

إجابات أسئلة الدرس

قواعد الاشتقاق 1

(1) جد المشتقة الأولى لكل من الاقترانات الآتية :

أ) $y = \sqrt{3x}$

ب) $y = 4x^{10}$

ج) $y = 4\pi x^2$

د) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

الحل

أ) $y' = \frac{1}{2\sqrt{3x}}$

ب) $y' = 40x^9$

ج) $y' = 8\pi x$ (ثابت)

$y' = \frac{1}{3}$

د) $y' = \left(\frac{1}{3}\right)^x \ln\left(\frac{1}{3}\right)$

$y' = \frac{1}{16} x^{-3}$

$y' = \frac{1}{16} x^{-4} = -\frac{1}{16} x^{-5}$

$y' = -\frac{1}{80} x^{-5}$

(٢) جد $\frac{d}{ds}$ لكل من الاقتارات الآتية :

(أ) $v = 2s^3 + 3s - 4$ (ب) $v = \frac{1}{4}(s^2 + 8)$
 (ج) $v = \frac{4}{3}\pi s^2$ (د) $v = \frac{1}{4}s^4 + \frac{1}{3}s^2 - s$

الحل

(أ) $v = 2s^3 + 3s - 4$

$\frac{dv}{ds} = 6s^2 + 3$

(ب) $v = \frac{1}{4}(s^2 + 8)$

$\frac{dv}{ds} = \frac{1}{2}s + 0 = \frac{1}{2}s$

(ج) $v = \frac{4}{3}\pi s^2$

$\frac{dv}{ds} = \frac{8}{3}\pi s = \frac{8\pi}{3}s$

(د) $v = \frac{1}{4}s^4 + \frac{1}{3}s^2 - s$

$\frac{dv}{ds} = s^3 + \frac{2}{3}s - 1$

$= s^3 + \frac{2}{3}s - 1$

٣) جد ق(س) لكل من الاقترانات الآتية عند قيمة س المبينة إزاء كل منها :

أ) ق(س) = $\frac{1}{4}س$ ، س = 1

ب) ق(س) = $|س - 3| + 2$ ، س = 3

ج) ق(س) = $\frac{1}{4}س + 5 - 2س$ ، س = 2, 4

د) ق(س) = $3س + [س + 1, 0] - |س|$ ، س = 1

الحل

١) ق(س) = $\frac{1}{4}س$
 ق(1) = $\frac{1}{4} \times 1 = \frac{1}{4}$
 ق(3) = $\frac{1}{4} \times 3 = \frac{3}{4}$
 ق(2) = $\frac{1}{4} \times 2 = \frac{1}{2}$
 ق(4) = $\frac{1}{4} \times 4 = 1$

٢) ق(س) = $|س - 3| + 2$
 ق(3) = $|3 - 3| + 2 = 0 + 2 = 2$
 ق(2) = $|2 - 3| + 2 = 1 + 2 = 3$
 ق(4) = $|4 - 3| + 2 = 1 + 2 = 3$

٣) ق(س) = $\frac{1}{4}س + 5 - 2س$
 ق(2) = $\frac{1}{4} \times 2 + 5 - 2 \times 2 = \frac{1}{2} + 5 - 4 = \frac{1}{2} + 1 = 1\frac{1}{2}$
 ق(4) = $\frac{1}{4} \times 4 + 5 - 2 \times 4 = 1 + 5 - 8 = -2$

٤) ق(س) = $3س + [س + 1, 0] - |س|$
 ق(1) = $3 \times 1 + [1 + 1, 0] - |1| = 3 + 2 - 1 = 4$

ق(2) = $3 \times 2 + [2 + 1, 0] - |2| = 6 + 3 - 2 = 7$
 ق(3) = $3 \times 3 + [3 + 1, 0] - |3| = 9 + 4 - 3 = 10$
 ق(4) = $3 \times 4 + [4 + 1, 0] - |4| = 12 + 5 - 4 = 13$

٤) إذا كان ل، هـ اقترانين قابلين للاشتقاق، وكان ل = (٢-)^٤ ، هـ = (٢-)^٣ ، فجد ق(٢-) في كل مما يأتي:

أ) ق(س) = ٦ل(س) - ٢هـ(س)
 ب) ق(س) = $\frac{1}{٢}$ ل(س) + هـ(س) + س^٣

الحل

٤) ن(س) = ٦ل(س) - ٢هـ(س)
 هـ(س) = ٦ل(س) - ٢هـ(س)
 هـ(٢-) = ٦ل(٢-) - ٢هـ(٢-)

$٣ - ٨٤ - ٤ \times ٦ =$

$٣٠ = ٦ + ٢٤ =$

ب) ن(س) = $\frac{1}{٢}$ ل(س) + هـ(س) + س^٣

هـ(س) = $\frac{1}{٢}$ ل(س) + هـ(س) + س^٣

هـ(٢-) = $\frac{1}{٢}$ ل(٢-) + هـ(٢-) + (٢-)^٣

$١٢ + ٣ - + ٤ \times \frac{1}{٢} =$

$١١ = ١٢ + ٣ - ٢ =$

(٥) إذا كان ق(س) = $\left. \begin{array}{l} أس^2 + ب س ، \quad س \geq 1 \\ -٤ - ب س^2 + أس ، \quad س < 1 \end{array} \right\}$ وكانت ق(١) موجودة ، فجد قيمة كل من الثابتين أ ، ب.

الحل

حد (١) موجودة \Leftrightarrow حد متصل عند $س = 1$
 هنا $س = 1$ هنا $س = 1$
 $-1 - ٤$ $+ 1 - ٤$

$$\begin{array}{l} ب + ١ = ١ + ١ - ٤ \\ ١ - ب + ١ = ١ - ١ + ٤ \end{array}$$

$$\boxed{٢ = ب} \Leftrightarrow ب = ٢$$

$$حد (١)^- = حد (١)^+$$

$$\left. \begin{array}{l} حد (١)^- : ١ > ١ \\ حد (١)^+ : ١ < ١ \end{array} \right\} = حد (١)$$

$$١ + ب = ١ + ٢$$

$$١ + ٤ - = ٢ + ٢$$

$$\boxed{١ - = ٢} \Leftrightarrow ٤ - = ٢ + ٢$$

(٦) إذا كان ق(س) = $\left. \begin{array}{l} ل(س) ، \quad س \geq ج \\ ل(ج) - (س - ج) ، \quad س < ج \end{array} \right\}$

وكان ق(س) اقتراناً متصلًا عند $س = ج$ ، وكان ل(س) اقتراناً قابلاً للاشتقاق عند $س = ج$.

فأثبت أن الاقتران ق قابل للاشتقاق عند $س = ج$ ، ثم جد ق(ج).

الحل

حد متصل عند $س = ج$

$$\left. \begin{array}{l} حد (س) = حد (ل(س)) ، \quad س > ج \\ حد (ل(ج)) = ١ \times (ج) ، \quad س < ج \end{array} \right\}$$

$$حد (ج)^+ = حد (ج)^-$$

$$حد (ج)^+ = حد (ج)^-$$

$$\therefore حد (ج) موجودة = حد (ل(ج))$$