إجابات تمارين ومسائل الدرس

نظريات النهايات

١) إذا كان ق(س) = س^{٢} − س − ٦ ، ل(س) = س^{٢} − ٢ س − ٣ ، فجد كلًّا مما يأتي:

أ) $\underset{\text{س}\leftarrow ١}{\text{نهـــا}} \left(\text{ق(س)} + \text{ل(س)}\right)$

ب) $\underset{\text{س}\leftarrow ١}{\text{نهـــا}}\ \text{ق(س)} \times \text{ل(س)}$

جـ) $\underset{\text{س}\leftarrow ١}{\text{نهـــا}} \dfrac{\text{ل (س)}}{\text{ق (س)}}$

د) $\underset{\text{س}\leftarrow ٢}{\text{نهـــا}} \left(\text{ل(س)}\right)^{٤}$

هـ) $\underset{\text{س}\leftarrow ٢}{\text{نهـــا}} \sqrt[٣]{١ - \text{ل(س)}}$

و) $\underset{\text{س}\leftarrow -١}{\text{نهـــا}} \dfrac{\text{ل (س)}}{\text{ق (س)}}$

الحل:

أ) $\underset{\text{س}\leftarrow ١}{\text{نهـــا}} \left(\text{ق(س)} + \text{ل(س)}\right) = (١ - ١ - ٦) + (١ - ٢ - ٣) = -١٠$

ب) $\underset{\text{س}\leftarrow ١}{\text{نهـــا}}\ \text{ق(س)} \times \text{ل(س)} = -٦ \times -٤ = ٢٤$

جـ) $\underset{\text{س}\leftarrow ١}{\text{نهـــا}} \dfrac{\text{ل (س)}}{\text{ق (س)}} = \dfrac{-٤}{-٦} = \dfrac{٢}{٣}$

د) $\underset{\text{س}\leftarrow ٢}{\text{نهـــا}} \left(\text{ل(س)}\right)^{٤} = (٢^{٢} - ٢ \times ٢ - ٣)^{٤} = (-٣)^{٤} = ٨١$

هـ) $\underset{\text{س}\leftarrow ٢}{\text{نهـــا}} \sqrt[٣]{١ - \text{ل(س)}} = \sqrt[٣]{١ - -٣} = \sqrt[٣]{٤}$

و) $\underset{\text{س}\leftarrow -١}{\text{نهـــا}} \dfrac{\text{ل (س)}}{\text{ق (س)}} = \dfrac{١ + ٢ - ٣}{١ + ١ + -٦} = \dfrac{\text{صفر}}{-٤} = \text{صفر}$

٢)إذا كانت $\underset{\text{س}\leftarrow ٢}{\text{نهـــا}}\ ٢\,\text{ع(س)} = ١٠$ ، $\underset{\text{س}\leftarrow ٢}{\text{نهـــا}}\ ٣\,\text{ل(س)} + ١ = ٧$ ، فجد كلًّا مما يأتي:

أ) $\underset{\text{س}\leftarrow ٢}{\text{نهـــا}} \left(٢\,\text{ع(س)} + \text{ل(س)}\right)$

ب) $\underset{\text{س}\leftarrow ٢}{\text{نهـــا}} \left(\text{ع}^{٣}\text{(س)} - \text{ل}^{٢}\text{(س)}\right)$

جـ) $\underset{\text{س}\leftarrow ٢}{\text{نهـــا}} \dfrac{\sqrt{\text{ل (س)}}}{\text{ع (س)}}$

د) $\underset{\text{س}\leftarrow ٢}{\text{نهـــا}} \left(\text{ع}^{٢}\text{(س)} - \text{ل}^{٢}\text{(س)}\right)$

الحل:

$\underset{\text{س}\leftarrow ٢}{\text{نها}}\ ٢\text{ع(س)} = ١٠$

$\frac{٢}{٢}\ \underset{\text{س}\leftarrow ٢}{\text{نها}}\ (\text{ع(س)}) = \frac{١٠}{٢}$

