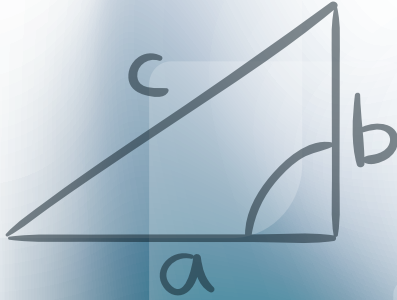


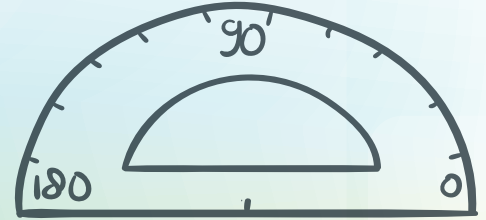
رياض ١٥٢

الرياضيات ٢

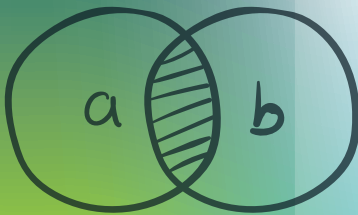
للمرحلة الثانوية



$$a + b = c$$



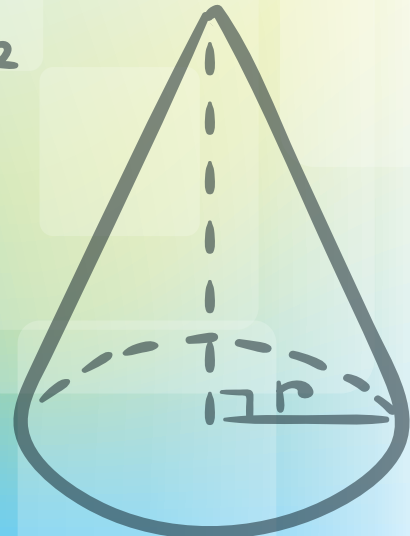
$$\frac{x}{y}$$



$$\sqrt{\frac{x_1 + x_2}{y}}$$

$$x_1 - x_2$$

$$\cos(-x) = \cos(x)$$



الرياضيات ٢

للمرحلة الثانوية

الطبعة الأولى

١٤٤٥ هـ - ٢٠٢٤ م

التأليف والتطوير

فريق متخصص من إدارة سياسات وتطوير المناهج بوزارة التربية والتعليم



حَضْرَةُ صَاحِبِ الْجَلَالِ الْمَلِكِ حَمْدُ بْنُ عَيْشَى الْخَلِيفَةِ
مَلِكِ مَمْلَكَتِنَا الْبَحْرَيْنِ الْمِعْظَمِ

المقدمة

تعد مادة الرياضيات من المواد الدراسية الأساسية التي تهيئ للمتعلم فرص اكتساب مستويات عليا من الكفايات التعليمية؛ مما يتيح له تنمية قدرته على التفكير وحل المشكلات، ويساعده على التعامل مع مواقف الحياة وتلبية متطلباتها.

ومن منطلق الاهتمام الذي توليه مملكة البحرين، في ظل قيادة جلالة الملك حمد بن عيسى آل خليفة وحكومته الرشيدة، لتنمية الموارد البشرية، والوعي بأهمية دورها في تحقيق التنمية الشاملة، كان توجه وزارة التربية والتعليم نحو تطوير المناهج الدراسية، وفي مقدمتها مناهج الرياضيات بدءاً من المرحلة الابتدائية؛ سعياً إلى تطوير مخرجات التعليم، والارتقاء بها إلى مستوى من الجودة يتوافق مع أرقى المعايير الدولية.

ومن أجل ذلك جرى التعاون مع مكتب التربية العربي لدول الخليج لتأليف كتب جديدة تعتمد على الموازنة بين ما تتضمنه مناهج الرياضيات المطورة في مملكة البحرين والتوجهات العالمية في تدريس هذه المادة.

وتتميز هذه الكتب بأنها تتناول المادة بأساليب حديثة، تتوافر فيها عناصر الجذب والتشويق التي تجعل المتعلم يُقبل على تعلمها، ويتفاعل معها عبر ما تقدمه من تدريبات وأنشطة متنوعة؛ ليخرج من ضيق التلقي إلى رحابة التفاعل النشط، والمشاركة الفعالة في المواقف التعليمية، كما تؤكد هذه الكتب جوانب مهمة في تعليم الرياضيات وتعلمها، وأبرزها ما يأتي :

- الترابط الوثيق بين محتوى الرياضيات والحاجة إلى توظيفها في المواقف والمشكلات الحياتية.
- التنوع والتشويق في طرائق عرض المحتوى مع الحرص على إخراجها فنياً جذاباً.
- تعزيز دور المتعلم في عمليات التعليم والتعلم.
- الاهتمام بالمهارات الرياضية التي تعمل على ترابط أبعاد المحتوى الرياضي وتجعل منه كلاً متكاملًا.
- التركيز في تنفيذ خطوات أسلوب حل المشكلات، وتوظيفها في معالجة المشكلات الرياضية والحياتية وحلّها.
- التشجيع على توظيف تكنولوجيا الاتصال والتعلم في المواقف الرياضية المختلفة.
- التنوع في توظيف أساليب تقويم المتعلمين بما يتناسب مع الفروق الفردية بينهم.

وفي إطار هذا النهج المواكب للتطورات العالمية، توفر المناهج المطورة والكتب الجديدة للمتعلم، مجموعة متكاملة من المواد التعليمية المتنوعة التي تراعي الفروق الفردية بين المتعلمين، بالإضافة إلى المواقع التعليمية التي تُتيح لهم فرصة توظيف التقنيات الحديثة، والتواصل المبني على الممارسة؛ تأكيداً لدورهم في عملية التعليم والتعلم.

ونحن، إذ نقدم هذا الكتاب إلى أعزائنا الطلبة، لنأمل أن تُتيح لهم مادته فرصاً حقيقية لتعلم ممتع مفيد، يجعلهم قادرين على مواكبة عصرهم والوفاء بمتطلبات حياتهم.

والله ولي التوفيق.

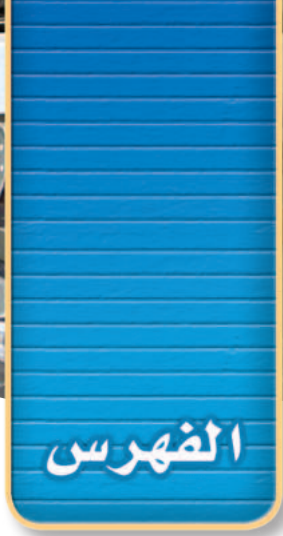
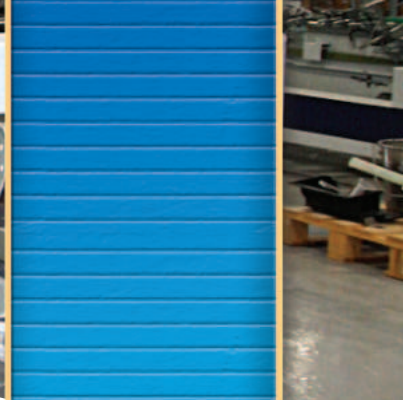
توزيع مفردات محتوى مساق رياض ١٥٢

مفردات محتوى مساق رياض ١٥٢

المفردات	الفصل 2
التهيئة للفصل الثاني	المثلثات القائمة وحساب المثلثات
1-2 المسافة ونقطة المنتصف	
توسّع 1-2 معمل الهندسة: الإحداثيات في الفضاء	
2-2 الوسط الهندسي	
توسّع 2-2 معمل الهندسة: المثلثات القائمة الخاصة	
2-3 حساب المثلثات	
2-4 زوايا الارتفاع والانخفاض	
2-5 قانون الجيب وقانون جيب التمام	
توسّع 2-5 معمل الهندسة المحسوب: الحالة المبهمه لقانون الجيب	

المفردات	الفصل 1
التهيئة للفصل الأول	المصفوفات
1-1 مقدمة في المصفوفات	
توسّع 1-1 معمل الجداول الإلكترونية: تنظيم البيانات	
1-2 العمليات على المصفوفات	
1-3 ضرب المصفوفات	
1-4 المحدّات وقاعدة كرامر	
توسّع 1-4 معمل الآلة الحاسبة البيانية: المصفوفات الموسّعة	

المفردات	الفصل 3
التهيئة للفصل الثالث	الدائرة
3-1 الدائرة ومحيطها	
3-2 قياس الزوايا والأقواس	
3-3 الأقواس والأوتار	
3-4 الزوايا المحيطية	
3-5 المماسات	
توسّع 3-5 معمل الهندسة: الدوائر المحاطة بمثلث والدوائر المحيطة بمثلث	
3-6 معادلة الدائرة	



المصفوفات

الفصل
1

11	التهيئة للفصل الأول
12	1-1 مقدمة في المصفوفات
19	1-1 توسع 1-1 معمل الجداول الالكترونية : تنظيم البيانات
20	1-2 العمليات على المصفوفات
26	1-3 ضرب المصفوفات
34	اختبار منتصف الفصل
35	1-4 المحددات وقاعدة كرامر
43	1-4 توسع 1-4 معمل الآلة الحاسبة البيانية : المصفوفات الموسعة
44	دليل الدراسة والمراجعة
47	اختبار الفصل
48	التهيئة للاختبارات المعيارية
50	اختبار معياري تراكمي

المثلثات القائمة وحساب المثلثات

الفصل
2

53	التهيئة للفصل الثاني
54	2-1 المسافة ونقطة المنتصف
65	2-1 توسع 2-1 معمل الهندسة : الإحداثيات في الفضاء
67	2-2 الوسط الهندسي
76	2-2 توسع 2-2 معمل الهندسة : المثلثات القائمة الخاصة
77	اختبار منتصف الفصل
78	2-3 استكشاف 2-3 معمل الآلة الحاسبة البيانية : حساب المثلثات
79	2-3 حساب المثلثات
90	2-4 زوايا الارتفاع والانخفاض
98	2-5 قانون الجيب وقانون جيب التمام
108	2-5 توسع 2-5 معمل الهندسة المحسوب : الحالة المبهمة لقانون الجيب



الفهرس

109	دليل الدراسة والمراجعة
113	اختبار الفصل
114	التهيئة للاختبارات المعيارية
116	اختبار معياري

الدائرة



119	التهيئة للفصل الثالث
120	3-1 الدائرة ومحيطها
129	3-2 قياس الزوايا والأقواس
138	3-3 الأقواس والأوتار
146	اختبار منتصف الفصل
147	3-4 الزوايا المحيطية
155	3-5 المماسات
163	توسّع 3-5 معمل الهندسة: الدوائر المحاطة بمثلث والدوائر المحيطة بمثلث
164	3-6 معادلة الدائرة
170	دليل الدراسة والمراجعة
174	اختبار الفصل
175	التهيئة للاختبارات المعيارية
177	اختبار معياري تراكمي
180	الصيغ والرموز

فيما سبق

درست حل نظام من المعادلات .

والآن

الأفكار العامة

- أنظم البيانات في مصفوفة.
- أجري العمليات على المصفوفات، وأجد قيمة المحددات.
- أحل نظاماً من المعادلات باستعمال قاعدة كرامر.

لماذا؟

تنظيم البيانات غالباً

ما تستعمل المصفوفات لتنظيم البيانات، فمثلاً: إذا نُظِمَت الطلبة المشاركون في الألعاب الرياضية المختلفة من مدرستين ثانويتين في مصفوفات مختلفة، فإن أعداد جميع الطلبة المشاركين في هذه الألعاب يمكن الحصول عليها بجمع المصفوفات.

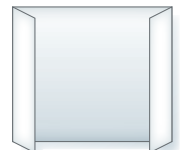
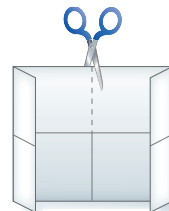
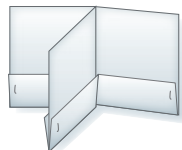


منظم أفكار

مطويتك

المصفوفات: اعمل هذه المطوية؛ لتساعدك في تنظيم ملاحظتك في الفصل 1، مبتدئاً بورقة من دفتر الملاحظات.

- 1 اثن حافة الورقة بعرض 2cm بموازة الضلعين القصيرين.
- 2 اطو الورقة الناتجة إلى أرباع، ثم قص كما في الشكل.
- 3 أعد الطي، ثم ثبّت الجيوب مستعملاً الدباسة.
- 4 اكتب على كل جيب عنواناً لدرس من دروس الفصل.



التهيئة للفصل الأول

أجب عن الاختبار الآتي، وارجع إلى "المراجعة السريعة" لمساعدتك في ذلك.

مراجعة سريعة

مثال 1

أوجد كلاً من النظير الجمعي والضربي للعدد -5:

النظير الجمعي للعدد -5 هو العدد x ، بحيث إن

$$x + (-5) = 0$$

النظير الضربي للعدد -5 هو العدد x ، حيث إن $-5x = 1$ ؛

$$x = -\frac{1}{5}$$

مثال 2

بسّط التعبير $\frac{3}{4}(8x - 4) + 3x$:

$$\frac{3}{4}(8x - 4) + 3x$$

$$= \frac{3}{4}(8x) - \frac{3}{4}(4) + 3x$$

$$= 6x - 3 + 3x$$

$$= 9x - 3$$

خاصية التوزيع

بالتبسيط

بجمع الحدود المتشابهة

مثال 3

حلّ نظام المعادلتين الآتي بطريقة التعويض أو الحذف:

$$3y = x - 9$$

$$4x + 5y = 2$$

بما أن معامل x في المعادلة الأولى هو 1، فاستعمل طريقة

التعويض. أولاً: حلّ المعادلة بالنسبة إلى المتغير x .

$$3y = x - 9 \rightarrow x = 3y + 9$$

$$4(3y + 9) + 5y = 2$$

$$12y + 36 + 5y = 2$$

$$17y = -34$$

$$y = -2$$

بتعويض $3y + 9$ بدلاً من x

خاصية التوزيع

بجمع الحدود المتشابهة

بقسمة الطرفين على 17

ولإيجاد قيمة x ، استعمل $y = -2$ في المعادلة الأولى.

$$3(-2) = x - 9$$

$$-6 = x - 9$$

$$3 = x$$

بالتعويض عن y بـ -2

بالضرب

بإضافة 9 لكلا الطرفين

إذن الحل هو $(3, -2)$.

اختبار سريع

أوجد النظير الجمعي والضربي لكل عدد

مما يأتي: (مهارة سابقة)

$$(1) \quad 4$$

$$(3) \quad 0.2$$

$$(5) \quad -\frac{3}{4}$$

$$(2) \quad -15$$

$$(4) \quad -1.35$$

$$(6) \quad 2\frac{1}{3}$$

بسّط كل تعبير مما يأتي: (مهارة سابقة)

$$(7) \quad 6(x + 2y)$$

$$(8) \quad 4(x + 5) - 3$$

$$(9) \quad -4(3x) - (7x - 6)$$

$$(10) \quad 5(2x - 5) - \frac{1}{3}(4x + 1)$$

$$(11) \quad 6(2x - 1) - 3(y - x) + 0.5(4x - 6)$$

حلّ نظام المعادلتين في كلٍّ مما يأتي بطريقة التعويض أو

الحذف: (مهارة سابقة)

$$(13) \quad 2x - 5y = -18$$

$$(12) \quad 2x - y = -1$$

$$3x + 4y = 19$$

$$y = x + 3$$

$$(15) \quad 4x + 2y = 4$$

$$(14) \quad 4y + 6x = -6$$

$$x = y - 8$$

$$5y - x = 35$$

(16) **هدايا:** توزّع مدرسة هدايا (حقائب وأقلامًا) كل

عام على المتفوقين، وقد بلغ إجمالي ثمنها هذا العام

BD 534، وكان سعر الحقيبة BD 30، وسعر القلم

BD 9، أمّا في العام السابق فبلغ إجمالي ثمن الهدايا

BD 448، وكان سعر الحقيبة BD 25، وسعر القلم

BD 8. اكتب نظامًا من معادلتين، ثم حلّه لتجد عدد

الحقائب والأقلام التي توزّعها المدرسة في كل عام، علمًا

بأن الحقائب والأقلام لها العدد نفسه في العامين.

مقدمة في المصفوفات

Introduction to Matrices

لماذا؟

حصل ناصر على عروض عدة؛ لشراء هاتف محمول وذلك بحسب النوع، وسعة الذاكرة، والسعر. وحتى يكون قادرًا على المقارنة بين العروض بنظم البيانات في مصفوفة كما يأتي:

النوع	سعة الذاكرة	السعر	
a	512	420	العرض الأول
b	512	399	العرض الثاني
c	256	315	العرض الثالث
d	128	289	العرض الرابع

تنظيم البيانات المصفوفة هي ترتيب على هيئة مستطيل لمتغيرات، أو أعداد في صفوف أفقية وأعمدة رأسية محصورة بين قوسين. وتنظم الأعداد أو البيانات في المصفوفة، بحيث يكون الموقع في المصفوفة ذا معنى. وتسمى كل قيمة في المصفوفة **عنصرًا**. ويرمز إلى المصفوفة عادة باستعمال الحروف الكبيرة.

$$A = \begin{bmatrix} 8 & -2 & 5 & 6 \\ -1 & 3 & -3 & 6 \\ 7 & -8 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

ثلاثة صفوف

العنصر -1 موجود في الصف 2، والعمود 1، ويرمز إليه بالرمز a_{21} .

العنصر -8 موجود في الصف 3، والعمود 2، ويرمز إليه بالرمز a_{32} .

4 أعمدة

يمكن تحديد نوع المصفوفة **برتبها**؛ فالمصفوفة المكونة من m صفًا و n عمودًا يُقال عنها: مصفوفة من الرتبة $m \times n$ أو من النوع $m \times n$ (تقرأ " m في n "). فالمصفوفة A في الأعلى هي مصفوفة من النوع 3×4 ، أو من الرتبة 3×4 ؛ لأنها تحتوي على 3 صفوف، و 4 أعمدة. إذا كان لدينا مصفوفتان A و B فإن الرمز a_{12} يدل على عنصر في المصفوفة A ، في حين يدل الرمز b_{12} على عنصر في المصفوفة B . وبشكل عام، يدل الرمز a_{ij} على العنصر في الصف i والعمود j .

رتبة المصفوفة وعناصرها

مثال 1

استعمل المصفوفة $A = \begin{bmatrix} -18 & 6 & 38 \\ 9 & -9 & 22 \end{bmatrix}$ ؛ للإجابة عما يأتي:

(b) ما قيمة العنصر a_{21} ؟

$$\begin{bmatrix} -18 & 6 & 38 \\ 9 & -9 & 22 \end{bmatrix}$$

صف 2

عمود 1

بما أن العنصر a_{21} موجود في الصف 2، والعمود 1، فإن قيمته هي 9.

(a) حدّد رتبة المصفوفة A .

$$\left\{ \begin{bmatrix} -18 & 6 & 38 \\ 9 & -9 & 22 \end{bmatrix} \right\}$$

3 أعمدة

بما أن A فيها صفان و 3 أعمدة، فإن رتبها 2×3 .

تأكد

استعمل المصفوفة $B = \begin{bmatrix} 10 & -8 \\ -2 & 19 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}$ ؛ للإجابة عما يأتي:

(1B) ما قيمة العنصر b_{32} ؟

(1A) ما رتبة المصفوفة B ؟

فيما سبق

درست حلّ مسائل باستعمال تنظيم البيانات في جداول.

والآن

الأفكار الرئيسية

- أنظم بيانات في مصفوفة.
- أستعمل العمليات على المصفوفات؛ لتحليل البيانات.

المفردات الأساسية

المصفوفة

matrix

العنصر

element

رتبة المصفوفة

matrix dimension

مصفوفة الصف

row matrix

مصفوفة العمود

column matrix

المصفوفة المربعة

square matrix

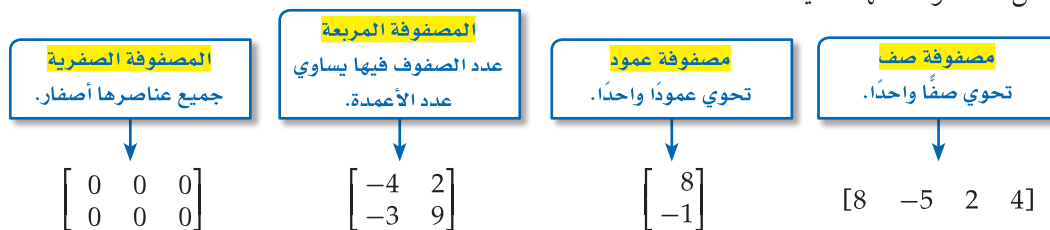
المصفوفة الصفريّة

zero matrix

المصفوفات المتساوية

equal matrices

بعض المصفوفات لها تسميات خاصة.



تكون **المصفوفتان متساويتين** إذا كانتا من الرتبة نفسها ، وتساوت عناصرهما المتناظرة.

$$\begin{bmatrix} 5 & 6 & 0 \\ 0 & 7 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 0 \\ 0 & 7 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 6 & -5 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 4 & -5 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 6 & 3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ -3 & 6 & 5 \end{bmatrix}$$

المصفوفتان متساويتان.

ليست جميع العناصر
المتناظرة متساوية.

المصفوفتان لهما رتبتان
مختلفتان.

إرشادات للدراسة

العناصر المتناظرة

يدل التناظر على
العناصر التي تقع
بالضبط في الموقع
نفسه من كل مصفوفة.

مثال 2 حلّ معادلات تحتوي مصفوفات

$$\begin{bmatrix} 6-2x \\ 31+4y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ 3x \end{bmatrix} \text{ حُلّ}$$

بما أن المصفوفتين متساويتان، فإن العناصر المتناظرة فيهما متساوية، ونحصل على المعادلتين:

$$y = 6 - 2x$$

$$3x = 31 + 4y$$

يمكن حل هذا النظام من المعادلات بطريقة التعويض:

$$3x = 31 + 4y \quad \text{المعادلة الثانية}$$

$$3x = 31 + 4(6 - 2x) \quad \text{بالتعويض عن } y \text{ بـ } 6 - 2x$$

$$3x = 31 + 24 - 8x \quad \text{خاصية التوزيع}$$

$$11x = 55 \quad \text{بإضافة } 8x \text{ إلى الطرفين}$$

$$x = 5 \quad \text{بقسمة الطرفين على 11}$$

لإيجاد قيمة y ، عوض عن x بـ 5 في أيٍّ من المعادلتين:

$$y = 6 - 2x \quad \text{المعادلة الأولى}$$

$$y = 6 - 2(5) \quad \text{بالتعويض عن } x \text{ بـ } 5$$

$$y = -4 \quad \text{بالتبسيط}$$

الحل هو $(5, -4)$.

تأكد



$$\begin{bmatrix} 5x+2 & y-4 \\ 0 & 4z+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & -8 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ حُلّ (2)}$$

مثال 3 من واقع الحياة

تنظيم البيانات في مصفوفة

كرة القدم: رصد مدرب فريق المدرسة لكرة القدم إنجازات ثلاثة لاعبين في مباريات العام الدراسي؛ فكانت على النحو الآتي:

ياسر: 20 مباراة، 31 تسديدة،
20 تمريرة، 30 مرة قطع
الكرة، 4 أهداف.

ماجد: 18 مباراة، 43 تسديدة،
170 تمريرة، 40 مرة قطع
الكرة، 11 هدفًا.

معاذ: 12 مباراة، 24 تسديدة،
113 تمريرة، 15 مرة قطع
الكرة، 4 أهداف.

(a) نظم البيانات في مصفوفة، على أن تُرتب أسماء اللاعبين تنازليًا بحسب عدد التسديدات.

(b) حدّد رتبة المصفوفة، وما قيمة a_{23} ؟

	الأهداف	قطع الكرة	التمريرات	التسديدات	المباريات
ماجد	11	40	170	43	18
ياسر	4	30	20	31	20
معاذ	4	15	113	24	12

(b) هناك 3 صفوف، و 5 أعمدة؛ لذا فإن رتبة المصفوفة، 5×3 ، وقيمة العنصر a_{23} الموجود في الصف 2، والعمود 3 هي 20.

إرشادات للدراسة

عرض البيانات

يكون من الممكن أحياناً تبديل عناصر الصفوف، وعناصر الأعمدة في المصفوفات التي تُمثّل معلومات من واقع الحياة.

تأكد

كبيرة وسط صغيرة

الجبن	0.25	0.35	0.5
الزعر	0.2	0.3	0.4
البيض	0.3	0.4	0.55
اللحم	0.4	0.5	0.6

(3) يُبيّن الجدول المجاور الأسعار في أحد المطاعم بالدينار لأربعة أنواع من الفطائر بثلاثة أحجام.

(A) نظم هذه البيانات في مصفوفة، على أن تكون الأسعار مرتبة تصاعدياً.

(B) حدّد رتبة المصفوفة.

(C) ما قيمة العنصر a_{21} ؟

تحليل البيانات عند تنظيم البيانات في مصفوفة، يسهل تحليلها وتفسيرها. وتعطي مجاميع عناصر الصفوف أو الأعمدة أحياناً معلومات ذات معنى، وفي أحيان أخرى لا تعطي أية معلومات ذات معنى.

مثال 4

تحليل البيانات باستعمال المصفوفات

كرة قدم: إذا أراد مدرب فريق كرة القدم (في مثال 2) استعمال المصفوفة، للحصول على تحليلات إضافية لإحصائيات لاعبيه الثلاثة، فأجب:

(a) اجمع عناصر كل من العمودين 2 و 3 على حدة، وفسّر النتائج.

الأهداف	الكرة	التمريرات	التسديدات	المباريات
11	40	170	43	18
4	30	20	31	20
4	15	113	24	12

مجموع عناصر العمود 2 يساوي 98، وهو يُمثّل العدد الكلي لتسديدات اللاعبين في المباريات جميعها.

مجموع عناصر العمود 3 يساوي 303، وهو يُمثّل العدد الكلي لتمريرات اللاعبين في جميع المباريات.

(b) أراد المدرب تحديد معدل تسديد اللاعب في المباراة الواحدة، فقرر أن يجمع عناصر العمود 2، ويقسم المجموع على 3، فما الناتج؟
الناتج هو 33 تقريباً.

(c) هل هذه طريقة صحيحة لإيجاد المعدل؟ فسر إجابتك.
لا، ليس للاعبين العدد نفسه من المباريات؛ لذا فإن إيجاد معدل عناصر العمود 2 لن يحدد المعدل الدقيق للتسديدات، ويتعين على المدرب بدلاً من ذلك قسمة مجموع عناصر العمود 2 على مجموع عناصر العمود 1، ليكون المعدل الدقيق هو 1.96.

(d) هل جمع عناصر الصفوف يزود المدرب ببيانات ذات معنى؟ فسر إجابتك.
لا؛ لأن عناصر الصف تمثل خمسة أنواع مختلفة من البيانات.

تأكد

(4) يبيّن الجدول المجاور عدد المركبات القادمة إلى مملكة البحرين والمغادرة منها عبر جسر الملك فهد من 2007-2010 م.

السنة	القادمة	المغادرة
2007	3413943	3302441
2008	3807636	3810870
2009	3377762	3441221
2010	4169061	4602708

(A) نظّم البيانات في مصفوفة .

(B) اجمع عناصر كل عمود، وفسر النتائج.

(C) اجمع عناصر كل صف، وفسر النتائج.

(D) هل إيجاد معدل عناصر كل صف، أو عناصر كل عمود يعطي بيانات ذات معنى؟

تأكد من فهمك

مثال 1

صفحة 12

حدّد رتبة كل مصفوفة مما يأتي:

$$\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 9 \\ 17 & 21 \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \\ -7 \end{bmatrix} \quad (2) \quad \begin{bmatrix} 1 & 4 & -4 & 0 \\ -2 & 3 & 6 & -8 \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$\text{إذا كانت } A = \begin{bmatrix} 1 & -6 & x & -4 \\ -2 & 3 & -1 & 9 \\ 5 & -8 & 2 & 12 \end{bmatrix}, \text{ فحدّد قيمة كل عنصر مما يأتي:}$$

$$a_{24} \quad (7)$$

$$a_{33} \quad (6)$$

$$a_{11} \quad (5)$$

$$a_{32} \quad (4)$$

$$(8) \text{ حلّ المعادلة } [9 \quad 13] = [x + 2y \quad 4x + 1]$$

مثال 2

صفحة 13

(9) **زراعة:** يُبين الجدول المجاور عدد صناديق الخضراوات المنتجة في مزرعتين مختلفتين في أحد المواسم:

المزرعة	خيار	كوسا	بادنجان	طماطم
1	540	570	488	500
2	850	1015	800	820

(a) نظم البيانات في مصفوفة.

(b) ما النوع الأقل إنتاجًا؟

(c) اجمع عناصر كل صف، وهل لهذين الجمعيين معنى؟ فسّر إجابتك.

(d) اجمع عناصر كل عمود، وهل لهذه المجاميع معنى؟ فسّر إجابتك.

تدرب وحل المسائل

مثال 1
صفحة 12

حدّد رتبة كل مصفوفة مما يأتي:

$$(10) \begin{bmatrix} -9 & 6 \end{bmatrix} \quad (11) \begin{bmatrix} 15 & y \\ 8 & -9 \end{bmatrix} \quad (12) \begin{bmatrix} 6 & 11 & -4 & -2 \\ -8 & 5 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(13) \begin{bmatrix} 4 & -3 & -1 \\ x & 3y & 0 \\ 8 & 12 & 11 \end{bmatrix} \quad (14) \begin{bmatrix} 2 \\ x \\ -3 \end{bmatrix} \quad (15) \begin{bmatrix} 115 \end{bmatrix}$$

إذا كانت: $A = \begin{bmatrix} 6 & y \\ -9 & 31 \\ 11 & 5 \end{bmatrix}$ ، فحدّد قيمة كل عنصر مما يأتي:

$$(16) a_{21} \quad (17) b_{22} \quad (18) b_{13} \quad (19) a_{12}$$

مثال 2
صفحة 13

$$(20) \text{ حلّ المعادلة } \begin{bmatrix} 4x-3 & 3y \\ 7 & 13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & -15 \\ 7 & 2z+1 \end{bmatrix}$$

مثال 3
صفحة 14

نظم البيانات في الجدول أدناه في مصفوفة:

الاسم	الجولة 1	الجولة 2	الجولة 3	المجموع
إبراهيم	221	201	185	607
علي	168	233	159	560
أحمد	187	189	211	587

مثال 4
صفحة 15

(22) **تخزين:** يوجد ثلاثة مخازن لتوريد التمور؛ الأول فيه 2000 kg (خلاص)، و 1200 kg (برحي)، و 500 kg (سكري)، والثاني فيه 3000 kg (خلاص)، و 1175 kg (برحي)، و 2250 kg (سكري)، والثالث فيه 2750 kg (خلاص)، و 1500 kg (برحي)، و 1700 kg (سكري).

(a) نظم البيانات في مصفوفة، على أن تكون محتويات المخازن أعمدة المصفوفة.

(b) أوجد مجموع عناصر كل عمود، وماذا يُمثّل هذا المجموع؟

(c) أوجد مجموع عناصر كل صف، وماذا يُمثّل هذا المجموع؟

إذا كانت: $A = \begin{bmatrix} 23 & 11 \\ x & -5 \\ -12 & 15 \end{bmatrix}$ ، فحدّد قيمة كل عنصر مما يأتي:

a_{21} (26)

b_{12} (25)

b_{21} (24)

a_{32} (23)

الأحد	الاثنين	الثلاثاء	الأربعاء	الخميس
				
H 45	H 45	H 46	H 44	H 43
L 27	L 27	L 30	L 26	L 25

طقس: يوضح الجدول المجاور درجات الحرارة

العظمى (H) والصغرى (L) في مدينة ما خلال خمسة أيام من شهر أغسطس. استعمل هذا الجدول لحل الفرعين a, b:

(a) اكتب مصفوفة تمثل البيانات المعطاة.

(b) ما رتبة المصفوفة في الفرع a؟

إذا كانت: $A = \begin{bmatrix} x^2 + 4 & y + 6 \\ x - y & 2 - y \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 0 & x & -2y \\ 5x & 3y & -4x \\ -y & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ، فحدّد قيمة كل عنصر مما يأتي:

b_{23} (31)

b_{31} (30)

a_{22} (29)

a_{11} (28)

الكوكب	البعد عن الشمس (مليون ميل)	البعد عن الأرض (مليون ميل)
عطارد	36.00	57
الزهرة	67.24	26
المريخ	141.71	35
المشتري	483.88	370
زحل	887.14	744
أورانوس	1783.98	1607
نبتون	2796.46	2680

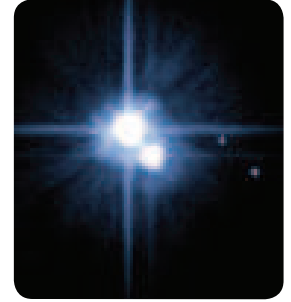
فلك: استعمل الجدول المجاور الذي

يبيّن بُعد بعض الكواكب عن الأرض والشمس؛ للإجابة عن الفروع a-c:

(a) نظّم البيانات في مصفوفة.

(b) ما رتبة المصفوفة الناتجة؟

(c) ما قيمة العنصر a_{42} ؟



الرابط مع واقع الحياة

بعد إعادة تعريف كلمة "كوكب" عام 2006، تبين أن بلوتو لم يعد يعتبر كوكباً. وهو أحد 40 كويكباً.

المصدر:

National Geographic

تمثيلات متعددة: ستستكشف في هذا التمرين تأثير قلب

الصفوف والأعمدة في المصفوفة.

(a) **جدولة:** نظّم البيانات في مصفوفة على أن تكون أسماء اللاعبين في صف.

(b) **جبري:** أوجد مجاميع عناصر كل عمود.

(c) **جدولة:** بدّل البيانات في المصفوفة على أن تصبح عناصر الأعمدة هي عناصر الصفوف.

(d) **جبري:** أوجد مجاميع عناصر كل صف.

(e) **تحليل:** هل هناك أي تأثير في البيانات عند تبديل عناصر الصفوف والأعمدة؟

الاسم	عدد التمريرات الحاسمة	عدد الأهداف
محمود	8	3
محسن	6	5
سلطان	1	8
عبدالله	4	2

مسائل مهارات التفكير العليا

تبرير: حدّد ما إذا كانت العبارة الآتية صحيحة أم خاطئة. وفّر إجابتك.

(34) المصفوفة C مربعة، ولها أربعة أعمدة، وتحتوي العنصر c_{53} .

(35) **اكتشف الخطأ:** حدّدت كلّ من ياسمين وسارة قيمة العنصر b_{32} في المصفوفة $B = \begin{bmatrix} -6 & 7 \\ 0 & 5 \\ 8 & 2 \end{bmatrix}$ هل توصلت إحداهما إلى الحل الصحيح؟ فّر إجابتك.

سارة

العنصر b_{32} غير موجود في المصفوفة B ؛ لأن B مصفوفة من النوع 2×3 .

ياسمين

قيمة العنصر b_{32} هي 5.

(36) **تحّد:** أوجد قيمة كلّ من المتغيرات x, y, z التي تحقق المعادلة:

$$\begin{bmatrix} 2x - y & 3x + 4z \\ 7x - 8z & 5y + 12z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9z - 5x + 1 & 5y - 2x \\ 3y - 4z & 12x + 2y \end{bmatrix}$$

(37) **مسألة مفتوحة:** كوّن مصفوفة باستعمال بيانات من واقع الحياة، بحيث تكون مجاميع عناصر أعمدتها ذات معنى، ومجاميع عناصر صفوفها ليست ذات معنى.

(38) **اكتب:** اشرح كيف يمكن أن تساعدك المصفوفات عندما تقرر اختيار الجامعة التي ترغب في الالتحاق بها.

تدريب على اختبار معياري

(39) نُظمت نتائج استطلاع للرأي في المصفوفة المجاورة:

بالاعتماد على هذه النتائج، أي استنتاج مما يأتي ليس صحيحاً؟

	مؤيد	ضد
المرشح الأول	1553	771
المرشح الثاني	689	1633
المرشح الثالث	2088	229

A هناك 771 صوتاً ضد المرشح الأول.

B عدد الأصوات المعارضة للمرشح الأول أكبر من عدد تلك المؤيدة للمرشح الثاني.

C فرصة المرشح الثاني للفوز ضئيلة.

D عدد الأصوات المؤيدة للمرشح الأول أكبر من عدد الأصوات المؤيدة للمرشح الثالث.

مراجعة المتطلبات السابقة

احسب قيمة كل تعبير مما يأتي إذا كان: $w = 3, x = -2, y = 4, z = 0.5$:

(42) $4[3(2z + y) - 2(w + x)]$

(41) $5w + 2(x - z) + 2y$

(40) $4x - 6y + 2z$

تنظيم البيانات

1-1

Organizing Data

تُستعمل **الجداول الإلكترونية** لتنظيم البيانات وعرضها وتحليلها، إذ يجري إدخالها في برنامج الجداول الإلكترونية في صفوف وأعمدة كما في المصفوفات. وبعد ذلك يمكن استعمالها لعمل الرسوم، أو إجراء الحسابات.

مثال

جمع محل لبيع التمور بيانات عن مبيعاته في أربعة أسابيع متتالية، ونظّمها في الجدول المجاور. أدخل البيانات في برنامج الجداول الإلكترونية .

مبيعات محل تمور خلال 4 أسابيع متتالية بالكيلوجرامات				
نوع التمر	1	2	3	4
خلاص	17	22	11	23
مكتومي	31	34	22	29
خضري	55	61	44	71
سلج	41	36	60	77
عجوة	23	29	19	44
سكري	8	18	19	31
منيقي	22	18	30	32
صقعي	26	16	31	39

استعمل العمود A للنوع، والعمود B لمبيعات الأسبوع الأول، والعمود C لمبيعات الأسبوع الثاني، والعمود D لمبيعات الأسبوع الثالث، والعمود E لمبيعات الأسبوع الرابع.

	A	B	C	D	E
1	خلاص	17	22	11	23
2	مكتومي	31	34	22	29
3	خضري	55	61	44	71
4	سلج	41	36	60	77
5	عجوة	23	29	19	44
6	سكري	8	18	19	31
7	منيقي	22	18	30	32
8	صقعي	26	16	31	39

يحتوي كل صف مبيعات النوع نفسه من التمور، ويمثل الصف 2 مبيعات التمر المكتومي.

تحتوي كل خلية في الجدول جزءاً واحداً من البيانات. إذ تحتوي الخلية D7 على القيمة 30، التي تمثل عدد الكيلوجرامات المباعة في الأسبوع الثالث من تمور منيقي.

تمارين:

- أدخل البيانات الواردة في فقرة "لماذا؟" في بداية الدرس في برنامج الجداول الإلكترونية.
- قارن بين تنظيم البيانات في الجداول الإلكترونية، وتنظيمها في المصفوفة.
- يمكنك إيجاد مجاميع مدخلات الصفوف أو الأعمدة في الجداول الإلكترونية باستعمال الأمر (SUM).
 - يمكنك إيجاد مجموع مدخلات العمود B باستعمال الصيغة =SUM(B1:B8). أدخل صيغاً مشابهة في الخلايا B9, C9, D9, E9 لتجد مجاميع مدخلات الأعمدة الأخرى. ماذا تمثل مجاميع مدخلات هذه الأعمدة؟
 - أدخل صيغاً مشابهة في الخلايا F1 حتى F8، لإيجاد مجاميع مدخلات الصفوف من 1 إلى 8. ماذا تمثل هذه المجاميع في هذه الحالة؟
 - أوجد مجموع مدخلات الصف 9، ومجموع مدخلات العمود F. ماذا تلاحظ؟ فسّر إجابتك.

العمليات على المصفوفات

Operations with Matrices

لماذا؟

لدى وكيل سيارات فروع في كلٍّ من المنامة والرياض وجدة، يتبع كلاً منها ثلاثة معارض. وتُبيّن المصفوفات أدناه معدل النفقات، والمبيعات الأسبوعية في معارض المناطق الثلاث:

	المنامة		الرياض		جدة	
	المبيعات	النفقات	المبيعات	النفقات	المبيعات	النفقات
المعرض الأول	122000	1700	145000	1900	109500	1050
المعرض الثاني	145500	1800	225000	2400	135000	1800
المعرض الثالث	160000	1800	290000	2700	150500	1800

جمع المصفوفات وطرحها يمكن جمع مصفوفتين، أو طرحهما إذا وفقط إذا كان لهما الرتبة نفسها.

مفهوم أساسي جمع المصفوفات وطرحها

أضف إلى
مطويتك

التعبير اللفظي إذا كانت A, B مصفوفتين من الرتبة $m \times n$ ، فإن $A + B$ هي مصفوفة أيضاً من الرتبة $m \times n$ ، ويكون كل عنصر فيها هو مجموع العنصرين المتناظرين في A و B ، وكذلك $A - B$ هي مصفوفة من الرتبة $m \times n$ أيضاً، وتحصل عليها بطرح العناصر المتناظرة.

$$A + B = A + B \quad \text{بالرموز}$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{bmatrix}$$

$$A - B = A - B$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a-e & b-f \\ c-g & d-h \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 1 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -9 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+2 & -5+0 \\ 1+(-9) & 7+10 \end{bmatrix} \quad \text{مثال}$$

فيما سبق

درستُ تنظيم البيانات في مصفوفات.

والآن

الأفكار الرئيسية

- أجمع المصفوفات وأطرحها.
- أضرب مصفوفة في عدد ثابت.

المفردات الأساسية

الضرب في ثابت
scalar multiplication

إرشادات للدراسة

إذا كان $A + B = C$ فإن $a_{ij} + b_{ij} = c_{ij}$.

مثال 1 جمع المصفوفات وطرحها

إذا كانت: $A = \begin{bmatrix} 16 & 2 \\ -9 & 8 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ -3 & -7 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \end{bmatrix}$ ، فأوجد كلاً مما يأتي إن أمكن:

(a) $A + B$

بالتعويض

$$A + B = \begin{bmatrix} 16 & 2 \\ -9 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ -3 & -7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 16 + (-4) & 2 + (-1) \\ -9 + (-3) & 8 + (-7) \end{bmatrix}$$

بجمع العناصر المتناظرة

$$= \begin{bmatrix} 12 & 1 \\ -12 & 1 \end{bmatrix}$$

بالتبسيط

(b) $B - C$

بالتعويض

$$B - C = \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ -3 & -7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \end{bmatrix}$$

بما أن المصفوفتين B, C لهما رتبتان مختلفتان، فلا يمكن إجراء عملية الطرح $B - C$.

تأكد

أوجد ناتج كلٍّ مما يأتي إن أمكن:

$$\begin{bmatrix} -9 & 8 & 3 \\ -2 & 4 & -7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & -3 & 6 \\ -9 & -5 & 18 \end{bmatrix} \quad (1B)$$

$$\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -9 & -5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -4 & 12 \\ 8 & -7 \end{bmatrix} \quad (1A)$$

الضرب في عدد حقيقي يمكن ضرب أي مصفوفة في ثابت، وهذا يعني ضرب كل عنصر من عناصر المصفوفة في ذلك الثابت. وتُسمى هذه العملية **الضرب في ثابت**.

مفهوم أساسي **الضرب في ثابت**

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي حاصل ضرب مصفوفة A من الرتبة $m \times n$ في ثابت k هو مصفوفة kA من الرتبة $m \times n$ ، وكل عنصر فيها يساوي العنصر المناظر له في المصفوفة A مضروباً في الثابت k .

بالرموز

$$k \cdot A = kA$$

$$k \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{bmatrix}$$

مثال

$$-3 \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 7 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3(4) & -3(1) \\ -3(7) & -3(-2) \end{bmatrix}$$

مثال 2 ضرب مصفوفة في ثابت

إذا كانت $R = \begin{bmatrix} -12 & 8 & 6 \\ -16 & 4 & 19 \end{bmatrix}$ ، فأوجد $5R$.

بالتعويض

$$5R = 5 \begin{bmatrix} -12 & 8 & 6 \\ -16 & 4 & 19 \end{bmatrix}$$

بضرب كل عنصر في المصفوفة في العدد 5

$$= \begin{bmatrix} 5(-12) & 5(8) & 5(6) \\ 5(-16) & 5(4) & 5(19) \end{bmatrix}$$

بالتبسيط

$$= \begin{bmatrix} -60 & 40 & 30 \\ -80 & 20 & 95 \end{bmatrix}$$

تأكد

(2) إذا كانت $T = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 3 & -2 \\ -1 & -4 & -2 & 9 \end{bmatrix}$ ، فأوجد $-4T$.

إرشادات للدراسة

إذا كان $kA = B$
فإن: $ka_{ij} = b_{ij}$

تنطبق كثير من خصائص العمليات التي تُجرى على الأعداد الحقيقية على المصفوفات. وفيما يأتي ملخص لهذه الخصائص:

مفهوم أساسي **خصائص جمع المصفوفات**

أضف إلى مطويتك

الخصائص الآتية صحيحة لأي ثلاث مصفوفات A, B, C لها الرتبة نفسها، ولأي عدد حقيقي k :

الخاصية الإبدالية لجمع المصفوفات $A + B = B + A$

الخاصية التجميعية لجمع المصفوفات $(A + B) + C = A + (B + C)$

خاصية التوزيع للضرب في عدد $k(A + B) = kA + kB$

يمكن إجراء عمليات متعددة الخطوات على المصفوفات، وترتيب تلك العمليات شبيه بترتيب العمليات على الأعداد الحقيقية.

إذا كانت: $A = \begin{bmatrix} -9 & 12 \\ 2 & -6 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -4 & -8 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$ ، فأوجد $-4B - 3A$.

$$-4B - 3A = -4 \begin{bmatrix} -4 & -8 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} -9 & 12 \\ 2 & -6 \end{bmatrix}$$

بالتعويض

$$= \begin{bmatrix} -4(-4) & -4(-8) \\ -4(2) & -4(-3) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3(-9) & 3(12) \\ 3(2) & 3(-6) \end{bmatrix}$$

بضرب المصفوفات في الأعداد الحقيقية

$$= \begin{bmatrix} 16 & 32 \\ -8 & 12 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -27 & 36 \\ 6 & -18 \end{bmatrix}$$

بالتبسيط

$$= \begin{bmatrix} 16 - (-27) & 32 - 36 \\ -8 - 6 & 12 - (-18) \end{bmatrix}$$

بطرح العناصر المتناظرة

$$= \begin{bmatrix} 43 & -4 \\ -14 & 30 \end{bmatrix}$$

بالتبسيط

تأكد



(3) إذا كانت: $A = \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 6 & -8 \\ 2 & 9 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 12 & 5 \\ 5 & -4 \\ 4 & -7 \end{bmatrix}$ ، فأوجد $-6B + 7A$.

يمكن استعمال المصفوفات في الكثير من الأعمال التجارية.

الربط مع واقع الحياة



استعمال العمليات على المصفوفات

مثال 4

أعمال: ارجع إلى فقرة "لماذا" في بداية الدرس؛ لإيجاد معدل المبيعات، والنفقات لجميع المعارض في خمسة أسابيع.

لحساب المبيعات في خمسة أسابيع، يجب ضرب كل مصفوفة في العدد 5، وجمع المصفوفات الناتجة معًا.

$$5 \begin{bmatrix} 1700 & 122000 \\ 1800 & 145500 \\ 1800 & 160000 \end{bmatrix} + 5 \begin{bmatrix} 1900 & 145000 \\ 2400 & 225000 \\ 2700 & 290000 \end{bmatrix} + 5 \begin{bmatrix} 1050 & 109500 \\ 1800 & 135000 \\ 1800 & 150500 \end{bmatrix}$$

ضرب كل مصفوفة في

العدد 5 ثم الجمع

$$= \begin{bmatrix} 8500 & 610000 \\ 9000 & 727500 \\ 9000 & 800000 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9500 & 725000 \\ 12000 & 1125000 \\ 13500 & 1450000 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5250 & 547500 \\ 9000 & 675000 \\ 9000 & 752500 \end{bmatrix}$$

تطبيق قاعدة الضرب

في ثابت

بجمع المصفوفات

$$= \begin{bmatrix} 23250 & 1882500 \\ 30000 & 2527500 \\ 31500 & 3002500 \end{bmatrix}$$

المبيعات

النفقات

المعرض الأول

المعرض الثاني

المعرض الثالث

تدل المصفوفة النهائية على معدل المبيعات والنفقات في خمسة أسابيع.

تأكد



(4) ارجع إلى فقرة «لماذا؟» في بداية الدرس، لإيجاد معدل المبيعات والنفقات السنوية لجميع المعارض على فرض أن السنة 52 أسبوعًا تقريبًا.

المخطط المالي

يستعمل المخطط المالي المصفوفات؛ لتنظيم البيانات التي يستعملها، ووصفها.

إرشادات للدراسة

العناصر المتناظرة

عند تمثيل البيانات بمصفوفات متعددة، تأكد أن العناصر المتناظرة تمثل البيانات المتناظرة.



أوجد الناتج في كل مما يأتي إذا كان ذلك ممكنًا:

مثال 1

صفحة 20

$$(1) \begin{bmatrix} -8 & 2 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 11 & -7 & 1 \end{bmatrix} \quad (2) \begin{bmatrix} 9 & -8 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 12 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(3) \begin{bmatrix} 7 & -12 \\ 15 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 4 & -9 \end{bmatrix} \quad (4) \begin{bmatrix} 5 & 13 & -6 \\ 3 & -17 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & -18 & 8 \\ 2 & -11 & 0 \end{bmatrix}$$

أوجد الناتج في كل مما يأتي:

مثال 2

صفحة 21

$$(5) 3 \begin{bmatrix} 6 & 4 & 0 \\ -2 & 14 & -8 \\ -4 & -6 & 7 \end{bmatrix} \quad (6) -6 \begin{bmatrix} 15 & -9 & 2 & 3 \\ 6 & -11 & 14 & -2 \\ 4 & -8 & -10 & 27 \end{bmatrix}$$

استعمل المصفوفات: $A = \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 8 & -1 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}$ ، $C = \begin{bmatrix} -4 & -6 \\ 12 & -7 \end{bmatrix}$ لإيجاد ناتج كل مما يأتي:

مثال 3

صفحة 22

$$(7) 4B - 2A \quad (8) -8C + 3A$$

التنوع (kg)	بوتاسيوم	فسفور	كالسيوم
البروكلي	503	114	68
الكرنب	323	55	24
القرنبيط	194	44	22
البامية	482	112	128

(9) **خضراوات:** يُبين الجدول المجاور عدد ملجرامات كل من

مثال 4

صفحة 22

البوتاسيوم، والفسفور، والكالسيوم الموجودة في الكيلوجرام الواحد من أربعة أنواع من الخضراوات.

(a) أوجد الفروق بين عدد ملجرامات البوتاسيوم، وعدد

ملجرامات الكالسيوم الموجودة في الكيلوجرام الواحد من كل نوع من الخضراوات. اكتب الفروق في مصفوفة عمود.

(b) ماذا يعني كل صف في الجدول؟

(c) أي نوع من الخضراوات يحتوي الكيلوجرام الواحد منه على أكبر عدد من ملجرامات كل من البوتاسيوم، الفسفور، الكالسيوم؟

تدرب وحل المسائل

أوجد الناتج في كل مما يأتي إذا كان ذلك ممكنًا:

مثال 1

صفحة 20

$$(10) \begin{bmatrix} 12 & -5 \\ -8 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6 & 11 \\ -7 & 2 \end{bmatrix} \quad (11) \begin{bmatrix} 9 & 5 \\ -2 & 16 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6 & -3 & 7 \\ 12 & 2 & -4 \end{bmatrix}$$

المشروب	كبير (BD)	وسط (BD)	صغير (BD)
غازي	0.5	0.4	0.3
شاي	0.4	0.3	0.2
قهوة	0.4	0.3	0.2
عصير	0.6	0.5	0.4

(12) **أعمال:** يبين الجدول المجاور قائمة أسعار

الأمثلة 2, 3, 4

الصفحتان 21, 22

المشروبات في مطعم وجبات سريعة. إذا رفع المطعم أسعار جميع المشروبات بنسبة 10%، فأجب عن الآتي:

(a) اكتب المصفوفة C التي تُمثل الأسعار الحالية.

(b) ما العدد الذي يمكن أن نضرب المصفوفة C فيه؛ لإيجاد المصفوفة N التي تُمثل الأسعار الجديدة؟

(c) أوجد المصفوفة N .

(d) أوجد المصفوفة $N - C$. ماذا تُمثل هذه المصفوفة في هذه الحالة؟

أوجد الناتج في كل مما يأتي إن أمكن، وإذا تعذر ذلك فاكتب "لا يمكن"، مع ذكر السبب:

$$\begin{bmatrix} 4 & -3 & 3 \\ -8 & 12 & 1 \\ 0 & -1 & 5 \\ 7 & -9 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -3 & -8 & 12 \\ -11 & -5 & 3 \\ -1 & 22 & -9 \\ -6 & 31 & 9 \end{bmatrix} \quad (14) \quad \begin{bmatrix} -5 \\ 8 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 19 \\ -2 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 11 \\ -6 & 12 & -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 8 & -9 & -3 \\ 5 & 14 & 0 \end{bmatrix} \quad (16) \quad \begin{bmatrix} 62 \\ -37 \\ -4 \end{bmatrix} + [34 \quad 76 \quad -13] \quad (15)$$

$$\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 8 & -3 \end{bmatrix} \quad (18) \quad \begin{bmatrix} 5 \\ -9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 \\ -7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 9 \\ 16 \end{bmatrix} \quad (17)$$

19) كتب: تحتوي المكتبة A على 10000 كتاب علمي، و 5000 كتاب تاريخي، و 5000 كتاب أدبي. وتحتوي المكتبة B على 15000 كتاب علمي، و 10000 كتاب تاريخي، و 2500 كتاب أدبي. وتحتوي المكتبة C على 4000 كتاب علمي، و 700 كتاب تاريخي، و 800 كتاب أدبي.

- (a) رتب أعداد الكتب في كل مكتبة في مصفوفات، وارمز إليها بالرموز A, B, C .
 (b) أوجد العدد الكلي للكتب من كل نوع في المكتبات الثلاث، وعبر عن ذلك بمصفوفة.
 (c) كم يزيد عدد الكتب من كل نوع في المكتبة A على عدده في المكتبة C؟
 (d) أوجد المصفوفة $A + B$. وهل لهذه المصفوفة معنى في هذه الحالة؟ فسر إجابتك.

أوجد الناتج في كل مما يأتي إن أمكن، وإذا تعذر ذلك فاكتب "لا يمكن" مع ذكر السبب:

$$-4 \begin{bmatrix} -7 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} -8 \\ 3x \\ -9 \end{bmatrix} - 5 \begin{bmatrix} 4 \\ x-6 \\ 12 \end{bmatrix} \quad (21) \quad -3 \begin{bmatrix} 18 & -6 & -8 \\ -5 & -3 & 12 \\ 0 & 3x & -y \end{bmatrix} \quad (20)$$

$$-6 \left(\begin{bmatrix} 6 & 3y \\ 4x+1 & -2 \\ -9 & xy \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5 & -6 \\ 8 & -7 \\ x+2 & 2x \end{bmatrix} \right) \quad (23) \quad -5 \left(\begin{bmatrix} 4 & -8 \\ 8 & -9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & -6 \end{bmatrix} \right) \quad (22)$$

أجر العمليات على المصفوفات الآتية إن أمكن، وإذا تعذر ذلك فاكتب "لا يمكن"، مع ذكر السبب:

$$-\frac{3}{4} \begin{bmatrix} 12 & -16 \\ 15 & 8 \end{bmatrix} + \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 21 & 18 \\ -4 & -6 \end{bmatrix} \quad (25) \quad -2 \begin{bmatrix} -9.2 & -8.4 \\ 5.6 & -4.3 \end{bmatrix} - 4 \begin{bmatrix} 4.1 & -2.9 \\ 7.2 & -8.2 \end{bmatrix} \quad (24)$$



الربط مع واقع الحياة

تعد مكتبة جامعة البحرين من أكبر المكتبات العامة في المملكة، وقد أنشئت عام 1986م. وتخدم الطلبة وأعضاء هيئة التدريس. وتتفرع مكتبات الجامعة إلى ثلاث مكتبات رئيسية ومكتبة قانونية، إلى جانب عدد من مكتبات مراكز الدراسات المتخصصة.

مسائل مهارات التفكير العليا

26) برهان: برهن على أن عملية جمع المصفوفات من الرتبة 2×2 إبدالية.

27) برهان: برهن على أن عملية جمع المصفوفات من الرتبة 2×2 تجميعية.

28) تحد: إذا كانت:

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ 8 & 6 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}, 3A - 4B + 6C = \begin{bmatrix} 13 & 22 \\ 10 & 4 \end{bmatrix}$$

فأوجد عناصر المصفوفة C.

(29) **تبرير:** حدّد ما إذا كانت كل عبارة مما يأتي صحيحة دائماً، أم صحيحة أحياناً، أم غير صحيحة أبداً للمصفوفتين A, B ، ثم برّر إجابتك.

- (a) إذا كانت $A+B$ معرفة، فإن $A-B$ معرفة.
(b) إذا كان k عدداً حقيقياً، فإن kA و kB معرفتان.
(c) إذا كانت $A-B$ غير معرفة، فإن $B-A$ غير معرفة.
(d) إذا كانت A و B لهما عدد العناصر نفسه، فإن $A+B$ معرفة.
(e) إذا كانت kA و kB معرفتين، فإن $kA + kB$ معرفة.

(30) **مسألة مفتوحة:** أعط مثلاً على مصفوفتين A و B ، على أن تكون $4B - 3A = \begin{bmatrix} -6 & 5 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$.

(31) **اكتب:** اشرح كيف تجد $4D - 3C$ لأي مصفوفتين C, D لهما الرتبة نفسها.

تدريب على اختبار معياري

(33) يبيّن الجدول أدناه الأجور اليومية والأسبوعية لأنواع مختلفة من السيارات.

	يوميًا	أسبوعيًا
حجم صغير	BD 12.99	BD 67.99
حجم متوسط	BD 17.99	BD 98.99
حجم كبير	BD 25.99	BD 145.99
باص صغير	BD 35.99	BD 201.99

- (a) نظّم هذه البيانات في مصفوفة من الرتبة 4×2 .
(b) إذا ارتفع الإيجار بمقدار 15%، فنظّم البيانات الجديدة في مصفوفة من الرتبة 4×2 .

(32) **إجابة قصيرة:** إذا كانت

$$A + B \text{ ، فأوجد } B = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ ، } A = \begin{bmatrix} -7 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$$

مراجعة تراكمية

إذا كانت $A = \begin{bmatrix} -3 & 6 \\ -5 & x \\ 8 & 4y \end{bmatrix}$ ، فحدّد قيمة كل عنصر مما يأتي: (الدرس 1-1)

(36) b_{23}

(35) c_{13}

(34) a_{32}

مراجعة المتطلبات السابقة

بسّط كل تعبير مما يأتي:

(39) $-7(x - y) + 5(y - x)$

(38) $-3(2a - 5b) - 4(4b + a)$

(37) $4(2x - 3y) + 2(5x - 6y)$

ضرب المصفوفات

Multiplying Matrices

نوع الهدف	الموسم وعدد الأهداف			
	2003	2004	2005	2006
من منطقة نقطتين	153	217	197	249
من منطقة ثلاث نقاط	12	6	7	8
من رمية حرة	82	146	102	158

لماذا؟

يُبين الجدول المجاور أنواع الأهداف وعددها التي سجّلها فريق كرة السلة المدرسي في 4 مواسم متتالية.

فيما سبق

درست ضرب المصفوفات في عدد حقيقي.

والآن

الأفكار الرئيسية

- ضرب المصفوفات.
- استعمل خصائص ضرب المصفوفات.

مصفوفة عدد النقاط P

$$\begin{bmatrix} 153 & 217 & 197 & 249 \\ 12 & 6 & 7 & 8 \\ 82 & 146 & 102 & 158 \end{bmatrix}$$

مصفوفة عدد الأهداف B

$$\begin{bmatrix} 153 & 217 & 197 & 249 \\ 12 & 6 & 7 & 8 \\ 82 & 146 & 102 & 158 \end{bmatrix}$$

ويمكن استعمال ضرب المصفوفات؛ لإيجاد عدد النقاط التي أحرزها الفريق في كل موسم.

ضرب المصفوفات يمكنك ضرب مصفوفتين إذا فقط إذا كان عدد أعمدة المصفوفة الأولى يساوي عدد صفوف المصفوفة الثانية. وعند ضرب المصفوفة A ذات الرتبة $m \times r$ في المصفوفة B ذات الرتبة $r \times t$ ، فإن حاصل الضرب هو المصفوفة AB ذات الرتبة $m \times t$.

$$A \cdot B = AB$$

$m \times r$ $r \times t$ $m \times t$
 متساويان
 رتبة AB

مثال 1 رتبة مصفوفة حاصل الضرب

حدد ما إذا كانت عملية ضرب المصفوفات معرفة في كل مما يأتي، وإن كانت كذلك، فأوجد رتبة المصفوفة الناتجة:

$$A_{3 \times 4} \cdot B_{4 \times 2} \quad (a)$$

بما أن عدد أعمدة المصفوفة A يساوي عدد صفوف المصفوفة B ، فإن مصفوفة حاصل الضرب $A \cdot B$ معرفة، ورتبتها 3×2 .

$$A \cdot B = AB$$

3×4 4×2 3×2

$$A_{5 \times 3} \cdot B_{5 \times 4} \quad (b)$$

بما أن عدد أعمدة المصفوفة A لا يساوي عدد صفوف المصفوفة B ، فإن مصفوفة حاصل الضرب $A \cdot B$ غير معرفة.

$$A \cdot B$$

5×3 5×4



تأكد

حدد ما إذا كانت عملية ضرب المصفوفات معرفة في كل مما يأتي، وإن كانت كذلك، فأوجد رتبة المصفوفة الناتجة:

$$A_{3 \times 2}, B_{3 \times 2} \quad (1B)$$

$$A_{4 \times 6}, B_{6 \times 2} \quad (1A)$$

إرشادات للدراسة

أحياناً تكتب $A_{m \times n}$ لتعبر عن مصفوفة A رتبته $m \times n$.

يمكن إيجاد حاصل ضرب مصفوفتين، بضرب عناصر صفوف الأولى في عناصر أعمدة الثانية بالترتيب، ثم جمع النواتج.

أضف إلى
مطويتك

ضرب المصفوفات

مفهوم أساسي

التعبير اللفظي العنصر في الصف i والعمود j من المصفوفة AB هو مجموع حواصل ضرب العناصر في الصف i من المصفوفة A في عناصر العمود j من المصفوفة B بالترتيب.

$$A \cdot B = AB$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{bmatrix}$$

بالرموز

ضرب المصفوفات المربعة

مثال 2

أوجد XY إذا كانت $X = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -10 & -2 \end{bmatrix}$, $Y = \begin{bmatrix} -5 & -4 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$

$$XY = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -10 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -5 & -4 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

الخطوة 1: اضرب عناصر الصف الأول من المصفوفة X في عناصر العمود الأول من المصفوفة Y بالترتيب، ثم اجمع حواصل الضرب، وضع النتيجة في الصف الأول، العمود الأول من المصفوفة XY .

$$\begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -10 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -5 & -4 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6(-5) + (-3)(3) & \dots \end{bmatrix}$$

الخطوة 2: اتبع الخطوات نفسها مع عناصر الصف الأول والعمود الثاني، واكتب النتيجة في الصف الأول، العمود الثاني.

$$\begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -10 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -5 & -4 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6(-5) + (-3)(3) & 6(-4) + (-3)(3) \\ \dots & \dots \end{bmatrix}$$

الخطوة 3: اتبع الخطوات نفسها مع عناصر الصف الثاني والعمود الأول، واكتب النتيجة في الصف الثاني، العمود الأول.

$$\begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -10 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -5 & -4 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6(-5) + (-3)(3) & 6(-4) + (-3)(3) \\ -10(-5) + (-2)(3) & \dots \end{bmatrix}$$

الخطوة 4: اتبع الخطوات السابقة نفسها مع عناصر الصف الثاني والعمود الثاني، واكتب النتيجة في الصف الثاني، العمود الثاني.

$$\begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -10 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -5 & -4 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6(-5) + (-3)(3) & 6(-4) + (-3)(3) \\ -10(-5) + (-2)(3) & -10(-4) + (-2)(3) \end{bmatrix}$$

الخطوة 5: بسّط المصفوفة الناتجة.

$$\begin{bmatrix} 6(-5) + (-3)(3) & 6(-4) + (-3)(3) \\ -10(-5) + (-2)(3) & -10(-4) + (-2)(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -39 & -33 \\ 44 & 34 \end{bmatrix}$$

تأكد

(2) إذا كانت $U = \begin{bmatrix} 5 & 9 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$, $V = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 6 & -5 \end{bmatrix}$ ، فأوجد UV .

تنبيه!

المحافظة على التركيز

من السهل أن تفقد التركيز عند ضرب المصفوفات، وربما تساعدك تغطية الصفوف أو الأعمدة التي لا تقوم بضربها عند إيجاد عناصر مصفوفة الضرب.

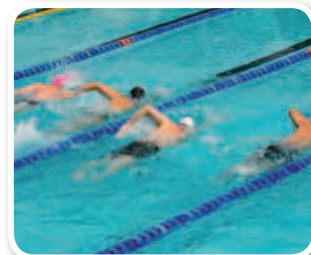
يمكن استعمال ضرب المصفوفات في مواقف حياتية عدة.

ضرب المصفوفات

مثال 3 من واقع الحياة

المركز الثالث	المركز الثاني	المركز الأول	الفريق
3	7	4	A
1	9	8	B
3	5	10	C
6	3	3	D

سباحة: في مسابقة للسباحة بين أربعة أفرقة، تُمنح 7 نقاط لكل من يحل في المركز الأول، و 4 نقاط لمن يحل في المركز الثاني، ونقطتان لمن يحل في المركز الثالث. استعمل الجدول المجاور الذي يبين أعداد السباحين في المراكز الثلاثة لكل فريق لتحديد الفريق الفائز في المسابقة.



الرابط مع واقع الحياة

من فوائد السباحة للجسم أنها تقوي العضلات، وتسهم في حرق سعرات حرارية، وتخفف من الضغط والتوتر النفسي.

افهم: يمكن إيجاد النقاط النهائية التي أحرزها كل فريق بضرب أعداد السباحين في مصفوفة عدد النقاط لكل من المراكز: الأول والثاني والثالث.

خطط: اكتب كلاً من أعداد السباحين والنقاط التي أحرزت في مصفوفتين، ورّب المصفوفتين على أن يكون عدد الصفوف في مصفوفة النقاط يساوي عدد الأعمدة في مصفوفة أعداد السباحين.

$$R = \begin{bmatrix} 4 & 7 & 3 \\ 8 & 9 & 1 \\ 10 & 5 & 3 \\ 3 & 3 & 6 \end{bmatrix} \quad P = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

حل: اضرب المصفوفتين.

$$RP = \begin{bmatrix} 4 & 7 & 3 \\ 8 & 9 & 1 \\ 10 & 5 & 3 \\ 3 & 3 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4(7) + 7(4) + 3(2) \\ 8(7) + 9(4) + 1(2) \\ 10(7) + 5(4) + 3(2) \\ 3(7) + 3(4) + 6(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 62 \\ 94 \\ 96 \\ 45 \end{bmatrix}$$

تُبين مصفوفة حاصل الضرب عدد النقاط التي أحرزها كل من الأفرقة A, B, C, D على الترتيب؛ لذا فالفريق C هو الفائز في المسابقة؛ لأنه حصل على أكبر مجموع من النقاط وهو 96 نقطة.

تحقق: المصفوفة R من الرتبة 4×3 ، والمصفوفة P من الرتبة 3×1 ؛ لذا فإن حاصل الضرب سيكون مصفوفة من الرتبة 4×1



تأكد

3 كرة السلة: ارجع إلى فقرة "لماذا؟" في بداية الدرس، واستعمل ضرب المصفوفات؛ لتحديد الموسم الذي أحرز فيه فريق كرة السلة أكثر عددٍ من النقاط، وعدد النقاط التي أحرزها في ذلك الموسم.

خصائص ضرب المصفوفات تذكر أن خصائص جمع الأعداد الحقيقية تبقى صحيحة أيضاً عند جمع المصفوفات، إلا أن بعض خصائص ضرب الأعداد الحقيقية لا تكون صحيحة دائماً عند ضرب المصفوفات.

اختبار الخاصية الإبدالية

مثال 4

إذا كانت $G = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 4 & -2 & 0 \end{bmatrix}$, $H = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -2 & -8 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$ ، فأوجد ناتج كل مما يأتي:

GH (a)

$$GH = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 4 & -2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -2 & -8 \\ 1 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-6-5 & 3-24-35 \\ 8+4+0 & 12+16+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 & -56 \\ 12 & 28 \end{bmatrix}$$

HG (b)

$$HG = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -2 & -8 \\ 1 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 4 & -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+12 & 6-6 & -10+0 \\ -2-32 & -6+16 & 10+0 \\ 1+28 & 3-14 & -5+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 0 & -10 \\ -34 & 10 & 10 \\ 29 & -11 & -5 \end{bmatrix}$$

لاحظ أن $GH \neq HG$.

تأكد



4 إذا كانت $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -3 & 6 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$ ، فهل $AB = BA$ ؟

يتضح من المثال 4 أن الخاصية الإبدالية لا تتحقق في ضرب المصفوفات؛ لذا فإن الترتيب يُعدّ في غاية الأهمية عند ضرب المصفوفات.

اختبار خاصية التوزيع

مثال 5

إذا كان $J = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -5 & -2 \end{bmatrix}$, $K = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$, $L = \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ ، فأوجد ناتج كل مما يأتي:

J(K + L) (a)

$$J(K + L) = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -5 & -2 \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \right)$$

بالتعويض

$$= \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -5 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

بجمع المصفوفتين

$$= \begin{bmatrix} -2+8 & 2+12 \\ 5-4 & -5-6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 14 \\ 1 & -11 \end{bmatrix}$$

بضرب المصفوفتين

JK + JL (b)

$$JK + JL = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -5 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -5 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

إرشادات للدراسة

البرهان والأمثلة

المضادة

لإثبات صحة خاصية في جميع الحالات، يجب إثبات صحتها في الحالة العامة. ولبين خطأ خاصية يكفي إعطاء مثال مضاد لها.

$$= \begin{bmatrix} 2(3) + 4(-1) & 2(2) + 4(3) \\ -5(3) + (-2)(-1) & -5(2) + (-2)(3) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2(-4) + 4(3) & 2(-1) + 4(0) \\ -5(-4) + (-2)(3) & -5(-1) + (-2)(0) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 16 \\ -13 & -16 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 14 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 14 \\ 1 & -11 \end{bmatrix}$$

لاحظ أن $J(K + L) = JK + JL$.

تأكد

5) استعمل المصفوفات $R = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, $S = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$, $T = \begin{bmatrix} -3 & 7 \\ -4 & 8 \end{bmatrix}$ لتحديد ما إذا كان $(S + T)R = SR + TR$ أم لا.

في المثال 5 كانت خاصية توزيع الضرب على الجمع صحيحة، ويمكن إثبات أن هذه الخاصية صحيحة دائماً إذا كانت نواتج الضرب والجمع معروفة.
بعض خصائص الضرب مبينة في الجدول أدناه.

أضف إلى مطويتك	مفهوم أساسي	خصائص ضرب المصفوفات
	تعد الخصائص الآتية صحيحة لأي ثلاث مصفوفات A, B, C ، ولأي عدد حقيقي k ، على أن يكون ناتج ضرب أو جمع أيٍّ منها معرّفاً:	
	خاصية التجميع لضرب المصفوفات	$(AB)C = A(BC)$
	خاصية التجميع لضرب المصفوفات في عدد حقيقي	$k(AB) = (kA)B = A(kB)$
	خاصية التوزيع من اليسار للمصفوفات	$C(A + B) = CA + CB$
	خاصية التوزيع من اليمين للمصفوفات	$(A + B)C = AC + BC$

تأكد من فهمك

حدد ما إذا كانت عملية الضرب معروفة في كل مما يأتي، وإن كانت كذلك فأوجد رتبة المصفوفة الناتجة:

3) $E_{8 \times 6} \cdot F_{6 \times 10}$

2) $C_{5 \times 4} \cdot D_{5 \times 4}$

1) $A_{2 \times 4} \cdot B_{4 \times 3}$

مثال 1
صفحة 26

أوجد حاصل الضرب في كل مما يأتي إذا كان ذلك ممكناً:

5) $\begin{bmatrix} 10 & -2 \\ -7 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$

4) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 7 & -5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -6 & 3 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$

مثال 2
صفحة 27

7) $\begin{bmatrix} -9 \\ 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & -10 & 1 \end{bmatrix}$

6) $\begin{bmatrix} 9 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 6 & -7 \end{bmatrix}$

9) $\begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6 \\ -7 \end{bmatrix}$

8) $\begin{bmatrix} -8 & 7 & 4 \\ -5 & -3 & 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 10 & 6 \\ 8 & 4 \end{bmatrix}$

11) $\begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 & -1 \\ -3 & 1 & 8 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -7 & 1 \\ 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

10) $\begin{bmatrix} -4 & 3 & 2 \\ -1 & -5 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 8 & 4 & -1 \\ 5 & 3 & -2 \end{bmatrix}$

عدد المشتركين في دورات اللياقة البدنية		
المستوى الثاني	المستوى الأول	الاشتراك
28	35	الشهري
17	32	سنة أشهر
12	18	السنوي

(12) **لياقة بدنية:** يُبين الجدول المجاور عدد المشتركين

في دورات اللياقة في المستويين الأول والثاني.

