاربة، ويُمكِن إيجاد مجموعها على النحو الآتي:

$S_\infty = \frac{a_1}{1-r}$ صيغة مجموع متسلسلة هندسية لانهائية

$= \frac{1}{1-\frac{1}{4}}$ بتعويض $a_1=1, r=\frac{1}{4}$

$= \frac{4}{3}$ بالتبسيط

إذن، مجموع المتسلسلة هو $\frac{4}{3}$

2 $1 - \frac{3}{2} + \frac{9}{4} - \frac{27}{8} + ...$

أجد قيمة أساس المتسلسلة:

$r = \frac{-\frac{3}{2}}{1} = -\frac{3}{2}$ بقسمة الحد الثاني على الحد الأول

بما أنَّ $\frac{3}{2} > 1 = |-\frac{3}{2}|$، فإنَّ المتسلسلة متباعدة، ولا يُمكِن إيجاد مجموع حدودها.

3 $\sum_{k=1}^{\infty} 2(0.9)^{k-1}$

أجد قيمة أساس المتسلسلة:

$a_1 = 2(0.9)^{1-1} = 2$ بتعويض $k=1$

$a_2 = 2(0.9)^{2-1} = 1.8$ بتعويض $k=2$

$r = \frac{1.8}{2} = 0.9$ بقسمة الحد الثاني على الحد الأول

بما أنَّ $0.9 < 1 = |0.9|$، فإنَّ المتسلسلة متقاربة، ويُمكِن إيجاد مجموعها على النحو الآتي:

$S_\infty = \frac{a_1}{1-r}$ صيغة مجموع متسلسلة هندسية لانهائية

$S_\infty = \frac{2}{1-0.9}$ بتعويض $a_1=2, r=0.9$

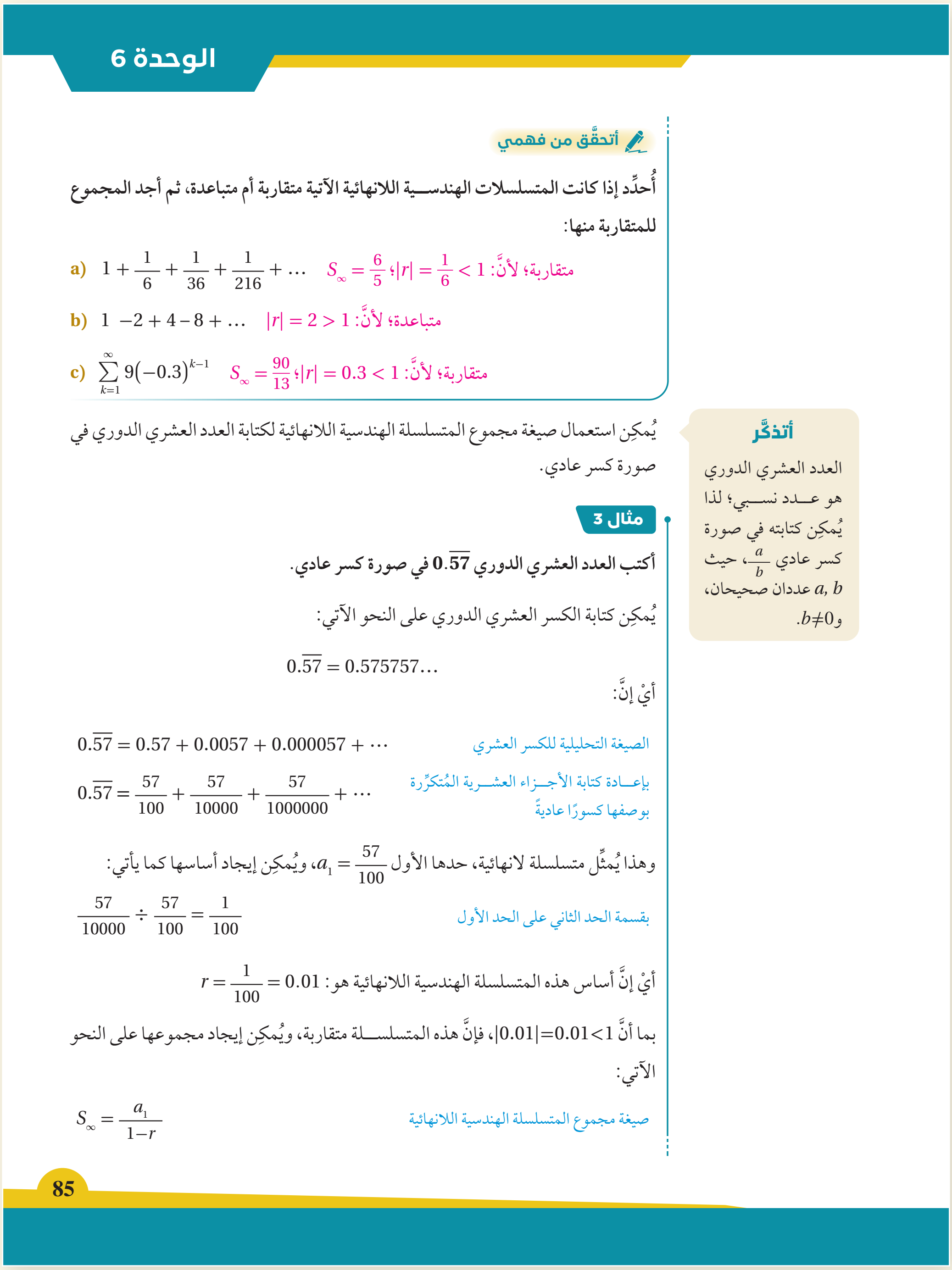
$S_\infty = 20$ بالتبسيط

إذن، مجموع المتسلسلة هو 20.

أتعلّم

للتحقُّق من إجابة الفرع الأول من المثال الثاني، فإنَّني أمثِّل بعض المجاميع الجزئية للمتسلسلة بيانيًّا.

84



أتحقَّق من فهمي

أُحدِّد إذا كانت المتسلسلات الهندسية اللانهائية الآتية متقاربة أم متباعدة، ثم أجد المجموع للمتقاربة منها:

a) $1+\frac{1}{6}+\frac{1}{36}+\frac{1}{216}+\dots$ متقاربة؛ لأنَّ: $|r|=\frac{1}{6}<1$؛ $S_\infty=\frac{6}{5}$

b) $1\ -2+4-8+\dots$ متباعدة؛ لأنَّ: $|r|=2>1$

c) $\sum_{k=1}^{\infty}9(-0.3)^{k-1}$ متقاربة؛ لأنَّ: $|r|=0.3<1$؛ $S_\infty=\frac{90}{13}$

يُمكِن استعمال صيغة مجموع المتسلسلة الهندسية اللانهائية لكتابة العدد العشري الدوري في صورة كسر عادي.

أتذكَّر

العدد العشري الدوري هو عدد نسبي؛ لذا يُمكِن كتابته في صورة كسر عادي $\frac{a}{b}$، حيث a, b عددان صحيحان، و$b\neq0$.

مثال 3

أكتب العدد العشري الدوري $0.\overline{57}$ في صورة كسر عادي.

يُمكِن كتابة الكسر العشري الدوري على النحو الآتي:

$$0.\overline{57}=0.575757\dots$$

أيْ إنَّ:

$$0.\overline{57}=0.57+0.0057+0.000057+\cdots$$ الصيغة التحليلية للكسر العشري

$$0.\overline{57}=\frac{57}{100}+\frac{57}{10000}+\frac{57}{1000000}+\cdots$$ بإعادة كتابة الأجزاء العشرية المُتكرِّرة بوصفها كسورًا عاديةً

وهذا يُمثِّل متسلسلة لانهائية، حدها الأول $a_1=\frac{57}{100}$، ويُمكِن إيجاد أساسها كما يأتي:

$$\frac{57}{10000}\div\frac{57}{100}=\frac{1}{100}$$ بقسمة الحد الثاني على الحد الأول

أيْ إنَّ أساس هذه المتسلسلة الهندسية اللانهائية هو: $r=\frac{1}{100}=0.01$

بما أنَّ $|0.01|=0.01<1$، فإنَّ هذه المتسلسلة متقاربة، ويُمكِن إيجاد مجموعها على النحو الآتي:

$$S_\infty=\frac{a_1}{1-r}$$ صيغة مجموع المتسلسلة الهندسية اللانهائية

توسعة:

- أُذكِّر الطلبة بالطريقة التي تعلَّموها في الصف السابع لتحويل الكسر العشري الدوري إلى كسر عادي، وذلك بطرح المثال الآتي:
  - أكتب $0.\overline{3}$ في صورة كسر عادي باستعمال المعادلات وخصائص المساواة.
  - أكتب المعادلة: $x=0.333..$
  - أضرب الطرفين في 10؛ لأنَّ الرقم المُكرَّر يقع في منزلة الأعشار:

$$10x=3.333..$$

  - أطرح المعادلة الأولى من المعادلة الثانية:

$$9x=3$$

  - أقسم الطرفين على 9:

$$x=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$$

إذن، $0.\overline{3}=\frac{1}{3}$

مثال إضافي:

أكتب كُلًّا ممّا يأتي في صورة كسر عادي:

1) $0.\overline{37}$ $\frac{37}{99}$

2) $0.9\overline{4}$ $\frac{17}{18}$

مثال 4 : من الحياة

- أُناقِش الطلبة في حل المثال 4 الذي يُوضِّح كيف يُمكِن استعمال مجموع المتسلسلة الهندسية اللانهائية لإيجاد مجموع المسافات التي يقطعها جسم يتحرَّك ذهابًا وإيابًا بصورة تلقائية حتى يتوقَّف عن الحركة، مثل: حركة البندول، وحركة الأرجوحة، وحركة كرة مطّاطية سقطت من ارتفاع ما، مُنوِّهًا إيّاهم بضرورة أخذ اتجاهي الحركة بالاعتبار.

مثالان إضافيان:

1 أنتج منجم للذهب 2257 kg من الذهب في السنة الأولى، ثم أخذ إنتاجه يقل كل سنة بما نسبته 14% عن السنة السابقة. كم كيلوغرامًا من الذهب سيُنتِج المنجم قبل أنْ يتوقَّف عن الإنتاج؟ 16121.4 kg

2 قُذِفت كرة رأسيًّا إلى أعلى، فوصلت إلى ارتفاع 90 قدمًا، ثم عادت إلى الأرض، لترتدَّ بعدها إلى الأعلى مسافةً تُعادِل 85% من ارتفاعها السابق. بافتراض أنَّ الكرة سقطت رأسيًّا، وارتدَّت رأسيًّا عددًا غير نهائي من المَرّات، أجد مجموع المسافات التي ستقطعها الكرة قبل أنْ تتوقَّف. 1200 ft

بتعويض $a_1=0.57, r=0.01$

$$= \frac{0.57}{1-0.01}$$

بالتبسيط

$$S_\infty = \frac{19}{33}$$

أيْ إنَّ:

$$0.\overline{57} = 0.575757\ldots = \frac{19}{33}$$

أتحقَّق من فهمي أنظر الهامش.

أكتب العدد العشري الدوري $0.\overline{14}$ في صورة كسر عادي.

معلومة

البندول هو جسم يرتبط بنقطة ثابتة بواسطة خيط، ويتحرَّك في مستوى واحد.

يُمكِن استعمال المتسلسلات الهندسية اللانهائية لحساب مجموع المسافات التي يقطعها البندول المُتحرِّك ذهابًا وإيابًا حتى يتوقَّف عن التأرجح؛ إذ يصعب إيجاد مجموع هذه المسافات من دون استعمال المتسلسلات؛ لأنَّها قبل التوقُّف عن التأرجح تصبح متناهية الصغر، وعددها كبير جدًّا.