$\underset{\text{س}\leftarrow ٢}{\text{نها}}\ \text{ع(س)} = ٥$

$\underset{\text{س}\leftarrow ٢}{\text{نها}}\ ٣\text{ل(س)} + ١ = ٧$

$٣\ \underset{\text{س}\leftarrow ٢}{\text{نها}}\ \text{ل(س)} + ١ = ٧$

$٣\ \underset{\text{س}\leftarrow ٢}{\text{نها}}\ \text{ل(س)} = ٦$

$\underset{\text{س}\leftarrow ٢}{\text{نها}}\ \text{ل(س)} = ٢$

أ) $\underset{\text{س}\leftarrow ٢}{\text{نها}}\left(٢\text{ع(س)} + \text{ل(س)}\right) = ٢ \times ٥ + ٢ = ١٢$

ب) $\underset{\text{س}\leftarrow ٢}{\text{نها}}\left(\text{ع}^{٣}\text{(س)} - \text{ل}^{٢}\text{(س)}\right) = ٥^{٣} - ٢^{٢} = ١٢٥ - ٤ = ١٢١$

جـ) $\underset{\text{س}\leftarrow ٢}{\text{نها}}\ \frac{\sqrt{\text{ل (س)}}}{\text{ع (س)}} = \frac{\sqrt{٢}}{٥}$

د) $\underset{\text{س}\leftarrow ٢}{\text{نها}}\left(\text{ع}^{٢}\text{(س)} - \text{ل}^{٢}\text{(س)}\right) = ٥^{٢} - ٢^{٢} = ٢٥ - ٤ = ٢١$

٣) جد كلًّا مما يأتي:

أ) $\underset{\text{س}\leftarrow ٥^{+}}{\text{نها}}\ |\text{س}^{٢} - ٢٥|$

ب) $\underset{\text{س}\leftarrow ٥^{-}}{\text{نها}}\ |\text{س}^{٢} - ٢٥|$

جـ) $\underset{\text{س}\leftarrow ٢^{-}}{\text{نها}}\ |\text{س} - ٢|$

د) $\underset{\text{س}\leftarrow ٨}{\text{نها}}\ |\text{س}^{٢} - ٦٤|$

هـ) $\underset{\text{س}\leftarrow -٤}{\text{نها}}\ [\text{س} - ٢]$

و) $\underset{\text{س}\leftarrow ١}{\text{نها}}\left(\text{س}\,[\text{س}] + |\text{س}|\right)$

ز) $\underset{\text{س}\leftarrow ٥^{-}}{\text{نها}}\ \sqrt{٥ - \text{س}}$

ح) $\underset{\text{س}\leftarrow ١}{\text{نها}}\ \sqrt{١ - \text{س}^{٢}}$

ط) $\underset{\text{س}\leftarrow -٢}{\text{نها}}\ \sqrt{\text{س}^{٢} + ٤\text{س} + ٤}$

الحل:

أ) $\underset{\text{س} \leftarrow ٥^{+}}{\text{نهـا}} \left| \text{س}^{٢} - ٢٥ \right|$

$\text{س}^{٢} - ٢٥ = \text{صفر} \Leftarrow \text{س} = ±٥$

$\underset{\text{س} \leftarrow ٥^{+}}{\text{نهـا}} \left| \text{س}^{٢} - ٢٥ \right| = \underset{\text{س} \leftarrow ٥^{+}}{\text{نهـا}} (\text{س}^{٢} - ٢٥) = \text{صفر}$

ب) $\underset{\text{س} \leftarrow ٥^{-}}{\text{نهـا}} \left| \text{س}^{٢} - ٢٥ \right| = \underset{\text{س} \leftarrow ٥^{-}}{\text{نهـا}} (٢٥ - \text{س}^{٢}) = \text{صفر}$

جـ) $\underset{\text{س} \leftarrow ٢^{-}}{\text{نهـا}} \left| \text{س} - ٢ \right| = \underset{\text{س} \leftarrow ٢^{-}}{\text{نهـا}} (٢ - \text{س}) = \text{صفر}$

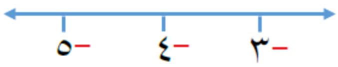
د) $\underset{\text{س} \leftarrow ٨}{\text{نهـا}} \left| \text{س}^{٢} - ٦٤ \right|$