إذا كانت رسوم الاشتراك الشهري BD 110، ورسوم الاشتراك لسنة أشهر BD 165، ورسوم الاشتراك السنوي BD 439، فأجب:

مثال 3

صفحة 28

(a) اكتب مصفوفة عدد الأشخاص المسجلين في المستويات كلها، ومصفوفة رسوم الاشتراك.

(b) أوجد المبلغ الكلي الذي يحصل عليه المركز من اشتراكات المستويين الأول والثاني.

استعمل المصفوفات $X = \begin{bmatrix} -10 & -3 \\ 2 & -8 \end{bmatrix}$, $Y = \begin{bmatrix} -5 & 6 \\ -1 & 9 \end{bmatrix}$, $Z = \begin{bmatrix} -5 & -1 \\ -8 & -4 \end{bmatrix}$ لتحديد ما إذا كانت المعادلات الآتية صحيحة للمصفوفات المعطاة:

المثالان 4, 5

الصفحة 29

$$X(YZ) = (XY)Z \quad (14)$$

$$XY = YX \quad (13)$$

تدرب وحل المسائل

حدد ما إذا كانت عملية الضرب معرفة في كل مما يأتي، وإن كانت كذلك فأوجد رتبة المصفوفة الناتجة:

$$M_{3 \times 1} \cdot N_{2 \times 3} \quad (17)$$

$$A_{5 \times 5} \cdot B_{5 \times 5} \quad (16)$$

$$P_{2 \times 3} \cdot Q_{3 \times 4} \quad (15)$$

$$S_{5 \times 2} \cdot T_{2 \times 4} \quad (20)$$

$$J_{2 \times 1} \cdot K_{2 \times 1} \quad (19)$$

$$X_{2 \times 6} \cdot Y_{6 \times 3} \quad (18)$$

مثال 1

صفحة 26

أوجد حاصل الضرب في كل مما يأتي إذا كان ذلك ممكنًا:

$$\begin{bmatrix} 6 \\ -3 \end{bmatrix} \cdot [2 \quad -7] \quad (22)$$

$$[1 \quad 6] \cdot \begin{bmatrix} -10 \\ 6 \end{bmatrix} \quad (21)$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 7 & -2 \end{bmatrix} \quad (24)$$

$$\begin{bmatrix} -3 & -7 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 9 & -3 \end{bmatrix} \quad (23)$$

$$\begin{bmatrix} -6 & 4 & -9 \\ 2 & 8 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} \quad (26)$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 6 \\ -4 & -10 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & -7 \\ -2 & -9 \end{bmatrix} \quad (25)$$

$$\begin{bmatrix} -4 \\ 8 \end{bmatrix} \cdot [-3 \quad -1] \quad (28)$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 9 & -3 \\ 4 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -6 & 7 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \quad (27)$$

مثال 2

صفحة 27

تقسيمات الأبنية السكنية			
المنبى	غرفة بئرير واحد	غرفة بئريرين	جناح
1	3	2	2
2	2	3	1
3	4	3	0

(29) **عقارات:** لدى مؤسسة عقارية 3 مباني للإيجار، ويبين

الجدول المجاور تقسيمات هذه الأبنية. إذا كانت الأجرة اليومية للغرفة التي تحوي سريرًا واحدًا BD 22، وللغرفة التي تحوي سريرين BD 25، وللجناح BD 36.

(a) اكتب مصفوفة تمثل تقسيمات الأبنية، ثم اكتب مصفوفة أسعار الغرف.

(b) أوجد مصفوفة تمثل الدخل اليومي للمؤسسة، على فرض أن جميع الغرف جرى تأجيرها.

(c) ما مقدار الدخل اليومي الكلي، على فرض أن جميع الغرف أُجرت؟

مثال 3

صفحة 28

استعمل $k=2$ ، $R = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ -6 & 4 \end{bmatrix}$ ، $Q = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ -2 & -5 \end{bmatrix}$ ، $P = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ ؛ لتحديد ما إذا كانت المعادلات الآتية صحيحة للمصفوفات المعطاة:

$$PQR = RQP \quad (31)$$

$$k(PQ) = P(kQ) \quad (30)$$

$$R(P + Q) = PR + QR \quad (33)$$

$$PR + QR = (P + Q)R \quad (32)$$

الزهور	سعر البيع	سعر الشراء
جوري	BD 3.00	BD 0.50
نرجس	BD 6	BD 1.5
زنابق	BD 7	BD 2

تنسيق زهور: اشترى محل تنسيق زهور 200 باقة من زهر جوري، و 150 باقة من زهر نرجس، و 100 باقة من زهر زنابق، وسعر شراء الباقة من كل نوع مبين في الجدول المجاور، وكذلك سعر بيع الباقة بعد تغليفها وتنسيقها.

(a) نظم البيانات في مصفوفات، واستعمل ضرب المصفوفات؛ لإيجاد المبلغ الكلي لشراء الزهور.

(b) استعمل ضرب المصفوفات؛ لإيجاد المبلغ الكلي الذي حصل عليه صاحب المحل من بيع الزهور.

(c) استعمل العمليات على المصفوفات؛ لإيجاد ربح المحل من بيع الزهور.

استعمل المصفوفات $Z = \begin{bmatrix} -3 \\ x + y \end{bmatrix}$ ، $Y = \begin{bmatrix} -5 & -1.5 \\ x + 2 & y \end{bmatrix}$ ، $X = \begin{bmatrix} 2 & -6 \\ 3y & -4.5 \end{bmatrix}$ ؛ لإيجاد ناتج

الضرب في كل مما يأتي إذا كان ممكناً:

$$YZ \quad (38)$$

$$ZY \quad (37)$$

$$YX \quad (36)$$

$$XY \quad (35)$$

$$(XX)Z \quad (42)$$

$$X(ZZ) \quad (41)$$

$$(XZ)X \quad (40)$$

$$(YX)Z \quad (39)$$

مسائل مهارات التفكير العليا

43 برهان: بين أن الخصائص الآتية صحيحة للمصفوفات من الرتبة 2×2 .

(a) خاصية التوزيع للضرب في عدد.

(c) خاصية التجميع للضرب.

(b) خاصية التوزيع للضرب على الجمع.

(d) خاصية التجميع للضرب في عدد.

44 مسألة مفتوحة: اكتب مصفوفتين A ، B ، بحيث $A \neq B$ ، على أن تكون $AB = BA$.

45 تحد: أوجد قيم a ، b ، c ، d التي تجعل $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 11 \\ 20 & 29 \end{bmatrix}$ صحيحة.

46 اكتب: ارجع إلى فقرة "لماذا؟" بداية الدرس، واستعمل البيانات المعطاة لشرح كيفية استعمال المصفوفات في إحصاءات الألعاب الرياضية.



الربط مع واقع الحياة

تنمو أزهار الزنابق من بصيالات محرشفة، وتأخذ الأزهار شكل أبواق، في كل منها 6 بتلات.

المصدر: Hallmark

تدريب على اختبار معياري

(47) اختيار من متعدد: ما حاصل ضرب

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & -2 & 3 \end{bmatrix} \quad ?$$

A $\begin{bmatrix} 11 \\ -1 \end{bmatrix}$ **C** $\begin{bmatrix} 11 & -1 \end{bmatrix}$

B $\begin{bmatrix} 5 & -10 \\ 0 & -6 \\ 6 & -15 \end{bmatrix}$ **D** الضرب غير ممكن

(48) ما رتبة المصفوفة الناتجة من عملية الضرب الآتية؟

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \\ j & k & l \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

A 1×4 **C** 4×1
B 3×3 **D** 4×3

مراجعة تراكمية

أوجد الناتج في كل مما يأتي إذا كان ذلك ممكنًا: (الدرس 1-2)

(49) $4 \begin{bmatrix} 8 & -1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} - 5 \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$ (50) $5 \left(2 \begin{bmatrix} -2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} \right)$ (51) $-4 \left(\begin{bmatrix} 8 & 9 \\ -5 & 5 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} -6 & -1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} \right)$

أوجد رتبة المصفوفة في كل مما يأتي: (الدرس 1-1)

(54) $\begin{bmatrix} 9 & 1 \\ 2 & 3 \\ 5 & -3 \\ -9 & 0 \end{bmatrix}$

(52) $\begin{bmatrix} -2 & 1 \end{bmatrix}$ (53) $\begin{bmatrix} 1 & 6 \\ -8 & -3 \end{bmatrix}$

مراجعة المتطلبات السابقة

أوجد قيمة كل مقدار مما يأتي:

(56) $4((3)(2) - (-1)(3)) + 4(6 - 3)$

(55) $2(7 - 3) - 5(4 - 3)$

أوجد الناتج في كل مما يأتي إذا كان ذلك ممكناً: (الدرس 1-3)

$$\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 0 & 5 & -6 \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$\begin{bmatrix} -4 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & -7 \\ 6 & 3 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix} \quad (12)$$

(13) اختيار من متعدد: إذا كانت المصفوفة XY من الرتبة 3×2 ، والمصفوفة X من الرتبة 3×4 ، فما رتبة المصفوفة Y ؟

(الدرس 2-3)

$$3 \times 4 \quad C \quad 2 \times 3 \quad A$$

$$4 \times 2 \quad D \quad 3 \times 2 \quad B$$

(14) مبيعات: يُبين الجدول أدناه موجودات أحد محلات الملابس الرياضية من القمصان والبنائيل، وقد قرر صاحب المحل مضاعفة عدد القمصان قبيل فصل الصيف. (الدرس 1-2)

النوع	صغير	وسط	كبير
قميص	10	10	15
بنطال	25	35	45

(a) اكتب مصفوفة A التي تمثل عدد القمصان والبنائيل في المحل قبل مضاعفة العدد.

(b) ما العدد الذي يمكن أن نضرب فيه المصفوفة A لإيجاد المصفوفة M التي تمثل عدد القمصان والبنائيل بعد مضاعفته؟ أوجد M .

(c) ماذا تمثل المصفوفة $M-A$ في هذه الحالة؟

(15) اختيار من متعدد: ما ناتج (الدرس 1-3)

$$[4 \quad 0 \quad -2] \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \quad ?$$

$$\begin{bmatrix} 8 & -4 \\ 0 & 0 \\ 0 & -8 \end{bmatrix} \quad C \quad [8 \quad -12] \quad A$$

$$\begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & -8 \end{bmatrix} \quad D \quad \begin{bmatrix} 8 \\ -12 \end{bmatrix} \quad B$$

حدد رتبة كل مصفوفة مما يأتي: (الدرس 1-1)

$$\begin{bmatrix} 10 & -6 & 18 & 0 \\ -7 & 5 & 2 & 4 \\ 3 & 11 & 9 & 7 \end{bmatrix} \quad (2) \quad [3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7] \quad (1)$$

$$\text{إذا كانت } A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -5 & 1 \\ -3 & 7 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & -9 & 2 \\ 0 & 10 & 4 \end{bmatrix} \text{، فحدد:}$$

$$b_{22} \quad (4) \quad a_{21} \quad (3)$$

(5) يُبين الجدول أدناه مبيعات محلي ملابس أطفال في أسبوعين مختلفين: (الدرس 1-2)

المحل	الأسبوع	الملابس المباعة			
		قميص	بلوزة	قبة	بنطال
A	1	25	14	18	5
	2	32	26	15	4
B	1	44	10	13	8
	2	18	38	17	2

(a) اكتب مصفوفة مبيعات كل أسبوع.

(b) أوجد مجموع مبيعات الأسبوعين باستعمال جمع المصفوفات.

أوجد الناتج في كل مما يأتي إذا كان ذلك ممكناً: (الدرس 1-2)

$$\begin{bmatrix} 0 & 15 \\ -6 & -10 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$-3 \begin{bmatrix} 3 & 5 & 12 \\ 0 & -1 & 3 \\ 9 & 6 & -5 \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$2 \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ -6 \end{bmatrix} + 4 \begin{bmatrix} -3x \\ 2 \\ x \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} x-2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (8)$$

(9) اختيار من متعدد: ما ناتج (الدرس 1-2)

$$2 \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -6 & 0 \end{bmatrix} + 4 \begin{bmatrix} 9 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \quad ?$$

$$\begin{bmatrix} 12 & 4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} \quad C \quad \begin{bmatrix} 42 & 6 \\ -4 & 12 \end{bmatrix} \quad A$$

$$\begin{bmatrix} 27 & -5 \\ -12 & 0 \end{bmatrix} \quad D \quad \begin{bmatrix} 21 & 3 \\ -2 & 6 \end{bmatrix} \quad B$$

المحددات وقاعدة كرامر

Determinants and Cramer's Rule



لماذا؟

لتحديد المنطقة التي يعيش فيها أحد النمور، يقوم عالم حيوانات بتتبعه بواسطة جهاز GPS، وبعد أيام عدة حدد العالم أن المنطقة مثلثة الشكل. ويمكنه بعد تحديد إحداثيات رؤوس المنطقة استعمال المصفوفات والمحددات لحساب مساحتها.

فيما سبق

درست حل أنظمة من المعادلات جبرياً.

والآن

الأفكار الرئيسية

- أحسب المحددات.
- أحل أنظمة معادلات خطية باستعمال قاعدة كرامر.

المفردات الأساسية

المحدد

determinant

محدد من الرتبة الثانية

second-order determinant

محدد من الرتبة الثالثة

third-order determinant

قاعدة الأقطار

diagonal rule

مصفوفة المعاملات

coefficient matrix

قاعدة كرامر

Cramer's Rule

مفهوم أساسي

محدد من الرتبة الثانية

أضف إلى

مطوبتك

التعبير اللفظي قيمة محدد من الرتبة الثانية يساوي حاصل ضرب عنصري القطر الرئيسي مطروحاً منه حاصل ضرب عنصري القطر الآخر.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb$$

القطر الرئيسي

$$\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} = 4(6) - (-3)(5) = 39$$

مثال

مثال 1

محدد من الرتبة الثانية

أوجد قيمة كل محدد مما يأتي:

$$(a) \begin{vmatrix} 5 & -4 \\ 8 & 9 \end{vmatrix}$$

تعريف المحدد من الرتبة الثانية

$$\begin{vmatrix} 5 & -4 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = 5(9) - 8(-4) \\ = 45 + 32 \\ = 77$$

بالتبسيط

$$(b) \begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 4 & -11 \end{vmatrix}$$

تعريف المحدد من الرتبة الثانية

$$\begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 4 & -11 \end{vmatrix} = 0(-11) - 4(6) \\ = 0 - 24 \\ = -24$$

بالتبسيط

تأكد

أوجد قيمة كل محدد مما يأتي:

$$(1B) \begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 9 & -4 \end{vmatrix}$$

$$(1A) \begin{vmatrix} -6 & -7 \\ 10 & 8 \end{vmatrix}$$

قراءة الرياضيات

المحددات

يرمز لمحدد المصفوفة A بالرمز |A|.

تُسمى محددات المصفوفات من الرتبة 3×3 محددات من الرتبة الثالثة. ويمكن حساب هذه المحددات باستعمال قاعدة الأقطار.

إرشادات للدراسة

قاعدة الأقطار

يمكن استعمال قاعدة الأقطار لإيجاد المحدد للمصفوفات من الرتبة 3×3 فقط. وتوجد طريقة أخرى تسمى طريقة المفكوك بالمحددات الصغرى، والمحدد الأصغر لعنصر هو محدد المصفوفة الناتجة بعد الصف والعمود الذي يقع فيه ذلك العنصر، ويمكن إيجاد مفكوك المحدد من الرتبة الثالثة بطريقة المفكوك بالمحددات الصغرى باستعمال عناصر أي صف أو أي عمود، بحيث تضرب عناصر الصف أو العمود في المحدد الأصغر لها، ويضرب الناتج في إشارة موقع العنصر، ثم تجمع النواتج. وتحدد موقع إشارة العنصر كما هو بالشكل أدناه.

$$\begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix}$$

في مثال 2 يمكن إيجاد مفكوك المحدد بهذه الطريقة باستعمال عناصر الصف الأول كالآتي:

$$\begin{vmatrix} 4 & -8 & 3 \\ -3 & 2 & 6 \\ -4 & 5 & 9 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 5 & 9 \end{vmatrix} - (-8) \begin{vmatrix} -3 & 6 \\ -4 & 9 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} = 4(12 - 30) + 8(27 - 24) + 3(15 - 8) = -48 - 24 - 21 = -93$$



تأكد

أوجد قيمة كل محدد مما يأتي:

$$\begin{vmatrix} -8 & -4 & 4 \\ 0 & -5 & -8 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} \quad (2B)$$

$$\begin{vmatrix} -5 & 9 & 4 \\ -2 & -1 & 5 \\ -4 & 6 & 2 \end{vmatrix} \quad (2A)$$

أضف إلى
مطويتك

قاعدة الأقطار

مفهوم أساسي

الخطوة 1 أعد كتابة العمود الأول والثاني إلى يمين المحدد.

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

الخطوة 2 أوجد حواصل ضرب عناصر القطر الرئيسي

وثلاثيات العناصر الموازية له المبينة، ثم اجمع نواتجها.

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

الخطوة 3 أوجد حواصل ضرب عناصر القطر الآخر وثلاثيات

العناصر الموازية له المبينة، ثم اجمع نواتجها.

الخطوة 4 لإيجاد قيمة المحدد نطرح ناتج الخطوة 3 من ناتج الخطوة 2.

استعمال قاعدة الأقطار

مثال 2

$$\begin{vmatrix} 4 & -8 & 3 \\ -3 & 2 & 6 \\ -4 & 5 & 9 \end{vmatrix} \quad \text{أوجد قيمة} \quad \text{باستعمال قاعدة الأقطار.}$$

الخطوة 1 أعد كتابة العمود الأول والثاني إلى يمين المحدد.

$$\begin{vmatrix} 4 & -8 & 3 \\ -3 & 2 & 6 \\ -4 & 5 & 9 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 4 & -8 \\ -3 & 2 \\ -4 & 5 \end{vmatrix}$$

الخطوة 2 أوجد حاصل ضرب عناصر الأقطار وموازياتها.

$$\begin{vmatrix} 4 & -8 & 3 \\ -3 & 2 & 6 \\ -4 & 5 & 9 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 4 & -8 \\ -3 & 2 \\ -4 & 5 \end{vmatrix}$$

$$4(2)(9) = 72$$

$$-8(6)(-4) = 192$$

$$3(-3)(5) = -45$$

$$-4(2)(3) = -24$$

$$5(6)(4) = 120$$

$$9(-3)(-8) = 216$$

الخطوة 3 اجمع نواتج الضرب في كل مجموعة.

المجموع الثاني

$$-24 + 120 + 216 = 312$$

الخطوة 4 اطرح المجموع الثاني من المجموع الأول.

$$219 - 312 = -93$$

فتكون قيمة المحدد هي -93.

المجموع الأول

$$72 + 192 + (-45) = 219$$

تستعمل المحددات أيضًا؛ لإيجاد مساحة سطح المثلث. إذا كانت إحداثيات رؤوس المثلث معلومة، فيمكن استعمال الصيغة أدناه؛ لإيجاد مساحة سطح المثلث.

إرشادات للدراسة

صيغة المساحة

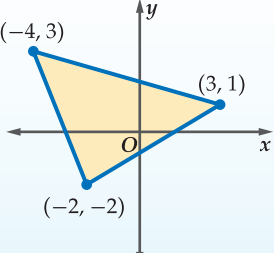
لاحظ أنه يجب أن تستعمل القيمة المطلقة للمقدار A حتى تضمن أن المساحة غير سالبة.

مفهوم أساسي مساحة سطح المثلث

التعبير اللفظي مساحة سطح المثلث الذي إحداثيات رؤوسه (a, b) , (c, d) , (e, f) هي $|A|$ ، حيث:

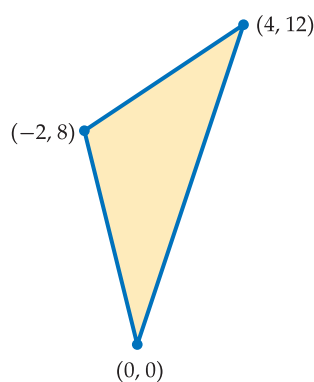
مثال

$$A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} a & b & 1 \\ c & d & 1 \\ e & f & 1 \end{vmatrix}$$

$$A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} -4 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$


مثال 3 من واقع الحياة

علم الحيوان: عُد إلى فقرة "لماذا؟" بداية الدرس. إذا كانت رؤوس المنطقة التي يعيش فيها النمر على المستوى الإحداثي موضحة في الشكل المجاور، بحيث إن كل وحدة على المستوى الإحداثي تمثل 1 km على سطح الأرض، فاستعمل المحددات؛ لإيجاد مساحة سطح المنطقة.



$$A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} a & b & 1 \\ c & d & 1 \\ e & f & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 4 & 12 & 1 \\ -2 & 8 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} (a, b) = (0, 0) \\ (c, d) = (4, 12) \\ (e, f) = (-2, 8) \end{matrix}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 12 & 1 & 4 & 12 \\ -2 & 8 & 1 & -2 & 8 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 12 & 1 & 4 & 12 \\ -2 & 8 & 1 & -2 & 8 \end{vmatrix}$$

$$0 + 0 + 32 = 32 \quad -24 + 0 + 0 = -24 \quad \text{قاعدة الأقطار}$$

$$A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 4 & 12 & 1 \\ -2 & 8 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right) [32 - (-24)] = 28$$

فتكون مساحة المنطقة التي يعيش فيها النمر هي 28 km².

تأكد

(3) يقف خالد وسعد ورضوان عند ثلاث نقاط مختلفة على خريطة المدينة التي يسكنونها. إذا كانت إحداثيات هذه النقاط هي (3, 15), (6, 4), (11, 9)، بحيث تمثل كل وحدة على الخريطة 0.5 km، فما مساحة المنطقة المثلثة الشكل التي يقفون عند رؤوسها؟



الربط مع واقع الحياة

يعيش النمر في مناطق تصل مساحاتها إلى 100 km²، ويحرس النمر منطقتيه التي يعيش فيها، ويعرفها بتتبع أثره وأماكن روثه.

المصدر:

National Geographic

تسمى المصفوفة التي عناصرها معاملات المتغيرات في نظام معادلات خطية متعددة المتغيرات بعد ترتيب النظام بمصفوفة المعاملات.

قاعدة كرامر يمكنك استعمال المحددات لحل أنظمة معادلات خطية، إذا كانت قيمة المحدد لمصفوفة المعاملات لا تساوي صفراً، فإن للنظام حلاً وحيداً. وإذا كانت قيمة المحدد صفراً، فإما أن يكون للنظام عدد لا نهائي من الحلول أو لا حل له، وهناك طريقة لحل أنظمة المعادلات الخطية تسمى **قاعدة كرامر**.

قراءة الرياضيات

المحددات

تستعمل المحددات لتحديد ما إذا كان لنظام من المعادلات الخطية حل وحيد أم لا.

أضف إلى

مطوبتك

مفهوم أساسي

قاعدة كرامر

إذا كانت C مصفوفة المعاملات للنظام $ax + by = m$ حيث $C = \begin{bmatrix} a & b \\ f & g \end{bmatrix}$ ، $fx + gy = n$

فإن حل هذا النظام هو (x, y) ، حيث $x = \frac{\begin{vmatrix} m & b \\ n & g \end{vmatrix}}{|C|}$ و $y = \frac{\begin{vmatrix} a & m \\ f & n \end{vmatrix}}{|C|}$ ، وذلك إذا كانت $|C| \neq 0$.

حل نظام من معادلتين خطيتين في متغيرين

مثال 4

حلّ النظام الآتي باستعمال قاعدة كرامر $5x - 6y = 15$
 $3x + 4y = -29$

$x = \frac{\begin{vmatrix} m & b \\ n & g \end{vmatrix}}{ C }$	قاعدة كرامر	$y = \frac{\begin{vmatrix} a & m \\ f & n \end{vmatrix}}{ C }$
$= \frac{\begin{vmatrix} 15 & -6 \\ -29 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & -6 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}}$	بالتعويض	$= \frac{\begin{vmatrix} 5 & 15 \\ 3 & -29 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & -6 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}}$
$= \frac{15(4) - (-29)(-6)}{5(4) - (3)(-6)}$	بحساب المحددات	$= \frac{5(-29) - 3(15)}{5(4) - (3)(-6)}$
$= \frac{60 - 174}{20 + 18}$	بالضرب	$= \frac{-145 - 45}{20 + 18}$
$= -\frac{114}{38}$	بالجمع والطرح	$= -\frac{190}{38}$
$= -3$	بالتبسيط	$= -5$

حل النظام هو $(-3, -5)$

$5(-3) - 6(-5) \stackrel{?}{=} 15$	$x = -3, y = -5$	تحقق
$-15 + 30 \stackrel{?}{=} 15$		بالتبسيط
$15 = 15$ ✓		
$3(-3) + 4(-5) \stackrel{?}{=} -29$	$x = -3, y = -5$	
$-9 - 20 \stackrel{?}{=} -29$		بالتبسيط
$-29 = -29$ ✓		

تأكد ✓

حلّ كل نظام مما يأتي باستعمال قاعدة كرامر:

$$\begin{aligned} 8x - 5y &= 70 \quad (4A) \\ 9x + 7y &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 7x + 3y &= 37 \quad (4A) \\ -5x - 7y &= -41 \end{aligned}$$

إرشادات للدراسة

قاعدة كرامر

عندما تكون قيمة محدد مصفوفة المعاملات C صفراً، لا يكون للنظام حل وحيد.

يمكن استعمال قاعدة كرامر؛ لحل نظام من ثلاث معادلات خطية في ثلاثة متغيرات أيضًا.

مفهوم أساسي

استعمال قاعدة كرامر لحل نظام من ثلاث معادلات خطية

أضف إلى

مطويتك

$$C = \begin{bmatrix} a & b & c \\ f & g & h \\ j & k & \ell \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} ax + by + cz = m \\ fx + gy + hz = n \\ jx + ky + \ell z = p \end{matrix}$$

إذا كانت C مصفوفة المعاملات للنظام ، حيث

$$x = \frac{\begin{vmatrix} m & b & c \\ n & g & h \\ p & k & \ell \end{vmatrix}}{|C|}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a & m & c \\ f & n & h \\ j & p & \ell \end{vmatrix}}{|C|}, \quad \text{حيث } (x, y, z) \text{ هو النظام}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} a & b & m \\ f & g & n \\ j & k & p \end{vmatrix}}{|C|}$$

وذلك إذا كانت $|C| \neq 0$.

مثال 5

حل نظام مكون من ثلاث معادلات خطية

$$\begin{aligned} 4x + 5y - 6z &= -14 \\ 3x - 2y + 7z &= 47 \\ 7x - 6y - 8z &= 15 \end{aligned}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} m & b & c \\ n & g & h \\ p & k & \ell \end{vmatrix}}{|C|}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a & m & c \\ f & n & h \\ j & p & \ell \end{vmatrix}}{|C|}, \quad z = \frac{\begin{vmatrix} a & b & m \\ f & g & n \\ j & k & p \end{vmatrix}}{|C|}$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{\begin{vmatrix} -14 & 5 & -6 \\ 47 & -2 & 7 \\ 15 & -6 & -8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & 5 & -6 \\ 3 & -2 & 7 \\ 7 & -6 & -8 \end{vmatrix}} = \frac{3105}{621} = 5 \\ y &= \frac{\begin{vmatrix} 4 & -14 & -6 \\ 3 & 47 & 7 \\ 7 & 15 & -8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & 5 & -6 \\ 3 & -2 & 7 \\ 7 & -6 & -8 \end{vmatrix}} = -\frac{1242}{621} = -2 \\ z &= \frac{\begin{vmatrix} 4 & 5 & -14 \\ 3 & -2 & 47 \\ 7 & -6 & 15 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & 5 & -6 \\ 3 & -2 & 7 \\ 7 & -6 & -8 \end{vmatrix}} = \frac{2484}{621} = 4 \end{aligned}$$

وعليه فيكون حل النظام هو $(5, -2, 4)$

$$3(5) - 2(-2) + 7(4) \stackrel{?}{=} 47$$

$$15 + 4 + 28 \stackrel{?}{=} 47$$

$$47 = 47 \quad \checkmark$$

$$4(5) + 5(-2) - 6(4) \stackrel{?}{=} -14 \quad \text{تحقق}$$

$$20 - 10 - 24 \stackrel{?}{=} -14$$

$$-14 = -14 \quad \checkmark$$

$$7(5) - 6(-2) - 8(4) \stackrel{?}{=} 15$$

$$35 + 12 - 32 \stackrel{?}{=} 15$$

$$15 = 15 \quad \checkmark$$

تأكد

حل كل نظام معادلات مما يأتي باستعمال قاعدة كرامر:

$$6x + 5y + 2z = -1 \quad (5B)$$

$$-x + 3y + 7z = 12$$

$$5x - 7y - 3z = -52$$

$$3x + 5y + 2z = -7 \quad (5A)$$

$$-4x + 3y - 5z = -19$$

$$5x + 4y - 7z = -15$$

إرشادات للدراسة

التحقق من الحل

للتحقق من الحل،

عوض القيم في

المعادلات الأصلية.



أوجد قيمة كل محدد مما يأتي:

مثال 1

صفحة 35

$$\begin{vmatrix} -6 & -6 \\ 8 & 10 \end{vmatrix} \quad (2) \quad \begin{vmatrix} 8 & 6 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} \quad (1)$$

$$\begin{vmatrix} 16 & -10 \\ -8 & 5 \end{vmatrix} \quad (4) \quad \begin{vmatrix} -4 & 12 \\ 9 & 5 \end{vmatrix} \quad (3)$$

أوجد قيمة كل محدد مما يأتي باستعمال قاعدة الأقطار:

مثال 2

صفحة 36

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ -4 & 6 & -2 \\ 4 & -1 & -6 \end{vmatrix} \quad (6) \quad \begin{vmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -4 & 2 & -5 \\ -3 & 1 & 4 \end{vmatrix} \quad (5)$$

$$\begin{vmatrix} -5 & -3 & 4 \\ -2 & -4 & -3 \\ 8 & -2 & 4 \end{vmatrix} \quad (8) \quad \begin{vmatrix} 8 & 4 & 0 \\ -2 & -6 & -1 \\ 5 & -3 & 6 \end{vmatrix} \quad (7)$$

$$\begin{vmatrix} -4 & 3 & 0 \\ 1 & 5 & -2 \\ -1 & -8 & -3 \end{vmatrix} \quad (10) \quad \begin{vmatrix} 8 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 6 & 5 \end{vmatrix} \quad (9)$$



الربط مع واقع الحياة

مثلث برمودا منطقة جغرافية
مثلثة الشكل تقع قرابة الساحل
الشرقي لمدينة فلوريدا
الأمريكية.

مثال 3

صفحة 37

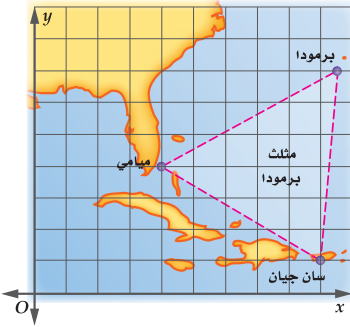
11 جغرافيا: استعمل الخريطة الإحداثية المجاورة

التي تُظهر منطقة مثلث برمودا؛ للإجابة عما يأتي:

(a) احسب مساحة سطح منطقة مثلث برمودا على الخريطة.

(b) إذا كان طول كل وحدة على الخريطة تمثل 175 mi في الواقع،

فأوجد مساحة سطح منطقة مثلث برمودا الحقيقية.



استعمل قاعدة كرامر لحل كل نظام معادلات مما يأتي:

مثال 4

صفحة 38

$$10c - 7d = -59 \quad (13) \quad 4x - 5y = 39 \quad (12)$$

$$6c + 5d = -63 \quad 3x + 8y = -6$$

استعمل قاعدة كرامر لحل كل نظام معادلات مما يأتي:

مثال 5

صفحة 39

$$-3x - 5y + 10z = -4 \quad (15) \quad 4x - 2y + 7z = 26 \quad (14)$$

$$-8x + 2y - 3z = -91 \quad 5x + 3y - 5z = -50$$

$$6x + 8y - 7z = -35 \quad -7x - 8y - 3z = 49$$

$$-9x + 5y + 3z = 50 \quad (17) \quad 6x - 5y + 2z = -49 \quad (16)$$

$$7x + 8y - 2z = -60 \quad -5x - 3y - 8z = -22$$

$$-5x + 7y + 5z = 46 \quad -3x + 8y - 5z = 55$$

تدرب وحل المسائل

أوجد قيمة كل محدد مما يأتي:

المثالان 1, 2

الصفحتان 35, 36

$$\begin{vmatrix} -5 & 8 \\ -6 & -7 \end{vmatrix} \quad (20) \quad \begin{vmatrix} -8 & -9 \\ 11 & 12 \end{vmatrix} \quad (19) \quad \begin{vmatrix} -7 & 12 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} \quad (18)$$

$$\begin{vmatrix} -5 & -1 & -2 \\ 1 & 8 & 4 \\ 0 & -6 & 9 \end{vmatrix} \quad (23) \quad \begin{vmatrix} 2 & 0 & -6 \\ -3 & -4 & -5 \\ -2 & 5 & 8 \end{vmatrix} \quad (22) \quad \begin{vmatrix} 3 & 5 & -2 \\ -1 & -4 & 6 \\ -6 & -2 & 5 \end{vmatrix} \quad (21)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 6 & 7 \\ -2 & -5 & -8 \\ 4 & 4 & 9 \end{vmatrix} \quad (26) \quad \begin{vmatrix} -8 & -3 & -9 \\ 0 & 0 & 0 \\ 8 & -2 & -4 \end{vmatrix} \quad (25) \quad \begin{vmatrix} 6 & -3 & -5 \\ 0 & -7 & 0 \\ 3 & -6 & -4 \end{vmatrix} \quad (24)$$

27 قرطاسية: تبيع مكتبة دفاتر محاضرات ومجموعات أدوات هندسية، إذا اشترى ماجد دفترين ومجموعتين من الأدوات الهندسية بمبلغ BD 8.96، في حين اشترى عامر دفترًا واحدًا وثلاث مجموعات هندسية بمبلغ BD 9.46، فاستعمل قاعدة كرامر؛ لإيجاد سعر كل من الدفتر والمجموعة الهندسية؟

المثال 4

صفحة 37

استعمل قاعدة كرامر لحل كل نظام مما يأتي:

المثالان 4, 5

الصفحتان 38, 39

$$10a - 3b = -34 \quad (29) \quad 6x - 5y = 73 \quad (28)$$

$$3a + 8b = -28 \quad -7x + 3y = -71$$

$$-6f - 8g = -22 \quad (31) \quad -4c - 5d = -39 \quad (30)$$

$$-11f + 5g = -60 \quad 5c + 8d = 54$$

$$8x - 4y + 7z = 34 \quad (33) \quad 5x - 4y + 6z = 58 \quad (32)$$

$$5x + 6y + 3z = -21 \quad -4x + 6y + 3z = -13$$

$$3x + 7y - 8z = -85 \quad 6x + 3y + 7z = 53$$

34 علم الآثار: وجد عالم آثار عظام حوت عند الإحداثيات (0, 3), (4, 7), (5, 9) على الخريطة. إذا كانت كل وحدة على الخريطة تمثل 1 m، فأوجد مساحة سطح المثلث الذي رؤوسه تلك النقاط.

استعمل قاعدة كرامر لحل كل نظام معادلات مما يأتي:

$$3a - 5b - 9c = 17 \quad (36) \quad 6a - 7b = -55 \quad (35)$$

$$4a - 3c = 31 \quad 2a + 4b - 3c = 35$$

$$-5a - 4b - 2c = -42 \quad -5a - 3b + 7c = -37$$

$$7x + 8y + 9z = -149 \quad (38) \quad 4x - 5y = -2 \quad (37)$$

$$-6x + 7y - 5z = 54 \quad 7x + 3z = -47$$

$$4x + 5y - 2z = -44 \quad 8y - 5z = -63$$



الربط مع واقع الحياة

39 صناعة: ينتج مصنع 3 حجوم من علب الهدايا، حجم صغير بتكلفة BD 1.15 للعلبة، وحجم متوسط بتكلفة BD 1.75 للعلبة، وحجم كبير بتكلفة BD 2.25 للعلبة، وفي أحد الأيام أنتج من علب الحجم الصغير ضعف ما أنتجه من علب الحجم المتوسط، وكان مجموع ما أنتجه في ذلك اليوم 1385 علبة من جميع الحجم، بتكلفة إجمالية قدرها BD 2238.75.

a استعمل قاعدة كرامر؛ لإيجاد عدد العلب التي أنتجها المصنع من كل حجم في ذلك اليوم.

b إذا زادت تكلفة إنتاج علب الحجم الصغير فقط في اليوم التالي لتصبح BD 1.25 بعد زيادة قليلة في الحجم، فأوجد تكلفة الإنتاج في اليوم التالي إذا كان إنتاج المصنع مقارنة باليوم السابق أقل بـ 140 علبة من الحجم الصغير، وأكثر بـ 125 علبة من الحجم المتوسط، وأكثر بـ 35 علبة من الحجم الكبير.

يستعمل علماء الآثار شبكات وخرائط في مواقع التنقيب عن الآثار لتسجيل المواقع التي وجدوا فيها تلك الآثار.

المصدر:
College of Staten
Island Library

(40) **بستنة:** أراد حمد إنشاء حديقة مثلثة الشكل في فناء منزله، فرسم لها مخططاً في المستوى الإحداثي، فكانت رؤوس الحديقة على المستوى $(-1, 7), (2, 6), (4, -3)$. أوجد المساحة الحقيقية لسطح الحديقة إذا كانت كل وحدة على المستوى الإحداثي تمثل متراً على سطح الأرض.

مسائل مهارات التفكير العليا

(41) **تبرير:** ما الذي يمكن استنتاجه فيما يتعلق بحل نظام معادلات خطية، إذا كان محدد مصفوفة المعاملات يساوي صفراً؟

(42) **تحديد:** أوجد محدد مصفوفة من الرتبة 3×3 ، على أن تكون عناصرها على النحو الآتي:

$$a_{mn} = \begin{cases} 0 & \text{إذا كان } m+n \text{ زوجياً} \\ m+n & \text{إذا كان } m+n \text{ فردياً} \end{cases}$$

(43) **مسألة مفتوحة:** أعط مثلاً لمصفوفة من الرتبة 2×2 تحقق الشرط المذكور في كل مما يأتي:

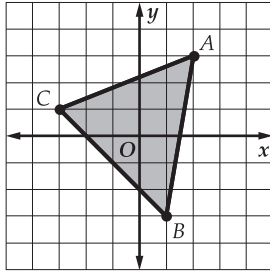
(a) المحدد يساوي صفراً.

(b) المحدد يساوي 25.

(c) جميع العناصر أعداد سالبة، والمحدد يساوي -32.

(44) **اكتب:** صف التمثيلات البيانية الممكنة لنظام من معادلتين خطيتين في متغيرين إذا كان محدد مصفوفة المعاملات يساوي صفراً.

تدريب على اختبار معياري



(46) مساحة سطح المثلث المُبين في الشكل المجاور إلى أقرب عدد صحيح هي:

- A 10 وحدات مربعة
- B 12 وحدة مربعة
- C 14 وحدة مربعة
- D 16 وحدة مربعة

(45) ما قيمة x التي تجعل $\begin{vmatrix} 2 & x \\ 2 & -3 \end{vmatrix}$ تساوي 24؟

- A 15
- B 9
- C -9
- D -15

مراجعة تراكمية

حدد ما إذا كانت مصفوفة الضرب معرفة في كل مما يأتي أو لا، وإذا كانت كذلك، فأوجد رتبة المصفوفة الناتجة: (الدرس 3-2)

(49) $E_{2 \times 7} \cdot F_{7 \times 1}$

(48) $C_{5 \times 4} \cdot D_{5 \times 3}$

(47) $A_{4 \times 2} \cdot B_{2 \times 6}$

مراجعة المتطلبات السابقة

حل كل نظام مما يأتي:

(51) $4y + 6x = 10$

$2x - 7y = 22$

(50) $2x - 5y = -26$

$5x + 3y = -34$

يمكنك حل نظام معادلات خطية باستعمال مفتاح MATRIX في الآلة الحاسبة البيانية؛ إذ تحتوي المصفوفة الموسعة على مصفوفة المعاملات مع عمود إضافي إلى اليمين يحوي الثوابت. وباختزال المصفوفة الموسعة يصبح من السهل تحديد حل نظام من المعادلات.

مثال

اكتب مصفوفة موسعة لنظام المعادلات الآتي، ثم حُل هذا النظام باستعمال الآلة الحاسبة البيانية:

$$2x + y + z = 1$$

$$3x + 2y + 3z = 12$$

$$4x + y + 2z = -1$$

الخطوة 1 اكتب المصفوفة الموسعة ثم أدخلها في الآلة الحاسبة البيانية.

$$B = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 & 12 \\ 4 & 1 & 2 & -1 \end{array} \right] \text{ المصفوفة الموسعة}$$

ابدأ بإدخال المصفوفة بالضغط على المفاتيح:

2nd [MATRIX] ► ► ENTER 3 ENTER 4 ENTER 2 ENTER 1

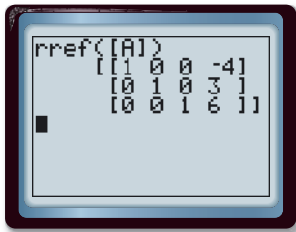
ENTER 1 ENTER 1 ENTER 3 ENTER 2 ENTER 3 ENTER 12

ENTER 4 ENTER 1 ENTER 2 ENTER (-) 1 ENTER

الخطوة 2 أوجد الصورة المختزلة للمصفوفة باستعمال الآلة الحاسبة البيانية بالضغط على:

2nd [QUIT] 2nd [MATRIX] ► ALPHA [B] 2nd [MATRIX]

ENTER) ENTER



ادرس الصورة المختزلة للمصفوفة والتي سوف تظهر كما في الشكل المجاور. لاحظ أن الأعمدة الثلاثة الأولى تمثل مصفوفة محايدة من الرتبة 3×3 ، وتستنتج من الصف الأول أن $x = -4$ ، ومن الصف الثاني أن $y = 3$ ، ومن الصف الثالث أن $z = 6$. وبذلك يكون الحل هو $(-4, 3, 6)$.

تمارين:

اكتب مصفوفة موسعة لكل نظام معادلات مما يأتي، ثم حُلّها باستعمال الآلة الحاسبة البيانية:

$$2x + 2y = -4 \quad (3)$$

$$7x + 3y = 10$$

$$5x - 5y + 5z = 10 \quad (6)$$

$$5x - 5z = 5$$

$$5y + 10z = 0$$

$$2x + y = 6 \quad (2)$$

$$6x - 2y = 0$$

$$6x - 4y + 2z = -4 \quad (5)$$

$$2x - 2y + 6z = 10$$

$$2x + 2y + 2z = -2$$

$$3x + 2y = -4 \quad (1)$$

$$4x + 7y = 13$$

$$4x + 6y = 0 \quad (4)$$

$$8x - 2y = 7$$

المفردات الأساسية

المصفوفة ص 12	الضرب في ثابت ص 21
العنصر ص 12	المحدد ص 35
الرتبة ص 12	محدد من الرتبة الثانية ص 35
مصفوفة الصف ص 13	محدد من الرتبة الثالثة ص 36
مصفوفة العمود ص 13	قاعدة الأقطار ص 36
المصفوفة المربعة ص 13	مصفوفة المعاملات ص 38
المصفوفة الصفيرية ص 13	قاعدة كرامر ص 38
المصفوفات المتساوية ص 13	

اختبر مفرداتك

اختر المفردة الصحيحة من قائمة المفردات أعلاه لتكمل كل عبارة مما يأتي:

- 1) _____ هي ترتيب على هيئة مستطيل لمتغيرات أو أعداد في صفوف أفقية وأعمدة رأسية تكتب بين قوسين.
- 2) عند _____ فإننا نضرب جميع عناصر المصفوفة في ذلك العدد.
- 3) تُسمى المصفوفة التي تحوي الثوابت في نظام المعادلات _____.
- 4) كل قيمة في المصفوفة تُسمى _____.
- 5) يُسمى عدد الصفوف $\times$ عدد الأعمدة في المصفوفة _____ المصفوفة.
- 6) قيمة محدد المصفوفة $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$ يساوي _____.

ملخص الفصل

مفاهيم أساسية

المصفوفات (الدرس 1-1)

- المصفوفة: هي ترتيب على هيئة مستطيل لمتغيرات أو أعداد في صفوف أفقية وأعمدة رأسية تكتب بين قوسين.
- المصفوفات المتساوية لها الرتبة نفسها، وعناصرها المتناظرة متساوية.

العمليات على المصفوفات (الدرس 1-2 و 1-3)

- يمكن جمع المصفوفات أو طرحها إذا كان لها الرتبة نفسها، وذلك بجمع العناصر المتناظرة أو طرحها.
- لضرب مصفوفة في ثابت k ، اضرب كل عنصر من عناصر المصفوفة في هذا العدد.
- يمكن ضرب مصفوفتين إذا وفقط إذا كان عدد أعمدة الأولى يساوي عدد صفوف الثانية.

المحددات وقاعدة كرامر (الدرس 1-4)

- قيمة المحدد من الرتبة الثانية $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ تساوي $ad - bc$.
- لإيجاد قيمة المحدد من الرتبة الثالثة تستعمل قاعدة الأقطار.
- تستعمل قاعدة كرامر؛ لحل أنظمة المعادلات الخطية.

منظم أفكار

مطويتك



تأكد من أن المفاهيم الأساسية مدونة في مطويتك.

مراجعة الدروس

1-1

مقدمة في المصفوفات (الصفحات 12-18)

مثال 1

يُبين الجدول أدناه عدد زوار متحف في الفترة الصباحية والفترة المسائية خلال 3 أيام:

اليوم الثالث	اليوم الثاني	اليوم الأول
26	19	37
75	58	69

(a) اكتب مصفوفة تمثل عدد الزوار.

(b) ما رتبة المصفوفة؟

(c) اجمع عناصر كل من الصفين 1 و 2، وفُسّر النتائج.

مجموع الصف الأول يساوي 82، ويمثل عدد الزوار في الفترة الصباحية. ومجموع الصف الثاني يساوي 202 ويمثل عدد الزوار في الفترة المسائية.

(7) نادٍ رياضي: يُبين الجدول أدناه عدد المشتركين شهريًا وسنويًا في نادٍ رياضي في 3 رياضات مختلفة:

اللياقة البدنية	السباحة	تخفيض الوزن
31	108	64
68	9	42

(a) نفّص بيانات الجدول في مصفوفة.

(b) ما رتبة المصفوفة؟

(c) ما قيمة العنصر a_{23} ؟

(d) ما قيمة العنصر a_{11} ؟

(e) اجمع عناصر كل من الصفين الأول والثاني، وفُسّر النتائج.

1-2

العمليات على المصفوفات (الصفحات 20-25)

مثال 2

أوجد الناتج في كل مما يأتي، إذا كان ذلك ممكنًا:

$$\begin{bmatrix} 2 \\ -6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$3 \left(\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 9 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} \right) \quad (9)$$

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} \text{ إذا كانت } 2B + 3A$$

$$3A = 3 \begin{bmatrix} 9 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 27 & 3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}, 2B = 2 \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 6 & 14 \end{bmatrix}$$

$$2B + 3A = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 6 & 14 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 27 & 3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 29 & 11 \\ 9 & 20 \end{bmatrix}$$

1-3

ضرب المصفوفات (الصفحات 26-33)

مثال 3

أوجد ناتج كل مما يأتي، إذا كان ذلك ممكنًا:

$$\begin{bmatrix} 3 & -7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 9 \\ -5 \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 11 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 8 & -5 \end{bmatrix} \quad (11)$$

(12) اشترى راشد 4 عبوات حليب، و 2 kg من التفاح، و 3 kg من البطاطس، و كيسًا واحدًا من الأرز، وتبين المصفوفة أدناه سعر عبوة الحليب، و 1 kg من التفاح، و 1 kg من البطاطس، وكذلك سعر كيس الأرز.

$$\begin{bmatrix} \text{أرز} & \text{بطاطس} & \text{تفاح} & \text{حليب} \\ 2.5 & 0.3 & 1 & 1.5 \end{bmatrix}$$

استعمل ضرب المصفوفات؛ لإيجاد إجمالي المبلغ الذي دفعه راشد.

$$X = \begin{bmatrix} 0 & -6 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} 8 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ إذا كانت } XY$$

$$XY = \begin{bmatrix} 0 & -6 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 8 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0(8) + (-6)(-1) \\ 3(8) + 5(-1) \end{bmatrix} \quad \text{بضرب الصفوف في الأعمدة}$$

$$= \begin{bmatrix} 6 \\ 19 \end{bmatrix} \quad \text{بالتبسيط}$$

المحددات وقاعدة كرامر (الصفحات 35-42)

1-4

مثال 4

أوجد قيمة $\begin{vmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$

$\begin{vmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 4(5) - 2(-6)$ تعريف المحدد
 $= 20 + 12 = 32$ بالتبسيط

مثال 5

استعمل قاعدة كرامر لحل النظام:

$2a + 6b = -1$, $a + 8b = 2$

$b = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 8 \end{vmatrix}}$ قاعدة كرامر
 $= \frac{4 + 1}{16 - 6}$ بحساب المحددات
 $= \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$ بالتبسيط

$a = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 6 \\ 2 & 8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 8 \end{vmatrix}}$
 $= \frac{-8 - 12}{16 - 6}$
 $= \frac{-20}{10} = -2$
 الحل هو $(-2, \frac{1}{2})$

أوجد قيمة كل محدد مما يأتي:

$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \\ -2 & 5 & 6 \end{vmatrix}$ (14) $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 7 & -3 \end{vmatrix}$ (13)

استعمل قاعدة كرامر لحل كل نظام مما يأتي:

$3x - y = 0$ (15)

$5x + 2y = 22$

$5x + 2y = 4$ (16)

$3x + 4y + 2z = 6$

$7x + 3y + 4z = 29$

(17) اشترت شيماء 3 أساور، وعقدين بمبلغ 85 BD، واشترت ليلي سوارين و 4 عقود بمبلغ 110 BD. إذا كان لكل من العقود والأساور التي اشترتها كل منهما السعر نفسه؛ فأوجد سعر كل من العقد الواحد، والسوار الواحد.

حدد العناصر الآتية للمصفوفة:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 7 \\ 9 & 1 & 1 \\ 8 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

(2) a_{31}

(1) a_{22}

أوجد الناتج في كل مما يأتي، إذا كان ذلك ممكناً:

$$-3 \begin{bmatrix} 4a \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix} + 4 \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$\begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -6 & 0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$\begin{bmatrix} -5 & 7 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 9 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6)$$

(7) **ثقافة مالية:** تبيع مكتبة 3 مجموعات من الكتب التعليمية

للأطفال. ويبيّن الجدول أدناه تكلفة كل مجموعة وسعر بيعها. إذا باعت المكتبة 20 مجموعة من الكتب التربوية، و 32 مجموعة من الكتب العلمية، و 14 مجموعة من القصص.

المجموعة	التكلفة	سعر البيع (BD)
تربوية	10	12
علمية	9	11
قصص	13	15

(a) نظّم البيانات في مصفوفات، ثم استعمل ضرب المصفوفات لإيجاد تكلفة الكتب الكلية.

(b) استعمل ضرب المصفوفات؛ لإيجاد المبلغ الكلي الذي تحصل عليه المكتبة من بيع ذلك العدد من مجموعات الكتب.

(c) استعمل العمليات على المصفوفات لمعرفة ربح المكتبة.

(8) إذا كان $A = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -7 & 5 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} -4 & 7 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ فأوجد ناتج $AB - AC$

(9) استعمل المحددات؛ لإيجاد مساحة سطح $\triangle xyz$ الذي رؤوسه $x(1, 2)$, $y(3, 6)$, $z(-1, 4)$.

(10) **اختيار من متعدد:** أوجد قيمة محدد المصفوفة:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \\ -2 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$\frac{1}{44}$ C -44 A
 $-\frac{1}{44}$ D 44 B

أوجد قيمة محدد المصفوفة في كل مما يأتي:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad (12) \quad \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$\begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} \quad (14) \quad \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 8 & 4 \end{bmatrix} \quad (13)$$

استعمل قاعدة كرامر لحل كل نظام من المعادلات مما يأتي:

$$2x - y = -9 \quad (15)$$

$$x + 2y = 8$$

$$x - y + 2z = 0 \quad (16)$$

$$3x + z = 11$$

$$-x + 2y = 0$$

$$6x + 2y + 4z = 2 \quad (17)$$

$$3x + 4y - 8z = -3$$

$$-3x - 6y + 12z = 5$$

التهيئة للاختبارات المعيارية

أسئلة الإجابات الشبكية

من المحتمل أن تواجه في الاختبارات المعيارية بالإضافة إلى أسئلة الاختيار من متعدد، وأسئلة الإجابات القصيرة، وأسئلة الإجابات المطولة، أسئلة الإجابات الشبكية. ففي هذا النوع من الأسئلة قم بتظليل الإجابة في الدائرة الصحيحة على الورقة المدرجة بحسب إجابتك.

استراتيجيات حل أسئلة الإجابات الشبكية

الخطوة 1

اقرأ المسألة بعناية ثم حلّها.

- تأكد من أن إجابتك لها معنى.
- تحقق من حلك، إذا سمح لك الوقت بذلك.

3			
.	/	/	.
0	0	0	0
1	1	1	1
2	2	2	2
3	3	3	3
4	4	4	4
5	5	5	5
6	6	6	6
7	7	7	7
8	8	8	8
9	9	9	9

			3
.	/	/	.
0	0	0	0
1	1	1	1
2	2	2	2
3	3	3	3
4	4	4	4
5	5	5	5
6	6	6	6
7	7	7	7
8	8	8	8
9	9	9	9

الخطوة 2

اكتب إجابتك في صندوق الإجابة.

- اكتب عددًا واحدًا فقط أو رمزًا في كل صندوق على ورقة الإجابة.
- لا تكتب أي أرقام أو رموز خارج صناديق الإجابة.
- يمكن أن تكون إجابات هذه الأسئلة أعدادًا كلية، أو كسورًا عشرية، أو كسورًا اعتيادية.

3	.	5	
.	/	/	.
0	0	0	0
1	1	1	1
2	2	2	2
3	3	3	3
4	4	4	4
5	5	5	5
6	6	6	6
7	7	7	7
8	8	8	8
9	9	9	9

1	/	4	
.	/	/	.
0	0	0	0
1	1	1	1
2	2	2	2
3	3	3	3
4	4	4	4
5	5	5	5
6	6	6	6
7	7	7	7
8	8	8	8
9	9	9	9

الخطوة 3

أدخل الإجابة في نموذج الإجابة الشبكية.

- ظلّل فقط دائرة واحدة لكل صندوق إجابة، وتأكد أنك ظللت القيمة المناظرة التي في الصندوق.
- ظلّل تظليلًا واضحًا كاملاً.

مثال

اقرأ المسألة، وعيّن المطلوب، ثم استعمل معطيات المسألة لحلّها.

يزيد طول مستطيل عن عرضه بـ 3m. إذا كان محيطه 27m، فأوجد طوله؟

.	/	/	.
0	0	0	0
1	1	1	1
2	2	2	2
3	3	3	3
4	4	4	4
5	5	5	5
6	6	6	6
7	7	7	7
8	8	8	8
9	9	9	9

8	.	2	5
0	0	0	0
1	1	1	1
2	2	2	2
3	3	3	3
4	4	4	4
5	5	5	5
6	6	6	6
7	7	7	7
8	8	8	8
9	9	9	9

اقرأ المسألة بعناية. يمكن حل المسألة باستعمال نظام معادلات. افترض أن x, y تمثل بُعدي المستطيل، والنظام الآتي يمثل هذه الحالة.

$$2x + 2y = 27$$

$$x - y = 3$$

يمكن حل نظام المعادلات جبرياً، ومع ذلك فإن من الأسرع والأسهل استعمال المحددات لحل النظام.

حل المسألة

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 27 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-27 - 6}{-2 - (-2)} = \frac{-33}{-33}$$

$$x = 8.25$$

طول المستطيل 8.25m.

تمارين ومسائل

اقرأ كل مسألة مما يأتي، واستعمل معطيات المسألة لحلها.

(3) أوجد قيمة محدد المصفوفة H ، إذا كانت

$$H = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 3 \\ -5 & -7 & -1 \\ 4 & -8 & 1 \end{bmatrix}$$

حلّ النظام الآتي باستعمال قاعدة كرامر:

$$x - 3y = 5 \quad (4)$$

$$2x + y = 1$$

(1) لدى عائشة 23 ورقة نقدية من الفئات BD 5، BD 10، BD 20. والقيمة الكلية لتلك الأوراق النقدية BD 210. وكان عدد الأوراق النقدية من فئة BD 5 يساوي عدد تلك التي من فئة BD 10. كم ورقة نقدية من فئة BD 5 مع عائشة؟

$$(2) \text{ أوجد قيمة المحدد } \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -3 & 0 \end{vmatrix}$$

أسئلة الاختيار من متعدد

اختر رمز الإجابة الصحيحة في كل مما يأتي:

(1) تُبين المصفوفة L المعدّل الشهري لدرجات الحرارة الصغرى (بالفهرنهايت) في مدينة ما، وتُبين المصفوفة H المعدّل الشهري لدرجات الحرارة العظمى في تلك المدينة.

$$L = \begin{bmatrix} 24.1 & 27.7 & 35.9 \\ 44.1 & 53.6 & 62.2 \\ 66.4 & 64.9 & 57.9 \\ 46.4 & 37.3 & 28.4 \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} 39.9 & 45.2 & 55.3 \\ 65.1 & 74.0 & 82.3 \\ 85.9 & 84.6 & 78.1 \\ 66.9 & 54.5 & 44.3 \end{bmatrix}$$

ما العملية التي يمكن استعمالها؛ لإيجاد الفرق بين المعدّل الشهري لدرجات الحرارة العظمى والمعدّل الشهري لدرجات الحرارة الصغرى في تلك المدينة؟

$$H \times L \quad \text{C} \quad L + H \quad \text{A}$$

$$L - H \quad \text{D} \quad H - L \quad \text{B}$$

(2) ما ناتج $\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 1 \end{bmatrix}$ ، إذا كان ذلك ممكناً؟

$$\begin{bmatrix} 8 & -4 \\ 12 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{C} \quad \begin{bmatrix} -3 \end{bmatrix} \quad \text{A}$$

$$\text{الضرب غير معرف} \quad \text{D} \quad \begin{bmatrix} 11 \end{bmatrix} \quad \text{B}$$

إرشادات للاختبارات

سؤال 2 رتبة حاصل ضرب مصفوفة من الرتبة 1×2 في مصفوفة من الرتبة 2×1 هي 1×1 .

(3) إذا كانت رتبة المصفوفة AB تساوي 3×2 ، ورتبة المصفوفة A تساوي 3×4 . فما رتبة المصفوفة B ؟

$$3 \times 2 \quad \text{C} \quad 2 \times 3 \quad \text{A}$$

$$4 \times 2 \quad \text{D} \quad 3 \times 4 \quad \text{B}$$

(4) إذا كانت $D(-6, 2)$, $E(3, 5)$, $F(8, -7)$ هي رؤوس $\triangle DEF$ ، فما مساحة سطح هذا المثلث؟

$$54.5 \text{ وحدة مربعة} \quad \text{A} \quad 60 \text{ وحدة مربعة} \quad \text{C}$$

$$58 \text{ وحدة مربعة} \quad \text{B} \quad 61.5 \text{ وحدة مربعة} \quad \text{D}$$

(5) تباع مكتبة 3 حجومات من الدفاتر، حجم صغير بسعر 1 BD، وحجم متوسط بسعر 1.5 BD، وحجم كبير بسعر 2 BD، إذا باعت المكتبة 52 دفترًا في أحد الأشهر، وكان عدد الدفاتر المباعة من الحجم المتوسط يزيد على عدد الدفاتر المباعة من الحجم الصغير بـ 7 دفاتر، وكان إجمالي المبيعات 75 BD، فما عدد الدفاتر المباعة من الحجم المتوسط؟

$$24 \quad \text{C} \quad 11 \quad \text{A}$$

$$36 \quad \text{D} \quad 17 \quad \text{B}$$

$$\text{ما رتبة المصفوفة } D = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 9 & 2 \\ 1 & 0 \\ -3 & -5 \end{bmatrix} \quad \text{A} \quad 4 \times 2$$

$$4 \times 8 \quad \text{C} \quad 8 \times 4 \quad \text{D}$$

$$2 \times 4 \quad \text{B}$$

(7) ما قيمة y التي تجعل $\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2y-7 & 3 \end{vmatrix}$ تساوي 0؟

$$-4 \quad \text{A}$$

$$4 \quad \text{B}$$

$$-11 \quad \text{C}$$

$$11 \quad \text{D}$$

أسئلة مقالية

أسئلة ذات إجابات قصيرة

أجب عن كل مما يأتي:

(8) هل يمكن جمع المصفوفتين $A_{3 \times 2}$ و $B_{2 \times 3}$ ؟ برّر إجابتك.

(9) احسب قيمة محدد المصفوفة:

$$W = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & -4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

أسئلة ذات إجابات مطولة

أجب عن كل مما يأتي موضّحاً خطوات الحل:

(10) يستعمل حمد شبكة إحداثيات ليصمم أرضية جديدة في فناء منزله. إذا كانت الأرضية تمثل مثلثاً إحداثيات رؤوسه هي:

$$(2,1), (4,4), (6,0)$$

وكانت كل وحدة على شبكة الإحداثيات تمثل 1 ft على سطح الأرض، فما مساحة سطح الأرضية بالقدم المربعة؟

(11) مع عمر 14 ورقة نقدية من فئة الدينار، وخمسة دنانير. إذا كانت القيمة الكلية لهذه القطع النقدية هي BD42، فاستعمل هذه المعلومات للإجابة عن كل سؤال مما يأتي:

(a) افترض أن d تمثل عدد الأوراق من فئة الدينار الواحد التي يملكها عمر، و q عدد الأوراق من فئة خمسة دنانير التي يملكها. اكتب نظام معادلات يمثل هذه الحالة.

(b) حلّ نظام معادلات في الفرع a باستعمال قاعدة كرامر.

ما عدد الأوراق من فئة الدينار الواحد وفئة خمسة دنانير التي يملكها عمر؟

$$(12) \text{ حل: } \begin{bmatrix} 3x \\ 2y+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ 7 \end{bmatrix}$$

(13) صف بالكلمات متى يمكن ضرب مصفوفتين، ومتى لا يمكن ضربهما، وأعط مثلاً على ذلك.

هل تحتاج إلى مساعدة إضافية؟

13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	إذا لم تستطع الإجابة عن سؤال...
1-3	1-1	1-4	1-4	1-4	1-2	1-4	1-1	1-4	1-4	1-3	1-3	1-2	فأذهب للدرس...

المثلثات القائمة وحساب المثلثات

Right Triangles and Trigonometry

الفصل 2

فيما سبق

درستُ حل التناسب.

والآن

الأفكار العامة

- أجد المسافة بين نقطتين.
- أحلّ مسائل باستعمال الوسط الهندسي ونظرية فيثاغورس وعكسها.
- أستعمل خصائص المثلثات القائمة الخاصة.
- أستعمل حساب المثلثات، لإيجاد قياسات مجهولة في المثلث.

لماذا؟

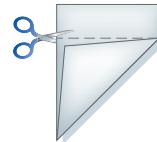
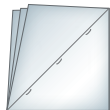
جسور: جسر الشيخ عيسى هو ثاني جسر يربط بين المنامة والمحرق. ويبلغ طوله 254.3m . وقد جرى افتتاحه في 4 يناير 1997 م. وصُمم الشراع القائم عليه على هيئة مثلثات متداخلة مثبتة بدعامات تقسمها إلى مثلثات قائمة.

منظم أفكار

مطويتك

المثلثات القائمة وحساب المثلثات: اعمل هذه المطوية لتساعدك في تنظيم ملاحظاتك للفصل 2 حول المثلثات القائمة وحساب المثلثات، مبتدئاً بثلاث أوراق من دفتر الملاحظات، وورقة رسم واحدة.

- 1 رتب ورق الملاحظات فوق ورقة الرسم.
- 2 اطو الأوراق قطرياً لتكوّن مثلثاً، ثم قصّ الأجزاء الزائدة.
- 3 افرد الأوراق، ثم ثبت الأوراق عند الثنية الداخلية لتكوّن كتيباً.
- 4 اكتب على كل صفحة، عنوان الدرس ورقمه.



التهيئة للفصل الثاني

أجب عن الاختبار الآتي، وارجع إلى "المراجعة السريعة" لمساعدتك في ذلك.

مراجعة سريعة

مثال 1

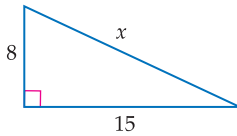
بسّط المقدار $\frac{6}{\sqrt{3}}$.

$$\frac{6}{\sqrt{3}} = \frac{6}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \quad \text{بالضرب في } \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3} \quad \text{بالتبسيط}$$

مثال 2

أوجد قيمة x .



نظرية فيثاغورس $a^2 + b^2 = c^2$

بتعويض $b = 15$ ، $a = 8$

بالتبسيط $8^2 + 15^2 = x^2$

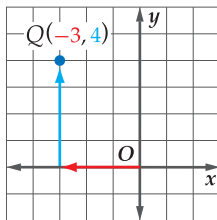
بأخذ الجذر التربيعي للطرفين $\sqrt{289} = \sqrt{x^2}$

بالتبسيط $17 = x$

مثال 3

عيّن النقطة $Q(-3, 4)$ في المستوى الإحداثي.

ابدأ من نقطة الأصل، تحرك على المحور x السالب 3 وحدات، ثم تحرك 4 وحدات رأسياً إلى أعلى. ارسم نقطة، ثم اكتب عليها Q .



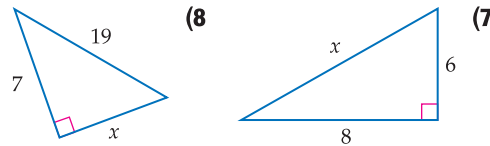
اختبار سريع

بسّط كلّ مما يأتي: (مهارة سابقة)

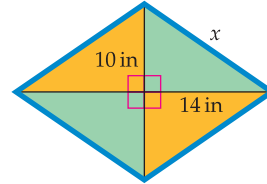
$$\sqrt{15 \cdot 20} \quad (3) \quad \frac{\sqrt{24}}{2\sqrt{3}} \quad (2) \quad \sqrt{112} \quad (1)$$

$$\frac{8\sqrt{2}}{6 - 3\sqrt{8}} \quad (6) \quad \sqrt{\frac{45}{80}} \quad (5) \quad \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{18}}{\sqrt{3}} \quad (4)$$

أوجد قيمة x في كل شكل أدناه: (مهارة سابقة)



(9) شعار: كوّنت سعاد شعاراً باستعمال 4 مثلثات متطابقة كما في الشكل أدناه. ما طول الحافة الزرقاء التي تحتاجها لكل جانب؟ (مهارة سابقة)



عيّن كل نقطة من النقاط الآتية في المستوى

الإحداثي: (مهارة سابقة)

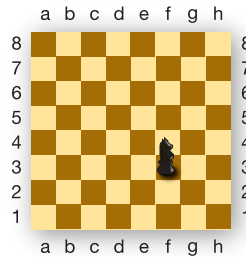
$X(0, 6)$ (11) $W(5, 2)$ (10)

$Z(4, -2)$ (13) $Y(-3, -1)$ (12)

(14) حرّك أحمد الحصان

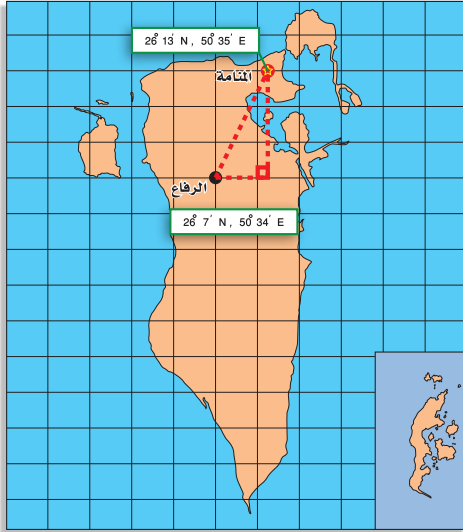
خطوتين إلى الأعلى
وخطوة إلى اليسار. عيّن
موقع الحصان بعد ذلك.

(مهارة سابقة)



المسافة ونقطة المنتصف

Distance and Midpoints



لماذا؟

يُحدّد موقع مدينة على الخريطة بدرجات العرض والطول ، ويمكن حساب المسافات القصيرة باستعمال نظرية فيثاغورس.

المسافة بين نقطتين تُعرّف **المسافة** بين نقطتين بأنها طول القطعة المستقيمة التي طرفاها هاتان النقطتان. ويمكن استعمال إحداثيات النقطتين لحساب المسافة. وبما أن $\overline{PQ}$ هي نفسها $\overline{QP}$ ، فإن الترتيب الذي تُسمى فيه النقطتان ليس له أهمية عند حساب المسافة.

فيما سبق

درست تعيين نقاط في المستوى الإحداثي.

والآن

الأفكار الرئيسية

- أجد المسافة بين نقطتين.
- أجد نقطة منتصف قطعة مستقيمة.

المفردات الأساسية

المسافة

distance

نقطة المنتصف

midpoint

منتصف القطعة المستقيمة

segment bisector

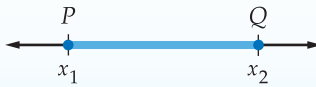
أضف إلى

مطويك

قانون المسافة بين نقطتين (على خط الأعداد)

مفهوم أساسي

التعبير اللفظي المسافة بين نقطتين تساوي القيمة المطلقة للفرق بين إحداثيهما.

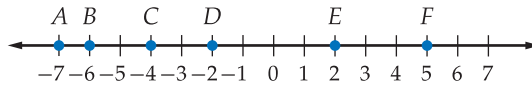


بالرموز إذا كان إحداثي P يساوي x_1 وإحداثي Q يساوي x_2 ، فإن:
 $PQ = |x_2 - x_1| = |x_1 - x_2|$

إيجاد المسافة على خط الأعداد

مثال 1

استعمل خط الأعداد لإيجاد BE .



إحداثي B هو -6 ، وإحداثي E هو 2 .

$$\begin{aligned} BE &= |x_2 - x_1| && \text{قانون المسافة} \\ &= |2 - (-6)| && \text{بتعويض } x_2 = 2, x_1 = -6 \\ &= 8 && \text{بالتبسيط} \end{aligned}$$

تأكد

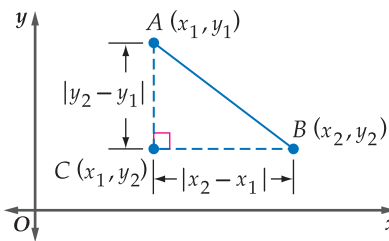


استعمل خط الأعداد أعلاه لإيجاد كل من القياسات الآتية:

BF (1C)

CF (1B)

AC (1A)



لايجاد المسافة بين النقطتين A, B في المستوى الإحداثي يمكن تكوين مثلث قائم الزاوية وتره $\overline{AB}$ ، ورأس زاويته القائمة C . وبعد ذلك يمكن حساب AB باستعمال نظرية فيثاغورس.

$$\begin{aligned} (CB)^2 + (AC)^2 &= (AB)^2 && \text{نظرية فيثاغورس} \\ (|x_2 - x_1|)^2 + (|y_2 - y_1|)^2 &= (AB)^2 && CB = |x_2 - x_1|, AC = |y_2 - y_1| \\ (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 &= (AB)^2 && \text{مربع العدد يكون دائماً موجباً} \\ \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} &= AB && \text{بأخذ الجذر التربيعي لكلا الطرفين} \end{aligned}$$

وهذا هو قانون المسافة بين نقطتين في المستوى الإحداثي.

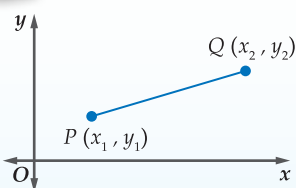
إرشادات للدراسة

نظرية فيثاغورس تذكر أن نظرية فيثاغورس تكتب على الصورة $a^2 + b^2 = c^2$ حيث يمثل a, b طولي ضلعي الزاوية القائمة، ويمثل c طول الوتر.