مثال 4 : من الحياة

فيزياء: حرَّكت شيماء البندول في مختبر العلوم، وقد لاحظت أنَّه قطع مسافة 45 cm بين أقصى نقطتين وصلهما في المرَّة الأولى كما في الشكل الآتي، ثم قطع في كل مرَّة تالية 77% من المسافة التي قطعها في المرَّة السابقة، أجد مجموع المسافات التي قطعها البندول في أثناء تأرجحه حتى توقَّف عن ذلك.

أُلاحِظ أنَّ مجموع المسافات التي قطعها البندول هو:

$$45 + 45(0.77) + 45(0.77)^2 + 45(0.77)^3 + \cdots$$

يُمثِّل هذا المجموع متسلسلة هندسية لانهائية، حدها الأول $a_1 = 45$، وأساسها

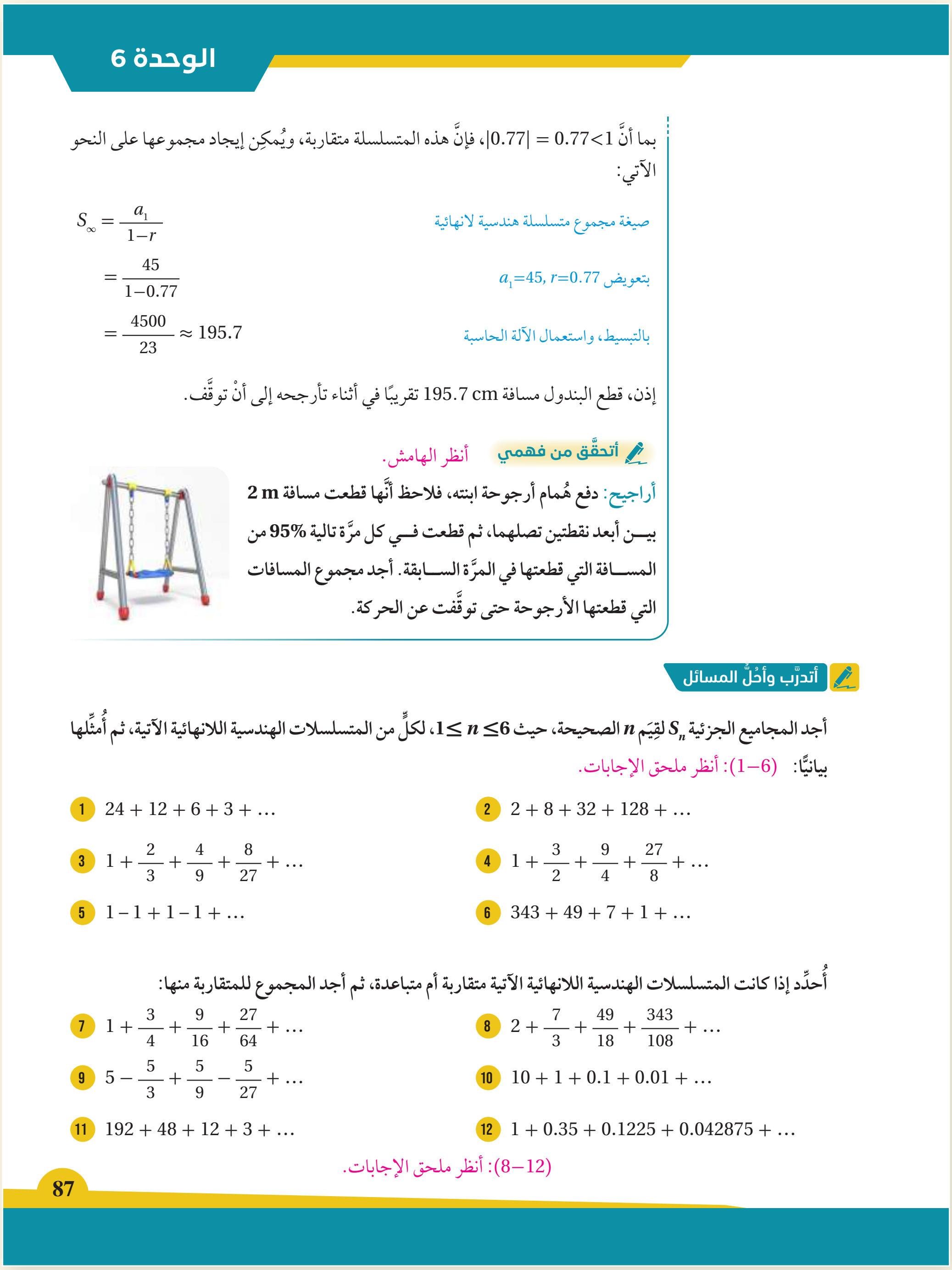
$$r = \frac{45(0.77)}{45} = 0.77$$

86

إجابة الأسئلة في بند (أتحقَّق من فهمي 3):

$$0.\overline{14} = 0.141414\ldots = 0.14+0.0014+0.000014+\cdots$$

$$= \frac{0.14}{1-0.01} = \frac{0.14}{0.99} = \frac{14}{99}$$



الوحدة 6

بما أنَّ $|0.77| = 0.77 < 1$، فإنَّ هذه المتسلسلة متقاربة، ويُمكِن إيجاد مجموعها على النحو الآتي:

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-r}$$ صيغة مجموع متسلسلة هندسية لانهائية

$$= \frac{45}{1-0.77}$$ بتعويض $a_1=45, r=0.77$

$$= \frac{4500}{23} \approx 195.7$$ بالتبسيط، واستعمال الآلة الحاسبة

إذن، قطع البندول مسافة 195.7 cm تقريبًا في أثناء تأرجحه إلى أنْ توقَّف.

أتحقَّق من فهمي أنظر الهامش.

أراجيح: دفع هُمام أرجوحة ابنته، فلاحظ أنَّها قطعت مسافة 2 m بين أبعد نقطتين تصلهما، ثم قطعت في كل مرَّة تالية 95% من المسافة التي قطعتها في المرَّة السابقة. أجد مجموع المسافات التي قطعتها الأرجوحة حتى توقَّفت عن الحركة.

أتدرَّب وأحُلُّ المسائل

أجد المجاميع الجزئية S_n لِقِيَم n الصحيحة، حيث $1 \le n \le 6$، لكلٍّ من المتسلسلات الهندسية اللانهائية الآتية، ثم أُمثِّلها بيانيًّا: (1–6): أنظر ملحق الإجابات.

1. $24 + 12 + 6 + 3 + \ldots$
2. $2 + 8 + 32 + 128 + \ldots$
3. $1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{8}{27} + \ldots$
4. $1 + \frac{3}{2} + \frac{9}{4} + \frac{27}{8} + \ldots$
5. $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$
6. $343 + 49 + 7 + 1 + \ldots$

أُحدِّد إذا كانت المتسلسلات الهندسية اللانهائية الآتية متقاربة أم متباعدة، ثم أجد المجموع للمتقاربة منها:

7. $1 + \frac{3}{4} + \frac{9}{16} + \frac{27}{64} + \ldots$
8. $2 + \frac{7}{3} + \frac{49}{18} + \frac{343}{108} + \ldots$
9. $5 - \frac{5}{3} + \frac{5}{9} - \frac{5}{27} + \ldots$
10. $10 + 1 + 0.1 + 0.01 + \ldots$
11. $192 + 48 + 12 + 3 + \ldots$
12. $1 + 0.35 + 0.1225 + 0.042875 + \ldots$

(8–12): أنظر ملحق الإجابات.

87

إجابة الأسئلة في بند (أتحقَّق من فهمي 4):

$$a_1 = 2$$

$$r = 0.95$$

مجموع المسافات التي قطعتها الأرجوحة هو:

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2(0.95)^{k-1} = \frac{2}{1-0.95} = 40 \text{ m}$$

4 التدريب

أتدرَّب وأحل المسائل

- أُوجِّه الطلبة إلى بند (**أتدرَّب وأحل المسائل**)، ثم أطلب إليهم حل المسائل (1–18) ضمن مجموعات ثنائية داخل الغرفة الصفية؛ فهذه المسائل تحديدًا ترتبط ارتباطًا مباشرًا بأمثلة الدرس، وهي تُستعمَل خاصةً لتدريب الطلبة على المفاهيم نفسها، بصرف النظر عمّا إذا كانت الأسئلة فردية أم زوجية.
- إذا واجه الطلبة صعوبة في حل أيَّة مسألة، فإنَّني أختار أحد الطلبة مِمَّنْ تمكَّن/ تمكَّنت من حل المسألة؛ لمناقشة استراتيجيته/ استراتيجيتها في حل المسألة على اللوح، مُحفِّزًا الطلبة على طرح أيِّ تساؤل عن خطوات الحل المُقدَّمة من الزميل/ الزميلة.

مهارات التفكير العليا

- أُوجِّه الطلبة إلى قراءة الأسئلة الواردة في بند (**مهارات التفكير العليا**)، ثم أطلب إليهم حل المسائل (23–25).
- أتجوَّل بين الطلبة مُساعِدًا ومُرشِدًا ومُوجِّهًا، وأُقدِّم لهم التغذية الراجعة اللازمة.

الواجب المنزلي:

أستعين بالجدول الآتي لتحديد الواجب المنزلي للطلبة بحسب مستوياتهم:

المستويات	الأسئلة
دون المتوسط	كتاب الطالب: (21 – 23) كتاب التمارين: (1 – 18) (فردي).
ضمن المتوسط	كتاب الطالب: 19, 20 ,22 كتاب التمارين: (1 – 18) (زوجي).
فوق المتوسط	كتاب الطالب: (22 – 25) كتاب التمارين: (3 – 19) (فردي).

5 الإثراء

- أطلب إلى الطلبة حل السؤالين الآتيين بوصفهما إثراءً لهم:

◂ إذا كان الحد الثاني في متسلسلة هندسية هو 192، وحدها الثالث هو 144، فما مجموع حدودها إلى ما لا نهاية؟ 1024

◂ أجد قيمة ما يأتي:

$$\sum_{k=5}^{\infty} 2\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} \quad \frac{1}{27}$$

6 الختام

- أتحقَّق من فهم الطلبة موضوع الدرس، بطرح السؤال الآتي عليهم:

◂ أُحدِّد إذا كانت كل متسلسلة ممّا يأتي متقاربة أو متباعدة، ثم أجد مجموعها إنْ كانت متقاربة:

① $8 + 12 + 18 + 27 + \ldots$ متباعدة.

② $64+48+36+27+\ldots$ متقاربة؛ $S_\infty = 256$

③ $24 + 12 + 6 + 3 + \ldots$ متقاربة؛ $S_\infty = 48$

④ $2 + 3 + \frac{9}{2} + \frac{27}{4} + \frac{81}{8} + \cdots$ متباعدة.

أكتب كُلًّا من الأعداد العشرية الدورية الآتية في صورة كسر عادي: (13–18): أنظر الهامش.

⑬ $0.\overline{7}$

⑭ $0.\overline{41}$

⑮ $0.\overline{4}$

⑯ $0.\overline{05}$

⑰ $0.\overline{86}$

⑱ $0.\overline{3}$

كرات: سقطت كرة مطّاطية من ارتفاع **20 m** رأسيًّا في اتجاه أرض أفقية. وعند اصطدامها بالأرض ارتدَّت إلى أعلى مسافة تُعادِل ما نسبته **70%** من الارتفاع الذي سقطت منه في المرَّة السابقة. بافتراض أنَّ الكرة سقطت رأسيًّا ثم ارتدَّت رأسيًّا عددًا لانهائيًّا من المرّات:

⑲ أجد الحد العام a_n الذي يُمثِّل المسافة التي قطعتها الكرة عندما ارتدَّت عن الأرض للمرَّة n. أنظر الهامش.

