

إجابات تمارين ومسائل الدرس

نظريات النهايات

(١) إذا كان $ق(س) = س^2 - س - ٦$ ، $ل(س) = س^2 - ٢س - ٣$ ، فجد كلاً مما يأتي:

أ) $\lim_{س \rightarrow ١} (ق(س) + ل(س))$ ب) $\lim_{س \rightarrow ١} ق(س) \times ل(س)$

ج) $\lim_{س \rightarrow ١} \frac{ل(س)}{ق(س)}$ د) $\lim_{س \rightarrow ٢} (ل(س))^٤$

هـ) $\lim_{س \rightarrow ٢} \sqrt[٢]{١٢ - ل(س)}$ و) $\lim_{س \rightarrow ١} \frac{ل(س)}{ق(س)}$

الحل:

أ) $\lim_{س \rightarrow ١} (ق(س) + ل(س)) = (٦ - ١ - ١) + (٣ - ٢ - ١) = ١٠$

ب) $\lim_{س \rightarrow ١} ق(س) \times ل(س) = ٦ - ١ \times ٤ - ٣ = ٢٤$

ج) $\lim_{س \rightarrow ١} \frac{ل(س)}{ق(س)} = \frac{٤ - ٣}{٦ - ١} = \frac{٢}{٣}$

د) $\lim_{س \rightarrow ٢} (ل(س))^٤ = (٢^٢ - ٢ \times ٢ - ٣)^٤ = (-٣)^٤ = ٨١$

هـ) $\lim_{س \rightarrow ٢} \sqrt[٢]{١٢ - ل(س)} = \sqrt[٢]{١٢ - (٢^٢ - ٢ \times ٢ - ٣)} = \sqrt[٢]{٤}$

و) $\lim_{س \rightarrow ١} \frac{ل(س)}{ق(س)} = \frac{٣ - ٢ + ١}{٦ - ١ + ١} = \frac{٢}{٦} = \frac{١}{٣}$

(٢) إذا كانت $ن(س) = ٢س + ١٠$ ، $ع(س) = ٣س + ١$ ، فجد كلاً مما يأتي:

أ) $\lim_{س \rightarrow ٢} (ن(س) + ع(س))$ ب) $\lim_{س \rightarrow ٢} (ع(س) - ن(س))$

ج) $\lim_{س \rightarrow ٢} \frac{ل(س)}{ع(س)}$ د) $\lim_{س \rightarrow ٢} (ع(س) - ل(س))$

الحل:

$$7 = 1 + (س) \underset{2 \leftarrow س}{\text{نهاي}} 3$$

$$7 = 1 + (س) \underset{2 \leftarrow س}{\text{نهاي}} 3$$

$$6 = (س) \underset{2 \leftarrow س}{\text{نهاي}} 3$$

$$2 = (س) \underset{2 \leftarrow س}{\text{نهاي}} 3$$

$$10 = (س) \underset{2 \leftarrow س}{\text{نهاي}} 2ع$$

$$\frac{1}{2} = (س) \underset{2 \leftarrow س}{\text{نهاي}} 2ع$$

$$5 = (س) \underset{2 \leftarrow س}{\text{نهاي}} 2ع$$

$$12 = 2 + 5 \times 2 = (س) \underset{2 \leftarrow س}{\text{نهاي}} (2ع + 3ل)$$

$$121 = 4 - 125 = 22 - 25 = (س) \underset{2 \leftarrow س}{\text{نهاي}} (3ع - 2ل)$$

$$\frac{2}{5} = \frac{(س) \underset{2 \leftarrow س}{\text{نهاي}} 2ل}{(س) \underset{2 \leftarrow س}{\text{نهاي}} 2ع}$$

$$21 = 4 - 25 = 22 - 25 = (س) \underset{2 \leftarrow س}{\text{نهاي}} (2ع - 3ل)$$

(3) جد كلاً مما يأتي:

$$(ب) \underset{س \leftarrow -5}{\text{نهاي}} | 25 - 2س |$$

$$(أ) \underset{س \leftarrow +5}{\text{نهاي}} | 25 - 2س |$$

$$(د) \underset{س \leftarrow 8}{\text{نهاي}} | 64 - 2س |$$

$$(ج) \underset{س \leftarrow -2}{\text{نهاي}} | 2 - 2س |$$

$$(و) \underset{س \leftarrow 1}{\text{نهاي}} (س [س] + |س|)$$

$$(هـ) \underset{س \leftarrow 4}{\text{نهاي}} [2 - 2س]$$


$$(ح) \underset{س \leftarrow 1}{\text{نهاي}} \sqrt{2س - 1}$$

$$(ز) \underset{س \leftarrow -5}{\text{نهاي}} \sqrt{5 - 2س}$$

$$(ط) \underset{س \leftarrow 2}{\text{نهاي}} \sqrt{4 + 2س + 4س + 4}$$

الحل:

أ) نهيا $|س - ٢٥|$ $\begin{matrix} + \\ \leftarrow \end{matrix}$ ٥ ← صفر = $٢٥ - ٢$ ← صفر = $٥ \pm = س$



نهيا $|س - ٢٥|$ $\begin{matrix} + \\ \leftarrow \end{matrix}$ = نهيا $(س - ٢٥)$ ← صفر = صفر

ب) نهيا $|س - ٢٥|$ $\begin{matrix} - \\ \leftarrow \end{matrix}$ = نهيا $(٢٥ - س)$ ← صفر = صفر

ج) نهيا $|س - ٢|$ $\begin{matrix} - \\ \leftarrow \end{matrix}$ = نهيا $(٢ - س)$ ← صفر = صفر



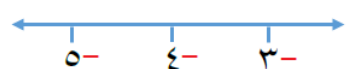
د) نهيا $|س - ٦٤|$ $\begin{matrix} ٨ \\ \leftarrow \end{matrix}$

نهيا $٦٤ - ٢$ ← صفر = $\begin{matrix} + \\ ٨ \\ \leftarrow \end{matrix}$

نهيا $٦٤ - ٢$ ← صفر = $\begin{matrix} - \\ ٨ \\ \leftarrow \end{matrix}$

نهيا $|س - ٦٤|$ ← صفر = $\begin{matrix} ٨ \\ \leftarrow \end{matrix}$

هـ) نهيا $[س - ٢]$ $\begin{matrix} ٤ \\ \leftarrow \end{matrix}$ ← صفر = $١ = ٥$



$\left. \begin{array}{l} ٥- \geq س > ٤- \\ ٣- \geq س > ٤- \end{array} \right\} = [س - ٢]$

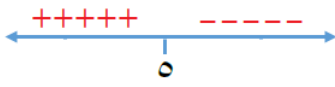
نهيا $[س - ٢]$ ← صفر = $\begin{cases} ٦- = [س - ٢] \begin{matrix} + \\ ٤ \\ \leftarrow \end{matrix} \\ ٧- = [س - ٢] \begin{matrix} - \\ ٤ \\ \leftarrow \end{matrix} \end{cases}$ ← غير موجودة

و) نهيا $(س [س] + |س|)$ $\begin{matrix} ١ \\ \leftarrow \end{matrix}$

$\left. \begin{array}{l} ١ > س \geq ٠ \\ ٢ > س \geq ١ \end{array} \right\} = [س]$ ← صفر =