مفهوم أساسي

قانون المسافة بين نقطتين (في المستوى الإحداثي)

أضف إلى مطويتك



إذا كانت النقطة P هي (x_1, y_1) والنقطة Q هي (x_2, y_2) ، فإن:

$$PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

وكما هو في الإحداثيات على خط الأعداد،

فإن ترتيب الإحداثيات x ، والإحداثيات y في كل من القوسين ليس ذا أهمية.

مثال 2

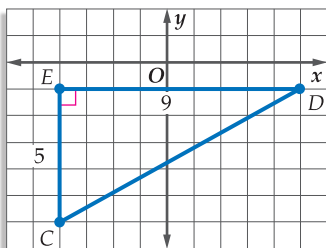
إيجاد المسافة في المستوى الإحداثي

أوجد المسافة بين النقطتين $C(-4, -6), D(5, -1)$.

$$\begin{aligned} CD &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} && \text{قانون المسافة} \\ &= \sqrt{[5 - (-4)]^2 + [-1 - (-6)]^2} && (x_1, y_1) = (-4, -6), (x_2, y_2) = (5, -1) \\ &= \sqrt{9^2 + 5^2} && \text{بالطرح} \\ &= \sqrt{81 + 25} = \sqrt{106} && \text{بالتبسيط} \end{aligned}$$

إذن المسافة بين C, D هي $\sqrt{106}$ وحدة. وباستعمال الآلة الحاسبة تجد أن $\sqrt{106}$ يساوي 10.3 وحدات تقريباً.

تحقق عيّن النقطتين في المستوى الإحداثي، وتحقق من صحة الحل باستعمال نظرية فيثاغورس.



$$(CD)^2 = (EC)^2 + (ED)^2$$

$$(CD)^2 = 5^2 + 9^2$$

$$(CD)^2 = 106$$

$$CD = \sqrt{106} \checkmark$$

تأكد

أوجد المسافة بين كل نقطتين مما يأتي:

$$J(4, 3), K(-3, -7) \quad (2B)$$

$$E(-5, 6), F(8, -4) \quad (2A)$$

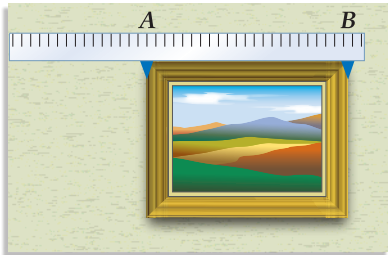
نقطة منتصف قطعة مستقيمة **نقطة منتصف** القطعة المستقيمة هي النقطة التي تقع في منتصف المسافة بين طرفي القطعة المستقيمة. إذا كانت X نقطة منتصف $\overline{AB}$ ، فإن $AX = XB$ ، وتكون $\overline{AX} \cong \overline{XB}$. ويمكن إيجاد نقطة منتصف قطعة مستقيمة على خط الأعداد بإيجاد وسط طرفيها.

مفهوم أساسي **قانون نقطة منتصف قطعة مستقيمة (على خط الأعداد)**

أضف إلى طويكتك

إذا كان x_1, x_2 طرفي $\overline{AB}$ على خط الأعداد، فإن M نقطة منتصف $\overline{AB}$ هو $\frac{x_1 + x_2}{2}$.

إيجاد نقطة منتصف قطعة مستقيمة على خط الأعداد



زينة: يعلق أحمد صورة على حائط، بحيث تبعد الحافة اليسرى للصورة 15 in عن الجانب الأيسر للحائط. على أي بُعد عن الجانب الأيسر للحائط يجب أن يضع أحمد المسمار الذي يعلق عليه الصورة، إذا كانت الحافة اليمنى للصورة تبعد 37.5 in عن الجانب الأيسر للحائط؟

طرفا الحافة العلوية لإطار الصورة هما 15 in، 37.5 in، إذن، M نقطة منتصف $\overline{AB}$ ، هي:

$$\begin{aligned} \text{قانون نقطة المنتصف} \\ & \frac{x_1 + x_2}{2} \\ & = \frac{15 + 37.5}{2} \quad \text{بتعويض } x_1 = 15, x_2 = 37.5 \\ & = \frac{52.5}{2} = 26.25 \quad \text{بالتبسيط} \end{aligned}$$

إذن، يضع أحمد المسمار عند نقطة منتصف $\overline{AB}$ التي تبعد 26.25 in أو $26\frac{1}{4}$ in عن الجانب الأيسر للحائط.

تأكد ✓

(3) درجة حرارة: هبطت درجة الحرارة على ميزان الحرارة من القراءة 25° إلى -8° . أوجد نقطة منتصف هاتين الدرجتين.

ويمكن إيجاد نقطة منتصف قطعة مستقيمة في المستوى الإحداثي بإيجاد وسط الإحداثيين x ، ووسط الإحداثيين y لطرفي القطعة المستقيمة.

مفهوم أساسي **قانون نقطة منتصف قطعة مستقيمة (في المستوى الإحداثي)**

أضف إلى طويكتك

إذا كانت $P(x_1, y_1)$ ، $Q(x_2, y_2)$ طرفي $\overline{PQ}$ في المستوى الإحداثي، فإن M نقطة منتصف $\overline{PQ}$ هي:

$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

إن ترتيب إحداثيات طرفي القطعة المستقيمة ليس مهماً عند إيجاد إحداثي نقطة منتصفها.

إرشادات للدراسة

طريقة بديلة

في المثال 3 يمكن إيجاد نقطة المنتصف بإيجاد طول $\overline{AB}$ أولاً وهو $37.5 - 15 = 22.5$ in. وستبعد نقطة المنتصف عن A نصف المسافة بين A ، B أو $\frac{22.5}{2} = 11.25$ in. اجمع هذه المسافة إلى بُعد النقطة A عن الجانب الأيسر للحائط، ولذلك، فإن نقطة المنتصف بين A ، B تبعد $15 + 11.25 = 26.25$ in عن الجانب الأيسر للحائط.

إيجاد نقطة المنتصف في المستوى الإحداثي

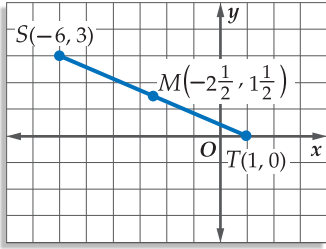
مثال 4

أوجد إحداثيي النقطة M ، نقطة منتصف $\overline{ST}$ ، إذا كانت $S(-6, 3)$ ، $T(1, 0)$.

$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right) \quad \text{قانون نقطة المنتصف}$$

$$= M\left(\frac{-6 + 1}{2}, \frac{3 + 0}{2}\right) \quad \begin{array}{l} \text{بتعويض} \\ (x_1, y_1) = S(-6, 3), \\ (x_2, y_2) = T(1, 0) \end{array}$$

$$= M\left(-\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right) = M\left(-2\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}\right) \quad \text{بالتبسيط}$$



تحقق عيّن النقاط S ، T ، M في المستوى الإحداثي. تلاحظ أن المسافة من S إلى M تبدو مساوية فعلاً للمسافة من M إلى T . لذا، فإن الحل معقول.

تأكد

أوجد إحداثيي نقطة منتصف القطعة المستقيمة المُعطى إحداثيات طرفيها في كل مما يأتي:

(4A) $A(5, 12)$ ، $B(-4, 8)$

(4B) $C(-8, -2)$ ، $D(5, 1)$

ويمكن أيضًا أن تجد إحداثيي طرف قطعة مستقيمة، إذا علمت إحداثيي نقطة منتصفها وإحداثيي طرفها الآخر.

إيجاد إحداثيي أحد طرفي قطعة مستقيمة

مثال 5

أوجد إحداثيي J ، إذا كانت $K(-1, 2)$ نقطة منتصف $\overline{JL}$ ، وكانت $L(3, -5)$.

الخطوة 1 افترض أن $J(x_1, y_1)$ ، وأن $L(x_2, y_2)$ ، وبالتعويض في قانون نقطة المنتصف ينتج أن:

$$K\left(\frac{x_1 + 3}{2}, \frac{y_1 + (-5)}{2}\right) = K(-1, 2) \quad (x_2, y_2) = (3, -5)$$

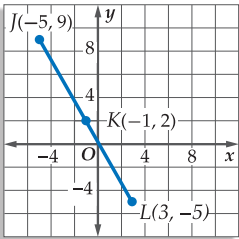
الخطوة 2 اكتب معادلتين لإيجاد إحداثيي J .

$$\frac{x_1 + 3}{2} = -1 \quad \text{قانون نقطة المنتصف} \quad \frac{y_1 + (-5)}{2} = 2$$

$$x_1 + 3 = -2 \quad \text{بضرب كل من الطرفين في 2} \quad y_1 - 5 = 4$$

$$x_1 = -5 \quad \text{بطرح 3 من كلا الطرفين} \quad y_1 = 9 \quad \text{بإضافة 5 لكلا الطرفين}$$

إذن، إحداثيا J هما $(-5, 9)$.



تحقق عيّن النقاط J ، K ، L في المستوى الإحداثي. تلاحظ أن المسافة من J إلى K تبدو مساوية فعلاً للمسافة من K إلى L . لذا، فإن الحل معقول.

تأكد

أوجد إحداثيي النقطة المجهولة في كل مما يأتي، علمًا بأن P منتصف $\overline{EG}$.

(5A) $E(-8, 6)$ ، $P(-5, 10)$

(5B) $P(-1, 3)$ ، $G(5, 6)$

إرشادات للدراسة

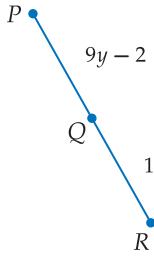
التحقق من المعقولية

عيّن دائمًا النقاط المملومة، والإحداثيين اللذين جرى حسابهما للنقطة الثالثة؛ كي تتحقق من معقولية الحل.

يمكن استعمال الجبر لإيجاد طول مجهول، أو قيمة مجهولة في شكل يتضمن نقطة منتصف قطعة مستقيمة.

استعمال الجبر لإيجاد أطوال

مثال 6



جبر: أوجد طول PQ ، إذا كانت Q نقطة منتصف $\overline{PR}$.

افهم

تعلم أن Q نقطة منتصف $\overline{PR}$. وطلب منك إيجاد طول $\overline{PQ}$.

خطط

بما أن Q نقطة المنتصف، فإن $PQ = QR$. استعمل هذه المعادلة لإيجاد قيمة y .

حل

تعريف نقطة المنتصف $PQ = QR$

$$9y - 2 = 14 + 5y \quad PQ = 9y - 2, QR = 14 + 5y$$

$$4y - 2 = 14 \quad \text{بطرح } 5y \text{ من كلا الطرفين}$$

$$4y = 16 \quad \text{بإضافة 2 إلى كلا الطرفين}$$

$$y = 4 \quad \text{بقسمة كلا الطرفين على 4}$$

والآن عوض عن قيمة y بـ 4 في التعبير الذي يمثل طول $\overline{PQ}$.

$$PQ = 9y - 2 \quad \text{الطول المعطى}$$

$$= 9(4) - 2 \quad \text{بتعويض } y = 4$$

$$= 36 - 2 = 34 \quad \text{بالتبسيط}$$

إذن، طول $\overline{PQ}$ يساوي 34.

تحقق

بما أن $PQ = QR$ ، فإذا عوضنا قيمة $y = 4$ في التعبير الذي يمثل طول $\overline{QR}$ ، فسيكون هذا الطول 34 أيضًا.

$$QR = 14 + 5y \quad \text{الطول المعطى}$$

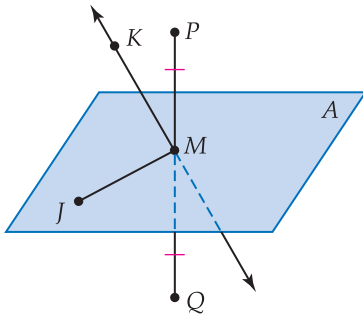
$$= 14 + 5(4) \quad \text{بتعويض } y = 4$$

$$= 34 \quad \text{بالتبسيط}$$

تأكد

6A أوجد طول $\overline{YZ}$ ، إذا كانت Y نقطة منتصف $\overline{XZ}$ ، وكان $XY = 2x - 3$ ، $YZ = 27 - 4x$.

6B أوجد قيمة x ، إذا كانت C نقطة منتصف $\overline{AB}$ ، وكان $AC = 4x + 5$ ، $AB = 78$.



كل قطعة مستقيمة أو مستقيم أو مستوى يقطع قطعة مستقيمة في نقطة منتصفها، يسمى **منتصف القطعة المستقيمة**. في الشكل المجاور، M نقطة منتصف $\overline{PQ}$. المستوى A ، و $\overline{MJ}$ ، و $\overline{KM}$ ، والنقطة M تُعد جميعها منصفات للقطعة $\overline{PQ}$. ونقول عنها: إنها تنصف $\overline{PQ}$.

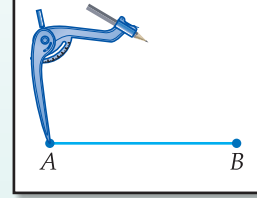
ويوضّح الإنشاء الهندسي في الصفحة التالية طريقة إنشاء مستقيم ينصف قطعة مستقيمة لتحديد نقطة منتصف قطعة مستقيمة معلومة.

إرشادات للدراسة

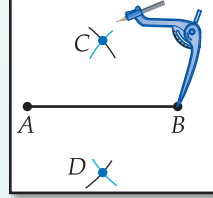
منصفات القطعة

المستقيمة يمكن أن يكون للقطعة المستقيمة عدد غير محدود من المنصفات، ويجب أن يحتوي كل منها نقطة منتصف تلك القطعة المستقيمة.

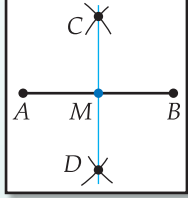
الخطوة 1 ارسم قطعة مستقيمة وسمها $\overline{AB}$. وضع رأس الفرجار عند A ، وافتحه فتحة أكبر من نصف طول $\overline{AB}$. ارسم قوسين أحدهما فوق $\overline{AB}$ والآخر تحتها.



الخطوة 2 باستعمال فتحة الفرجار نفسها. ضع رأس الفرجار عند النقطة B ، وارسم قوسين يقطعان القوسين اللذين رسمتهما في الخطوة 1. سمّ نقطتي التقاطع C, D .



الخطوة 3 استعمل مسطرة غير مدرجة لرسم $\overline{CD}$. سمّ نقطة تقاطعها مع $\overline{AB}$ بالحرف M . النقطة M هي نقطة منتصف $\overline{AB}$ ، وتُعد $\overline{CD}$ منصفًا للقطعة $\overline{AB}$.



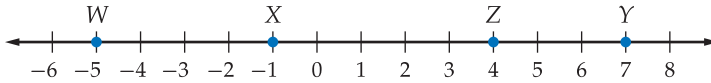
تأكد من فهمك



استعمل خط الأعداد؛ لإيجاد كل مما يأتي:

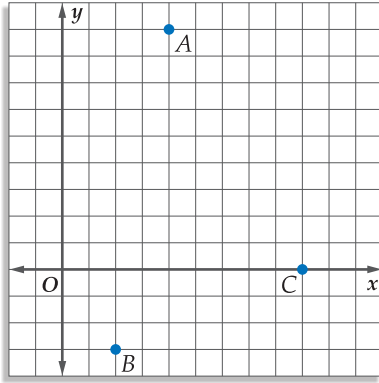
مثال 1

صفحة 54



WZ (2)

XY (1)



أشجار: يزرع طلاب الصف الثالث الثانوي في إحدى المدارس الثانوية شجرة في حديقة المدرسة، واستمر هذا التقليد أكثر من 20 سنة. يُبين الشكل المجاور مواقع ثلاث أشجار. أوجد المسافة بين كل زوج من هذه الأشجار.

(3) $A(4, 9), B(2, -3)$

(4) $A(4, 9), C(9, 0)$

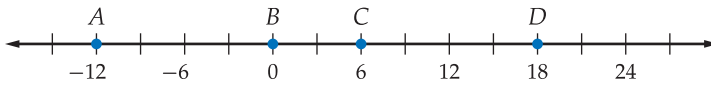
(5) $B(2, -3), C(9, 0)$

(6) أي شجرتين من هذه الأشجار الثلاث أقرب إلى بعضهما؟ وأي شجرتين الأبعد عن بعضهما؟

مثال 2

صفحة 55

استعمل خط الأعداد؛ لإيجاد إحداثي نقطة منتصف كل من القطعتين المستقيمتين الآتيتين:



$\overline{BD}$ (8)

$\overline{AC}$ (7)

مثال 3

صفحة 56

أوجد إحداثي نقطة منتصف القطعة المستقيمة المُعطى إحداثيات طرفيها في كل مما يأتي:

(10) $M(7, 1), N(4, -1)$

(9) $J(5, -3), K(3, -8)$

مثال 4

صفحة 57

مثال 5

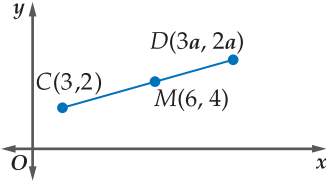
صفحة 57

مثال 6

صفحة 58

(11) أوجد إحداثيي G، إذا كانت F(1, 3.5) نقطة منتصف $\overline{GJ}$ ، وكانت J(6, -2).

(12) جبر: النقطة M هي منتصف $\overline{CD}$. ما قيمة a في الشكل المجاور؟

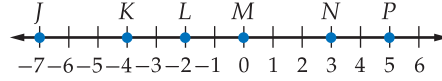


تدرب وحل المسائل

مثال 1

صفحة 54

استعمل خط الأعداد؛ لإيجاد كل مما يأتي:



KP (15)

JK (14)

JL (13)

LN (18)

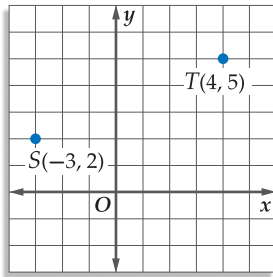
JP (17)

NP (16)

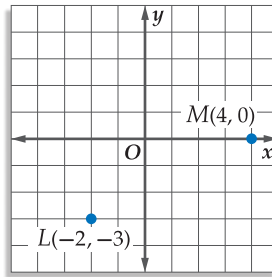
أوجد المسافة بين كل نقطتين في كل مما يأتي:

مثال 2

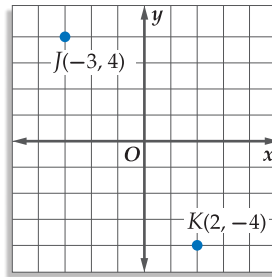
صفحة 55



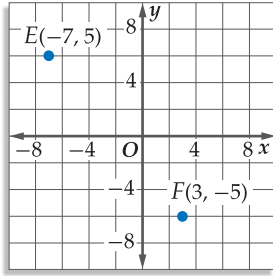
(21)



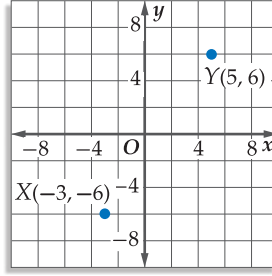
(20)



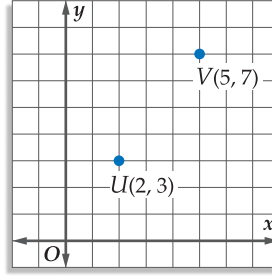
(19)



(24)



(23)



(22)

M(-3, 8), N(-5, 1) (27)

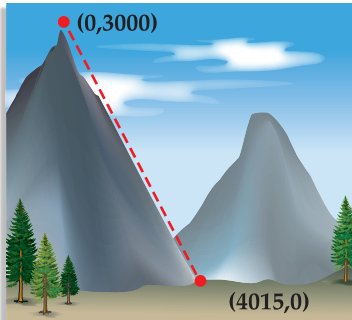
P(3, 4), Q(7, 2) (26)

X(1, 2), Y(5, 9) (25)

C(5, 1), D(3, 6) (30)

A(2, 4), B(5, 7) (29)

Y(-4, 9), Z(-5, 3) (28)



(31) تسلق الجبال: يُخطّط منصور لتسلق قمة جبل السودة بأبها في المملكة العربية السعودية خلال رحلة مع عائلته في إجازة الربيع. يظهر في الشكل إحداثيات قمة الجبل، وإحداثيات نقطة الانطلاق للمسار الذي سيسلكه في تسلق الجبل. إذا أمكن تقرب المسار إلى مستقيم، فقدر طول هذا المسار بالأمطار.

الربط مع واقع الحياة

يسبب الصعود إلى ارتفاعات عالية (أكثر من 8000 ft) غثيان الارتفاع؛ بسبب نقص كثافة الأوكسجين في الهواء. ويجب إعطاء الجسم فرصة للتأقلم مع ارتفاعات جديدة قبل ممارسة مثل هذه الأنشطة.

المصدر:

Encyclopedia Britannica

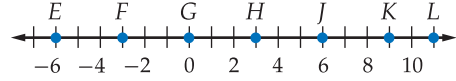
(32) **خرائط:** تبين الخريطة أدناه موقعي كل من أحمد و خليل.



(a) إذا مثل كل مربع على الشبكة 60 m ، وكان موقع نقطة الأصل في الركن الأسفل في الشبكة ، فما المسافة بين أحمد و خليل؟

(b) تحرك أحمد 180 m إلى الشمال، وتحرك خليل 300 m إلى الغرب، كم تصبح المسافة بينهما؟

استعمل خط الأعداد؛ لإيجاد إحداثي نقطة منتصف كل من القطع المستقيمة الآتية:



$\overline{EF}$ (35)

$\overline{JL}$ (34)

$\overline{HK}$ (33)

$\overline{EL}$ (38)

$\overline{FK}$ (37)

$\overline{FG}$ (36)

مثال 3

صفحة 56

أوجد إحداثي نقطة منتصف القطعة المستقيمة المُعطى إحداثيات طرفيها في كل مما يأتي:

$C(22, 4), B(15, 7)$ (39)

$W(12, 2), X(7, 9)$ (40)

$D(-15, 4), E(2, -10)$ (41)

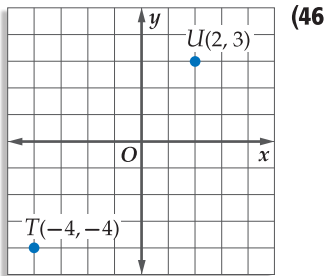
$V(-2, 5), Z(3, -17)$ (42)

$X(-2.4, -14), Y(-6, -6.8)$ (43)

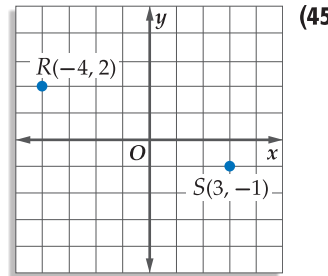
$J(-11.2, -3.4), K(-5.6, -7.8)$ (44)

مثال 4

صفحة 57



(46)



(45)

أوجد إحداثيي النقطة المجهولة، إذا كانت B منتصف $\overline{AC}$ في كل مما يأتي:

$A(-4, 2), B(6, -1)$ (49) $A(1, 7), B(-3, 1)$ (48) $C(-5, 4), B(-2, 5)$ (47)

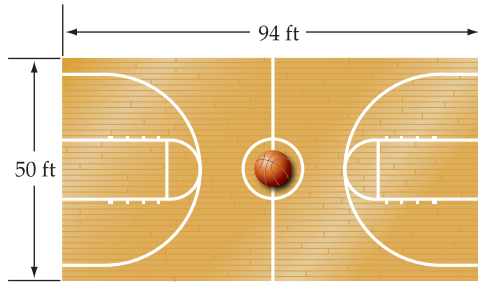
$C(\frac{5}{3}, -6), B(\frac{8}{3}, 4)$ (52) $A(4, -0.25), B(-4, 6.5)$ (51) $C(-6, -2), B(-3, -5)$ (50)

جبر: افرض أن M نقطة منتصف $\overline{FG}$. استعمل المعلومات المعطاة؛ لإيجاد الطول المجهول، أو القيمة المجهولة في كل مما يأتي:

$FM = 5y + 13, MG = 5 - 3y, FG = ?$ (54) $FM = 3x - 4, MG = 5x - 26, FG = ?$ (53)

$FM = 8a + 1, FG = 42, a = ?$ (56) $MG = 7x - 15, FG = 33, x = ?$ (55)

(57) **كرة السلة:** يُبين الشكل أدناه أبعاد ملعب كرة السلة. افترض أن لاعباً رمى الكرة من الركن السفلي الأيمن للملعب إلى لاعب آخر من فريقه في مركز الملعب.



(a) إذا كان مركز الملعب في نقطة الأصل، فأوجد الإحداثيين اللذين يمثلان موقع اللاعب الذي رمى الكرة.

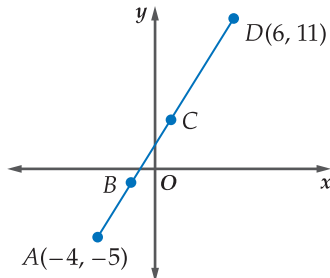
(b) أوجد المسافة بين اللاعبين.

سمّ النقطة (أو النقاط) في كل من الحالات الآتية:

(58) نقطتان على المحور x تبعدان 10 وحدات عن $(1, 8)$.

(59) نقطتان على المحور y تبعدان 25 وحدة عن $(-24, 3)$.

(60) **هندسة إحداثية:** أوجد إحداثيي B ، إذا كانت B منتصف $\overline{AC}$ ، وكانت C منتصف $\overline{AD}$.



جبر: حدّد قيمة (أو قيم) n في كل مما يأتي:

$J(n, n + 2), K(3n, n - 1), JK = 5$ (61)

$P(3n, n - 7), Q(4n, n + 5), PQ = 13$ (62)



63) جغرافيا: تقع مدينة المنامة عند (26، 50)، التي تمثل نقطة تقاطع خطي الطول والعرض. وتقع كذلك مدينة دبي عند (25، 55).

(a) أوجد نقطة تقاطع خطي الطول والعرض لنقطة منتصف القطعة الواصلة بين مدينتي المنامة ودبي.

(b) استعمل الأطلس أو الإنترنت لتجد المدينة القريبة من موقع نقطة المنتصف بين المنامة ودبي.

(c) احسب المسافة بين المنامة ودبي حسب موقعهما على خطي الطول والعرض.

(d) استعمل الأطلس أو الإنترنت في إيجاد المسافة الفعلية بين المنامة ودبي، وقارنها بإجابتك في الفرع c.

64) تمثيلات متعددة: في هذا التمرين سوف تستكشف العلاقة بين نقطة منتصف قطعة مستقيمة، ونقطة المنتصف بين أحد طرفي القطعة ونقطة منتصفها.

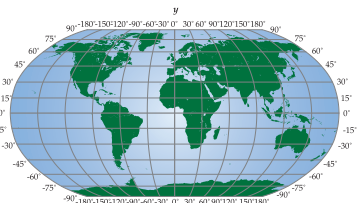
(a) هندسي: استعمل مسطرة غير مدرّجة لرسم ثلاث قطع مستقيمة مختلفة، ثم سمّ طرفي كل قطعة A, B .

(b) جبري: أوجد نقطة منتصف كل قطعة وسمّها C ، ثم أوجد نقطة منتصف $\overline{AC}$ وسمّها D .

(c) جدولة: قس طول كل من $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}$ ، وسجّل الأطوال في جدول.

(d) جبري: إذا كان $AB = x$ ، فاكتب تعبيراً جبرياً للطولين AC, AD .

(e) تعبير لفظي: كوّن تخميناً عن العلاقة بين AB وكل قطعة إذا واصلت إيجاد نقطة المنتصف بين طرف القطعة والمنتصف الذي وجدته قبله.



الربط مع واقع الحياة

خطوط العرض توازي خط الاستواء، وهي تبين المسافة شمالاً وجنوباً، في حين تُبين خطوط الطول المسافات شرقاً وغرباً من خط الطول الأساسي الذي يمر بمدينة جرينتش في إنجلترا.

المصدر: National Geographic

مسائل مهارات التفكير العليا

65) اكتب: اشرح العلاقة بين نظرية فيثاغورس، وقانون المسافة بين نقطتين.

66) تبرير: هل النقطة التي تبعد عن (x_1, y_1) ثلث المسافة بين (x_2, y_2) و (x_1, y_1) ، هي النقطة $\left(\frac{x_1 + x_2}{3}, \frac{y_1 + y_2}{3}\right)$ دائماً، أو أحياناً، أو ليست تلك النقطة أبداً؟ وضح إجابتك.

67) تحدّ: تقع النقطة P على القطعة التي طرفاها $A(1, 4), D(7, 13)$. والمسافة من A إلى P تساوي مثلي المسافة من P إلى D ، ما إحداثيا النقطة P ؟

68) مسألة مفتوحة: ارسم قطعة مستقيمة وسمّها $\overline{AB}$. أنشئ باستعمال الفرجار ومسطرة غير مدرّجة القطعة $\overline{CD}$ ، بحيث يكون $CD = 5\frac{1}{4}AB$. اشرح الإنشاء الهندسي، وبرّر إجابتك.

69) اكتب: صف طريقة لإيجاد منتصف قطعة مستقيمة يكون أحد طرفيها $(0, 0)$. أعط مثلاً تستعمل فيه هذه الطريقة، وشرح لماذا تكون هذا الطريقة صحيحة.

(70) إذا كانت $A(0, 3)$ ، $B(-3, 0)$ ، فإن نقطة منتصف $\overline{AB}$ هي:

A $(-3, 3)$

B $(0, 0)$

C $(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$

D $(-1, 1)$

(71) إذا كانت $X(-2, 0)$ ، $Y(2, 3)$ ، فما طول $\overline{XY}$ ؟

F $\sqrt{3}$

G $\sqrt{7}$

H 3

J 5

(72) أحد طرفي $\overline{AB}$ هي $(-3, 5)$. إذا كانت نقطة منتصف $\overline{AB}$ هي $(2, -6)$ ، فما الطول التقريبي لـ $\overline{AB}$ ؟

مراجعة تراكمية

أوجد قيمة كل مما يأتي: (الدرس 1-4)

$$\begin{vmatrix} 8 & 6 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} \quad (75)$$

$$\begin{vmatrix} -3 & -5 \\ -1 & -9 \end{vmatrix} \quad (74)$$

$$\begin{vmatrix} 6 & -3 \\ -1 & 8 \end{vmatrix} \quad (73)$$

مراجعة المتطلبات السابقة

بسّط كلّاً مما يأتي:

$$\sqrt{3 \times 27} \quad (77)$$

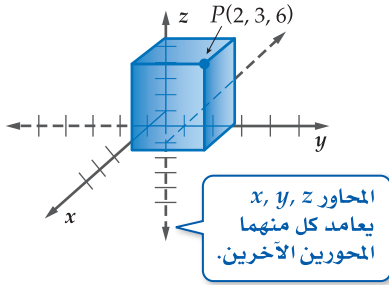
$$\sqrt{4 \times 16} \quad (76)$$

$$\sqrt{33 \times 21} \quad (79)$$

$$\sqrt{15 \times 16} \quad (78)$$

الإحداثيات في الفضاء

Coordinates in Space



لقد استعملت الأزواج المرتبة المكوّنة من إحداثيين؛ لتحديد موقع نقطة في المستوى الإحداثي. وبما أن للفضاء ثلاثة أبعاد، لذا، يلزم لتحديد موقع نقطة في الفضاء معرفة ثلاثة أعداد أو إحداثيات. وعليه، تُمثّل أية نقطة في الفضاء **بثلاثي مرتب** من الأعداد الحقيقية (x, y, z) . يحدّد الثلاثي المرتب $(2, 3, 6)$ النقطة P في الشكل المجاور. لاحظ أننا استعملنا متوازي متسطيلات للمساعدة في تخيل موقع النقطة.

نشاط 1 تمثيل متوازي المستطيلات بيانياً

مثّل بيانياً متوازي المستطيلات الذي له رأسان هما $L(4, -5, 2)$ ، ونقطة الأصل، ثم حدّد الرؤوس الأخرى له.

الخطوة 1 عيّن الإحداثي x أولاً. ارسم قطعة مستقيمة من نقطة الأصل طولها 4 وحدات بالاتجاه الموجب.

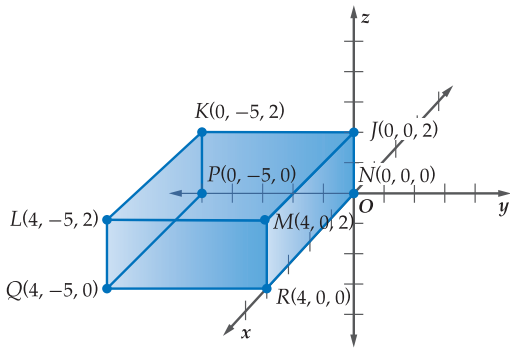
الخطوة 2 لتعيّن الإحداثي y ، ارسم قطعة مستقيمة طولها 5 وحدات بالاتجاه السالب.

الخطوة 3 لرسم الإحداثي z ، ارسم قطعة مستقيمة بطول وحدتين في الاتجاه الموجب.

الخطوة 4 عيّن النقطة L .

الخطوة 5 ارسم متوازي المستطيلات، وعيّن كل رأس:

$L(4, -5, 2)$, $K(0, -5, 2)$, $J(0, 0, 2)$, $M(4, 0, 2)$, $Q(4, -5, 0)$, $P(0, -5, 0)$, $N(0, 0, 0)$, $R(4, 0, 0)$



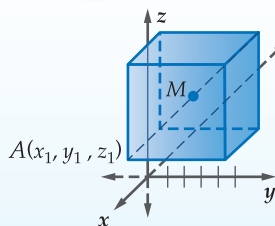
تشبه طريقة إيجاد المسافة بين نقطتين، ونقطة منتصف قطعة مستقيمة في الفضاء، طريقة إيجاد المسافة، ونقطة المنتصف في المستوى الإحداثي.

أضف إلى

مطوّبتك

قانونا المسافة ونقطة المنتصف في الفضاء

مفهوم أساسي



إذا كانت $A(x_1, y_1, z_1)$ ، $B(x_2, y_2, z_2)$ ، فإن:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

ونقطة منتصف $\overline{AB}$ هي:

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2} \right)$$

الإحداثيات في الفضاء

Coordinates in Space

نشاط 2 قانون المسافة ونقطة المنتصف في الفضاء

افترض أن $K(-4, -5, 11)$ ، $J(2, 4, 9)$.

(a) أوجد JK .

$$\begin{aligned} JK &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \\ &= \sqrt{(-4 - 2)^2 + (-5 - 4)^2 + (11 - 9)^2} \\ &= \sqrt{121} \\ &= 11 \end{aligned}$$

قانون المسافة في الفضاء

بالتعويض

بالتبسيط

باستعمال الآلة الحاسبة

(b) عيّن إحداثي M نقطة منتصف JK .

$$\begin{aligned} &\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2} \right) \\ &= M \left(\frac{2 + (-4)}{2}, \frac{4 + (-5)}{2}, \frac{9 + 11}{2} \right) \\ &= M \left(-1, -\frac{1}{2}, 10 \right) \end{aligned}$$

قانون نقطة المنتصف في الفضاء

بالتعويض

بالتبسيط

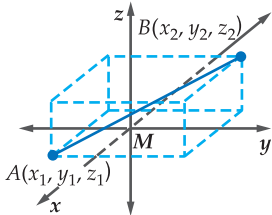
تمارين :

ارسم متوازي المستطيلات الذي رأساه النقطة المعطاة، ونقطة الأصل لكل ممّا يأتي، واكتب إحداثيات كل رأس:

- | | | |
|---------------------|---------------------|-------------------|
| $A(2, 1, 5)$ (1) | $P(-1, 4, 2)$ (2) | $C(-2, 2, 2)$ (3) |
| $R(3, -4, 1)$ (4) | $P(4, 6, -3)$ (5) | $G(4, 1, -3)$ (6) |
| $K(-2, -4, -4)$ (7) | $W(-1, -3, -6)$ (8) | $W(3, 3, 4)$ (9) |

أوجد المسافة بين النقطتين في كل ممّا يأتي، ثم أوجد إحداثي M نقطة منتصف القطعة المستقيمة التي تصل بينهما:

- | | |
|---|--|
| $D(0, 0, 0), E(1, 5, 7)$ (10) | $G(-3, -4, 6), H(5, -3, -5)$ (11) |
| $K(2, 2, 0), L(-2, -2, 0)$ (12) | $P(-2, -5, 8), Q(3, -2, -1)$ (13) |
| $A(4, 7, 9), B(-3, 8, -8)$ (14) | $W(-12, 8, 10), Z(-4, 1, -2)$ (15) |
| $F\left(\frac{3}{5}, 0, \frac{4}{5}\right), G(0, 3, 0)$ (16) | $G(1, -1, 6), H\left(\frac{1}{5}, -\frac{2}{5}, 2\right)$ (17) |
| $B(\sqrt{3}, 2, 2\sqrt{2}), C(-2\sqrt{3}, 4, 4\sqrt{2})$ (18) | $T(4\sqrt{3}, 5, \sqrt{2}), S(6\sqrt{3}, 4, 4\sqrt{2})$ (19) |



(20) **برهان:** اكتب برهاناً إحدائياً لقانون المسافة بين نقطتين في الفضاء.

المعطيات: $B(x_2, y_2, z_2)$ ، $A(x_1, y_1, z_1)$

المطلوب: إثبات أن $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

(21) **اكتب:** بين أوجه الشبه والاختلاف بين قانوني المسافة ونقطة المنتصف في المستوى الإحداثي، وفي الفضاء الثلاثي الأبعاد.

إرشادات

لحل المسألة

البرهان الإحداثي هو برهان يستعمل الأشكال في المستوى الإحداثي والجبر والمفاهيم الهندسية.

الوسط الهندسي

Geometric Mean



لماذا؟

يمكن أن يكون تصوير المعالم العالية أو الممتدة تحدّيًا، إذ من الصعب أن تحتوي صورة واحدة على المنظر كله في لقطة واحدة من آلة التصوير، من دون حدوث تشويه لها. إذا وضعت آلة التصوير بحيث تكون زاوية النظر رأسية قياسها 90° ، وكنت تعلم ارتفاع الجسم الذي ترغب في تصويره، فيمكنك استعمال الوسط الهندسي للمسافة من قمة الجسم إلى مستوى آلة التصوير، والمسافة بين قاعدة الجسم ومستوى الآلة.

فيما سبق

درست استعمال علاقات التناسب لمنصفات الزوايا المتناظرة، والارتفاعات، والقطع المتوسطة في المثلثات المتشابهة.

والآن

الأفكار الرئيسية

- أجد الوسط الهندسي بين عددين.
- أحلّ مسائل تتضمن علاقات بين أجزاء من أضلاع مثلث قائم، والارتفاع المنشأ من رأس الزاوية القائمة إلى الوتر.

المفردات الأساسية

الوسط الهندسي
geometric mean

الوسط الهندسي عندما يكون وسطا التناسب العدد نفسه، يُسمّى ذلك العدد الوسط الهندسي لطرفي التناسب. **والوسط الهندسي** لعددين موجبين هو الجذر التربيعي الموجب لحاصل ضربهما.

$$\begin{array}{l} \text{وسط} \leftarrow \frac{a}{x} = \frac{x}{b} \leftarrow \text{طرف} \\ \text{طرف} \leftarrow x \end{array}$$

أضف إلى

مطوبتك

الوسط الهندسي

مفهوم أساسي

التعبير اللفظي الوسط الهندسي لعددين موجبين a و b هو العدد الموجب x بحيث:

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{b} \text{، لذا، } x = \sqrt{ab}, x^2 = ab.$$

الوسط الهندسي للعددين $a = 9$ ، $b = 4$ يساوي 6؛ لأن $6 = \sqrt{9 \cdot 4}$.

مثال

مثال 1

الوسط الهندسي

أوجد الوسط الهندسي للعددين 8 و 10

$$x = \sqrt{ab} \quad \text{تعريف الوسط الهندسي}$$

$$= \sqrt{8 \cdot 10} \quad a = 8, b = 10$$

$$= \sqrt{(4 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 5)} \quad \text{بالتحليل}$$

$$= \sqrt{16 \cdot 5} \quad \text{خاصية التجميع}$$

$$= 4\sqrt{5} \quad \text{بالتبسيط}$$

الوسط الهندسي للعددين 8 و 10 يساوي $4\sqrt{5} \approx 8.9$.

تأكد

أوجد الوسط الهندسي لكل زوج من الأعداد الآتية:

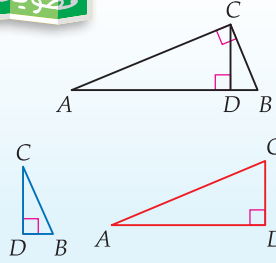
(1B) 12 و 15

(1A) 5 و 45

الأوساط الهندسية والمثلثات القائمة يُكوّن الارتفاع المرسوم من رأس الزاوية القائمة إلى وتر المثلث القائم الزاوية مثلثين إضافيين قائمين. وتتشترك هذه المثلثات الثلاثة القائمة بعلاقة خاصة فيما بينها.

أضف إلى

مطويتك



إذا رُسِم ارتفاع في المثلث القائم الزاوية من رأس الزاوية القائمة إلى وتره، فإن المثلثين الناتجين متشابهان، ويشابهان المثلث الأصلي.

مثال إذا كانت $\overline{CD}$ هي الارتفاع في المثلث القائم ABC ،

فإن $\triangle ACD \sim \triangle ABC$ و $\triangle CBD \sim \triangle ABC$ ، و $\triangle ACD \sim \triangle CBD$.

ستبرهن نظرية 2.1 في التمرين 38

مراجعة المفردات

ارتفاع المثلث

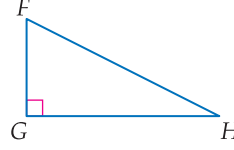
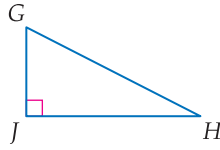
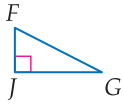
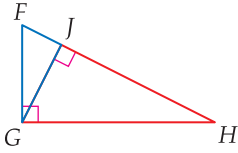
هو القطعة المستقيمة المرسومة من أحد رؤوس المثلث إلى المستقيم الذي يمثل الضلع المقابل وتعامده.

مثال 2

تعيين المثلثات القائمة المتشابهة

اكتب عبارة تشابه، تُعَيّن فيها المثلثات الثلاثة المتشابهة في الشكل المجاور.

افصل المثلث إلى مثلثين على طول ارتفاعه، ثم ارسم المثلثات الثلاثة مع ترتيب رؤوس المثلثين الأصغر، بحيث تكون زواياهما وأضلاعهما المتناظرة بالترتيب نفسه، كما في المثلث الأصلي.

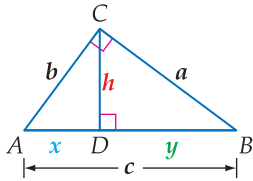
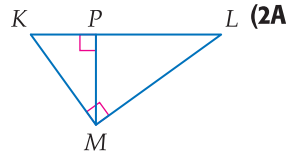
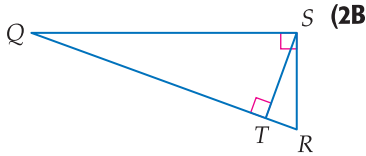


إذن $\triangle FJG \sim \triangle GJH \sim \triangle FGH$ بحسب النظرية 2.1.

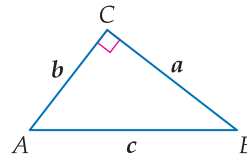
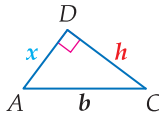
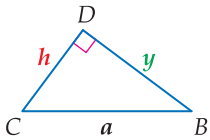
تأكد



اكتب عبارة تشابه، تُعَيّن فيها المثلثات الثلاثة المتشابهة في كل شكل أدناه:



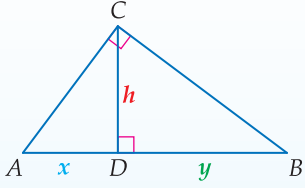
تعلم من النظرية 2.1 أن الارتفاع $\overline{CD}$ المرسوم إلى وتر المثلث القائم ABC يُكوّن ثلاثة مثلثات متشابهة هي $\triangle ACB \sim \triangle ADC \sim \triangle CDB$. وحسب تعريف المضلعات المتشابهة، يمكنك كتابة التناسبات الآتية التي تقارن بين أطوال أضلاع المثلثات.



$$\frac{a}{y} = \frac{b}{h} = \frac{c}{a} = \frac{\text{الوتر}}{\text{الضلع الأطول}} \quad \frac{a}{h} = \frac{b}{x} = \frac{c}{b} = \frac{\text{الوتر}}{\text{الضلع الأقصر}} \quad \frac{h}{y} = \frac{x}{h} = \frac{b}{a} = \frac{\text{الضلع الأقصر}}{\text{الضلع الأطول}}$$

لاحظ أن التناسبات المحاطة بدائرة تحتوي على أوساط هندسية، وهذا يقود إلى النظريتين الآتيتين:

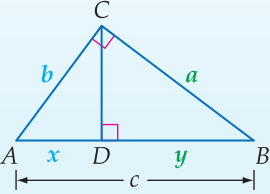
نظريات الوسط الهندسي في المثلث القائم



2.2 نظرية الارتفاع في الوسط الهندسي: الارتفاع المرسوم من رأس الزاوية القائمة إلى وتر المثلث القائم، يقسم الوتر إلى قطعتين. يُمثل طول الارتفاع الوسط الهندسي لطولَي هاتين القطعتين.

مثال إذا كانت $\overline{CD}$ هي الارتفاع المرسوم إلى الوتر $\overline{AB}$

في $\triangle ABC$ القائم الزاوية، فإن $\frac{x}{h} = \frac{h}{y}$ أو $h = \sqrt{xy}$



2.3 نظرية الضلع في الوسط الهندسي: الارتفاع المرسوم من رأس الزاوية القائمة إلى وتر المثلث القائم يقسم الوتر إلى قطعتين. ويكون طول كل ضلع في هذا المثلث هو الوسط الهندسي لطول الوتر وقطعة الوتر المجاورة لذلك الضلع.

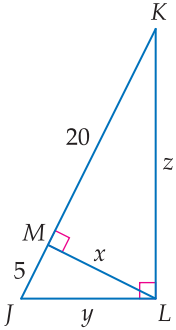
مثال إذا كانت $\overline{CD}$ هي الارتفاع المرسوم إلى الوتر $\overline{AB}$ في $\triangle ABC$

القائم الزاوية، فإن: $\frac{c}{a} = \frac{b}{x}$ أو $b = \sqrt{xc}$ و $\frac{c}{b} = \frac{a}{y}$ أو $a = \sqrt{yc}$

ستبرهن النظريتين 2.2 و 2.3 في التمرينين 39 و 40 على الترتيب

مثال 3

استعمال الوسط الهندسي في المثلثات القائمة



أوجد قيمة كل من x, y, z ، مقرباً الناتج إلى أقرب منزلة عشرية واحدة، إذا لزم ذلك.
بما أن x طول الارتفاع المرسوم إلى وتر المثلث القائم JKL ، فإن x يساوي الوسط الهندسي لطولي $\overline{JM}$ و $\overline{MK}$ اللتين تكوّنان الوتر.

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{\overline{JM} \cdot \overline{MK}} && \text{نظرية الارتفاع في الوسط الهندسي} \\ &= \sqrt{5 \cdot 20} && \text{بالتعويض} \\ &= \sqrt{100} = 10 && \text{بالتبسيط} \end{aligned}$$

بما أن y هو طول $\overline{JL}$ ، فإن y يساوي الوسط الهندسي لطول $\overline{JM}$ وطول $\overline{JK}$.

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{\overline{JM} \cdot \overline{JK}} && \text{نظرية الضلع في الوسط الهندسي} \\ &= \sqrt{5 \cdot (20 + 5)} && \text{بالتعويض} \\ &= \sqrt{125} \approx 11.2 && \text{باستعمال الآلة الحاسبة للتبسيط} \end{aligned}$$

بما أن z هو طول الضلع $\overline{KL}$ ، فإن z يساوي الوسط الهندسي لطول $\overline{MK}$ المجاورة لهذا الضلع، وطول الوتر $\overline{JK}$.

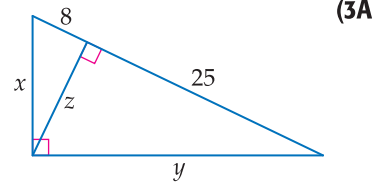
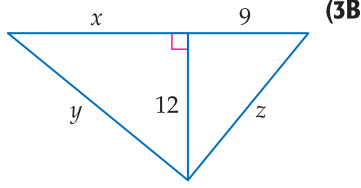
$$\begin{aligned} z &= \sqrt{\overline{MK} \cdot \overline{JK}} && \text{نظرية الضلع في الوسط الهندسي} \\ &= \sqrt{20 \cdot (20 + 5)} && \text{بالتعويض} \\ &= \sqrt{500} \approx 22.4 && \text{باستعمال الآلة الحاسبة للتبسيط} \end{aligned}$$

إرشادات للدراسة

استعمال التناسب يمكن إيجاد قيمة x في مثال 3 أيضاً بحل التناسب $\frac{5}{x} = \frac{x}{20}$



أوجد قيمة كل من x ، y ، z ، مقربًا الناتج إلى أقرب منزلة عشرية واحدة، إذا لزم ذلك في كل شكل أدناه:



يمكنك استعمال الوسط الهندسي؛ لقياس الارتفاع قياسًا غير مباشر.

القياس غير المباشر

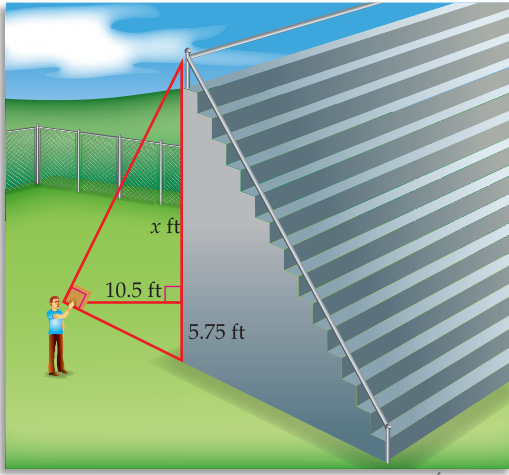
مثال 4 من واقع الحياة



الربط مع واقع الحياة

مدرجات

يتسع أكبر مدرج في العالم إلى 240000 مشاهد، ويقع في مدينة براغ التشيكوسلوفاكية.



ليس مرسومًا وفق مقياس رسم

مدرجات: يقيس سلمان ارتفاع الجدار الجانبي لمدرج ملعب كما في الشكل المجاور.

لإيجاد هذا الارتفاع، يستعمل مربعًا من الورق المقوى. بحيث تكون قمة المدرج وقاعدته على استقامة ضلعي قائمة المربع. قاس سلمان المسافة الأفقية بينه وبين المدرج، والمسافة بين مستوى نظره وسطح الأرض. أوجد ارتفاع المدرج إلى أقرب قدم.

بعد سلمان عن المدرج يساوي الارتفاع إلى وتر المثلث القائم، ويساوي الوسط الهندسي بين القطعتين المستقيمتين المكوّنتين للوتر، إذ إن قياس الصغرى يساوي 5.75 ft. افترض أن القياس المجهول x ft.

$$10.5 = \sqrt{5.75 \cdot x} \quad \text{نظرية الارتفاع في الوسط الهندسي}$$

$$110.25 = 5.75x \quad \text{بتربيع الطرفين}$$

$$19.17 \approx x \quad \text{بقسمة كل طرف على 5.75}$$

ارتفاع المدرج يساوي طول الوتر، ويساوي $5.75 + 19.17 \approx 25$ ft.



4 نخيل: تريد هند قياس ارتفاع نخلة في فناء منزلها، فأمسكت كتابًا أمام عينيها بحيث كانت قمة النخلة وقاعدتها على استقامة حافتين متعامدتين للكتاب، إذا كان ارتفاع مستوى نظرها عن سطح الأرض 5 ft، وكانت تقف على بُعد 11 ft من النخلة، فما ارتفاع النخلة؟ ارسم شكلًا، وشرح تبريرك.

أوجد الوسط الهندسي لكل زوج من الأعداد الآتية:

مثال 1

صفحة 67

(3) 15 و 40

(2) 4 و 36

(1) 5 و 20

(4) اكتب عبارة تشابه، تُعَيِّن فيها المثلثات الثلاثة المتشابهة في الشكل المجاور.

مثال 2

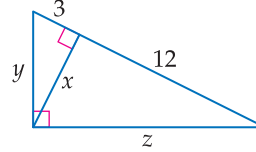
صفحة 68

أوجد قيمة كل من x, y, z في كل شكل أدناه:

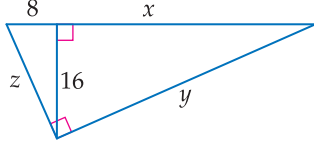
مثال 3

صفحة 69

(5)



(6)

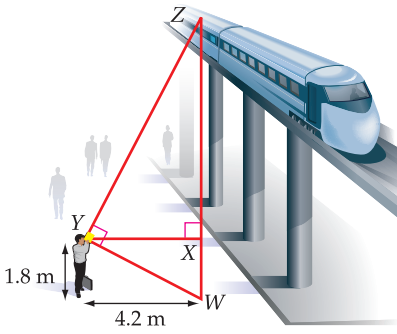


(7) قطارات: زار علي إحدى الدول، وشاهد قطارًا يسير فوق

جسر يعلو شارعًا. أراد علي أن يُقدِّر ارتفاع القطار عن الشارع، فوقف على بُعد 4.2 m من الشارع وأمسك كتابًا أمام عينيه، بحيث كان القطار والشارع على استقامة حافتين متعامدتين للكتاب، إذا كان ارتفاع مستوى نظره عن الشارع 1.8 m، فأوجد ارتفاع القطار عن الشارع.

مثال 4

صفحة 70



تدرب وحل المسائل

أوجد الوسط الهندسي لكل زوج من الأعداد الآتية:

مثال 1

صفحة 67

(10) 25 و 20

(9) 16 و 25

(8) 4 و 81

(13) 1.5 و 18

(12) 2.4 و 12

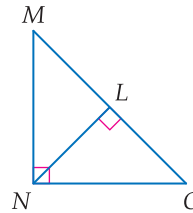
(11) 24 و 36

اكتب عبارة تشابه، تُعَيِّن فيها المثلثات الثلاثة المتشابهة في كل شكل أدناه:

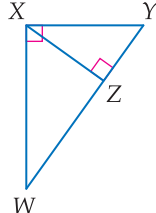
مثال 2

صفحة 68

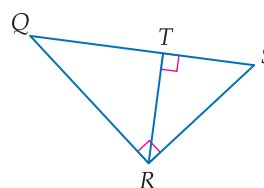
(14)



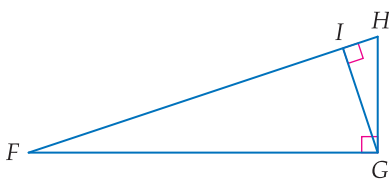
(15)



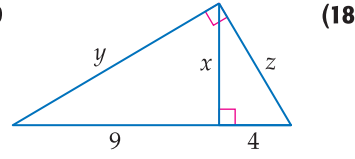
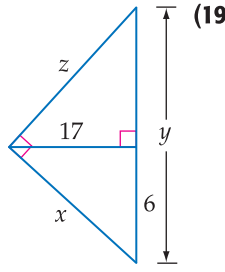
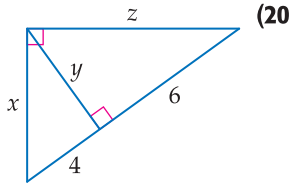
(16)



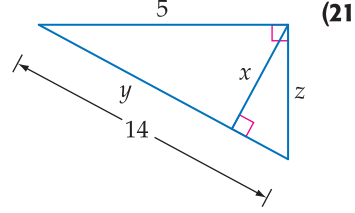
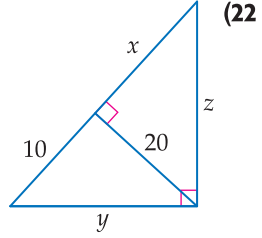
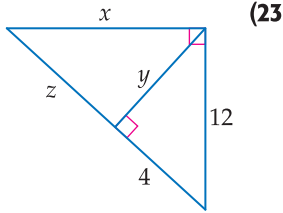
(17)



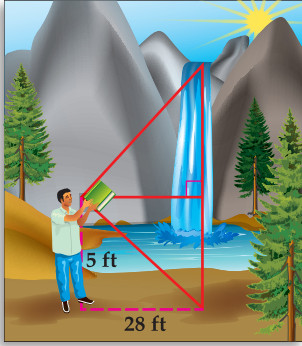
أوجد قيمة كل من x, y, z في كل شكل أدناه.



مثال 3
صفحة 69



مثال 4
صفحة 70



ليس مرسومًا وفق مقياس رسم

(24) **شلالات:** يستعمل أحمد كتابًا؛ لتحديد خط النظر إلى قمة شلال، إذا كان مستوى عينيه يرتفع 5 ft فوق سطح الأرض، وبُعد الأفقي عن الشلال 28 ft، فأوجد ارتفاع الشلال إلى أقرب عُشر القدم.

أوجد الوسط الهندسي لكل زوج من الأعداد الآتية:

(27) $\frac{5\sqrt{5}}{4}$ و $\frac{3\sqrt{5}}{4}$

(26) $\frac{5\sqrt{2}}{7}$ و $\frac{3\sqrt{2}}{7}$

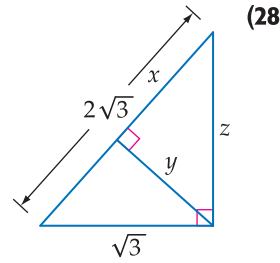
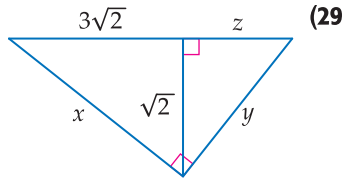
(25) 60 و $\frac{1}{5}$

إرشادات للدراسة

المثلثات المتشابهة

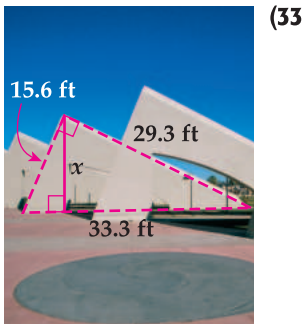
إذا لم تكن متأكدًا من تطبيق نظريات الوسط الهندسي، يمكنك أن تكتب عبارة التشابه والتناسب الذي يربط أطوال الأضلاع المتناظرة؛ لإيجاد الأطوال المجهولة.

أوجد قيمة كل من x, y, z في كل شكل أدناه:

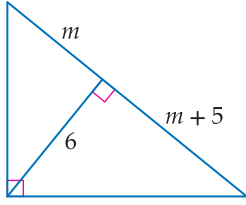


(30) **جبر:** الوسط الهندسي لعدد وأربعة أمثاله يساوي 22. ما ذلك العدد؟

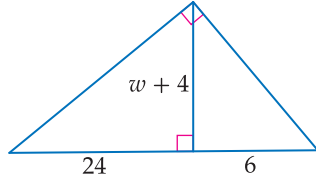
استعمل المثلثات المتشابهة؛ لإيجاد قيمة x في كل شكل أدناه:



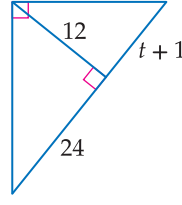
جبر: أوجد قيمة كل من m, t, w في كل شكل أدناه:



(36)

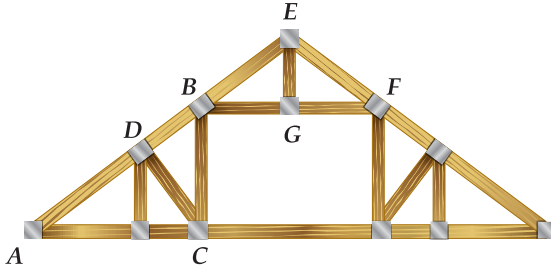


(35)



(34)

(37) إنشاءات: صممت دعائم معدنية لسقف، بحيث تبقى مساحة يمكن الاستفادة منها بصور مختلفة في الشكل المبين أدناه. وفيه $\angle BCA$ و $\angle EGB$ زاويتان قائمتان، $\triangle BEF$ متطابق الضلعين، $\overline{CD}$ ارتفاع في $\triangle ABC$ ، و $\overline{EG}$ ارتفاع في $\triangle BEF$. إذا كان DB يساوي 5 ft و CD يساوي 6 ft و 4 in، و BF يساوي 10 ft و 10 in، و EG يساوي 4 ft و 6 in، فما طول $\overline{AE}$ ؟ (مع العلم أن: 1 ft = 12 in)

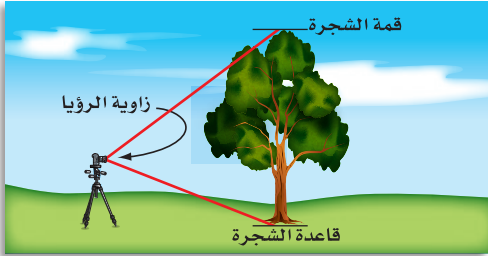


برهان: اكتب برهاناً حرّاً لكل من النظريات الآتية:

(40) نظرية 2.3

(39) نظرية 2.2

(38) نظرية 2.1

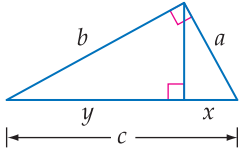


(41) فن التصوير: تُسمّى الزاوية المُكوّنة من خطّي النظر إلى قمة الشجرة وقاعدتها زاوية الرؤيا. يريد سعود أن يلتقط صورة لشجرة ارتفاعها 15.5 ft، فثبت الكاميرا على حامل ارتفاعه 5 ft عن سطح الأرض، وحدّد قياس زاوية الرؤيا الرأسية في آلة التصوير على 90° كما في الشكل المجاور.

(a) ارسم شكلاً يوضّح الموقف.

(b) على أي بُعد عن الشجرة، يقف سعود كي يلتقط صورة كاملة لها؟

(42) مالية: مُعدّل عائد الاستثمار خلال سنتين هو الوسط الهندسي للعائدات السنويين. إذا كان العائد في السنة الأولى 12%، وفي السنة الثانية 7%، فما مُعدّل عائد الاستثمار خلال السنتين؟



(43) برهان: برهن نظرية فيثاغورس باستعمال الشكل المجاور ونظرية الضلع في الوسط الهندسي.

حدّد إن كانت العبارات الآتية صحيحة دائماً، أو صحيحة أحياناً، أو غير صحيحة أبداً. وضّح تبريرك.

(44) الوسط الهندسي لعددتين صحيحين موجبين متتاليين يساوي الوسط لهذين العددين.

(45) الوسط الهندسي لمربعين كاملين يساوي عدداً صحيحاً موجباً.

(46) الوسط الهندسي لعددتين صحيحين موجبين يساوي عدداً صحيحاً آخر.

مراجعة المفردات

البرهان الحر
(غير الشكلي) إحدى الطرق المستعملة لإثبات صحة العبارات والتّخمينات، وتكتب فيه فقرة تفسّر أسباب صحة التّخمين المتعلق بموقف معين.



الربط مع واقع الحياة

شجرة الحياة هي شجرة تنتصب وحيدة في صحراء الصخيرة جنوب مملكة البحرين منذ أكثر من 400 عام، تحوّلت إلى أحد المعالم السياحية البحرينية. وخلف بقاء "شجرة الحياة" على قيد الحياة حتى الآن سر لم يستطع أحد الوصول إلى تفسير منطقي وعلمي أكيد له.

المصدر: ويكيبيديا، الموسوعة الحرة

(47) **تمثيلات متعددة:** في هذا التمرين سوف تستقصي الوسط الهندسي.

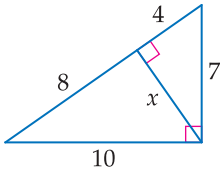
x	y	$\sqrt{xy}$
		8
		8
		8
		8
		8

(a) **جدولة:** انقل الجدول، وأكمّله بخمسة أزواج مرتبة (x, y) ، بحيث $\sqrt{xy} = 8$.

(b) **تحليل:** اعتمادًا على الجدول الذي أكملته، ما الاستنتاج الذي يمكن أن تتوصل إليه حول العلاقة بين x, y ؟

(c) **تمثيل بياني:** مثل بيانيًا الأزواج المرتبة المحددة في الجدول على صورة لوحة انتشار، لتؤكد الاستنتاج الذي توصلت إليه.

مسائل مهارات التفكير العليا



(48) **اكتشف الخطأ:** وجد خالد وعادل قيمة x من المثلث المجاور كما هو مبين أدناه. أيهما إجابته صحيحة؟ وضح تبريرك.

خالد

$$\frac{4}{x} = \frac{x}{7}$$

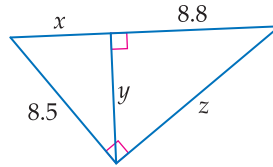
$$x \approx 5.3$$

عادل

$$\frac{4}{x} = \frac{x}{10}$$

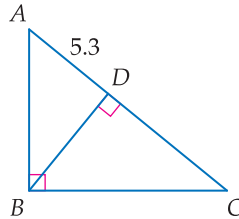
$$x \approx 6.3$$

(49) **تحّد:** أوجد قيمة كل من x, y, z في الشكل أدناه.



(50) **مسألة مفتوحة:** أوجد زوجين من الأعداد الصحيحة الموجبة يكون الوسط الهندسي لكل منهما عددًا صحيحًا موجبًا. ما الشرط الواجب توافره كي يكون الوسط الهندسي لعددتين صحيحين موجبين، عددًا صحيحًا موجبًا؟

(51) **تبرير:** إذا كانت نقطة تلاقي ارتفاعات $\triangle ABC$ المجاور تقع على بُعد 6.4 وحدات من النقطة D ، فأوجد BC .



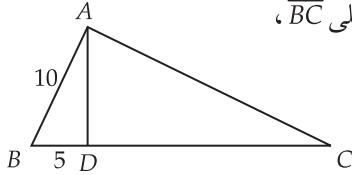
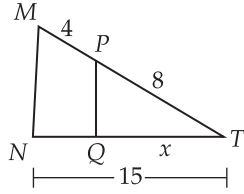
(52) **اكتب:** بين أوجه الشبه وأوجه الاختلاف بين الوسط الحسابي، والوسط الهندسي لعددتين. متى يتساوى الوسطان؟ وضح تبريرك.

مراجعة المفردات

الأوساط الحسابية

هي الحدود التي تقع بين أي حدين غير متتاليين في متتابعة حسابية.

(55) سؤال ذو إجابة قصيرة: إذا كان $\overline{MN} \parallel \overline{PQ}$ ، فاستعمل تناسباً لإيجاد قيمة x . موضحاً خطوات الحل.

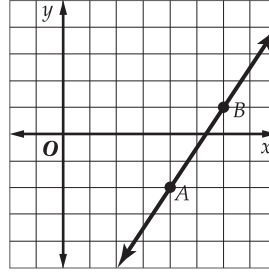


(56) إذا كانت $\overline{AD}$ عمودية على $\overline{BC}$ ، و $\overline{AB}$ عمودية على $\overline{AC}$ في الشكل المجاور، فما طول $\overline{BC}$ ؟

- 25 D 20 C $5\sqrt{3}$ B $5\sqrt{2}$ A

(53) ما الوسط الهندسي للعددين 8 و 22 في أبسط صورة؟

- $4\sqrt{11}$ A $16\sqrt{11}$ C
15 B 176 D



(54) ما المسافة بين A, B في الشكل المجاور؟

- $\sqrt{5}$ F
 $\sqrt{13}$ G
 $\sqrt{101}$ H
13 J

مراجعة تراكمية

أوجد إحداثيي نقطة منتصف $\overline{AB}$ في كل مما يأتي: (الدرس 1-2)

(57) $A(7, 2), B(5, 6)$

(58) $A(1, -3), B(3, 3)$

(59) $A(-5, 0), B(4, 0)$

(60) $A(a, b), B(-a, -b)$

مراجعة المتطلبات السابقة

بسّط كلاً مما يأتي بإنطاق المقام (جعل المقام عدداً نسبياً):

(65) $\frac{21}{\sqrt{3}}$

(64) $\frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{11}}$

(63) $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{4}}$

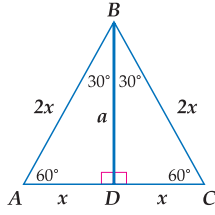
(62) $\frac{16}{\sqrt{3}}$

(61) $\frac{2}{\sqrt{2}}$

المثلثات القائمة الخاصة

Special Right Triangles

خصائص المثلثات 30°-60°-90°

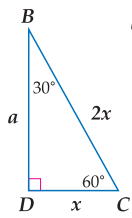


عند رسم ارتفاع من رأس من رؤوس المثلث متطابق الأضلاع، يتكون مثلثان متطابقان.

في الشكل المجاور $\triangle ABD \cong \triangle CBD$ ، إذا كان $AD=x$ ، فإن $CD=x$ ، و $AC=2x$.

بما أن $\triangle ABC$ متطابق الأضلاع، فإن $AB=2x$ و $AC=2x$.

استعمل نظرية فيثاغورس؛ لإيجاد الارتفاع a الذي يساوي طول BD .



$$a^2 + x^2 = (2x)^2$$

نظرية فيثاغورس

$$a^2 + x^2 = 4x^2$$

بالتبسيط

$$a^2 = 3x^2$$

ب طرح x^2 من كل طرف

بأخذ جذر التربيع الموجب لكل من طرف $a = \sqrt{3x^2}$

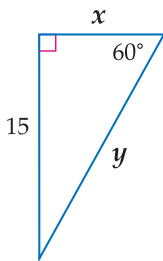
$$a = x\sqrt{3}$$

بالتبسيط

طول الوتر	طول الضلع المقابل للزاوية 60°	طول الضلع المقابل للزاوية 30°
2x	$x\sqrt{3}$	x

أوجد قيمة كل من y, x في الشكل المجاور.

نشاط 2



لإيجاد قيمة x (طول الضلع الأقصر).

$$l = x\sqrt{3}$$

بالتعويض

$$15 = x\sqrt{3}$$

بقسمة كل طرف على $\sqrt{3}$

$$\frac{15}{\sqrt{3}} = x$$

بالتبسيط

$$5\sqrt{3} = x$$

لإيجاد قيمة y ، الذي يُمثل طول الوتر.

$$y = 2x$$

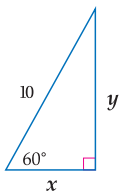
بالتعويض

$$y = 2(5\sqrt{3})$$

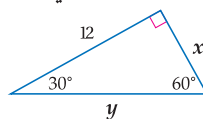
$$= 10\sqrt{3}$$

تمارين:

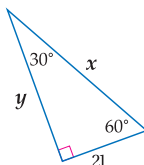
أوجد قيمة كل من y, x في كل شكل مما يأتي:



(2)



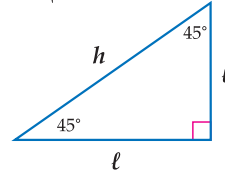
(1)



(3)

خصائص المثلث 45°-45°-90°

بما أن المثلث قائم الزاوية، وفيه زاويتان متطابقتان فإن المثلث قائم الزاوية ومتطابق الضلعين.



يمكنك استعمال نظرية فيثاغورس؛ لإيجاد العلاقة بين أطوال الأضلاع المثلث القائم 45°-45°-90°.

$$\ell^2 + \ell^2 = h^2$$

نظرية فيثاغورس

$$2\ell^2 = h^2$$

بالتبسيط

$$\sqrt{2\ell^2} = h$$

بأخذ جذر التربيع الموجب لكل من الطرفين

$$\ell\sqrt{2} = h$$

بالتبسيط

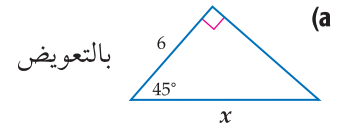
طول الوتر	طول الضلع المقابل للزاوية 45°
$\ell\sqrt{2}$	ℓ

أوجد قيمة x في كل شكل أدناه:

نشاط 1

$$h = \ell\sqrt{2}$$

$$x = 6\sqrt{2}$$



بالتعويض

$$h = \ell\sqrt{2}$$

$$12 = x\sqrt{2}$$

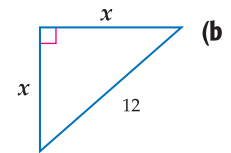
بالتعويض

$$\frac{12}{\sqrt{2}} = x$$

بقسمة كل طرف على $\sqrt{2}$

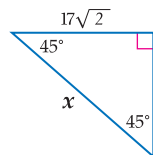
$$6\sqrt{2} = x$$

بالتبسيط

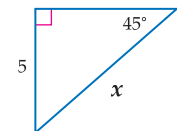


تمارين:

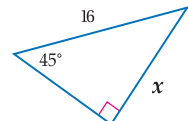
أوجد قيمة x في كل شكل مما يأتي:



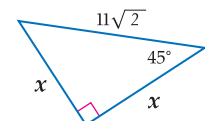
(2)



(1)



(4)



(3)

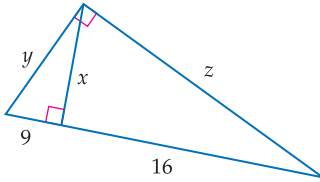
في كل مما يأتي معطى الوسط الهندسي لعددتين، أوجد العدد

المجهول: (الدرس 2-2)

(12) الوسط الهندسي للعددتين b, a ، يساوي $\sqrt{17}$ ، أوجد b إذا كانت $a=7$.

