

إجابات أسئلة الدرس

الاشتقاق الضمني

(١) جد $\frac{dy}{dx}$ لكل مما يأتي :

أ) $x^2 + 4y^2 = 16$

ج) $x^2 + 3y = x^3$

ب) $\sqrt{x^2 + 3y} = 2$

د) $(x+y)^2 = x^2$

الحل

أ) $x^2 + 4y^2 = 16$
 $\frac{d}{dx}(x^2 + 4y^2) = \frac{d}{dx}16$

$2x + 8y \frac{dy}{dx} = 0$

$8y \frac{dy}{dx} = -2x$

$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{8y}$

ب) $\sqrt{x^2 + 3y} = 2$
 $\frac{d}{dx}(\sqrt{x^2 + 3y}) = \frac{d}{dx}2$

$\frac{1}{2\sqrt{x^2 + 3y}}(2x + 3 \frac{dy}{dx}) = 0$

$\frac{2x + 3 \frac{dy}{dx}}{2\sqrt{x^2 + 3y}} = 0$
 $2x + 3 \frac{dy}{dx} = 0$
 $\frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{3}$

$$(ج) \quad 1 \times c + c' s = c' c^3 + c^3 c'$$

$$c^3 c' - c' c^3 = c' c - c' c^3$$

$$\frac{c^3 c' - c' c^3}{c^3 - c^3} = \frac{(c - c^3)}{c - c^3} c'$$

$$\frac{c^3 c' - c' c^3}{c^3 - c^3} = c'$$

$$(د) \quad \text{حيث } (s) = (s + c) = c^2$$

$$s = c^2 \text{ حيث } (s) = c^2 + c^2 \text{ حيث } (s) = c^2$$

$$\frac{s = c^2 \text{ حيث } (s) = c^2 - c^2}{s = c^2 \text{ حيث } (s) = c^2}$$

$$\frac{s = c^2 \text{ حيث } (s) = c^2 - c^2}{s = c^2 \text{ حيث } (s) = c^2}$$

$$\frac{(s = c^2 \text{ حيث } (s) = c^2 - c^2)}{s = c^2 \text{ حيث } (s) = c^2} = c'$$

(٢) جد $\frac{y^2}{x^2}$ لكل مما يأتي :

(ب) $4x^2 + 3y^2 = 16$
 (د) $\sqrt{y} = x + 2$

أ) $(x^2 - 4)^2 = 4$
 ج) $x = 3y$

الحل

أ) $x^2 - 4 = 2$
 $x^2 = 6$
 $x = \sqrt{6}$
 $y = \frac{x^2}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$
 $\frac{y^2}{x^2} = \frac{(\frac{3}{2})^2}{(\sqrt{6})^2} = \frac{\frac{9}{4}}{6} = \frac{9}{24} = \frac{3}{8}$

ب) $4x^2 + 3y^2 = 16$
 $8x + 6y \frac{dy}{dx} = 0$
 $6y \frac{dy}{dx} = -8x$
 $\frac{dy}{dx} = -\frac{4x}{3y}$
 $\frac{dy}{dx} = -\frac{4(\sqrt{y})}{3y}$
 $\frac{dy}{dx} = -\frac{4}{3\sqrt{y}}$
 $\frac{dy}{dx} = -\frac{4}{3\sqrt{2}}$



$$\frac{1}{y^2} + \frac{1}{y} - \frac{2x-2}{y^3} = 0$$

$$(ب) \quad 1 + y - \frac{2x-2}{y^2} = 0$$

$$1 + y - \frac{2x-2}{y^2} = 0$$

$$\frac{2x-2}{y^2} = 1 + y$$

$$2x-2 = y^2(1+y)$$

$$\frac{2x-2}{y^2} = 1 + y$$

$$\frac{2x-2}{y^2} = 1 + y$$

$$\frac{2x-2}{y^2} = 1 + y$$

$$\frac{2x-2}{y^2} = 1 + y$$

$$\frac{2x-2}{y^2} = 1 + y$$

$$\frac{2x-2}{y^2} = 1 + y$$

$$\frac{2x-2}{y^2} = 1 + y$$

$$\frac{2x-2}{y^2} = 1 + y$$

$$\frac{2x-2}{y^2} = 1 + y$$

$$(ج) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \quad \text{حيث } y = x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = 2x = \frac{y}{x}$$

$$y = x^2 = (x+1)^2 - 2x - 1$$

$$\frac{dy}{dx} = 2(x+1) - 2 = 2x$$

$$\frac{d(x^2)}{dx} = \frac{d((x+1)^2 - 2x - 1)}{dx} = 2(x+1) - 2 = 2x$$

$$\frac{d(x^2)}{dx} = \frac{d(x^2 - 2x - 1)}{dx} = 2x - 2 = 2(x-1)$$

$$\frac{d(x^2)}{dx} = \frac{d(x^2 - 2x - 1)}{dx} = 2x - 2 = 2(x-1)$$

$$(د) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \quad \text{حيث } y = x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = 2x = \frac{y}{x}$$

$$y = x^2 = (x+1)^2 - 2x - 1$$

$$\frac{dy}{dx} = 2(x+1) - 2 = 2x$$

$$\frac{d(x^2)}{dx} = \frac{d(x^2 - 2x - 1)}{dx} = 2x - 2 = 2(x-1)$$

$$\frac{d(x^2)}{dx} = \frac{d(x^2 - 2x - 1)}{dx} = 2x - 2 = 2(x-1)$$

$$\frac{d(x^2)}{dx} = \frac{d(x^2 - 2x - 1)}{dx} = 2x - 2 = 2(x-1)$$

٣) جد قيمة $\frac{y}{x}$ لكل من العلاقات الآتية عند النقط المبينة إزاء كل منها :