نهيا $(س [س] + |س|)$ ← صفر = $\begin{cases} ١ = ١ + ٠ = (س + ٠ \times س) \begin{matrix} - \\ ١ \\ \leftarrow \end{matrix} \\ ٢ = ١ + ١ = (س + ١ \times س) \begin{matrix} + \\ ١ \\ \leftarrow \end{matrix} \end{cases}$ ← غير موجودة

$$\begin{aligned} 5 - s &= \text{صفر} \\ s &= 5 \end{aligned}$$

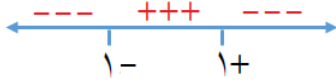


$$\text{ز) نهايا } \sqrt{s-5} \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} s=5$$

$$\text{نهايا } \sqrt{s-5} \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} \text{صفر} =$$

$$1 \pm = s^2 \iff \text{صفر} = s^2 - 1$$

$$\text{ح) نهايا } \sqrt{s^2-1} \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} s=1$$



$$\text{نهايا } \sqrt{s^2-1} \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} s=1 \text{ غير موجودة} =$$

$$\left\{ \begin{aligned} \text{نهايا } \sqrt{s^2-1} \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} s=1 &= \text{غير موجودة} \\ \text{نهايا } \sqrt{s^2-1} \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} \text{صفر} &= \end{aligned} \right.$$

$$\begin{aligned} s+2 &= \text{صفر} \\ s &= -2 \end{aligned}$$



$$\text{ط) نهايا } \sqrt{s^2+4s+4} \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} s=-2$$

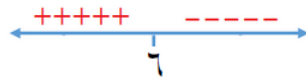
$$\text{نهايا } \sqrt{(s+2)^2} \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} s=-2 = |s+2| \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} s=-2$$

$$\left\{ \begin{aligned} \text{نهايا } |s+2| \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} s=-2 &= \text{صفر} \\ \text{نهايا } |s+2| \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} s=-2 &= \text{صفر} \end{aligned} \right.$$

٤) جد قيم جـ التي تجعل نهايا $\sqrt{s-6}$ غير موجودة.

الحل:

$$6 - s = \text{صفر} \iff s = 6$$



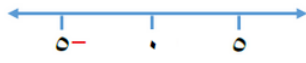
$$\text{نهايا } \sqrt{s-6} \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} s=6$$

$$\text{نهايا } \sqrt{s-6} \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} \text{غير موجودة على }]6, \infty[$$

٥) إذا كان $q(s) = [2, 0, s]$ ، فجد قيم جـ التي تجعل نهايا $[2, 0, s] = 1 -$

الحل:

$$[س] = [س, ٢] = [س, \frac{٢}{١٠}]$$

$$٥ = \frac{١٠}{٢} = \frac{١}{\frac{٢}{١٠}} = ل$$


$$٥ - \geq س > ٠, \quad ١ - \left. \vphantom{٥} \right\} = (س)$$

نهيا $[س, ٢] = ١ -$ قيم ج هي $(٠, ٥ -)$ س ←

$$\left. \begin{array}{l} ٣ \leq س \quad , \quad ٤ - ٢ س \text{ نهيا} \\ ٣ > س \quad , \quad [س - ٦] \end{array} \right\} = (س) \text{ إذا كان ق}$$

وكانت نهيا ق (س) موجودة ، فجد قيمة الثابت أ. س ←

الحل:

$$٣ \geq س > ٢ \quad , \quad ٣ = [س - ٦]$$

$$\begin{array}{l} \text{نهيا} \text{ س } ٤ - ٢ \text{ نهيا} \\ \text{س} \leftarrow \text{س} \quad \text{س} \leftarrow \text{س} \end{array}$$

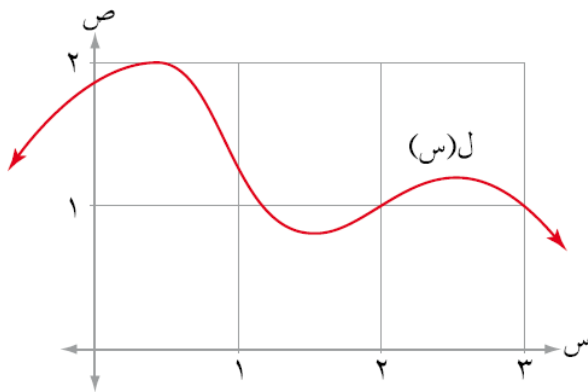
$$\frac{٦}{٤} = \frac{٤ - ٢ س}{٤} \iff ٣ = ٤ - ٢ س$$

$$\frac{٣}{٢} = \frac{٦}{٤} = ١ \iff$$

(٧) معتمداً الشكل (١-١٥) الذي يمثل منحنى الاقتران ل، جد كلاً مما يأتي:

(أ) نهيا ل $(٣ - س)$ س ←

(ب) نهيا $(س + ل)$ س ←



الشكل (١-١٥)

الحل:

أ) نهيا ل (٣ - س) $\xrightarrow{س \rightarrow ٣}$

$$ص = ٣ - س$$

$$س \xrightarrow{س \rightarrow ٣} ٢ \quad \leftarrow \quad ٣ \xrightarrow{ص \rightarrow ٣}$$

$$\text{نهيا ل (٣ - س)} = \text{نهيا ل (ص)}$$

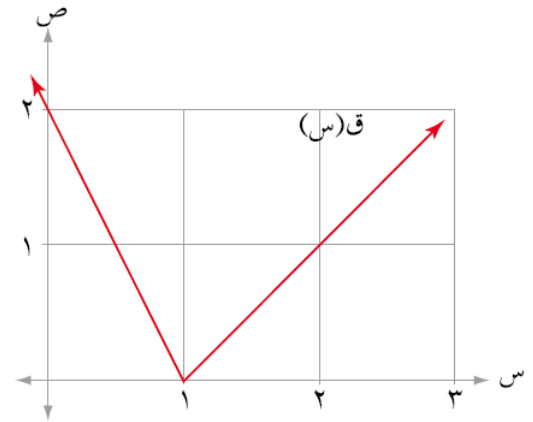
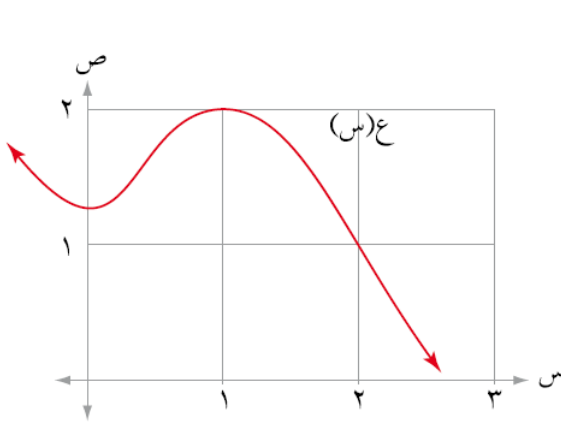
$$١ =$$

ب) نهيا $\left(س + ل(س) \right) \xrightarrow{س \rightarrow ٣}$

$$\text{نهيا } س + \text{نهيا ل(س)}$$

$$٣ = ١ + ٢$$

٨) معتمداً الشكل (١-٦)، الذي يمثل منحنبي الاقترانين ق، ع، جد كلاً مما يأتي:



الشكل (١-٦)

ب) نهيا $\left(ق(س) \times ع(س) \right) \xrightarrow{س \rightarrow ٢}$

أ) نهيا $\left(ق(س) + ع(س) \right) \xrightarrow{س \rightarrow ١}$

ج) نهيا $\left(٢ ق(س) + ع(س) \right) \xrightarrow{س \rightarrow ١}$

الحل:

$$\text{أ) } \underset{\text{س} \leftarrow 1}{\text{نها}} (\text{ق} \underset{\text{س} \leftarrow 1}{\text{س}} + \text{ع} \underset{\text{س} \leftarrow 1}{\text{س}})$$

$$= \underset{\text{س} \leftarrow 1}{\text{نها}} \text{ق} \underset{\text{س} \leftarrow 1}{\text{س}} + \underset{\text{س} \leftarrow 1}{\text{نها}} \text{ع} \underset{\text{س} \leftarrow 1}{\text{س}}$$