⑳ أجد $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. أنظر ملحق الإجابات.

㉑ **مراوح:** تدور مروحة بسرعة مقدارها **12** دورة في الثانية الواحدة. وعند فصل التيار الكهربائي عنها تتباطأ سرعتها بما نسبته **75%** من دوراتها في كل ثانية لاحقة. أجد عدد الدورات التي ستدورها المروحة قبل أنْ تتوقَّف عن الدوران بصورة كلية.

(21–22): أنظر ملحق الإجابات.

㉒ أحُلُّ المسألة الواردة في بند (مسألة اليوم).

مهارات التفكير العليا

㉓ **أكتشف الخطأ:** أوجد سفيان قيمة: $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5}{2}\right)^{n-1}$ على النحو الآتي:

$$a_1 = 1, \quad r = \frac{5}{2}$$

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-r} = \frac{1}{1-\frac{5}{2}} = -\frac{2}{3} \quad ✗$$

أكتشف الخطأ في حَلِّ سفيان، ثم أُصحِّحه.

استعمل سفيان خطأً صيغة مجموع المتسلسلة الهندسية المتقاربة لإيجاد مجموع هذه المتسلسلة. فهذه المتسلسلة متباعدة؛ لأنَّ القيمة المطلقة لأساسها أكبر من 1، ومن ثَمَّ لا يُمكِن إيجاد مجموع عدد لا نهائي من حدودها.

㉔ **مسألة مفتوحة:** أجد متسلسلة هندسية لانهائية مجموعها 6، مُبرِّرًا إجابتي. أنظر ملحق الإجابات.

㉕ **تحدٍّ:** إذا كان الحد الأول لمتسلسلة هندسية لانهائية متقاربة هو a حيث $a > 0$، والحد الثالث فيها هو 4، فأجد جميع الاحتمالات المُمكِنة لمجموع المتسلسلة بدلالة a. أنظر ملحق الإجابات.

88

إجابة الأسئلة في بند (أتدرَّب وأحل المسائل)

13) $0.\overline{7} = 0.7777\ldots = 0.7+0.07+0.007+0.0007+\cdots$

$$= \frac{0.7}{0.9} = \frac{7}{9}$$

14) $0.\overline{41} = 0.414141\ldots = 0.41+0.0041+0.000041+\cdots$

$$= \frac{0.41}{0.99} = \frac{41}{99}$$

15) $0.\overline{4} = 0.4444\ldots = 0.4+0.04+0.004+0.0004+\cdots$

$$= \frac{0.4}{0.9} = \frac{4}{9}$$

16) $0.\overline{05} = 0.050505\ldots = 0.05+0.0005+0.000005+\cdots$

$$= \frac{0.05}{0.99} = \frac{5}{99}$$

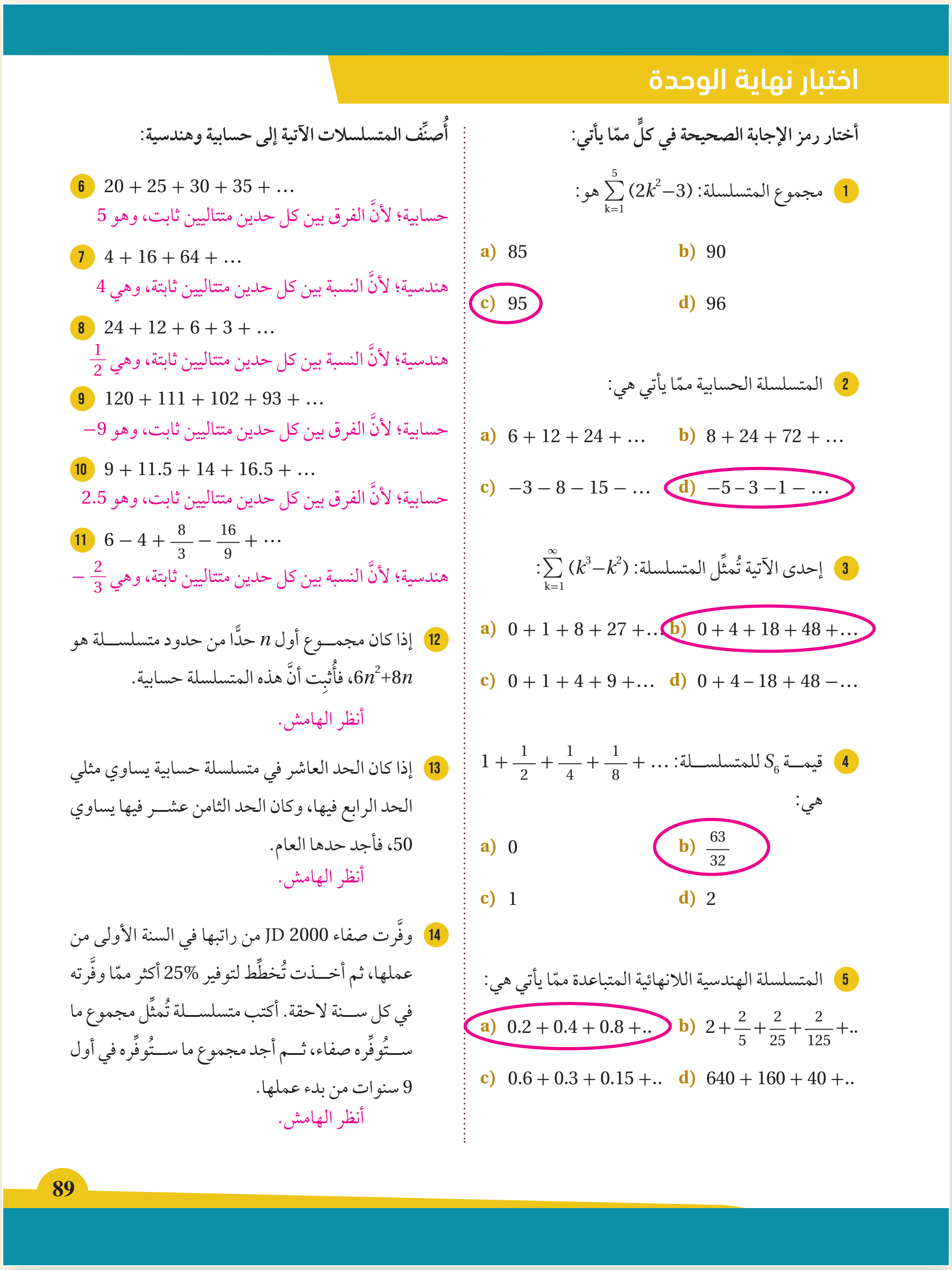
17) $0.\overline{86} = 0.868686\ldots = 0.86+0.0086+0.000086+\cdots$

$$= \frac{0.86}{0.99} = \frac{86}{99}$$

18) $0.\overline{3} = 0.3333\ldots = 0.3+0.03+0.003+0.0003+\cdots$

$$= \frac{0.3}{0.9} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

19) $a_n = 20(0.7)^n$



اختبار نهاية الوحدة

أختار رمز الإجابة الصحيحة في كلٍّ ممّا يأتي:

1 مجموع المتسلسلة: $\sum_{k=1}^{5}(2k^2-3)$ هو:

a) 85
b) 90
[✓ c) 95]
d) 96

2 المتسلسلة الحسابية ممّا يأتي هي:

a) $6+12+24+\dots$
b) $8+24+72+\dots$
c) $-3-8-15-\dots$
[✓ d) $-5-3-1-\dots$]

3 إحدى الآتية تُمثِّل المتسلسلة: $\sum_{k=1}^{\infty}(k^3-k^2)$:

a) $0+1+8+27+\dots$
[✓ b) $0+4+18+48+\dots$]
c) $0+1+4+9+\dots$
d) $0+4-18+48-\dots$

4 قيمة S_6 للمتسلسلة: $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\dots$ هي:

a) 0
[✓ b) $\frac{63}{32}$]
c) 1
d) 2

5 المتسلسلة الهندسية اللانهائية المتباعدة ممّا يأتي هي:

[✓ a) $0.2+0.4+0.8+..$]
b) $2+\frac{2}{5}+\frac{2}{25}+\frac{2}{125}+..$
c) $0.6+0.3+0.15+..$
d) $640+160+40+..$

أُصنِّف المتسلسلات الآتية إلى حسابية وهندسية:

6 $20+25+30+35+\dots$

حسابية؛ لأنَّ الفرق بين كل حدين متتاليين ثابت، وهو 5

7 $4+16+64+\dots$

هندسية؛ لأنَّ النسبة بين كل حدين متتاليين ثابتة، وهي 4

8 $24+12+6+3+\dots$

هندسية؛ لأنَّ النسبة بين كل حدين متتاليين ثابتة، وهي $\frac{1}{2}$

9 $120+111+102+93+\dots$

حسابية؛ لأنَّ الفرق بين كل حدين متتاليين ثابت، وهو -9

10 $9+11.5+14+16.5+\dots$

حسابية؛ لأنَّ الفرق بين كل حدين متتاليين ثابت، وهو 2.5

11 $6-4+\frac{8}{3}-\frac{16}{9}+\cdots$

هندسية؛ لأنَّ النسبة بين كل حدين متتاليين ثابتة، وهي $-\frac{2}{3}$

12 إذا كان مجموع أول n حدًّا من حدود متسلسلة هو $6n^2+8n$، فأُثبِت أنَّ هذه المتسلسلة حسابية.

أنظر الهامش.

13 إذا كان الحد العاشر في متسلسلة حسابية يساوي مثلي الحد الرابع فيها، وكان الحد الثامن عشر فيها يساوي 50، فأجد حدها العام.

أنظر الهامش.

14 وفَّرت صفاء JD 2000 من راتبها في السنة الأولى من عملها، ثم أخذت تُخطِّط لتوفير 25% أكثر ممّا وفَّرته في كل سنة لاحقة. أكتب متسلسلة تُمثِّل مجموع ما ستُوفِّره صفاء، ثم أجد مجموع ما ستُوفِّره في أول 9 سنوات من بدء عملها.

أنظر الهامش.

اختبار نهاية الوحدة:

- أطلب إلى الطلبة حل الأسئلة (5 – 1) فرديًّا، وأتجوَّل بينهم مُساعِدًا ومُرشِدًا ومُوجِّهًا، وأُقدِّم لهم التغذية الراجعة اللازمة، ثم أُناقِشهم جميعًا في حل بعض المسائل على اللوح.
- أُوزِّع الطلبة إلى مجموعات رباعية، ثم أطلب إلى أفراد المجموعات حل المسائل (21 – 6)، وأتجوَّل بينهم مُساعِدًا ومُرشِدًا ومُوجِّهًا، وأُقدِّم لهم التغذية الراجعة اللازمة، ثم أُحدِّد المسائل التي واجه الطلبة صعوبة في حلها لمناقشتها على اللوح.

