

إجابات تمارين ومسائل الدرس

نظريات النهايات

(١) إذا كان $ق(س) = س^٢ - س - ٦$ ، $ل(س) = س^٢ - ٢س - ٣$ ، فجد كلاً مما يأتي:

أ) $\lim_{س \rightarrow ١} (ق(س) + ل(س))$ ب) $\lim_{س \rightarrow ١} ق(س) \times ل(س)$

ج) $\lim_{س \rightarrow ١} \frac{ل(س)}{ق(س)}$ د) $\lim_{س \rightarrow ٢} (ل(س))^٤$

هـ) $\lim_{س \rightarrow ٢} \sqrt[٢]{١٢ - ل(س)}$ و) $\lim_{س \rightarrow ١} \frac{ل(س)}{ق(س)}$

الحل:

$$أ) \lim_{س \rightarrow ١} (ق(س) + ل(س)) = (٦ - ١ - ١) + (٣ - ٢ - ١) = ١٠ -$$

$$ب) \lim_{س \rightarrow ١} ق(س) \times ل(س) = ٦ - \times ٤ - = ٢٤$$

$$ج) \lim_{س \rightarrow ١} \frac{ل(س)}{ق(س)} = \frac{٤ -}{٦ -} = \frac{٢}{٣}$$

$$د) \lim_{س \rightarrow ٢} (ل(س))^٤ = (٢٢ - ٢ \times ٢ - ٣) = ٨١$$

$$هـ) \lim_{س \rightarrow ٢} \sqrt[٢]{١٢ - ل(س)} = \sqrt[٢]{٣ - - ١٢} = \sqrt[٢]{٤}$$

$$و) \lim_{س \rightarrow ١} \frac{ل(س)}{ق(س)} = \frac{صفر}{٤ -} = \frac{٣ - ٢ + ١}{٦ - + ١ + ١} = صفر$$

(٢) إذا كانت $ن(س) = ١٠$ ، $ع(س) = ١ + س$ ، فجد كلاً مما يأتي:

أ) $\lim_{س \rightarrow ٢} (ن(س) + ع(س))$ ب) $\lim_{س \rightarrow ٢} (ع(س) - ن(س))$

ج) $\lim_{س \rightarrow ٢} \sqrt[٢]{ن(س)}$ د) $\lim_{س \rightarrow ٢} (ع(س) - ن(س))$

الحل:

$$\underset{2 \leftarrow s}{\text{نها}} 3 \text{ ل (س)} + 1 = 7$$

$$\underset{2 \leftarrow s}{\text{نها}} 3 \text{ ل (س)} + 1 = 7$$

$$\underset{2 \leftarrow s}{\text{نها}} 3 \text{ ل (س)} = 6$$

$$\underset{2 \leftarrow s}{\text{نها}} 3 \text{ ل (س)} = 2$$

$$\underset{2 \leftarrow s}{\text{نها}} 2 \text{ ع (س)} = 10$$

$$\frac{1}{2} = \underset{2 \leftarrow s}{\text{نها}} 2 \text{ ع (س)}$$

$$\underset{2 \leftarrow s}{\text{نها}} 2 \text{ ع (س)} = 5$$

$$\underset{2 \leftarrow s}{\text{نها}} (2 \text{ ع (س)} + 3 \text{ ل (س)}) = 12 = 2 + 5 \times 2$$

$$\underset{2 \leftarrow s}{\text{نها}} (3 \text{ ع (س)} - 2 \text{ ل (س)}) = 121 = 4 - 125 = 2^2 - 5^3$$

$$\underset{2 \leftarrow s}{\text{نها}} \sqrt{\frac{2}{5}} = \frac{\sqrt{2 \text{ ل (س)}}}{\sqrt{5 \text{ ع (س)}}}$$

$$\underset{2 \leftarrow s}{\text{نها}} (3 \text{ ع (س)} - 2 \text{ ل (س)}) = 21 = 4 - 25 = 2^2 - 5^3$$