أ) $8x^2 + y^2 = \pi$ ، $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4})$

ب) $2x^2 + y^2 = 2$ ، $(1, 1)$

ج) $3 = \frac{2}{x} + \frac{4}{y}$ ، $(1, 4)$

الحل

أ) $8x^2 + y^2 = \pi$ ؟
 $16x^2 + 2y^2 = 2\pi$
 $16x^2 + 2y^2 = 2\pi$

$16x^2 + 2y^2 = 2\pi$
 $16x^2 + 2y^2 = 2\pi$

$16x^2 + 2y^2 = 2\pi$
 $16x^2 + 2y^2 = 2\pi$

$\frac{16x^2 + 2y^2}{16x^2 - 2y^2} = \frac{2\pi}{16x^2 - 2y^2}$

عند $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4})$

$\frac{16 \times \frac{\pi}{4} + 2 \times \frac{\pi}{4}}{16 \times \frac{\pi}{4} - 2 \times \frac{\pi}{4}} = \frac{2\pi}{16 \times \frac{\pi}{4} - 2 \times \frac{\pi}{4}}$

$\frac{16 \times \frac{\pi}{4} + 2 \times \frac{\pi}{4}}{16 \times \frac{\pi}{4} - 2 \times \frac{\pi}{4}} = \frac{2\pi}{16 \times \frac{\pi}{4} - 2 \times \frac{\pi}{4}}$

ب) $2x^2 + y^2 = 2$ ، $(1, 1)$

$4x^2 + 2y^2 = 4$
 $4x^2 + 2y^2 = 4$

$4x^2 + 2y^2 = 4$
 $4x^2 + 2y^2 = 4$

$4x^2 + 2y^2 = 4$
 $4x^2 + 2y^2 = 4$

$4x^2 + 2y^2 = 4$
 $4x^2 + 2y^2 = 4$

$4x^2 + 2y^2 = 4$
 $4x^2 + 2y^2 = 4$

$4x^2 + 2y^2 = 4$
 $4x^2 + 2y^2 = 4$

ج) $3 = \frac{2}{x} + \frac{4}{y}$ ، $(1, 4)$

$3 = \frac{2}{x} + \frac{4}{y}$
 $3 = \frac{2}{x} + \frac{4}{y}$

$3 = \frac{2}{x} + \frac{4}{y}$
 $3 = \frac{2}{x} + \frac{4}{y}$

$3 = \frac{2}{x} + \frac{4}{y}$
 $3 = \frac{2}{x} + \frac{4}{y}$

$3 = \frac{2}{x} + \frac{4}{y}$
 $3 = \frac{2}{x} + \frac{4}{y}$

$3 = \frac{2}{x} + \frac{4}{y}$
 $3 = \frac{2}{x} + \frac{4}{y}$

٤) إذا كان جا(س + ص) = ص^٢ جتا(س)، فجد ص'.

الحل

منهاجي
متعة التعليم الهادف

$$\begin{aligned} \text{جبا (س + ص)} (ص + س) + \text{جبا (س + ص)} (ص + س) &= ص^2 \text{جبا (س + ص)} \\ \text{جبا (س + ص)} (ص + س) + \text{جبا (س + ص)} (ص + س) &= ص^2 \text{جبا (س + ص)} \\ \text{جبا (س + ص)} (ص + س) - \text{جبا (س + ص)} (ص + س) &= ص^2 \text{جبا (س + ص)} \\ \text{ص} (ص + س) - \text{ص} (ص + س) &= ص^2 \text{جبا (س + ص)} \end{aligned}$$

منهاجي
متعة التعليم الهادف

منهاجي
متعة التعليم الهادف

$$\frac{\text{ص} (ص + س) - \text{ص} (ص + س)}{\text{جبا (س + ص)} (ص + س)} = \text{ص}'$$

٥) جد النقطة على منحنى العلاقة $\sqrt{ص} + \sqrt{س} = ٣$ التي يكون عندها المماس أفقيًا.

