

## إجابات تمارين ومسائل الدرس

### نظريات النهايات

(١) إذا كان  $ق(س) = س^٢ - س - ٦$  ،  $ل(س) = س^٢ - ٢س - ٣$  ، فجد كلاً مما يأتي:

أ)  $\lim_{س \rightarrow ١} (ق(س) + ل(س))$       ب)  $\lim_{س \rightarrow ١} ق(س) \times ل(س)$

ج)  $\lim_{س \rightarrow ١} \frac{ل(س)}{ق(س)}$       د)  $\lim_{س \rightarrow ٢} (ل(س))^٤$

هـ)  $\lim_{س \rightarrow ٢} \sqrt[٢]{١٢ - ل(س)}$       و)  $\lim_{س \rightarrow ١} \frac{ل(س)}{ق(س)}$

**الحل:**

$$أ) \lim_{س \rightarrow ١} (ق(س) + ل(س)) = (٦ - ١ - ١) + (٣ - ٢ - ١) = ١٠ -$$

$$ب) \lim_{س \rightarrow ١} ق(س) \times ل(س) = ٦ - \times ٤ - = ٢٤$$

$$ج) \lim_{س \rightarrow ١} \frac{ل(س)}{ق(س)} = \frac{٤ -}{٦ -} = \frac{٢}{٣}$$

$$د) \lim_{س \rightarrow ٢} (ل(س))^٤ = (٢٢ - ٢ \times ٢ - ٣) = ٨١$$

$$هـ) \lim_{س \rightarrow ٢} \sqrt[٢]{١٢ - ل(س)} = \sqrt[٢]{٣ - - ١٢} = \sqrt[٢]{٤}$$

$$و) \lim_{س \rightarrow ١} \frac{ل(س)}{ق(س)} = \frac{٣ - ٢ + ١}{٦ - + ١ + ١} = \frac{صفر}{٤ -} = صفر$$

(٢) إذا كانت  $ن(س) = ١٠$  ،  $ع(س) = ١ + س$  ، فجد كلاً مما يأتي:

أ)  $\lim_{س \rightarrow ٢} (ن(س) + ع(س))$       ب)  $\lim_{س \rightarrow ٢} (ع(س) - ن(س))$

ج)  $\lim_{س \rightarrow ٢} \sqrt[٢]{ن(س)}$       د)  $\lim_{س \rightarrow ٢} (ع(س) - ن(س))$

**الحل:**

$$\text{نهاية } 3 \text{ ل (س)} = 1 + 7 = 8 \leftarrow \text{س}$$

$$\text{نهاية } 3 \text{ ل (س)} = 1 + 7 = 8 \leftarrow \text{س}$$

$$\text{نهاية } 3 \text{ ل (س)} = 6 \leftarrow \text{س}$$

$$\text{نهاية } 3 \text{ ل (س)} = 2 \leftarrow \text{س}$$

$$\text{نهاية } 2 \text{ ع (س)} = 10 \leftarrow \text{س}$$

$$\frac{1}{2} = \text{نهاية } 2 \text{ ع (س)} \leftarrow \text{س}$$

$$\text{نهاية } 2 \text{ ع (س)} = 5 \leftarrow \text{س}$$

$$\text{أ) نهاية } (2 \text{ ع (س)} + 3 \text{ ل (س)}) = 2 + 5 \times 2 = 12 \leftarrow \text{س}$$

$$\text{ب) نهاية } (3 \text{ ع (س)} - 2 \text{ ل (س)}) = 3 \times 5 - 2 \times 2 = 12 - 4 = 8 \leftarrow \text{س}$$

$$\text{ج) نهاية } \frac{\sqrt{2}}{5} = \frac{\sqrt{2} \text{ ل (س)}}{5 \text{ ع (س)}} \leftarrow \text{س}$$

$$\text{د) نهاية } (3 \text{ ع (س)} - 2 \text{ ل (س)}) = 3 \times 5 - 2 \times 2 = 12 - 4 = 8 \leftarrow \text{س}$$

٣) جد كلاً مما يأتي:

$$\text{ب) نهاية } |25 - 2 \text{ س}| \leftarrow \text{س}$$

$$\text{أ) نهاية } |25 - 2 \text{ س}| \leftarrow \text{س}$$

$$\text{د) نهاية } |64 - 2 \text{ س}| \leftarrow \text{س}$$

$$\text{ج) نهاية } |2 - 2 \text{ س}| \leftarrow \text{س}$$

$$\text{و) نهاية } (س [س] + |س|) \leftarrow \text{س}$$

$$\text{هـ) نهاية } [2 - 2 \text{ س}] \leftarrow \text{س}$$


$$\text{ح) نهاية } \sqrt{2 \text{ س} - 1} \leftarrow \text{س}$$

$$\text{ز) نهاية } \sqrt{5 - 2 \text{ س}} \leftarrow \text{س}$$

$$\text{ط) نهاية } \sqrt{4 + 2 \text{ س} + 4 \text{ س} + 4} \leftarrow \text{س}$$