إجابة الأسئلة في بند (أتدرَّب وأحل المسائل)

12)

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$
$$= (6n^2+8n) - \left(6(n-1)^2+8(n-1)\right)$$
$$= 6n^2+8n - \left(6n^2-12n+6+8n-8\right)$$
$$= 12n+2$$

وحيث أنّ: $a_n = 12n+2$؛ فإن المتسلسلة حسابية فيها $a_1 = 14, d = 12$

13)

$$a_{10} = 2a_4 \Rightarrow a_1+9d = 2(a_1+3d) \Rightarrow a_1 = 3d \ldots\ldots(1)$$
$$a_{18} = a_1+17d = 50 \ldots\ldots\ldots(2)$$

بتعويض قيمة a_1 من المعادلة 1 في المعادلة 2، فإنَّ:

$$20d = 50 \Rightarrow d = 2.5$$
$$a_1 = 3d = 7.5$$

إذن، الحد العام هو: $a_n = 7.5+2.5(n-1)$

$$a_n = 5+2.5n$$

14)

$$a_1 = 2000$$
$$r = 1.25$$
$$n = 9$$

المتسلسلة هي:

$$\sum_{n=1}^{9} 2000(1.25)^{n-1} = 2000+2500+3125+\cdots$$
$$+\,2000(1.25)^8$$

$$S_9 = \frac{2000(1-(1.25)^9)}{1-1.25} \approx 51604.6 \text{ JD}$$

تدريب على الاختبارات الدولية

- أطلب إلى الطلبة حل الأسئلة الواردة في بند **(تدريب على الاختبارات الدولية)** فرديًّا، ثم أُناقِشهم جميعًا في حلها على اللوح، مُبيِّنًا لهم المقصود بالاختبارات الدولية.

إجابة الأسئلة في بند (أتدرَّب وأحل المسائل)

15) $a_1 = 5, d = 2, n = 15$

$$\Rightarrow a_{15} = 5 + 14(2) = 33$$

$$S_{15} = 15\left(\frac{5+33}{2}\right) = 285$$

18) متسلسلة ارتفاعات الارتدادات هي:

$$9(0.75) + 9(0.75)^2 + 9(0.75)^3 + \cdots$$

$$a_1 = 9(0.75)$$

$$r = 0.75$$

$$S_\infty = \frac{9(0.75)}{1-0.75} = 27 \text{ m}$$

اختبار نهاية الوحدة

15 يتمرَّن جمال على تحسين خطِّه في الكتابة. إذا كتب في اليوم الأول خمس صفحات، ثم كتب في كل يوم تالٍ أكثر بصفحتين من اليوم الذي قبله، فأجد عدد الصفحات التي كتبها في خمسة عشر يومًا.
أنظر الهامش.

رمى سهيل كرة من ارتفاع 9 m في اتجاه أرض أفقية، وقد لاحظ أنَّ الكرة ترتد في كل مرَّة بما نسبته 75% من ارتفاعها في المرَّة السابقة:

9 m

16 أجد الارتفاع الذي سترتد إليه الكرة بعد اصطدامها بالأرض للمرَّة الرابعة.
$a_1 = 9$
$r = 0.75$
$a_4 = 9\,(0.75)^3 \approx 3.8 \text{ m}$

17 أجد الارتفاع الذي سترتد إليه الكرة بعد اصطدامها بالأرض للمرَّة n.
$a_4 = 9\,(0.75)^{n-1}$

18 أجد مجموع الارتفاعات التي ارتدَّتها الكرة حتى استقرَّت بصورة كاملة على الأرض.
أنظر الهامش.

19 مجموع ثلاثة حدود من متسلسلة حسابية هو 24؛ وناتج ضربها هو 440؛ فما هي هذه الحدود؟
أنظر الهامش.

20 بلغ راتب بكر في السنة الأولى من عمله JD 2700. إذا زاد راتبه بنسبة 3% في كل سنة لاحقة عن السنة التي سبقتها، فما مجموع رواتبه في أول 10 سنوات من العمل؟ أنظر الهامش.

21 لدى مروة حوض لتربية الأسماك، فيه 200 سمكة، وقد لاحظت نفوق 7 منها يوميًّا على مدار 10 أيام. أُعبِّر عن عدد الأسماك التي نفقت بمتسلسلة.
$\sum_{k=1}^{10} (7)$

تدريب على الاختبارات الدولية

22 مجموع أول n حدًّا من الأعداد الزوجية هو:

a) n
b) $2n$
[✓ c) n^2+n]
d) n^2

23 إذا كان الحد الأول لمتسلسلة حسابية هو a، وأساسها هو d، ومجموع الحد السادس والحد السابع والحد الثامن فيها هو 12، فإنَّ قيمة a هي:

a) 12
b) 4
[✓ c) $4-6d$]
d) $4+6d$

24 إذا كانت الحدود الثلاثة الأولى لمتسلسلة هندسية لانهائية هي: $6p+2, 4p+4, 3p+3$، حيث $p \neq 0$، فإنَّ مجموع هذه المتسلسلة هو:

[✓ a) 128]
b) 5
c) 32
d) 1

90

19) بافتراض أنَّ أساس المتتالية الحسابية هو d، وأوسط هذه الحدود هو b، فإنَّ الحدود الثلاثة هي: $b-d, b, b+d$

$$b-d+b+b+d = 24 \Rightarrow 3b = 24 \Rightarrow b = 8$$

$$(b-d) \times b \times (b+d) = 440$$

بتعويض $b = 8$ في معادلة ناتج الضرب، فإنَّ:

$$(8-d) \times 8 \times (8+d) = 440$$

$$\Rightarrow 8(64-d^2) = 440$$

$$(64-d^2) = 55 \Rightarrow d^2 = 9 \Rightarrow d = \pm 3$$

إذا كانت $d = 3$، فإنَّ الحدود الثلاثة هي: 8−3,8,8+3 أي أنها 5, 8, 11

وإذا كانت $d = -3$، فإنَّ الحدود الثلاثة هي: 8−(−3),8,8−3؛ أيْ إنَّها: 11, 8, 5

إذن، هذه الحدود هي: 5, 8, 11، أو هي: 11, 8, 5

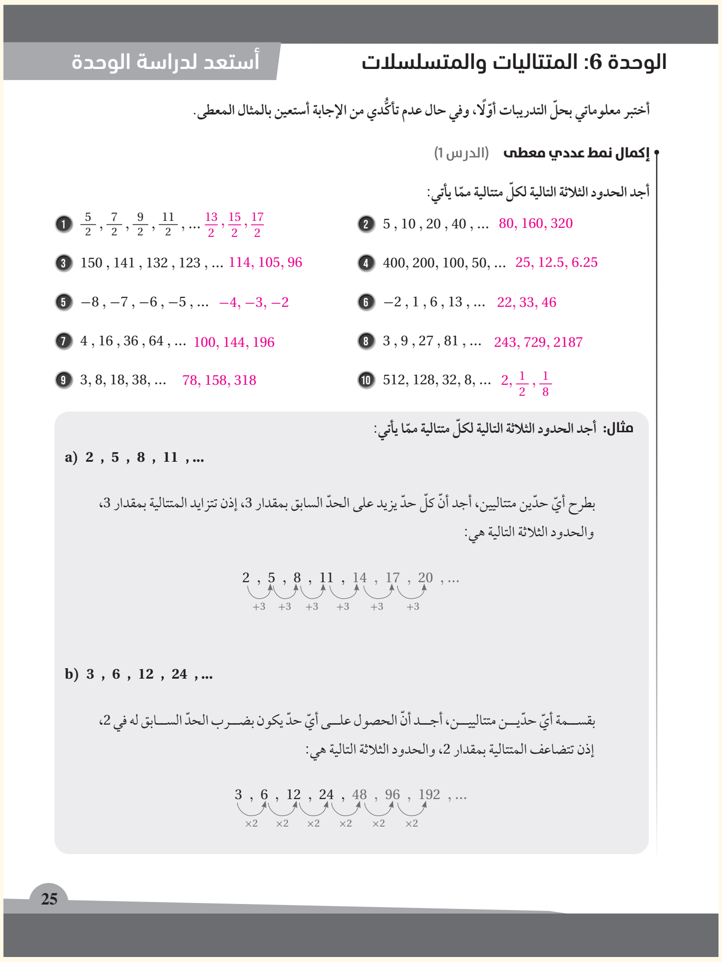
20) $a_1 = 2700$

$$r = 1.03$$

$$n = 10$$

$$S_{10} = \frac{2700(1-(1.03)^{10})}{1-1.03} \approx 30952.5$$

كتاب التمارين



الوحدة 6: المتتاليات والمتسلسلات

أستعد لدراسة الوحدة

أختبر معلوماتي بحلّ التدريبات أوّلًا، وفي حال عدم تأكُّدي من الإجابة أستعين بالمثال المعطى.

إكمال نمط عددي معطى (الدرس 1)

أجد الحدود الثلاثة التالية لكلّ متتالية ممّا يأتي:

① $\frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \frac{9}{2}, \frac{11}{2}, \ldots$ $\frac{13}{2}, \frac{15}{2}, \frac{17}{2}$

② $5, 10, 20, 40, \ldots$ $80, 160, 320$

③ $150, 141, 132, 123, \ldots$ $114, 105, 96$

④ $400, 200, 100, 50, \ldots$ $25, 12.5, 6.25$

⑤ $-8, -7, -6, -5, \ldots$ $-4, -3, -2$

⑥ $-2, 1, 6, 13, \ldots$ $22, 33, 46$

⑦ $4, 16, 36, 64, \ldots$ $100, 144, 196$

⑧ $3, 9, 27, 81, \ldots$ $243, 729, 2187$

⑨ $3, 8, 18, 38, \ldots$ $78, 158, 318$

⑩ $512, 128, 32, 8, \ldots$ $2, \frac{1}{2}, \frac{1}{8}$

مثال: أجد الحدود الثلاثة التالية لكلّ متتالية ممّا يأتي:

a) 2 , 5 , 8 , 11 , ...

بطرح أيّ حدّين متتاليين، أجد أنّ كلّ حدّ يزيد على الحدّ السابق بمقدار 3، إذن تتزايد المتتالية بمقدار 3، والحدود الثلاثة التالية هي:

$$2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, \ldots$$

+3 +3 +3 +3 +3 +3

b) 3 , 6 , 12 , 24 , ...

بقسمة أيّ حدّين متتاليين، أجد أنّ الحصول على أيّ حدّ يكون بضرب الحدّ السابق له في 2، إذن تتضاعف المتتالية بمقدار 2، والحدود الثلاثة التالية هي:

$$3, 6, 12, 24, 48, 96, 192, \ldots$$

×2 ×2 ×2 ×2 ×2 ×2

25

الوحدة 6: المتتاليات والمتسلسلات

أستعد لدراسة الوحدة

c) 80 , 73 , 66 , 59 , ...