(3) جد كلاً مما يأتي:

$$\underset{-5 \leftarrow s}{\text{نها}} |25 - 2 \text{ س}|$$

$$\underset{+5 \leftarrow s}{\text{نها}} |25 - 2 \text{ س}|$$

$$\underset{8 \leftarrow s}{\text{نها}} |64 - 2 \text{ س}|$$

$$\underset{-2 \leftarrow s}{\text{نها}} |2 - \text{س}|$$

$$\underset{1 \leftarrow s}{\text{نها}} (\text{س} [\text{س}] + | \text{س} |)$$

$$\underset{4 \leftarrow s}{\text{نها}} [2 - \text{س}]$$


$$\underset{1 \leftarrow s}{\text{نها}} \sqrt{2 \text{ س} - 1}$$

$$\underset{-5 \leftarrow s}{\text{نها}} \sqrt{5 - \text{س}}$$

$$\underset{2 \leftarrow s}{\text{نها}} \sqrt{4 + \text{س} + 2 \text{ س} + 4}$$

الحل:

أ) نهيا $|س - ٢٥|$ $\begin{matrix} + \\ \leftarrow \end{matrix}$ $٥ = ٢٥ - ٢٥$ \leftarrow صفر \leftarrow $٥ \pm = س$



نهيا $|س - ٢٥|$ $\begin{matrix} + \\ \leftarrow \end{matrix}$ = نهيا $(س - ٢٥)$ = صفر $\begin{matrix} + \\ \leftarrow \end{matrix}$

ب) نهيا $|س - ٢٥|$ $\begin{matrix} - \\ \leftarrow \end{matrix}$ = نهيا $(٢٥ - س)$ = صفر $\begin{matrix} - \\ \leftarrow \end{matrix}$

ج) نهيا $|س - ٢|$ $\begin{matrix} - \\ \leftarrow \end{matrix}$ = نهيا $(س - ٢)$ = صفر $\begin{matrix} - \\ \leftarrow \end{matrix}$



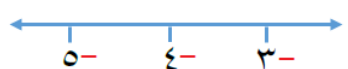
د) نهيا $|س - ٦٤|$ $\begin{matrix} + \\ \leftarrow \end{matrix}$

نهيا $٦٤ - س$ = صفر $\begin{matrix} + \\ \leftarrow \end{matrix}$

نهيا $س - ٦٤$ = صفر $\begin{matrix} - \\ \leftarrow \end{matrix}$

نهيا $|س - ٦٤|$ = صفر $\begin{matrix} + \\ \leftarrow \end{matrix}$

هـ) نهيا $[س - ٢]$ $\begin{matrix} - \\ \leftarrow \end{matrix}$ $١ = ٥$



$\left. \begin{matrix} ٥- \geq س > ٤- \\ ٣- \geq س > ٤- \end{matrix} \right\} = [س - ٢]$

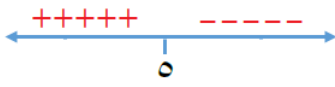
نهيا $[س - ٢]$ غير موجودة $\begin{matrix} + \\ \leftarrow \end{matrix}$ $\left\{ \begin{matrix} ٦- = [س - ٢] \\ ٧- = [س - ٢] \end{matrix} \right.$

و) نهيا $(س [س] + |س|)$ $\begin{matrix} - \\ \leftarrow \end{matrix}$

$\left. \begin{matrix} ١ > س \geq ٠ \\ ٢ > س \geq ١ \end{matrix} \right\} = [س]$ صفر

نهيا $(س [س] + |س|)$ غير موجودة $\begin{matrix} - \\ \leftarrow \end{matrix}$ $\left\{ \begin{matrix} ١ = ١ + ٠ = (س + ٠ \times س) \\ ٢ = ١ + ١ = (س + ١ \times س) \end{matrix} \right.$

$$\begin{aligned} 5 - s &= \text{صفر} \\ s &= 5 \end{aligned}$$

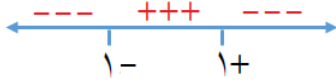


$$\text{ز) نهايا } \sqrt{s-5} \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} s=5$$

$$\text{نهايا } \sqrt{s-5} \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} \text{صفر} =$$

$$1 \pm = s^2 \iff \text{صفر} = s^2 - 1$$

$$\text{ح) نهايا } \sqrt{s^2-1} \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} s=1$$



$$\text{نهايا } \sqrt{s^2-1} \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} s=1 \text{ غير موجودة} =$$

$$\left\{ \begin{aligned} \text{نهايا } \sqrt{s^2-1} \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} s=1 & \text{ غير موجودة} \\ \text{نهايا } \sqrt{s^2-1} \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} \text{صفر} & = \end{aligned} \right.$$

$$\begin{aligned} s+2 &= \text{صفر} \\ s &= -2 \end{aligned}$$



$$\text{ط) نهايا } \sqrt{s^2+4s+4} \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} s=-2$$

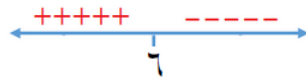
$$\text{نهايا } \sqrt{(s+2)^2} \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} s=-2 = |s+2| \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} s=-2$$

$$\left\{ \begin{aligned} \text{نهايا } |s+2| \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} s=-2 & \text{ صفر} \\ \text{نهايا } |s+2| \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} s=-2 & \text{ صفر} \end{aligned} \right.$$

٤) جد قيم جـ التي تجعل نهايا $\sqrt{s-6}$ غير موجودة.