الحل:

أ) نهيا  $|س - ٢٥|$   $\begin{matrix} + \\ \leftarrow \end{matrix}$   $٥$  ← صفر =  $٢٥ - ٢$  ← صفر =  $٥ \pm = س$



نهيا  $|س - ٢٥|$   $\begin{matrix} + \\ \leftarrow \end{matrix}$  = نهيا  $(س - ٢٥)$  ← صفر = صفر

ب) نهيا  $|س - ٢٥|$   $\begin{matrix} - \\ \leftarrow \end{matrix}$  = نهيا  $(٢٥ - س)$  ← صفر = صفر

ج) نهيا  $|س - ٢|$   $\begin{matrix} - \\ \leftarrow \end{matrix}$  = نهيا  $(٢ - س)$  ← صفر = صفر



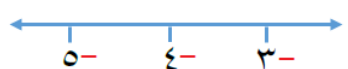
د) نهيا  $|س - ٦٤|$   $\begin{matrix} ٨ \\ \leftarrow \end{matrix}$

نهيا  $٦٤ - ٢$  ← صفر =  $\begin{matrix} + \\ ٨ \\ \leftarrow \end{matrix}$

نهيا  $٦٤ - ٢$  ← صفر =  $\begin{matrix} - \\ ٨ \\ \leftarrow \end{matrix}$

نهيا  $|س - ٦٤|$  ← صفر =  $\begin{matrix} ٨ \\ \leftarrow \end{matrix}$

هـ) نهيا  $[س - ٢]$   $\begin{matrix} ٤ \\ \leftarrow \end{matrix}$  ← صفر =  $١ = ٥$



$\left. \begin{matrix} ٥- \geq س > ٤- \\ ٦- \geq س > ٣- \end{matrix} \right\} = [س - ٢]$

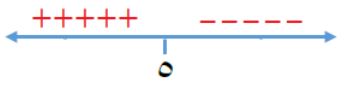
نهيا  $[س - ٢]$  ← صفر =  $\begin{cases} ٦- = [س - ٢] \begin{matrix} + \\ ٤ \\ \leftarrow \end{matrix} \\ ٧- = [س - ٢] \begin{matrix} - \\ ٤ \\ \leftarrow \end{matrix} \end{cases}$  ← غير موجودة

و) نهيا  $(س [س] + |س|)$   $\begin{matrix} ١ \\ \leftarrow \end{matrix}$

$\left. \begin{matrix} ١ > س \geq ٠ \\ ٢ > س \geq ١ \end{matrix} \right\} = [س]$  ← صفر =

نهيا  $(س [س] + |س|)$  ← صفر =  $\begin{cases} ١ = ١ + ٠ = (س + ٠ \times س) \begin{matrix} - \\ ١ \\ \leftarrow \end{matrix} \\ ٢ = ١ + ١ = (س + ١ \times س) \begin{matrix} + \\ ١ \\ \leftarrow \end{matrix} \end{cases}$  ← غير موجودة

$$\begin{aligned} 5 - s &= \text{صفر} \\ s &= 5 \end{aligned}$$

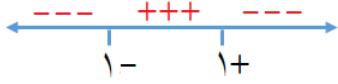


$$\text{ز) نهايا } \sqrt{s-5} \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} s=5$$

$$\text{نهايا } \sqrt{s-5} \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} \text{صفر} =$$

$$1 \pm = s^2 \iff \text{صفر} = s^2 - 1$$

$$\text{ح) نهايا } \sqrt{s^2-1} \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} s=1$$



$$\text{نهايا } \sqrt{s^2-1} \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} s=1 \text{ غير موجودة} =$$

$$\left\{ \begin{aligned} \text{نهايا } \sqrt{s^2-1} \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} s=1 & \text{ غير موجودة} \\ \text{نهايا } \sqrt{s^2-1} \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} \text{صفر} & = \end{aligned} \right.$$

$$\begin{aligned} s+2 &= \text{صفر} \\ s &= -2 \end{aligned}$$



$$\text{ط) نهايا } \sqrt{s^2+4s+4} \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} s=-2$$

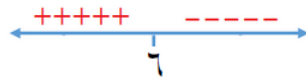
$$\text{نهايا } \sqrt{(s+2)^2} \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} s=-2 = |s+2| \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} s=-2$$

$$\left\{ \begin{aligned} \text{نهايا } |s+2| \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} s=-2 & \text{ صفر} \\ \text{نهايا } |s+2| \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} s=-2 & \text{ صفر} \end{aligned} \right.$$

٤) جد قيم جـ التي تجعل نهايا  $\sqrt{s-6}$  غير موجودة.