بطرح أيّ حدّين متتاليين، أجد أنّ كلّ حدّ ينقص عن الحدّ السابق بمقدار 7، إذن تتناقص المتتالية بمقدار 7، والحدود الثلاثة التالية هي:

$$80, 73, 66, 59, 52, 45, 38, \ldots$$

−7 −7 −7 −7 −7 −7

إيجاد الحد العام لمتتالية (الدرس 1)

أجد الحد العام لكل متتالية ممّا يأتي:

⑪ $4, 9, 14, 19, \ldots$ $T(n) = 5n - 1$

⑫ $1, 4, 9, 16, \ldots$ $T(n) = n^2$

⑬ $23, 17, 11, 5, \ldots.$ $T(n) = 29 - 6n$

⑭ $10, 20, 30, \ldots$ $T(n) = 10n$

⑮ $2, 9, 28, 65, \ldots$ $T(n) = n^3 + 1$

⑯ $6, 9, 14, 21, \ldots$ $T(n) = n^2 + 5$

مثال: أجد الحد العام للمتتالية: **9, 16, 23, 30, ...**

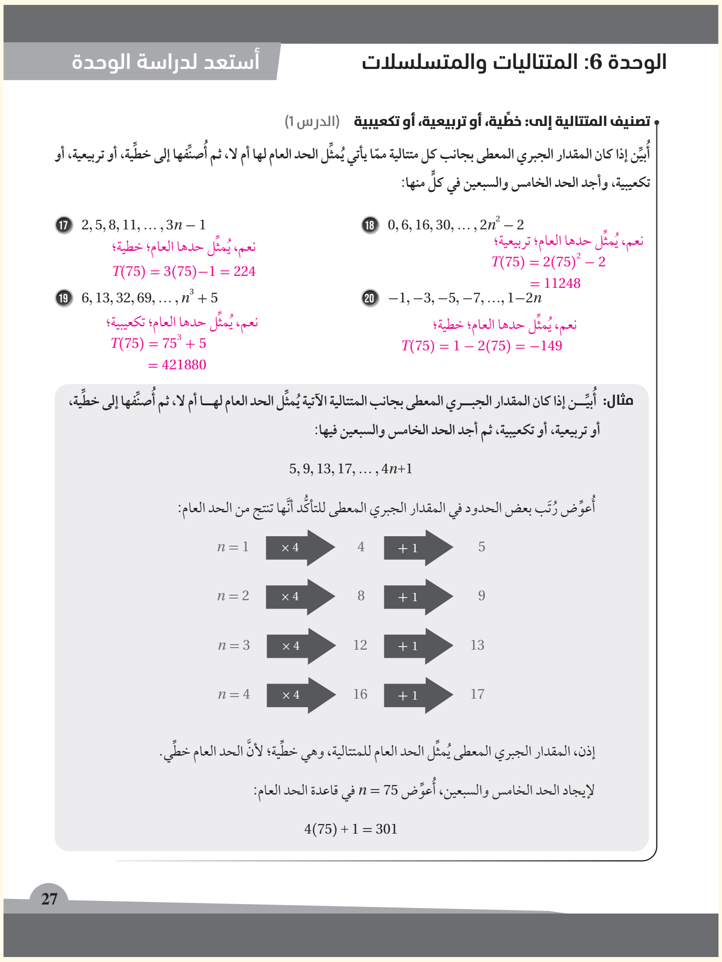
أُلاحِظ أنَّ حدود المتتالية تتزايد بمقدار 7:

$$9, 16, 23, 30, \ldots$$

+7 +7 +7

يُمكِن مبدئيًّا التعبير عن المتتالية بالحد $7n$، ولكنْ عند تعويض $n = 1$ ينتج العدد 7، وهو أقل من الحد الأول بـ 2؛ لذا أجمع العدد 2 مع $7n$، وبذلك يصبح الحد العام: $T(n) = 7n + 2$

26



الوحدة 6: المتتاليات والمتسلسلات

أستعد لدراسة الوحدة

تصنيف المتتالية إلى: خطِّية، أو تربيعية، أو تكعيبية (الدرس 1)

أُبيِّن إذا كان المقدار الجبري المعطى بجانب كل متتالية ممّا يأتي يُمثِّل الحد العام لها أم لا، ثم أُصنِّفها إلى خطِّية، أو تربيعية، أو تكعيبية، وأجد الحد الخامس والسبعين في كلٍّ منها:

⑰ $2, 5, 8, 11, \ldots, 3n - 1$

نعم، يُمثِّل حدها العام؛ خطية؛

$T(75) = 3(75) - 1 = 224$

⑱ $0, 6, 16, 30, \ldots, 2n^2 - 2$

نعم، يُمثِّل حدها العام؛ تربيعية؛

$T(75) = 2(75)^2 - 2$

$= 11248$

⑲ $6, 13, 32, 69, \ldots, n^3 + 5$

نعم، يُمثِّل حدها العام؛ تكعيبية؛

$T(75) = 75^3 + 5$

$= 421880$

⑳ $-1, -3, -5, -7, \ldots, 1-2n$

نعم، يُمثِّل حدها العام؛ خطية؛

$T(75) = 1 - 2(75) = -149$

مثال: أُبيِّن إذا كان المقدار الجبري المعطى بجانب المتتالية الآتية يُمثِّل الحد العام لها أم لا، ثم أُصنِّفها إلى خطِّية، أو تربيعية، أو تكعيبية، ثم أجد الحد الخامس والسبعين فيها:

$$5, 9, 13, 17, \ldots, 4n+1$$

أُعوِّض رُتَب بعض الحدود في المقدار الجبري المعطى للتأكُّد أنَّها تنتج من الحد العام:

$$n = 1 \xrightarrow{\times 4} 4 \xrightarrow{+1} 5$$

$$n = 2 \xrightarrow{\times 4} 8 \xrightarrow{+1} 9$$

$$n = 3 \xrightarrow{\times 4} 12 \xrightarrow{+1} 13$$

$$n = 4 \xrightarrow{\times 4} 16 \xrightarrow{+1} 17$$

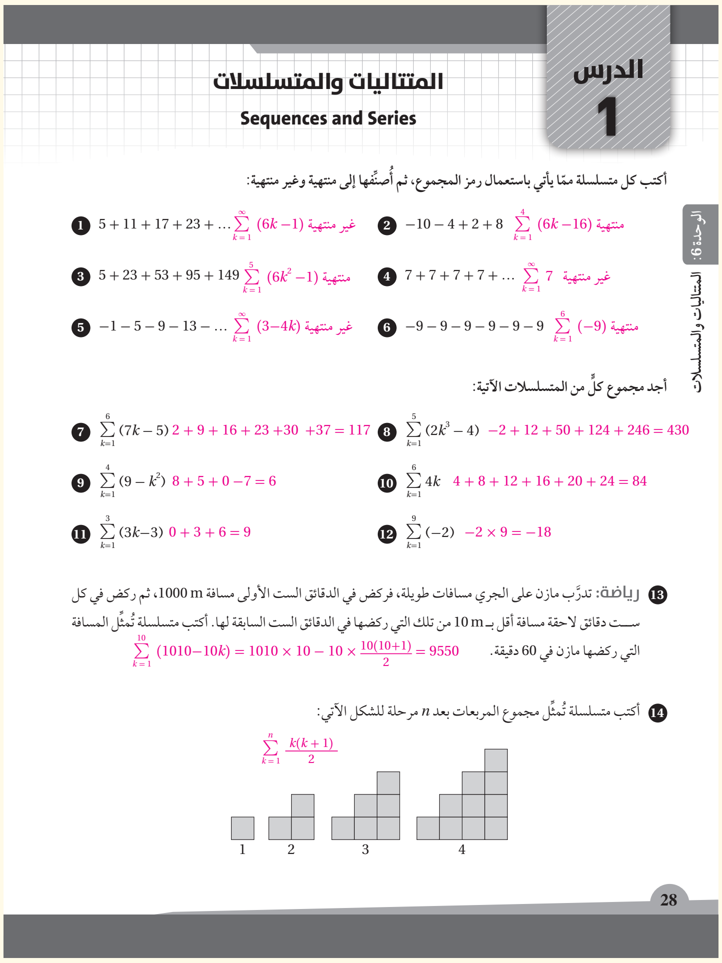
إذن، المقدار الجبري المعطى يُمثِّل الحد العام للمتتالية، وهي خطِّية؛ لأنَّ الحد العام خطِّي.

لإيجاد الحد الخامس والسبعين، أُعوِّض $n = 75$ في قاعدة الحد العام:

$$4(75) + 1 = 301$$

27

كتاب التمارين



الدرس 1

المتتاليات والمتسلسلات

Sequences and Series

الوحدة 6: المتتاليات والمتسلسلات

أكتب كل متسلسلة ممّا يأتي باستعمال رمز المجموع، ثم أُصنِّفها إلى منتهية وغير منتهية:

❶ $5+11+17+23+\dots$ $\sum_{k=1}^{\infty}(6k-1)$ غير منتهية

❷ $-10-4+2+8$ $\sum_{k=1}^{4}(6k-16)$ منتهية

❸ $5+23+53+95+149$ $\sum_{k=1}^{5}(6k^2-1)$ منتهية

❹ $7+7+7+7+\dots$ $\sum_{k=1}^{\infty}7$ غير منتهية

❺ $-1-5-9-13-\dots$ $\sum_{k=1}^{\infty}(3-4k)$ غير منتهية

❻ $-9-9-9-9-9-9$ $\sum_{k=1}^{6}(-9)$ منتهية

أجد مجموع كلٍّ من المتسلسلات الآتية:

❼ $\sum_{k=1}^{6}(7k-5)$ $2+9+16+23+30+37=117$

❽ $\sum_{k=1}^{5}(2k^3-4)$ $-2+12+50+124+246=430$

❾ $\sum_{k=1}^{4}(9-k^2)$ $8+5+0-7=6$

❿ $\sum_{k=1}^{6}4k$ $4+8+12+16+20+24=84$

⓫ $\sum_{k=1}^{3}(3k-3)$ $0+3+6=9$

⓬ $\sum_{k=1}^{9}(-2)$ $-2\times 9=-18$

⓭ **رياضة:** تدرَّب مازن على الجري مسافات طويلة، فركض في الدقائق الست الأولى مسافة 1000 m، ثم ركض في كل ست دقائق لاحقة مسافة أقل بـ 10 m من تلك التي ركضها في الدقائق الست السابقة لها. أكتب متسلسلة تُمثِّل المسافة التي ركضها مازن في 60 دقيقة.

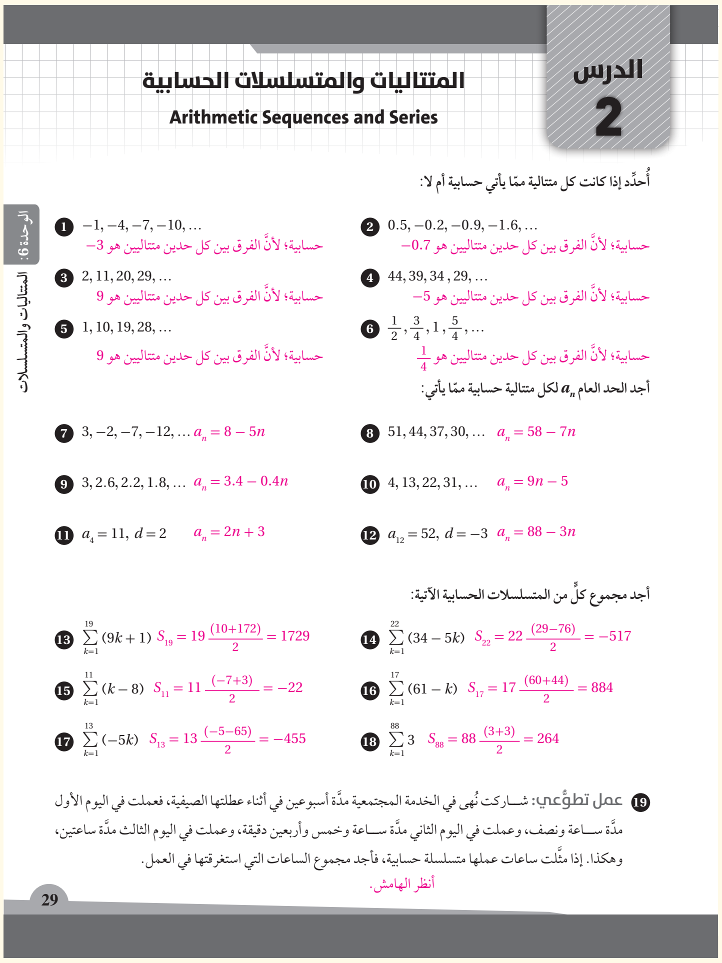
$$\sum_{k=1}^{10}(1010-10k)=1010\times 10-10\times\frac{10(10+1)}{2}=9550$$

⓮ أكتب متسلسلة تُمثِّل مجموع المربعات بعد n مرحلة للشكل الآتي:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k(k+1)}{2}$$

1 2 3 4

28



الدرس 2

المتتاليات والمتسلسلات الحسابية

Arithmetic Sequences and Series

الوحدة 6: المتتاليات والمتسلسلات

أُحدِّد إذا كانت كل متتالية ممّا يأتي حسابية أم لا:

❶ $-1,-4,-7,-10,\dots$
حسابية؛ لأنَّ الفرق بين كل حدين متتاليين هو -3

❷ $0.5,-0.2,-0.9,-1.6,\dots$
حسابية؛ لأنَّ الفرق بين كل حدين متتاليين هو -0.7

❸ $2,11,20,29,\dots$
حسابية؛ لأنَّ الفرق بين كل حدين متتاليين هو 9

❹ $44,39,34,29,\dots$
حسابية؛ لأنَّ الفرق بين كل حدين متتاليين هو -5

❺ $1,10,19,28,\dots$
حسابية؛ لأنَّ الفرق بين كل حدين متتاليين هو 9

❻ $\frac{1}{2},\frac{3}{4},1,\frac{5}{4},\dots$
حسابية؛ لأنَّ الفرق بين كل حدين متتاليين هو $\frac{1}{4}$

أجد الحد العام a_n لكل متتالية حسابية ممّا يأتي:

❼ $3,-2,-7,-12,\dots$ $a_n=8-5n$

❽ $51,44,37,30,\dots$ $a_n=58-7n$

❾ $3,2.6,2.2,1.8,\dots$ $a_n=3.4-0.4n$

❿ $4,13,22,31,\dots$ $a_n=9n-5$

⓫ $a_4=11,\ d=2$ $a_n=2n+3$

⓬ $a_{12}=52,\ d=-3$ $a_n=88-3n$

أجد مجموع كلٍّ من المتسلسلات الحسابية الآتية:

⓭ $\sum_{k=1}^{19}(9k+1)$ $S_{19}=19\frac{(10+172)}{2}=1729$

⓮ $\sum_{k=1}^{22}(34-5k)$ $S_{22}=22\frac{(29-76)}{2}=-517$

⓯ $\sum_{k=1}^{11}(k-8)$ $S_{11}=11\frac{(-7+3)}{2}=-22$

⓰ $\sum_{k=1}^{17}(61-k)$ $S_{17}=17\frac{(60+44)}{2}=884$

⓱ $\sum_{k=1}^{13}(-5k)$ $S_{13}=13\frac{(-5-65)}{2}=-455$

⓲ $\sum_{k=1}^{88}3$ $S_{88}=88\frac{(3+3)}{2}=264$

⓳ **عمل تطوُّعي:** شاركت نُهى في الخدمة المجتمعية مدَّة أسبوعين في أثناء عطلتها الصيفية، فعملت في اليوم الأول مدَّة ساعة ونصف، وعملت في اليوم الثاني مدَّة ساعة وخمس وأربعين دقيقة، وعملت في اليوم الثالث مدَّة ساعتين، وهكذا. إذا مثَّلت ساعات عملها متسلسلة حسابية، فأجد مجموع الساعات التي استغرقتها في العمل.

أنظر الهامش.

29

ملاحظاتي

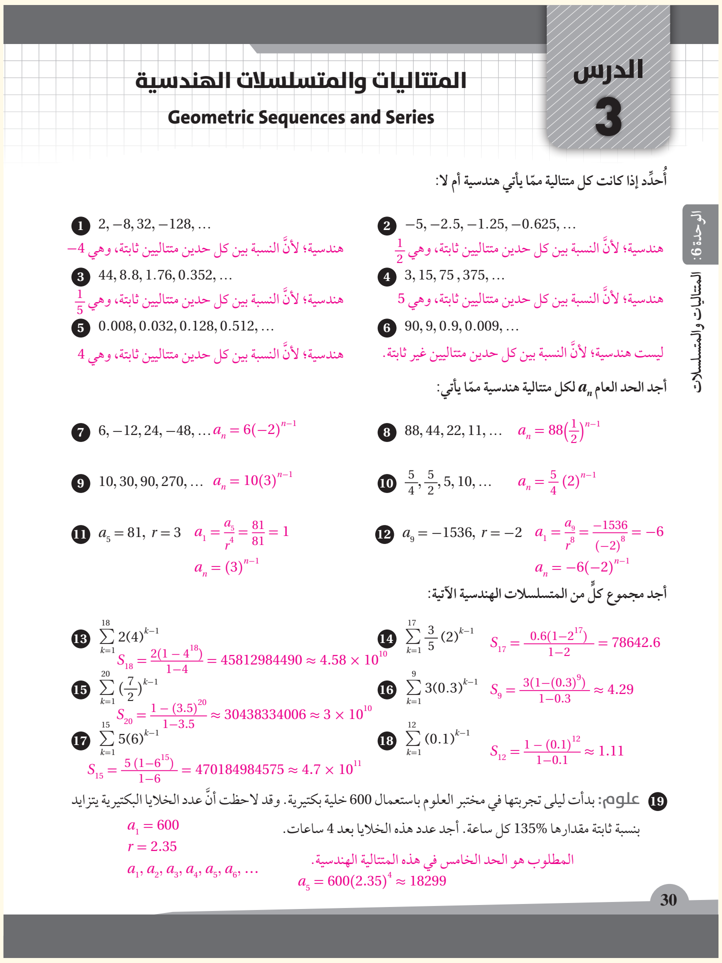
كتاب التمارين – إجابة أسئلة الدرس (2):

19) $a_1 = 90$ min, $d = 15$ min, $n = 14$

$$S_{14}=\sum_{k=1}^{14}(75+15n)=14\left(\frac{90+285}{2}\right)$$

$$=2625\ \text{min}=43.75\ \text{hr}$$

كتاب التمارين



الدرس 3

المتتاليات والمتسلسلات الهندسية

Geometric Sequences and Series

الوحدة 6: المتتاليات والمتسلسلات

أُحدِّد إذا كانت كل متتالية ممّا يأتي هندسية أم لا:

① $2, -8, 32, -128, \ldots$
هندسية؛ لأنَّ النسبة بين كل حدين متتاليين ثابتة، وهي -4

② $-5, -2.5, -1.25, -0.625, \ldots$
هندسية؛ لأنَّ النسبة بين كل حدين متتاليين ثابتة، وهي $\frac{1}{2}$

③ $44, 8.8, 1.76, 0.352, \ldots$
هندسية؛ لأنَّ النسبة بين كل حدين متتاليين ثابتة، وهي $\frac{1}{5}$

④ $3, 15, 75, 375, \ldots$
هندسية؛ لأنَّ النسبة بين كل حدين متتاليين ثابتة، وهي 5

⑤ $0.008, 0.032, 0.128, 0.512, \ldots$
هندسية؛ لأنَّ النسبة بين كل حدين متتاليين ثابتة، وهي 4

⑥ $90, 9, 0.9, 0.009, \ldots$
ليست هندسية؛ لأنَّ النسبة بين كل حدين متتاليين غير ثابتة.

أجد الحد العام a_n لكل متتالية هندسية ممّا يأتي:

⑦ $6, -12, 24, -48, \ldots \; a_n = 6(-2)^{n-1}$

⑧ $88, 44, 22, 11, \ldots \quad a_n = 88\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

⑨ $10, 30, 90, 270, \ldots \quad a_n = 10(3)^{n-1}$

⑩ $\frac{5}{4}, \frac{5}{2}, 5, 10, \ldots \quad a_n = \frac{5}{4}(2)^{n-1}$

⑪ $a_5 = 81,\ r = 3 \quad a_1 = \frac{a_5}{r^4} = \frac{81}{81} = 1$
$a_n = (3)^{n-1}$

⑫ $a_9 = -1536,\ r = -2 \quad a_1 = \frac{a_9}{r^8} = \frac{-1536}{(-2)^8} = -6$
$a_n = -6(-2)^{n-1}$

أجد مجموع كلٍّ من المتسلسلات الهندسية الآتية:

⑬ $\sum_{k=1}^{18} 2(4)^{k-1}$
$S_{18} = \frac{2(1-4^{18})}{1-4} = 45812984490 \approx 4.58 \times 10^{10}$

⑭ $\sum_{k=1}^{17} \frac{3}{5}(2)^{k-1} \quad S_{17} = \frac{0.6(1-2^{17})}{1-2} = 78642.6$

⑮ $\sum_{k=1}^{20} \left(\frac{7}{2}\right)^{k-1}$
$S_{20} = \frac{1-(3.5)^{20}}{1-3.5} \approx 30438334006 \approx 3 \times 10^{10}$

⑯ $\sum_{k=1}^{9} 3(0.3)^{k-1} \quad S_9 = \frac{3(1-(0.3)^9)}{1-0.3} \approx 4.29$

⑰ $\sum_{k=1}^{15} 5(6)^{k-1}$
$S_{15} = \frac{5(1-6^{15})}{1-6} = 470184984575 \approx 4.7 \times 10^{11}$

⑱ $\sum_{k=1}^{12} (0.1)^{k-1} \quad S_{12} = \frac{1-(0.1)^{12}}{1-0.1} \approx 1.11$

⑲ **علوم:** بدأت ليلى تجربتها في مختبر العلوم باستعمال 600 خلية بكتيرية. وقد لاحظت أنَّ عدد الخلايا البكتيرية يتزايد بنسبة ثابتة مقدارها 135% كل ساعة. أجد عدد هذه الخلايا بعد 4 ساعات.

$a_1 = 600$
$r = 2.35$
$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, \ldots$

المطلوب هو الحد الخامس في هذه المتتالية الهندسية.
$a_5 = 600(2.35)^4 \approx 18299$

30

الدرس 4

المتسلسلات الهندسية اللانهائية

Infinite Geometric Series

الوحدة 6: المتتاليات والمتسلسلات

أجد المجاميع الجزئية S_n لِقِيَم n الصحيحة، حيث: $1 \le n \le 5$ لكلٍّ من المتسلسلات الآتية، ثم أُمثِّلها بيانيًّا:

(1–6): أنظر ملحق الإجابات.

① $192 + 48 + 12 + 3 + \ldots$

② $2 + 10 + 50 + 250 + \ldots$

③ $1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{81} + \frac{1}{729} + \ldots$

④ $2 + \frac{2}{5} + \frac{2}{25} + \frac{2}{125} + \ldots$

⑤ $8 - 8 + 8 - 8 + \ldots$

⑥ $1029 + 147 + 21 + 3 + \ldots$

أُحدِّد إذا كانت المتسلسلات الآتية متقاربة أم متباعدة، ثم أجد المجموع للمتقاربة منها: (7–12): أنظر الهامش.

⑦ $1 + \frac{5}{3} + \frac{25}{9} + \frac{125}{27} + \ldots$

⑧ $3 + 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \ldots$

⑨ $\frac{2}{7} - \frac{1}{7} + \frac{1}{14} - \frac{1}{28} + \ldots$

⑩ $297 + 99 + 33 + 11 + \ldots$

⑪ $64 + 32 + 16 + 8 + \ldots$

⑫ $2 + 2.5 + 3.125 + 3.90625 + \ldots$

أكتب كُلًّا من الأعداد العشرية الدورية الآتية في صورة كسر عادي: (13–18): أنظر ملحق الإجابات.

⑬ $0.\overline{32}$

⑭ $0.\overline{09}$

⑮ $0.\overline{8}$

⑯ $0.\overline{44}$

⑰ $0.\overline{92}$

⑱ $0.\overline{5}$

⑲ **كراسي:** حرَّك يوسف كرسيًّا هزّازًا مرَّة واحدة، وقد لاحظ أنَّ قاعدة الكرسي المُقوَّسة مثَّلت مسافة 1.1 m أول مرَّة، ثم مثَّلت في كل مرَّة تالية ما نسبته 68% من المسافة التي مثَّلتها في المرَّة التي سبقتها. أجد مجموع المسافات التي مثَّلتها قاعدة الكرسي الهزّاز في هذه الأثناء حتى توقَّف عن الحركة بصورة كاملة. أنظر الهامش.