(13) الوسط الهندسي للعددتين y, x ، يساوي $\sqrt{12}$ ، أوجد x إذا كانت $y=\sqrt{3}$.

(14) أوجد قيمة كل من x, y, z في الشكل أدناه. (الدرس 2-2)



أوجد إحداثي النقطة المجهولة، إذا كانت B منتصف $\overline{AC}$ في كل مما يأتي: (الدرس 2-1)

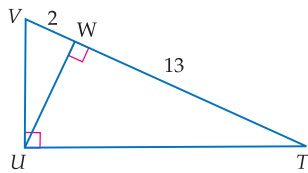
(15) $A(-1, -2), C(9, -6)$ (16) $C(-5, 3), A(2, 7)$

(17) $C(10, 1), B(11, -1)$ (18) $A(2.5, 3), B(2.5, -1)$

(19) $B(-2, 7), C(8, -4)$ (20) $B(0, 0), A(-4, 10)$

اختر رمز الإجابة الصحيحة في كل مما يأتي:

(21) ما قياس الارتفاع المرسوم على الوتر في الشكل أدناه؟ (الدرس 2-2)



(A) $\sqrt{15}$ (B) $\sqrt{26}$

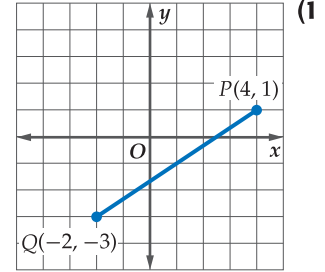
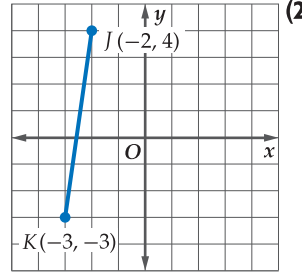
(C) 13 (D) 26

(22) ما الوسط الهندسي للعددتين 24، 25؟ (الدرس 2-2)

(A) $\sqrt{15}$ (B) $10\sqrt{6}$

(C) $6\sqrt{10}$ (D) $20\sqrt{3}$

أوجد طول كل قطعة مستقيمة، وإحداثي نقطة منتصفها في كل من الشكلين أدناه: (الدرس 2-1)



أوجد طول كل قطعة مستقيمة، وإحداثي نقطة منتصفها في كل مما يأتي: (الدرس 2-1)

(3) $\overline{PQ}$ إذا علمت أن $P(26, 12), Q(8, 42)$

(4) $\overline{MN}$ إذا علمت أن $M(6, -41), N(-18, -27)$

(5) إذا كان إحداثيًا موقع مدرسة في المستوى الإحداثي $(3, 1)$ ، وإحداثيًا موقع بيت حمود $(-5, 7)$. (الدرس 2-1)

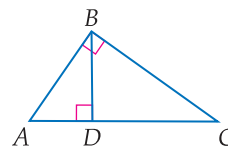
(a) إذا كانت المدرسة تقع في منتصف المسافة بين بيت حمود وبيت سلمان، فما إحداثي موقع بيت سلمان؟
(b) إذا كانت كل وحدة واحدة في المستوى الإحداثي تكافئ 50 m، فأوجد المسافة بين بيت حمود والمدرسة.

أوجد الوسط الهندسي لكل زوج من الأعداد الآتية: (الدرس 2-2)

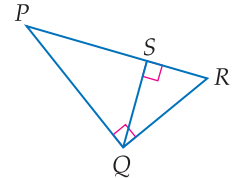
(6) 3 و 12 (7) 7 و 63

(8) 20 و 45 (9) 10 و 50

اكتب عبارة تشابه، تعين فيها المثلثات الثلاثة المتشابهة، في كل من الشكلين أدناه: (الدرس 2-2)



(11)

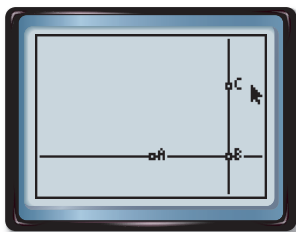


(10)

لقد درست أنماطاً في قياسات المثلثات القائمة الخاصة، ويُعدُّ حساب المثلثات دراسة للأنماط في المثلثات القائمة جميعها. يمكنك استعمال تطبيق كابري جونيور (Cabri Junior)، أو اختصاراً Cabri™ Jr في الآلة الحاسبة البيانية؛ لاستقصاء هذه الأنماط.

استقصاء النسب المثلثية

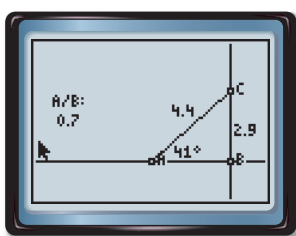
نشاط



الخطوتين 1، 2

الخطوة 1 استعمل أداة **المستقيم** (Line) في قائمة F2 لرسم مستقيم أفقي، عيّن نقطتين على المستقيم وسمّهما A, B .

الخطوة 2 اضغط F3، واختر أداة **العمود** (Perpendicular) لرسم مستقيم عمودي على المستقيم الأول من النقطة B . عيّن نقطة على المستقيم العمودي وسمّها C .



الخطوات 3 - 5

الخطوة 3 استعمل أداة **القطعة المستقيمة** (Segment) في قائمة F2 لرسم $\overline{AC}$.

الخطوة 4 أوجد طولي $\overline{AC}$, $\overline{BC}$ باستعمال أداة **المسافة** (Distance)، و**الطول** (Length) تحت سمي **القياس** (Measure) في قائمة F5، واستعمل أداة **الزاوية** (Angle) لإيجاد قياس $\angle A$ ، وسجّل القياسات على الشكل.

الخطوة 5 احسب النسبة $\frac{BC}{AC}$ باستعمال أداة **الحساب** (Calculate) في قائمة F5، سمّ النسبة A/B ، واعرضها على الشاشة.

الخطوة 6 اضغط مفتاح **CLEAR**، ثم استعمل مفاتيح الأسهم لتحريك المؤشر قريباً من النقطة B ، ثم اضغط باستمرار على مفتاح **ALPHA**، واسحب B ولاحظ النسبة.

حلّ النتائج

(1) ناقش أثر سحب النقطة B على قيمة $\frac{BC}{AC}$ ، وعلى قياسات $\angle A$, $\overline{AC}$, $\overline{BC}$.

(2) استعمل أداة الحساب لإيجاد النسب $\frac{BC}{AB}$, $\frac{AB}{AC}$ ، ثم اسحب B ولاحظ النسب.

(3) **خمن:** تعتمد الدوال المثلثية الجيب وجيب التمام والظل على قياسات الزوايا، لاحظ $m\angle A$. اخرج من البرنامج Cabri Jr، واستعمل مفاتيح **SIN**, **COS**, **TAN** على الآلة الحاسبة؛ لإيجاد قيمة كل من الجيب، وجيب التمام، والظل لزاوية قياسها $m\angle A$. قارن النتائج بالنسب التي وجدتتها في النشاط، وخمن تعريف الجيب وجيب التمام والظل.

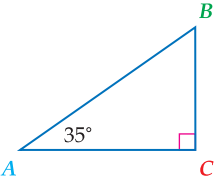
حساب المثلثات

Trigonometry

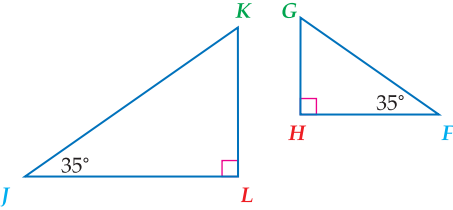


لماذا؟

يُعبّر عادة عن شدة انحدار الممرات الجبلية بنسبة الانحدار المئوية. إذا كانت نسبة انحدار أحد الممرات الجبلية 15.7%، فإن هذا يعني أن الممر يرتفع أو ينخفض 15.7m لكل مسافة 100m أفقية. يمكنك استعمال النسب المثلثية، لتحديد أن هذا الانحدار يعادل زاوية قياسها 9° تقريبًا.



النسب المثلثية جاءت كلمة trigonometry من كلمتين إغريقيتين trigon، وتعني مثلثًا، وmetron تعني قياسًا، ويُعنى **حساب المثلثات** بدراسة قياسات عناصر المثلث، و **النسبة المثلثية** هي نسبة بين طولي ضلعين في المثلث القائم، وإحدى هذه النسب المثلثية في $\triangle ABC$ هي $\frac{AC}{AB}$.



حسب مسلمة التشابه AA (تساوي زاويتين)، إذا عُلم قياس زاوية حادة في مثلث قائم، فإن هذا المثلث يشابه كل مثلث قائم فيه زاوية حادة لها القياس نفسه. لذا، فإن النسب المثلثية تكون ثابتة لأي زاوية قياسها معلوم.

$$\frac{AC}{AB} = \frac{FH}{FG} = \frac{JL}{JK}, \text{ لذا، فإن } \triangle ABC \sim \triangle FGH \sim \triangle JKL$$

و فيما يأتي توضيح للنسب المثلثية الثلاث الأساسية.

فيما سبق

درست استعمال نظرية فيثاغورس لإيجاد الأطوال المجهولة في المثلثات القائمة.

والآن

الأفكار الرئيسية

- أجد النسب المثلثية باستعمال المثلثات القائمة.
- أستعمل النسب المثلثية لإيجاد قياسات الزوايا في المثلثات القائمة.

المفردات الأساسية

حساب المثلثات

trigonometry

النسبة المثلثية

trigonometric ratio

الجيب

sine

جيب التمام

cosine

الظل

tangent

معكوس الجيب

inverse sine

معكوس جيب التمام

inverse cosine

معكوس الظل

inverse tangent

أضف إلى
مطويتك

النسب المثلثية

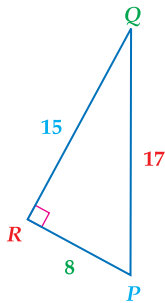
مفاهيم أساسية

التمثيل	بالرموز	التعبير اللفظي
	$\sin A = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{a}{c}$	إذا كان $\triangle ABC$ مثلثًا قائمًا فيه $\angle A$ حادة، فإن جيب $\angle A$ (يكتب $\sin A$) هي نسبة طول الضلع المقابل لـ $\angle A$ إلى طول الوتر.
	$\sin B = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{b}{c}$	
	$\cos A = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{b}{c}$	إذا كان $\triangle ABC$ مثلثًا قائمًا فيه $\angle A$ حادة، فإن جيب تمام $\angle A$ (يكتب $\cos A$) هي نسبة طول الضلع المجاور لـ $\angle A$ إلى طول الوتر.
	$\cos B = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{a}{c}$	
	$\tan A = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{a}{b}$	إذا كان $\triangle ABC$ مثلثًا قائمًا فيه $\angle A$ حادة، فإن ظل $\angle A$ (يكتب $\tan A$) هي نسبة طول الضلع المقابل لـ $\angle A$ إلى طول الضلع المجاور لها.
	$\tan B = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{b}{a}$	

مثال 1

إيجاد نسب الجيب وجيب التمام والظل

أوجد النسب المثلثية الآتية على صورة كسر اعتيادي، وكسر عشري إلى أقرب جزء من مئة :



cos P (b)

$$\cos P = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{8}{17} \approx 0.47$$

sin P (a)

$$\sin P = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{15}{17} \approx 0.88$$

sin Q (d)

$$\sin Q = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{8}{17} \approx 0.47$$

tan P (c)

$$\tan P = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{15}{8} \approx 1.88$$

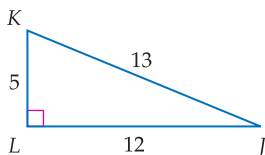
tan Q (f)

$$\tan Q = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{8}{15} \approx 0.53$$

cos Q (e)

$$\cos Q = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{15}{17} \approx 0.88$$

تأكد



1) أوجد $\sin J$, $\cos J$, $\tan J$, $\sin K$, $\cos K$, $\tan K$.

واكتب كل نسبة على صورة كسر اعتيادي، وكسر عشري، مقرباً إلى أقرب جزء من مئة.

مقلوب النسب المثلثية بعد أن درسنا النسب المثلثية الأساسية الجيب، وجيب التمام، والظل في المثلثات القائمة. الآن سنتعرف على مقلوب تلك النسب المثلثية؛ وهي قاطع التمام والقاطع وظل التمام.

أضف إلى

مطويتك

مقلوبات النسب المثلثية

مفاهيم أساسية

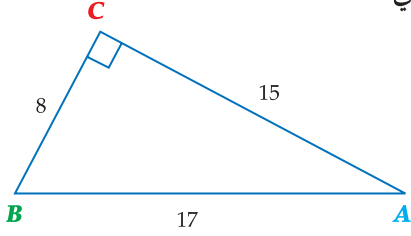


التمثيل	الرموز	التعبير اللفظي
	$\csc A = \frac{1}{\sin A} = \frac{c}{a}$	قاطع تمام $\angle A$ (يكتب $\csc A$) يساوي مقلوب $\sin A$
	$\sec A = \frac{1}{\cos A} = \frac{c}{b}$	قاطع $\angle A$ (يكتب $\sec A$) يساوي مقلوب $\cos A$
	$\cot A = \frac{1}{\tan A} = \frac{b}{a}$	ظل تمام $\angle A$ (يكتب $\cot A$) يساوي مقلوب $\tan A$
	$\sin \theta = \frac{4}{5}$	أمثلة $\tan \theta = \frac{4}{3}$
	$\csc \theta = \frac{5}{4}$	
	$\cos \theta = \frac{3}{5}$	$\cot \theta = \frac{3}{4}$
	$\sec \theta = \frac{5}{3}$	

مثال 2

إيجاد جميع النسب المثلثية

أوجد النسب المثلثية الست للزاوية A على صورة كسر اعتيادي.



$$\tan A = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{8}{15}$$

$$\cos A = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{15}{17}$$

$$\sin A = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{8}{17}$$

$$\cot A = \frac{\text{المجاور}}{\text{المقابل}} = \frac{15}{8}$$

$$\sec A = \frac{\text{الوتر}}{\text{المجاور}} = \frac{17}{15}$$

$$\csc A = \frac{\text{الوتر}}{\text{المقابل}} = \frac{17}{8}$$

تأكد



(2) أوجد النسب المثلثية الست للزاوية B على صورة كسر اعتيادي.

في المثلثات القائمة يمكن استعمال النسب المثلثية للزاوية الحادة في إيجاد أطوال أضلاع المثلث.

مثال 3

إيجاد أطوال الأضلاع باستعمال النسب المثلثية

أوجد قيمة x إلى أقرب جزء من مئة في الشكل أدناه:

بما أن طول الوتر هو 20 ، والضلع المقابل للزاوية 60° هو x .

$$\sin 60^\circ = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$$

تعريف نسبة الجيب

$$= \frac{x}{20}$$

بالتعويض

$$x = 20 \cdot \sin 60^\circ$$

بالتبسيط وإنطاق المقام

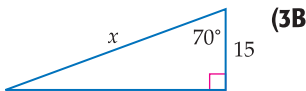
$$= 10\sqrt{3} \approx 17.32$$

بالتبسيط وباستعمال الآلة الحاسبة

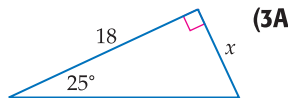
تأكد



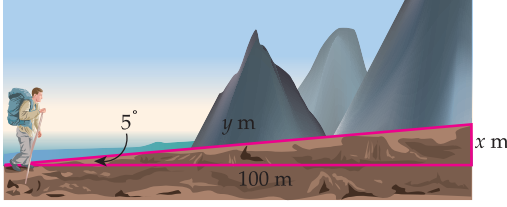
أوجد قيمة x إلى أقرب جزء من مئة في كل شكل أدناه :



(3B)



(3A)



مشي: يرتفع جزء من ممر جبلي في مناطق وعرة بزاوية 5° إلى أعلى. إذا مشى شخص على هذا الجزء قاطعاً مسافة أفقية قدرها 100 m، فما مقدار التغير الرأسي لموقع الشخص؟ وما طول المسافة التي قطعها من الممر؟ قَرِّب النواتج إلى أقرب منزلتين عشريتين.

افترض أن $m\angle A = 5^\circ$ ، وأن التغير الرأسي بين موقعي الشخص يساوي x . وهذا يساوي طول الضلع المقابل لـ $\angle A$. المسافة الأفقية المقطوعة 100 m تُمثل طول الضلع المجاور لـ $\angle A$ ، وبما أن المعلومات تتضمن طول الضلع المقابل، وطول الضلع المجاور للزاوية المعلومة؛ لذا اكتب معادلة باستعمال نسبة الظل.

$$\tan A = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} \quad \text{تعريف نسبة الظل}$$

$$\tan 5^\circ = \frac{x}{100} \quad \text{بالتعويض}$$

$$100 \cdot \tan 5^\circ = x \quad \text{بضرب كل طرف في 100}$$

استعمل الآلة الحاسبة لإيجاد قيمة x .

$$100 \text{ [TAN] } 5 \text{ [ENTER] } 8.748866353$$

سيرتفع الشخص 8.75 m تقريباً عن موقعه عند البداية.

تُمثل y المسافة التي قُطعت من الممر الجبلي، وتساوي طول الوتر؛ لذا يمكنك استعمال نسبة جيب التمام لإيجاد هذه المسافة.

$$\cos A = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} \quad \text{تعريف نسبة جيب التمام}$$

$$\cos 5^\circ = \frac{100}{y} \quad \text{بالتعويض}$$

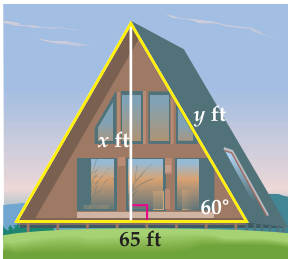
$$y \cdot \cos 5^\circ = 100 \quad \text{بضرب الطرفين في } y$$

$$y = \frac{100}{\cos 5^\circ} \quad \text{بقسمة كل طرف على } \cos 5^\circ$$

استعمل الآلة الحاسبة لإيجاد قيمة y .

$$100 \text{ [÷] [COS] } 5 \text{ [ENTER] } 100.3819838$$

لقد قطع الشخص مسافة تساوي 100.38 m تقريباً من الممر الجبلي.



4 هندسة معمارية: يُبين الشكل المجاور الواجهة الأمامية لمنزل على هيئة مثلث متطابق الضلعين. ما قيمة x التي تُمثل ارتفاع رأس هذه الواجهة عن قاعدتها؟ و ما قيمة y التي تُمثل طولها الجانبي؟ مقرباً النواتج إلى أقرب قدم، اشرح تبريرك.

تأكد

إرشادات للدراسة

الآلة الحاسبة البيانية
تأكد من وضع الآلة
الحاسبة على وضعية
القياس بالدرجات
degree، وليس القياس
بالراديان rad.



الربط بالحياة

يتغير انحدار الممر الجبلي
مرات عدة. ومتوسط
الانحدار هو متوسط
انحدارات عدة متتالية في
الممر، والانحدار الأقصى
هو أصغر جزء يتجاوز
انحداره متوسط انحدار
الممر.
ويكون لهذه الممرات أحياناً
انحدارات قصوى أكثر ميلاً
من متوسط انحدارها.
المصدر: Federal Highway
Administration

إذا علمت الجيب أو جيب التمام أو الظل لزاوية حادة، يمكنك استعمال الآلة الحاسبة ؛ لإيجاد قياس الزاوية وهو معكوس النسبة المثلثية.

قراءة الرياضيات

معكوس النسبة المثلثية

يُقرأ التعبير $\sin^{-1} x$ معكوس جيب x ، ويُفسّر على أنه الزاوية التي جيبها يساوي x . احرص على تمييز هذا الرمز عن الأس السالب. وهذا $\sin^{-1} x \neq \frac{1}{\sin x}$ الرمز شبيه برمز معكوس الدالة $f^{-1}(x)$.

مفاهيم أساسية

معكوس النسب المثلثية

التعبير اللفظي إذا كانت $\angle A$ زاوية حادة، وكان جيب A يساوي x ،

فإن **معكوس جيب** x يساوي قياس $\angle A$.

بالرموز إذا كان $\sin A = x$ ، فإن $\sin^{-1} x = m\angle A$.

التعبير اللفظي إذا كانت $\angle A$ زاوية حادة، وكان جيب تمام A يساوي x ،

فإن **معكوس جيب تمام** x يساوي قياس $\angle A$.

بالرموز إذا كان $\cos A = x$ ، فإن $\cos^{-1} x = m\angle A$.

التعبير اللفظي إذا كانت $\angle A$ زاوية حادة، وكان ظل A يساوي x ، فإن

معكوس ظل x يساوي قياس $\angle A$.

بالرموز إذا كان $\tan A = x$ ، فإن $\tan^{-1} x = m\angle A$.

لذا، إذا كان $\tan 30^\circ \approx 0.58$ ، فإن $\tan^{-1} 0.58 \approx 30^\circ$.

إيجاد قياسات الزوايا باستعمال معكوسات النسب المثلثية

مثال 5

استعمل الآلة الحاسبة؛ لإيجاد قياس $\angle A$ مقرباً إلى أقرب عُشر.

يظهر في الشكل المجاور طول الضلع المقابل للزاوية A وطول الوتر. لذا اكتب معادلة تستعمل فيها نسبة الجيب.

$$\sin A = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} \quad \sin A = \frac{18}{27} = \frac{2}{3}$$

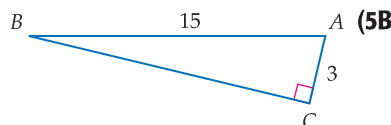
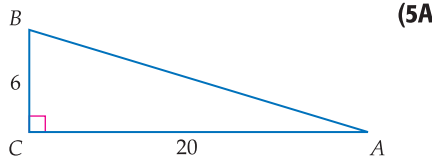
إذا كان $\sin A = \frac{2}{3}$ ، فإن $\sin^{-1} \frac{2}{3} = m\angle A$. استعمل الآلة الحاسبة.

المفاتيح: $\boxed{\text{2nd}} \boxed{[\text{SIN}]} \boxed{(\frac{2}{3})} \boxed{[\text{ENTER}]} 41.8103149$

لذا فإن $m\angle A \approx 41.8^\circ$.

تأكد

استعمل الآلة الحاسبة ؛ لإيجاد قياس $\angle A$ مقرباً إلى أقرب عُشر في كل شكل أدناه :



إرشادات للدراسة

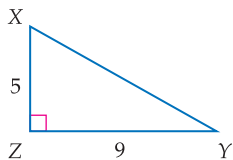
الآلة الحاسبة البيانية

تكون الوظيفة الثانية للمفاتيح $\boxed{\text{SIN}}$ ، $\boxed{\text{COS}}$ ، $\boxed{\text{TAN}}$ عادة، هي معكوس هذه النسب

تُسمى عملية إيجاد قياسات الزوايا وأطوال الأضلاع غير المعلومة في مثلث قائم الزاوية حَلّ المثلث القائم. لحل المثلث القائم يجب أن تعرف طولي ضلعين فيه، أو طول أحد الأضلاع وقياس إحدى الزاويتين الحادتين.

حلّ المثلث القائم

مثال 6



حلّ المثلث القائم المجاور مقرَّبًا أطوال الأضلاع إلى أقرب عُشر، وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة.

الخطوة 1 أوجد $m\angle X$ باستعمال نسبة الظل.

$$\tan X = \frac{9}{5} \quad \tan X = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$$

$$\tan^{-1} \frac{9}{5} = m\angle X \quad \text{تعريف معكوس الظل}$$

$$60.9453959 \approx m\angle X \quad \text{باستعمال الآلة الحاسبة}$$

لذا، فإن $m\angle X \approx 61^\circ$.

الخطوة 2 أوجد $m\angle Y$ باستعمال النتيجة التي تنص على أن الزاويتين الحادتين في المثلث القائم متتامتان.

$$m\angle X + m\angle Y = 90^\circ \quad \text{نتيجة}$$

$$61^\circ + m\angle Y \approx 90^\circ \quad m\angle X \approx 61^\circ$$

$$m\angle Y \approx 29^\circ \quad \text{بطرح } 61^\circ \text{ من كل طرف}$$

لذا فإن $m\angle Y \approx 29^\circ$.

الخطوة 3 أوجد XY باستعمال نظرية فيثاغورس.

$$(XZ)^2 + (ZY)^2 = (XY)^2 \quad \text{نظرية فيثاغورس}$$

$$5^2 + 9^2 = (XY)^2 \quad \text{بالتعويض}$$

$$106 = (XY)^2 \quad \text{بالتبسيط}$$

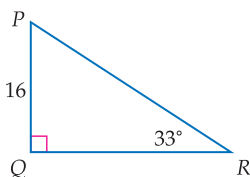
$$\sqrt{106} = XY \quad \text{بأخذ الجذر التربيعي الموجب لكل من الطرفين}$$

$$10.3 \approx XY \quad \text{باستعمال الآلة الحاسبة}$$

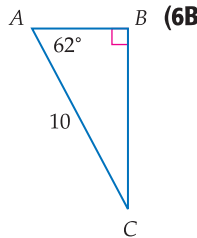
لذا، فإن $XY \approx 10.3$.

تأكد

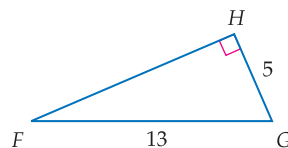
حلّ كلّ مثلث قائم أدناه مقرَّبًا أطوال الأضلاع إلى أقرب عُشر، وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة :



(6C)



(6B)



(6A)

إرشادات للدراسة

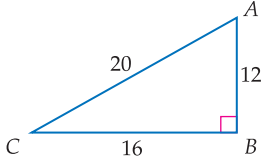
طرق بديلة

يمكن حل المثلثات القائمة باستعمال طرق مختلفة في مثال 5، يمكن إيجاد $m\angle Y$ باستعمال نسبة الظل. ويمكن استعمال $m\angle X$ مع نسبة الجيب، لإيجاد طول XY.

تنبيه

التقريب عند استعمال قياسات محسوبة لإيجاد قياسات أخرى في مثلث قائم، كن حذرًا بآلا تُقَرَّب القيم حتى الخطوة الأخيرة. لذا في المعادلة الآتية استعمل $\tan^{-1} \frac{9}{5}$ بدلًا من قيمتها التقريبية 61° .

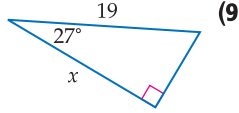
$$\begin{aligned} XY &= \frac{9}{\sin X} \\ &= \frac{9}{\sin \left(\tan^{-1} \frac{9}{5} \right)} \\ &\approx 10.3 \end{aligned}$$



أوجد النسب المثلثية الآتية على صورة كسر اعتيادي، وكسر عشري، مقرباً إلى أقرب جزء من مئة في كل مما يأتي:

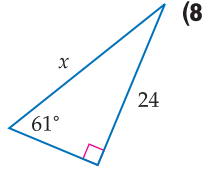
$$\begin{array}{lll} \cos A & (3) & \cot C & (2) & \sin A & (1) \\ \csc C & (6) & \sec C & (5) & \tan A & (4) \end{array}$$

مثال 2.1
الصفحات 80.81

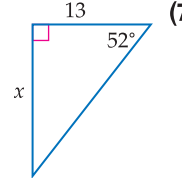


(9)

أوجد قيمة x مقربة إلى أقرب جزء من مئة في كل شكل أدناه:

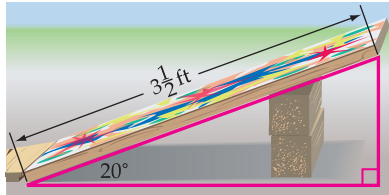


(8)



(7)

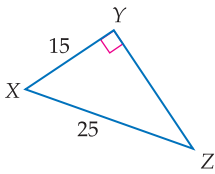
مثال 3
صفحة 81



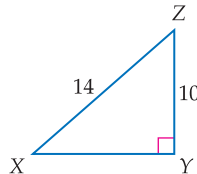
(10) **رياضة:** صنع سالم منحدر ترحلق يُشكل مع سطح الأرض زاوية قياسها 20° . إذا كان طول اللوح الذي استعمله يساوي $3\frac{1}{2}$ ft، فما ارتفاع أعلى نقطة في المنحدر؟

مثال 4
صفحة 82

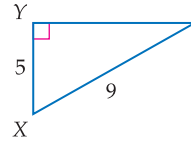
استعمل الآلة الحاسبة؛ لإيجاد قياس $\angle Z$ إلى أقرب درجة في كل شكل مما يأتي:



(13)



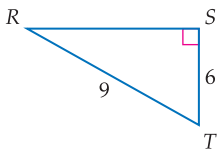
(12)



(11)

مثال 5
صفحة 83

(14) حلّ المثلث القائم المجاور مقرباً أطوال الأضلاع إلى أقرب عُشر، وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة.

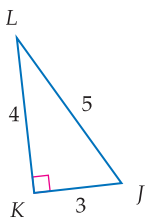


مثال 6
صفحة 84

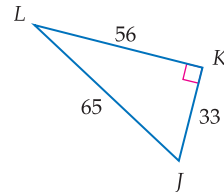
تدرب وحل المسائل

أوجد $\sin J$, $\cos J$, $\tan J$, $\csc L$, $\sec L$, $\cot L$ ، وعبر عن كل نسبة مثلثية على صورة كسر اعتيادي، وكسر عشري مقرباً إلى أقرب جزء من مئة.

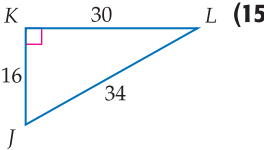
مثال 2.1
الصفحات 80.81



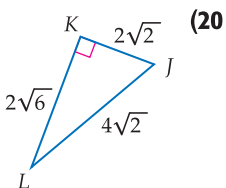
(17)



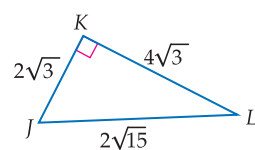
(16)



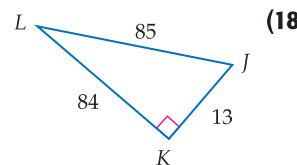
(15)



(20)

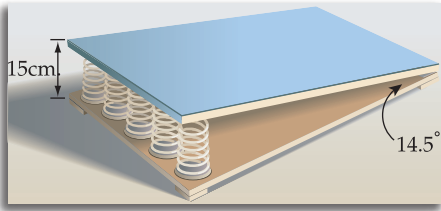
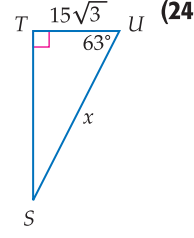
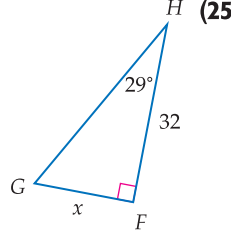
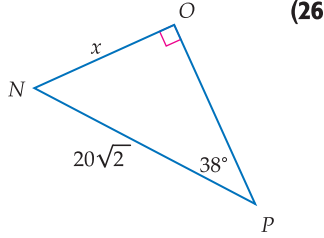
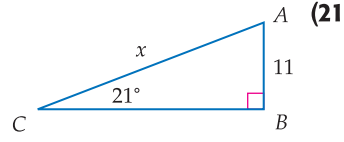
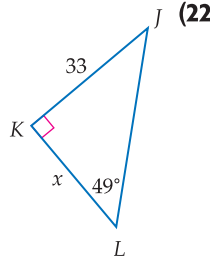
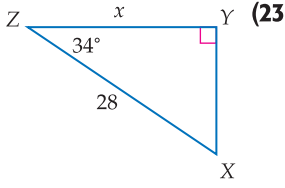


(19)

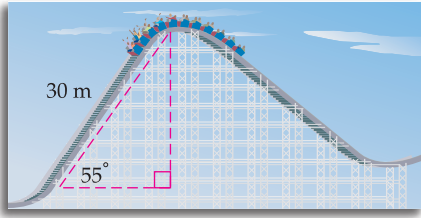


(18)

أوجد قيمة x مقربة إلى أقرب عُشر، في كل شكل أدناه :

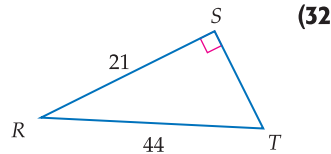
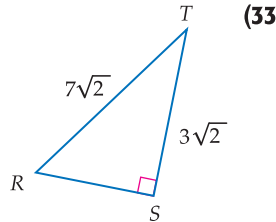
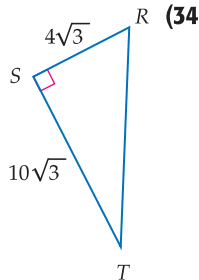
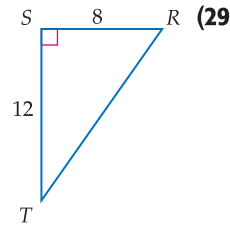
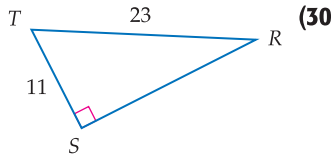
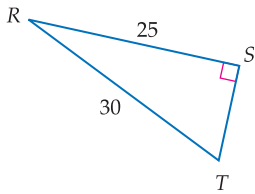


(27) **جهاز:** يستعمل حمد في حصة التربية البدنية لوح قفز مرن يرتفع من أحد طرفيه على زنبركات ارتفاعها 15cm، ويميل اللوح على القاعدة الأفقية بزاوية قياسها 14.5° ، ما طول لوح القفز إلى أقرب سنتيمتر؟

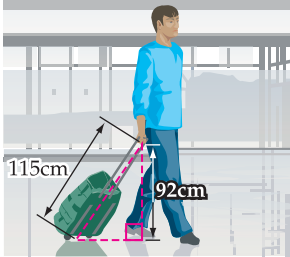
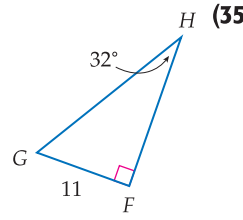
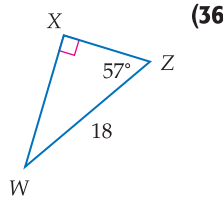
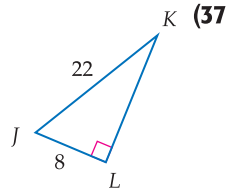
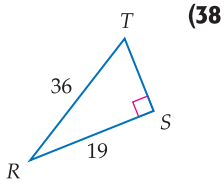


(28) **أفعوانية:** قياس زاوية صعود التلة الأولى في سكة الأفعوانية في مدينة الألعاب 55° . إذا كان طول المسار الصاعد من البداية إلى أعلى نقطة 30m، فما ارتفاع القاطرة عندما تصل إلى قمة التلة الأولى إلى أقرب عُشر؟

استعمل الآلة الحاسبة ؛ لإيجاد قياس $\angle T$ مقرباً إلى أقرب درجة في كل شكل مما يأتي :



حل كل مثلث قائم أذناه مقرَّباً أطوال الأضلاع إلى أقرب عُشر، وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة.



(39) **حقائب الظهر:** لدى مبارك حقيبة ظهر بعجلات، طولها مضافاً إليه طول مقبضها 115 cm. وعندما يسحب الحقيبة بيده تكون يده على ارتفاع 92 cm عن سطح الأرض كما في الشكل المجاور. ما قياس الزاوية التي تكونها الحقيبة مع سطح الأرض؟ قرب الناتج إلى أقرب درجة.

الربط مع واقع الحياة

ينصح الأطباء ألا يزيد وزن حقيبة الظهر عن 20% من وزن جسم الطالب حتى لا تحدث أضراراً. وتساعد الحقائب ذات العجلات على الحد من الأضرار.

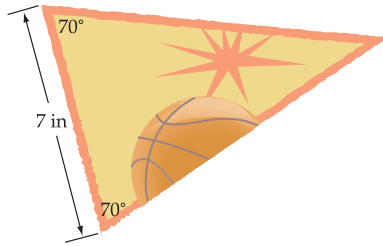
المصدر: International Chiropractic Pediatric Association

(40) **هندسة إحداثية:** أوجد قياس كل زاوية إلى أقرب عُشر من الدرجة باستعمال قانون المسافة، ومعاكس إحدى النسب المثلثية.

في المثلث القائم JKL ، الذي رؤوسه $J(-2, -3)$, $K(-7, -3)$, $L(-2, 4)$ $\angle K$

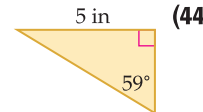
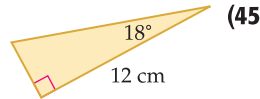
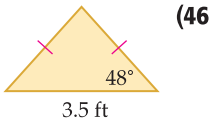
في المثلث القائم XYZ ، الذي رؤوسه $X(4, 1)$, $Y(-6, 3)$, $Z(-2, 7)$ $\angle Y$

في المثلث القائم ABC ، الذي رؤوسه $A(3, 1)$, $B(3, -3)$, $C(8, -3)$ $\angle A$



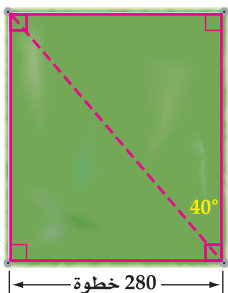
(43) **أنشطة مدرسية:** صمم صالح راية لكل طالب في فريق كرة السلة وعددهم 18، ما طول الشريط البرتقالي الذي يحتاج إليه ليصنع منه إطاراً لكل هذه الرايات؟

أوجد محيط ومساحة سطح كل مثلث أذناه، مقرَّباً إلى أقرب جزء من مئة :



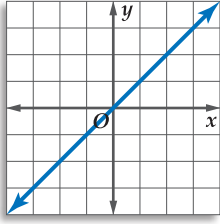
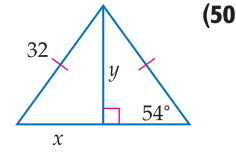
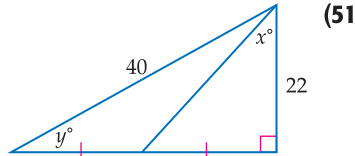
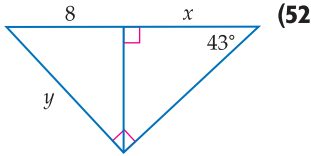
(47) أوجد ظل أكبر زاوية حادة في المثلث الذي أطوال أضلاعه 3 cm, 4 cm, 5 cm.

(48) أوجد جيب تمام الزاوية الحادة الصغرى في مثلث أطوال أضلاعه 10 cm, 24 cm, 26 cm.



(49) **تقدير:** أراد زياد وطارق تقدير مساحة الملعب الذي سيتدرب فيه فريقهم لكرة القدم، ويعلمان أن الملعب مستطيل الشكل، فقاما عرضه بالخطوات كما هو مبين في الشكل المجاور، واستعملتا أعمدة السياج عند أركان الملعب ليقدرا الزاوية بين طول الملعب وقطره فكانت 40° تقريباً. إذا كان طول كل خطوة من خطواتهما 18 in تقريباً، فما مساحة الملعب إلى أقرب بوصة مربعة؟

أوجد قيمة كل من x ، y إلى أقرب عُشر في كل شكل مما يأتي :



(53) **هندسة إحداثية:** بين أن ميلتي المستقيمين اللذين يصنعان زاويتين قياساهما 45° ، 225° مع المحور x على الترتيب، متساويان.

(54) **تمثيلات متعددة:** في هذا التمرين سوف تستقصي العلاقة الجبرية بين نسبتي الجيب وجيب التمام.

(a) **هندسي:** ارسم ثلاثة مثلثات قائمة غير متشابهة. سمّ المثلثات ABC ، MNP ، XYZ ، بحيث تكون زواياها القوائم عند الرؤوس B ، N ، Y على الترتيب. وأوجد طول كل ضلع في هذه المثلثات، واكتب الأطوال على الأضلاع.

(b) **جدولة:** انقل الجدول أدناه، وأكمّله.

المثلث	النسب المثلثية				مجموع مربعات النسب	
ABC	$\cos A$		$\sin A$		$(\cos A)^2 + (\sin A)^2 =$	
	$\cos C$		$\sin C$		$(\cos C)^2 + (\sin C)^2 =$	
MNP	$\cos M$		$\sin M$		$(\cos M)^2 + (\sin M)^2 =$	
	$\cos P$		$\sin P$		$(\cos P)^2 + (\sin P)^2 =$	
XYZ	$\cos X$		$\sin X$		$(\cos X)^2 + (\sin X)^2 =$	
	$\cos Z$		$\sin Z$		$(\cos Z)^2 + (\sin Z)^2 =$	

(c) **تعبير لفظي:** كوّن تخميناً حول مجموع مربعي جيب التمام والجيب لزاوية حادة في مثلث قائم.

(d) **تحليل:** بين أن تخمينك صحيح للزاوية A في الشكل المجاور باستعمال الدوال المثلثية ونظرية فيثاغورس.

إرشادات للدراسة

النسب المثلثية

نسبة الظل

$$\tan A = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$$

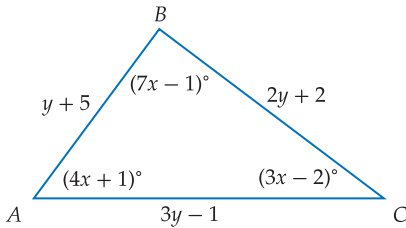
تكافئ:

$$\tan A = \frac{\text{الوتر}}{\text{المجاور}} \cdot \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$$

أو

$$\tan A = \frac{\sin A}{\cos A}$$

مسائل مهارات التفكير العليا



(55) **تحذّر:** حلّ $\triangle ABC$ المجاور، مقرّباً أطوال الأضلاع إلى أقرب عدد صحيح موجب، وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة.

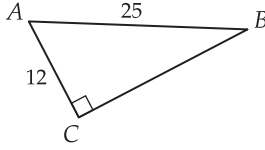
(56) **تبرير:** حلّ فيصل مسائل عدة على المثلثات القائمة في حساب المثلثات، فلاحظ أن قيم الجيب وجيب التمام للزوايا الحادة في المثلث القائم أقل من 1. هل قيم الجيب وجيب التمام لأي زاوية حادة أقل من 1 دائماً؟ وضح إجابتك.

(57) **مسألة مفتوحة:** ارسم $\triangle ABC$ القائم الزاوية في B مستعملًا مسطرة لقياس كل ضلع، ثم أوجد النسبتين $\sin A$ ، $\cos C$. ما العلاقة بين هاتين النسبتين؟

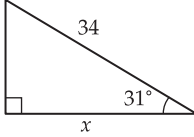
(58) **اكتب:** وضح كيف يمكن استعمال النسب بين أطوال الأضلاع لإيجاد قياسات الزوايا الحادة في مثلث قائم الزاوية.

تدريب على اختبار معياري

(61) في الشكل أدناه إذا كان $AC = 12$, $AB = 25$ ، فما قياس $\angle B$ مقرباً إلى أقرب درجة؟



(62) ما قيمة x إلى أقرب جزء من عشرة في الشكل أدناه؟



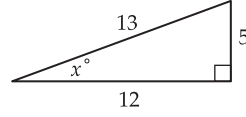
29.1 G

17.5 F

39.7 J

20.4 H

(59) ما قيمة $\tan x$ في الشكل أدناه؟



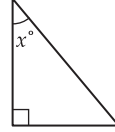
$$\tan x = \frac{5}{12} \quad \text{C}$$

$$\tan x = \frac{13}{5} \quad \text{A}$$

$$\tan x = \frac{5}{13} \quad \text{D}$$

$$\tan x = \frac{12}{5} \quad \text{B}$$

(60) في الشكل المجاور إذا كان $\cos x = \frac{20}{29}$ ، فما قيمة كل من $\sin x$ ، $\tan x$ ؟



$$\sin x = \frac{29}{21}, \tan x = \frac{29}{21} \quad \text{A}$$

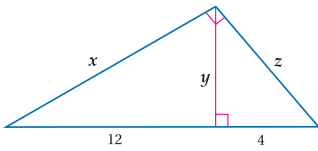
$$\sin x = \frac{21}{29}, \tan x = \frac{20}{21} \quad \text{B}$$

$$\sin x = \frac{29}{21}, \tan x = \frac{21}{20} \quad \text{C}$$

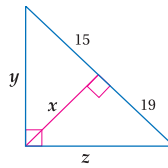
$$\sin x = \frac{21}{29}, \tan x = \frac{21}{20} \quad \text{D}$$

مراجعة تراكمية

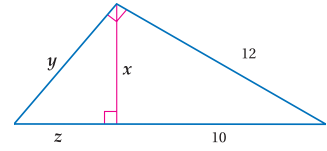
أوجد قيمة كل من x , y في كل شكل أدناه: (الدرس 2-2)



(65)



(64)



(63)

$$\frac{8\sqrt{3}}{5}, \frac{6\sqrt{3}}{5} \quad (68)$$

أوجد الوسط الهندسي لكل زوج من الأعداد الآتية: (الدرس 2-2)

$$1, \frac{3}{5} \quad (67)$$

$$\sqrt{28}, \sqrt{1372} \quad (66)$$

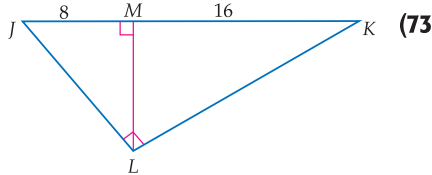
أوجد المسافة بين كل زوج من النقاط الآتية: (الدرس 2-1)

$$L(-5, \frac{8}{5}), M(5, \frac{2}{5}) \quad (71)$$

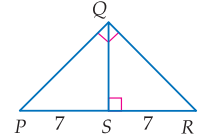
$$C(0, 1), D(-2, 9) \quad (70)$$

$$A(-1, -8), B(3, 4) \quad (69)$$

أوجد قياس الارتفاع المرسوم على الوتر في كل مما يأتي: (الدرس 2-2)



(73)



(72)

مراجعة المتطلبات السابقة

حلّ التناسبات الآتية، مقرباً الناتج إلى أقرب عُشر كلما لزم ذلك:

$$0.37 = \frac{32}{x} \quad (76)$$

$$0.05x = 13 \quad (75)$$

$$2.14 = \frac{x}{12} \quad (74)$$

$$0.21 = \frac{33}{x} \quad (79)$$

$$1.66 = \frac{x}{23} \quad (78)$$

$$0.74 = \frac{14}{x} \quad (77)$$

زوايا الارتفاع والانخفاض

Angles of Elevation and Depression



لماذا؟

عند تنفيذ الركلات الحرة المباشرة في مباريات كرة القدم، يركل اللاعبون الكرة بقوة، وبزاوية ارتفاع مناسبة، بحيث تمر أسفل العارضة (تدخل المرمى)، وتتغير هذه الزاوية بناءً على بُعد المكان الذي تُضرب منه الكرة عن المرمى.

فيما سبق

درست قياس المسافات بطريقة غير مباشرة مستعملًا المثلثات المتشابهة.

والآن

الأفكار الرئيسية

- أحل مسائل تتضمن زوايا الارتفاع والانخفاض.
- أستعمل زوايا الارتفاع والانخفاض لإيجاد المسافة بين جسمين.

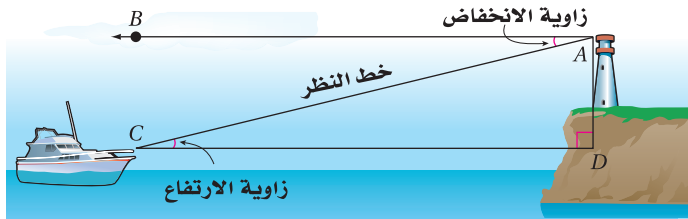
المفردات الأساسية

زاوية الارتفاع

angle of elevation

زاوية الانخفاض

angle of depression

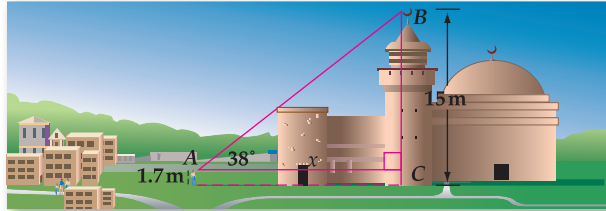


بما أن المستقيمات الأفقية متوازية، لذا فإن زاويتي الارتفاع والانخفاض في الصورة متطابقتان حسب نظرية الزاويتين الداخليتين المتبادلتين.

زاوية الارتفاع

مثال 1

رصد عمر قمة مئذنة مسجد ارتفاعها 15 m، فكانت زاوية ارتفاع قمة المئذنة 38° . إذا كان ارتفاع مستوى عينيه عن سطح الأرض 1.7 m، فعلى أي بُعد عن المأذنة كان يقف عمر؟ قرّب الناتج إلى أقرب متر.



بما أن ارتفاع مستوى عيني عمر عن سطح الأرض 1.7 m، فإن $BC = 15 - 1.7 = 13.3$ m. افترض أن x تمثل المسافة AC بين عمر والمئذنة.

$$\begin{aligned} \tan A &= \frac{BC}{AC} & \tan A &= \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} \\ \tan 38^\circ &= \frac{13.3}{x} & m\angle A &= 38^\circ, BC = 13.3, AC = x \\ x &= \frac{13.3}{\tan 38^\circ} & & \text{بالحل بالنسبة للمتغير } x \\ x &\approx 17.02 & & \text{باستعمال الآلة الحاسبة} \end{aligned}$$

إذن، بُعد عمر عن المأذنة يساوي 17 m تقريبًا.

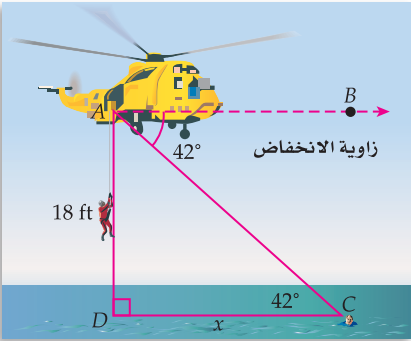


(1) **كرة القدم:** إذا كان ارتفاع مرمى كرة القدم 8 ft، وحاول أحد اللاعبين تسديد الكرة نحو المرمى من مسافة 25 yd عن قاعدة المرمى، فما أكبر زاوية ارتفاع يمكن للاعب أن يضرب الكرة كي يسجل هدفاً، إذا لم يعترض الكرة في حركتها أي عائق مع اعتبار أن مسار الكرة خط مستقيم؟ مقرباً الناتج إلى أقرب درجة.

زاوية الانخفاض

مثال 2

طوارئ: في أثناء عملية إنقاذ المصابين من موقع حادث تصادم قاربين في البحر، شاهد فريق البحث والإنقاذ من على طائرهم المروحية رجلاً يستغيث. إذا كانت زاوية انخفاض هذا الرجل 42° ، وكان ارتفاع المروحية 18 ft فوق سطح البحر، فما المسافة الأفقية بين المنقذين والرجل إلى أقرب قدم؟ ارسم شكلاً يُمثل هذا الوضع.



ملاحظة: ليس مرسوماً وفق مقياس رسم

بما أن $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ متوازيان، فإن $m\angle BAC = m\angle ACD$ حسب نظرية الزاويتين الداخليتين المتبادلتين.

افترض أن x تُمثل المسافة الأفقية DC بين المنقذين والرجل.

$$\tan C = \frac{AD}{DC}$$

$$\tan C = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$$

$$\tan 42^\circ = \frac{18}{x}$$

$$m\angle C = 42^\circ, AD = 18, DC = x$$

$$x \tan 42^\circ = 18$$

بضرب كل طرف في x

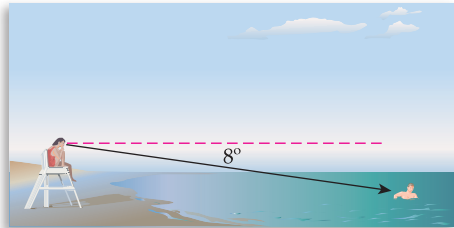
$$x = \frac{18}{\tan 42^\circ}$$

بقسمة كل طرف على $\tan 42^\circ$

$$x \approx 20$$

باستعمال الآلة الحاسبة

إذن المسافة الأفقية بين المنقذين والرجل تساوي 20 ft تقريباً.



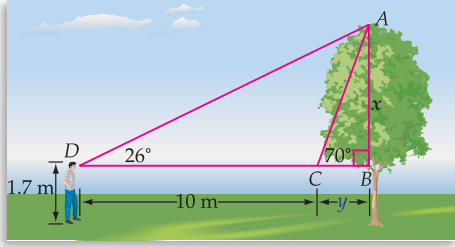
ملاحظة: ليس مرسوماً وفق مقياس رسم

(2) **إنقاذ:** يراقب منقذ السباحين الشاطئ من موقع يرتفع 6 ft فوق سطح الأرض. شاهد سباحاً بزاوية انخفاض قياسها 8° ، كم يبعد السباح عن قاعدة موقع المراقبة إلى أقرب قدم؟

زاويتا الارتفاع أو الانخفاض يمكن استعمال زاويتي الارتفاع أو الانخفاض لجسمين مختلفين لتقدير البعد بينهما. وبالمثل يمكن استعمال الزاويتين من مكاني رصد مختلفين للجسم نفسه لتقدير ارتفاعه.

مثال 3

استعمال زاويتي الارتفاع أو الانخفاض



أشجار: قاس عبد الله زاوية ارتفاع شجرة فكانت 70° ، ثم تحرك إلى الخلف مسافة 10 m، وقاس زاوية ارتفاعها فكانت 26° . إذا كان ارتفاع مستوى عينيه عن سطح الأرض 1.7 m، فما ارتفاع الشجرة إلى أقرب متر؟

افهم $\triangle ABC$, $\triangle ABD$ مثلثان قائمان. ارتفاع الشجرة يساوي ارتفاع مستوى عيني عبد الله عن سطح الأرض مضافاً إليه AB .

خطّط بما أن بُعد عبد الله عن الشجرة غير مُعطى. اكتب نظاماً من المعادلات باستعمال كل من المثلثين. افترض أن $AB = x$, $CB = y$ وحله؛ لذا فإن $DB = y + 10$ ، وارتفاع الشجرة يساوي $x + 1.7$.

حلّ في $\triangle ABC$.

$$\tan 70^\circ = \frac{x}{y}$$

$$m\angle ACB = 70^\circ$$

$$y \tan 70^\circ = x$$

بضرب كل طرف في y

في $\triangle ABD$

$$\tan 26^\circ = \frac{x}{y + 10}$$

$$\tan D = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}, m\angle D = 26^\circ$$

$$(y + 10) \tan 26^\circ = x$$

بضرب كل طرف في $(y + 10)$

عوّض عن قيمة x الناتجة من $\triangle ABD$ في المعادلة الناتجة من $\triangle ABC$ ، ثم حلّها لإيجاد y .

$$y \tan 70^\circ = x$$

$$y \tan 70^\circ = (y + 10) \tan 26^\circ$$

$$y \tan 70^\circ = y \tan 26^\circ + 10 \tan 26^\circ$$

$$y \tan 70^\circ - y \tan 26^\circ = 10 \tan 26^\circ$$

$$y(\tan 70^\circ - \tan 26^\circ) = 10 \tan 26^\circ$$

$$y = \frac{10 \tan 26^\circ}{\tan 70^\circ - \tan 26^\circ}$$

استعمل الآلة الحاسبة لتجد أن $y \approx 2.16$. وباستعمال المعادلة من $\triangle ABC$ ، نجد أن

$$x = 2.16 \tan 70^\circ \approx 5.9$$

ارتفاع الشجرة يساوي $5.9 + 1.7 \approx 8$ m

تحقق عوّض عن قيمة y في المعادلة الناتجة من $\triangle ABD$.

$x = (2.16 + 10) \tan 26^\circ \approx 5.9$ ، وهي القيمة نفسها التي وُجدت باستعمال المعادلة من

$\triangle ABC$. ✓

تأكد



(3) بنايات شاهقة: رُصد مبيان من قمة برج ارتفاعه 200 m، فكانت زاوية انخفاض المبنى A تساوي 35° ، في حين كانت زاوية انخفاض المبنى B تساوي 36° . إذا كان المبيان في جهة واحدة من البرج، فما البُعد بينهما إلى أقرب متر؟

إرشادات للدراسة

القياس غير المباشر

عند استعمال زوايا

الانخفاض لحساب

المسافة بين جسمين

مختلفين، من المهم

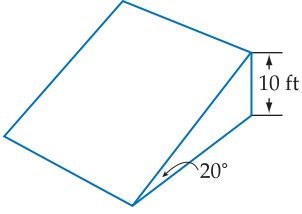
أن يقع الجسمان في

المستوى الأفقي نفسه.

بمعنى آخر ألا يكون أحد

الجسمين أعلى أو أخفض

من الآخر.

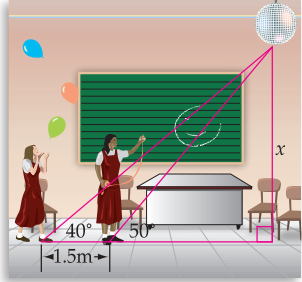


(1) **دراجات هوائية:** يرغب عبد الرحمن في بناء سطح مائل للقفز بدراجته الهوائية كما هو مبين في الشكل المجاور. أوجد طول قاعدة السطح المائل مقرباً الناتج إلى أقرب عُشر.

مثال 1
صفحة 90

(2) **كرة قدم:** يجلس أحد المشاهدين في مدرّج استاد رياضي على بُعد أفقي قدره 60 m عن مرمى كرة القدم. إذا كانت زاوية انخفاض المرمى 41° ، فما ارتفاع هذا المشاهد عن سطح أرض الملعب إلى أقرب متر؟

مثال 2
صفحة 91



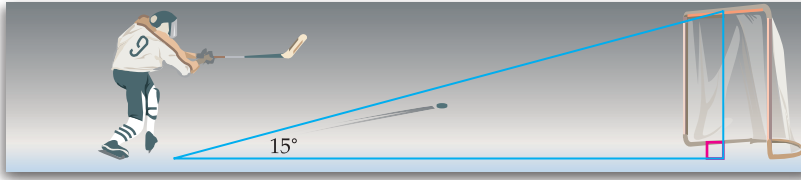
(3) **تزيين:** تقوم كوثر وحنان بتزيين قاعة مدرستهما؛ لإقامة احتفال المدرسة السنوي. تقف حنان على بُعد 1.5 m أمام كوثر، إذا كان قياس زاوية ارتفاع بالون معلق في السقف من عند كوثر يساوي 40° ، وقياس ارتفاعه من عند حنان يساوي 50° ، فما ارتفاع البالون مقرباً الناتج إلى أقرب منزلة عشرية.

مثال 3
صفحة 92

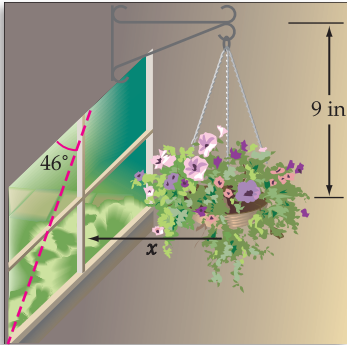
تدرب وحل المسائل

(4) **هوكي:** يضرب لاعب هوكي كرة نحو المرمى من نقطة على بُعد 20 ft، إذا كان ارتفاع المرمى 5 ft، وقياس زاوية ارتفاع مسار الكرة نحو مركز المرمى يساوي 15° ، فهل يُسجل اللاعب هدفاً؟ برّر إجابتك. (مع اعتبار أن مسار الكرة خط مستقيم).

مثال 1
صفحة 90



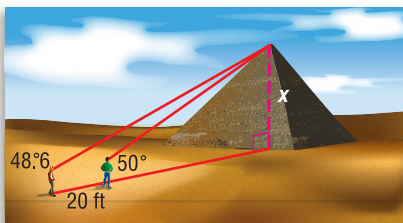
(5) **جبال:** يقف محمد على بعد 155 m عن نقطة افتراضية على سطح الأرض، تقع أسفل قمة جبل ارتفاعها 350 m عن سطح الأرض. أوجد زاوية ارتفاع قمة الجبل عن محمد إذا كان ارتفاع مستوى عينيه عن سطح الأرض 1.5 m.



(6) **نباتات:** تعلّق هند سلة نبات زينة عند نافذة غرفتها. إذا سقطت أشعة الشمس عليها بزاوية انخفاض 46° ، وكان طول سلسلة التعليق 9 in. فكم يبعد منتصف قاعدة السلة عن النافذة؟ قرّب الناتج إلى أقرب عُشر.

مثال 2
صفحة 91

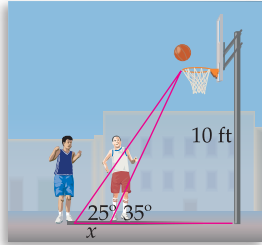
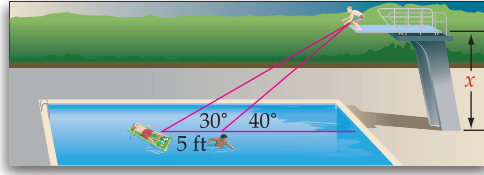
(7) **ملاحة جوية:** تطير طائرة على ارتفاع 528 ft، قرّر قائد الطائرة أن يهبط اضطرارياً بسبب عاصفة جوية. إذا كانت المسافة الأفقية التي يمكنه أن يهبط فيها 2000 ft، فما قياس زاوية الانخفاض التي يجب أن يهبط بها؟ قرّب الناتج إلى أقرب منزلة عشرية.



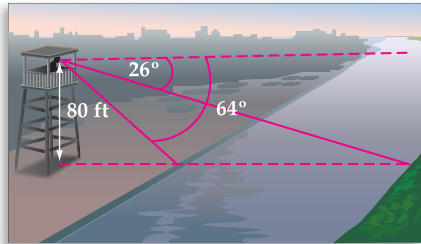
(8) **أهرامات:** يزور سلطان وسلمان الهرم الأكبر في مصر. فوقف كل منهما بجانب الهرم، بحيث كانت المسافة بينهما 20 ft. وكانت زاويتا ارتفاع قمة الهرم بالنسبة إلى كل منهما 48.6° ، 50° على الترتيب. أوجد ارتفاع الهرم إلى أقرب قدم؟

مثال 3
صفحة 92

9 غوص: يقف هشام على منصة قفز تعلو بركة يسبح فيها صديقاه. إذا كانت زاويتا الانخفاض لصديقيه 30° ، 40° على الترتيب، والبعد بينهما 5 ft، فما ارتفاع المنصة؟ قُرب الناتج إلى أقرب منزلة عشرية.



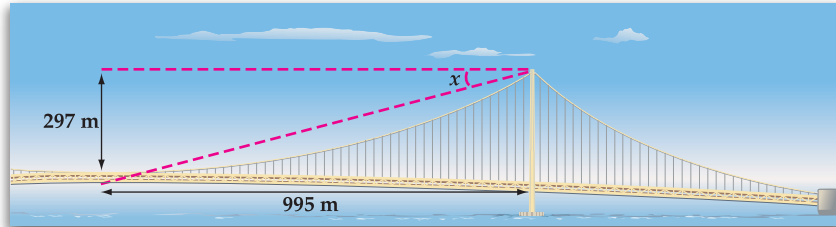
(10 كرة السلة: ينتظر لاعبا كرة السلة أحمد ومحمد الكرة المرتدة في أثناء مباراة كرة السلة. إذا كان ارتفاع حلقة السلة 10 ft، وزاويتا الارتفاع بين موقعيهما والحلقة 25° ، 35° على الترتيب، فما المسافة بينهما إلى أقرب عشر؟



(11 أنهار: ينظر هيثم إلى نهر من برج مراقبة. إذا كانت زاوية انخفاض الضفة القريبة 64° ، وزاوية انخفاض الضفة البعيدة 26° ، وارتفاع البرج 80 ft. فقدر عرض النهر عند هذا الموقع إلى أقرب قدم.



(12 جسر: ارتفاع أعلى دعامة في منتصف أطول جسر معلق في العالم 297 m، إذا كانت بداية الجسر تبعد عن منتصفه 995 m كما في الشكل أدناه، فما قياس زاوية انخفاض بداية الجسر عن قمة الدعامة، مقرباً الناتج إلى أقرب منزلة عشرية؟

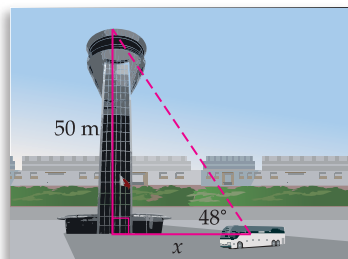


الربط مع واقع الحياة

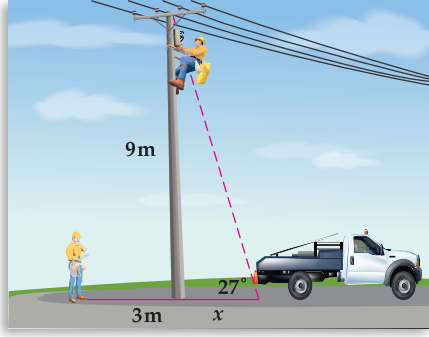
جسر كاسي كايكو
(Akashi Kaikyo) في
اليابان أطول جسر معلق
في العالم. طوله 1991 m،
ويزيد 366 m على ثاني
أطول جسر، وهو جسر
ستورابيليت (Stora Bælt)
في الدنمارك.

المصدر:
U.S. Department of
Transportation

(13 منارات: تُستعمل المنارات في الملاحة البحرية لإرشاد السفن، تصدر المنارة A أشعتها من ارتفاع 91 ft بزاوية انخفاض 6° ، وتقع المنارة B على بُعد 1800 ft عن المنارة A، وتصدر أشعتها من ارتفاع 34 ft، وبزاوية انخفاض 2° ، أي المنارتين يصل ضوءها إلى قارب يقع في منتصف المسافة بين المنارتين؟



(14 سياحة: رصد سليمان قمة برج المراقبة الجوية في مطار البحرين الدولي من حافلة ثقله، فكانت زاوية ارتفاعه 48° . إذا كان ارتفاع البرج 50 m تقريباً، فكم تبعد الحافلة عن البرج، مقرباً الناتج إلى أقرب متر؟



(15) صيانة: وصل عاملاً صيانة أعطال الكهرباء إلى موقع لإصلاح انقطاع التيار الكهربائي. تسلَّق أحدهما العمود وبقي يصلح العُطل عند ارتفاع 9 m فوق سطح الأرض، فكانت زاوية ارتفاعه عن الشاحنة 27° ، في حين وقف الآخر على بُعد 3 m عن العمود وعلى استقامة مع العمود والشاحنة. ما بُعد العامل الواقف على سطح الأرض عن الشاحنة؟ قَرِّب الناتج إلى أقرب عُشر.



تاريخ الرياضيات

إيراتوستينس

(194-276 ق.م.)

كان إيراتوستينس

رياضياً (Eratosthenes)

وفلكياً، ولد في سايرين التي

هي ليبيا الآن، وقد استعمل

زاوية ارتفاع الشمس عند

الظهر في مدينتي الإسكندرية

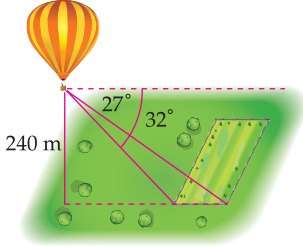
وأسوان في مصر لقياس

محيط الأرض.

المصدر:

Encyclopaedia Britannica

(16) تصوير: توصف آلة تصوير رقمية عدستها بانورامية بأنها تلتقط منظرًا بزاوية ارتفاع 38° . إذا نُصبت آلة التصوير على حامل ارتفاعه 3 ft، ووُجِّهت نحو مبنى ارتفاعه 124 ft، فعلى أي بُعد من المبنى يجب أن تكون لتأخذ صورة للمبنى كاملاً؟ قَرِّب الناتج إلى أقرب منزلة عشرية.



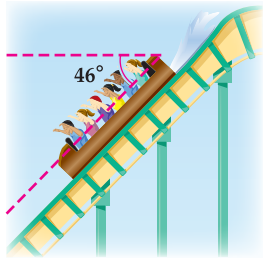
(17) منطاد: ركب خالد منطادًا، وعندما أصبح ارتفاعه عن سطح الأرض 240 m رأى حقلاً مستطيلاً محاطاً بسيّاح، فكانت زاوية انخفاض الحافة القريبة للسيّاح 32° ، وزاوية انخفاض الحافة البعيدة للسيّاح 27° . قَدِّر عرض الحقل إلى أقرب متر.

(18) سباق الماراثون: يبدأ سباق ماراثون من موقع ينخفض 86 m عن سطح البحر، وينتهي على قمة جبل ارتفاعه 4421 m فوق سطح البحر.

(b) إذا كانت زاوية انخفاض نقطة بداية السباق من نقطة على مستوى سطح البحر 38° ، فما المسافة الأفقية بين هذه النقطة وموقع بداية السباق؟ قَرِّب الناتج إلى أقرب عُشر.

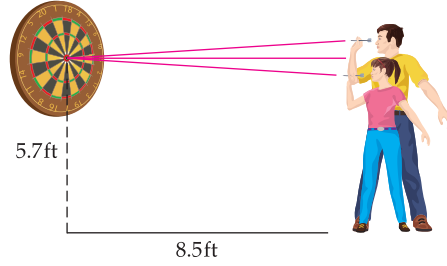


(a) حدّد زاوية ارتفاع الجبل، إذا كانت المسافة الأفقية من طرف قاعدته إلى قمته تساوي 1200 m، مقربًا الناتج إلى أقرب عُشر.



(19) مدينة الألعاب: ذهب حسن وسامي وفهد إلى مدينة ألعاب، فركبوا جميعًا لعبة السقوط على منحدر ارتفاعه 80 m. إذا كان قياس زاوية انخفاض لعبة السقوط عن المنحدر 46° ، فما طول المنحدر؟ قدر الناتج إلى أقرب منزلة عشرية.

لعبة رمي السهام: يتبارى عبد الله وياسر في لعبة رمي السهام. وكان ارتفاع مركز لوحة الهدف 5.7 ft عن سطح الأرض، إذا رمى اللاعبان السهام من بُعد 8.5 ft، بحيث رمى ياسر سهمه من ارتفاع 6 ft عن سطح الأرض، ورمى عبد الله سهمه من ارتفاع 5 ft عن سطح الأرض، أوجد زاويتي الارتفاع أو الانخفاض التي يجب أن يوجّه بها كل منهما سهمه حتى يصيب مركز اللوحة؟



الرابط مع واقع الحياة

قُطر لوحة لعبة السهام يساوي 18 in، وتُقسم هذه اللوحة إلى 20 قسمًا. تُعلّق اللوحة في المباريات الرسمية بحيث يكون ارتفاع مركز اللوحة 5 ft و 8 in عن سطح الأرض.

المصدر:

World Darts Federation

(21) **تمثيلات متعدّدة:** في هذا التمرين سوف تستقصي العلاقات بين أضلاع المثلثات وزواياها.

(a) **هندسي:** ارسم ثلاثة مثلثات الأول حاد الزوايا، والثاني منفرج الزاوية، والثالث قائم الزاوية. سمّ المثلث الأول ABC ، والثاني MNP ، والثالث XYZ . اكتب أطوال الأضلاع، وقياسات الزوايا على كلّ مثلث.

(b) **جدولة:** انقل الجدول أدناه وأكمله.

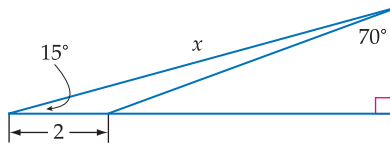
المثلث	النسب		
ABC	$\frac{\sin A}{BC} =$	$\frac{\sin B}{CA} =$	$\frac{\sin C}{AB} =$
MNP	$\frac{\sin M}{NP} =$	$\frac{\sin N}{PM} =$	$\frac{\sin P}{MN} =$
XYZ	$\frac{\sin X}{YZ} =$	$\frac{\sin Y}{ZX} =$	$\frac{\sin Z}{XY} =$

(c) **تعبير لفظي:** كوّن تخمينًا حول نسبة جيب الزاوية إلى طول الضلع المقابل لها في المثلث.

مسائل مهارات التفكير العليا

(22) **اكتشف الخطأ:** يحاول كل من عبد الوهاب وطاهر تحديد العلاقة بين زاويتي الارتفاع والانخفاض. يقول عبد الوهاب: إذا نظرت إلى شخص آخر بزاوية ارتفاع 35° ، فإن هذا الشخص ينظر إليك إلى أسفل بزاوية انخفاض 55° ، وهي متممة 35° . لا يوافق طاهر ويقول: إن ذلك الشخص ينظر إليك إلى أسفل بزاوية انخفاض تساوي زاوية الارتفاع أي 35° . أيهما على صواب؟ برّر إجابتك.

(23) **تحّد:** أوجد قيمة x في الشكل المجاور. قرّب إلى أقرب عُشر.