$$2 = 2 + \text{صفر}$$

$$\text{ب) } \underset{\text{س} \leftarrow 2}{\text{نها}} (\text{ق} \underset{\text{س} \leftarrow 2}{\text{س}} \times \text{ع} \underset{\text{س} \leftarrow 2}{\text{س}})$$

$$= \underset{\text{س} \leftarrow 2}{\text{نها}} \text{ق} \underset{\text{س} \leftarrow 2}{\text{س}} \times \underset{\text{س} \leftarrow 2}{\text{نها}} \text{ع} \underset{\text{س} \leftarrow 2}{\text{س}}$$

$$1 = 1 \times 1$$

$$\text{ج) } \underset{\text{س} \leftarrow 1}{\text{نها}} (2 \text{ ق} \underset{\text{س} \leftarrow 1}{\text{س}} - \text{ع} \underset{\text{س} \leftarrow 1}{\text{س}})$$

$$2 \underset{\text{ص} \leftarrow 0}{\text{نها}} \text{ق} \underset{\text{س} \leftarrow 1}{\text{ص}} + \underset{\text{س} \leftarrow 1}{\text{نها}} \text{ع} \underset{\text{س} \leftarrow 1}{\text{س}}$$

$$6 = 2 + 2 \times 2$$

$$\begin{aligned} \text{ص} = \text{س} - 1 \\ \text{س} &\leftarrow 1 \\ \text{ص} &\leftarrow \text{صفر} \end{aligned}$$

٩) إذا كان ق كثير حدود يمر بالنقطة $(-3, 4)$ ، وكانت $\underset{\text{س} \leftarrow 3}{\text{نها}} (\text{س} - \text{ل} \underset{\text{س} \leftarrow 3}{\text{س}}) = 10$

$$\text{فجد } \underset{\text{س} \leftarrow 3}{\text{نها}} (\text{ق}^2 \underset{\text{س} \leftarrow 3}{\text{س}} - 2 \text{ ل} \underset{\text{س} \leftarrow 3}{\text{س}})$$

الحل:

ق كثير حدود يمر بالنقطة $(-3, 4)$ ، فيكون $\text{ق} \underset{\text{س} \leftarrow 3}{\text{س}} = 4$ ومنه: $\underset{\text{س} \leftarrow 3}{\text{نها}} \text{ق} \underset{\text{س} \leftarrow 3}{\text{س}} = 4$

$$\underset{\text{س} \leftarrow 3}{\text{نها}} (\text{س} - \text{ل} \underset{\text{س} \leftarrow 3}{\text{س}}) = 10$$

$$10 = \underset{\text{س} \leftarrow 3}{\text{نها}} \text{ل} \underset{\text{س} \leftarrow 3}{\text{س}} - 3$$

$$\underset{\text{س} \leftarrow 3}{\text{نها}} \text{ل} \underset{\text{س} \leftarrow 3}{\text{س}} = 13$$

$$= \underset{\text{س} \leftarrow 3}{\text{نها}} \text{ق}^2 \underset{\text{س} \leftarrow 3}{\text{س}} - \underset{\text{س} \leftarrow 3}{\text{نها}} 2 \text{ ل} \underset{\text{س} \leftarrow 3}{\text{س}}$$

$$24 = 16 - 14 = 2 \times 7 - 2$$

١٠) إذا كان ع كثير حدود باقي قسمته على $(\text{س} - 2)$ يساوي ٥، فجد $\underset{\text{س} \leftarrow 2}{\text{نها}} (3 \text{ ع} \underset{\text{س} \leftarrow 2}{\text{س}} + 4 \text{ س}^2)$

الحل:

لأن ϵ كثير حدود وباقي قسمته على $(s-2)$ يساوي 5 ، فيكون $\epsilon(2) = 5$ ، ومنها:

$$5 = \underset{s \leftarrow 2}{\text{نهاي } \epsilon(s)}$$

إذاً:

$$\underset{s \leftarrow 2}{\text{نهاي } \epsilon(s)} = (4s + 3)\epsilon(s)$$

$$31 = 16 + 15 = (2)4 + 5 \times 3$$