31

كتاب التمارين – إجابة أسئلة الدرس (4):

7) متباعدة؛ لأنَّ: $|r| = \frac{5}{3} > 1$؛ أيْ لا يُمكِن جمع حدودها إلى ما لا نهاية.

8) متقاربة؛ لأنَّ: $|r| = \frac{1}{3} < 1$؛ $S_\infty = 4.5$

9) متقاربة؛ لأنَّ: $|r| = \frac{1}{2} < 1$؛ $S_\infty = \frac{4}{21}$

10) متقاربة؛ لأنَّ: $|r| = \frac{1}{3} < 1$؛ $S_\infty = 445.5$

11) متقاربة؛ لأنَّ: $|r| = \frac{1}{2} < 1$؛ $S_\infty = 128$

12) متباعدة؛ لأنَّ: $|r| = 1.25 > 1$؛ أيْ لا يُمكِن جمع حدودها إلى ما لا نهاية.

19) $a_1 = 1.1$

$r = 0.68$

$$\sum_{k=1}^{\infty} 1.1(0.68)^{k-1} = \frac{1.1}{1-0.68} = \frac{1.1}{0.32} = \frac{110}{32} = 3.4375 \text{ m}$$

الدرس 1 – إجابة الأسئلة في بند (أتدرَّب وأحل المسائل):

7) $3+4+5+6+7=25$

8) $\sum_{k=1}^{10} k^2 - \sum_{k=1}^{10} 1 = \frac{10(10+1)(2\times10+1)}{6} - 10\times1 = 375$

9) -200

10) $\frac{5(5+1)}{2} = 15$; OR: $1+2+3+4+5=15$

11) $4+7+10+13=34$; OR: $3\times\frac{4(4+1)}{2}+4\times1=34$

12) $55\times9=495$

14)

المتسلسلة هي: $2+6+10+\dots$

حدها العام هو: $a_k = 4k-2$

وتُكتَب باستعمال رمز المجموع على النحو الآتي: $\sum_{k=1}^{n}(4k-2)$

15) الحد العام لمتسلسلة الضغطات التي يؤدّيها هيثم في الأسبوع هو:

$$a_k = 10k+15$$

عدد الضغطات التي يُمكِنه أداؤها في الأسبوع السادس عشر هو:

$$a_{16} = 10(16)+15 = 175$$

16) أخطأت ولاء في طريقة التعويض في قاعدة الحد العام.

$$\sum_{k=1}^{5}(2k+7) = (2\times1+7)+(2\times2+7)+(2\times3+7)$$
$$+(2\times4+7)+(2\times5+7)$$
$$=9+11+13+15+17=65$$

17) المختلفة هي: $\sum_{i=0}^{5} i^2$

لأنَّ مجموعها هو 55، في حين أنَّ القِيَم الثلاث الأُخرى هي 91

18) $\sum_{k=1}^{n} c = c+c+c+c+\dots+c$ (مَرَّة n)

$$= n\times c$$

الدرس 3 – إجابة الأسئلة في بند (أتدرَّب وأحل المسائل):

25) $\frac{a_5}{a_2} = \frac{r^4}{r} = r^3 \Rightarrow \frac{-768}{12} = r^3 \Rightarrow r^3 = -64 \Rightarrow r = -4$

$a_2 = a_1 r \Rightarrow 12 = -4a_1 \Rightarrow a_1 = -3$

$a_n = -3(-4)^{n-1}$

26) $S_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1}$

$-rS_n = -ar - ar^2 - \ldots - ar^{n-1} - ar^n$

بالجمع، فإنَّ:

$$S_n - rS_n = a - ar^n$$
$$S_n(1-r) = a(1-r^n)$$
$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r},\ r\neq1$$

الدرس 4 – إجابة الأسئلة في بند (أتحقَّق من فهمي 1):

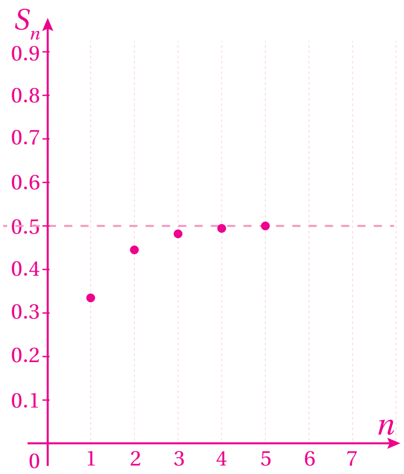
a) $S_1 = \frac{1}{3}$

$S_2 = \frac{1}{3}+\frac{1}{9} = \frac{4}{9}$

$S_3 = \frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27} = \frac{13}{27}$

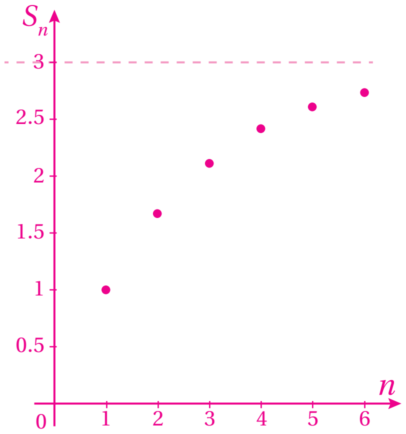
$S_4 = \frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81} = \frac{40}{81}$

$S_5 = \frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}+\frac{1}{243} = \frac{121}{243}$



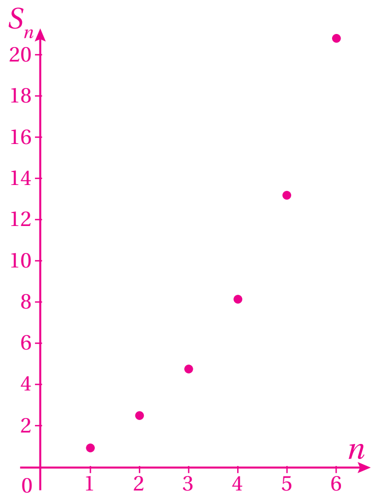
3) $S_1 = 1; S_2 = 1\frac{2}{3}; S_3 = 2\frac{1}{9};$

$S_4 = 2\frac{11}{27}; S_5 = 2\frac{49}{81}; S_6 = 2\frac{179}{243}$



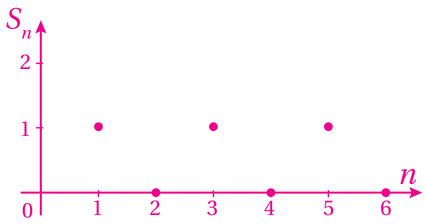
4) $S_1 = 1; S_2 = 2.5; S_3 = 4.75;$

$S_4 = 8.125; S_5 = 13.1875; S_6 = 20.78125$



5) $S_1 = 1; S_2 = 0; S_3 = 1;$

$S_4 = 0; S_5 = 1; S_6 = 0$



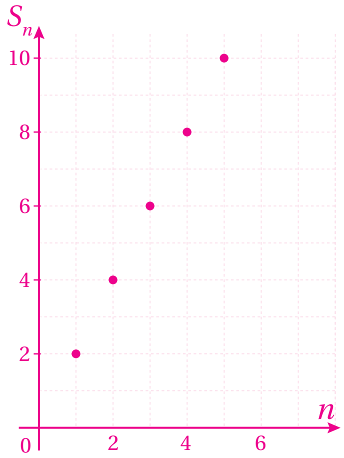
b) $S_1 = 2$

$S_2 = 2 + 2 = 4$

$S_3 = 2 + 2 + 2 = 6$

$S_4 = 2 + 2 + 2 + 2 = 8$

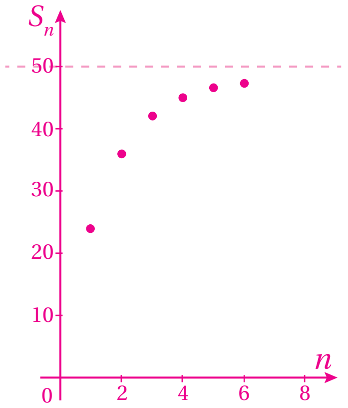
$S_5 = 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 10$



الدرس 4 – إجابة الأسئلة في بند (أتدرَّب وأحل المسائل):

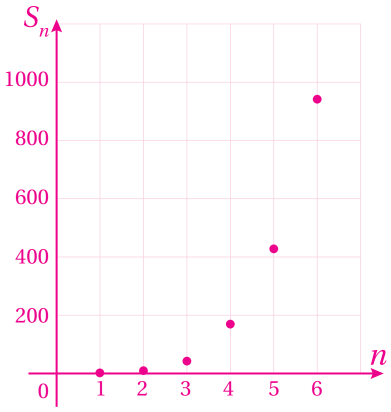
1) $S_1 = 24; S_2 = 36; S_3 = 42;$

$S_4 = 45; S_5 = 46.5; S_6 = 47.25$



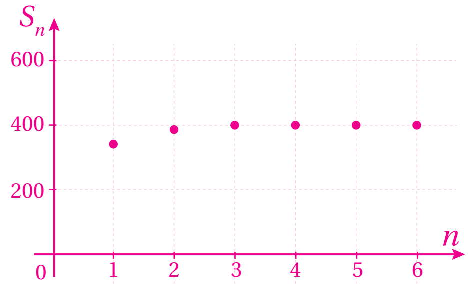
2) $S_1 = 2; S_2 = 10; S_3 = 42;$

$S_4 = 170; S_5 = 426; S_6 = 938$



6) $S_1 = 343; S_2 = 392\,; S_3 = 399\,;$

$S_4 = 400\,; S_5 = 400\,\frac{1}{7}\,; S_6 = 400\,\frac{8}{49}$



7) متقاربة؛ لأنَّ: $|r| = \frac{3}{4} < 1$؛ $S_\infty = 4$

8) متباعدة؛ لأنَّ: $|r| = \frac{7}{6} > 1$؛ أيْ لا يُمكِن جمع حدودها إلى ما لا نهاية.

9) متقاربة؛ لأنَّ: $|r| = \frac{1}{3} < 1$؛ $S_\infty = 3.75$

10) متقاربة؛ لأنَّ: $|r| = 0.1 < 1$؛ $S_\infty = \frac{100}{9}$

11) متقاربة؛ لأنَّ: $|r| = \frac{1}{4} < 1$؛ $S_\infty = 256$

12) متقاربة؛ لأنَّ: $|r| = 0.35 < 1$؛ $S_\infty = \frac{20}{13}$

20) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} 20(0.7)^n$

$= \frac{14}{1-0.7} = \frac{14}{0.3} = \frac{140}{3}\text{ m}$

21) $a_1 = 12$

$r = 0.75$

$S_\infty = \frac{12}{1-0.75} = \frac{12}{0.25} = \frac{1200}{25} = 48$

إذن، تدور المروحة 48 دورة قبل أنْ تتوقَّف عن الدوران بصورة كاملة.

22) $a_1 = 8$

$r = 0.98$

$S_\infty = \frac{8}{1-0.98} = \frac{8}{0.02} = \frac{800}{2} = 400$

إذن، يعمل هذا الشاحن مُدَّة 400 ساعة قبل أنْ يتعطَّل بصورة كلية.

24) ستختلف إجابات الطلبة.