(24) **تبرير:** حدّد إذا كانت العبارة الآتية صحيحة أم خاطئة. برّر إجابتك.

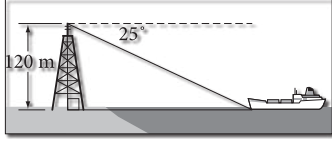
"إذا اقترب شخص من جسم وهو ينظر إلى هذا الجسم؛ فإن زاوية الارتفاع تزداد."

(25) **اكتب سؤالاً:** يجد أحد الطلاب زاوية ارتفاع جسم، ولكنه يحاول إيجاد زاوية الانخفاض. اكتب سؤالاً يساعده على حل هذه المسألة.

(26) **اكتب:** صف طريقة يمكنك بها تقدير ارتفاع جسم من دون استعمال حساب المثلثات باختيار زاوية ارتفاع مناسبة. وضح لماذا تكون هذه الطريقة صحيحة؟

تدريب على اختبار معياري

(29) ترتفع قمة برج إرسال 120 m فوق سطح البحر. إذا كانت زاوية الانخفاض من قمة البرج إلى سفينة عابرة 25° . فأي القيم الآتية أقرب إلى المسافة بين قاعدة البرج و السفينة؟



$$\begin{aligned}\sin 25^\circ &\approx 0.42 \\ \cos 25^\circ &\approx 0.91 \\ \tan 25^\circ &\approx 0.47\end{aligned}$$

- 132.4 m C 283.9 m A
56.0 m D 257.3 m B

(30) مساحة: وجد مساح يبعد عن عمارة مسافة 100 m أن زاوية ارتفاع قمة العمارة 23° . إذا كان مستوى عيني المساح يرتفع فوق سطح الأرض 1.55 m، فما ارتفاع العمارة إلى أقرب متر؟

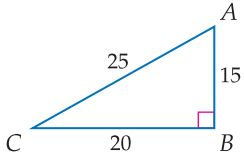
- 43 m C 41 m A
44 m D 42 m B

(27) أراد علي أن يعرف ارتفاع برج الهاتف المحمول قرب منزله بأن سار 26 m من قاعدة البرج، ثم قاس زاوية ارتفاع قمة البرج فكانت 54° . إذا كان ارتفاع مستوى عينيه عن سطح الأرض 1.5 m، فما ارتفاع البرج إلى أقرب عُشر؟

- 16.9 m A
20.6 m B
25.8 m C
37.3 m D

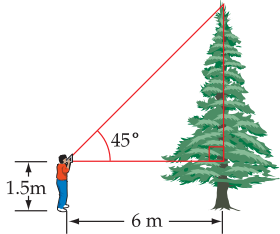
(28) سؤال ذو إجابة قصيرة: يقع كشاف ضوئي على بُعد 6500 ft من محطة لرصد الأحوال الجوية. رصدت بقعة ضوئية من موقع الكشاف في الغيوم فوق المحطة، فكانت زاوية ارتفاعها 45° ، كم يكون ارتفاع الغيوم؟

مراجعة تراكمية



أوجد النسب المثلثية الآتية، واكتب كلاً منها على صورة كسر اعتيادي، وكسر عشري، مقرباً إلى أقرب جزء من مئة. (الدرس 2-3)

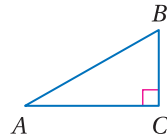
- $\sin C$ (31) $\tan A$ (32) $\cos C$ (33)
 $\tan C$ (34) $\cos A$ (35) $\sin A$ (36)



(37) مناظر طبيعية: يريد عماد أن يجد ارتفاع شجرة، فأمسك مثلث الرسم القائم الزاوية، والذي قياس زاويته الحادة 45° ، بحيث كان أحد الضلعين أفقياً، وشاهد قمة الشجرة على استقامة الوتر كما في الشكل المجاور. إذا كان عماد على بُعد 6 m من الشجرة، وارتفاع مستوى عينيه عن سطح الأرض 1.5 m، فأوجد ارتفاع الشجرة. (الدرس 2-4)

أوجد قياس كل زاوية مما يأتي إلى أقرب عُشر الدرجة:

- $\cos A = 0.6717$ (38) $\sin B = 0.5127$ (39) $\tan C = 2.1758$ (40)



(41) إذا كان $\cos B = \frac{1}{4}$ ، فأوجد $\tan B$. (الدرس 2-3)

أوجد إحداثي نقطة منتصف القطعة المستقيمة المُعطى إحداثيات طرفيها في كل مما يأتي: (الدرس 2-1)
 $X(-4, 6)$, $Y(4, -6)$ (43) $A(2, 2)$, $B(7, 8)$ (42)

مراجعة المتطلبات السابقة

حلّ التناسبات الآتية مقرباً إلى أقرب عُشر:

- $\frac{12}{21} = \frac{45}{10x}$ (47) $\frac{4x}{16} = \frac{62}{118}$ (46) $\frac{2x}{11} = \frac{3}{8}$ (45) $\frac{1}{5} = \frac{x}{10}$ (44)

قانون الجيب وقانون جيب التمام

The Law of Sines and Law of Cosines



لماذا؟

تعلمت سابقاً كيف يمكنك إيجاد ارتفاع شجرة باستعمال حساب المثلثات القائمة، إذا علمت زاوية ارتفاع قمة الشجرة وبعدها عنها. ولكن بعض الأشجار تنمو مائلة بزاوية، أو تميل بسبب عوامل الطقس. ولحساب أطوال مثل هذه الأشجار، يجب أن تستعمل صيغةً أخرى في حساب المثلثات.

قانون الجيب استعملت النسب المثلثية في الدرس 2-3؛ لإيجاد قياسات زوايا المثلثات القائمة وأطوال أضلاعها، ويمكن استعمال **قانون الجيب**؛ لإيجاد القياسات المجهولة في المثلثات غير القائمة.

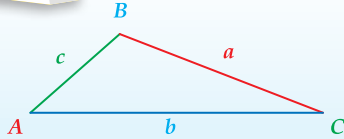
أضف إلى

مطويتك

نظرية 2.4

إذا مثلت a, b, c أطوال أضلاع $\triangle ABC$ المقابلة لزاوياتها التي قياساتها A, B, C على الترتيب، فإن:

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$



ستبرهن أحد التناسبات للنظرية 2.4 في التمرين 45

إذا علمت قياس زاويتين وأي ضلع في المثلث، وهما الحالتان (ASA أو AAS)، فإنه يمكنك استعمال قانون الجيب لحل هذا المثلث. ومتى ما دعت الحاجة استعمال نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث؛ لتجد قياس الزاوية الثالثة ثم قانون الجيب.

قانون الجيب (ASA أو AAS)

مثال 1

أوجد قيمة x في الشكل المجاور مقربةً إلى أقرب عُشر.

تعلم من الشكل قياسي زاويتين وضلع لا يقع بينهما. لذا استعمل قانون الجيب لكتابة التناسب.

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin C}{c}$$

قانون الجيب

$$\frac{\sin 97^\circ}{16} = \frac{\sin 21^\circ}{x}$$

$$m\angle A = 97^\circ, a = 16, m\angle C = 21^\circ, c = x$$

$$x \sin 97^\circ = 16 \sin 21^\circ$$

خاصية الضرب التبادلي

$$x = \frac{16 \sin 21^\circ}{\sin 97^\circ}$$

بقسمة كل طرف على $\sin 97^\circ$

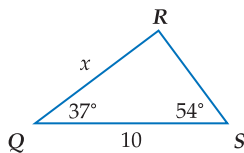
$$x \approx 5.8$$

باستعمال الآلة الحاسبة

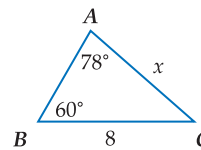
تأكد



أوجد قيمة x في كل شكل أدناه مقربةً إلى أقرب عُشر:



(1B)



(1A)

يمكنك أيضاً استعمال قانون الجيب لحل المثلث، إذا علمت منه طولَي ضلعين وقياس زاوية غير محصورة بينهما (SSA).

فيما سبق

درست استعمال النسب المثلثية لحل المثلثات القائمة.

والآن

الأفكار الرئيسية

- استعمل قانون الجيب لحل المثلثات.
- استعمل قانون جيب التمام لحل المثلثات.

المفردات الأساسية

قانون الجيب

Law of Sines

قانون جيب التمام

Law of Cosines

قراءة الرياضيات

حالات التطابق

يمثل الحرف A في حالات

التطابق اختصاراً للكلمة

(Angle)، وتعني زاوية،

أما الحرف S فيمثل

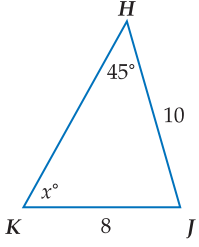
اختصاراً للكلمة (Side)

وتعني ضلعاً.

مثال 2

قانون الجيب (SSA)

أوجد قيمة x في الشكل المجاور مقربة إلى أقرب درجة.



$$\frac{\sin H}{h} = \frac{\sin K}{k}$$

$$\frac{\sin 45^\circ}{8} = \frac{\sin x^\circ}{10}$$

$$m\angle H = 45^\circ, h = 8, m\angle K = x^\circ, k = 10$$

$$10 \sin 45^\circ = 8 \sin x^\circ$$

خاصية الضرب التبادلي

$$\frac{10 \sin 45^\circ}{8} = \sin x^\circ$$

بقسمة كل طرف على 8

$$x = \sin^{-1} \frac{10 \sin 45^\circ}{8}$$

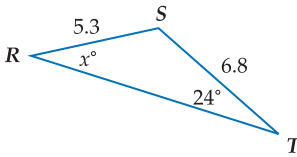
باستعمال نسبة معكوس الجيب

$$x \approx 62^\circ$$

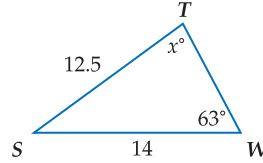
باستعمال الآلة الحاسبة

تأكد

أوجد قيمة x في كل شكل أدناه مقربة إلى أقرب درجة :



(2B)



(2A)

قانون جيب التمام قد يتعذر استعمال قانون الجيب لحل المثلث في بعض الحالات، وحينها يمكن محاولة تطبيق قانون جيب التمام.

إرشادات للدراسة

قانون جيب التمام

لاحظ أن الزاوية المستعملة في كل معادلة في قانون جيب التمام تناظر الضلع المقابل لتلك الزاوية في الطرف الآخر للمعادلة.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

نظرية 2.5

قانون جيب التمام

إذا مثلت a, b, c أطوال أضلاع $\triangle ABC$ المقابلة لزاوياتها A, B, C ، فإن:

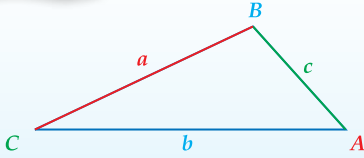
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

ستبرهن إحدى معادلات النظرية 2.5 في التمرين 46

أضف إلى مطويتك

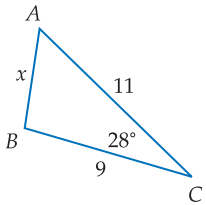


يمكنك استعمال قانون جيب التمام لحل مثلث، إذا علمت طوكي ضلعين، وقياس الزاوية المحصورة بينهما (SAS).

مثال 3

قانون جيب التمام (SAS)

أوجد قيمة x في الشكل المجاور، مقربة إلى أقرب عُشر.



تعلم من الشكل طوكي ضلعين وقياس الزاوية المحصورة بينهما؛ لذا استعمل قانون جيب التمام.

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

قانون جيب التمام

$$x^2 = 9^2 + 11^2 - 2(9)(11) \cos 28^\circ$$

بالتعويض

$$x^2 = 202 - 198 \cos 28^\circ$$

بالتبسيط

$$x = \sqrt{202 - 198 \cos 28^\circ}$$

بأخذ الجذر التربيعي الموجب لكل طرف

$$x \approx 5.2$$

باستعمال الآلة الحاسبة

تنبيه!

ترتيب العمليات

تذكر اتباع ترتيب العمليات عند تبسيط التعبيرات. فيجب إجراء عمليتي الضرب والقسمة قبل عمليتي الجمع والطرح. فلا يمكن تبسيط التعبير $202 - 198 \cos 28^\circ$ إلى $4 \cos 28^\circ$.

الزوايا المنفرجة

توجد أيضًا قيم لـ:

 $\sin A, \cos A, \tan A$ عندما تكون $A \geq 90^\circ$.

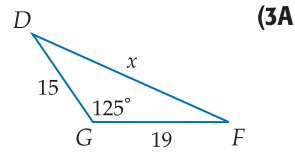
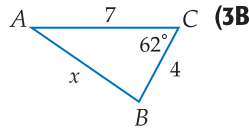
ستجد قيم النسب

لهذه الزوايا باستعمال

النسب المثلثية في تلك

الحاسبة.

تأكد

أوجد قيمة x في كل شكل أدناه، مقربة إلى أقرب عُشر:

يمكنك أيضًا استعمال قانون جيب التمام، إذا علمت أطوال الأضلاع الثلاثة (SSS).

قانون جيب التمام (SSS)

مثال 4

أوجد قيمة x في الشكل المجاور، مقربة إلى أقرب درجة.

$$m^2 = p^2 + q^2 - 2pq \cos M$$

قانون جيب التمام

$$8^2 = 6^2 + 3^2 - 2(6)(3) \cos x^\circ$$

بالتعويض

$$64 = 45 - 36 \cos x^\circ$$

بالتبسيط

$$19 = -36 \cos x^\circ$$

ب طرح 45 من كل طرف

$$\frac{19}{-36} = \cos x^\circ$$

بقسمة الطرفين على -36

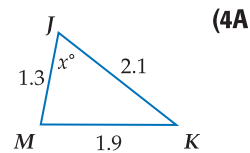
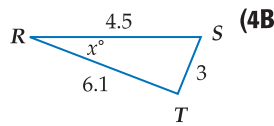
$$x = \cos^{-1} - \frac{19}{36}$$

باستعمال نسبة معكوس جيب التمام

$$x \approx 122$$

باستعمال الآلة الحاسبة

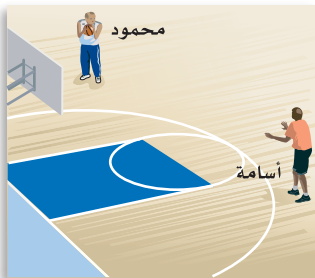
تأكد

أوجد قيمة x في كل شكل أدناه، مقربة إلى أقرب درجة:

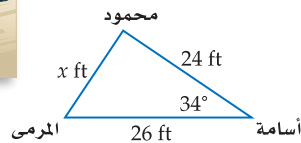
يمكنك استعمال قانون الجيب أو قانون جيب التمام لحل مسائل على القياس المباشر أو غير المباشر.

قياس غير مباشر

مثال 5 من واقع الحياة



لعبة كرة السلة: يلعب أسامة ومحمود كرة السلة. مرر أسامة الكرة إلى محمود عندما كان على بُعد 26 ft عن المرمى، و 24 ft عن محمود. إذا كان قياس الزاوية المكوّنة من القطعة المستقيمة بين المرمى وأسامة، والقطعة المستقيمة بين أسامة ومحمود يساوي 34° ، فكم يبعد محمود عن المرمى؟



ارسم شكلاً توضيحياً. بما أننا نعلم طولَي ضلعين في المثلث والزاوية المحصورة بينهما، فنستعمل قانون جيب التمام.

$$x^2 = 24^2 + 26^2 - 2(24)(26) \cos 34^\circ$$

قانون جيب التمام

$$x = \sqrt{1252 - 1248 \cos 34^\circ}$$

بالتبسيط، وأخذ الجذر الموجب لكل من الطرفين

$$x \approx 15$$

باستعمال الآلة الحاسبة

يُبعد محمود 15 ft عن المرمى، عندما تلقى الكرة من أسامة.



الربط مع واقع الحياة

لُعِبَت أول مباراة لكرة السلة في ولاية Massachussetts في YMCA Spring (fied) بتاريخ 1/12/1891. وقد ابتكر الرياضي James Naismith هذه اللعبة مستعملاً كرة قدم ومكيالي حبوب كسلتين.

المصدر: Encyclo paedia Britannia

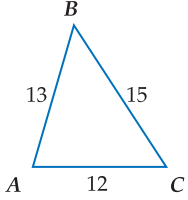


(5) **مناظر طبيعية:** قيس زاوية ارتفاع قمة شجرة عند نقطة على سطح الأرض تبعد 10 ft عن قاعدتها فكانت 61° . إذا كانت الشجرة ليست رأسية، بل تصنع زاوية قياسها 78° مع سطح الأرض، فما طول الشجرة إلى أقرب قدم؟

عند حل المثلثات القائمة يمكنك استعمال الجيب أو جيب التمام أو الظل. وعند حل مثلثات أخرى يمكنك استعمال قانون الجيب أو قانون جيب التمام حسب المعلومات المعطاة.

حل المثلث

مثال 6



حلّ المثلث ABC المجاور، مقربًا النواتج إلى أقرب درجة.

بما أن $15^2 \neq 12^2 + 13^2$ ، فالمثلث ليس قائم الزاوية.

و بما أن قياسات أطوال الأضلاع الثلاثة معطاة (SSS)، ابدأ باستعمال قانون جيب التمام؛ لإيجاد $m\angle A$.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \quad \text{قانون جيب التمام}$$

$$15^2 = 12^2 + 13^2 - 2(12)(13) \cos A \quad a = 15, b = 12, c = 13$$

$$225 = 313 - 312 \cos A \quad \text{بالتبسيط}$$

$$-88 = -312 \cos A \quad \text{بطرح 313 من الطرفين}$$

$$\frac{-88}{-312} = \cos A \quad \text{بقسمة كل طرف على -312}$$

$$m\angle A = \cos^{-1} \frac{88}{312} \quad \text{باستعمال نسبة معكوس جيب التمام}$$

$$m\angle A \approx 74^\circ$$

استعمل قانون الجيب، لإيجاد $m\angle B$.

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} \quad \text{قانون الجيب}$$

$$\frac{\sin 74^\circ}{15} \approx \frac{\sin B}{12} \quad m\angle A \approx 74^\circ, a = 15, b = 12$$

$$12 \sin 74^\circ = 15 \sin B \quad \text{خاصية الضرب التبادلي}$$

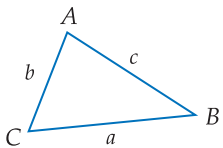
$$\frac{12 \sin 74^\circ}{15} = \sin B \quad \text{بقسمة كل طرف على 15}$$

$$m\angle B = \sin^{-1} \frac{12 \sin 74^\circ}{15} \quad \text{باستعمال نسبة معكوس الجيب}$$

$$m\angle B \approx 50^\circ \quad \text{باستعمال الآلة الحاسبة}$$

باستعمال نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث $56^\circ \approx 180^\circ - (74^\circ + 50^\circ)$.

لذلك، $m\angle A \approx 74^\circ$ ، $m\angle B \approx 50^\circ$ ، $m\angle C \approx 56^\circ$.



حلّ المثلث ABC المجاور، مستعملًا المعلومات المعطاة مقربًا قياسات الزوايا إلى أقرب درجة، وأطوال الأضلاع إلى أقرب عُشر.

$$b = 10.2, c = 9.3, m\angle A = 26^\circ \quad (6A)$$

$$a = 6.4, c = 5.8, m\angle C = 46^\circ \quad (6B)$$

قراءة الرياضيات

حلّ المثلث

تذكّر أن حلّ المثلث يعني أن تجد أطوال الأضلاع جميعها، و/أو قياسات الزوايا المجهولة.

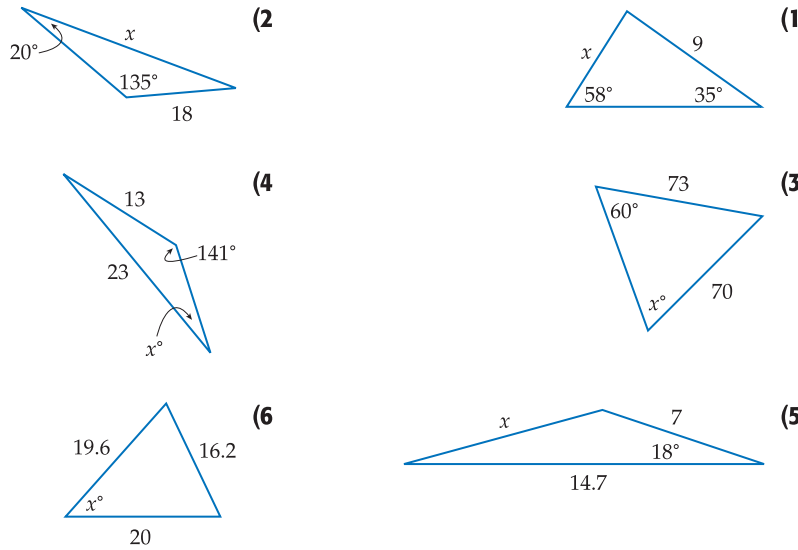
التقريب عندما تقرب
حلاً عددياً ثم تستعمله
في حسابات لاحقة.
فيمكن أن تكون إجاباتك
غير دقيقة. أجل التقريب
إلى ما بعد انتهاء
العمليات الحسابية.

لحل ...	المعطيات	ابدأ باستعمال ...
المثلث القائم	ضلع - ضلع (SS) وتر - ضلع (HS) زاوية حادة - وتر (AH) زاوية حادة - ضلع (AS)	نسبة الظل نسبة الجيب أو جيب التمام نسبة الجيب أو جيب التمام نسبة الجيب، أو جيب التمام أو الظل
أي مثلث	زاوية - زاوية - ضلع (ASA أو AAS) ضلع - ضلع - زاوية (SSA) ضلع - زاوية - ضلع (SAS) ضلع - ضلع - ضلع (SSS)	قانون الجيب قانون الجيب قانون جيب التمام قانون جيب التمام

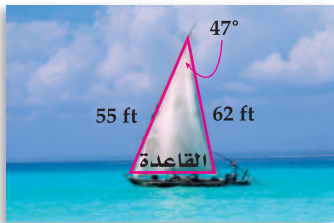
تأكد من فهمك

أوجد قيمة x في كل شكل أدناه، مقرباً قياسات الزوايا إلى أقرب درجة، وأطوال الأضلاع إلى أقرب عُشر:

الأمثلة 1-4
الصفحتان 98, 100



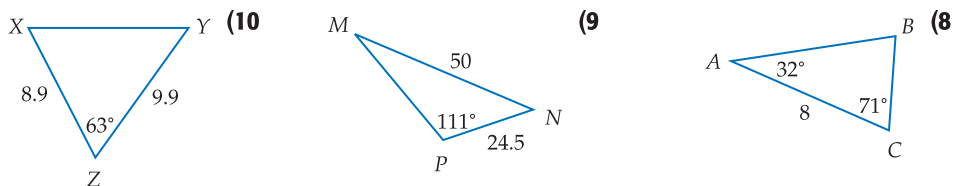
المثالان 3, 4
الصفحتان 99, 100



(7) **قوارب شراعية:** عيّن طول حافة قاعدة الشراع في الشكل المجاور إلى أقرب منزلة عشرية.

مثال 5
صفحة 100

حلّ كلّ مثلث أدناه، مقرباً قياسات الزوايا إلى أقرب درجة، وأطوال الأضلاع إلى أقرب عُشر:



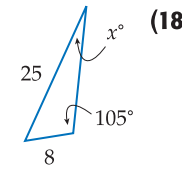
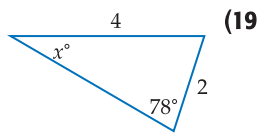
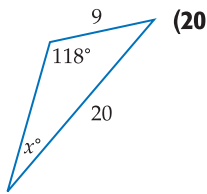
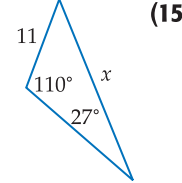
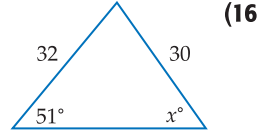
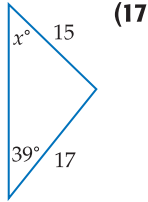
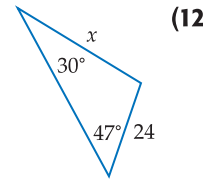
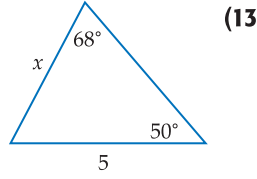
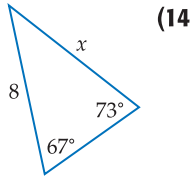
(11) إذا كان $DE = 16$, $EF = 21.6$, $FD = 20$ ، فحلّ $\triangle DEF$.

تدرب وحل المسائل

أوجد قيمة x في كل شكل أدناه، مقربًا قياسات الزوايا إلى أقرب درجة، وأطوال الأضلاع إلى أقرب عُشر :

المثالان 1, 2

الصفحتان 98, 99

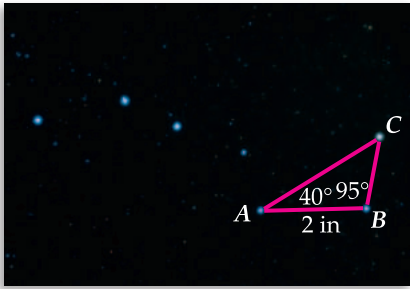


الربط مع واقع الحياة

نجم الدب الأكبر واحد من مجموعة نجوم الدب الأكبر (Ursa). ستسبب الحركة النجمية تغييراً في وضع هذه المجموعة على مدى السنوات الـ 100000 القادمة.

المصدر: NASA

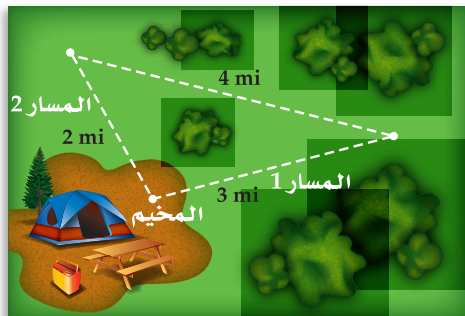
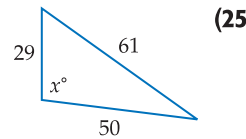
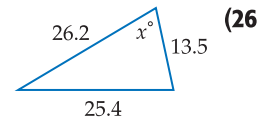
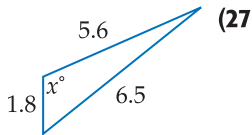
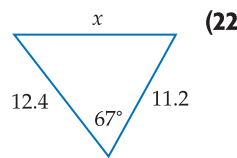
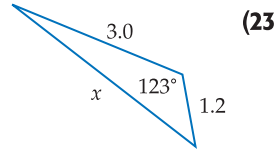
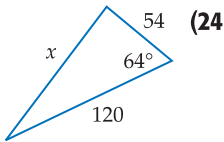
(21) **فلك:** يرصد ناصر مجموعة نجوم الدب الأكبر بواسطة تلسكوب، فلاحظ أن بعض نجوم هذه المجموعة النجمية تشكّل مثلثاً بالقياسات المبيّنة في الشكل المجاور. استعمل قانون الجيب لتعيّن المسافة بين A ، C إلى أقرب منزلة عشرية.



أوجد قيمة x في كل شكل أدناه، مقربًا قياسات الزوايا إلى أقرب درجة، وأطوال الأضلاع إلى أقرب عُشر :

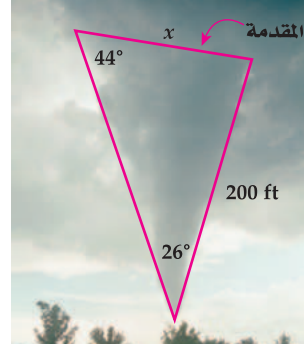
المثالان 3, 4

الصفحتان 99, 100

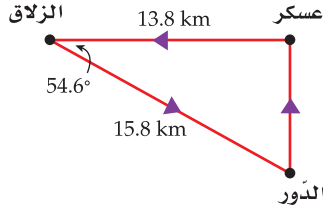


(28) **رحلات:** قرّرت مجموعة من الأصدقاء القيام برحلة سيرًا على الأقدام، حسب الخريطة في الشكل المجاور. ما قياس الزاوية بين المسارين 1، 2 ؟

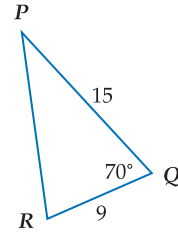
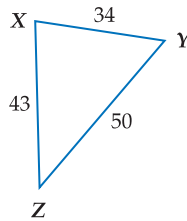
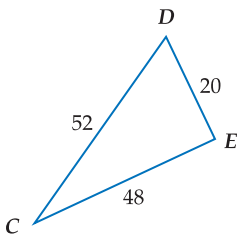
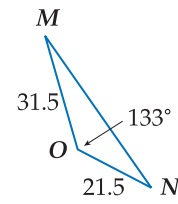
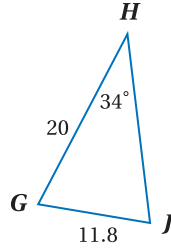
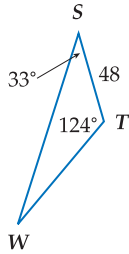
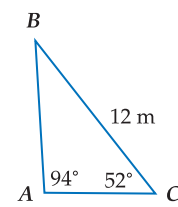
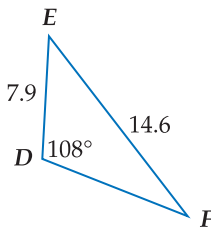
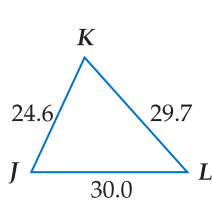
(29) **زوايا:** أوجد عرض مقدمة الزوينة المبينة في الشكل أدناه.



(30) **رحلة:** تقطع سيارة مسافة 13.8 km تقريباً من عسكر إلى الزلاق، ثم تقطع 15.8 km تقريباً إلى الدّور، وتعود منها إلى عسكر. ما المسافة بين الدّور وعسكر إلى أقرب كيلومتر؟



حلّ كلّ مثلث أدناه، مقرباً قياسات الزوايا إلى أقرب درجة، وأطوال الأضلاع إلى أقرب عُشر:

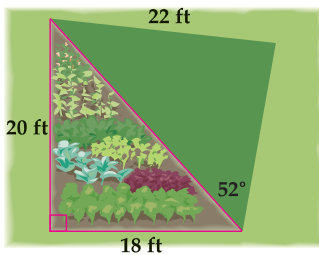


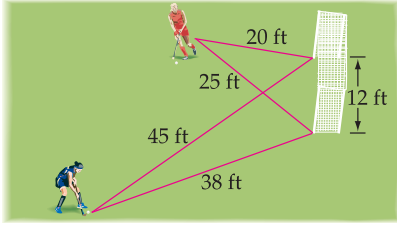
(40) حلّ $\triangle JKL$ ، إذا كان $JK = 33$, $KL = 56$, $LJ = 65$.

(41) حلّ $\triangle ABC$ ، إذا كان $m\angle B = 119^\circ$, $m\angle C = 26^\circ$, $CA = 15$.

(42) حلّ $\triangle XYZ$ ، إذا كان $XY = 190$, $YZ = 184$, $ZX = 75$.

(43) **زراعة:** لدى يوسف حديقة لزراعة الخضراوات مثلثة الشكل. ويرغب في توسعتها، وذلك بزراعة قطعة أرض مثلثة الشكل مجاورة لها. إذا كانت الأبعاد كما في الشكل المجاور، فأوجد محيط الحديقة الجديدة.



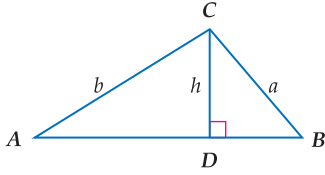


(44) **هوكي:** يلعب حسن وخالد الهوكي. يقف حسن على بُعد 20 ft من أحد قائمي المرمى و25 ft من القائم الآخر، في حين يقف خالد على بُعد 45 ft من أحد قائمي المرمى، و 38 ft عن القائم الآخر. إذا كان عرض المرمى 12 ft، فأَي اللاعبين فرصته في تسجيل هدف هي الأكبر؟ وما قياس زاوية التسجيل لهذا اللاعب إلى أقرب منزلة عشرية؟



الرابط مع واقع الحياة

تنتشر لعبة الهوكي في بعض الدول العربية، وتصل في بعض الدول إلى حد الشعبية، وهي من الألعاب القديمة التي مارسها العرب منذ قديم الزمان وسموها الحكشة والهولة، أو المحجنية.



(45) **برهان:** برّر كل عبارة في اشتقاق قانون الجيب.

المعطيات: $\overline{CD}$ ارتفاع في $\triangle ABC$.

المطلوب: إثبات أن $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b}$

البرهان:

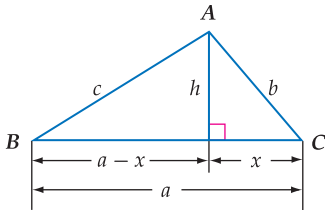
المبررات	العبارات
(a) <u>?</u>	$\sin A = \frac{h}{b}, \sin B = \frac{h}{a}$ (a)
(b) <u>?</u>	$b \sin A = h, a \sin B = h$ (b)
(c) <u>?</u>	$b \sin A = a \sin B$ (c)
(d) <u>?</u>	$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b}$ (d)

(46) **برهان:** برّر كل عبارة في اشتقاق قانون جيب التمام.

المعطيات: h ارتفاع في $\triangle ABC$.

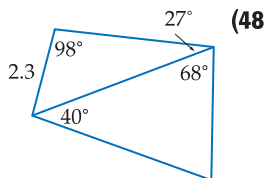
المطلوب: إثبات أن $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$

البرهان:

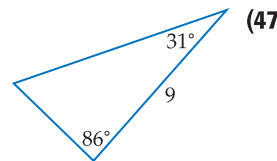


المبررات	العبارات
(a) <u>?</u>	$c^2 = (a-x)^2 + h^2$ (a)
(b) <u>?</u>	$c^2 = a^2 - 2ax + x^2 + h^2$ (b)
(c) <u>?</u>	$x^2 + h^2 = b^2$ (c)
(d) <u>?</u>	$c^2 = a^2 - 2ax + b^2$ (d)
(e) <u>?</u>	$\cos C = \frac{x}{b}$ (e)
(f) <u>?</u>	$b \cos C = x$ (f)
(g) <u>?</u>	$c^2 = a^2 - 2a(b \cos C) + b^2$ (g)
(h) <u>?</u>	$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$ (h)

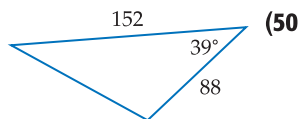
أوجد محيط كل شكل أدناه، مقرباً إلى أقرب عُشر:



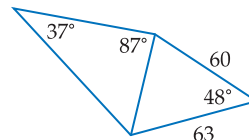
(48)



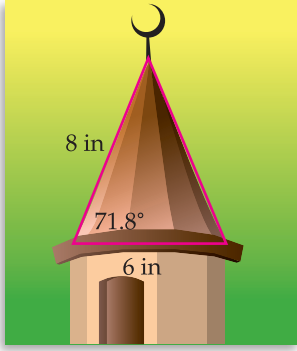
(47)



(50)



(49)



نماذج: يعمل عيسى على صنع نموذج لمئذنة مسجد. أوجد طول الضلع المجهول باستعمال الشكل المجاور، مقرباً الناتج إلى أقرب منزلة عشرية.

51



الرابط مع واقع الحياة

يبتكر متخصصون نماذج عالية الجودة للعرض وللشركات ولهواة جمع النماذج. يمكن أن تزيد كلفة النموذج على BD 4000 .
المصدر: Twenty-First Century Models

هندسة إحداثية: أوجد قياس أكبر زاوية في $\triangle ABC$ ، الذي إحداثيات رؤوسه $A(-3, 6)$, $B(4, 2)$, $C(-5, 1)$. وضح تبريرك.

تمثيلات متعددة: في هذا التمرين ستستعمل حساب المثلثات؛ لإيجاد مساحة سطح المثلث.

(a) هندسي: ارسم المثلث $\triangle ABC$ حاد الزوايا، ومختلف الأضلاع، وارتفاعه النازل من الرأس A على القاعدة المقابلة يساوي h .

(b) جبري: استعمل حساب المثلثات لإيجاد h بدلالة $m\angle B$.

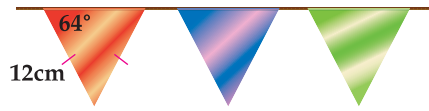
(c) جبري: اكتب معادلة لإيجاد مساحة سطح $\triangle ABC$ باستعمال حساب المثلثات.

(d) عددي: إذا كان $m\angle B = 47^\circ$, $AB = 11.1$, $BC = 14.1$, $CA = 10.4$ ، فأوجد مساحة سطح $\triangle ABC$ مقرباً الناتج إلى أقرب عُشر.

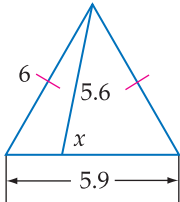
(e) تحليل: اكتب معادلة لإيجاد مساحة سطح $\triangle ABC$ باستعمال حساب المثلثات بدلالة زاوية أخرى.

مسائل مهارات التفكير العليا

54) اكتشف الخطأ: تحاول فاطمة ولطيفة حياكة قطع من القماش مثلثة الشكل، وهما بحاجة إلى معرفة محيط أحد هذه المثلثات لشراء حاشية تكفي لتزيين المثلثات جميعها. والمثلثات جميعها متطابقة الضلعين، وقياس كل من زاويتي القاعدة 64° ، وطول كل من الضلعين المتطابقين يساوي 12 cm. تعتقد فاطمة أن المحيط يساوي 37.7 cm، في حين تعتقد لطيفة أنه يساوي 36 cm. أيهما كان اعتقادها صحيحاً؟



55) تحدّ: أوجد قيمة x في الشكل المجاور، مقرباً الناتج إلى أقرب عُشر.



56) تبرير: هل توجد مجموعة من ثلاثة قياسات لا يمكن استعمالها لحل المثلث؟ وضح إجابتك.

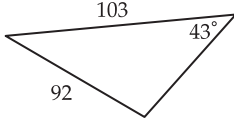
57) مسألة مفتوحة: ارسم مثلثاً، واكتب عليه قياسات بحيث يمكن حله:

(a) باستعمال قانون الجيب فقط.

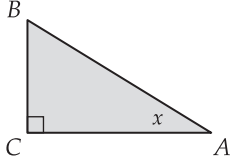
(b) باستعمال قانون جيب التمام فقط.

58) اكتب: وضح لماذا لا يمكن استعمال قانون الجيب لحل مثلث، إذا عُلمت أطوال أضلاعه الثلاثة، ضمّن ذلك مثلاً يوضح تفسيرك.

(61) سؤال ذو إجابة قصيرة: ما محيط المثلث المبين أدناه؟ مقرباً الناتج إلى أقرب عُشر.



(62) إذا كان $AB = 12$, $\sin x = 0.6$, فما مساحة سطح $\triangle ABC$ بالوحدات المربعة؟ مقرباً الناتج إلى أقرب عُشر.

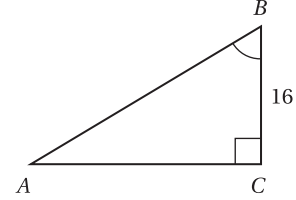


- C 34.6 وحدة مربعة
D 42.3 وحدة مربعة
A 28.8 وحدة مربعة
B 31.2 وحدة مبعة

(59) $\triangle ABC$ فيه $m\angle A = 42^\circ$, $m\angle B = 74^\circ$, $a = 3$ ما قيمة b ، مقربة إلى أقرب عُشر؟

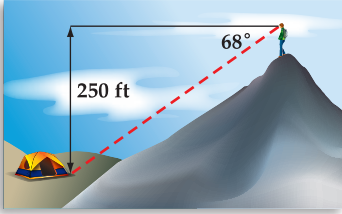
- C 2.1
D 1.5
A 4.3
B 3.8

(60) إذا كان $\cos B = 0.8$ في الشكل أدناه، فما طول $\overline{AB}$ ؟



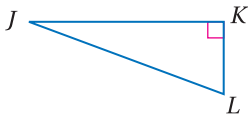
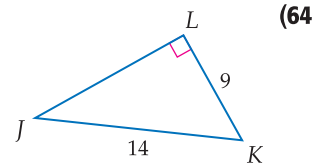
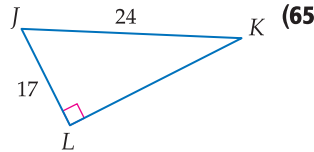
- B 16.8
D 28.8
A 12.8
C 20.0

مراجعة تراكمية



(63) متسلقو الجبال: يقف أحد المتسلقين على قمة جبل يرتفع 250 ft فوق سطح البحر، نظر إلى المخيم فكانت زاوية انخفاضة 68° ، كم يبعد المخيم عن قمة الجبل؟ مقرباً الناتج إلى أقرب منزلة عشرية (الدرس 2-3)

استعمل الآلة الحاسبة؛ لإيجاد قياس $\angle J$ في كل شكل أدناه، مقرباً إلى أقرب درجة: (الدرس 2-3)

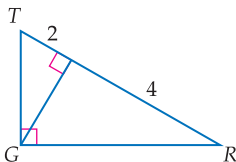


استعمل $\triangle JKL$ لإيجاد $\sin L$, $\cos L$, $\tan L$, $\csc J$, $\sec J$, $\cot J$. وعبر عن كل نسبة بكسر اعتيادي، وبكسر عشري، إلى أقرب جزء من مئة في كل مما يأتي: (الدرس 2-3)

(67) $j = 12, k = 24, l = 12\sqrt{3}$

(66) $j = 8, k = 17, l = 15$

(68) سفر: نظرت أسماء من الطائرة نحو مبنى، إذا نظرت إلى الأسفل بزاوية قياسها 9° ، وكانت الطائرة على ارتفاع نصف كيلومتر فوق سطح الأرض، فما مقدار المسافة الأفقية إلى المبنى مقربة إلى أقرب كيلومتر؟ (الدرس 2-4)



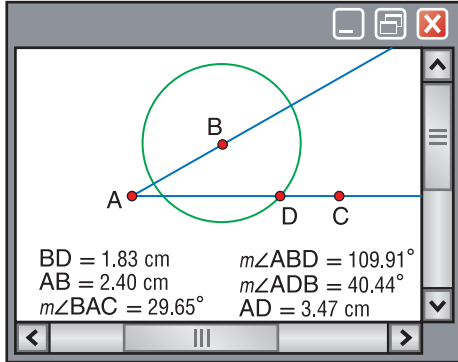
(69) أوجد TG في $\triangle TGR$ المجاور. (الدرس 2-2)

الحالة المبهمة لقانون الجيب

The Ambiguous Case of the Law of Sines

تعلّمت في الدرس 2-5 حلّ المثلثات باستعمال قانون الجيب، إذا علمت قياسيّ زاويتين، وطول أحد أضلاع المثلث (ASA أو AAS). ويمكنك أيضاً حلّ المثلث باستعمال قانون الجيب، إذا علمت قياسيّ ضلعين وزاوية مقابلة لأحدهما (SSA). عندما تستعمل SSA لحلّ المثلث وتكون الزاوية حادة، يمكن أحياناً إيجاد مثلثين مختلفين. يمكنك استعمال برمجة الرسم الهندسي Geometer's Sketchpad لاستكشاف هذه الحالة، وتُسمى الحالة المبهمة لقانون الجيب.

نشاط

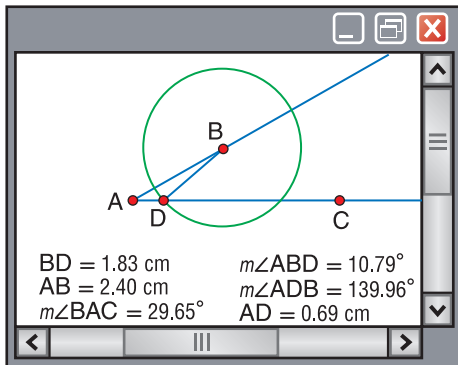


الخطوات 1-3

الخطوة 1 ارسم $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$. وارسم دائرة مركزها B، بحيث تقطع $\overrightarrow{AC}$ في نقطتين، ثم ارسم أي نصف قطر $\overline{BD}$.

الخطوة 2 أوجد قياسات $\overline{AB}$ ، $\overline{BD}$ ، $\angle A$.

الخطوة 3 استعمل أداة التدوير لتحرك D، بحيث تقع على إحدى نقطتي تقاطع الدائرة B مع $\overrightarrow{AC}$. أوجد قياسات $\overline{AD}$ ، $\angle ABD$ ، $\angle BDA$ في $\triangle ABD$.



الخطوتان 4,5

الخطوة 4 باستعمال أداة التدوير حرّك D إلى نقطة التقاطع الأخرى للدائرة B مع $\overrightarrow{AC}$.

الخطوة 5 لاحظ قياسات $\overline{AD}$ ، $\angle BDA$ ، $\angle ABD$ في $\triangle ABD$.

حلّ النتائج

- (1) أي القياسات متساوية في المثلثين؟
- (2) كرّر النشاط باستعمال قياسات مختلفة لـ $\overline{AB}$ ، $\overline{BD}$ ، $\angle A$ ، قارن هذه النتائج بالنتائج السابقة؟
- (3) قارن نتائجك بنتائج زملائك. ما وجه الشبه بينهما؟
- (4) ما علاقة الدائرة B مع $\overline{AC}$ ، حتى يوجد حل واحد فقط؟ اختبر تخمينك بإعادة النشاط.
- (5) اكتب: إذا علمت قياسات $\overline{AB}$ ، $\overline{BD}$ ، $\angle A$ ، فهل من الممكن ألا يوجد حل؟ اختبر تخمينك ووضّحه.

المفردات الأساسية

المسافة ص 54	الظل ص 79
نقطة المنتصف ص 56	معكوس الجيب ص 82
منتصف القطعة المستقيمة ص 58	معكوس جيب التمام ص 82
الوسط الهندسي ص 67	معكوس الظل ص 82
حساب المثلثات ص 79	زاوية الارتفاع ص 90
النسبة المثلثية ص 79	زاوية الانخفاض ص 90
الجيب ص 79	قانون الجيب ص 98
جيب التمام ص 79	قانون جيب التمام ص 99

اختبر مفرداتك

بين إذا كانت كل عبارة فيما يأتي صحيحة أم خاطئة، وإذا كانت خاطئة فاستبدل بما تحته خط لتصبح العبارة صحيحة.

- طول القطعة المستقيمة التي إحداثيات طرفيها $(2, 0)$ ، $(0, 2)$ يساوي 2 وحدة.
- النقطة $(2, 1)$ هي منتصف القطعة المستقيمة التي إحداثيات طرفيها $(-1, 2)$ ، $(5, 0)$.
- الوسط الحسابي لعددتين موجبتين، هو الجذر التربيعي الموجب لحاصل ضرب العددين.
- زاوية الارتفاع هي الزاوية المكوّنة من الخط الأفقي وخط نظر الراصد لجسم يقع تحت الخط الأفقي.
- يمكن استعمال قانون الجيب؛ لإيجاد قياس زاوية، إذا عُلِمَت أطوال أضلاع المثلث الثلاثة.
- النسبة المثلثية هي نسبة طولَي ضلعين في مثلث قائم.

ملخص الفصل

مفاهيم أساسية

المسافة ونقطة المنتصف (الدرس 2-1)

• في المستوى الإحداثي المسافة بين النقطتين (x_1, y_1) ، (x_2, y_2) هي

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

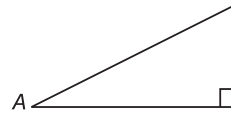
وإحداثيات نقطة المنتصف بينهما هي $(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2})$

الوسط الهندسي (الدرس 2-2)

• الوسط الهندسي لأي عددين موجبتين a ، b هو العدد الموجب x ، ليكون التناسب $x : b = a : x$ صحيحًا.

حساب المثلثات (الدرس 2-3)

$$\cos A = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} \quad \bullet \quad \sin A = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$$



$$\tan A = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$$

زوايا الارتفاع والانخفاض (الدرس 2-4)

- زاوية الارتفاع هي الزاوية المكوّنة من الخط الأفقي، وخط النظر من الراصد إلى الجسم المرصود فوق الخط الأفقي.
- زاوية الانخفاض هي الزاوية المكوّنة من الخط الأفقي، وخط النظر من الراصد إلى الجسم المرصود تحت الخط الأفقي.

قانون الجيب وقانون جيب التمام (الدرس 2-5)

ليكن $\triangle ABC$ أي مثلث، حيث a ، b ، c تُمثّل أطوال أضلاعه المقابلة للزوايا التي قياساتها A ، B ، C على الترتيب، فإن

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c} \quad \text{قانون الجيب:}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \quad \text{قانون جيب التمام:}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

منظم أفكار

مطويتك



تأكد أن المفاهيم الأساسية مدوّنة في مطويتك.

دليل الدراسة والمراجعة

مراجعة الدروس

2-1 المسافة ونقطة المنتصف (الصفحات 64-54)

مثال 1

أوجد المسافة بين النقطتين $Y(-7, 2)$ ، $X(5, 7)$.

$$(x_2, y_2) = (-7, 2) , (x_1, y_1) = (5, 7)$$

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \\ &= \sqrt{(-7 - 5)^2 + (2 - 7)^2} \\ &= \sqrt{(-12)^2 + (-5)^2} \\ &= \sqrt{169} = 13 \end{aligned}$$

إذن المسافة بين Y ، X تساوي 13 وحدة.

مثال 2

أوجد إحداثيي نقطة منتصف القطعة المستقيمة التي إحداثيات

طرفيها هي $P(-4, 13)$ ، $Q(6, 5)$

$$(x_1, y_1) = (-4, 13) , (x_2, y_2) = (6, 5)$$

$$\begin{aligned} M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right) &= M\left(\frac{-4 + 6}{2}, \frac{13 + 5}{2}\right) \\ &= M(1, 9) \end{aligned}$$

إذن، إحداثيا نقطة المنتصف هي $(1, 9)$.

أوجد المسافة بين النقطتين في كل مما يأتي:

$$A(-3, 1), B(7, 13) \quad (1)$$

$$P(2, -1), Q(10, -7) \quad (2)$$

أوجد إحداثيي نقطة منتصف القطعة المستقيمة المعطى إحداثيات طرفيها في كل مما يأتي:

$$L(-3, 16), M(17, 4) \quad (3)$$

$$C(32, -1), D(0, -12) \quad (4)$$

أوجد إحداثيي النقطة المجهولة في كل مما يأتي علماً بأن M منتصف $\overline{XY}$:

$$X(-11, -6), M(15, 4) \quad (5)$$

$$M(-4, 8), Y(19, 0) \quad (6)$$

(7) **ال صلاة:** يذهب عثمان من بيته الذي إحداثيا موقعه في المستوى الإحداثي $(3, 5)$ إلى المسجد الذي إحداثيا موقعه $(7, 13)$ لأداء الصلاة يومياً.

a أوجد المسافة بين بيت عثمان والمسجد.

b أوجد إحداثيي نقطة المنتصف بين بيت عثمان والمسجد.

2-2 الوسط الهندسي (الصفحات 75-67)

مثال 3

أوجد الوسط الهندسي للعددين 10 و 15 .

$$x = \sqrt{ab}$$

تعريف الوسط الهندسي

$$= \sqrt{10 \cdot 15}$$

$$a = 10, b = 15$$

$$= \sqrt{(5 \cdot 2) \cdot (3 \cdot 5)}$$

بالتحليل

$$= \sqrt{25 \cdot 6}$$

خاصية التجميع

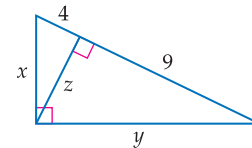
$$= 5\sqrt{6}$$

بالتبسيط

أوجد الوسط الهندسي لكل زوج من الأعداد الآتية:

$$\frac{4\sqrt{2}}{3} \text{ و } \frac{8\sqrt{2}}{3} \quad (10) \quad \sqrt{80} \text{ و } \sqrt{20} \quad (9) \quad 4 \text{ و } 9 \quad (8)$$

(11) أوجد قيمة كل من x, y, z في الشكل أدناه.



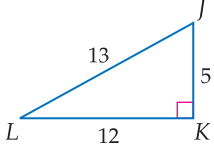
(12) **قياس:** يريد جميل قياس ارتفاع منزله. استعمل كتاباً للنظر إلى

قمة المنزل وقاعدته، إذا كان جميل على بعد 5 m عن المنزل،

وكان مستوى عينيه على ارتفاع 1.7 m عن سطح الأرض، فما

ارتفاع المنزل؟

مثال 4



أوجد النسب المثلثية الآتية على صورة كسر اعتيادي، وكسر عشري، إلى أقرب جزء من مئة.

(a) $\sin L$

$$\sin L = \frac{5}{13} \approx 0.38 \quad \sin L = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$$

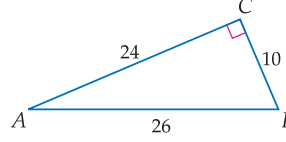
(b) $\cos L$

$$\cos L = \frac{12}{13} \approx 0.92 \quad \cos L = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$$

(c) $\tan L$

$$\tan L = \frac{5}{12} \approx 0.42 \quad \tan L = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$$

أوجد النسب المثلثية الآتية على صورة كسر اعتيادي، وكسر عشري، إلى أقرب جزء من مئة :



(14) $\tan B$

(13) $\sin A$

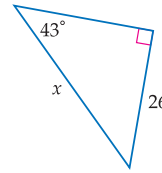
(16) $\cos A$

(15) $\sin B$

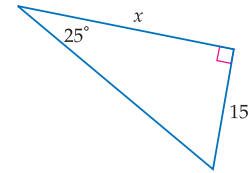
(18) $\cos B$

(17) $\tan A$

أوجد قيمة x في كل شكل أدناه، إلى أقرب عُشر :

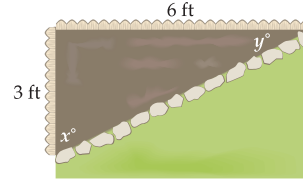


(20)



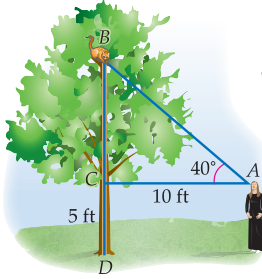
(19)

(21) **بستنة:** ترغب سارة في زراعة حوض ورود في فناء منزلها. فوضعت حدًا فاصلاً من الحجارة يبدأ على بُعد 3 ft عن أحد أركان المنزل، وينتهي على بُعد 6 ft من ذلك الركن على الضلع المجاور من السور. أوجد قياس الزاويتين x , y اللتين يصنعهما هذا الحد مع جانبي السور إلى أقرب منزلة عشرية.



دليل الدراسة والمراجعة

2-4 زوايا الارتفاع والانخفاض (الصفحات 97-99)



تسلَّقت قطة شجرة، رصدت مريم زاوية ارتفاعها فكانت 40° ، وكان مستوى عينيها على ارتفاع 5 ft عن سطح الأرض، ما ارتفاع القطة عن سطح الأرض؟ مقرباً إلى أقرب منزلة عشرية. لإيجاد ارتفاع القطة عن سطح الأرض أوجد CB.

$$\tan 40 = \frac{CB}{10} \quad \tan = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$$

$$10(\tan 40) = CB \quad \text{بالتضرب}$$

$$8.4 \approx CB \quad \text{بالتبسيط}$$

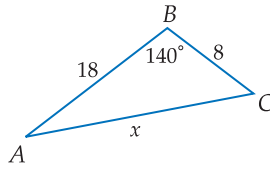
بما أن ارتفاع مستوى عيني مريم 5 ft فوق سطح الأرض. اجمع 5 إلى 8.4، فيكون ارتفاع القطة تقريباً عن سطح الأرض.

(22) **نسور:** رأى نسر يطير على ارتفاع 400 m أرضاً على الأرض. إذا كانت المسافة الأفقية بين النسر والأرنب 210 m، فبأي زاوية انخفاض يجب أن ينقض النسر ليمسك بالأرنب، إذا كان يطير في مسار مستقيم؟

(23) **أبراج:** يقع برج إرسال للهواتف المحمولة في ساحة مقابل بيت عبد الرحمن. وعندما كان عبد الرحمن على بُعد 50 ft من قاعدة البرج، وجد أن زاوية ارتفاع قمته 60° ، ما ارتفاع البرج إلى أقرب عُشر؟

2-5 قانون الجيب وقانون جيب التمام (الصفحات 107-98)

مثال 6



أوجد قيمة x في المثلث المجاور، مقربة إلى أقرب عُشر.

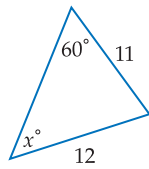
عُلم طول الضلعين وقياس الزاوية المحصورة بينهما. لذا، نستعمل قانون جيب التمام.

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B \quad \text{قانون جيب التمام}$$

$$x^2 = 8^2 + 18^2 - 2(8)(18) \cos 140^\circ \quad \text{بالتعويض}$$

$$x^2 = 388 - 288 \cos 140^\circ \quad \text{بالتبسيط}$$

$$x = \sqrt{388 - 288 \cos 140^\circ} \approx 24.7 \quad \text{بأخذ الجذر التربيعي لكل طرف}$$



أوجد قيمة x في المثلث المجاور، مقربة إلى أقرب عُشر.

قانون الجيب

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin C}{c}$$

$$\frac{\sin 60}{12} = \frac{\sin x}{11}$$

$$11 \sin 60^\circ = 12 \sin x$$

$$\frac{11 \sin 60}{12} = \sin x$$

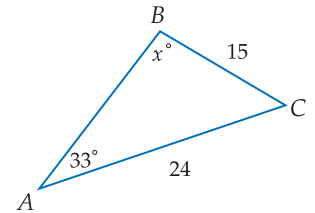
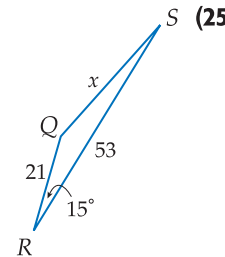
$$x = \sin^{-1} \frac{11 \sin 60}{12}$$

$$\approx 52.5^\circ$$

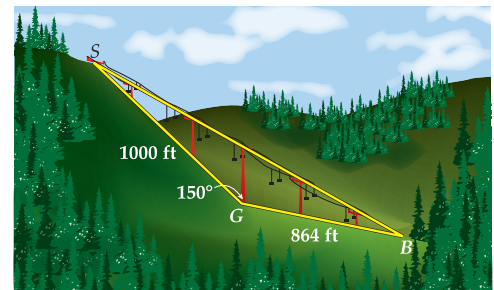
خاصية الضرب التبادلي

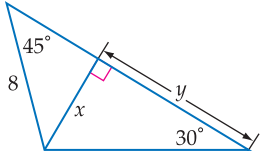
بالقسمة

أوجد قيمة x في كل شكل أدناه، مقرباً قياسات الزوايا إلى أقرب درجة، وأطوال الأضلاع إلى أقرب عُشر:

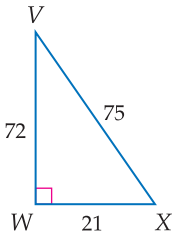


(26) **سياحة:** في منطقة سياحية جبلية، تريد دائرة السياحة أن تقيم مصعداً ينقل السياح من قاعدة الجبل إلى القمة كما في المخطط أدناه. طول مسار المصعد ممثّل بطول $\overline{SB}$. إذا علمت أن طول الكوابل يساوي مثلي طول المسار، فكم طول الكوابل التي تحتاج إليها دائرة السياحة؟ مقرباً الناتج إلى أقرب عُشر.





(15) أوجد قيمة كل من x ، y في الشكل المجاور.



أوجد النسب المثلثية الآتية على صورة كسر اعتيادي، وكسر عشر، مقربة إلى أقرب جزء من مئة:

$\tan X$ (17)

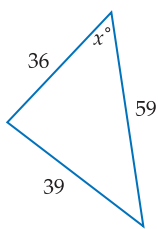
$\cos X$ (16)

$\sin V$ (19)

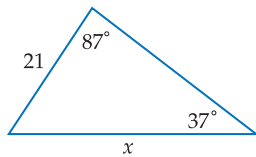
$\tan V$ (18)

(20) **فضاء:** يراقب حسين إطلاق منطاد من على بُعد 160 m. كم يكون ارتفاع المنطاد عندما تكون زاوية ارتفاعه 80° ؟ مقرباً الناتج إلى أقرب منزلة عشرية.

أوجد قيمة x في كل شكل أدناه، مقرباً قياسات الزوايا إلى أقرب درجة، وأطوال الأضلاع إلى أقرب عُشر:



(22)

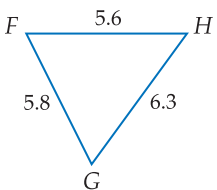


(21)

(23) **اختيار من متعدد:** إذا كان طول الوتر 20، فأَي مما يأتي يساوي طول ضلع المثلث $45^\circ - 45^\circ - 90^\circ$ ؟

- 10 A 20 C
10 $\sqrt{2}$ B 20 $\sqrt{2}$ D

(24) **مخلوقات بحرية:** ينظر إبراهيم بالمنظار في رحلة لمراقبة المخلوقات البحرية، فشاهد ثعلب ماء عن بُعد. إذا كان يقف في منطاد على ارتفاع 20 ft عن سطح الماء، وكانت زاوية انخفاض الثعلب 30° ، فكم يبعد الثعلب عن المنطاد مقرباً إلى أقرب قدم؟



(25) حلّ $\triangle FGH$ ، مقرباً النواتج إلى أقرب درجة.

أوجد إحداثيي نقطة منتصف القطعة المستقيمة المعطى إحداثيات طرفيها في كل مما يأتي:

(1) $(16, 5)$ ، $(28, -13)$

(2) $(-11, 34)$ ، $(47, 0)$

(3) $(-4, -14)$ ، $(-22, 9)$

أوجد المسافة بين النقطتين في كل مما يأتي:

(4) $(43, -15)$ ، $(29, -3)$

(5) $(21, 5)$ ، $(28, -1)$

(6) $(0, -5)$ ، $(18, -10)$

أوجد الوسط الهندسي لكل زوج من الأعداد الآتية:

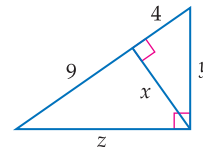
(7) 11 و 7

(8) 9 و 12

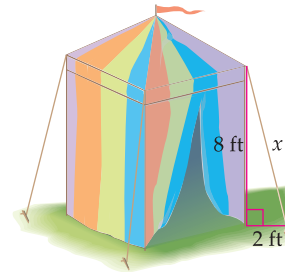
(9) 21 و 14

(10) $10\sqrt{3}$ و $4\sqrt{3}$

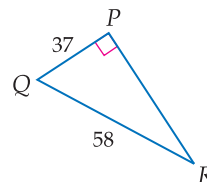
(11) أوجد قيمة كل من x ، y ، z في الشكل أدناه.



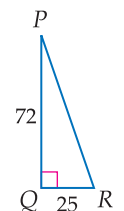
(12) ينصب سليم خيمته كما في الشكل أدناه. إذا كان ارتفاع الخيمة 8 ft، و يبعد الوتر 2 ft عن الخيمة، فما طول حبل الخيمة إلى أقرب منزلة عشرية؟



استعمل الآلة الحاسبة لإيجاد قياس $\angle R$ في كل شكل أدناه، مقرباً إلى أقرب عُشر الدرجة:



(14)

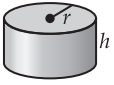
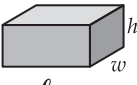
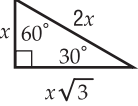
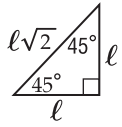
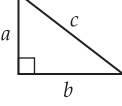
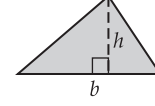
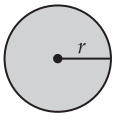


(13)

التهيئة للاختبارات المعيارية

استعمل صيغة

من الضروري أحياناً استعمال صيغة لحل المسائل في الاختبارات المعيارية .
ويمكن في بعض الحالات أن تُعطى قائمة الصيغ التي يُسمح لك بالرجوع إليها في أثناء تقديم الاختبار .

							
$V = \pi r^2 h$	$V = \ell wh$	مثلثات قائمة خاصة		$a^2 + b^2 = c^2$	$A = \frac{1}{2}bh$	$A = \ell w$	$C = 2\pi r$ $A = \pi r^2$
حجم الأسطوانة	حجم متوازي المستطيلات			نظرية فيثاغورس	مساحة المثلث	مساحة المستطيل	محيط الدائرة ومساحتها

يوجد 360° درجة في الدائرة.
مجموع قياسات زوايا المثلث 180°

استراتيجيات استعمال صيغة

الخطوة 1

اقرأ نص المسألة بعناية.

اسأل نفسك :

- ما المطلوب حله؟
- ما المعطيات في المسألة؟
- هل توجد صيغ يمكنني استعمالها؛ لمساعدتي على حل المسألة؟

الخطوة 2

حل المسألة.

- عوض الكميات المعطاة في نص المسألة في الصيغة.
- بسّط؛ لإيجاد القيم المجهولة في الصيغة.

الخطوة 3

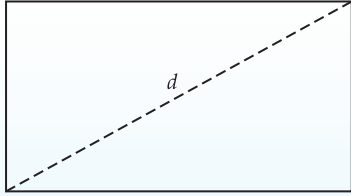
تحقق من الحل.

- حدّد مدى معقولاً لقيم الإجابة.
- تحقق من معقولية إجابتك.
- تحقق من إجابتك، إذا سمح الوقت بذلك.

التهيئة للاختبارات المعيارية

مثال

اقرأ المسألة، وعيّن المطلوب، ثم استعمل معطيات المسألة لحلها.



نسبة عرض شاشة تلفاز إلى ارتفاعها 16:9 . ويُعطى قياس التلفاز بدلالة طول قطر شاشته. إذا كان ارتفاع شاشة تلفزيون 25.5 in ، فما قياس شاشته إلى أقرب بوصة؟

51 in C
48 in A

52 in D
50 in B

اقرأ نص المسألة بعناية. عُلِم ارتفاع الشاشة، ونسبة العرض إلى الارتفاع. والمطلوب إيجاد طول قطر الشاشة. يمكنك استعمال نظرية فيثاغورس لحل المسألة. اكتب تناسبًا باستعمال النسبة 16:9 وحُلّه؛ لإيجاد عرض الشاشة.

$$\frac{16}{9} = \frac{w}{25.5} \quad \begin{array}{l} \leftarrow \text{عرض الشاشة} \\ \leftarrow \text{ارتفاع الشاشة} \end{array}$$

$$9w = 408 \quad \text{خاصية الضرب التبادلي}$$

$$w = 45\frac{1}{3} \quad \text{بقسمة كل طرف على 9}$$

لذا فإن عرض الشاشة $45\frac{1}{3}$ in. والآن استعمل نظرية فيثاغورس؛ لإيجاد طول قطر الشاشة.

$$c^2 = a^2 + b^2 \quad \text{نظرية فيثاغورس}$$

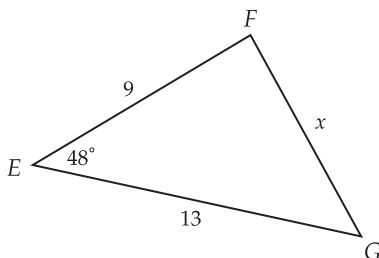
$$c^2 = (25.5)^2 + \left(45\frac{1}{3}\right)^2 \quad \text{عوّض عن } a, b$$

$$c \approx 52.01 \quad \begin{array}{l} \text{بالتبسيط، وبأخذ الجذر التربيعي} \\ \text{الموجب لكل من الطرفين لإيجاد } c \end{array}$$

طول قطر الشاشة 52 in تقريبًا، فالإجابة الصحيحة هي D

تمارين

اقرأ المسألة في السؤالين الآتين وحدّد المطلوب. ثم استعمل المعطيات لحلها.



26) يطير جاسم طائرة ورقية متصلة بخيط مشدود، وطرفه الآخر بيده. إذا كان ارتفاعها فوق سطح الأرض 54 m، وبُعدها الأفقي عن مكان وقوفه 40 m، فما طول خيط الطائرة مقربًا إلى أقرب متر؟

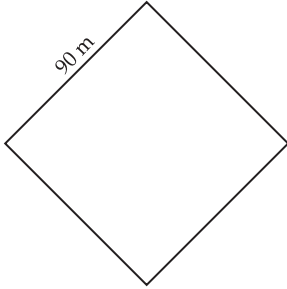
- 69 m C
62 m A
- 72 m D
67 m B

27) ما قيمة x في الشكل أدناه، مقربة إلى أقرب عُشر؟

- 11.1 J
10.5 H
10.2 G
9.7 F

أسئلة الاختيار من متعدد

(5) ساحة مربعة الشكل طول ضلعها 90 m، ما طول قطر هذه الساحة مقرباً إلى أقرب عُشر؟

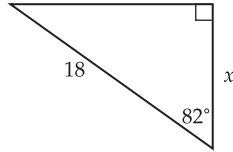


- 155.9 m A
141.6 m B
127.3 m C
118.2 m D

(6) ما قياس الضلع الثالث في $\triangle TUV$ الذي فيه $m\angle V = 78^\circ$ ، $t = 11$ ، $u = 17$ ؟

- 19.3 B 18.2 A
28.1 D 21.2 C

(7) ما قيمة x في الشكل أدناه؟ مقربة إلى أقرب عُشر.



- 7.7 B 18.2 A
2.5 D 17.8 C

(8) ما رتبة المصفوفة $\begin{bmatrix} 1 \\ 7 \end{bmatrix}$ ؟

- 1x2 B 1x7 A
7x1 D 2x1 C

(9) يُطير صلاح الدين طائرة ورقية مربوطة بخيط طوله 350 ft، وزاوية ارتفاع الطائرة 74° . كم ترتفع الطائرة فوق سطح الأرض، مقرباً الناتج إلى أقرب عُشر؟

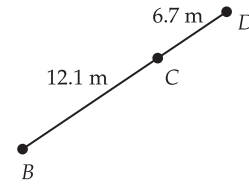
- 141.2 ft B 336.4 ft A
96.5 ft D 295.96 ft C

اختر رمز الإجابة الصحيحة في كل مما يأتي:

(1) ما المسافة بين النقطتين $M(-3, 1)$ ، $N(2, 8)$ ؟

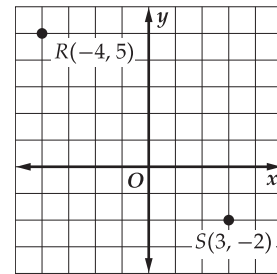
- 6.1 وحدة A
7.3 وحدة B
6.9 وحدة C
8.6 وحدة D

(2) ما طول القطعة المستقيمة BD ؟



- 18.8 m B 17.4 m A
19.1 m D 18.3 m C

(3) ما المسافة بين النقطتين R ، S المبينة في المستوى الإحداثي أدناه؟



- $\sqrt{10}$ C $7\sqrt{2}$ A
 $\sqrt{5}$ D 7 B

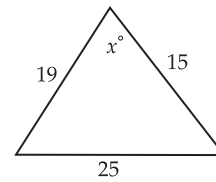
(4) ما ناتج $\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 1 \end{bmatrix}$ ؟

- $\begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 15 & 5 \end{bmatrix}$ C $\begin{bmatrix} -3 \end{bmatrix}$ A
D الضرب غير معرف $\begin{bmatrix} 11 \end{bmatrix}$ B

أسئلة مقالية

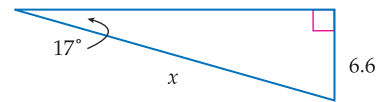
أسئلة ذات إجابات قصيرة

(10) أوجد قيمة x في الشكل أدناه، مقرباً إجابتك إلى أقرب درجة، إذا لزم ذلك.



(11) في $\triangle PQR$ ، إذا كان $p = 2\sqrt{3}$ ، $q = \sqrt{15}$ ، $r = 3\sqrt{3}$ ، فأوجد قياس الزاوية Q إلى أقرب عُشر الدرجة.

(12) أوجد قيمة x إلى أقرب عُشر في الشكل أدناه.



(13) يقلع نموذج طائرة بزاوية ارتفاع 30° . كم يكون ارتفاعه بعد أن يقطع 100 ft أفقيًا؟ مقرباً إلى أقرب عُشر. وضح إجابتك.

(14) منحدر يصنع زاوية ارتفاع قياسها 24.4° مع المستوى الأفقي لسطح الأرض، وترتفع أعلى نقطة في هذا المنحدر عن سطح الأرض بمقدار 300 m. أوجد طول المنحدر مقرباً الناتج إلى أقرب متر.

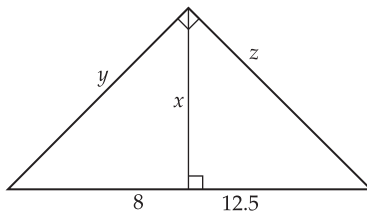
(15) احسب قيمة محدد المصفوفة:

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 5 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

سؤال ذو إجابة مطولة

سجل إجاباتك على ورقة مبيّنة خطوات الحل.