$\underset{\text{س} \leftarrow ٨^{+}}{\text{نهـا}} \text{س}^{٢} - ٦٤ = \text{صفر}$

$\underset{\text{س} \leftarrow ٨^{-}}{\text{نهـا}} ٦٤ - \text{س}^{٢} = \text{صفر}$

$\underset{\text{س} \leftarrow ٨}{\text{نهـا}} \left| \text{س}^{٢} - ٦٤ \right| = \text{صفر}$

هـ) $\underset{\text{س} \leftarrow -٤}{\text{نهـا}} [\text{س} - ٢]$ ل = ١



$$[\text{س} - ٢] = \begin{cases} -٧ \quad ، \quad -٥ \le \text{س} < -٤ \\ -٦ \quad ، \quad -٤ \le \text{س} < -٣ \end{cases}$$

$$\begin{cases} \underset{\text{س} \leftarrow -٤^{+}}{\text{نهـا}} [\text{س} - ٢] = -٦ \\ \underset{\text{س} \leftarrow -٤^{-}}{\text{نهـا}} [\text{س} - ٢] = -٧ \end{cases} \Leftarrow \underset{\text{س} \leftarrow -٤}{\text{نهـا}} [\text{س} - ٢] \text{ غير موجودة}$$

و) $\underset{\text{س} \leftarrow ١}{\text{نهـا}} \left(\text{س} [\text{س}] + \left| \text{س} \right| \right)$

$$[\text{س}] = \begin{cases} \text{صفر} \quad ، \quad ٠ \le \text{س} < ١ \\ ١ \quad ، \quad ١ \le \text{س} < ٢ \end{cases}$$

$$\begin{cases} \underset{\text{س} \leftarrow ١^{-}}{\text{نهـا}} \left(\text{س} \times ٠ + \text{س} \right) = ٠ + ١ = ١ \\ \underset{\text{س} \leftarrow ١^{+}}{\text{نهـا}} \left(\text{س} \times ١ + \text{س} \right) = ١ + ١ = ٢ \end{cases} \Leftarrow \underset{\text{س} \leftarrow ١}{\text{نهـا}} \left(\text{س} [\text{س}] + \left| \text{س} \right| \right) \text{ غير موجودة}$$

ز) $\lim\limits_{\text{س} \to ٥^-} \sqrt{٥ - \text{س}}$

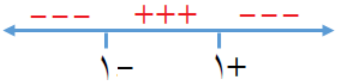
$٥ - \text{س} = \text{صفر}$

$\text{س} = ٥$

$\lim\limits_{\text{س} \to ٥^-} \sqrt{٥ - \text{س}} = \text{صفر}$

ح) $\lim\limits_{\text{س} \to ١} \sqrt{١ - \text{س}^٢}$

$١ - \text{س}^٢ = \text{صفر} \Leftarrow \text{س}^٢ = \pm ١$

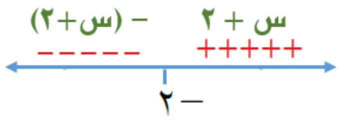


$\left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{\text{س} \to ١^+} \sqrt{١ - \text{س}^٢} = \textbf{غير موجودة} \\ \lim\limits_{\text{س} \to ١^-} \sqrt{١ - \text{س}^٢} = \text{صفر} \end{array} \right.$ $\Leftarrow \lim\limits_{\text{س} \to ١} \sqrt{١ - \text{س}^٢} = \textbf{غير موجودة}$

ط) $\lim\limits_{\text{س} \to -٢} \sqrt{\text{س}^٢ + ٤\text{س} + ٤}$

$\text{س} + ٢ = \text{صفر}$

$\text{س} = -٢$



$\lim\limits_{\text{س} \to -٢} \sqrt{(\text{س} + ٢)^٢} = \lim\limits_{\text{س} \to -٢} |\text{س} + ٢|$

$\left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{\text{س} \to -٢^+} |\text{س} + ٢| = \text{صفر} \\ \lim\limits_{\text{س} \to -٢^-} |\text{س} + ٢| = \text{صفر} \end{array} \right.$ $\Leftarrow \lim\limits_{\text{س} \to -٢} |\text{س} + ٢| = \text{صفر}$

٤) جد قيم جـ التي تجعل $\lim\limits_{\text{س} \to \text{جـ}} \sqrt{٦ - \text{س}}$ غير موجودة.