**الحل:**

$$6 - s = \text{صفر} \iff s = 6$$



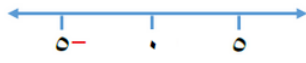
$$\text{نهايا } \sqrt{s-6} \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} s=6$$

$$\text{نهايا } \sqrt{s-6} \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} \text{غير موجودة على } ]6, \infty[$$

٥) إذا كان ق(س) = [٢, ٠[س], فجد قيم جـ التي تجعل نهايا [٢, ٠[س] = ١-

**الحل:**

$$[س] = [س, ٢] = [س, \frac{٢}{١٠}]$$

$$٥ = \frac{١٠}{٢} = \frac{١}{\frac{٢}{١٠}} = ل$$


$$٠ > س \geq ٥ - , ١ - \left. \vphantom{٠} \right\} = (س)$$

نهيا  $[س, ٢] = ١ -$  قيم ج هي  $(٠, ٥ -)$  س ←

$$\left. \begin{array}{l} ٣ \leq س , س - ٢ \leq ٤ \\ ٣ > س , [س - ٦] \end{array} \right\} = (س) \text{ إذا كان ق (س)}$$

وكانت نهيا ق (س) موجودة ، فجد قيمة الثابت أ. س ←

الحل:

$$٣ \geq س > ٢ , ٣ = [س - ٦]$$

$$\begin{array}{l} \text{نهيا } س - ٢ \leq ٤ \text{ نهيا } ٣ \\ \text{س ←} \quad \text{س ←} \end{array}$$

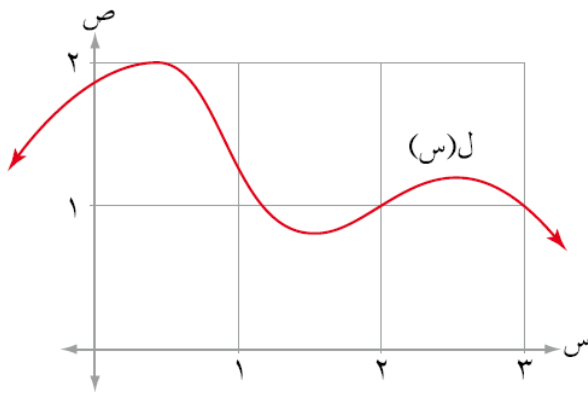
$$\frac{٦}{٤} = \frac{٤ - أ}{٤} \iff ٣ = ٤ - أ$$

$$\frac{٣}{٢} = \frac{٦}{٤} = أ \iff$$

(٧) معتمداً الشكل (١-١٥) الذي يمثل منحنى الاقتران ل، جد كلاً مما يأتي:

(أ) نهيا ل  $(٣ - س)$  س ←

(ب) نهيا  $(س + ل)$  س ←



الشكل (١-١٥)

الحل:

أ) نهيا ل (٣ - س)  $\leftarrow_{س \rightarrow ٣}$

$$ص = ٣ - س$$

$$س \leftarrow ٢ \iff ص \leftarrow ٣$$

نهيا ل (٣ - س)  $\leftarrow_{س \rightarrow ٣}$  = نهيا ل (ص)  $\leftarrow_{ص \rightarrow ٣}$

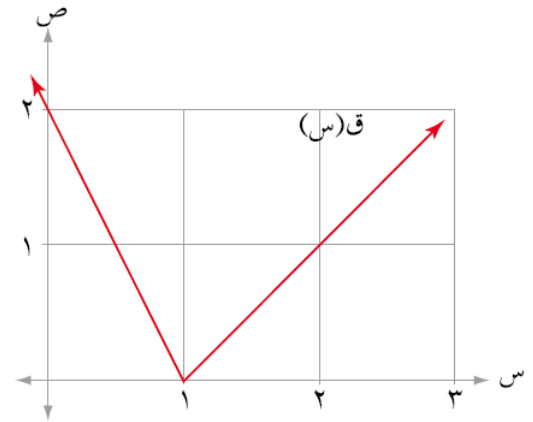
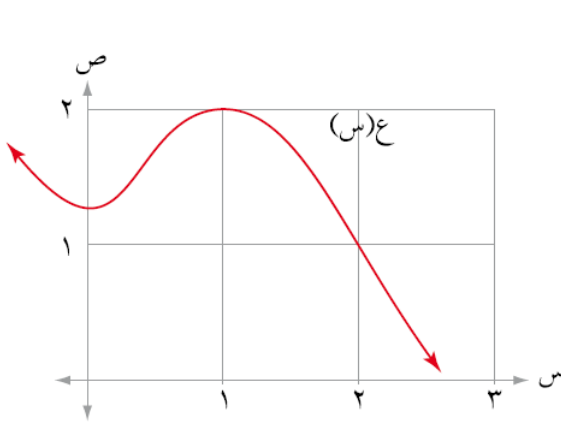
$$١ =$$