(16) أوجد قيمة كل من x ، y ، z في الشكل أدناه، مقرباً الناتج إلى أقرب عُشر. وضح إجابتك.



هل تحتاج مساعدة إضافية؟

16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	إذا لم تستطع الإجابة عن سؤال ...
2-2	1-4	2-4	2-4	2-3	2-3	2-6	2-4	1-1	2-3	2-5	2-3	1-3	2-1	2-1	2-1	اذهب إلى الدرس ...

الدائرة

Circle

الفصل 3

فيما سبق

درست أنواعاً من القطع المستقيمة الخاصة، وعلاقات الزوايا في المثلث.

والآن

الأفكار العامة

- أتعرف العلاقة بين الزوايا المركزية، والأقواس، والزوايا المحيطية في الدائرة.
- أعرف القاطع والمماس، وأستعملهما.
- أعرف الدائرة أو أصفها مستعملاً معادلتها.

لماذا؟

علوم  الشكل الحقيقي لقوس المطر هو دائرة كاملة، ويُسمى الجزء الذي يمكن رؤيته منها فوق الأفق قوساً.

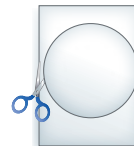
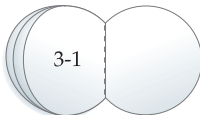


منظم أفكار

مطويتك

الدائرة: اعمل هذه المطوية لتساعدك في تنظيم ملاحظاتك للفصل 3 حول الدائرة. ابدأ بتسعة أوراق.

- 1 ارسم دائرة طول قطرها 18 cm على كل ورقة باستعمال الضجار.
- 2 قص هذه الدوائر.
- 3 ثبت هذه المجموعة على 2 cm من الجهة اليمنى للأوراق.
- 4 اكتب عنوان الفصل على الورقة الأولى وأرقام الدروس على الأوراق المتبقية.



التهيئة للفصل الثالث

تشخيص الاستعداد: هناك بديلان للتأكد من المتطلبات السابقة.

أجب عن الاختبار الآتي، وارجع إلى "المراجعة السريعة" لمساعدتك في ذلك.

مراجعة سريعة

مثال 1

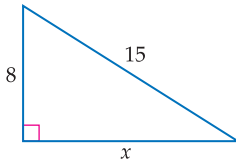
أوجد قيمة 15% من 35 .

$$\begin{aligned} &= (0.15)(35) && \text{بتغيير النسبة إلى كسر عشري} \\ &= 5.25 && \text{بالضرب} \end{aligned}$$

إذن، 15% من 35 تساوي 5.25

مثال 2

أوجد قيمة x . مقربة إلى أقرب عشر .



$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= c^2 && \text{نظرية فيثاغورس} \\ x^2 + 8^2 &= 15^2 && \text{بالتعويض} \\ x^2 + 64 &= 225 && \text{بالتبسيط} \\ x^2 &= 161 && \text{بالطرح} \\ x &= \sqrt{161} \approx 12.7 \end{aligned}$$

مثال 3

حلّ المعادلة $x^2 + 3x - 40 = 0$ باستعمال القانون العام مقرباً الناتج إلى أقرب عُشر .

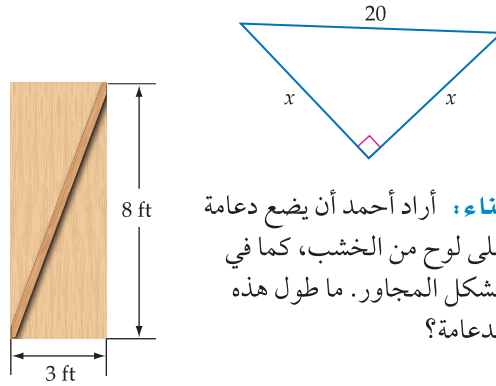
$$\begin{aligned} x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} && \text{القانون العام لحلّ المعادلة التربيعية} \\ &= \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4(1)(-40)}}{2(1)} && \text{بالتعويض} \\ &= \frac{-3 \pm \sqrt{169}}{2} && \text{بالتبسيط} \\ &= -8 \text{ أو } 5 && \text{بالتبسيط} \end{aligned}$$

اختبار سريع

أوجد النسبة المئوية من العدد المُعطى في كل مما يأتي:
(مهارة سابقة)

- (1) 26% من 500 (2) 79% من 623
(3) 19% من 82 (4) 10% من 180
(5) 92% من 90 (6) 65% من 360
(7) **مطاعم:** يُضيف مطعم رسم خدمة قدره 5% على كل وجبة يقدمها. إذا تناول حامد وجبة غداء سعرها BD 4، فما رسم الخدمة الذي دفعه إلى المطعم؟

(8) أوجد قيمة x مقرباً الناتج إلى أقرب عشر . (مهارة سابقة)



(9) **بناء:** أراد أحمد أن يضع دعامة على لوح من الخشب، كما في الشكل المجاور. ما طول هذه الدعامة؟

حلّ كلاً من المعادلات الآتية باستعمال القانون العام لحلّ المعادلة التربيعية مقرباً الناتج إلى أقرب عُشر . (مهارة سابقة)

$$x^2 = x + 12 \quad (11) \quad 5x^2 + 4x - 20 = 0 \quad (10)$$

(12) **ألعاب نارية:** أطلقت ألعاب نارية في الهواء احتفاءً باليوم الوطني. ولم تنفجر إحدى هذه الألعاب، إذا كان ارتفاعها عن سطح الأرض بعد t ثانية يُعطى بـ $d = 80t - 16t^2$ ، فبعد كم ثانية تصل سطح الأرض؟

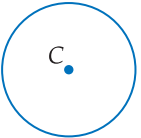
الدائرة ومحيطها

Circle and Circumference



لماذا؟

إذا ركب العجلة الدوارة، فإن بُعد موقعك عن محور دورانها يكون ثابتًا، فإذا كانت المسافة بين موقعك والمحور 44 ft، فإنه يمكنك أن تجد المسافة التي تقطعها في الدورة الواحدة.



الدائرة C أو C

القطع المستقيمة في الدائرة هي الشكل الهندسي أو مجموعة النقاط في المستوى، التي تبعد بُعدًا ثابتًا عن نقطة معلومة تُسمى **مركز** الدائرة. وعادة ما تسمى الدائرة بمركزها، والشكل المجاور يُبين الدائرة C التي يمكن أن يُرمز لها بالرمز C . وللقطع المستقيمة التي تقطع الدائرة أسماء خاصة.

أضف إلى
مطويتك

قطع مستقيمة خاصة في الدائرة

مفهوم أساسي

نصف القطر هو قطعة مستقيمة يقع أحد طرفيها في المركز، والطرف الآخر على محيط الدائرة.

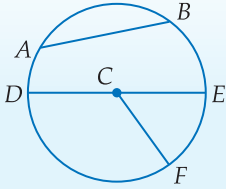
أمثلة $\overline{CD}$, $\overline{CE}$, $\overline{CF}$ أنصاف أقطار في C .

الوتر قطعة مستقيمة يقع طرفاها على محيط الدائرة.

أمثلة $\overline{AB}$, $\overline{DE}$ وتران في C .

القطر هو وتر يمر بمركز الدائرة، ويتكوّن من نصفي قطرين يقعان على استقامة واحدة.

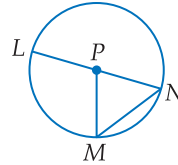
مثال $\overline{DE}$ قطر في C . يتكوّن القطر $\overline{DE}$ من نصفي القطرين $\overline{CD}$, $\overline{CE}$ الواقعين على استقامة واحدة.



تعيين القطع المستقيمة في الدائرة

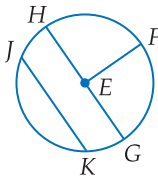
مثال 1

(a) سمّ الدائرة، وعيّن نصف قطر فيها.

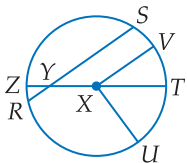


مركز الدائرة هو P، إذن يمكن تسميتها الدائرة P، أو P . تظهر في الشكل ثلاثة أنصاف أقطار هي $\overline{PL}$, $\overline{PN}$, $\overline{PM}$.

(b) عيّن وترًا وقطرًا في الدائرة.



يظهر في هذه الدائرة وتران هما $\overline{JK}$, $\overline{HG}$ يمر $\overline{HG}$ بالمركز، إذن $\overline{HG}$ قطر.



تأكد

(1) سمّ الدائرة، وعيّن نصف قطر، ووترًا، وقطرًا فيها.

فيما سبق

درست بعض عناصر الدائرة، واستعملتها.

والآن

الأفكار الرئيسية

- أحدّد عناصر الدائرة وأستعملها.
- أحل مسائل تتضمن محيط الدائرة.

المفردات الأساسية

الدائرة

circle

المركز

center

نصف القطر

radius

الوتر

chord

القطر

diameter

الدوائر المتطابقة

congruent circles

الدوائر المتحدة في المركز

concentric circles

محيط الدائرة

circumference

باي (π)

Pi

مُحاط بـ

inscribed

مُحيط بـ

circumscribed

ومن تعريف الدائرة، فإن المسافة بين مركز الدائرة وأي نقطة على محيطها ثابتة دائماً، إذن، أنصاف أقطار الدائرة جميعها متطابقة. وبما أن قطر الدائرة يتكوّن من نصفَي قطرين، فإن أقطار الدائرة أيضاً جميعها متطابقة.

أضف إلى
مطوّبتك

مفهوم أساسي العلاقة بين القطر ونصف القطر

إذا كان نصف قطر الدائرة r وقطرها d ، فإن العلاقات الآتية صحيحة:

$$\text{صيغة نصف القطر } r = \frac{d}{2} \text{ أو } r = \frac{1}{2}d \quad \text{صيغة القطر } d = 2r$$

قراءة الرياضيات

القطر ونصف القطر

تستعمل الكلمتان القطر ونصف القطر للتعبير عن الطول وعن القطع المستقيمة أيضاً. وبما أن للدائرة أنصاف أقطار عدة أقطار وعدة أيضاً. لذا، فإنه عند قولنا: نصف القطر أو القطر، فإننا نعني الطول وليس القطعة المستقيمة.

إيجاد نصف القطر والقطر

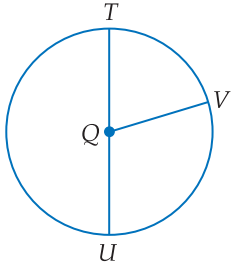
مثال 2

إذا كان $QV = 8 \text{ cm}$ ، فما قطر $\odot Q$ ؟

$$\text{صيغة القطر } d = 2r$$

$$\text{بالتعويض والتبسيط } d = 2(8) = 16$$

القطر في $\odot Q$ يساوي 16 cm .



تأكد

(2A) إذا كان $TU = 14 \text{ ft}$ ، فما نصف قطر $\odot Q$ ؟

(2B) إذا كان $QT = 11 \text{ m}$ ، فأوجد QU .

كما هو الحال في الأشكال الأخرى، يمكن أن تكون أزواج الدوائر متطابقة، أو أن تربطهما بعض العلاقات الخاصة.

مراجعة المفردات

النقاط المستوية

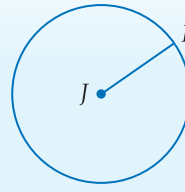
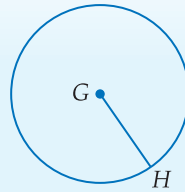
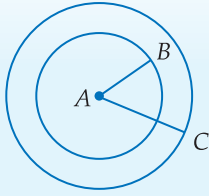
هي النقاط التي تقع في المستوى نفسه.

مفهوم أساسي أزواج الدوائر المتطابقة

أضف إلى
مطوّبتك

الدوائر المتحدة في المركز هي الدوائر المستوية التي لها المركز نفسه.

تكون الدائرتان متطابقتين، إذا وفقط إذا كان نصف قطرهما متطابقين.



مثال $\odot A$ التي نصف قطرها $\overline{AB}$ و $\odot A$ التي نصف قطرها $\overline{AC}$ دائرتان متحدتان في المركز.

مثال $\overline{GH} \cong \overline{JK}$ ، إذن $\odot G \cong \odot J$.

إذا تقاطعت دائرتان، فيمكن أن تقاطعا بطريقتين مختلفتين على النحو الآتي:

قراءة الرياضيات

إذا وفقط إذا

العبارة (إذا وفقط إذا) تعني أنه يمكن تبديل الافتراض مع النتيجة، وتبقى العملية صائبة.

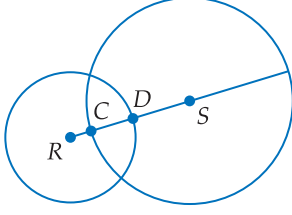
لا يوجد تقاطع	تقاطع في نقطة واحدة	تقاطع في نقطتين

يمكن أن تحوي القطعة المستقيمة التي تصل بين مركزي دائرتين متقاطعتين على نصفَي قطري الدائرتين.

إيجاد قياسات في دائرتين متقاطعتين

مثال 3

قطر $\odot S$ يساوي 30 وحدة، وقطر $\odot R$ يساوي 20 وحدة، و DS يساوي 9 وحدات، أوجد CD .
بما أن قطر $\odot S$ يساوي 30، فإن $CS = 15$ و $\overline{CD}$ جزء من نصف القطر $\overline{CS}$.



$$CD + DS = CS \quad \text{مسألة جمع القطع المستقيمة}$$

$$CD + 9 = 15 \quad \text{بالتعويض}$$

$$CD = 6 \quad \text{بطرح 9 من كلا الطرفين}$$

تأكد

(3) استعمل الشكل أعلاه؛ لإيجاد RC .

محيط الدائرة محيط الدائرة هو طول المنحنى المغلق الذي يُمثل الدائرة، ويرمز له بالرمز C . وتُعرف النسبة $\frac{C}{d}$ بأنها عدد غير نسبي يُسمى **باي** (π) حيث أن d هو قطر الدائرة. ويمكن استنتاج صيغتين لحساب محيط الدائرة باستعمال هذا التعريف.

$$\frac{C}{d} = \pi \quad \text{تعريف } \pi$$

$$C = \pi d \quad \text{بضرب الطرفين في } d$$

$$C = \pi(2r) \quad d = 2r$$

$$C = 2\pi r \quad \text{بالتبسيط}$$

أضف إلى

مطوياتك

محيط الدائرة

مفهوم أساسي

التعبير اللفظي إذا كان قطر الدائرة يساوي d ونصف قطرها يساوي r ، فإن محيطها C يساوي حاصل ضرب القطر في π أو حاصل ضرب مثلي نصف القطر في π .

$$C = \pi d \quad \text{أو} \quad C = 2\pi r \quad \text{بالرموز}$$

إيجاد محيط الدائرة

مثال 4 من واقع الحياة

تنس: أوجد محيط المهبط الدائري الموصوف في فقرة الربط بالحياة.

$$C = \pi d \quad \text{صيغة محيط الدائرة}$$

$$= \pi(79) \quad \text{بالتعويض}$$

$$= 79\pi \quad \text{بالتبسيط}$$

$$\approx 248.19 \quad \text{باستعمال الآلة الحاسبة}$$

محيط المهبط الدائري يساوي 79π ft، أو 248.19 ft تقريباً.

تأكد

أوجد محيط كلٍّ من الدائرتين الآتيتين مقرباً الناتج إلى أقرب جزء من مئة.

(4B) القطر يساوي 16 ft

(4A) نصف القطر يساوي 2.5 cm



الربط مع واقع الحياة

أقيمت في عام 2005، مباراة استعراضية في التنس على مهبط للطائرات العمودية فوق فندق برج العرب في الإمارات العربية المتحدة. يرتفع هذا المهبط الدائري 700 ft تقريباً عن سطح الأرض، وقطره يساوي 79 ft.

المصدر: Burj Al Arab, Emporis Buildings

يمكنك باستعمال صيغتي حساب محيط الدائرة، حساب قطر الدائرة ونصف قطرها إذا عُلِمَ محيطها.

إيجاد القطر ونصف القطر

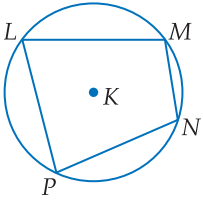
مثال 5

أوجد القطر ونصف القطر مقربين إلى أقرب جزء من مئة للدائرة التي محيطها 106.4 mm .

$r = \frac{1}{2}d$	صيغة نصف القطر	$C = \pi d$	صيغة محيط الدائرة
$\approx \frac{1}{2}(33.87)$	$d \approx 33.87$	$106.4 = \pi d$	بالتعويض
$\approx 16.94 \text{ mm}$	باستعمال الآلة الحاسبة	$\frac{106.4}{\pi} = d$	بالقسمة على π
		$33.87 \text{ mm} \approx d$	باستعمال الآلة الحاسبة

تأكد

(5) إذا كان محيط دائرة يساوي 77.8 cm ، فأوجد قطر الدائرة ونصف قطرها مقربين إلى أقرب جزء من مئة.



يكون المضلع **محاطاً** بدائرة إذ وقعت رؤوسه جميعها على الدائرة. أي أن الدائرة

مُحيطة بالمضلع، إذا احتوت على رؤوس هذا المضلع جميعها.

• فالشكل الرباعي LMNP مُحاط بالدائرة K .

• و K مُحيطة بالمضلع LMNP .

مثال 6 على اختبار معياري

سؤال ذو إجابة قصيرة: طول ضلع مربع 9 in ، مُحاط بالدائرة J .

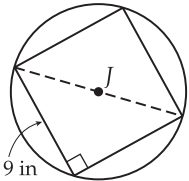
أوجد القيمة الفعلية لمحيط J .

اقرأ فقرة الاختبار

احسب قطر الدائرة، واستعمله لحساب محيطها.

حل فقرة الاختبار

ارسم شكلاً توضيحياً أولاً. يُمثّل قطر المربع قطرًا للدائرة أيضًا، ويكون وترًا لمثلث قائم الزاوية.



$$a^2 + b^2 = c^2$$

نظرية فيثاغورس

$$9^2 + 9^2 = c^2$$

بالتعويض

$$162 = c^2$$

بالتبسيط

$$9\sqrt{2} = c$$

بأخذ الجذر التربيعي الموجب لكلا الطرفين

قطر الدائرة يساوي $9\sqrt{2} \text{ in}$.

أوجد المحيط بدلالة π ، بتعويض $9\sqrt{2}$ لقيمة d في الصيغة $C = \pi d$.

محيط الدائرة يساوي $9\pi\sqrt{2} \text{ in}$.

تأكد

أوجد القيمة الفعلية لمحيط الدائرة في كل مما يأتي:

(6A) إذا كانت مُحيطة بمثلث قائم الزاوية طولاً ضلعي القائمة فيه 3 m , 7 m .

(6B) إذا كانت مُحيطة بمربع طول ضلعه 10 ft.

إرشادات للدراسة

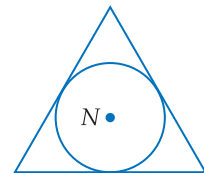
مستويات الدقة

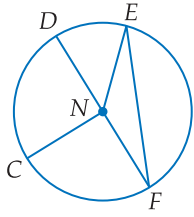
بما أن π عدد غير نسبي فلا يمكن كتابته على صورة كسر عشري منته. ولكن لأغراض الحصول على تقدير سريع في الحسابات، يمكن اعتبار قيمته 3. وإذا استعملت 3.14 أو $\frac{22}{7}$ فستحصل على تقريب أكثر دقة، وللحصول على التقريب الأكثر دقة، استعمل مفتاح π في الآلة الحاسبة. وحيثما وردت π في هذا الكتاب فإن قيمتها هي القيمة التي يعطيها المفتاح π في الآلة الحاسبة ما لم يذكر خلاف ذلك.

إرشادات للدراسة

الدائرة المحيطة

الدائرة المحيطة بمضلع هي الدائرة المارة برؤوس هذا المضلع. وتكون الدائرة محاطة بمضلع إذا مست جميع أضلاعه، كما هو مبين في الدائرة أدناه.





للتمارين 1-4 ، ارجع إلى $\odot N$ في الشكل المجاور.

المثالان 1, 2
الصفحتان 120, 121

(1) سمّ هذه الدائرة.

(2) حدّد كلاً ممّا يأتي:

(a) وترًا (b) قطرًا (c) نصف قطر

(3) إذا كان $CN = 8 \text{ cm}$ ، فأوجد DN .

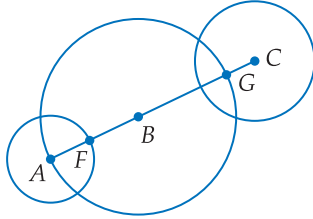
(4) إذا كان $EN = 13 \text{ ft}$ ، فما قطر الدائرة؟

الفطر لكل من $\odot A$ ، $\odot B$ ، $\odot C$ يساوي 8 cm ، 18 cm ، 11 cm على الترتيب. أوجد قياس كل ممّا يأتي:

(5) FG

(6) FB

مثال 3
صفحة 122



(7) **عجلة دوارة:** ارجع إلى فقرة "لماذا؟" بداية الدرس، ما نصف قطر العجلة الدوارة؟ وما محيطها؟ قَرّب الناتج إلى أقرب جزء من مئة كلما لزم ذلك.

مثال 4
صفحة 122

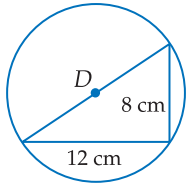
(8) **بركة سباحة:** محيط بركة السباحة الدائرية في الشكل المجاور يساوي 56.5 ft تقريبًا، ما قطر البركة، وما نصف قطرها؟ قَرّب الناتج إلى أقرب جزء من مئة.

مثال 5
صفحة 123



(9) **سؤال ذو إجابة قصيرة:** المثلث القائم في الشكل المجاور مُحاط بالدائرة D . أوجد القيمة الفعلية لمحيط $\odot D$.

مثال 6
صفحة 123



تدرب وحل المسائل

للتمارين 10 - 13 ، ارجع إلى $\odot R$ في الشكل المجاور .

المثالان 1, 2
الصفحتان 120, 121

(10) ما مركز الدائرة؟

(11) حدّد وترًا يكون قطرًا؟

(12) هل $\overline{VU}$ نصف قطر؟ فسّر إجابتك.

(13) إذا كان $SU = 16.2 \text{ cm}$ ، فأوجد RT .

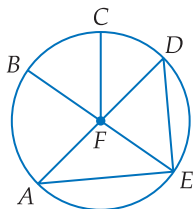
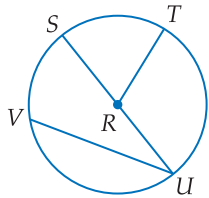
للتمارين 14-17 ، ارجع إلى $\odot F$ في الشكل المجاور .

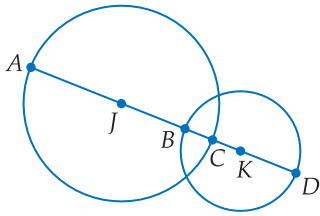
(14) سمّ وترًا لا يكون قطرًا.

(15) إذا كان $CF = 14 \text{ in}$ ، فما قطر الدائرة؟

(16) هل $\overline{AF} \cong \overline{EF}$ ؟ فسّر إجابتك.

(17) إذا كان $DA = 7.4 \text{ cm}$ ، فأوجد EF .





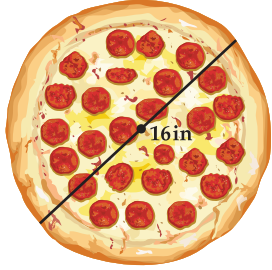
في الشكل المجاور إذا كان نصف قطر $\odot J$ يساوي 10 وحدات، ونصف قطر $\odot K$ يساوي 8 وحدات، BC يساوي 5.4 وحدة، فأوجد قياس كل مما يأتي:

$$AB \quad (19)$$

$$CK \quad (18)$$

$$AD \quad (21)$$

$$JK \quad (20)$$



(22) **بيتزا:** أوجد نصف قطر قرص البيتزا ومحيطها في الشكل المجاور مقرباً الناتج إلى أقرب جزء من مئة، إذا لزم ذلك.

(23) **دراجات:** قطر إطار دراجة يساوي 26 in. أوجد نصف قطر الإطار ومحيطه مقرباً الناتج إلى أقرب جزء من مئة، إذا لزم ذلك.

أوجد قطر الدائرة ونصف قطرها إذا عُلِمَ محيطها في كل مما يأتي مقرباً الناتج إلى أقرب جزء من مئة.

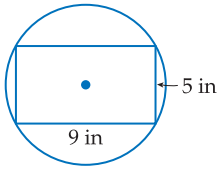
$$C = 2608.25 \text{ m} \quad (27)$$

$$C = 375.3 \text{ cm} \quad (26)$$

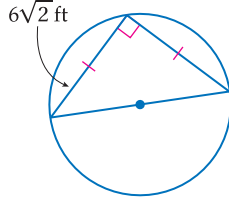
$$C = 124 \text{ ft} \quad (25)$$

$$C = 18 \text{ in} \quad (24)$$

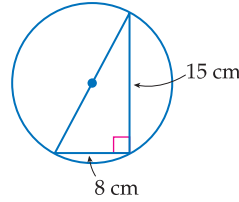
أوجد القيمة الفعلية لمحيط كل من الدوائر الآتية، باستعمال المضلع الذي تحيطه أو الذي يحيطها.



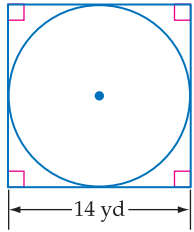
(30)



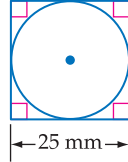
(29)



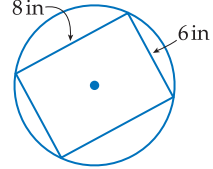
(28)



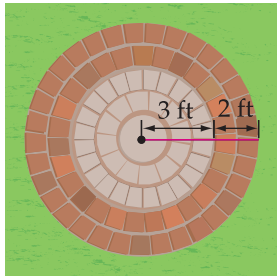
(33)



(32)



(31)



(34) **فناء:** أراد مصطفى أن يرصف فناء دائري الشكل، كما في الشكل المجاور.

(a) ما المحيط التقريبي لهذا الفناء؟

(b) إذا غيّر مصطفى خطة إنشاء هذا الفناء بحيث يصبح محيط الدائرة الداخلية 25 ft تقريباً، فكم يكون نصف قطر الدائرة إلى أقرب قدم؟

إذا عُلِمَ نصف القطر أو المحيط في دائرة ما، فأوجد القياسات المجهولة لكل مما يأتي مقرباً الناتج إلى أقرب جزء من مئة.

$$r = 11\frac{2}{5} \text{ ft}, d = \underline{\hspace{1cm}}, C = \underline{\hspace{1cm}} \quad (36)$$

$$d = 8\frac{1}{2} \text{ in}, r = \underline{\hspace{1cm}}, C = \underline{\hspace{1cm}} \quad (35)$$

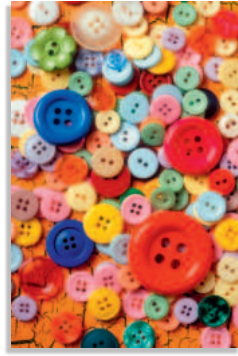
$$r = \frac{x}{8}, d = \underline{\hspace{1cm}}, C = \underline{\hspace{1cm}} \quad (38)$$

$$C = 35x \text{ cm}, d = \underline{\hspace{1cm}}, r = \underline{\hspace{1cm}} \quad (37)$$

حدّد إن كانت الدوائر الظاهرة في كل صورة أدناه متطابقة، أو متّحدة في المركز، أو غير ذلك.



(41)



(40)



(39)

(42) **حدائق:** يُراد إنشاء رصيف عرضه يساوي 4 m حول بركة دائرية الشكل، محيطها يساوي 68 m . ما المحيط الخارجي للرصيف؟ قَرّب الناتج إلى أقرب جزء من مئة.

(43) **تمثيلات متعدّدة:** في هذا التمرين سوف تستكشف أثر تغيير الأبعاد في الدائرة.

(a) **هندسي:** ارسم ثلاث دوائر باستعمال الفرجار. بحيث يكون عامل التمدّد من أي دائرة إلى الدائرة الأكبر التي تليها 1:2 .

(b) **جدولة:** احسب نصف القطر مقرباً إلى أقرب عُشر، والمحيط مقرباً إلى أقرب جزء من مئة لكلّ من الدوائر السابقة، وسجّل النتائج في جدول.

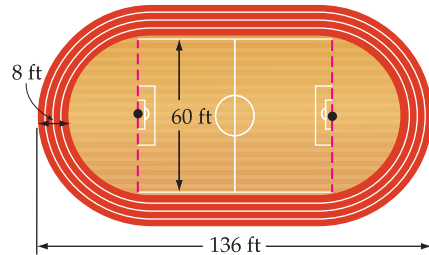
(c) **تعبير لفظي:** فسّر لماذا تكون هذه الدوائر الثلاث متشابهة هندسيّاً.

(d) **تعبير لفظي:** كوّن تخميناً حول النسبة بين محيطي دائرتين، عندما تكون النسبة بين نصفَي قطريهما تساوي 2 .

(e) **تحليل:** معامل التمدّد من $\odot A$ إلى $\odot B$ يساوي $\frac{b}{a}$. اكتب معادلة تربط C_A (محيط $\odot A$) مع C_B (محيط $\odot B$) .

(f) **عددي:** إذا كان معامل التمدّد من $\odot A$ إلى $\odot B$ يساوي $\frac{1}{3}$ ، ومحيط $\odot A$ يساوي 12 in ، فما محيط $\odot B$ ؟

(44) **تمارين رياضية:** يظهر في الشكل أدناه مضمار للجري.



(a) كم تزيد المسافة التي يقطعها شخص يركض دورة واحدة على المسار الخارجي للمضمار، على المسافة التي يقطعها شخص يركض دورة واحدة على المسار الداخلي؟

(b) كم دورة تقريباً يجب أن يركض شخص حول المسار الخارجي للمضمار ليقطع ميلاً واحداً؟

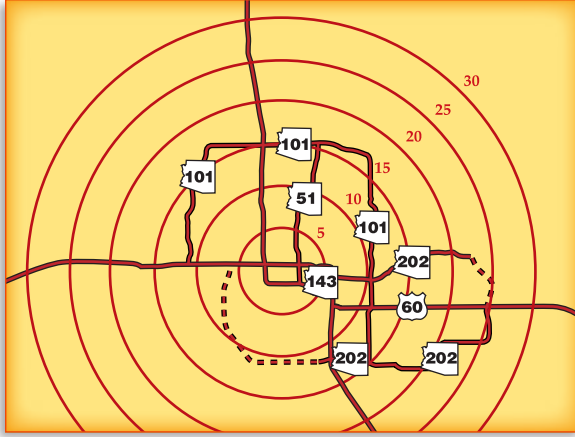


الربط مع واقع الحياة

يمكن أن يحرق الشخص الذي يزن 68 kg ، 240 سعراً حراريّاً، إذا ركض بسرعة 9 km/h لمدة 20 min . وذلك أكثر من مثلي عدد السرعات التي يحرقها إذا سار بسرعة 7.2 km/h للمدة الزمنية نفسها.

المصدر: Health Discovery

(45) **خرائط:** تحتوي الخريطة أدناه على دوائر متحدة في المركز، تُمثّل مناطق تبعد عن مركز إحدى المدن المسافات (5, 10, 15, 20, 25, 30) km .

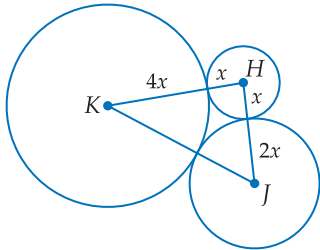
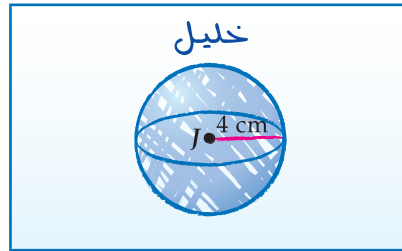
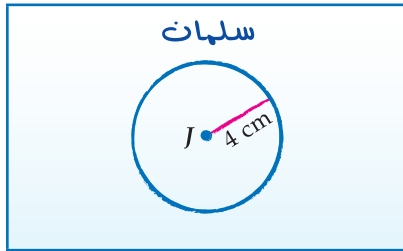


الربط مع واقع الحياة

- (a) كم يزيد محيط الدائرة الأبعد عن المركز عن محيط الدائرة الأقرب من المركز؟
 (b) يزيد نصف قطر كل دائرة عن الدائرة التي تسبقها بـ 5 km. كم يزيد محيط كل دائرة عن محيط الدائرة التي تسبقها؟

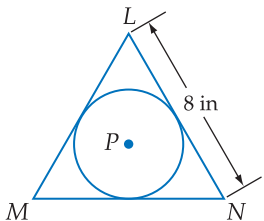
مسائل مهارات التفكير العليا

- (46) **مسألة مفتوحة:** ارسم دائرة يكون محيطها بين 8 m , 12 m، ما نصف قطر هذه الدائرة؟
 (47) **اكتشف الخطأ:** رسم كل من سلمان و خليل شكلاً يُمثّل مجموعة النقاط التي تبعد 4 cm عن النقطة J . هل كانت إجابة أي منهما صحيحة؟ فسّر تبريرك.



- (48) **تحذّر:** مجموع محيطات الدوائر H, J, K التي تظهر في الشكل المجاور يساوي 56π ، أوجد KJ .

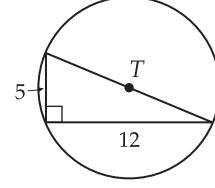
- (49) **تبرير:** هل المسافة بين مركز الدائرة وأية نقطة داخلها أقل من نصف قطرها دائماً، أو أحياناً، أو لا تكون كذلك أبداً؟ فسّر إجابتك.



- (50) **تحذّر:** $\odot P$ مُحاطة بمثلث متطابق الأضلاع LMN، كما في الشكل المجاور. ما محيط $\odot P$ ؟

- (51) **اكتب:** بين أوجه الشبه وأوجه الاختلاف بين الدوائر المتطابقة، والدوائر المتحدة في المركز.

(52) ما محيط T ؟ قَرِّب الناتج إلى أقرب عُشر.



(53) ما نصف قطر سطح طاولة دائري الشكل، محيطه 10 ft؟

- A 1.6 ft
B 2.5 ft
C 3.2 ft
D 5 ft

(54) جبر: أحاط إبراهيم حديقة الدائرية الشكل بسياج. إذا كان طول السياج 50m، فما نصف قطر الحديقة؟ قَرِّب الناتج إلى أقرب عُشر.

- H 8
J 7
F 10
G 9

(55) ما نصف قطر الدائرة التي مساحة سطحها $\frac{\pi}{4}$ وحدة مربعة؟

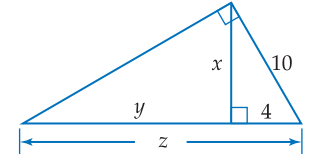
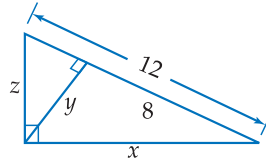
- A 0.4 وحدة
B 0.5 وحدة
C 2 وحدة
D 4 وحدة

مراجعة تراكمية

(56) إذا كان محيط دائرة 26π cm، فأوجد قطرها ونصف قطرها. (الدرس 3-1)

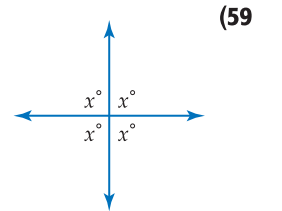
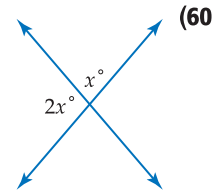
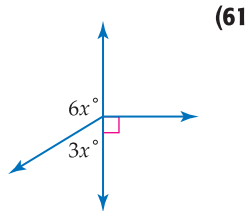
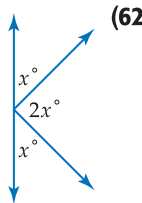
(57) حديقة: إذا كانت أطوال أضلاع حديقة مثلثة الشكل 32 m, 24 m, 40 m، فما قياسات زوايا الحديقة؟ (الدرس 2-5)

(58) أوجد قيمة كل من x , y , z في كلٍّ من الأشكال أدناه: (الدرس 2-2)



مراجعة المتطلبات السابقة

أوجد قيمة x في كلٍّ مما يأتي:





قياس الزوايا والأقواس

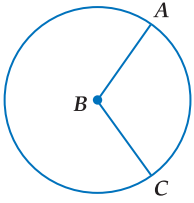
Measuring Angles and Arcs

لماذا؟

معظم الساعات في الأجهزة الإلكترونية عبارة عن ساعات رقمية، وهي الساعات التي تُظهر الوقت على شكل أرقام.

و تستعمل الساعات العادية في تزيين المنزل، أو الاستعمال اليدوي.

وهذه الساعات لها عقارب أو مؤشرات متحركة تشير إلى الساعة والدقيقة، وأحياناً يكون هناك مؤشر أو عقرب للثواني. ووجه هذه الساعة عبارة عن دائرة. وتكون العقارب الثلاثة زوايا مركزية فيها.



الزوايا والأقواس الزاوية المركزية في الدائرة هي زاوية يقع رأسها في المركز. وضلعها نصفين قطريين في الدائرة. في الشكل المجاور $\angle ABC$ هي زاوية مركزية في $\odot B$. تذكر أن مجموع قياسات الزوايا المتجمعة حول نقطة يساوي 360° ، لذا، فإن الدرجة الواحدة تساوي $\frac{1}{360}$ من الدورة الكاملة حول نقطة. وهذا يعني أن مجموع قياسات الزوايا حول مركز الساعة يساوي 360° ، وهذا يقود إلى المفهوم الآتي:

أضف إلى

طويتك

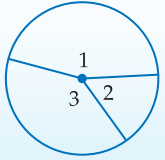
مجموع قياسات الزوايا المركزية

مفهوم أساسي

التعبير اللفظي مجموع قياسات الزوايا المركزية التي لا تحوي نقاطاً داخلية مشتركة في الدائرة يساوي 360° .

مثال

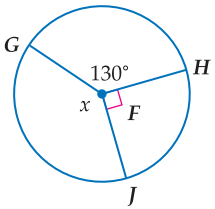
$$m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle 3 = 360^\circ$$



إيجاد قياس الزوايا المركزية

مثال 1

أوجد قيمة x في الشكل المجاور.



$$m\angle GFH + m\angle HJF + m\angle GFJ = 360^\circ \quad \text{مجموع قياسات الزوايا المركزية}$$

$$130^\circ + 90^\circ + m\angle GFJ = 360^\circ$$

$$220^\circ + m\angle GFJ = 360^\circ$$

$$x = m\angle GFJ = 140^\circ$$

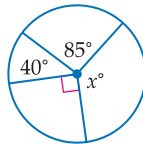
ب طرح 220° من كلا الطرفين

بالتعويض

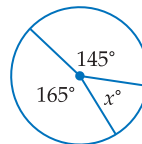
بالتبسيط

تأكد

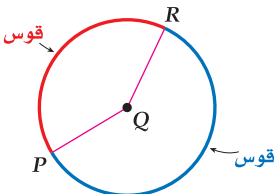
أوجد قيمة x في كل مما يأتي:



(1B)



(1A)



القوس جزء من دائرة يُحدّد بنقطتي طرفيه، وعند رسم زاوية مركزية، تنقسم الدائرة إلى قوسين، يرتبط قياس كل منهما بقياس تلك الزاوية المركزية.

فيما سبق

درست إيجاد قياس الزوايا، وتحديد الزوايا المتطابقة.

والآن

الأفكار الرئيسية

- أعيّن الزوايا المركزية، والأقواس الكبرى والأقواس الصغرى، ونصف الدائرة، وأجد قياسها.
- أجد طول القوس.

المفردات الأساسية

الزاوية المركزية

central angle

القوس

arc

القوس الأصغر

minor arc

القوس الأكبر

major arc

نصف دائرة

semicircle

الأقواس المتطابقة

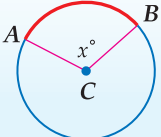
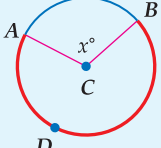
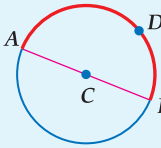
congruent arcs

الأقواس المتجاورة

adjacent arcs

طول القوس

arc length

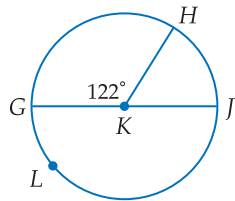
قياسه	القوس
 يقبل قياس القوس الأصغر عن 180° ويساوي قياس الزاوية المركزية المرتبطة به. $m\widehat{AB} = m\angle ACB = x^\circ$	القوس الأصغر هو القوس الأقصر الذي يصل بين نقطتين على محيط الدائرة.
 يزيد قياس القوس الأكبر على 180°، ويساوي 360° مطروحاً منه قياس القوس الأصغر الذي يصل بين النقطتين نفسيهما. $m\widehat{ADB} = 360^\circ - m\widehat{AB} = 360^\circ - x^\circ$	القوس الأكبر هو القوس الأطول الذي يصل بين نقطتين على محيط الدائرة.
 قياس نصف الدائرة يساوي 180° $m\widehat{ADB} = 180^\circ$	نصف الدائرة هي قوس تقع نقطتا طرفيه على قطر الدائرة.

إرشادات للدراسة

تسمية الأقواس يُسمى
القوس الأصغر بنقطتي طرفيه، أما القوس الأكبر ونصف الدائرة فيسميان بنقطتي الطرفين، بالإضافة إلى نقطة على القوس بينهما.

مثال 2

تصنيف الأقواس وإيجاد قياس القوس



$\overline{GJ}$ قطر في $\odot K$. حدّد إذا كان كلّ من الأقواس الآتية قوساً أكبر أو أصغر أو نصف دائرة، ثم أوجد قياسه.

(a) $m\widehat{GH}$

$\widehat{GH}$ قوس أصغر، وقياسه $m\angle GKH = 122^\circ$.

(c) $m\widehat{GLJ}$

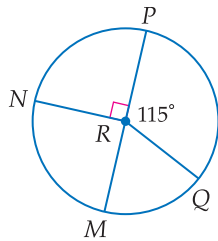
$\widehat{GLJ}$ هو نصف دائرة.
 $m\widehat{GLJ} = 180^\circ$

(b) $m\widehat{GLH}$

$\widehat{GLH}$ هو القوس الأكبر الذي يشترك مع القوس الأصغر $\widehat{GH}$ بنقطتي طرفيه.

$$m\widehat{GLH} = 360^\circ - m\widehat{GH} = 360^\circ - 122^\circ = 238^\circ$$

تأكد



$\overline{PM}$ قطر في $\odot R$. حدّد إذا كان كلّ من الأقواس الآتية قوساً أكبر أو أصغر أو نصف دائرة، ثم أوجد قياسه.

(2A) $m\widehat{MQ}$ (2B) $m\widehat{MNP}$ (2C) $m\widehat{MNQ}$

الأقواس المتطابقة هي الأقواس التي تقع في الدائرة نفسها أو في دائرتين متطابقتين، ويكون لها القياس نفسه.

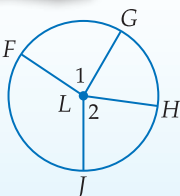
نظرية 3.1

التعبير اللفظي في الدائرة نفسها أو في دائرتين متطابقتين يكون القوسان متطابقين، إذا وفقط إذا كانت الزاويتان المركزيتان المناظرتان لها متطابقتين.

إذا كانت $\angle 1 \cong \angle 2$ ، فإن $\widehat{FG} \cong \widehat{HJ}$.

إذا كان $\widehat{FG} \cong \widehat{HJ}$ ، فإن $\angle 1 \cong \angle 2$.

مثال



سوف تبرهن نظرية 3.1 في التمرين 51



الربط مع واقع الحياة

إقليدس

(c. 325–265 b.c.)

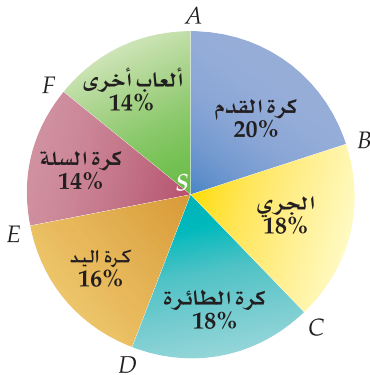
ألف إقليدس 13 كتاباً سُميت العناصر، أحدثت تأثيراً كبيراً في العلوم، وفي هذه الكتب جرى تطوير الهندسة وفروع أخرى في الرياضيات بصورة منطقية. ولقد خصّص الكتاب الثالث منها للبحث في الدوائر والأقواس والزاويا.

إيجاد قياس القوس من القطاعات الدائرية

مثال 3 من واقع الحياة

النشاطات الرياضية المدرسية

رياضة: استعمل التمثيل بالقطاعات الدائرية المجاور. لإيجاد القياسات الآتية:



(a) $m\widehat{CD}$

$\widehat{CD}$ هو قوس أصغر.

$$m\widehat{CD} = m\angle CSD$$

$\angle CSD$ تُمثّل 18% من الكل أو 18% من الدائرة.

$$m\angle CSD = 0.18(360^\circ) \quad \text{إيجاد 18\% من } 360^\circ \\ = 64.8^\circ \quad \text{بالتبسيط}$$

(b) $m\widehat{BC}$

النسبتان المثلثيتان لكرة الطائرة والجري متساويتان. إذن الزاويتان المركزيتان متطابقتان. والقوسان المقابلان لهما متطابقان.

$$m\widehat{BC} = m\widehat{CD} = 64.8^\circ$$

تأكد

استعمل التمثيل بالقطاعات الدائرية أعلاه؛ لإيجاد القياسات الآتية:

$m\widehat{FA}$ (3B)

$m\widehat{EF}$ (3A)

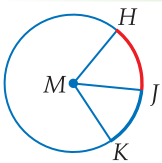


الربط مع واقع الحياة

عُرفت لعبة كرة الطائرة (volleyball) أوّل مرة في الولايات المتحدة الأمريكية، ثم انتقلت إلى كندا عام 1900 م، لتصبح بعد ذلك من أكثر الرياضات شعبية في العالم.

المصدر:

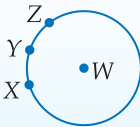
<http://ar.wikipedia.org>



الأقواس المتجاورة هي أقواس في الدائرة تشترك مع بعضها في نقطة واحدة فقط. $\widehat{HJ}$, $\widehat{JK}$ قوسان متجاوران في $\odot M$. وكما هو الحال في الزوايا المتجاورة، يمكنك جمع قياس الأقواس المتجاورة.

أضف إلى

مطوبتك



مسألة 3.1 جمع الأقواس

التعبير اللفظي قياس القوس المتكوّن من قوسين متجاورين يساوي مجموع قياسيّ هذين القوسين.

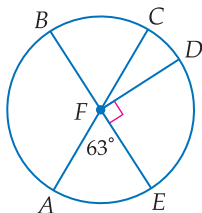
$$m\widehat{XYZ} = m\widehat{XY} + m\widehat{YZ}$$

مثال

استعمال جمع الأقواس لإيجاد قياس الأقواس

مثال 4

أوجد قياس كلّ ممّا يأتي في $\odot F$.



(a) $m\widehat{AED}$

$$m\widehat{AED} = m\widehat{AE} + m\widehat{ED}$$

مسألة جمع الأقواس

$$= m\angle AFE + m\angle EFD \quad m\widehat{AE} = m\angle AFE, m\widehat{ED} = m\angle EFD$$

$$= 63^\circ + 90^\circ = 153^\circ$$

بالتعويض

(b) $m\widehat{ADB}$

$$m\widehat{ADB} = m\widehat{AE} + m\widehat{EDB}$$

مسألة جمع الأقواس

$$= 63^\circ + 180^\circ = 243^\circ \quad m\widehat{EDB} = 180^\circ \text{، إذن، نصف دائرة.}$$

تأكد

أوجد قياس كلّ ممّا يأتي في $\odot F$.

$m\widehat{ABD}$ (4B)

$m\widehat{CE}$ (4A)

طول القوس **طول القوس** هو المسافة بين نقطتي طرفيه على الدائرة، ويُقاس بوحدات الطول. وبما أن القوس هو جزء من الدائرة، فإن طوله جزء من محيطها.

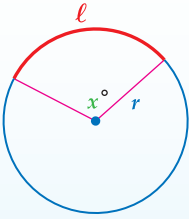
تنبيه

طول القوس يقاس طول القوس بوحدات الطول مثل السنتيمترات، ولكن قياس القوس بالدرجات.

أضف إلى
مطوبتك

طول القوس

مفهوم أساسي



التعبير اللفظي نسبة طول القوس l إلى محيط الدائرة يساوي نسبة قياس القوس بالدرجات إلى 360° .

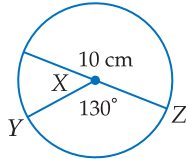
التناسب أو $\frac{l}{2\pi r} = \frac{x^\circ}{360^\circ}$

المعادلة $l = \frac{x^\circ}{360^\circ} \cdot 2\pi r$

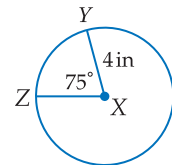
إيجاد طول القوس

مثال 5

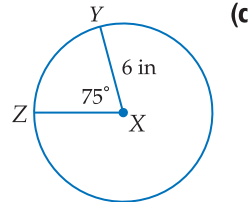
أوجد طول $\widehat{ZY}$ في كل مما يأتي مقربًا إلى أقرب جزء من مئة.



معادلة طول القوس
 $l = \frac{x^\circ}{360^\circ} \cdot 2\pi r$
 $= \frac{130^\circ}{360^\circ} \cdot 2\pi(10)$ **بالتعويض**
 $\approx 11.34 \text{ cm}$ **باستعمال الآلة الحاسبة**



معادلة طول القوس
 $l = \frac{x^\circ}{360^\circ} \cdot 2\pi r$
 $= \frac{75^\circ}{360^\circ} \cdot 2\pi(4)$ **بالتعويض**
 $\approx 5.24 \text{ in}$ **باستعمال الآلة الحاسبة**

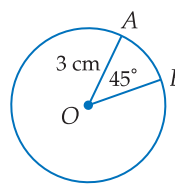
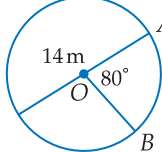
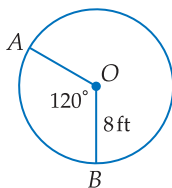


معادلة طول القوس
 $l = \frac{x^\circ}{360^\circ} \cdot 2\pi r$
 $= \frac{75^\circ}{360^\circ} \cdot 2\pi(6)$ **بالتعويض**
 $\approx 7.85 \text{ in}$ **باستعمال الآلة الحاسبة**

لاحظ أن $\widehat{ZY}$ له نفس القياس في $5a$, $5c$ ، ويساوي 75° . إلا أن لهما طولين مختلفين، وذلك بسبب وجودهما في دائرتين نصفًا قطريهما مختلفان.

تأكد

أوجد طول $\widehat{AB}$ في كل مما يأتي مقربًا إلى أقرب جزء من مئة.



إرشادات للدراسة

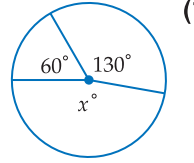
طريقة بديلة

يمكن إيجاد طول القوس في الأمثلة $5a$ و $5b$ و $5c$ باستعمال التناسب $\frac{l}{2\pi r} = \frac{x^\circ}{360^\circ}$

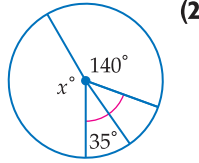
أوجد قيمة x في التمرينين الآتيين:

مثال 1

صفحة 129



(1)

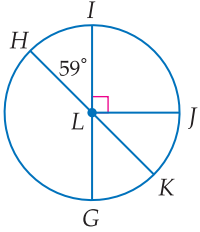


(2)

⊙L قطران $\overline{HK}$, $\overline{IG}$. حدّد إذا كان كلّ قوس فيما يأتي قوسًا أكبر أم أصغر أم نصف دائرة. ثم أوجد قياسه.

مثال 2

صفحة 130



(5) $\widehat{HGK}$

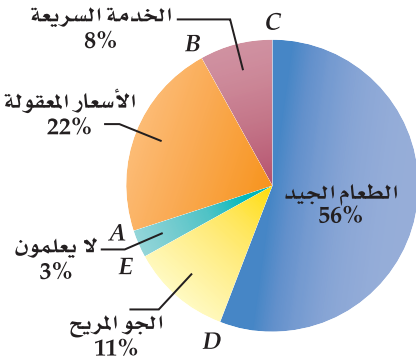
(4) $\widehat{HI}$

(3) $\widehat{IHJ}$

(6) **مطاعم:** يعرض الشكل المجاور نتائج استطلاع لرواد المطاعم، حول أهم ما يجب أن توفره لهم المطاعم.

مثال 3

صفحة 131



(a) أوجد $m\widehat{AB}$.

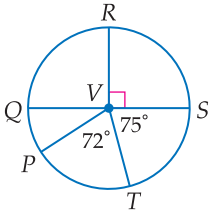
(b) أوجد $m\widehat{BC}$.

(c) صف نوع القوس الذي يمثله الطعام الجيد.

$\overline{QS}$ قطر في ⊙V. أوجد كلّاً من القياسات الآتية في الشكل المجاور:

مثال 4

صفحة 131



(7) $m\widehat{STP}$

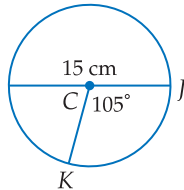
(8) $m\widehat{QRT}$

(9) $m\widehat{PQR}$

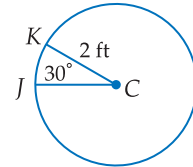
أوجد طول $\widehat{JK}$ مقربًا إلى أقرب جزء من مئة في التمرينين 10، 11.

مثال 5

صفحة 132



(11)



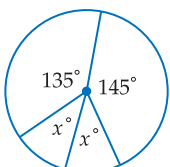
(10)

تدرب وحل المسائل

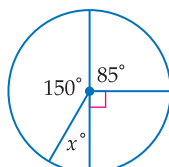
أوجد قيمة x في كلّ ممّا يأتي:

مثال 1

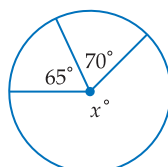
صفحة 129



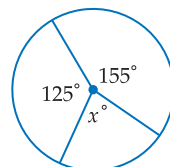
(15)



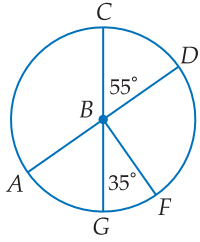
(14)



(13)



(12)



مثال 2
صفحة 130

24 تسوق: يعرض الشكل المجاور نتائج استطلاع حول المكان المفضل لشراء الملابس، شمل مجموعة من الشباب.

$$m\widehat{CG} \quad (18)$$

$$m\widehat{AC} \quad (17)$$

$$m\widehat{CD} \quad (16)$$

$$m\widehat{ACD} \quad (21)$$

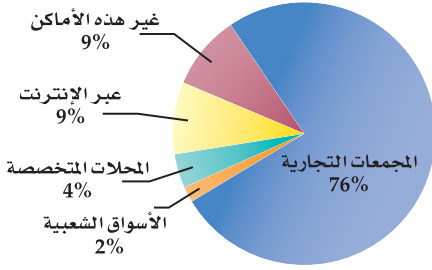
$$m\widehat{GCF} \quad (20)$$

$$m\widehat{CGD} \quad (19)$$

$$m\widehat{ACF} \quad (23)$$

$$m\widehat{AG} \quad (22)$$

أفضل الأماكن لشراء الملابس



مثال 3
صفحة 129

24 تسوق: يعرض الشكل المجاور نتائج استطلاع حول المكان المفضل لشراء الملابس، شمل مجموعة من الشباب.

- (a) ما قياس القوس المقابل لفتة التسوق في كل من المجمعات التجارية، والمحلات المتخصصة؟
- (b) صف نوع القوس المرافق لفتة المجمعات التجارية، وفتة الأسواق الشعبية.

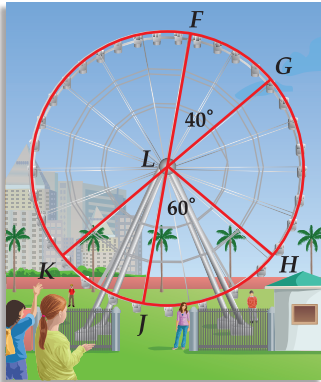
(c) هل توجد أقواس متطابقة في هذا الشكل؟ وضح إجابتك.



الربط مع واقع الحياة

وجد أن الشباب يُنفقون مبالغ كبيرة على ملابسهم وأحذيتهم في السنوات الحالية.

مثال 4, 2
الصفحات 130, 131



تسليية: استعمل العجلة الدوارة في الشكل المجاور؛ لإيجاد كل من القياسات الآتية:

$$m\widehat{JH} \quad (26)$$

$$m\widehat{FG} \quad (25)$$

$$m\widehat{JFH} \quad (28)$$

$$m\widehat{JKF} \quad (27)$$

$$m\widehat{GHK} \quad (30)$$

$$m\widehat{GHF} \quad (29)$$

$$m\widehat{JKG} \quad (32)$$

$$m\widehat{HK} \quad (31)$$

$$m\widehat{HGF} \quad (34)$$

$$m\widehat{KFH} \quad (33)$$

مثال 5
صفحة 131

استعمل $\odot P$ ؛ لإيجاد طول كل قوس مما يأتي مقرباً إلى أقرب جزء من مئة.

$$(35) \widehat{RS}, \text{ إذا كان نصف القطر يساوي } 2 \text{ in}$$

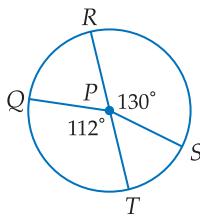
$$(36) \widehat{QT}, \text{ إذا كان إذا كان القطر يساوي } 9 \text{ cm}$$

$$(37) \widehat{QR}, \text{ إذا كان } PS = 4 \text{ mm}$$

$$(38) \widehat{RS}, \text{ إذا كان } RT = 15 \text{ in}$$

$$(39) \widehat{QRS}, \text{ إذا كان } RT = 11 \text{ ft}$$

$$(40) \widehat{RTS}, \text{ إذا كان } PQ = 3 \text{ m}$$





ساعات: يعرض الشكل المجاور الساعة التي وردت في فقرة "لماذا؟" في بداية هذا الدرس.

(41) ما قياس الزاوية المركزية المحصورة بين عقربي الساعة؟ فسّر الطريقة التي توصلت بها إلى إجابتك.

(42) إذا تضاعف قطر الدائرة، فما تأثير ذلك على طول القوس الأصغر بين الرقم 1، والرقم 12؟



الربط مع واقع الحياة

تُعد ساعة مكة المكرمة أكبر ساعة في العالم، إذ يزيد قطر واجهتها عن 40 m، ويبلغ طول عقرب الدقائق 22 m، وطول عقرب الساعات 17 m. وتبلغ كتلة كل منهما 6 أطنان تقريباً.



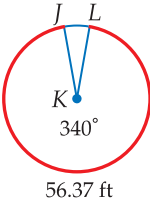
(43) **مزارع:** قُسمت مزرعة دائرية الشكل إلى ثمانية قطاعات متساوية، وخُصص كل قطاع لزراعة صنف واحد من الأشجار أو النباتات، أو لتربية أحد أنواع الحيوانات.

(a) ما قياس القوس الذي يُمثل القطاعات التي تحتوي على الزيتون والطماطم والفلفل؟

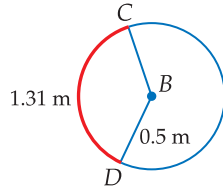
(b) إذا كان قطر الدائرة يساوي 125 m، فما طول قوس كل قطاع؟ قَرِّب إلى أقرب جزء من مئة.

أوجد كلاً من القياسات الآتية مقرباً الأطوال إلى أقرب جزء من مئة وقياس كل قوس إلى أقرب درجة.

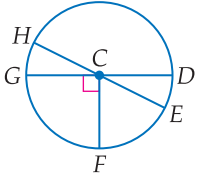
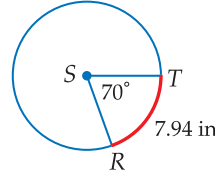
(46) نصف قطر K



(45) $m\widehat{CD}$



(44) محيط S

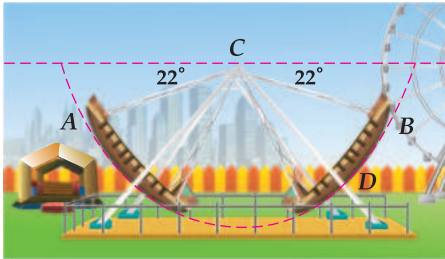


جبر: إذا كان $m\angle HCG = 2x$, $m\angle HCD = 6x + 28$ في $\odot C$. فأوجد قياس كل مما يأتي:

(49) $\widehat{HGF}$

(48) $\widehat{HD}$

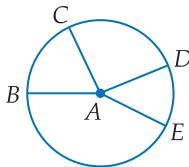
(47) $\widehat{EF}$



(50) **ألعاب:** يأخذ مسار لعبة السفينة في مدينة الألعاب، شكل نصف دائرة، كما في الشكل المجاور.

(a) أوجد $m\widehat{AB}$.

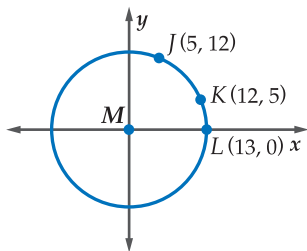
(b) إذا كان $CD = 62$ ft، فما طول $\widehat{AB}$ ؟ قَرِّب إلى أقرب جزء من مئة.



(51) **برهان:** اكتب برهاناً ذا عمودين للنظرية 3.1.

المعطيات: $\angle BAC \cong \angle DAE$

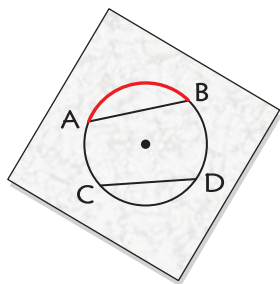
المطلوب: إثبات أن $\widehat{BC} \cong \widehat{DE}$



(52) **هندسة إحصائية:** تُمثّل النقطة M نقطة الأصل في الشكل المجاور. أوجد كلاً مما يأتي في $\odot M$ ، مقرباً الأطوال إلى أقرب جزء من مئة، وقياس كل قوس إلى أقرب عُشر درجة.

(a) $m\widehat{JL}$ (b) $m\widehat{KL}$ (c) $m\widehat{JK}$
(d) طول $\widehat{JL}$ (e) طول $\widehat{KL}$ (f) طول $\widehat{JK}$

(53) **تمثيلات متعددة:** سوف تستقصي في هذا التمرين العلاقة بين الأقواس والأوتار.

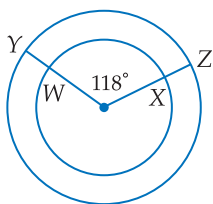


(a) **هندسي:** ارسم دائرة فيها وتران متطابقان مثل $\overline{AB}$, $\overline{CD}$. حدّد مركز هذه الدائرة. كرّر العملية مع دائرتين أُخريين ووترين متطابقين في كل منهما.

(b) **حسي:** قُصّ ثلاث قطع من الورق الشفاف مربعة الشكل أكبر من أي من الدوائر الثلاثة، ثم ثبّت ورقة شفافة من منتصفها مستعملاً دبوساً عند مركز كل دائرة، ارسم القوس المقابل لأحد الوترين في كل دائرة على الورقة الشفافة، ثم قم بتدوير قطعة الورق الشفاف حول الدبوس لمقارنة طول القوس الذي رسمته بطول القوس المقابل للوتر الآخر، كرّر هذه العملية مع كل من الدوائر الثلاثة.

(c) **تعبير لفظي:** كوّن تخميناً حول العلاقة بين الأقواس التي تقابل أوتاراً متطابقة في الدائرة، ثم أثبت صحته.

مسائل مهارات التفكير العليا



(54) **اكتشف الخطأ:** يقول إبراهيم: إن $\widehat{WX}$ و $\widehat{YZ}$ متطابقان؛ لأن زاويتيهم المركزيتين متطابقتان، في حين يقول سالم: إنهما غير متطابقين. أيهما كانت إجابته صحيحة؟ برّر إجابتك.

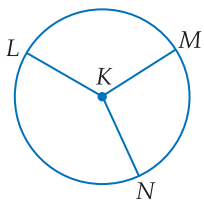
تبرير: حدّد إذا كانت كل من العبارات الآتية صحيحة دائماً، أو صحيحة أحياناً، أو ليست صحيحة أبداً. برّر إجابتك.

(55) قياس القوس الأصغر أقل من 180° .

(56) إذا كانت الزاوية المركزية منفرجة، فإن القوس المقابل لها قوس أكبر.

(57) يعتمد مجموع قياسي قوسين متجاورين في دائرة على قياس نصف قطر تلك الدائرة.

(58) **تحّد:** نسبة قياسات $\widehat{LM}$, $\widehat{MN}$, $\widehat{NL}$ كالنسبة 5:3:4. أوجد قياس كل من هذه الأقواس.



(59) **مسألة مفتوحة:** ارسم دائرة وعيّن عليها ثلاث نقاط. قدّر قياس الأقواس الثلاثة غير المتداخلة الناتجة، ثم استعمل المنقلة لإيجاد قياس كل منها، واكتب على كل قوس قياسه.

(60) **تحّد:** تشير عقارب ساعة إلى الساعة 8:10. ما قياس الزاوية المتكونة من عقربي الساعة و تقابل القوس الأصغر؟

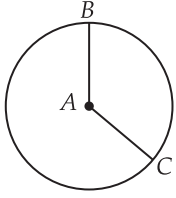
(61) **اكتب:** صف الأنواع الثلاثة للأقواس في الدائرة. وطريقة إيجاد قياس كل منها.

تنبيه

التناسب تذكر أن ترتيب حدود التناسب مهم، فمثلاً إذا كانت نسبة A إلى B إلى C هي 1 إلى 2 إلى 3، فإن $A:B:C = 1:2:3$

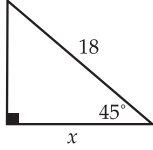
تدريب على اختبار معياري

(64) إذا كان نصف قطر $\odot A$ يساوي 5 in، وطول القوس الأصغر $\widehat{BC}$ يساوي 4π in، فما قياس $\angle BAC$ ؟



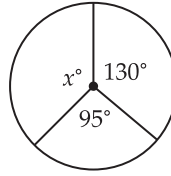
- 120° C 150° A
72° D 144° B

(65) ما قيمة x في المثلث أدناه؟



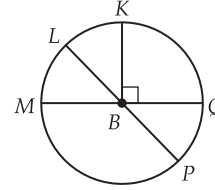
- 18 $\sqrt{2}$ H 9 F
36 J $9\sqrt{2}$ G

(62) ما قيمة x في الشكل المجاور؟



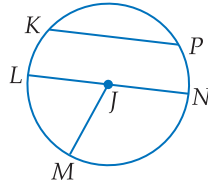
- 120 A
135 B
145 C
160 D

(63) إذا كان $m\angle LBM = 3x$, $m\angle LBQ = 4x + 61$ في $\odot B$ ، فما قياس $\angle PBQ$ ؟



مراجعة تراكمية

للتمارين 66-68، ارجع إلى $\odot J$: (الدرس 3-1)



(66) سمِّ مركز الدائرة.

(67) عيّن وترًا يكون قطرًا أيضًا.

(68) إذا كان $LN = 12.4$ ، فأوجد JM ؟

حلّ المثلث ABC ، وقرب قياسات الأضلاع إلى أقرب عشر. (الدرس 2-5)

(69) $m\angle A = 42^\circ$, $m\angle C = 77^\circ$, $C = 6$ cm

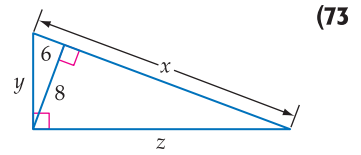
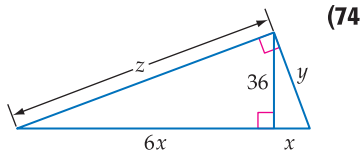
أوجد قيمة كل مما يأتي: (الدرس 1-4)

$$\begin{vmatrix} 8 & 6 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} \quad (72)$$

$$\begin{vmatrix} -3 & -5 \\ -1 & -9 \end{vmatrix} \quad (71)$$

$$\begin{vmatrix} 6 & -3 \\ -1 & 8 \end{vmatrix} \quad (70)$$

أوجد قيمة كل من x , y , z في التمرينين الآتيين: (الدرس 2-2)



مراجعة المتطلبات السابقة

أوجد قيمة x في كل مما يأتي:

$$30^2 + 35^2 = x^2 \quad (77)$$

$$x^2 + 5^2 = 13^2 \quad (76)$$

$$24^2 + x^2 = 26^2 \quad (75)$$

الأقواس والأوتار

Arcs and Chords



لماذا؟

يستعمل الخياطون طارة لرفع الثياب أو تطريز زخارف جميلة عليها. ويُظهر الشكل المجاور تطريزاً على شكل نجمة مثبتاً بطارة، ويمثل كل رأسين متجاورين من رؤوس النجمة نهايتي قوس في الدائرة أو وترًا يكون أحد أضلاع شكل سداسي.

الأقواس والأوتار لقد تعلمت في الدرس 1-3 أن الوتر هو قطعة مستقيمة يقع طرفاها على محيط الدائرة. وإذا لم يكن الوتر قطرًا للدائرة، فإن طرفيه يقسمانها إلى قوسين أحدهما قوس أكبر، والآخر أصغر.

فيما سبق

درست استعمال العلاقات بين الأقواس والزوايا لإيجاد قياسات مختلفة.

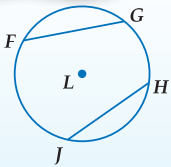
والآن

الأفكار الرئيسية

- أميز العلاقات بين الأقواس والأوتار وأستعملها.
- أميز العلاقات بين الأقواس والأوتار والأقطار وأستعملها.

أضف إلى
مطوبتك

نظرية 3.2

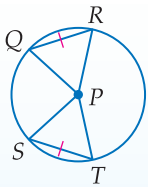


التعبير اللفظي في الدائرة نفسها أو في دائرتين متطابقتين، يكون القوسان متطابقين إذا وفقط إذا كان الوتران المناظران لهما متطابقين.

مثال $\overline{FG} \cong \overline{HJ}$ إذا وفقط إذا كان $\widehat{FG} \cong \widehat{HJ}$.

نظرية 3.2 (الجزء 1)

البرهان



المعطيات: $\odot P$ ، $\overline{QR} \cong \overline{ST}$

المطلوب: إثبات أن $\overline{QR} \cong \overline{ST}$

البرهان:

المبررات	العبارات
(1) معطى	(1) $\odot P$ ، $\overline{QR} \cong \overline{ST}$
(2) إذا تطابقت الأقواس، فإن الزوايا المركزية المقابلة لها تكون متطابقة	(2) $\angle QPR \cong \angle SPT$
(3) جميع أنصاف أقطار الدائرة متطابقة	(3) $\overline{QP} \cong \overline{PR} \cong \overline{SP} \cong \overline{PT}$
(4) SAS	(4) $\triangle PQR \cong \triangle PST$
(5) العناصر المتناظرة في مثلثين متطابقين متطابقة	(5) $\overline{QR} \cong \overline{ST}$

سوف تبرهن الجزء 2 من نظرية 3.2 في التمرين 25

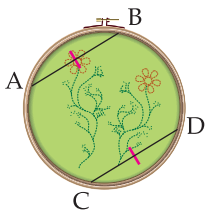
استعمال الأوتار المتطابقة لإيجاد قياس القوس

مثال 1 من واقع الحياة

حرف يدوية: إذا كان $\widehat{AB} = 60^\circ$ ، $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ في طارة التطريز المجاورة، فأوجد $m\widehat{CD}$.

$\overline{AB}$ ، وتران متطابقان. إذن القوسان المقابلان لهما $\widehat{AB}$ ، $\widehat{CD}$ متطابقان.

أي أن $m\widehat{AB} = m\widehat{CD} = 60^\circ$

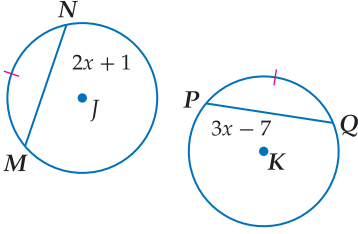


تأكد

(1) إذا كان $m\widehat{AB} = 78^\circ$ في طارة التطريز، فأوجد $m\widehat{CD}$.

مثال 2

استعمال الأقواس المتطابقة لإيجاد أطوال الأوتار



جبر: إذا كان $\odot J \cong \odot K$ ، $\widehat{MN} \cong \widehat{PQ}$ ، فأوجد PQ .

$\widehat{MN}$ و $\widehat{PQ}$ قوسان متطابقان في دائرتين متطابقتين،
لذا فإن الوترين $\overline{MN}$ و $\overline{PQ}$ متطابقان.

$$MN = PQ$$

بتعريف القطع المتطابقة

$$2x + 1 = 3x - 7$$

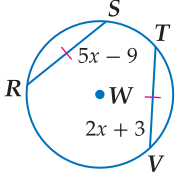
بالتعويض

$$8 = x$$

بالتبسيط

إذن، $PQ = 3(8) - 7 = 17$.