الحل:

$\lim\limits_{\text{س} \to \text{جـ}} \sqrt{٦ - \text{س}}$

$٦ - \text{س} = \text{صفر} \Leftarrow \text{س} = ٦$

$\lim\limits_{\text{س} \to \text{جـ}} \sqrt{٦ - \text{س}}$ غير موجودة على $[٦ ، \infty)$

٥) إذا كان ق(س)= [٢,٠ س]، فجد قيم جـ التي تجعل $\lim\limits_{\text{س} \to \text{جـ}} [٢,٠ \text{س}] = -١$

الحل:

ق(س) = [٢,٠ س] = [$\frac{٢}{١٠}$ س]

ل = $\frac{١}{\frac{٢}{١٠}}$ = $\frac{١٠}{٢}$ = ٥

ق(س) = { −١ ، −٥ ≤ س < ٠

نهـــا$_{س \leftarrow جـ}$ [٢,٠ س] = −١ **قيم جـ هي** (−٥ ، ٠)

٦) إذا كان ق(س) = { س^٢ − ٤ أ ، س ≥ ٣ ؛ [٦ − س] ، س < ٣

وكانت نهـــا$_{س \leftarrow ٣}$ ق(س) موجودة ، فجد قيمة الثابت أ.

الحل:

[٦ − س] = ٣ ، ٢ < س ≤ ٣

نهـــا$_{س \leftarrow ٣^+}$ س^٢ − ٤ أ = نهـــا$_{س \leftarrow ٣^-}$ ٣

٩ − ٤ أ = ٣ ⟸ $\frac{٤ أ}{٤}$ = $\frac{٦}{٤}$

⟸ أ = $\frac{٦}{٤}$ = $\frac{٣}{٢}$

٧) معتمدًا الشكل (١−١٥) الذي يمثل منحنى الاقتران ل، جد كلًّا مما يأتي:

أ) نهـــا$_{س \leftarrow ٢}$ ل(٣ س − ٣)

ب) نهـــا$_{س \leftarrow ٢}$ (س + ل(س))

الشكل (١−١٥)

الحل:

أ) $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـــا}}$ ل (٣ س − ٣)

ص = ٣ س − ٣

س ← ٢ ⇇ ص ← ٣

$\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـــا}}$ ل (٣ س − ٣) = $\underset{ص \leftarrow ٣}{\text{نهـــا}}$ ل (ص)

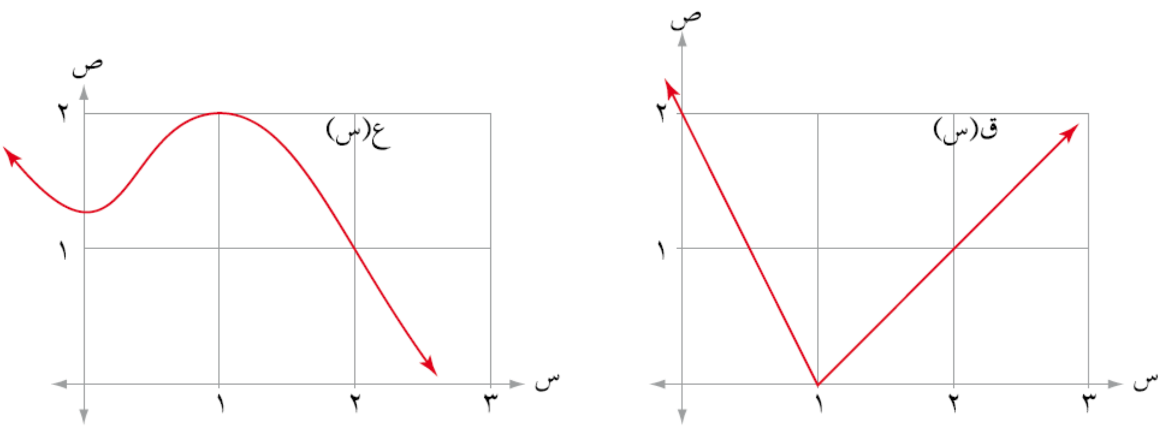
= ١

ب) $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـــا}}$ (س + ل (س))

