إجابات أسئلة الدرس

قواعد الاشتقاق 1

١) جد المشتقة الأولى لكلٍّ من الاقترانات الآتية :

أ) $ق(س) = \sqrt{٣٠}$

ب) $ص = ٤ س^{١٠}$

جـ) $ص = ٤ π^{٢}$

د) $ق(س) = \left(\frac{١}{٢} س\right)^{٤}$

الحل

أ) $ق'(س) = صفر$

ب) $ص' = ٤٠ س^{٩}$

جـ) $ص = ٤ π^{٢}$ (ثابت)

$ص' = صفر$.

د) $ق(س) = \left(\frac{١}{٢} س\right)^{٤}$

$ق(س) = \frac{١}{١٦} س^{٤}$

$ق'(س) = \frac{١}{١٦} \times ٤ س^{٣}$

$= \frac{١}{٤} س^{٣}$.

٢) جد $\frac{دص}{دس}$ لكلٍّ من الاقترانات الآتية :

أ) $ص = س^{٢} + ٣س - ٤$

ب) $ص = \frac{١}{٤} (س^{٢} + ٨)$

جـ) $ص = \frac{٤}{٣} \pi س^{٣}$

د) $ص = \frac{١}{٤} س^{٤} + \frac{١}{٣} س^{٣} - س$

الحل

أ) $ص = س^{٢} + ٣س - ٤$

$\frac{دص}{دس} = ٢س + ٣$.

ب) $ص = \frac{١}{٤} س^{٢} + ٢$

$\frac{دص}{دس} = \frac{١}{٤} \times ٢س + صفر = \frac{١}{٢} س$

جـ) $ص = \frac{٤}{٣} \pi س^{٣}$

$\frac{دص}{دس} = \frac{٤}{\cancel{٣}} \pi \times \cancel{٣} س^{٢} = ٤ \pi س^{٢}$.

د) $ص = \frac{١}{٤} س^{٤} + \frac{١}{٣} س^{٣} - س$.

$\frac{دص}{دس} = \frac{١}{٤} \times ٤س^{٣} + \frac{١}{٣} \times ٣س^{٢} - ١$

$= س^{٣} + س^{٢} - ١$

٣) جد قَ(س) لكلٍّ من الاقترانات الآتية عند قيمة س المبينة إزاء كلٍّ منها :

أ) $ق(س) = \frac{١}{٢} س^{٤}$ ، $س = -١$

ب) $ق(س) = س^{٢} + |٣س - ٦|$ ، $س = ٣$

جـ) $ق(س) = [\frac{١}{٢} س + ٥] - ٤س^{٢}$ ، $س = ٢,٤$

د) $ق(س) = ٣س + [س + ٠,١] - |س|$ ، $س = -١$

الحل

أ) $ق(س) = \frac{١}{٢} س^{٤}$

$قَ(س) = \frac{١}{٢} \times ٤ س^{٣} = ٢ س^{٣}$

$قَ(-١) = ٢(-١)^{٣} = ٢ \times -١ = -٢$

ب) $ق(س) = س^{٢} + |٣س - ٦|$ ، $س = ٣$

$|٣س - ٦| = ٣س - ٦$ عندما $س = ٣$

$ق(س) = س^{٢} + ٣س - ٦$

$قَ(س) = ٢س + ٣$

$قَ(٣) = ٦ + ٣ = ٩$.

جـ) $[\frac{١}{٢} س + ٥]$ $ل = \frac{١}{\frac{١}{٢}} = ٢$

$[\frac{١}{٢} س + ٥] = ٦$ ، $٢ \leq س < ٤$.

$ق(س) = ٦ - ٤س^{٢}$.

$قَ(س) = -٨س$.

$قَ(٢,٤) = -٨ \times ٢,٤ = -١٩,٢$

د) $[س + ٠,١] = -١$ حول $س = -١$

$ق(س) = ٣س - ١ + س$

$ق(س) = ٤س - ١$

$قَ(س) = ٤$

$قَ(-١) = ٤$.

٤) إذا كان ل، هـ اقترانين قابلين للاشتقاق، وكان لَ(−٢) = ٤ ، هـَ(−٢) = −٣ ، فجد قَ(−٢) في كلٍّ مما يأتي:

أ) ق(س) = ٦ ل(س) − ٢هـ(س)

ب) ق(س) = $\frac{١}{٢}$ل(س) + هـ(س) + س^{٣}

الحل

أ) ق(س) = ٦ل(س) − ٢هـ(س)

قَ(س) = ٦ لَ(س) − ٢هـَ(س)

قَ(−٢) = ٦ لَ(−٢) − ٢ هـَ(−٢)

= ٦×٤ − ٢×−٣

= ٢٤ + ٦ = ٣٠

ب) ق(س) = $\frac{١}{٢}$ل(س) + هـ(س) + س^{٣}

قَ(س) = $\frac{١}{٢}$ لَ(س) + هـَ(س) + ٣س^{٢}.

قَ(−٢) = $\frac{١}{٢}$ لَ(−٢) + هـَ(−٢) + ٣(−٢)^{٢}

= $\frac{١}{٢}$× ٤ + −٣ + ١٢

= ٢ − ٣ + ١٢ = ١١

٥) إذا كان ق(س) = $\begin{cases} \text{أ س}^{٢} + \text{ب س} & \text{، س} \leq ١ \\ ٤ - \text{ب س}^{٢} + \text{أ س} & \text{، س} > ١ \end{cases}$

وكانت قَ(١) موجودة، فجد قيمة كلٍّ من الثابتَيْن أ، ب.

الحل

قَ(١) موجودة ⇐ ق متصل عند س = ١

$\lim_{\text{س}\to ١^{+}}$ ق(س) = $\lim_{\text{س}\to ١^{-}}$ ق(س)

$٤ - \text{ب} + \text{أ} = \text{أ} + \text{ب}$

$+\text{ب} - \text{أ} \qquad +\text{ب} - \text{أ}$

$\frac{٤}{٢} = \frac{٢\text{ب}}{٢} \Leftarrow \boxed{\text{ب} = ٢}$

قَ$(١)^{+}$ = قَ$(١)^{-}$

قَ(س) = $\begin{cases} ٢\text{أ س} + \text{ب} & \text{، س} < ١ \\ -٢\text{ب س} + \text{أ} & \text{، س} > ١ \end{cases}$

$٢\text{أ} + \text{ب} = -٢\text{ب} + \text{أ}$

$٢\text{أ} + ٢ = -٤ + \text{أ}$

$-\text{أ} \qquad -\text{أ}$

$\text{أ} + ٢ = -٤ \Leftarrow \boxed{\text{أ} = -٦}$

---

٦) إذا كان ق(س) = $\begin{cases} \text{ل(س)} & \text{، س} \leq \text{جـ} \\ \text{لَ(جـ) (س} - \text{جـ)} & \text{، س} > \text{جـ} \end{cases}$

وكان ق(س) اقترانًا متصلًا عند س = جـ، وكان ل(س) اقترانًا قابلًا للاشتقاق عند س = جـ.

فأثبت أنَّ الاقتران ق قابل للاشتقاق عند س = جـ، ثم جد قَ(جـ).

الحل

ق متصل عند س = جـ

قَ(س) = $\begin{cases} \text{لَ(س)} & \text{، س} < \text{جـ} \\ \text{لَ(جـ)} \times ١ & \text{، س} > \text{جـ} \end{cases}$

قَ$(\text{جـ})^{+}$ = لَ(جـ)

قَ$(\text{جـ})^{-}$ = لَ(جـ)

∴ قَ(جـ) موجودة = لَ(جـ).