إجابة مُحتمَلة: $4 + \frac{4}{3} + \frac{4}{9} + \frac{4}{27} + \cdots$

$$S_\infty = \frac{4}{1-\frac{1}{3}} = \frac{4}{\frac{2}{3}} = 4 \times \frac{3}{2} = 6$$

25) $a_3 = ar^2 = 4 \Rightarrow r = \pm\frac{2}{\sqrt{a}}$

$$S_\infty = \frac{a}{1-\left(\pm\frac{2}{\sqrt{a}}\right)} = \frac{a}{\frac{\sqrt{a}\mp 2}{\sqrt{a}}} = \frac{a\sqrt{a}}{\sqrt{a}\mp 2}$$

إذا كانت $r < 0$، فإنَّ: $S_\infty = \frac{a\sqrt{a}}{\sqrt{a}+2}$،

وإذا كانت $r > 0$، فإنَّ: $S_\infty = \frac{a\sqrt{a}}{\sqrt{a}-2}$.

كتاب التمارين – إجابة أسئلة الدرس (4):

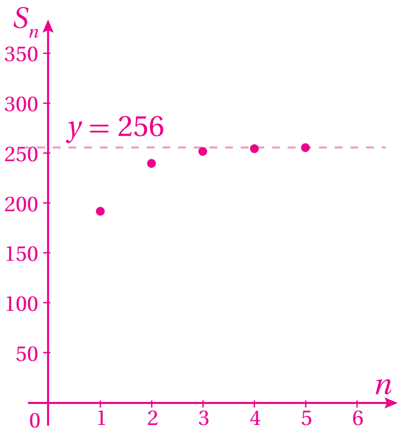
1) $S_1 = 192$

$S_2 = 192 + 48 = 240$

$S_3 = 240 + 12 = 252$

$S_4 = 252 + 3 = 255$

$S_5 = 255 + \frac{3}{4} = 255.75$



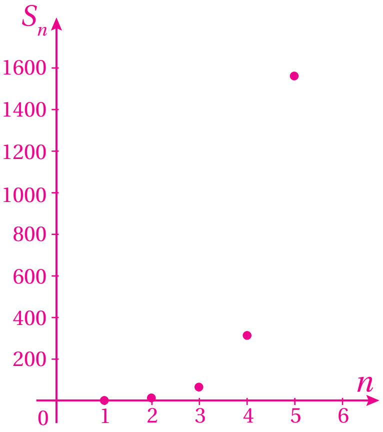
2) $S_1 = 2$

$S_2 = 2 + 10 = 12$

$S_3 = 12 + 50 = 62$

$S_4 = 62 + 250 = 312$

$S_5 = 312 + 1250 = 1562$



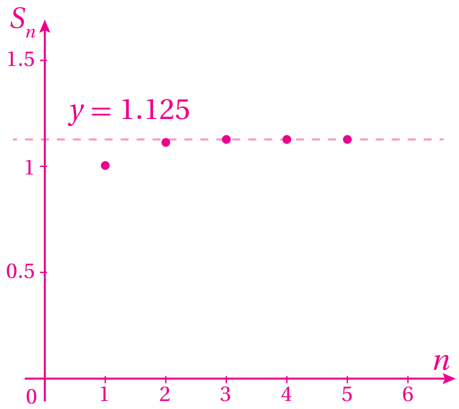
3) $S_1 = 1$

$S_2 = 1 + \frac{1}{9} \approx 1.111$

$S_3 \approx 1.111 + \frac{1}{81} \approx 1.1233$

$S_4 \approx 1.1223 + \frac{1}{729} \approx 1.1247$

$S_5 \approx 1.1237 + \frac{1}{6561} \approx 1.1249$



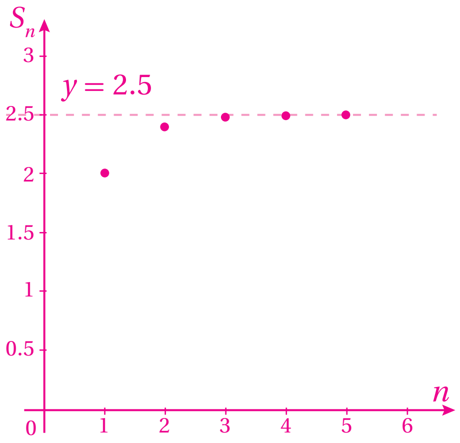
4) $S_1 = 2$

$S_2 = 2 + \frac{2}{5} = 2.4$

$S_3 = 2.4 + \frac{2}{25} = 2.48$

$S_4 = 2.48 + \frac{2}{125} = 2.496$

$S_5 = 2.496 + \frac{2}{625} = 2.4992$



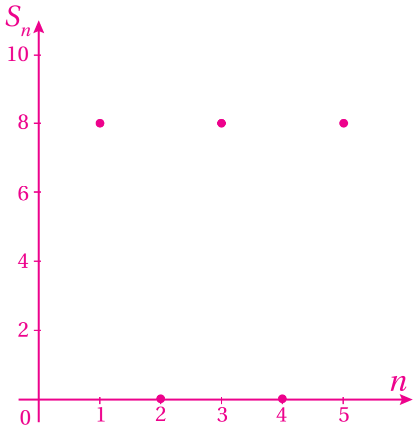
5) $S_1 = 8$

$S_2 = 8 - 8 = 0$

$S_3 = 0 + 8 = 8$

$S_4 = 8 - 8 = 0$

$S_5 = 0 + 8 = 8$



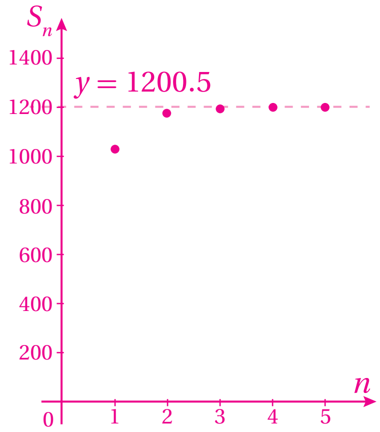
6) $S_1 = 1029$

$S_2 = 1029 + 147 = 1176$

$S_3 = 1176 + 21 = 1197$

$S_4 = 1197 + 3 = 1200$

$S_5 = 1200 + \frac{3}{7} \approx 1200.429$



13) $0.\overline{32} = 0.323232\ldots = 0.32+0.0032+0.000032+\cdots$

$= \frac{0.32}{0.99} = \frac{32}{99}$

14) $0.\overline{09} = 0.090909\ldots = 0.09+0.0009+0.000009+\cdots$

$= \frac{0.09}{0.99} = \frac{9}{99} = \frac{1}{11}$

15) $0.\overline{8} = 0.8888\ldots = 0.8+0.08+0.008+0.0008+\cdots$

$= \frac{0.8}{0.9} = \frac{8}{9}$

16) $0.\overline{44} = 0.444444\ldots = 0.44+0.0044+0.000044+\cdots$

$= \frac{0.44}{0.99} = \frac{44}{99} = \frac{4}{9}$

17) $0.\overline{92} = 0.929292\ldots = 0.92+0.0092+0.000092+\cdots$

$= \frac{0.92}{0.99} = \frac{92}{99}$

18) $0.\overline{5} = 0.5555\ldots = 0.5+0.05+0.005+0.0005+\cdots$

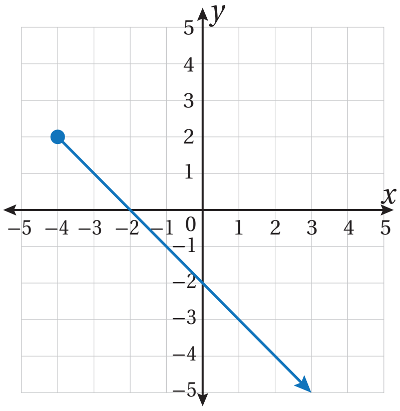
$= \frac{0.5}{0.9} = \frac{5}{9}$

أوراق المصادر

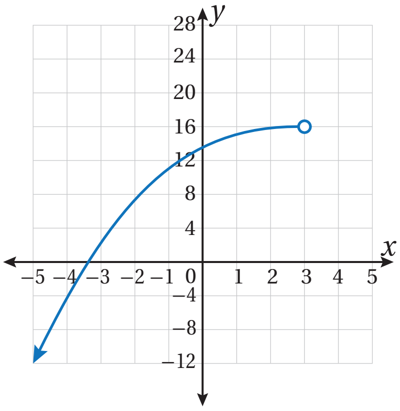
ورقة المصادر 1 : مجال الاقترانات ومداها

أجد المجال والمدى لكل اقتران ممّا يأتي:

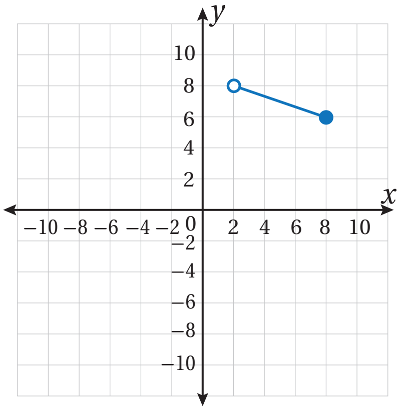
1



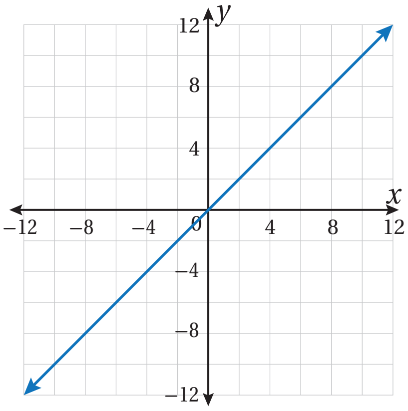
2



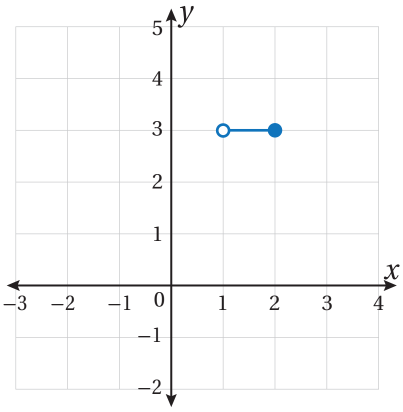
3



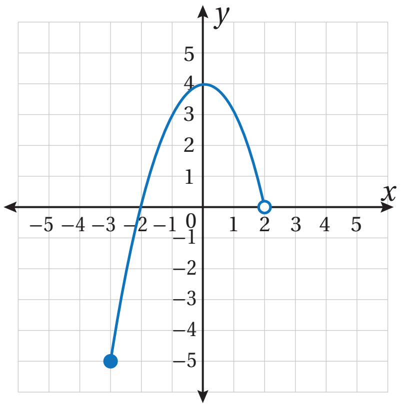
4



5



6



ورقة المصادر 2 : إيجاد قيمة اقتران عند نقطة

$f(x) = 1 - 2x,$	$x = -3$	7
$f(x) = x^2 - 5,$	$x = 1$	-4
$f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x + 1},$	$x = 0$	-1
$f(x) = 2 + \dfrac{9}{x + 4},$	$x = 5$	3
$f(x) = \lvert x - 9 \rvert + 2,$	$x = -4$	15
$f(x) = x^3 + 2x + 17,$	$x = -2$	5
$f(x) = \dfrac{18}{x^3 + 1},$	$x = 2$	2
$f(x) = \lvert x - 5 \rvert - 3,$	$x = 5$	-3

ورقة المصادر 3 : النقطة العظمى والنقطة الصغرى

يُبيِّن الشـــكل التالي منحنى الاقتران $f(x)$. أُحدِّد النقطة (النقاط) من بين مجموعة النقاط: $\{A, B, C, D, E, F\}$ على منحنى الاقتران، التي تُحقِّق كُلًّا ممّا يأتي:

1 النقطة الصغرى المحلية.

2 النقطة العظمى المحلية.

3 نقطة يكون عندها الميل سالبًا.

4 نقطة يكون عندها الميل موجبًا.