تأكد



(2) إذا كان $\widehat{RS} \cong \widehat{TV}$ في $\odot W$ ، فأوجد RS .

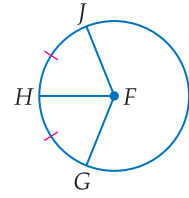
تنصيف الأقواس والأوتار إذا قسم مستقيم، أو قطعة مستقيمة، أو شعاع قوسًا إلى قوسين متطابقين، فإنه ينصف القوس.

إرشادات للدراسة

منصف القوس في

الشكل أدناه $\overline{FH}$ منصف

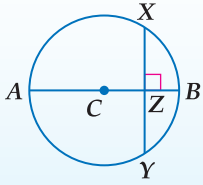
للقوس $\widehat{JHG}$.



نظريات

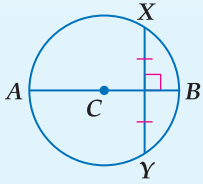
3.3 إذا كان قطر (أو نصف قطر) الدائرة عموديًا على وتر فيها فإنه ينصف ذلك الوتر وينصف قوسه أيضًا.

مثال إذا كان القطر $\overline{AB}$ عموديًا على $\overline{XY}$ ، فإن $\widehat{XB} \cong \widehat{BY}$ و $\widehat{XZ} \cong \widehat{ZY}$.



3.4 العمود المنصف لوتر في الدائرة هو قطر (أو نصف قطر) لها.

مثال إذا كان $\overline{AB}$ عمودًا منصفًا للوتر $\overline{XY}$ ، فإن $\overline{AB}$ قطر في $\odot C$.



سوف تبرهن النظريتين 3.3 و 3.4 في التمرينين 26 و 28 على الترتيب

مثال 3

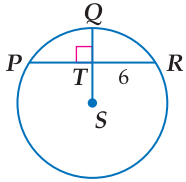
استعمال نصف القطر العمودي على الوتر

إذا كان $m\widehat{PQR} = 98^\circ$ في $\odot S$ ، فأوجد $m\widehat{PQ}$.

نصف القطر $\overline{SQ}$ عمودي على $\overline{PR}$. لذا وبحسب النظرية 2.3، فإن

$\overline{SQ}$ تنصف $\widehat{PQR}$. إذن، $m\widehat{PQ} = m\widehat{QR}$.

وبالتعويض ينتج أن $m\widehat{PQ} = \frac{98^\circ}{2} = 49^\circ$.



تأكد

(3) أوجد PR في $\odot S$.

استعمال القطر العمودي على الوتر

مثال 4 من واقع الحياة

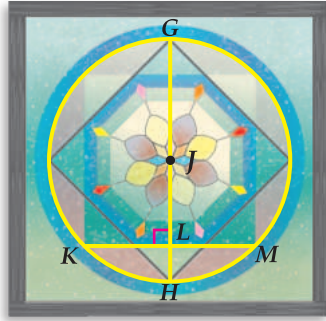


الربط مع واقع الحياة

لتلوين الزجاج؛ فإنه يُسخّن إلى درجة حرارة 200° ، حتى يصبح لزجاً، ثم تضاف أكاسيد بعض المعادن فتكسبه لوناً.

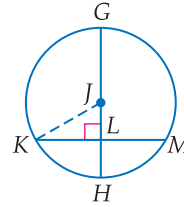
المصدر:

Artistic Stained Glass by Regg



زجاج ملون: زجاج نافذة ملون كما في الشكل المجاور، إذا كان $\overline{GH}$ قطرًا طوله 30 in، وترًا طوله 22 in، فأوجد JL .

خطوة 1 ارسم نصف القطر $\overline{JK}$.



فيكون مثلث قائم الزاوية JKL .

خطوة 2 أوجد KL ، JK .

بما أن $GH = 30$ in، فإن $JH = 15$ in، وجميع أنصاف أقطار الدائرة متطابقة، فيكون $JK = 15$ in.

وبما أن القطر $\overline{GH}$ عمودي على $\overline{KM}$ ، فإن $\overline{GH}$ تنصف الوتر $\overline{KM}$ بحسب النظرية 2.3.

إذن، $KL = \frac{1}{2}(22) = 11$ in.

خطوة 3 أوجد JL قائم الزاوية.

$$KL^2 + JL^2 = JK^2$$

$$11^2 + JL^2 = 15^2$$

$$121 + JL^2 = 225$$

$$JL^2 = 104$$

$$JL = \sqrt{104}$$

نظرية فيثاغورس

$$JK = 15 \text{ و } KL = 11$$

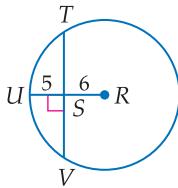
بالتبسيط

ب طرح 121 من كلا الطرفين

بأخذ الجذر التربيعي الموجب لكلا الطرفين

إذن، $JL = \sqrt{104} \approx 10.20$ in.

تأكد



4 أوجد TV في $\odot R$ مقربًا إلى أقرب جزء من مئة.

بالإضافة للنظرية 3.2، يمكنك استعمال النظرية الآتية؛ لتحديد ما إذا كان وتران في دائرة متطابقين.

أضف إلى

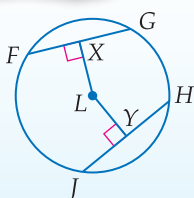
مطوياتك

نظرية 3.5

التعبير اللفظي يكون الوتران في الدائرة نفسها، أو في دائرتين متطابقتين، متطابقين إذا وفقط إذا كان بُعدهما عن مركز الدائرة متساويين.

$$\overline{FG} \cong \overline{JH} \text{ إذا وفقط إذا كان } LX = LY$$

مثال



سوف تبرهن نظرية 3.5 في التمرينين 29 و 30

الأوتار التي تبعد أبعادًا متساوية عن المركز

مثال 5 من واقع الحياة

جبر: إذا كان $WX = XY = 22$ في $\odot A$ ، فأوجد AB .

بما أن الوترين $\overline{WX}$ و $\overline{XY}$ متطابقان، فإن $AB = AC$ ، إذن، $AB = AC$.

$$AB = AC$$

$$5x = 3x + 4$$

$$x = 2$$

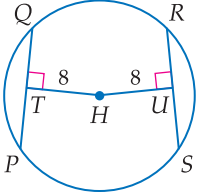
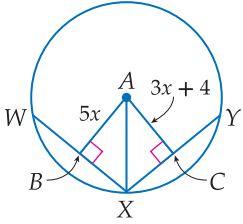
بالتعويض

بالتبسيط

$$AB = 5(2) = 10$$

تأكد

(5) إذا كان $PQ = 3x - 4$ ، و $RS = 14$ في $\odot H$ ، فأوجد قيمة x .

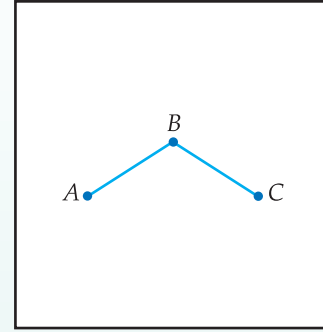


بإمكانك استعمال النظرية 3.4؛ لإيجاد النقطة التي تبعد مسافات متساوية عن ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة.

الدائرة التي تمر بثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة

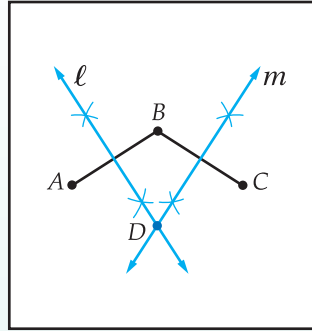
إنشاءات هندسية

خطوة 1



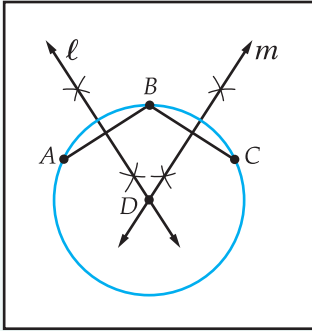
ارسم ثلاث نقاط A, B, C ليست على استقامة واحدة، ثم ارسم القطعتين المستقيمتين $\overline{AB}$ ، $\overline{BC}$.

خطوة 2



أنشئ العمودين m, l المنصفين للقطعتين $\overline{AB}$ ، $\overline{BC}$. وسمِّ نقطة التقاطع D .

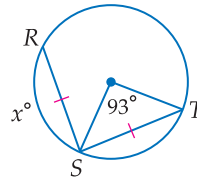
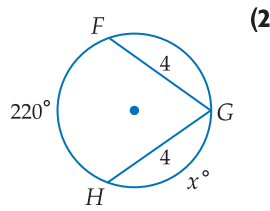
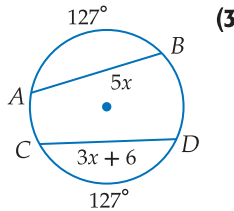
خطوة 3



من النظرية 2.4، المستقيمان m, l يحويان قطريين في $\odot D$. ضع رأس الفرجار عند النقطة D ، وارسم دائرة تمر بالنقاط A, B, C .

تأكد من فهمك

جبر: أوجد قيمة x في كل مما يأتي:



إذا كان $JK = 10$ ، و $m\widehat{JLK} = 134^\circ$ في $\odot P$ ، فأوجد القياسات الآتية، مقررًا الناتج إلى أقرب جزء من مئة.

PQ (5)

$m\widehat{JL}$ (4)

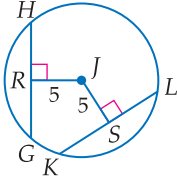
المثالان 1, 2

الصفحتان 138, 139

المثالان 3, 4

الصفحتان 139, 140

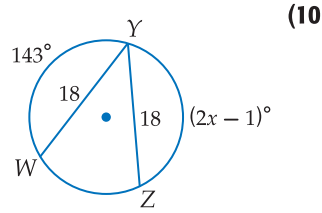
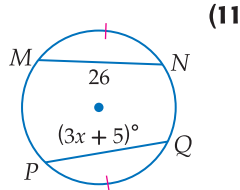
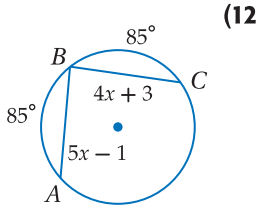
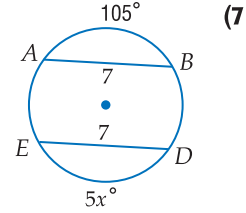
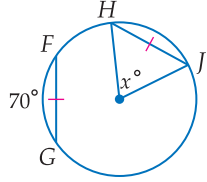
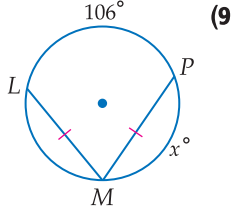
(6) إذا كان $GH = 9$, $KL = 4x + 1$ في $\odot J$ ، فأوجد قيمة x .



تدرب وحل المسائل

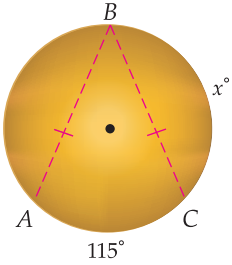
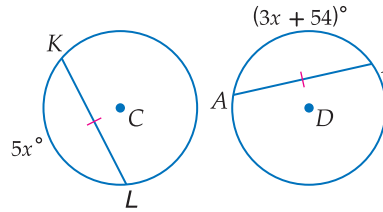
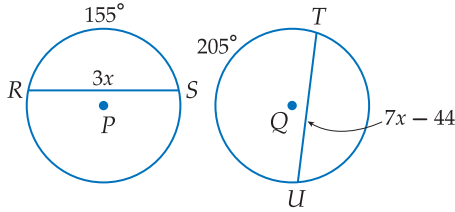
جبر: أوجد قيمة x في كل مما يأتي:

المثالان 1, 2
الصفحتان 138, 139



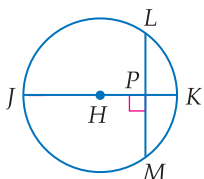
$\odot P \cong \odot Q$ (14)

$\odot C \cong \odot D$ (13)



(15) **مجوهرات:** أراد صانع مجوهرات عمل زوج من الأقراط مستعملًا قطعة ذهبية دائرية كما في الشكل المجاور، إذا كان قياس $\widehat{AC}$ يساوي 115° . وأراد أن يقص قطعتين متساويتين بحيث يكون $\widehat{AB} = \widehat{BC}$ ، فما قيمة x ؟

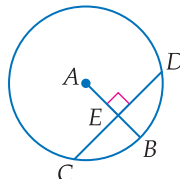
إذا كان قطر $\odot H$ يساوي 18، $LM = 12$ ،
 $m\widehat{LM} = 84$ ، فأوجد كلاً من القياسين الآتين،
مقرباً الناتج إلى أقرب جزء من مئة إذا لزم ذلك.



$m\widehat{LK}$ (18)

HP (19)

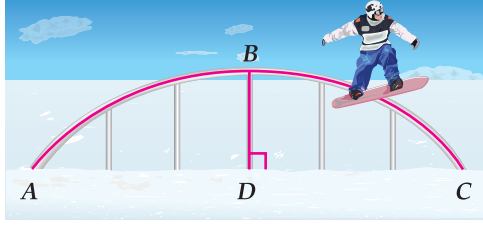
إذا كان نصف قطر $\odot A$ يساوي 14، $CD = 22$ ،
فأوجد كلاً من القياسين الآتين، مقرباً الناتج إلى
أقرب جزء من مئة إذا لزم ذلك.



CE (16)

EB (17)

المثالان 3, 4
الصفحتان 139, 140

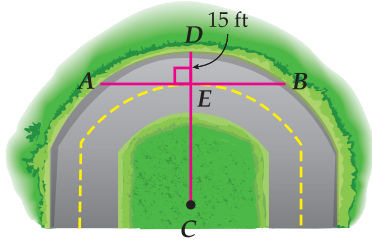


(20) تزلج: تأخذ سكة التزلج في الشكل المجاور شكل قوس من دائرة. إذا كانت $\overline{BD}$ جزءاً من قطرها. وكان قياس $\widehat{ABC}$ يساوي 32% من الدائرة الكاملة، فأوجد $m\widehat{AB}$.



الربط مع واقع الحياة

في مناطق التزلج، يُثبت سلك يمكن المتزلجين من القيام بحركات بهلوانية.



(21) طرق: حافة الطريق الخارجية المنحنية، والمبينة في الشكل المجاور هي جزء من $\odot C$ ، والتي نصف قطرها 88 ft. أوجد AB مقرباً الناتج إلى أقرب عُشر.

(23) جبر: إذا كان $LM = 16$ ، و $PN = 4x$

في $\odot S$ ، فأوجد قيمة x .

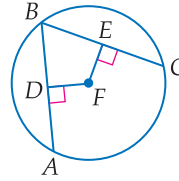
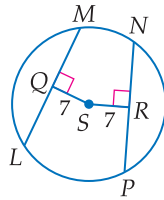
(22) جبر: إذا كانت $\overline{AB} \cong \overline{BC}$ ،

$DF = 3x - 7$ ، و $FE = x + 9$ في $\odot F$ ،

فأوجد قيمة x .

مثال 5

صفحة 141



برهان: اكتب برهاناً ذا عمودين.

(24) المعطيات: $\odot P$ ، $\overline{KM} \perp \overline{JP}$

المطلوب: إثبات أن $\overline{JP}$ تنصف كلاً من $\overline{KM}$ ، و $\widehat{KM}$.

برهان: اكتب برهاناً من النوع المحدّد في كل من التمرينين الآتيين:

(26) برهاناً ذا عمودين

للنظرية 3.3

المعطيات: $\odot C$ ، $\overline{AB} \perp \overline{XY}$

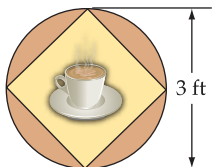
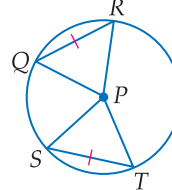
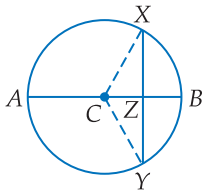
المطلوب: إثبات أن $\widehat{XB} \cong \widehat{YB}$ ، $\overline{XZ} \cong \overline{YZ}$

(25) برهاناً حرّاً للجزء الثاني من

النظرية 3.2

المعطيات: $\odot P$ ، $\overline{QR} \cong \overline{ST}$

المطلوب: إثبات أن $\widehat{QR} \cong \widehat{ST}$



(27) تصميم: صمّم زيد شعاعاً للمقهى، كما في الشكل المجاور.

فإذا كانت أطوال الأوتار جميعها متساوية، فما قياس كل قوس؟ وما طول كل وتر؟

(28) برهان: اكتب برهاناً ذا عمودين للنظرية 2.4.

برهان: اكتب برهاناً ذا عمودين للجزء المُشار إليه من النظرية 3.5 .

(29) إذا تساوى بُعدا وترين في الدائرة عن مركزها، فإن هذين الوترين متطابقان.

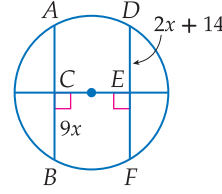
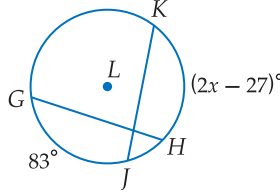
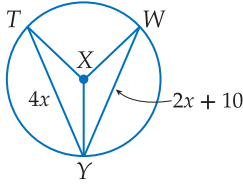
(30) إذا تطابق وتران في الدائرة، فإن بُعديهما عن مركزها متساويان.

جبر: أوجد قيمة x في كل مما يأتي:

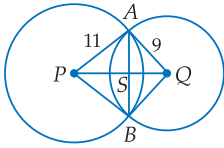
(33) $\overline{TY} \cong \overline{WY}$

(32) $\widehat{GJ} \cong \widehat{KH}$

(31) $\overline{AB} \cong \overline{DF}$



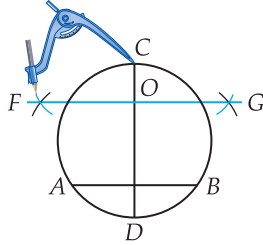
مسائل مهارات التفكير العليا



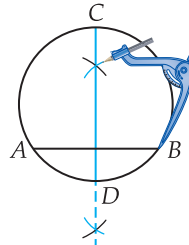
(34) **تحديد:** الوتر المشترك $\overline{AB}$ بين $\odot P$ و $\odot Q$ عمودي على القطعة المستقيمة الواصلة بين مركزي هاتين الدائرتين. إذا كان $\overline{AB} = 10$ ، فما طول $\overline{PQ}$ ؟ برّر إجابتك.

(35) **تبرير:** $\overline{AB}$ قطر في الدائرة، $\overline{HG}$ وتر يتقاطع مع $\overline{AB}$ في النقطة X . هل العبارة $HX = GX$ صحيحة دائماً، أو صحيحة أحياناً، أو غير صحيحة أبداً؟

(36) **تحديد:** استعمل الفرجار لرسم دائرة يكون $\overline{AB}$ وترّاً فيها. واستعمل هذا الإنشاء للإجابة عن كل مما يأتي:



خطوة 2 أنشئ $\overline{FG}$ على أن تكون عموداً ينصف $\overline{CD}$.
سمّ نقطة التقاطع O .



خطوة 1 أنشئ $\overline{CD}$ على أن تكون عموداً ينصف $\overline{AB}$.

- (a) استعمل البرهان غير المباشر؛ لإثبات أن $\overline{CD}$ تمر بمركز الدائرة، بفرض أن مركز الدائرة لا يقع على $\overline{CD}$.
(b) أثبت أن O هي مركز الدائرة.

(37) **مسألة مفتوحة:** أنشئ دائرة وارسم وترّاً فيها. قس طول الوتر والمسافة بينه وبين المركز. ثم أوجد طول نصف قطر الدائرة.

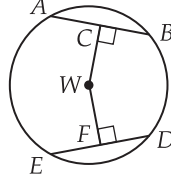
(38) **اكتب:** إذا أصبح طول قوس في دائرة ثلاثة أمثال طوله الأصلي، فهل يصبح طول الوتر المقابل لهذا القوس الجديد ثلاثة أمثال طول الوتر المقابل للقوس الأصلي؟ ارسم شكلاً يؤيد استنتاجك.

إرشادات للدراسة

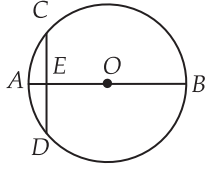
البرهان غير المباشر

تذكّر أن البرهان غير المباشر هو برهان تفترض فيه أن المطلوب غير صحيح، ثم تصل إلى تناقض مع المعطى، أو مع حقيقة مثبتة من قبل، أو مع تعريف، أو مع مسلمة.

(39) إذا كان $ED = 30$ ، $CW = WF$ ، فما طول $\overline{DF}$ ؟



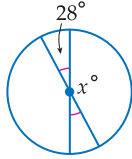
- 60 A
45 B
30 C
15 D



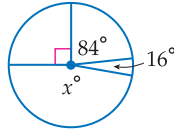
- 4 F
6 G
8 H
12 J

مراجعة تراكمية

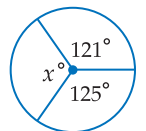
أوجد قيمة x في كل مما يأتي: (الدرس 3-2)



(43)



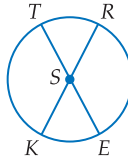
(42)



(41)

(44) **حزف يدوية:** تُصمم شيماء نموذجًا لتطريز 10 وردات على قطعة قماش، فرسمت 10 أشكال خماسية منتظمة طول ضلع كل منها 3.5 in، ثم رسمت نصف دائرة على كل ضلع فظهرت بذلك 10 وردات، لكل منها خمس بتلات. كم بوصة طول الشريط الذهبي الذي تحتاجه لتزيين حواف جميع الوردات؟ قَرِّب الناتج إلى أقرب بوصة. (الدرس 3-1)

إذا كان $m\angle TSR = 42^\circ$ في $\odot S$ ، فأوجد القياسات الآتية: (الدرس 3-2)



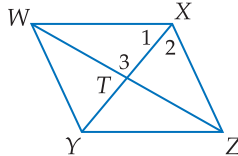
$\widehat{KRT}$ (47)

$\widehat{ERT}$ (46)

$\widehat{KT}$ (45)

مراجعة المتطلبات السابقة

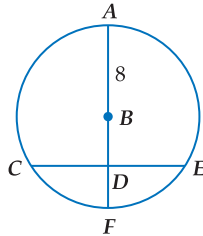
جبر: إذا كان الشكل الرباعي أدناه $WXYZ$ معينًا، فأجب عما يأتي:



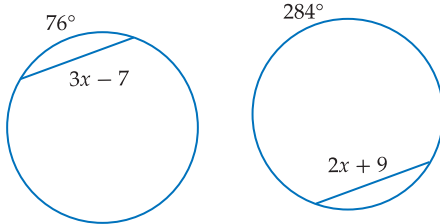
(48) إذا كان $m\angle 3 = (y^2 - 31)^\circ$ ، فأوجد y .

(49) إذا كان $m\angle XZY = 56^\circ$ ، فأوجد $m\angle YWZ$.

- (10) إذا كان $CE = 13.5$ في $\odot B$ ، فأوجد BD مقربًا الناتج إلى أقرب جزء من مئة. (الدرس 3-3)



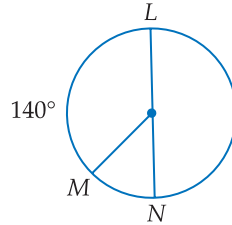
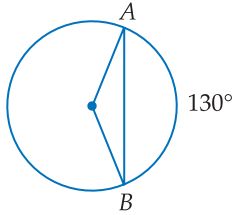
- (11) إذا كانت الدائرتان أدناه متطابقتين، فأوجد قيمة x وطول الوتر. (الدرس 3-3)



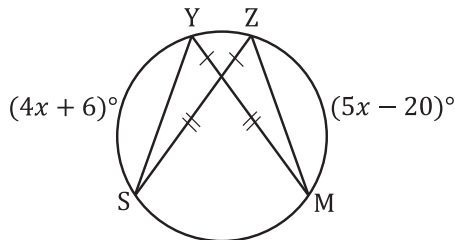
أوجد القياس المطلوب في السؤالين الآتيين: (الدرس 3-2)

$m\angle A$ (13)

$m\widehat{MN}$ (12)



- (14) اختيار من متعدد: ما قيمة x في الشكل أدناه؟ (الدرس 3-3)



110 C

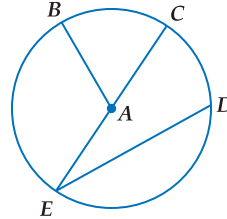
1 A

60 D

26 B

- (15) إذا رُسم مربع طول ضلعه 14 cm، بحيث تقع رؤوسه على دائرة، فما طول قطر هذه الدائرة؟ (الدرس 3-1)

أجب عن الأسئلة 3-1، مستعينًا بالدائرة $\odot A$. (الدرس 2-1)



(1) سمّ الدائرة.

(2) سمّ قطرًا.

(3) سمّ وترًا لا يكون قطرًا.

(4) دراجة هوائية: قطر إطار دراجة

هوائية يساوي 24 in. (الدرس 2-1)

(a) أوجد محيط أحد إطارات الدراجة.

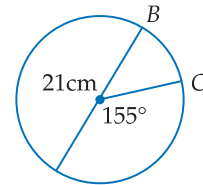
(b) ما المسافة بالبوصات التي تقطعها الدراجة عندما يدور إطارها 100 دورة؟

أوجد قطر ونصف قطر الدائرة المعطى محيطها في السؤالين الآتيين، مقربًا الناتج إلى أقرب جزء من مئة. (الدرس 3-1)

$C = 78$ ft (6)

$C = 23$ cm (5)

(7) اختيار من متعدد: ما طول $\widehat{BC}$ في الشكل أدناه؟ (الدرس 3-2)



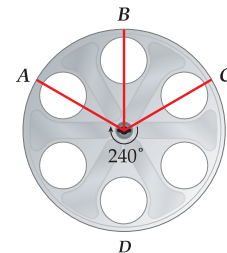
168° C

18° A

30.79 cm D

2.20 cm B

(8) أفلام: قطر بكرة الفيلم الظاهرة في الشكل أدناه يساوي 14.5 in. (الدرس 3-2)

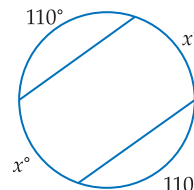


(a) أوجد $m\widehat{ADC}$.

(b) أوجد طول $\widehat{ADC}$.

(9) أوجد قيمة x في الشكل المجاور.

(الدرس 3-3)



الزوايا المحيطية

Inscribed Angles

فيما سبق

درست إيجاد قياس زوايا المضلعات الداخلية.

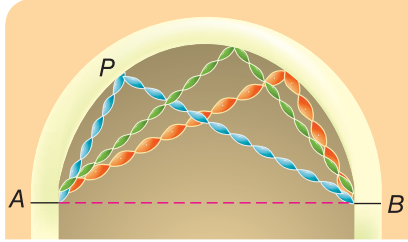
والآن

الأفكار الرئيسية

- أجد قياس الزوايا المحيطية.
- أجد قياس زوايا المضلعات المحاطة بدائرة.

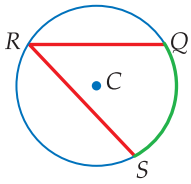
المفردات الأساسية

- الزاوية المحيطية
inscribed angle
- القوس المحدود
intercepted arc



لماذا؟

تعلو مدخل قاعة احتفالات قنطرة على شكل نصف دائرة. زُيّن هذا المدخل بأشرطة ملونة بحيث تُبَتُّ أحد طرفي كل شريط عند النقطة A والطرف الآخر عند النقطة B. ثم رُفعت الأشرطة، وتُبَتُّ كل منها عند نقطة مختلفة على القنطرة مثل P، كما في الشكل المجاور.



الزوايا المحيطية

لاحظ أن الزوايا المتكوّنة من هذه الأشرطة تبدو متطابقة، بغض النظر عن موقع النقطة P.

الزاوية المحيطية هي زاوية يقع رأسها على الدائرة، ويحتوي ضلعاها وترين في الدائرة. $\angle QRS$ هي زاوية محيطية في $\odot C$.

القوس المحدود بالزاوية المحيطية يقع طرفاه على ضلعي الزاوية المحيطية ويقع في داخل الزاوية، القوس $\widehat{QS}$ في $\odot C$ هو القوس المحدود بالزاوية $\angle QRS$.

هناك ثلاث حالات للزاوية المحيطية في الدائرة.

حالة 3	حالة 2	حالة 1
مركز الدائرة P خارج الزاوية المحيطية.	مركز الدائرة P داخل الزاوية المحيطية.	مركز الدائرة P على أحد ضلعي الزاوية المحيطية.

في الحالة 1 يكون أحد ضلعي الزاوية المحيطية قطرًا للدائرة.

والنظرية الآتية صحيحة لجميع هذه الحالات الثلاث.

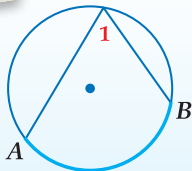
نظرية 3.6

نظرية الزاوية المحيطية

التعبير اللفظي قياس الزاوية المحيطية يساوي نصف قياس القوس المحدود بها.

$$m\angle 1 = \frac{1}{2} m\widehat{AB}, m\widehat{AB} = 2 m\angle 1$$

مثال



سوف تبرهن الحالتين 2، 3 لنظرية الزاوية المحيطية في التمرينين 33 و 34 على الترتيب.

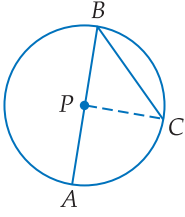
نظرية الزاوية المحيطية (الحالة 1)

برهان

المعطيات: $\angle B$ محيطية في $\odot P$

المطلوب: إثبات أن $m\angle B = \frac{1}{2} m\widehat{AC}$

البرهان:

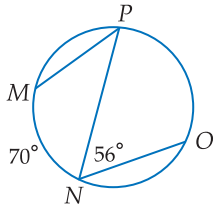


المبررات	العبارات
(1) كل نقطتين تحددان مستقيماً واحداً	(1) ارسم نصف قطر آخر $\overline{PC}$
(2) جميع أنصاف أقطار الدائرة متطابقة	(2) $\overline{PB} \cong \overline{PC}$
(3) تعريف المثلث المتطابق الضلعين	(3) $\triangle PBC$ مثلث متطابق الضلعين
(4) نظرية المثلث المتطابق الضلعين	(4) $m\angle B = m\angle C$
(5) نظرية الزاوية الخارجة	(5) $m\angle APC = m\angle B + m\angle C$
(6) بالتعويض (الخطوتان 4, 5)	(6) $m\angle APC = 2 m\angle B$
(7) تعريف قياس القوس	(7) $m\widehat{AC} = m\angle APC$
(8) بالتعويض (الخطوتان 6, 7)	(8) $m\widehat{AC} = 2 m\angle B$
(9) خاصية التماثل للمساواة	(9) $2 m\angle B = m\widehat{AC}$
(10) خاصية القسمة للمساواة	(10) $m\angle B = \frac{1}{2} m\widehat{AC}$

استعمال الزوايا المحيطية لإيجاد قياسات

مثال 1

أوجد القياسات الآتية مستعملاً الشكل المجاور:



(b) $m\widehat{PO}$

$$m\widehat{PO} = 2 m\angle N$$

$$= 2 (56^\circ) = 112^\circ$$

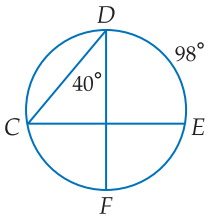
(a) $m\angle P$

$$m\angle P = \frac{1}{2} m\widehat{MN}$$

$$= \frac{1}{2} (70^\circ) = 35^\circ$$

تأكد

أوجد القياسات الآتية مستعملاً الشكل المجاور:



(1B) $m\angle C$

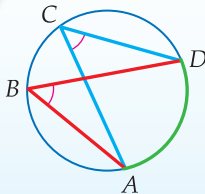
(1A) $m\widehat{CF}$

هناك علاقة بين الزاويتين المحيطيتين اللتين تحددان القوس نفسه في دائرة.

أضف إلى

مطويتك

نظرية 3.7



التعبير اللفظي الزاويتان المحيطيتان اللتان تحددان القوس نفسه أو قوسين متطابقين تكونان متطابقتين.

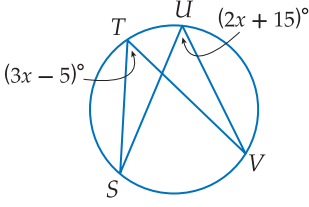
مثال $\angle B$ و $\angle C$ تُحدّدان $\widehat{AD}$. إذن، $\angle B \cong \angle C$.

سوف تبرهن النظرية 3.7 في التمرين 35

استعمال الزوايا المحيطية لإيجاد قياسات معينة

مثال 2

جبر: أوجد $m\angle T$ مستعملًا الشكل المجاور.



$$\angle T \cong \angle U$$

$$m\angle T = m\angle U$$

$$3x - 5 = 2x + 15$$

$$x = 20$$

$$\text{إذن، } m\angle T = (3(20) - 5)^\circ = 55^\circ.$$

تأكد



(2) إذا كان $m\angle S = (3x)^\circ$ ، و $m\angle V = (x + 16)^\circ$ ، فأوجد $m\angle S$ مستعملًا الشكل أعلاه.

استعمال الزوايا المحيطية في البراهين

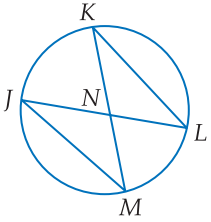
مثال 3

اكتب برهانًا ذا عمودين.

المعطيات: $\widehat{JM} \cong \widehat{KL}$

المطلوب: إثبات أن $\triangle JMN \cong \triangle KLN$

البرهان:



المبررات	العبارات
(1) معطيات	$\widehat{JM} \cong \widehat{KL}$ (1)
(2) إذا كانت الأقواس الصغرى متطابقة، فإن الأوتار المقابلة لها تكون متطابقة أيضًا	$\overline{JM} \cong \overline{KL}$ (2)
(3) تعريف القوس المحدود	$\angle M$ تحدد $\widehat{JK}$ (3) $\angle L$ تحدد $\widehat{KL}$
(4) الزوايا المحيطية التي تحدد القوس نفسه تكون متطابقة	$\angle M \cong \angle L$ (4)
(5) الزوايا المتقابلة بالرأس تكون متطابقة	$\angle JNM \cong \angle KNL$ (5)
(6) AAS	$\triangle JMN \cong \triangle KLN$ (6)

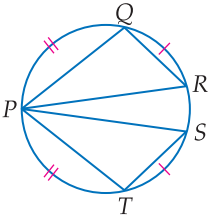
تأكد



اكتب برهانًا ذا عمودين.

(3) المعطيات: $\widehat{PQ} \cong \widehat{PT}$ ، $\widehat{QR} \cong \widehat{ST}$

المطلوب: إثبات أن $\triangle PQR \cong \triangle PTS$



إرشادات للدراسة

المضلعات المحاطة بدائرة

يكون المضلع مضلعًا محاطًا بدائرة، إذا وقعت جميع رؤوسه على الدائرة نفسها.

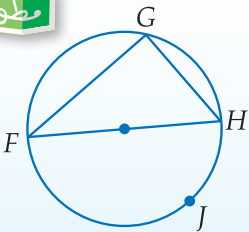
زوايا المضلعات المحاطة بدائرة للمثلثات والأشكال الرباعية المحاطة بدائرة خصائص خاصة.

نظرية 3.8

التعبير اللفظي

تحدد الزاوية المحيطية في مثلث قطرًا أو نصف دائرة إذا وفقط إذا كانت هذه الزاوية قائمة.

مثال إذا كانت $\widehat{FJH}$ نصف دائرة، فإن $m\angle G = 90^\circ$.
إذا كان $m\angle G = 90^\circ$ ، فإن $\widehat{FJH}$ هي نصف دائرة، و $\overline{FH}$ يكون قطرًا فيها.



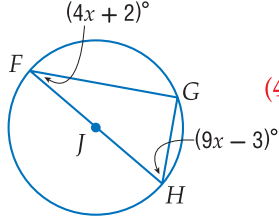
أضف إلى مطوبتك

إيجاد قياس الزوايا في المثلثات المحاطة بدائرة

مثال 4

جبر: أوجد $m\angle F$ مستعملًا الشكل المجاور.

$\triangle FGH$ قائم الزاوية ؛ لأن $\angle G$ زاوية محيطية تحدد نصف دائرة.



$$\begin{aligned} m\angle F + m\angle G + m\angle H &= 180^\circ && \text{نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث} \\ (4x + 2)^\circ + 90^\circ + (9x - 3)^\circ &= 180^\circ && \text{بالتعويض} \\ 13x + 89 &= 180 && \text{بالتبسيط} \\ 13x &= 91 && \text{بطرح 89 من كلا الطرفين} \\ x &= 7 && \text{بقسمة كلا الطرفين على 13} \\ \text{إذن، } m\angle F &= (4(7) + 2)^\circ = 30^\circ. \end{aligned}$$

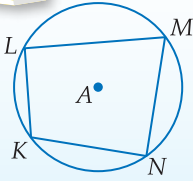
تأكد

4 إذا كان $m\angle H = (17x - 8)^\circ$ ، $m\angle F = (7x + 2)^\circ$ ، فأوجد قيمة x مستعملًا الشكل أعلاه.

يمكن رسم مختلف أنواع المثلثات، بما فيها المثلث القائم الزاوية داخل الدائرة، بحيث تقع رؤوسه عليها. إلا أن أنواعًا معينة فقط من المضلعات الرباعية يمكن رسمها داخل الدائرة، بحيث تقع رؤوسها عليها.

أضف إلى

مطويتك



التعبير اللفظي إذا كان المضلع الرباعي دائريًا (محاطًا بدائرة)، فإن كل زاويتين متقابلتين متكاملتان.

مثال إذا وقعت رؤوس المضلع الرباعي $KLMN$ على $\odot A$ ، فإن $\angle L$ ، $\angle N$ متكاملتان، و $\angle K$ ، $\angle M$ متكاملتان أيضًا.

سوف تُبرهن نظرية 3.9 في التمرين 27.

إرشادات للدراسة

الأشكال الرباعية يمكن إثبات نظرية 2.9 بأخذ الأقواس التي تحددها الزوايا المتقابلة في الرباعي الدائري وإثبات أنها تكون دائرة كاملة.

إيجاد قياس الزوايا

مثال 5 من واقع الحياة

مجوهرات: يحتوي العقد الظاهر في الشكل المجاور على جوهرة بصورة مضلع رباعي دائري، أوجد $m\angle A$ ، $m\angle B$.

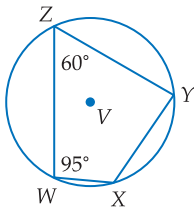
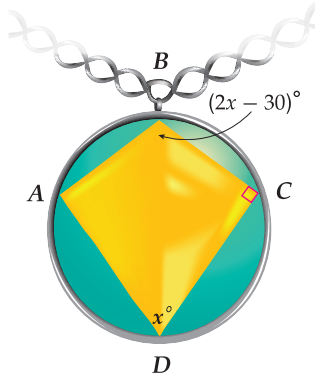
بما أن $ABCD$ رباعي دائري فالزاويتان المتقابلتان فيه متكاملتان.

$$\begin{aligned} m\angle B + m\angle D &= 180^\circ & m\angle A + m\angle C &= 180^\circ \\ (2x - 30)^\circ + x^\circ &= 180^\circ & m\angle A + 90^\circ &= 180^\circ \\ 3x - 30 &= 180 & m\angle A &= 90^\circ \\ 3x &= 210 \\ x &= 70 \end{aligned}$$

إذن، $m\angle B = (2(70) - 30)^\circ = 110^\circ$ ، $m\angle A = 90^\circ$

تأكد

5 المضلع $WXYZ$ رباعي دائري محاط بالدائرة V . أوجد $m\angle Y$ ، $m\angle X$.

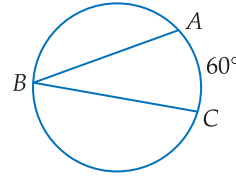


أوجد قياس كل مما يأتي:

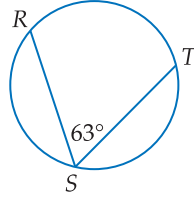
مثال 1

صفحة 148

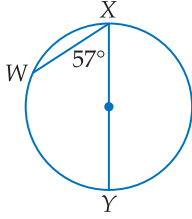
(1) $m\angle B$



(2) $m\widehat{RT}$



(3) $m\widehat{WX}$



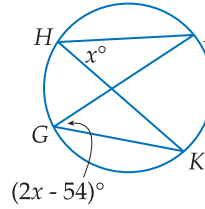
(4) **علوم:** يُبين الشكل المجاور انكسار أشعة الضوء في قطرة ماء لتنتج ألوان الطيف. إذا كان $m\widehat{ST} = 144^\circ$ ، فما قيمة $m\angle R$ ؟

جبر: أوجد كلاً من القياسين الآتيين:

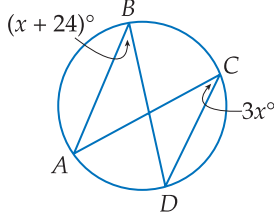
مثال 2

صفحة 149

(5) $m\angle H$



(6) $m\angle B$



(7) **برهان:** اكتب برهاناً ذا عمودين.

مثال 3

صفحة 149

المعطيات: $\overline{RT}$ تنصف $\overline{SU}$.

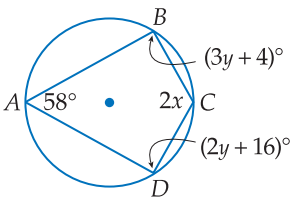
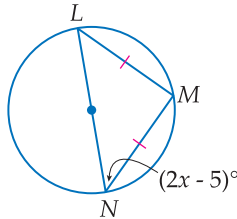
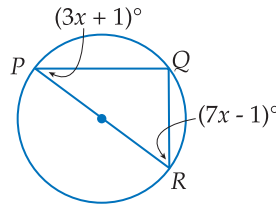
المطلوب: إثبات أن $\triangle RVS \cong \triangle UVT$

جبر: أوجد قيمة كل مما يأتي:

(8) $m\angle R$

(9) x

(10) $m\angle D, m\angle C$



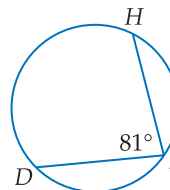
تدرب وحل المسائل

أوجد قياس كل مما يأتي:

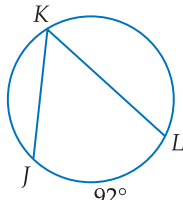
مثال 1

صفحة 146

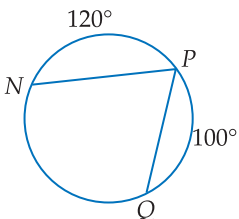
(11) $m\widehat{DH}$



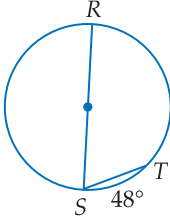
(12) $m\angle K$



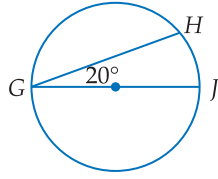
(13) $m\angle P$



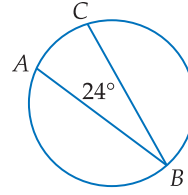
$m\angle S$ (16)



$m\widehat{GH}$ (15)



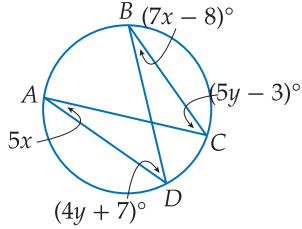
$m\widehat{AC}$ (14)



جبر: أوجد قياس كل مما يأتي:

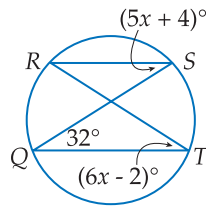
$m\angle A$ (18)

$m\angle C$ (20)



$m\angle R$ (17)

$m\angle S$ (19)



مثال 2
صفحة 149

برهان: اكتب برهاناً من النوع المحدّد في التمرينين الآتيين:

(22) برهاناً حرّاً

المعطيات: $\odot C$

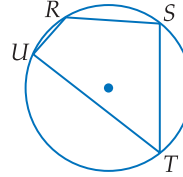
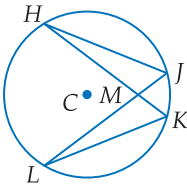
المطلوب: إثبات أن $\triangle KML \sim \triangle JMH$

(21) برهاناً ذا عمودين

المعطيات: $m\angle T = \frac{1}{2} m\angle S$

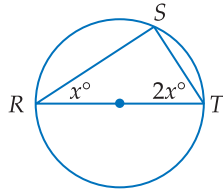
المطلوب: إثبات أن $m\widehat{TUR} = 2 m\widehat{URS}$

مثال 3
صفحة 149



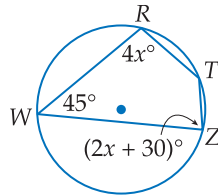
جبر: أوجد كلّ مما يأتي مستعملاً الشكل المجاور:

المثالان 4 ، 5
صفحة 150



x (23)

$m\angle T$ (24)



جبر: أوجد كلّ مما يأتي مستعملاً الشكل المجاور:

$m\angle T$ (25)

$m\angle Z$ (26)

(27) **برهان:** اكتب برهاناً حرّاً للنظرية 3.9.

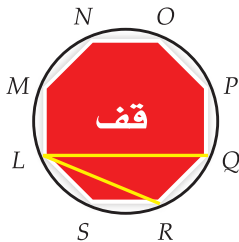
إشارات المرور: شكل إشارة قف هو مضلع ثماني منتظم تقع رؤوسه على دائرة. أوجد كلّ مما يأتي:

$m\angle RLQ$ (29)

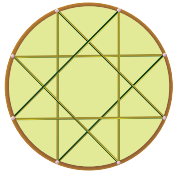
$m\angle LSR$ (31)

$m\widehat{NPQ}$ (28)

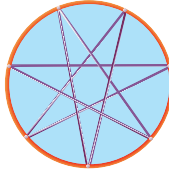
$m\angle LRQ$ (30)



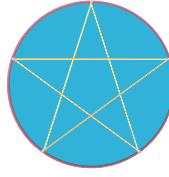
(32) **فن:** الأشكال الثلاثة أدناه هي نماذج لنجوم صُنعت من الخيوط. إذا كانت الزوايا المحيطية في كل نجمة متطابقة، فأوجد قياس كل من هذه الزوايا المحيطية.



(c)



(b)



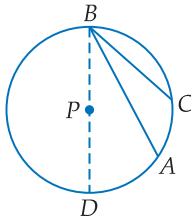
(a)

برهان: اكتب برهاناً ذا عمودين للحالتين الآتيتين من حالات النظرية 2.6.

(34) حالة 3

المعطيات: تقع P خارج الزاوية $\angle ABC$.
 $\overline{BD}$ قطر للدائرة.

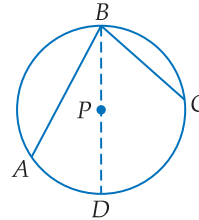
المطلوب: إثبات أن $m\angle ABC = \frac{1}{2} m\widehat{AC}$



(33) حالة 2

المعطيات: تقع P داخل $\angle ABC$.
 $\overline{BD}$ قطر للدائرة.

المطلوب: إثبات أن $m\angle ABC = \frac{1}{2} m\widehat{AC}$



برهان: اكتب برهاناً من النوع المحدد لكل من النظريتين الآتيتين:

(36) النظرية 3.8، برهاناً حرّاً

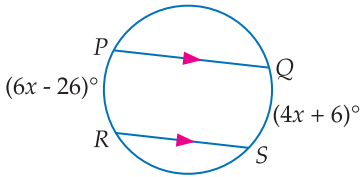
(35) النظرية 3.7، برهاناً ذا عمودين

(37) **تمثيلات متعددة:** سوف تستقصي في هذا التمرين العلاقة بين القوسين المحصورين بين وترين متوازيين في الدائرة.

(a) **هندسي:** ارسم دائرة تحوي وترين متوازيين هما $\overline{AB}$ ، $\overline{CD}$ مستعملاً الفرجار، ثم صل A و D برسم $\overline{AD}$.

(b) **عددي:** أوجد $m\angle A$ ، $m\angle D$ مستعملاً المنقلة، ثم حدّد $m\widehat{AC}$ ، $m\widehat{BD}$. ما العلاقة بين هذين القوسين؟ فسر إجابتك.

(c) **تعبير لفظي:** ارسم دائرة أخرى، وكّرر الخطوتين a ، b . كوّن تخميناً حول القوسين المحصورين بين وترين متوازيين في الدائرة.



(d) **تحليل:** استعمل هذا التخمين؛ لإيجاد $m\widehat{PR}$ ، $m\widehat{QS}$ مستعيناً بالشكل المجاور، ثم أثبت صحة النتيجة بإيجاد قياس كل من هذين القوسين باستعمال الزوايا المحيطية.

مسائل مهارات التفكير العليا

تبرير: حدّد ما إذا كان يمكن إحاطة كل من الأشكال الرباعية الآتية بدائرة، دائماً، أو أحياناً، أو لا يمكن أبداً. برّر إجابتك.

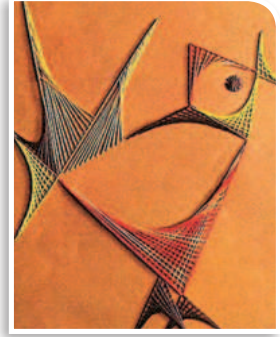
(38) المربع (39) المستطيل (40) متوازي الأضلاع (41) المعين (42) شكل الطائرة الورقية

(43) **تحذّر:** مربع محاط بدائرة، ما نسبة مساحة سطح الدائرة إلى مساحة سطح المربع؟

(44) **اكتب:** مثلث قائم زواياه $90^\circ - 45^\circ - 45^\circ$ محاط بدائرة، إذا أُعطيت نصف قطر الدائرة، فاشرح طريقة لإيجاد طولي ضلعي قائمة هذا المثلث.

(45) **مسألة مفتوحة:** أوجد شكلاً من واقع الحياة يحوي مضلعاً محاطاً بدائرة وارسمه.

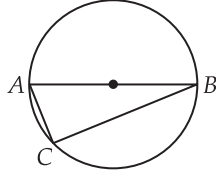
(46) **اكتب:** بين أوجه الشبه وأوجه الاختلاف بين الزاوية المركزية والزاوية المحيطية في الدائرة إذا كانت هاتان الزاويتان تحددان القوس نفسه، وما العلاقة بين قياسيهما؟



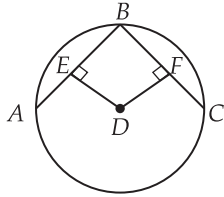
الربط مع واقع الحياة

يمكن استعمال فن الخيوط لتشكيل نماذج هندسية عدة.

(49) سؤال ذو إجابة قصيرة: $\overline{AB}$ قطر في الدائرة أدناه، $BC = 15 \text{ in}$ ، $AC = 8 \text{ in}$. أوجد قطر الدائرة ومحيطها.



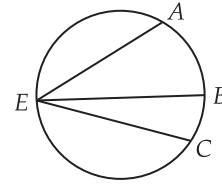
(50) إذا كان $DE = FD$ ، $DC = 10$ ، $CF = 8$ في $\odot D$ ، كما في الشكل أدناه، فما طول $\overline{AB}$ ؟



10 H
16 J

14 F
8 G

(47) إذا كان $m\widehat{AC} = 160^\circ$ ، $m\angle BEC = 38^\circ$ كما في الشكل أدناه، فما قيمة $m\angle AEB$ ؟



80° C

42° A

84° D

61° B

(48) مربع يحيط بدائرة. ما نسبة محيط الدائرة إلى محيط المربع؟

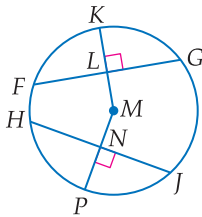
$\frac{\pi}{2}$ C

$\frac{1}{4}$ A

$\frac{\pi}{4}$ D

$\frac{1}{2}$ B

مراجعة تراكمية



إذا كان $FL = 24$ ، $HJ = 48$ ، $m\widehat{HP} = 65^\circ$ ، فأوجد كل مما يأتي مستعملًا $\odot M$: (الدرس 3-3)

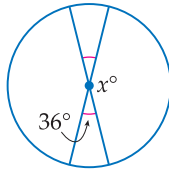
$m\widehat{PJ}$ (52)

FG (51)

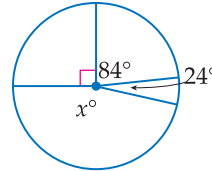
$m\widehat{HJ}$ (54)

NJ (53)

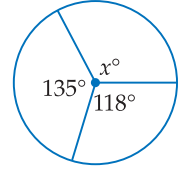
أوجد قيمة x في كل مما يأتي: (الدرس 3-2)



(57)



(56)



(55)

تقع النقطتان Q، R على $\odot P$. إذا أعطيت نصف القطر، وقياس الزاوية في كل مما يأتي: (الدرس 3-3)

$m\angle QPR = 90^\circ$ ، $PR = 16$ (59)

$m\angle QPR = 60^\circ$ ، $PR = 12$ (58)

مراجعة المتطلبات السابقة

جبر: افترض أن B نقطة منتصف $\overline{AC}$. استعمل المعلومات المعطاة في كل مما يأتي؛ لإيجاد القياسات المجهولة:

$AB = 6y - 14$ ، $BC = 10 - 2y$ ، $AC = ?$ (61)

$AB = 4x - 5$ ، $BC = 11 + 2x$ ، $AC = ?$ (60)

$AB = 10s + 2$ ، $AC = 40$ ، $s = ?$ (63)

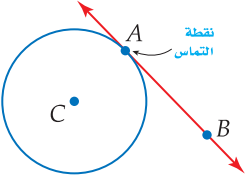
$BC = 6 - 4m$ ، $AC = 8$ ، $m = ?$ (62)

المماسات Tangents



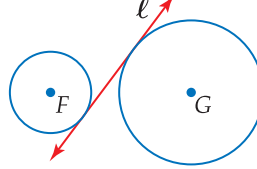
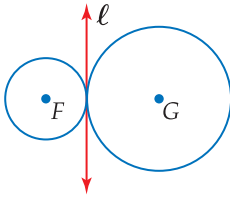
لماذا؟

كانت الدراجات الهوائية تُحرَّك سابقًا بدفع القدم على الأرض. أما الدراجات الحديثة فإنها تستعمل الدواسات والسلاسل والتروس، إذ تدور السلسلة حول تروس دائرية. ويقاس طول السلسلة بين الترسين من نقطتي تماس السلسلة مع الترسين.



المماسات المماس هو مستقيم يقع في المستوى نفسه الذي تقع فيه الدائرة، ويقطعها في نقطة واحدة فقط تُسمى **نقطة التماس**. $\overrightarrow{AB}$ مماس للدائرة $\odot C$ عند النقطة A، ويُسمى كل من $\overrightarrow{AB}$ ، $\overleftarrow{AB}$ أيضًا مماسًا للدائرة.

المماس المشترك هو مستقيم، أو شعاع، أو قطعة مستقيمة تَمَسُّ الدائرتين في المستوى نفسه. في الشكلين أدناه المستقيم ℓ مماس مشترك للدائرتين G و F .

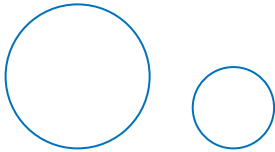


تحديد المماسات المشتركة

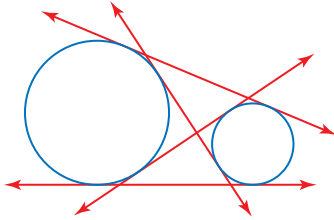
مثال 1

انقل الشكلين أدناه، ثم ارسم المماسات المشتركة. وإذا لم يوجد مماس مشترك، فاكتب "لا يوجد مماس مشترك".

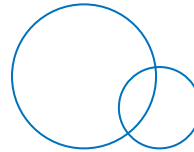
(b)



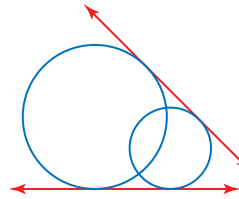
هاتان الدائرتان لهما 4 مماسات مشتركة.



(a)



هاتان الدائرتان لهما مماسان مشتركان.

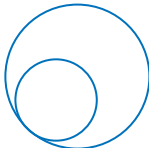


تأكد

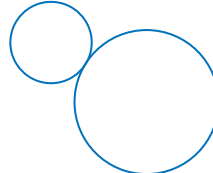


انقل الشكلين أدناه، ثم ارسم المماسات المشتركة. وإذا لم يوجد مماس مشترك، فاكتب "لا يوجد مماس مشترك".

(1B)



(1A)



فيما سبق

درست استعمال نظرية فيثاغورس؛ لإيجاد أطوال أضلاع المثلث القائم الزاوية.

والآن

الأفكار الرئيسية

- استعمل خصائص المماسات؛ لإيجاد قياسات تتعلق بالدائرة.
- أحل مسائل تتضمن المضلعات المحيطة بدائرة.

المفردات الأساسية

المماس

tangent

نقطة التماس

point of tangency

المماس المشترك

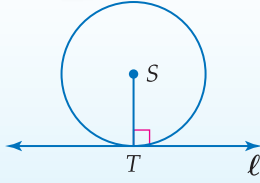
common tangent

أقصر مسافة من المماس إلى مركز الدائرة هي نصف القطر المار بنقطة التماس.

أضف إلى
مطوبتك

نظرية 3.10

التعبير اللفظي يكون المستقيم مماساً لدائرة في المستوى نفسه، إذا وفقط إذا كان عمودياً على نصف القطر عند نقطة التماس.



يكون المستقيم l مماساً للدائرة $\odot S$ ، إذا وفقط إذا كان $l \perp \overline{ST}$.

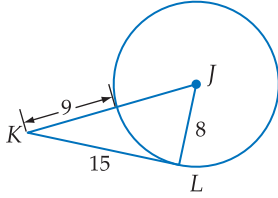
مثال

سوف تبرهن جزأي نظرية 3.10 في التمرينين 32 و 33 على الترتيب

تحديد المماس

مثال 2

$\overline{JL}$ نصف قطر في $\odot J$. حدّد إذا كان $\overline{KL}$ مماساً للدائرة $\odot J$. وبرّر إجابتك.



اختبر إذا كان $\triangle JKL$ قائم الزاوية.

$$8^2 + 15^2 \stackrel{?}{=} (8 + 9)^2$$

نظرية فيثاغورس

$$289 = 289 \checkmark$$

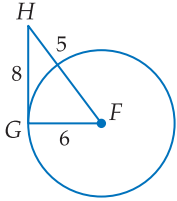
بالتبسيط

وعليه، فإن $\triangle JKL$ قائم الزاوية في $\angle JLK$. أي أن $\overline{KL}$ عمودي على $\overline{JL}$ عند النقطة L .

وحسب النظرية 3.10 يكون $\overline{KL}$ مماساً لـ $\odot J$.

تأكد

(2) حدّد إذا كان $\overline{GH}$ مماساً للدائرة $\odot F$. برّر إجابتك.

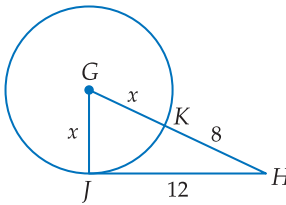


ويمكنك استعمال النظرية 3.10 ؛ لإيجاد قيم مجهولة.

استعمال المماس لإيجاد القيم المجهولة

مثال 3

$\overline{JH}$ مماس للدائرة $\odot G$ عند J . أوجد قيمة x .



بتطبيق النظرية 3.10 ، يكون $\overline{JH} \perp \overline{GJ}$ ، إذن، $\triangle GHJ$ مثلث قائم الزاوية.

$$GJ^2 + JH^2 = GH^2$$

نظرية فيثاغورس

$$x^2 + 144 = (x + 8)^2$$

$$GJ = x, JH = 12, GH = x + 8$$

$$x^2 + 144 = x^2 + 16x + 64$$

بالضرب

$$80 = 16x$$

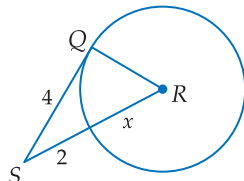
بالتبسيط

$$5 = x$$

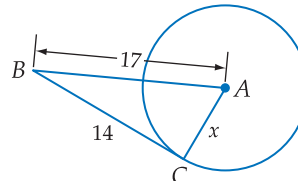
بقسمة الطرفين على 16

تأكد

أوجد قيمة x في كل من الشكلين أدناه، مفترضاً أن القطعة المستقيمة التي تبدو كأنها مماساً للدائرة، هي مماس بالفعل مقرباً الناتج إلى منزلتين عشريتين إذا لزم ذلك.



(3B)



(3A)

إرشادات لحل المسألة

حل مسألة أبسط يمكنك

استعمال استراتيجية حل

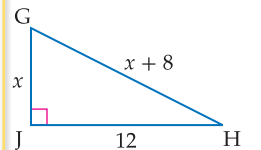
مسألة أبسط، وذلك برسم

المثلث القائم دون الدائرة

وتسميته. يُبين الشكل

أدناه رسم المثلث في

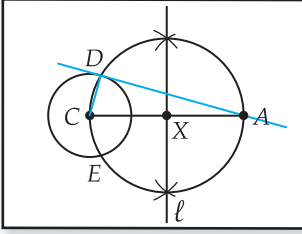
المثال 3.



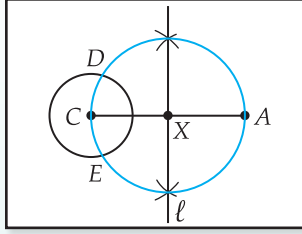
يمكنك استعمال النظريتين 3.8 و 3.10 ؛ لإنشاء مماسات الدائرة.

إنشاءات هندسية

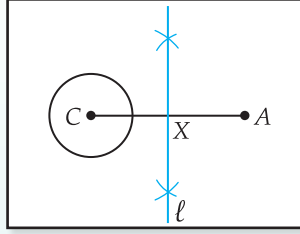
رسم مماس لدائرة من نقطة خارجها



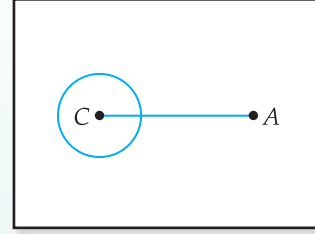
خطوة 4 ارسم $\overrightarrow{AD}$ ، $\overrightarrow{DC}$.
فيكون $\triangle ADC$ مرسومًا داخل
نصف الدائرة. إذن، $\angle ADC$
قائمة، وعليه فإن $\overrightarrow{AD}$ مماس
للدائرة C.



خطوة 3 أنشئ الدائرة X
بنصف قطر $\overline{XC}$ ، وسمّ نقطتي
تقاطع الدائرتين E ، D .



خطوة 2 أنشئ المستقيم ℓ
، وهو عمود منصف للقطعة
المستقيمة CA ، وسمّ نقطة
التقاطع X .



خطوة 1 ارسم الدائرة C
مستعملًا الفرجار، وحدّد
نقطة A خارجها، ثم ارسم
 $\overline{CA}$

سوف تثبت صحة هذا الإنشاء في التمرين 36 ، وسوف تنشئ مماسًا لدائرة من نقطة عليها في التمرين 34

يمكن رسم مماسين للدائرة من نقطة واحدة خارجها.

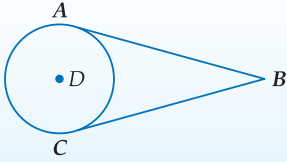
نظرية 3.11

التعبير اللفظي

القطعتان المستقيمتان المماستان للدائرة
والمرسومتان من نقطة خارجها تكونان متطابقتين.

إذا كان $\overline{AB}$ ، $\overline{CB}$ مماسان للدائرة D ،
فإن $\overline{AB} \cong \overline{CB}$.

مثال

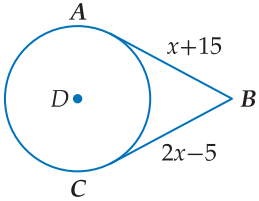


سوف تبرهن نظرية 3.11 في التمرين 28

مثال 4

استعمال المماسات المتطابقة لإيجاد بعض القياسات

جبر: إذا كان $\overline{AB}$ ، $\overline{CB}$ مماسين للدائرة D ، فأوجد قيمة x .



$$AB = CB$$

المماسان المرسومان من نقطة خارج الدائرة
متطابقان

$$x + 15 = 2x - 5$$

بالتعويض

$$15 = x - 5$$

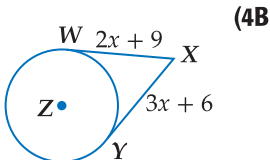
ب طرح x من كلا الطرفين

$$20 = x$$

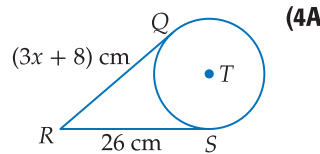
بإضافة 5 لكلا الطرفين

تأكد

جبر: أوجد قيمة x في كل من الشكلين أدناه، مفترضًا أن القطعة التي تبدو مماسًا للدائرة، هي مماس بالفعل.



(4B)



(4A)

إذا مسّت الدائرة ضلعاً
واحداً أو أكثر من أضلاع
المضلع، فلا يعني أن
المضلع يُحيط بالدائرة،
وهذا ما يتضح من
المجموعة الثانية من
المضلعات في الجدول.

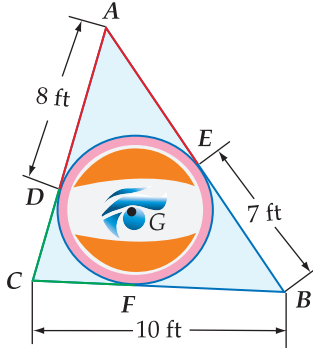
مضلعات ليست محيطة بدائرة	مضلعات محيطة بدائرة

يمكنك استعمال النظرية 3.11؛ لإيجاد القياسات المجهولة للمضلعات المحيطة بدائرة.

إيجاد قياسات في المضلعات المحيطة بدائرة

مثال 5 من واقع الحياة

تصميم: يعمل مصمم نسخة مكبرة من الشعار المثالي المبين في الشكل المجاور. إذا كان $\triangle ABC$ محيطاً بالدائرة G ، فأوجد محيطه.



خطوة 1 أوجد القياسات المجهولة.

بما أن $\triangle ABC$ يحيط بالدائرة G ، فإن $\overline{AD}$ ، $\overline{AE}$ مماسان للدائرة G ، وكذلك $\overline{BE}$ ، $\overline{BF}$ وأيضاً $\overline{CD}$ ، $\overline{CF}$ جميعها مماسات أيضاً.

إذن، $\overline{AE} \cong \overline{AD}$ ، $\overline{BE} \cong \overline{BF}$ ، $\overline{CF} \cong \overline{CD}$.

لذا، فإن $\overline{AE} = \overline{AD} = 8 \text{ ft}$ ، $\overline{BF} = \overline{BE} = 7 \text{ ft}$.

وبتطبيق مسلمة جمع القطع المستقيمة ينتج $\overline{CF} + \overline{FB} = \overline{CB}$

إذن، $\overline{CF} = \overline{CB} - \overline{FB} = 10 - 7 = 3 \text{ ft}$ ، وعليه، فإن $\overline{CD} = \overline{CF} = 3 \text{ ft}$.

خطوة 2 أوجد محيط $\triangle ABC$.

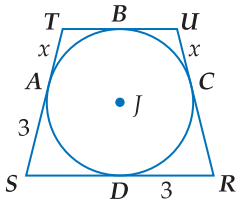
المحيط يساوي:

$$\overline{AE} + \overline{EB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DA} = 8 + 7 + 10 + 3 + 8 = 36$$

إذن محيط $\triangle ABC$ يساوي 36 ft.



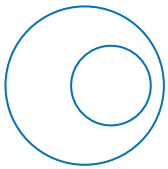
تأكد



5 يُحيط الشكل الرباعي $RSTU$ بالدائرة J ،

إذا كان محيطه يساوي 18 وحدة، فأوجد قيمة x .

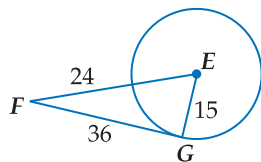
تأكد من فهمك



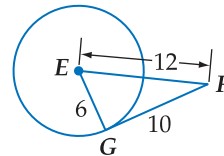
1 انسخ الشكل المجاور في كراستك، ثم ارسم المماسات المشتركة، وإذا لم يوجد مماس مشترك، فاكتب "لا يوجد مماس مشترك".

حدّد إذا كانت $\overline{FG}$ مماساً للدائرة E في الشكلين أدناه. وبرّر إجابتك.

3



2

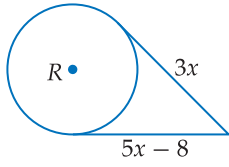


مثال 1
صفحة 155

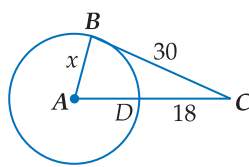
مثال 2
صفحة 156

أوجد قيمة x في كل ممّا يأتي، مفترضاً أن القطعة المستقيمة التي تبدو مماساً للدائرة، هي مماس بالفعل.

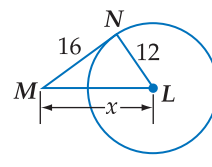
المثالان 3, 4
الصفحتان 156, 157



(6)

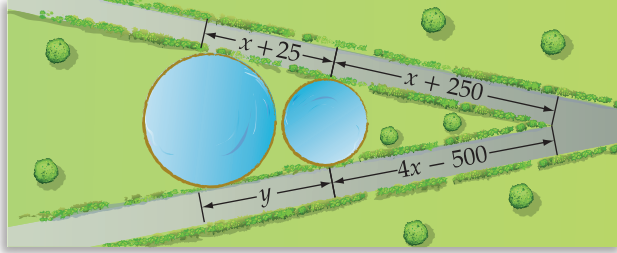


(5)



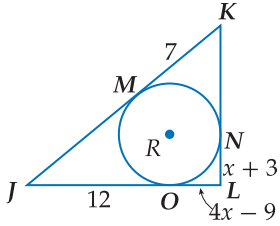
(4)

(7) **هندسة الحدائق:** خطط مهندس ممرين للمشاة يُشكّلان مماسين لبركتين دائريتين كما في الشكل أدناه. إذا كانت الأطوال المعطاة بالأقدام، فأوجد قيمة كل من x ، y .



(8) **جبر:** يُحيط المثلث JKL بالدائرة R كما في الشكل المجاور.

مثال 5
صفحة 158



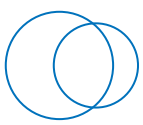
(a) أوجد قيمة x .

(b) أوجد محيط $\triangle JKL$.

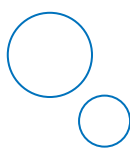
تدرب وحل المسائل

انسخ الأشكال أدناه في كراستك، وارسم المماسات المشتركة، وإذا لم يوجد مماس مشترك، فاكتب "لا يوجد مماس مشترك".

مثال 1
صفحة 155



(12)



(11)



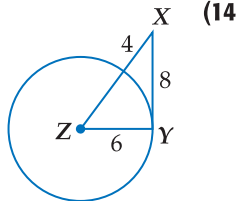
(10)



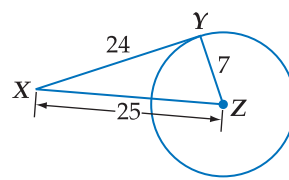
(9)

حدّد إذا كانت $\overline{XY}$ مماساً للدائرة المعطاة في كل من الأشكال أدناه، وبرّر إجابتك.

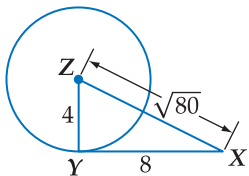
مثال 2
صفحة 156



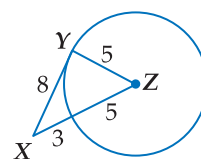
(14)



(13)

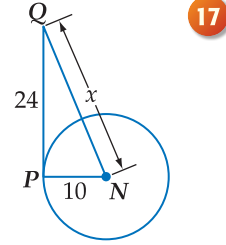
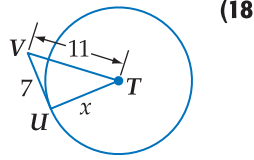
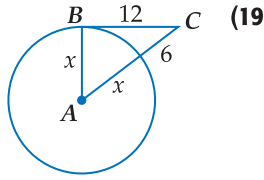


(16)

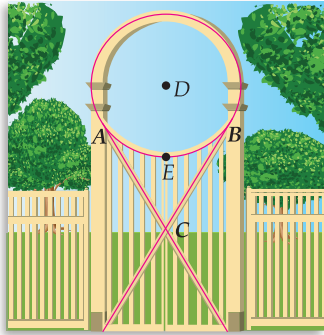
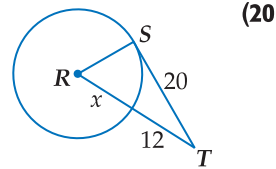
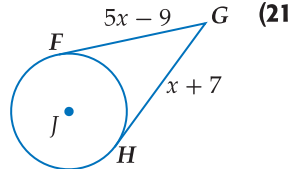
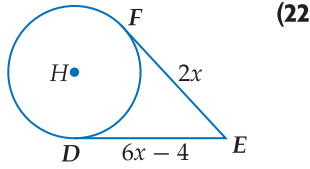


(15)

أوجد قيمة x في كل من الأشكال أدناه، مفترضاً أن القطعة المستقيمة التي تبدو مماساً للدائرة، هي مماس بالفعل. مقرباً الناتج إلى أقرب عُشر.