$\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـــا}}$ س + $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـــا}}$ ل (س)

٢ + ١ = ٣

٨) معتمدًا الشكل (١−١٦)، الذي يمثل منحنيي الاقترانين ق، ع، جد كلًّا مما يأتي:



الشكل (١−١٦)

أ) $\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـــا}}$ (ق(س) + ع(س))

ب) $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـــا}}$ (ق(س) × ع(س))

جـ) $\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـــا}}$ (٢ ق(س−١) + ع(س))

الحل:

أ) $\underset{\text{س} \leftarrow ١}{\text{نهـا}} \left(\text{ق(س)} + \text{ع(س)}\right)$

$= \underset{\text{س} \leftarrow ١}{\text{نهـا}} \text{ق(س)} + \underset{\text{س} \leftarrow ١}{\text{نهـا}} \text{ع(س)} =$

$\text{صفر} + ٢ = ٢$

ب) $\underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهـا}} \left(\text{ق(س)} \times \text{ع(س)}\right)$

$= \underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهـا}} \text{ق(س)} \times \underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهـا}} \text{ع(س)} =$

$١ \times ١ = ١$

جـ) $\underset{\text{س} \leftarrow ١}{\text{نهـا}} \left(٢\ \text{ق(س} - ١) + \text{ع(س)}\right)$

$٢\ \underset{\text{ص} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \text{ق(ص)} + \underset{\text{س} \leftarrow ١}{\text{نهـا}} \text{ع(س)}$

$٢ \times ٢ + ٢ = ٦$

$\text{ص} = \text{س} - ١$

$\text{س} \leftarrow ١$

$\text{ص} \leftarrow \text{صفر}$

٩) إذا كان ق كثير حدود يمر بالنقطة (−٣ ، ٤)، وكانت $\underset{\text{س} \leftarrow -٣}{\text{نهـا}} \left(\text{س} - \text{ل(س)}\right) = -١٠$

فجد $\underset{\text{س} \leftarrow -٣}{\text{نهـا}} \left(\text{ق}^{٢}\text{(س)} - ٢\ \text{ل(س)}\right)$

الحل:

ق كثير حدود يمر بالنقطة (−٣ ، ٤)، فيكون ق (−٣) = ٤ ومنه : $\underset{\text{س} \leftarrow -٣}{\text{نهـا}} \text{ق (س)} = ٤$

$\underset{\text{س} \leftarrow -٣}{\text{نهـا}} \left(\text{س} - \text{ل(س)}\right) = -١٠$

$-٣ - \underset{\text{س} \leftarrow -٣}{\text{نهـا}} \text{ل(س)} = -١٠$

$\underset{\text{س} \leftarrow -٣}{\text{نهـا}} \text{ل(س)} = ٧$

$\underset{\text{س} \leftarrow -٣}{\text{نهـا}} \text{ق}^{٢}\text{(س)} - \underset{\text{س} \leftarrow -٣}{\text{نهـا}} ٢\ \text{ل(س)} =$

$٤^{٢} - ٢ \times ٧ = ١٦ - ١٤ = ٢$

١٠) إذا كان ع كثير حدود باقي قسمته على (س−٢) يساوي٥ ، فجد $\underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهـا}} \left(٣\ \text{ع(س)} + ٤\ \text{س}^{٢}\right)$

الحل:

لأن ع كثير حدود وباقي قسمته على (س−٢) يساوي ٥ ، فيكون ع(٢) = ٥ ، ومنها:

$$\lim_{\text{س} \leftarrow ٢} \text{ع(س)} = ٥$$

إذاً:

$$\lim_{\text{س} \leftarrow ٢} (٣\,\text{ع(س)} + ٤\,\text{س}^٢) =$$

$$٣ \times ٥ + ٤\,(٢)^٢ = ١٥ + ١٦ = ٣١$$