الحل:

$$6 - s = \text{صفر} \iff s = 6$$



$$\text{نهايا } \sqrt{s-6} \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} s=6$$

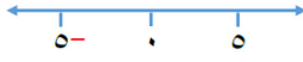
$$\text{نهايا } \sqrt{s-6} \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} \text{غير موجودة على }]6, \infty[$$

٥) إذا كان ق(س) = [٢, ٠[س]، فجد قيم جـ التي تجعل نهايا [٢, ٠[س] = ١-

الحل:

$$ق(س) = [س, ٢] = [س, \frac{٢}{١٠}]$$

$$ل = \frac{١}{٢} = \frac{١}{\frac{٢}{١٠}}$$



$$ق(س) = \left. \begin{array}{l} ١- \\ ٥- \geq س > ٥ \end{array} \right\}$$

نهيا $[س, ٢] = ١-$ قيم ج هي $(٥-, ٠)$

$$\left. \begin{array}{l} ٣ \leq س \quad , \quad س - ٢ \leq ٤ \text{ أ} \\ ٣ > س \quad , \quad [س - ٦] \end{array} \right\} = (٦) \text{ إذا كان ق(س)}$$

وكانت نهيا ق(س) موجودة ، فجد قيمة الثابت أ.

الحل:

$$٣ \geq س > ٢ \quad , \quad ٣ = [س - ٦]$$

$$\text{نهيا } س - ٢ \leq ٤ \text{ أ} = \text{نهيا } ٣$$

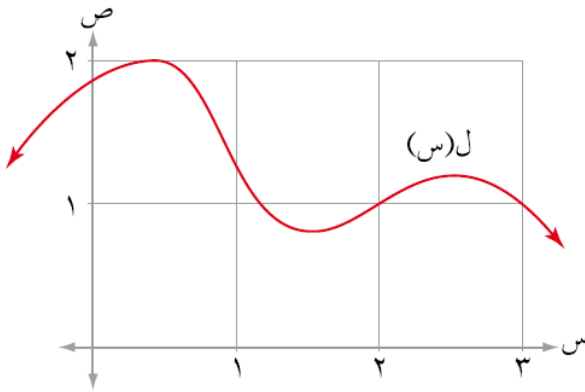
$$\frac{٦}{٤} = \frac{٤ \text{ أ}}{٤} \iff ٣ = ٤ - ٩$$

$$\frac{٣}{٢} = \frac{٦}{٤} = \text{أ} \iff$$

(٧) معتمداً الشكل (١-١٥) الذي يمثل منحنى الاقتران ل، جد كلاً مما يأتي:

أ) نهيا ل $(٣ - س)$

ب) نهيا $(س + ل(س))$



الشكل (١-١٥)

الحل:

أ) نهاية $(3 - s)$ (س ← ٣)

$$3 - s = 3$$

$$3 \leftarrow s \quad \Leftarrow \quad 2 \leftarrow s$$

نهاية $(3 - s)$ (س ← ٣) = نهاية $(3 - s)$ (س ← ٣)