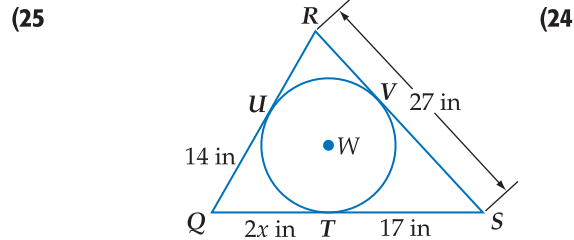
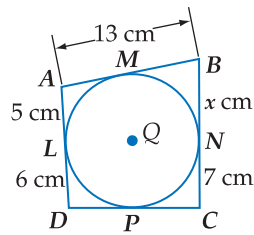
المثالان 3, 4
الصفحتان 156-157



(23) **مدخل البيت:** إذا كانت $\overline{AC}$ ، $\overline{BC}$ مماسات لـ $\odot D$ ، كما في الشكل المجاور، ونصف قطر الدائرة يساوي 26 in، $EC = 20$ in، فأوجد القياسين الآتين، مقرباً الناتج إلى أقرب جزء من مئة.

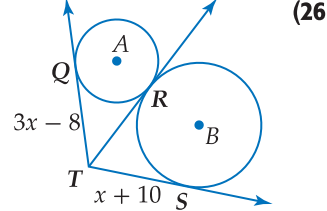
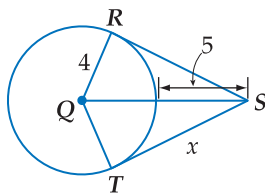
BC (b) AC (a)

أوجد قيمة x ، ثم أوجد محيط المضلع في كل من الشكلين أدناه:



مثال 5
صفحة 156

أوجد قيمة x في كل من الشكلين أدناه. مفترضاً أن القطعة المستقيمة التي تبدو مماساً للدائرة، هي مماس بالفعل. مقرباً الناتج إلى أقرب جزء من مئة، إذا لزم ذلك.



اكتب برهاناً من النوع المحدّد في كل من التمرينين الآتين:

(29) برهاناً ذا عمودين للنظرية 2.11

المعطيات: $\overline{AC}$ مماس للدائرة H عند النقطة C.

$\overline{AB}$ مماس للدائرة H عند النقطة B.

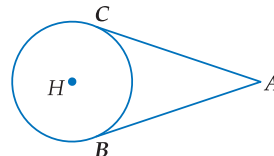
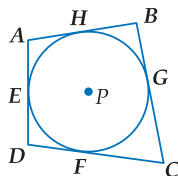
المطلوب: إثبات أن $\overline{AC} \cong \overline{AB}$

برهاناً ذا عمودين

المعطيات: يحيط الشكل الرباعي ABCD

بالدائرة P.

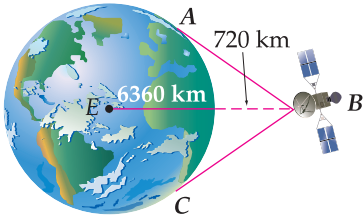
المطلوب: إثبات أن $AB + CD = AD + BC$



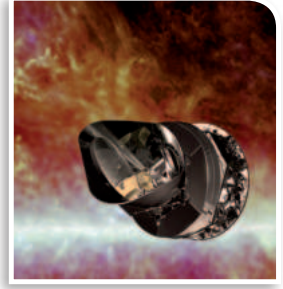
إرشادات للدراسة

تحديد المماسات

لا تفترض أن القطع المستقيمة مماسات لمجرد أنها تبدو في الشكل كذلك، إلا إذا طلب إليك أن تفترضها كذلك في السؤال. فيجب أن يحتوي الشكل على رمز الزاوية القائمة، أو أن تكون الأطوال المبينة على الشكل تؤكد أن الزاوية قائمة.



- 30 أقمار صناعية:** يرتفع قمر صناعي مسافة 720 km عن سطح الأرض التي نصف قطرها 6360 km. ويمكن منه رؤية المنطقة التي تقع بين المماسين $\overline{BA}$ ، $\overline{BC}$ من سطح الأرض. أوجد $\overline{BA}$ مقرباً الناتج إلى أقرب جزء من مئة.



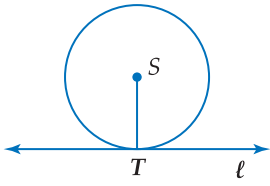
الربط مع واقع الحياة

يوجد أكثر من 8000 قطعة كبيرة من الركام المداري كالأقمار الصناعية التي تدور حول الأرض بسرعة 8 km/sec تقريباً. أما الأجسام التي تبعد عن الأرض أكثر من 700 km فسوف تبقى تدور في مداراتها لمئات، أو آلاف السنين.
المصدر: Tethers Unlimited, Inc.

31

مخلفات الفضاء:

يُشير اسم الركام المداري، إلى مخلفات البعثات الفضائية التي لا تزال تدور حول الأرض. ففي سنة 2007 أُلقي خزان يحتوي 1400 lb من الأمونيا من إحدى البعثات الفضائية. افترض أن خزان الأمونيا يرتفع عن الأرض 435 mi، فما المسافة بين الخزان و الأرض؟ مفترضاً أن نصف قطر الأرض 4000 mi. ومقرباً الناتج إلى أقرب عدد صحيح. ارسم شكلاً يوضح هذا الموقف ضمن إجابتك.



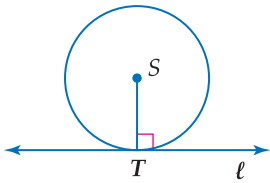
- 32 برهان:** اكتب برهاناً غير مباشر؛ لإثبات أنه إذا كان المستقيم مماساً للدائرة، فإنه يكون عمودياً على نصف قطرها عند نقطة التماس (الجزء 1 من النظرية 3.10)

المعطيات: l مماس للدائرة S عند T، $\overline{ST}$ نصف قطر في $\odot S$.

المطلوب: إثبات أن $l \perp \overline{ST}$

(إرشاد: افترض أن l ليس عمودياً على $\overline{ST}$)

- 33 برهان:** اكتب برهاناً غير مباشر؛ لإثبات أنه إذا كان المستقيم عمودياً على نصف قطر الدائرة عند نقطة طرفه على الدائرة، فإنه مماس لهذه الدائرة. (الجزء 2 من النظرية 3.10)



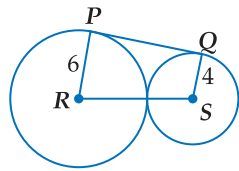
المعطيات: $l \perp \overline{ST}$ ، $\overline{ST}$ نصف قطر في $\odot S$.

المطلوب: إثبات أن l مماس للدائرة S.

(إرشاد: افترض أن l ليس مماساً للدائرة S.)

- 34 إنشاءات هندسية:** أنشئ مماساً للدائرة من نقطة تقع على الدائرة من خلال الخطوات الآتية: ارسم $\odot A$ مستعملاً الفرجار. اختر نقطة P على الدائرة وارسم $\overline{AP}$ ، ثم أنشئ قطعة مستقيمة تمر بالنقطة P، وتكون عمودية على $\overline{AP}$. سمّ المماس t. فسّر كل خطوة وبررها.

مسائل مهارات التفكير العليا



- 35 تحدّ:** $\overline{PQ}$ مماس للدائرتين R، S، كما في الشكل المجاور، أوجد PQ. وفسّر تبريرك.

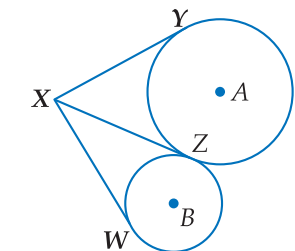
- 36 اكتب:** وضح كل خطوة في الإنشاءات الهندسية الموجود على صفحة 121، وبررها.

- 37 مسألة مفتوحة:** ارسم مثلثاً يُحيط بدائرة، ومثلثاً محاطاً بدائرة.

- 38 تبرير:** $\overline{XZ}$ ، $\overline{XY}$ مماسان للدائرة A.

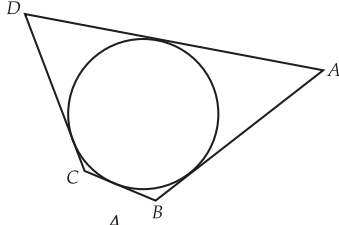
$\overline{XW}$ ، $\overline{XZ}$ مماسان للدائرة B كما في الشكل المجاور، فسّر كيف يمكن أن تكون القطع المستقيمة $\overline{XY}$ ، $\overline{XZ}$ ، $\overline{XW}$ متطابقة رغم أن نصفي القطري الدائرتين مختلفان.

- 39 اكتب:** ما عدد المماسات التي يمكن رسمها من نقطة خارج الدائرة، ومن نقطة على الدائرة، ومن نقطة داخل الدائرة؟ فسّر تبريرك.

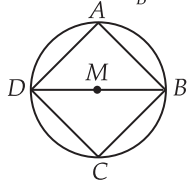


تدريب على اختبار معياري

(42) الشكل الرباعي $ABCD$ يحيط بدائرة، إذا كان $BC = 6$ ، $AB = 19$ ، $CD = 14$ ، كما في الشكل أدناه، فما طول AD ؟



- 20 B 11 A
27 D 25 C

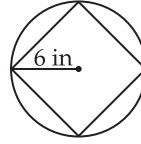


(43) إذا كان $m\angle DBC = 35^\circ$ ، $m\angle ADB = 60^\circ$ في $\odot M$ ، كما في الشكل المجاور، فما قياس $\angle D$ ؟

- 95° G 60° F
115° J 110° H

(40) نصف قطر $\odot P$ يساوي 10 cm، $\overline{ED}$ مماس للدائرة عند D ، وتقع F على $\odot P$ ، وعلى القطعة المستقيمة $\overline{EP}$. إذا كان $ED = 24$ cm، فما طول $\overline{EF}$ ؟

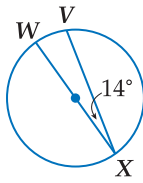
- 21.8 cm C 10 cm A
26 cm D 16 cm B



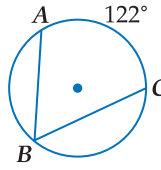
(41) سؤال ذو إجابة قصيرة: رُسم مربع داخل دائرة نصف قطرها 6 in، كما في الشكل المجاور. أوجد طول ضلع المربع.

مراجعة تراكمية

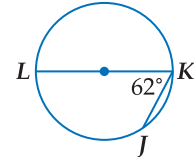
أوجد قياس كل مما يأتي: (الدرس 3-4)



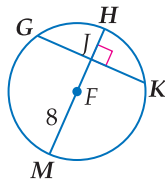
$m\widehat{VX}$ (46)



$m\angle B$ (45)



$m\widehat{JK}$ (44)

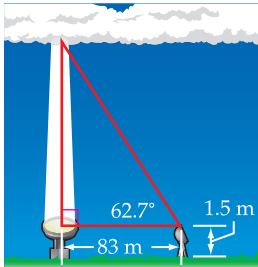


إذا كان $GK = 14$ ، و $m\widehat{GHK} = 142^\circ$ في $\odot F$. فأوجد قياس كل مما يأتي مقرباً الناتج إلى أقرب جزء من مئة. (الدرس 3-3)

$\widehat{JK}$ (48)

$\widehat{GH}$ (47)

$\widehat{KM}$ (49)



(50) علم الأرصاد الجوية: تُسمى قاعدة كتلة من الغيوم عند سطح الأرض "السقف". ولإيجاد ارتفاع السقف في إحدى الليالي وجّه راصد جوي كشافاً ضوئياً رأسياً إلى كتلة غيوم، واستعمل الشيدوللايت وهي آلة بصرية تتكوّن من تلسكوب قابل للدوران يرتفع 1.5 m عند سطح الأرض، بالإضافة إلى كشاف ضوئي يبعد 83 m عن التلسكوب، فوجد أن زاوية الارتفاع تساوي 62.7° . ما ارتفاع السقف؟ (الدرس 2-4)

مراجعة المتطلبات السابقة

حلّ كلّاً من المعادلات الآتية:

$x = \frac{1}{2} [(180 - 64)]$ (53)

$x + 12 = \frac{1}{2} [(180 - 120)]$ (52)

$15 = \frac{1}{2} [(360 - x) - 2x]$ (51)

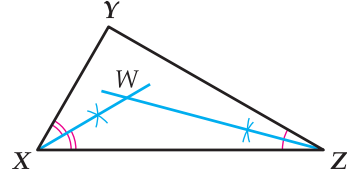
الدوائر المحاطة بمثلث والدوائر المحيطة بمثلث

Inscribed and Circumscribed Circles

لقد تعلمت في دراستك السابقة أن هناك نقاطاً خاصة تنتج من تلاقي مستقيمات عدة في المثلث، ومن هذه النقاط مركز الدائرة التي تمس أضلاع المثلث من الداخل، وهي نقطة تلاقي منصفات زوايا المثلث، وتكون على أبعاد متساوية من أضلاع المثلث.

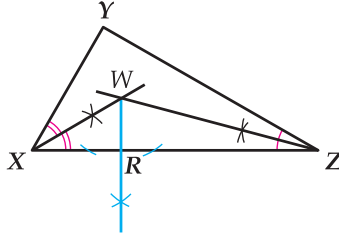
نشاط 1 إنشاء دائرة تمس أضلاع المثلث من الداخل. دائرة محاطة بمثلث

خطوة 1



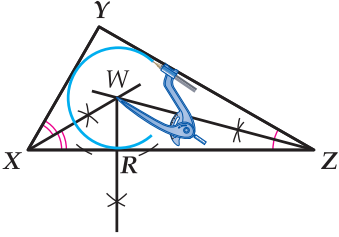
ارسم المثلث XYZ، وأنشئ منصفَي زاويتي فيه؛ لتحديد مركز الدائرة الداخلية للمثلث. ارمز إليه بالرمز W.

خطوة 2



أنشئ قطعة مستقيمة عمودية على أحد أضلاع المثلث من مركز الدائرة الداخلية، وسمّ نقطة التقاطع R.

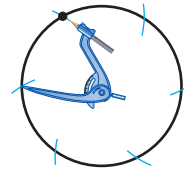
خطوة 3



افتح الفرجار فتحة تساوي طول WR، وركّزه عند النقطة W، وارسم دائرة.

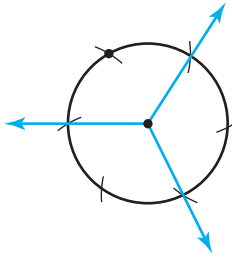
نشاط 2 إنشاء مثلث يحيط بدائرة

خطوة 1



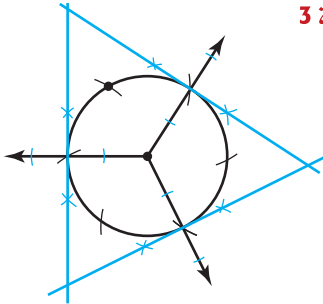
افتح الفرجار فتحة مناسبة، وارسم دائرة، ثم عيّن نقطة عليها. ومن هذه النقطة وبفتحة الفرجار التي استعملتها لرسم الدائرة، ارسم قوساً، ثم كرّر ذلك لترسم خمسة أقواس أخرى كما في الشكل أعلاه.

خطوة 2



ارسم ثلاثة أشعة من مركز الدائرة، كما في الشكل أعلاه.

خطوة 3



ارسم مستقيماً عمودياً على كل شعاع عند نقطة تقاطعه مع الدائرة.

نمذجة وتحليل:

(1) لماذا كان إنشاء عمود على أحد أضلاع المثلث في نشاط 1 ضرورياً؟

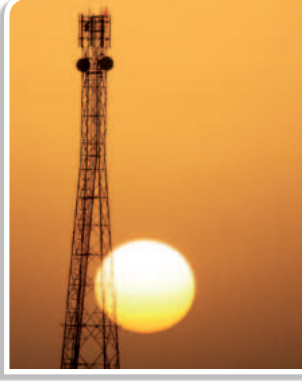
(2) ارسم مثلثاً قائم الزاوية، وارسم دائرة بداخله.

(3) **تحذّر:** ارسم مثلثاً منفرج الزاوية محيطاً بدائرة. وفسّر عملك.

(4) **اكتب:** لماذا تُعدّ عبارة "مركز الدائرة الداخلية للمثلث" مصطلحاً مناسباً للنقطة التي تعرّفها؟

معادلة الدائرة

Equation of a Circle



فيما سبق

درست كتابة معادلة
المستقيم في صيغة
ميل - مقطع وتمثيله
بيانياً.

والآن

الأفكار الرئيسية

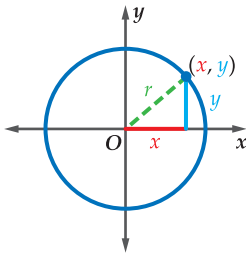
- أكتب معادلة الدائرة.
- أمثل الدائرة في المستوى الإحداثي بيانياً.

المفردات الأساسية

محل هندسي مركب

compound locus

www.obeikaneducation.com



$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

قانون المسافة بين نقطتين

$$r = \sqrt{(x - h)^2 + (y - k)^2}$$

$$d = r, (x_1, y_1) = (h, k), (x_2, y_2) = (x, y)$$

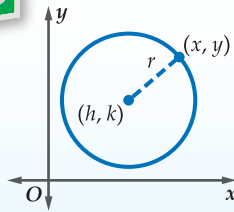
$$r^2 = (x - h)^2 + (y - k)^2$$

بترتيب الطرفين

إذا كانت (x, y) نقطة على دائرة مركزها نقطة الأصل، فإن معادلة هذه الدائرة $x^2 + y^2 = r^2$.

أضف إلى

مطويتك



الصيغة القياسية لمعادلة الدائرة

مفهوم أساسي

الصيغة القياسية لمعادلة الدائرة التي مركزها (h, k) ،
وطول نصف قطرها r هي $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$.

تسمى الصيغة القياسية لمعادلة الدائرة أيضاً صيغة
المركز و نصف القطر.

كتابة معادلة الدائرة باستعمال المركز وطول نصف القطر

مثال 1

أوجد معادلة الدائرة في كل مما يأتي:

(a) مركزها $(1, -8)$ ، وطول نصف قطرها 7.

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

معادلة الدائرة

$$(x - 1)^2 + [y - (-8)]^2 = 7^2$$

$$(h, k) = (1, -8), r = 7$$

$$(x - 1)^2 + (y + 8)^2 = 49$$

بالتبسيط

(b) الدائرة الممثلة بالتمثيل البياني المجاور.

مركز الدائرة $(0, 4)$ ، وطول نصف قطرها 3.

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

معادلة الدائرة

$$(x - 0)^2 + (y - 4)^2 = 3^2$$

$$(h, k) = (0, 4), r = 3$$

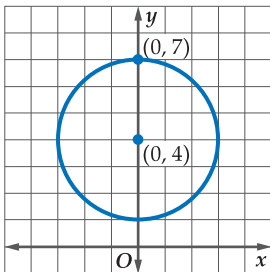
$$x^2 + (y - 4)^2 = 9$$

بالتبسيط

تأكد

أوجد معادلة الدائرة في كل مما يأتي:

(1A) مركزها نقطة الأصل، وطول نصف قطرها $\sqrt{10}$. (1B) مركزها $(4, -1)$ ، وطول قطرها 8.



إرشادات للدراسة

معادلة الدائرة لاحظ
أن معادلة الدائرة بقيت
كما هي في مثال 1، وليس
بالضرورة فك الترتيب.

مثال 2

كتابة معادلة الدائرة باستعمال مركزها ونقطة عليها

أوجد معادلة الدائرة في كل مما يأتي:

(a) مركزها $(-2, 4)$ ، وتمر بالنقطة $(-6, 7)$.

خطوة 1

أوجد المسافة بين نقطتين؛ لإيجاد طول نصف القطر.

قانون المسافة بين نقطتين

$$r = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$= \sqrt{[-6 - (-2)]^2 + (7 - 4)^2}$$

$$= \sqrt{25} = 5$$

بالتبسيط

$$(x_1, y_1) = (-2, 4), (x_2, y_2) = (-6, 7)$$

خطوة 2

اكتب معادلة الدائرة باستعمال $h = -2, k = 4, r = 5$.

معادلة الدائرة

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

$$[x - (-2)]^2 + (y - 4)^2 = 5^2$$

بالتبسيط

$$h = -2, k = 4, r = 5$$

$$(x + 2)^2 + (y - 4)^2 = 25$$

(b) الدائرة الممثلة بالتمثيل البياني المجاور.

خطوة 1

أوجد المسافة بين نقطتين؛ لإيجاد طول نصف القطر.

قانون المسافة بين

نقطتين

$$r = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$= \sqrt{(5 - 3)^2 + [1 - (-2)]^2}$$

$$= \sqrt{13}$$

بالتعويض

بالتبسيط

خطوة 2

اكتب معادلة الدائرة باستعمال $h = 3, k = -2, r = \sqrt{13}$.

معادلة الدائرة

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

$$(x - 3)^2 + [y - (-2)]^2 = (\sqrt{13})^2$$

بالتبسيط

$$h = 3, k = -2, r = \sqrt{13}$$

$$(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 13$$

تأكد

أوجد معادلة الدائرة في كل مما يأتي:

(2A) مركزها $(5, 4)$ ، وتمر بالنقطة $(-3, 4)$.

(2B) مركزها $(-3, -5)$ ، وتمر بالنقطة $(0, 0)$.

تمثيل الدوائر بيانياً يمكنك تحليل معادلة الدائرة؛ لإيجاد معلومات تساعدك على تمثيلها بيانياً في المستوى الإحداثي.

مثال 3

تمثيل الدائرة بيانياً

أوجد مركز وطول نصف قطر الدائرة التي معادلتها $(x - 4)^2 + (y + 1)^2 = 9$ ، ثم مثلها بيانياً.

أعد كتابة المعادلة $(x - 4)^2 + (y + 1)^2 = 9$ ؛ لإيجاد المركز، وطول نصف القطر.

$$(x - 4)^2 + [y - (-1)]^2 = 3^2$$

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

وعليه فإن، $h = 4, k = -1, r = 3$

أي أن مركز الدائرة $(4, -1)$ ، وطول نصف قطرها 3.

تأكد

أوجد المركز وطول نصف القطر لكل دائرة عُلِّمت معادلتها في كل مما يأتي، ثم مثلها بيانياً.

$$(x + 4)^2 + (y - 7)^2 = 25 \quad (3B)$$

$$x^2 + y^2 = 4 \quad (3A)$$

إرشادات للدراسة

صيغة الجذور في

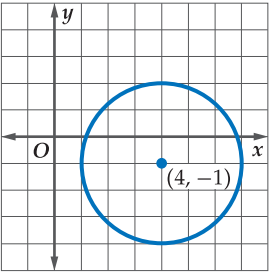
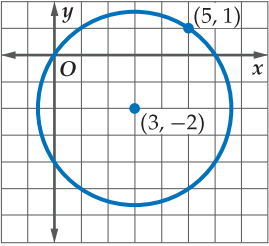
المثال 2b، يمكنك ترك

نصف القطر على صورة

الجذر؛ لأن نصف القطر

سيُربع عند كتابة معادلة

الدائرة.



إرشادات للدراسة

مسلمات إقليدس لقد

درست مسلمات إقليدس

الثلاثة سابقاً. وهناك

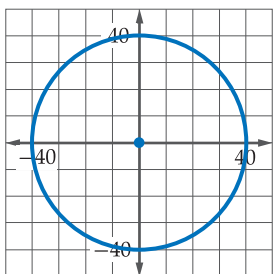
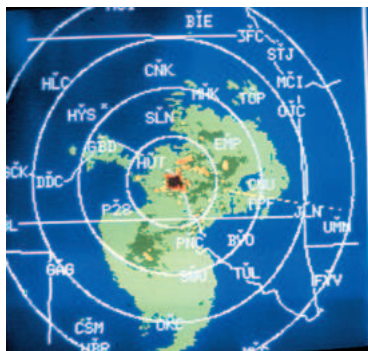
مسلمة أخرى لإقليدس،

وهي أنه باستطاعتك رسم

دائرة وحيدة بنصف قطر

معلوم باختيارك أي نقطة

لتكون مركزاً لهذه الدائرة.



طقس: يراقب علماء الفلك عاصفة جوية باستعمال رادار (Doppler)، وتستعمل شبكة إحداثيات لتحديد موقعها. إذا كان مركز شاشة الرادار يمثل نقطة الأصل، وتبعد الحلقة الأولى 10 mi عن المركز، والبُعد بين كل حلقتين متتاليتين 10 mi أيضًا، كما في الصورة المجاورة، فما معادلة الحلقة الرابعة؟ **افهم** مركز الدوائر (0,0)، وتبعد الدائرة الرابعة 40 mi عن المركز.

خطط ارسم شكلاً تقريبياً يبين هذا الموقف في المستوى الإحداثي، ومنه يمكنك استنتاج أن $r = 40$.

حل اكتب الصورة القياسية لمعادلة الدائرة التي مركزها نقطة الأصل، وطول نصف قطرها r .

$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$x^2 + y^2 = 40^2$$

$$x^2 + y^2 = 1600$$

تحقق اختر نقطة تقع على الدائرة، ثم عوض بإحداثياتها في المعادلة التي توصلت إليها.

مثلاً $(-40,0)$ تقع على الدائرة

$$(-40)^2 + 0^2 \stackrel{?}{=} 1600$$

$$1600 = 1600 \checkmark$$

تأكد ✓

4 بيتزا: يقع محل صنع البيتزا على شبكة الإحداثيات في الموقع $(7, 3)$ ، وتصل خدمة التوصيل المجاني لهذا المحل إلى 5 mi تقريباً. اكتب معادلة الدائرة التي تمثل حدود منطقة خدمة التوصيل المجاني للمحل.



الرابط مع واقع الحياة

يُسجَل 1000 إعصار تقريباً في الولايات المتحدة خلال السنة الواحدة. أكثر هذه الأعاصير تدميراً هي الأعاصير التي تبلغ سرعتها 250 mi/h أو أكثر فقد يصل عرض مسارها التدميري إلى 50 mi. ويمتد إلى 50 mi.

المصدر: National Oceanic & Atmospheric Administration

تأكد من فهمك

المثالان 1, 2

الصفحتان 164, 165

اكتب معادلة الدائرة في كل مما يأتي:

1) مركزها $(9, 0)$ ، وطول نصف قطرها 5

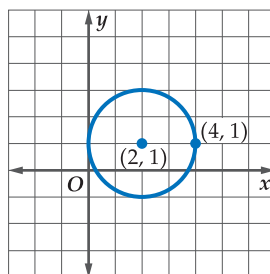
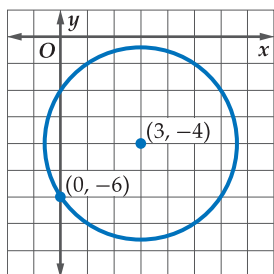
3) مركزها نقطة الأصل، وتمر بالنقطة $(2, 2)$

(5)

2) مركزها $(3, 1)$ ، وطول قطرها 14

4) مركزها $(-5, 3)$ ، وتمر بالنقطة $(1, -4)$

(6)



عَيِّن إحداثي المركز لكل دائرة عُلِّمت معادلتها في كل مما يأتي، وأوجد طول نصف القطر، ثم مثلها بيانياً.

$$x^2 + (y + 1)^2 = 4 \quad (8)$$

$$(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 16 \quad (7)$$

9 طقس: يقع رادار للطقس في النقطة $(55, -58)$ ، وتقع مدينة حمد في نقطة الأصل. إذا كان الرادار يغطي منطقة دائرية طول نصف قطرها 80 وحدة طول، فأوجد معادلة تلك الدائرة، وهل مدينة حمد مشمولة بتأثير ذلك الرادار؟

مثال 3

صفحة 165

مثال 4

صفحة 166

أوجد معادلة الدائرة في كل مما يأتي:

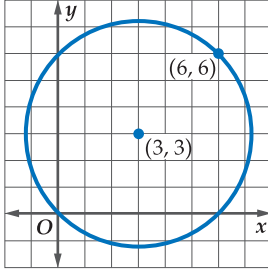
(10) مركزها نقطة الأصل، وطول نصف قطرها 4 (11) مركزها (6, 1)، وطول نصف قطرها 7

(12) مركزها (−2, 0)، وطول قطرها 16 (13) مركزها (8, −9)، وطول نصف قطرها $\sqrt{11}$

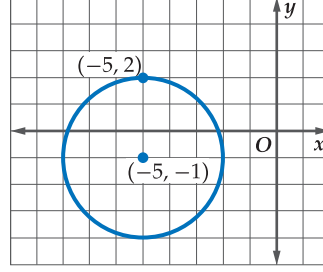
(14) مركزها (−3, 6)، وتمر بالنقطة (0, 6) (15) مركزها (1, −2)، وتمر بالنقطة (3, −4)

المثالان 1, 2

الصفحتان 164, 165



(17)



(16)

أوجد المركز وطول نصف القطر لكل دائرة عُلِّمت معادلتها في كل مما يأتي، ثم مثلها بيانيًا.

(19) $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 4$

(18) $x^2 + y^2 = 36$

(21) $(x - 8)^2 + y^2 = 64$

(20) $(x + 4)^2 + (y - 2)^2 = 16$

مثال 3

صفحة 165

22 طقس: أظهرت شاشة رادار حلقات دائرية مركزها إحدى العواصف. إذا كان مركز شاشة الرادار هو نقطة الأصل، وتبعد كل حلقة عن الحلقة السابقة لها بمقدار 15 mi، فما معادلة الدائرة التي تمثل الحلقة الثالثة؟

23 بَسْتَنَة: يسقي رشاش ماء منطقة دائرية طول قطرها 10 ft. إذا كان بُعد رشاش الماء عن المنزل 20 ft إلى الشمال، ويقع المنزل عند نقطة الأصل، فما معادلة الدائرة التي تمثل المنطقة التي تُسقى؟

مثال 4

صفحة 166

أوجد معادلة الدائرة في كل مما يأتي:

(24) طرفا قطر فيها (0, 4)، (6, −4).

(25) طول قطرها 22 وحدة طول، ومركزها النقطة الناجمة عن انسحاب بمقدار 13 وحدة إلى اليسار، و 6 وحدات إلى أعلى من نقطة الأصل.

26 صواريخ: اختلاف حجم محرك الصاروخ يؤدي إلى وصوله إلى ارتفاعات مختلفة، وكلما

زاد الارتفاع الذي يصل إليه الصاروخ كبرت الدائرة التي سيهبط فيها، وفي ظروف الرياح الطبيعية يكون طول نصف قطر دائرة الهبوط يساوي ثلاثة أمثال ارتفاع الصاروخ.

(a) أوجد معادلة دائرة هبوط صاروخ وصل إلى ارتفاع 300 ft.

(b) ما طول نصف قطر دائرة هبوط صاروخ وصل إلى ارتفاع 1000 ft؟ افترض أن مركز الدائرة هو نقطة الأصل.

(27) **خدمة التوصيل:** قدّم مطعم عَرَضًا للتوصيل المجاني للمناطق التي تبعد عنه 6 km. ويقع المطعم على بُعد 4 km غربًا، و 5 km شمالًا من منزل خالد.

(a) إذا كان منزل خالد يقع عند نقطة الأصل في المستوى الإحداثي، فأوجد المعادلة التي تمثل الموقف ومثلها بيانيًا.

(b) ماذا يمثل هذا المنحنى؟ وهل يمكن أن يحصل خالد على خدمة التوصيل المجاني من هذا المطعم؟ اشرح الطريقة التي عرفت بها.

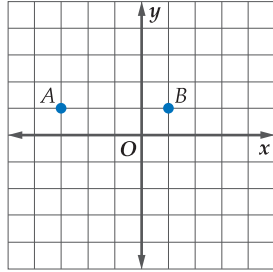
(28) **تمثيلات متعددة:** سوف تستقصي في هذا التمرين **المحل الهندسي المركب** لنقطتين. والمحل الهندسي المركب يحقق أكثر من مجموعة متميزة من الشروط.

(a) **جدولة:** اختر نقطتين A, B في المستوى الإحداثي، واكتب إحداثيات 5 نقاط في المستوى تبعد مسافات متساوية عن كل من A, B .

(b) **تمثيل بياني:** مثل بيانيًا المحل الهندسي لهذه النقاط.

(c) **تعبير لفظي:** صفّ المحل الهندسي لجميع النقاط التي تبعد مسافات متساوية عن زوج من النقاط.

(d) **تمثيل بياني:** استعمل التمثيل البياني الذي حصلت عليه من الفرع b؛ لتحديد المحل الهندسي لجميع النقاط في المستوى التي تبعد مسافة AB عن النقطة B ، ومثلها بيانيًا.



(e) **تعبير لفظي:** صفّ المحل الهندسي لجميع النقاط في المستوى التي تبعد مسافات متساوية عن نقطة واحدة. ثم صفّ المحل الهندسي لجميع النقاط التي تبعد مسافات متساوية عن A, B ، وتبعد مسافة AB عن B . كيف يُمثل المحل الهندسي المركب بيانيًا؟

(29) أوجد مركز وطول نصف قطر الدائرة التي معادلتها $x^2 + 6x + y^2 - 2y = 15$.

(30) إذا كان طرفا أحد أقطار دائرة هما النقطتين $(-6, 15)$ ، $(2, 7)$ ، فأوجد معادلتها.

(31) أوجد معادلة الدائرة التي طول قطرها 12، ويقع مركزها في الربع الثاني من المستوى الإحداثي، وتمسّ كلّاً من المستقيمين $x = 1$ ، $y = -4$.

إرشادات للاختبارات

استعمال الصيغ

تذكر أنه، إذا كان السؤال يوظف المستوى الإحداثي، فعلى استعمال قانوني المسافة ونقطة المنتصف وقانون الميل لحل السؤال، وللتأكد من صحة حلك.

مسائل مهارات التفكير العليا

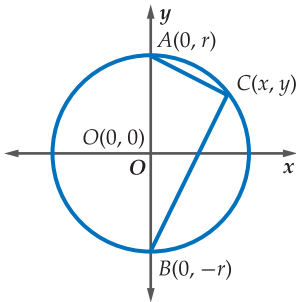
(32) **تحذّر:** اكتب برهانًا إحداثيًا؛ لإثبات أنه إذا قابلت الزاوية المحيطية قطرًا في الدائرة. كما في الشكل المجاور، فإنها تكون قائمة.

(33) **تبرير:** إذا أُجريت إزاحة لمركز الدائرة التي معادلتها $(x - 5)^2 + (y + 7)^2 = 16$ بمقدار 3 وحدات إلى اليمين، و 9 وحدات إلى أعلى، فما معادلتها الجديدة؟ برّر إجابتك.

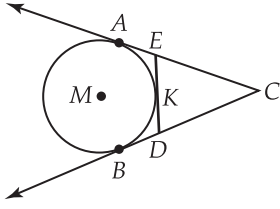
(34) **مسألة مفتوحة:** عيّن ثلاث نقاط في المستوى الإحداثي ليست على استقامة واحدة، وارسم مثلثًا رؤوسه هذه النقاط، ثم أنشئ الدائرة التي تحيط به.

(35) **اكتب:** اشرح العلاقة بين قانون المسافة بين نقطتين، ومعادلة الدائرة.

(36) **اكتب:** إذا سحبت الدائرة مقدار a وحدة إلى اليمين، و b وحدة إلى أسفل، فصّف كيف تتغيّر معادلتها.



(39) إذا كان $\overrightarrow{CB}$ ، $\overrightarrow{CA}$ ، $\overrightarrow{DE}$ مماسات للدائرة M كما في الشكل أدناه، $CB = 6 \text{ cm}$ ، فما محيط $\triangle CED$ ؟



12 cm F

16 cm H

14 cm G

18 cm J

(40) إذا كانت $(-4, 0)$ مركز $\odot F$ ، وطول نصف قطرها 4، فأبي النقاط الآتية تقع على $\odot F$ ؟

(4, 3) C

(4, 0) A

(-4, 4) D

(0, 4) B

(37) أي من المعادلات الآتية تمثل معادلة الدائرة التي مركزها $(6, 5)$ ، وتمر بالنقطة $(2, 8)$ ؟

$(x - 6)^2 + (y - 5)^2 = 5^2$ A

$(x - 5)^2 + (y - 6)^2 = 7^2$ B

$(x + 6)^2 + (y + 5)^2 = 5^2$ C

$(x - 2)^2 + (y - 8)^2 = 7^2$ D

(38) أي من المعادلات الآتية تمثل دائرة مركزها $(-2, 7)$ ، وطول قطرها 18؟

$x^2 + y^2 - 4x + 14y + 53 = 324$ A

$x^2 + y^2 + 4x - 14y + 53 = 81$ B

$x^2 + y^2 - 4x + 14y + 53 = 18$ C

$x^2 + y^2 + 4x - 14y + 53 = 3$ D

مراجعة تراكمية

أوجد الناتج في كل مما يأتي إذا كان ذلك ممكناً: (الدرس 1-2)

(41) $4 \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 8 \end{bmatrix}$

(42) $-2 \begin{bmatrix} 5 & -9 \\ 5 & 11 \end{bmatrix} - 6 \begin{bmatrix} 3 & -7 \\ -5 & 8 \end{bmatrix}$

(43) $\begin{bmatrix} 2 & -6 \\ -4 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -2 & 6 & 4 \end{bmatrix}$

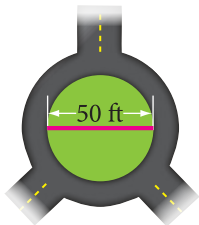
استعمل قاعدة كرامر لحل كل نظام من المعادلات مما يأتي: (الدرس 1-4)

(45) $2x + 5y = 17$

(44) $2y - 3x = -8$

$3x - 2y = -3$

$x + y = 6$



(46) شوارع: يسكن فارس بالقرب من دوار تتوسطه حديقة، إذا ركب دراجته الهوائية، ودار مرة واحدة حول حافة الحديقة التي تتوسط الدوار، كما في الشكل المجاور، فما المسافة التي قطعها على دراجته؟ (الدرس 3-1)

ملخص الفصل

مفاهيم أساسية

الدائرة ومحيطها (الدرس 1-3)

- محيط الدائرة يساوي πd أو $2\pi r$.

الزوايا والأقواس والأوتار والزوايا المحيطية (الدروس 2-3 إلى 4-3)

- مجموع قياسات الزوايا المركزية في الدائرة يساوي 360° .
- طول القوس يتناسب مع طول المحيط.
- الأقطار العمودية على الأوتار تنصفها وتنصف الأقواس المقابلة لها.
- قياس الزاوية المحيطية يساوي نصف قياس القوس المحدود بها.

المماس والقاطع وقياس الزوايا (الدرس 5-3)

- يقطع المماس الدائرة في نقطة واحدة فقط، ويكون عمودياً على نصف القطر المار في نقطة التماس.
- مماسا الدائرة المرسومان من نقطة واحدة خارجها يكونان متطابقين.

معادلة الدائرة (الدرس 6-3)

- معادلة الدائرة التي مركزها (h, k) ، وطول نصف قطرها r هي: $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

المفردات الأساسية

الدائرة ص 120	القوس الأصغر ص 130
المركز ص 120	القوس الأكبر ص 130
نصف القطر ص 120	نصف الدائرة ص 130
الوتر ص 120	الأقواس المتطابقة ص 130
القطر ص 120	الأقواس المتجاورة ص 131
الدوائر المتطابقة ص 121	طول القوس ص 132
الدوائر المتحدة بالمركز ص 121	الزاوية المحيطية ص 147
محيط الدائرة ص 122	القوس المحدود ص 147
باي (π) ص 122	المماس ص 155
محاطاً بـ ص 123	نقطة التماس ص 155
مُحيطة بـ ص 123	المماس المشترك ص 155
الزاوية المركزية ص 129	المحل الهندسي المركب ص 164
القوس ص 129	

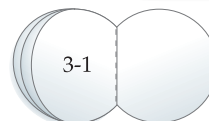
اختبر مفرداتك

بيّن ما إذا كانت العبارات الآتية صحيحة، أو خاطئة. وإذا كانت خاطئة فاستبدل بما تحته خط لتصبح العبارة صحيحة.

- (1) أي قطعة مستقيمة يقع طرفاها على الدائرة هي نصف قطر للدائرة.
- (2) الوتر المار بمركز الدائرة هو قطر فيها.
- (3) الزاوية المركزية يقع رأسها عند مركز الدائرة، وضلعاها نصفا قطرين في الدائرة.
- (4) القوس الذي قياسه أقل من 180° هو القوس الأكبر.
- (5) القوس المحدود هو القوس الذي يقع طرفاه على ضلعي الزاوية المحيطية، ويقع داخلها.
- (6) المماس المشترك هو النقطة التي يتقاطع فيها مستقيم مع دائرة في المستوى نفسه.
- (7) المماس هو المستقيم الذي يقطع الدائرة في نقطتين.
- (8) الزاوية المحيطية هي زاوية يقع رأسها في المركز وضلعاها نصفا قطرين في الدائرة.
- (9) تكون الدائرتان متحدتين بالمركز إذا وفقط إذا كان نصفا قطريهما متطابقين.

منظم أفكار

مطويتك



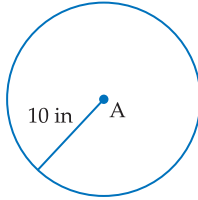
تأكد من أن المفاهيم الأساسية مدونة في مطويتك.

دليل الدراسة والمراجعة

مراجعة الدروس

3-1 الدائرة ومحيطها (الصفحات 120-128)

مثال 1

أوجد محيط $\odot A$ أدناه.

$$C = 2\pi r$$

صيغة محيط الدائرة

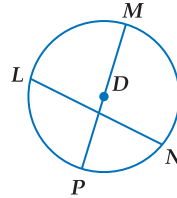
$$= 2\pi(10)$$

بالتعويض

$$\approx 62.83$$

باستعمال الآلة الحاسبة

محيط $\odot A$ يساوي 62.83 in تقريبًا.

لحل التمارين 10-12، ارجع إلى $\odot D$:

(10) سمّ الدائرة.

(11) سمّ نصف قطر للدائرة.

(12) سمّ وترًا لا يكون قطرًا.

أوجد طول قطر الدائرة، وطول نصف قطرها التي عُلِمَ محيطها في كل مما يأتي، مقربًا الناتج إلى أقرب جزء من مئة.

$$C = 26.7 \text{ yd} \quad (14)$$

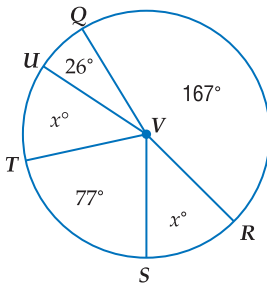
$$C = 43 \text{ cm} \quad (13)$$

$$C = 225.9 \text{ mm} \quad (16)$$

$$C = 108.5 \text{ ft} \quad (15)$$

3-2 قياس الزوايا والأقواس (الصفحات 129-137)

مثال 2

أوجد قيمة x في الشكل أدناه.

$$m\angle QVR + m\angle RVS + m\angle SVT + m\angle TVU + m\angle UVQ = 360^\circ$$

مجموع قياسات الزوايا المركزية

$$167^\circ + x + 77^\circ + x + 26^\circ = 360^\circ$$

بالتعويض

$$270^\circ + 2x = 360^\circ$$

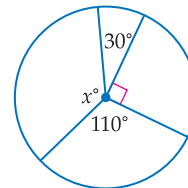
بالتبسيط

$$2x = 90^\circ$$

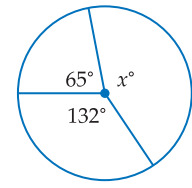
بالطرح

$$x = 45^\circ$$

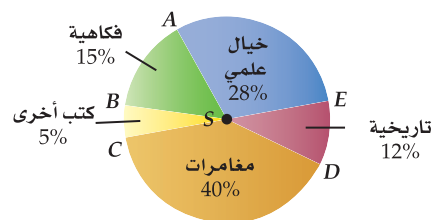
بالقسمة

أوجد قيمة x في كل من الشكلين أدناه.

(18)



(17)

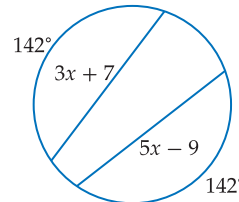
(19) **كتب:** أجرى المعلم محمود استطلاعًا لطلبته حول نوعية الكتب التي يفضلون قراءتها، ومثل النتائج التي حصل عليها بالقطاعات الدائرية، كما في الشكل أدناه. أجب عما يأتي:أنواع الكتب التي يفضلها
طلبة المعلم محمود(a) أوجد $m\widehat{AE}$ (b) أوجد $m\widehat{BC}$

(c) صف نوع القوس الذي تمثله فئة المغامرات.

دليل الدراسة والمراجعة

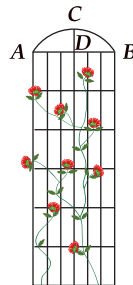
3-3 الأقواس والأوتار (الصفحات 138-145)

(20) أوجد قيمة x في الشكل أدناه.



إذا كان $MN = 16$ ، $m\widehat{MLN} = 98^\circ$ في $\odot K$ ، فأوجد قياس كل ممّا يأتي مقرباً الناتج إلى أقرب جزء من مئة:

(21) $\widehat{LN}$ (22) $\widehat{LN}$

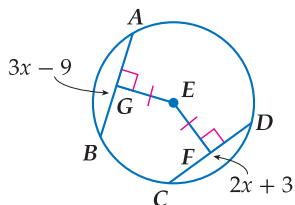


(23) **بستنة:** يُبين الشكل المجاور عريشة

يعلوها قوس من دائرة، إذا كانت $\widehat{CD}$ جزءاً من قطرها، و $m\widehat{ACB}$ يساوي 28% من الدائرة كاملة، فأوجد $m\widehat{CB}$ ؟

مثال 3

جبر: إذا كان $EG = EF$ في $\odot E$ ، فأوجد AB .



بما أن الوترين $\overline{EG}$ ، $\overline{EF}$ متطابقان، فإن بُعديهما عن E متساويان إذن، $AB = CD$.

نظرية 2.5 $AB = CD$

بالتعويض $3x - 9 = 2x + 3$

بإضافة 9 للطرفين $3x = 2x + 12$

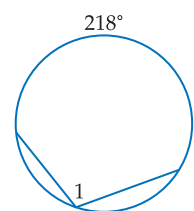
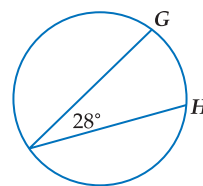
بطرح $2x$ من الطرفين $x = 12$

إذن، $AB = 3(12) - 9 = 27$.

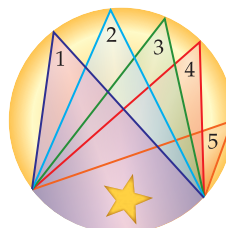
3-4 الزوايا المحيطية (الصفحات 147-154)

أوجد كلاً من القياسين الآتيين في كل شكل مما يأتي:

(24) $\angle 1$ (25) $\widehat{GH}$

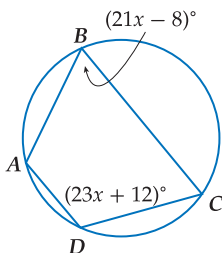


(26) **تسويق:** إذا كان $m\angle 1 = 42^\circ$ في الشعار المجاور، فأوجد $m\angle 5$.



مثال 4

أوجد $m\angle B$ ، $m\angle D$ في الشكل المجاور.



بما أن $ABCD$ محاط بدائرة، فالزوايتان المتقابلتان متكاملتان.

تعريف الزوايا المتكاملة $m\angle D + m\angle B = 180^\circ$

بالتعويض $23x + 12^\circ + 21x - 8^\circ = 180^\circ$

بالتبسيط $44x + 4^\circ = 180^\circ$

بالطرح $44x = 176^\circ$

بالقسمة $x = 4^\circ$

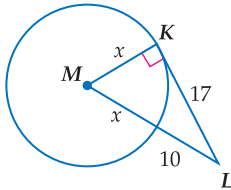
إذن، $m\angle D = (23(4) + 12)^\circ = 104^\circ$

$m\angle B = (21(4) - 8)^\circ = 76^\circ$

3-5 المماسات (الصفحات 155-169)

مثال 5

إذا كانت $\overline{KL}$ مماساً للدائرة M عند K ، كما في الشكل أدناه، فأوجد قيمة x .



من النظرية 2.9 $\overline{MK} \perp \overline{KL}$. إذن، $\triangle MKL$ قائم الزاوية.

$$KM^2 + KL^2 = ML^2$$

نظرية فيثاغورس

$$x^2 + 17^2 = (x + 10)^2$$

بالتعويض

$$x^2 + 289 = x^2 + 20x + 100$$

بالضرب

$$289 = 20x + 100$$

بالتبسيط

$$189 = 20x$$

بالطرح

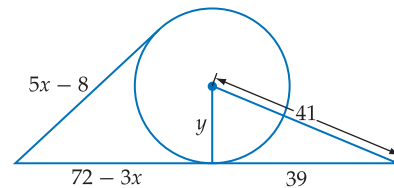
$$9.45 = x$$

بالقسمة

(27) **خيال علمي:** كتب جابر قصة قصيرة، وذكر فيها أن الانتقال أو السفر الفوري بين كوكب معين ثنائي الأبعاد وقمره يكون ممكناً، إذا كان مسار الانتقال مماساً. انسخ الشكل أدناه في كراستك، وارسم جميع المسارات الممكنة. **انظر الهامش**



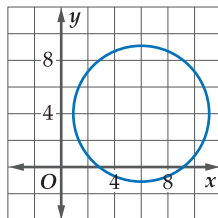
(28) أوجد قيمة كل من x ، y ، مفترضاً أن القطع المستقيمة التي تبدو مماسات للدائرة هي مماسات فعلاً، مقرباً الناتج إلى أقرب عُشر.



3-6 معادلة الدائرة (الصفحات 164-169)

مثال 6

اكتب معادلة الدائرة الممثلة بالتمثيل البياني أدناه:



المركز $(6, 4)$ ، وطول نصف قطرها 5.

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

معادلة الدائرة

$$(x - 6)^2 + (y - 4)^2 = 5^2$$

$(h, k) = (6, 4), r = 5$

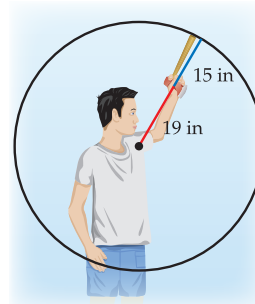
$$(x - 6)^2 + (y - 4)^2 = 25$$

بالتبسيط

اكتب معادلة كل من الدائرتين الآتيتين، إذا علم:

(29) المركز $(-2, 4)$ ، وطول نصف القطر 5

(30) المركز $(1, 2)$ ، وطول قطرها 14



(31) **أخشاب:** يتعلم أحمد في موقع

تدريب خارج البيت إجراءات

السلامة عند قطع الأخشاب، و

يتضمن التدريب تكوين دائرة

بذراعه الممدودة؛ للتأكد من

عدم إصابة أي شيء فوقه عندما

يقطع الأخشاب. إذا كان امتداد

ذراعه يصل إلى 19 in، وطول مقبض آلة قطع الخشب 15 in،

فما معادلة دائرة السلامة بالنسبة إلى أحمد؟

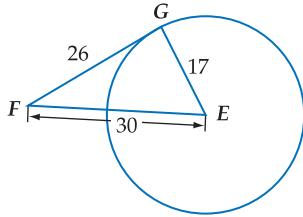
اختبار الفصل

(9) **اختيار من متعدد:** ما عدد النقاط المشتركة بين الدائرتين المتحنتين بالمركز؟

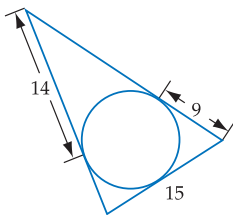
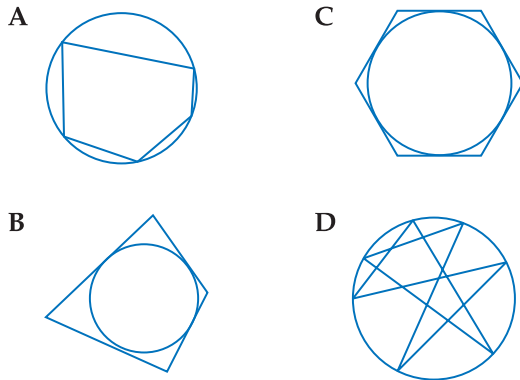
0 A 2 C

1 B D عدد لا نهائي من النقاط

(10) حدّد ما إذا كانت $\overline{FG}$ مماسًا لـ $\odot E$ في الشكل أدناه. برّر إجابتك.



(11) **اختيار من متعدد:** أي من الأشكال أدناه يُمثّل مضلعًا يُحيط بدائرة؟

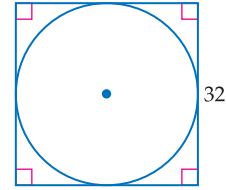


(12) أوجد محيط المثلث في الشكل المجاور مفترضًا أن القطع المستقيمة التي تبدو مماسات للدائرة هي مماسات فعلاً.

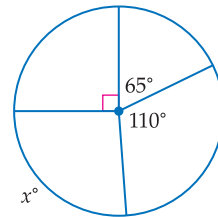
(13) **أزهار:** أرادت حليلة أن تحوّل جذع شجرة بحوض من الأزهار. إذا كان مركز جذع الشجرة هو نقطة الأصل، وأرادت حليلة أن يمتد الحوض 3 ft من مركز الشجرة، فما المعادلة التي تُمثّل حوض الأزهار؟

(1) **برك سباحة:** عمق بركة سباحة دائرية الشكل في مركز رياضي 4 ft ، وطول قطرها 25 ft. أوجد محيط هذه البركة إلى أقرب قدم؟

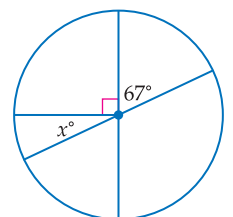
(2) أوجد المحيط الفعلي للدائرة في الشكل أدناه:



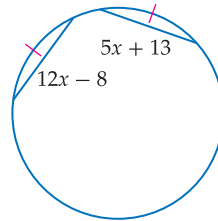
أوجد قيمة x في كل شكل أدناه .



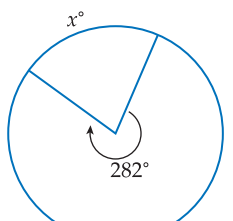
(4)



(3)

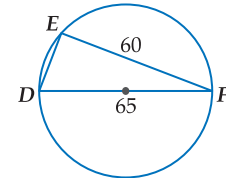


(6)



(5)

(7) **اختيار من متعدد:** ما طول $\overline{ED}$ في الشكل أدناه؟



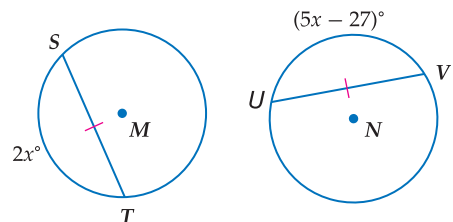
25 C

5 A

88.5 D

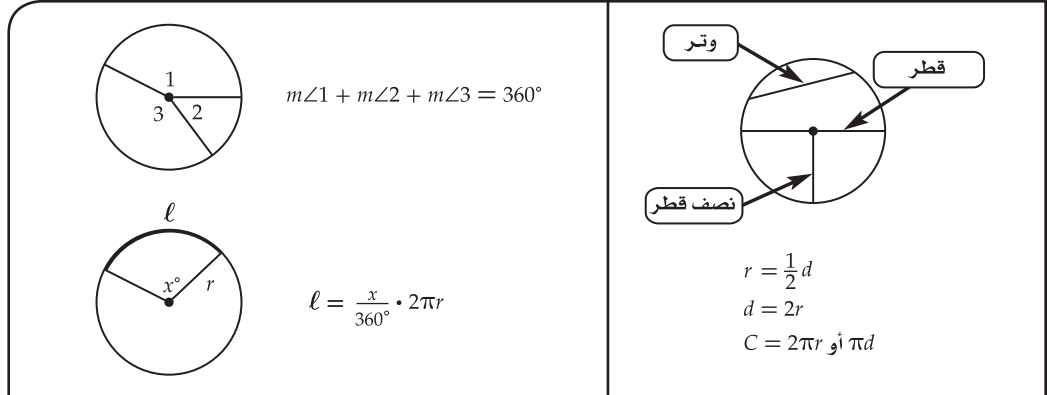
15 B

(8) إذا كانت $\odot M \cong \odot N$ ، فأوجد قيمة x .



خصائص الدائرة

الدائرة هي الشكل الوحيد الذي تكون فيه للزوايا والأقواس والقطع المستقيمة التي تقطعها خصائص وعلاقات خاصة. ويُفترض أن تكون قادرًا على تعيين عناصر الدائرة، وكتابة معادلتها، وإيجاد قياسات الأقواس والزوايا والقطع المستقيمة في الدائرة.



استراتيجية لتطبيق خصائص الدائرة

الخطوة 1

مراجعة عناصر الدائرة والعلاقات بينها.

- تتضمن العناصر الأساسية: نصف القطر والوتر والوتر والوتر والوتر والوتر والوتر والوتر.
- ادرس النظريات الأساسية للدائرة وخصائصها، بالإضافة إلى العلاقة بين عناصرها.

الخطوة 2

- أقرأ نص المسألة، وادرس أي شكل مُعطى بدقة وعناية.
- حدّد المطلوب من المسألة.
- ضع على الشكل المعلومات التي تتضمنها المسألة، وأي معلومات أخرى يمكن أن تحدّد لها.
- حدّد أي النظريات أو الخصائص التي يمكن تطبيقها في حالة هذه المسألة.

الخطوة 3

- حلّ المسألة، وتحقّق من حلّك.
- طبّق النظريات أو الخصائص لحلّ المسألة.
- تحقّق من إجابتك وتأكد من كونها مقبولة ومنطقية.

التهيئة للاختبارات المعيارية

مثال

اقرأ المسألة، وحدد المطلوب، ثم استعمل المعطيات لحلّها.

ما قيمة x في الشكل المجاور؟

2 A	4 C
3 B	6 D

اقرأ السؤال، وادرس الشكل جيدًا. أُعطيت دائرة فيها وتران مقابلان لقوسين متطابقين، ويكون الوتران متطابقين إذا وفقط إذا كان القوسان الأصغران المقابلان لهما متطابقين. ويمكنك استعمال هذه الخاصية؛ لتكوين معادلة بدلالة x ، ومن ثم حلّها.

$$4x - 2 = 6x - 10$$

تعريف القطع المتطابقة

$$4x - 6x = -10 + 2$$

بالطرح

$$-2x = -8$$

بالتبسيط

$$\frac{-2x}{-2} = \frac{-8}{-2}$$

بقسمة كل من الطرفين على -2

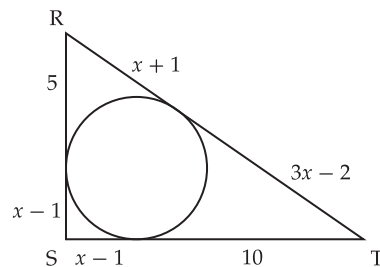
$$x = 4$$

بالتبسيط

إذن، قيمة x تساوي 4، أي أن البديل الصحيح هو C. تحقّق من إجابتك بتعويض 4 في كلّ من تعبيرَي الوترين، فتجد أن طولي الوترين متساويان.

تمارين

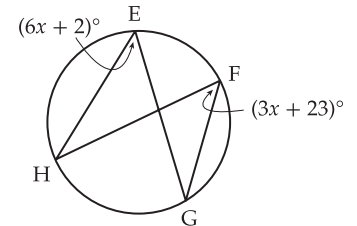
15 يحيط المثلث RST بالدائرة في الشكل أدناه. ما محيط هذا المثلث؟



- | | |
|-----------|-----------|
| H 37 وحدة | F 33 وحدة |
| J 40 وحدة | G 36 وحدة |

اقرأ المسألة، وحدد المطلوب، ثم استعمل المعلومات المعطاة لحلّها.

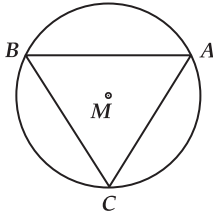
14 ما قيمة x في الشكل أدناه؟



- | | |
|-----|-----|
| C 6 | A 4 |
| D 7 | B 5 |

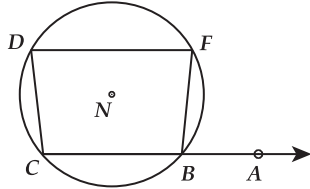
أسئلة الاختيار من متعدد

(4) إذا كان $\widehat{AB} \cong \widehat{BC} \cong \widehat{CA}$ في $\odot M$ ، كما في الشكل أدناه، فما قياس $\angle ACB$ ؟



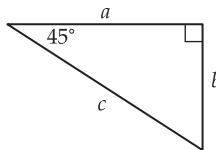
- A** 30° **C** 90°
B 60° **D** 120°

(5) إذا كان $m\angle FBA = 75^\circ$ في $\odot N$ ، $\overrightarrow{CA} \parallel \overrightarrow{DF}$ ، كما في الشكل أدناه، فما قياس $\angle BCD$ ؟



- A** 75° **C** 105°
B 85° **D** 115°

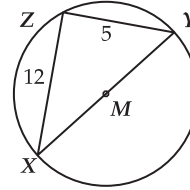
(6) إذا كان $a = 5\sqrt{2}$ في المثلث قائم الزاوية أدناه، فما قيمة c ؟



- A** $5\sqrt{6}$ **C** 5
B $10\sqrt{2}$ **D** 10

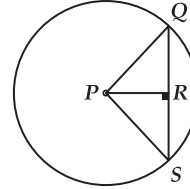
اختر رمز الإجابة الصحيحة في كل مما يأتي:

(1) إذا كانت $\overline{XY}$ قطرًا في الدائرة M كما في الشكل أدناه، فما محيطها ؟



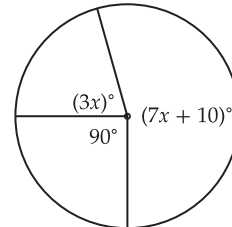
- A** 5π **C** 7.5π
B 7π **D** 13π

(2) إذا كان طول نصف قطر $\odot P$ يساوي 5، $PR = 3$ كما في الشكل أدناه، فما طول $\overline{QS}$ ؟



- A** 4 **C** 8
B 5 **D** 10

(3) ما قيمة x في الشكل أدناه ؟



- A** 19 **C** 26
B 23 **D** 28

إرشادات للاختبارات

سؤال 3 استعمل خصائص الدائرة لكتابة المعادلة، وحلها لإيجاد قيمة x .

(8) إذا كانت $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ وكانت X مصفوفة

رتبتها 2×2 ، بحيث $X = 2A - B$ ، فإن:

$X = -2B$ **C**

$X = 3B$ **A**

$X = 3A$ **D**

$X = 2A$ **B**

(7) ما قيمة / قيم x التي تجعل $\begin{vmatrix} x & 3 \\ 12 & x \end{vmatrix} = 0$ ؟

$-6, 6$ **C**

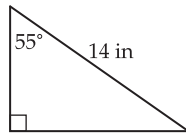
-6 **A**

36 **D**

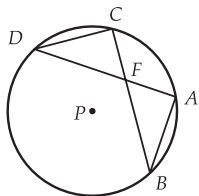
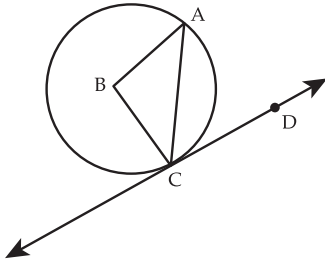
6 **B**

أسئلة مقالية

(12) ما محيط المثلث القائم الزاوية في الشكل أدناه مقرباً الناتج إلى أقرب عُشر؟



(13) $\overleftrightarrow{CD}$ مماس للدائرة B عند النقطة C ، $\overline{BC}$ نصف قطر في الدائرة. إذا كان $m\angle ACB = 35^\circ$ كما في الشكل أدناه، فأوجد $m\angle ACD$ ؟



(14) اكتب برهاناً ذا عمودين مستعملاً الشكل المجاور.

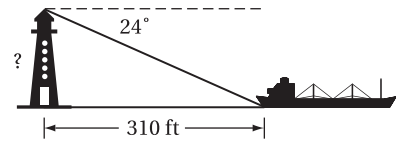
المعطيات: $\odot P$

المطلوب: إثبات أن $\triangle AFB \sim \triangle CFD$ ؟

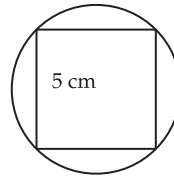
أسئلة ذات إجابات قصيرة

سجل إجاباتك على ورقة .

(9) تبعد سفينة مبحرة عن أسفل قاعدة منارة على الشاطئ مسافة 310 ft كما في الشكل أدناه. إذا علمت أن زاوية انخفاض السفينة من أعلى المنارة تساوي 24° ، فما ارتفاع المنارة بالأقدام مقرباً الناتج إلى أقرب جزء من عشرة؟



$\sin 24^\circ \approx 0.41$
 $\cos 24^\circ \approx 0.91$
 $\tan 24^\circ \approx 0.45$



(10) رُسم مربع طول ضلعه 5 cm داخل دائرة. ما محيط هذه الدائرة مقرباً الناتج إلى أقرب عُشر سنتيمتر؟

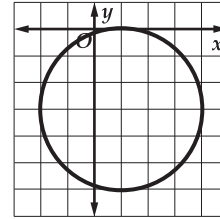
(11) أوجد XY إذا كانت:

$X = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ $Y = \begin{bmatrix} 21 \\ 9 \end{bmatrix}$

أسئلة ذات إجابات مطولة

أجب عما يأتي موضِّحًا خطوات الحل:

(15) استعمل الدائرة في الشكل أدناه؛ لحل الأسئلة الآتية:



(a) ما مركز هذه الدائرة؟

(b) ما طول نصف قطر هذه الدائرة؟

(c) اكتب معادلة هذه الدائرة.

(16) اشترت هند 40 طابعة من نوعين مختلفين: حبر، وليزر بقيمة BD 11600، إذا كان سعر طابعة الحبر BD 200 وسعر طابعة الليزر BD 500، فأجب عن الفقرات الآتية:

(a) اكتب نظام معادلات يصف الموقف، بحيث x عدد طابعات الحبر، y عدد طابعات الليزر.

(b) حل نظام المعادلات في الفرع a باستعمال قاعدة كرامر، لإيجاد عدد طابعات الحبر وعدد طابعات الليزر.

هل تحتاج إلى مساعدة إضافية؟																
16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	إذا لم تستطع الإجابة عن سؤال ...
1-4	3-6	3-5	3-5	2-3	1-3	3-1	2-4	1-2	1-4	2-3	3-4	3-4	3-2	3-3	3-1	اذهب إلى الدرس ...

الهندسة الإحداثية

$d = a - b $	المسافة على خط الأعداد
$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$	المسافة في المستوى الإحداثي
$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$	المسافة في الفراغ
$\ell = \frac{x}{360^\circ} \cdot 2\pi r$	طول القوس
$M = \frac{a + b}{2}$	نقطة المنتصف على خط الأعداد
$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$	نقطة المنتصف في المستوى الإحداثي
$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$	نقطة المنتصف في الفراغ

المحيط

$C = \pi d$ أو $C = 2\pi r$	الدائرة	$P = 2\ell + 2w$	المستطيل	$P = 4s$	المربع
-----------------------------	---------	------------------	----------	----------	--------

المساحة

$A = \frac{1}{2}d_1d_2$ أو $A = bh$	المُعيّن	$A = s^2$	المربع
$A = \frac{1}{2}bh$	المثلث	$A = \ell w$ أو $A = bh$	المستطيل
$A = \frac{1}{2}Pa$	المضلع المنتظم	$A = bh$	متوازي الأضلاع
$A = \pi r^2$	الدائرة	$A = \frac{1}{2}h(b_1 + b_2)$	شبه المنحرف

المساحة الجانبية

$L = \frac{1}{2}P\ell$	الهرم	$L = Ph$	المنشور
$L = \pi r\ell$	المخروط	$L = 2\pi rh$	الأسطوانة

المساحة السطحية

$T = \pi r\ell + \pi r^2$	المخروط	$T = Ph + 2B$	المنشور
$T = 4\pi r^2$	الكرة	$T = 2\pi rh + 2\pi r^2$	الأسطوانة
		$T = \frac{1}{2}P\ell + B$	الهرم

الحجم

$V = \frac{1}{3}Bh$	الهرم	$V = s^3$	المكعب
$V = \frac{1}{3}\pi r^2h$	المخروط	$V = \ell wh$	متوازي المستطيلات
		$V = Bh$	المنشور
$V = \frac{4}{3}\pi r^3$	الكرة	$V = \pi r^2h$	الأسطوانة

المعادلات في المستوى الإحداثي

$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$	معادلة الدائرة
-------------------------------	----------------

حساب المثلثات

$$\sin \theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$$

$$\cos \theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$$

$$\tan \theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$$

النسب
المثلثية

$$a^2 + b^2 = c^2$$

نظرية
فيثاغورس

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

قانون الجيب

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

قانون جيب
التمام

المصفوفات

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{bmatrix}$$

الجمع

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a-e & b-f \\ c-g & d-h \end{bmatrix}$$

الطرح

$$k \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{bmatrix}$$

الضرب في
عدد ثابت

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{bmatrix}$$

الضرب

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

محدد من
الرتبة الثانية

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + cdh - ceg - afh - bdi$$

محدد من الرتبة
الثالثة (قاعدة
الأقطار)

$$\begin{vmatrix} a & b & 1 \\ c & d & 1 \\ e & f & 1 \end{vmatrix}$$

مساحة مثلث رؤوسه
(a,b),(c,d),(e,f)

الارتفاع	h	A'	صورة عن A	$\sin x$	الجيب
زاوية	$\angle$	$<$	أصغر من	ℓ	المستقيم ℓ ، طول المستقيم،
زوايا	$\sphericalangle$	$\leq$	أصغر من أو يساوي		طول القوس، الارتفاع الجانبي
مساوٍ تقريباً	$\approx$	L	المساحة الجانبية	$\tan x$	الظل
القوس الأصغر الذي طرفاه B و A	$\widehat{AB}$	$\overrightarrow{DE}$	مستقيم يمر بالنقطتين E و D	T	مساحة السطح الكلية
القوس الأكبر الذي طرفاه C و A	$\widehat{ABC}$	$m\angle A$	قياس الزاوية A بالدرجات	Δ	المثلث
مساحة سطح المضلع، أو الدائرة، أو مساحة سطح الكرة	A	$m\widehat{AB}$	قياس القوس AB بالدرجات	V	الحجم
مساحة قاعدة المنشور، أو الأسطوانة، أو الهرم، أو المخروط	B	M	نقطة المنتصف	w	عرض المستطيل
قاعدة المثلث، أو متوازي الأضلاع، أو شبه المنحرف	b	$\sqrt{\quad}$	الجذر التربيعي الموجب	$\pm$	موجب أو سالب
دائرة مركزها P	$\odot P$	(x, y)	الزوج المرتب	$-a$	المعكوس الجمعي لـ a أو النظير الجمعي لـ a
محيط الدائرة	C	(x, y, z)	الثلاثي المرتب	$ a $	القيمة المطلقة للعدد a
مطابق لـ	$\cong$	$\parallel$	موازي لـ	km	كيلومتر
جيب التمام	$\cos x$	$\nparallel$	ليس موازياً لـ	m	متر
درجة	$^\circ$	$\square$	متوازي أضلاع	cm	سنتيمتر
قطر الدائرة، المسافة	d	P	المحيط	mm	مليمتر
المسافة بين النقطتين A و B	AB	$\perp$	عمودي على	mi	ميل
يساوي	$=$	π	باي النسبة التقريبية	yd	ياردة
لا يساوي	$\neq$	$n\text{-gon}$	مضلع له n من الأضلاع	ft	قدم
أكبر من	$>$	r	نصف قطر الدائرة	in	بوصة
أكبر من أو يساوي	$\geq$	$\overrightarrow{PQ}$	شعاع بدايته النقطة P ، ويمر بالنقطة Q	kg	كيلوجرام
		$\overline{RS}$	قطعة مستقيمة طرفاه R و S	g	جرام
		s	جانب من مضلع	lb	الباوند
		$\sim$	مشابه	J	الجول
				N	نيوتن

المحتويات

الفصل الأول:

المصفوفات

الفصل الثاني:

المثلثات القائمة وحساب المثلثات

الفصل الثالث:

الدائرة