الحل

منهاجي
متعة التعليم الهادف

$$\begin{aligned} ٣ &= \sqrt{ص} + \sqrt{س} \\ ٠ &= \frac{1}{2\sqrt{ص}} \text{ص}' + \frac{1}{2\sqrt{س}} \end{aligned}$$

منهاجي
متعة التعليم الهادف

$$\frac{\text{ص}'}{2\sqrt{ص}} = -\text{ص}' \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{ص}} = \frac{\text{ص}'}{\sqrt{س}}$$

$$\text{المماس أفقي} \Leftrightarrow \text{ص}' = ٠$$

منهاجي
متعة التعليم الهادف

$$\frac{\sqrt{ص}}{\sqrt{س}} = \frac{\text{ص}'}{\sqrt{س}} \Leftrightarrow \sqrt{ص} = \text{ص}'$$

$$\text{نعوض } \sqrt{ص} = ٣ \Leftrightarrow ٣ = \sqrt{ص} + \sqrt{س}$$

$$\Leftrightarrow ٩ = س \quad (٠.٦٩)$$

(٦) إذا كان $v = \sqrt{2s + 1}$ فجد $\frac{dv}{ds}$.

الحل

$$v^2 = 2s + 1 \Rightarrow 2v \frac{dv}{ds} = 2$$

$$\frac{dv}{ds} = \frac{2}{2v} = \frac{1}{v}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2s + 1}}$$

(٧) إذا كان $s = \cos v$ ، فأثبت أن $v = \arccos s$.

الحل

$$s = \cos v$$

$$1 = \cos v \times \frac{1}{\cos v}$$

$$v = \arccos \frac{1}{\cos v} = \arccos s$$

نعرف $v = \arccos s$

$$v = \arccos s$$

$$v = \arccos s \Rightarrow \cos v = s$$

(٨) إذا كان $v = \arcsin s$ ، فجد $\frac{dv}{ds}$ عند النقطة $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$.

الحل

$$v = \arcsin s \Rightarrow \sin v = s$$

$$\cos v \frac{dv}{ds} = 1 \Rightarrow \frac{dv}{ds} = \frac{1}{\cos v}$$

$$\text{عند } (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$$

$$\frac{dv}{ds} = \frac{1}{\cos \frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2}$$

$$\frac{dv}{ds} = \frac{1}{\cos v} = \frac{1}{\cos \frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}$$

$$\frac{dv}{ds} = \sqrt{2}$$

$$\sqrt{2} = \frac{dv}{ds}$$

٩) إذا كان $s = \cos$ ، فأثبت أن: $s' = -2s + s^2 + s = 0$

الحل

$$s = \cos$$

$$-s' = \sin$$

$$s' = -\sin = -\sqrt{1-s^2}$$

$$s' = -\sqrt{1-s^2}$$

$$s' = -\sqrt{1-s^2} \Rightarrow s'^2 = 1-s^2$$

$$s' = -\sqrt{1-s^2} \Rightarrow s' = 0 \Rightarrow s = \pm 1$$

١٠) إذا كان $v = 2n^2 + 3n$ ، $\frac{dv}{dn} = 4n$ ، فجد $\frac{dv}{ds}$ عند $n = 1$.

الحل

$$v = 2n^2 + 3n$$

$$\frac{dv}{dn} = 4n + 3$$

$$\frac{dv}{ds} = \frac{dv}{dn} \times \frac{dn}{ds}$$

$$\frac{dv}{ds} = \frac{4n+3}{1} = 4n+3$$

$$\frac{dv}{ds} = 4n+3$$

$$\frac{dv}{ds} = 4n+3$$

$$\frac{dv}{ds} = 4n+3$$

$$\text{عند } n = 1$$

$$\frac{dv}{ds} = 4(1)+3 = 7$$

(١١) إذا كان $s + v = جا ص$ ، فأثبت أن:
(ص) $= 2 = ص$ (ظنا ص - قناص)

الحل

$$ص = جا ص + ص$$

$$1 + ص = ص + ص (نشترة ص)$$

$$ص = ص + ص \cdot ص + ص - جا ص \times ص$$

$$ص = ص + ص \cdot ص - (ص) جا ص$$

$$(ص) جا ص = ص - ص \cdot ص$$

$$(ص) جا ص = ص (جا ص - 1)$$

$$(ص) = ص \left(\frac{جا ص}{جا ص} - \frac{1}{جا ص} \right)$$

$$(ص) = ص (جا ص - قناص) \text{ وهو المطلوب}$$

(١٢) إذا كان $s + v = جا ص$ ، فأثبت أن:

$$ص + ص = \frac{2ص}{ص-1}$$

الحل

$$ص = جا ص + ص$$

$$ص - ص = جا ص - ص$$

$$ص = ص + ص \cdot ص - جا ص$$

$$ص - ص = ص + ص \cdot ص - جا ص (نشترة)$$

$$ص - ص = ص + ص \cdot ص - جا ص$$

$$ص - ص = ص + ص \cdot ص - جا ص$$

$$ص - ص = ص + ص \cdot ص - جا ص$$

$$ص - ص = ص + ص \cdot ص - جا ص$$

$$ص - ص = ص + ص \cdot ص - جا ص$$

$$ص - ص = ص + ص \cdot ص - جا ص$$

$$ص - ص = ص + ص \cdot ص - جا ص$$

$$\frac{c'}{s-1} = \frac{(c'' + c')(s-1)}{s-1}$$

وهو المطلوب $\frac{c'}{s-1} = c'' + c'$