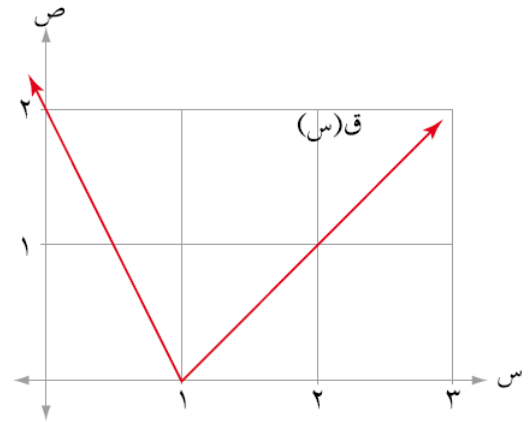
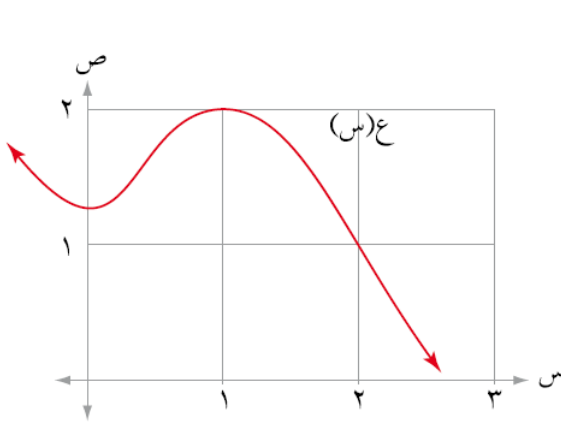
$$1 =$$

ب) نهاية $(s + l(s))$ (س ← ٣)

نهاية s (س ← ٣) + نهاية $l(s)$ (س ← ٣)

$$3 = 1 + 2$$

٨) معتمداً الشكل (١-٦)، الذي يمثل منحنبي الاقترانين ق، ع، جد كلاً مما يأتي:



الشكل (١-٦)

ب) نهاية $(g(s) \times f(s))$ (س ← ٣)

أ) نهاية $(g(s) + f(s))$ (س ← ٣)

ج) نهاية $(2g(s) + (1-s)f(s))$ (س ← ٣)

الحل:

$$\text{أ) نهايا } (ق(س) + ع(س)) \leftarrow_{س \rightarrow 1}$$

$$= \text{نهايا } (ق(س)) \leftarrow_{س \rightarrow 1} + \text{نهايا } (ع(س)) \leftarrow_{س \rightarrow 1}$$

$$صفر = 2 + 2$$

$$\text{ب) نهايا } (ق(س) \times ع(س)) \leftarrow_{س \rightarrow 2}$$

$$= \text{نهايا } (ق(س)) \leftarrow_{س \rightarrow 2} \times \text{نهايا } (ع(س)) \leftarrow_{س \rightarrow 2}$$

$$1 = 1 \times 1$$

$$\text{ج) نهايا } (2(ق(س) - 1) + ع(س)) \leftarrow_{س \rightarrow 1}$$

$$2 \text{ نهايا } (ق(ص)) \leftarrow_{ص \rightarrow 0} + \text{نهايا } (ع(س)) \leftarrow_{س \rightarrow 1}$$

$$6 = 2 + 2 \times 2$$

$$ص = 1 - س$$

$$س \leftarrow 1$$

$$ص \leftarrow صفر$$

٩) إذا كان ق كثير حدود يمر بالنقطة $(-3, 4)$ ، وكانت نهايا $(س - ل(س)) \leftarrow_{س \rightarrow 3} = 10$

$$\text{فجد نهايا } (ق^2(س) - 2ل(س)) \leftarrow_{س \rightarrow 3}$$

الحل:

ق كثير حدود يمر بالنقطة $(-3, 4)$ ، فيكون ق $(-3) = 4$ ومنه: نهايا ق $(س) \leftarrow_{س \rightarrow 3} = 4$

$$\text{نهايا } (س - ل(س)) \leftarrow_{س \rightarrow 3} = 10$$

$$10 = 3 - \text{نهايا } ل(س) \leftarrow_{س \rightarrow 3}$$

$$\text{نهايا } ل(س) \leftarrow_{س \rightarrow 3} = 7$$

$$= \text{نهايا } ق^2(س) \leftarrow_{س \rightarrow 3} - \text{نهايا } 2ل(س) \leftarrow_{س \rightarrow 3}$$

$$24 = 14 - 16 = 7 \times 2 - 2$$

١٠) إذا كان ع كثير حدود باقي قسمته على $(س - 2)$ يساوي ٥، فجد نهايا $(3ع(س) + 4س^2) \leftarrow_{س \rightarrow 2}$

الحل:

لأن ϵ كثير حدود وباقي قسمته على $(s-2)$ يساوي 5 ، فيكون $\epsilon(2) = 5$ ، ومنها:

$$5 = \underset{s \leftarrow 2}{\text{نهاي } \epsilon(s)}$$

إذاً:

$$\underset{s \leftarrow 2}{\text{نهاي } \epsilon(s)} = (4s + 3)\epsilon(s)$$

$$31 = 16 + 15 = (2)4 + 5 \times 3$$