ب) نهيا ل (س + ل (س))  $\leftarrow_{س \rightarrow ٣}$

نهيا ل س  $\leftarrow_{س \rightarrow ٣}$  + نهيا ل (س)  $\leftarrow_{س \rightarrow ٣}$

$$٣ = ١ + ٢$$

٨) معتمداً الشكل (١-٦)، الذي يمثل منحنبي الاقترانين ق، ع، جد كلاً مما يأتي:



الشكل (١-٦)

ب) نهيا ل (ق(س) × ع(س))  $\leftarrow_{س \rightarrow ٢}$

أ) نهيا ل (ق(س) + ع(س))  $\leftarrow_{س \rightarrow ١}$

ج) نهيا ل (٢ ق(س) + (١ - س) ع(س))  $\leftarrow_{س \rightarrow ١}$

الحل:

$$\text{أ) نهايا } (ق(س) + ع(س)) \leftarrow_{س \rightarrow 1}$$

$$= \text{نهايا } (ق(س)) \leftarrow_{س \rightarrow 1} + \text{نهايا } (ع(س)) \leftarrow_{س \rightarrow 1}$$

$$صفر = 2 + 2$$

$$\text{ب) نهايا } (ق(س) \times ع(س)) \leftarrow_{س \rightarrow 2}$$

$$= \text{نهايا } (ق(س)) \leftarrow_{س \rightarrow 2} \times \text{نهايا } (ع(س)) \leftarrow_{س \rightarrow 2}$$

$$1 = 1 \times 1$$

$$\text{ج) نهايا } (2(ق(س) - 1) + ع(س)) \leftarrow_{س \rightarrow 1}$$

$$2 \text{ نهايا } (ق(ص)) \leftarrow_{ص \rightarrow 0} + \text{نهايا } (ع(س)) \leftarrow_{س \rightarrow 1}$$

$$6 = 2 + 2 \times 2$$

$$\begin{aligned} ص = 1 - س \\ س \leftarrow 1 \\ ص \leftarrow صفر \end{aligned}$$

٩) إذا كان ق كثير حدود يمر بالنقطة  $(-3, 4)$ ، وكانت نهايا  $(س - ل(س)) \leftarrow_{س \rightarrow 10} = 10$

$$\text{فجد نهايا } (ق^2(س) - 2ل(س)) \leftarrow_{س \rightarrow 3}$$

**الحل:**

ق كثير حدود يمر بالنقطة  $(-3, 4)$ ، فيكون ق  $(-3) = 4$  ومنه: نهايا ق(س)  $\leftarrow_{س \rightarrow 3} = 4$

$$\text{نهايا } (س - ل(س)) \leftarrow_{س \rightarrow 10} = 10$$

$$10 = 3 - \text{نهايا } ل(س) \leftarrow_{س \rightarrow 10}$$

$$\text{نهايا } ل(س) \leftarrow_{س \rightarrow 10} = 7$$

$$= \text{نهايا } ق^2(س) \leftarrow_{س \rightarrow 3} - \text{نهايا } 2ل(س) \leftarrow_{س \rightarrow 3}$$

$$24 = 14 - 16 = 7 \times 2 - 2$$

١٠) إذا كان ع كثير حدود باقي قسمته على  $(س - 2)$  يساوي ٥، فجد نهايا  $(3ع(س) + 4س^2) \leftarrow_{س \rightarrow 2}$

## الحل:

لأن  $\epsilon$  كثير حدود وباقي قسمته على  $(s-2)$  يساوي  $5$ ، فيكون  $\epsilon(2) = 5$ ، ومنها:

$$5 = \underset{s \leftarrow 2}{\text{نهاي } \epsilon(s)}$$

إذاً:

$$\underset{s \leftarrow 2}{\text{نهاي } \epsilon(s)} = (4s + 3)\epsilon(s)$$

$$31 = 16 + 15 = (2)4 + 5 \times 3$$