

إجابات أسئلة الدرس

الاشتقاق الضمني

(١) جد $\frac{dy}{dx}$ لكل مما يأتي :

أ) $x^2 + 4y^2 = 16$

ب) $x^2 + 3y^2 = 3$

ج) $x^2 + 3y^2 = 3$

د) $x^2 + 3y^2 = 3$

الحل

أ) $x^2 + 4y^2 = 16$

$$\frac{d}{dx}(x^2 + 4y^2) = \frac{d}{dx}(16)$$

$$2x + 8y \frac{dy}{dx} = 0$$

$$8y \frac{dy}{dx} = -2x$$

ب) $x^2 + 3y^2 = 3$

$$\frac{d}{dx}(x^2 + 3y^2) = \frac{d}{dx}(3)$$

$$2x + 6y \frac{dy}{dx} = 0$$

$$6y \frac{dy}{dx} = -2x$$

$$(ج) \quad 1 \times c + c' s = c' c^3 + c^3 c'$$

$$c^3 - c = c' s - c' c^3$$

$$\frac{c^3 - c}{s - c^3} = \frac{(s - c^3) c'}{s - c^3}$$

$$\frac{c^3 - c}{s - c^3} = c'$$

$$(د) \quad \text{حيث } (s) = (s + c) = c^2$$

$$s = c' \text{ حيث } (s) = c + c' \text{ حيث } (s) = c^2$$

$$\frac{s - c' \text{ حيث } (s) = c^2}{s \text{ حيث } (s) = c^2} = c'$$

$$\frac{s - c' \text{ حيث } (s) = c^2}{s \text{ حيث } (s) = c^2} = c'$$

$$\frac{s - c' \text{ حيث } (s) = c^2}{s \text{ حيث } (s) = c^2} = c'$$

(٢) جد $\frac{y^2}{x^2}$ لكل مما يأتي :

(ب) $4x^2 + 3y^2 = 16$
(د) $\sqrt{y} = x + 2$

أ) $(x^2 - 4)^2 = 4$
ب) $x^2 = 4 - y^2$

الحل

أ) $x^2 - 4 = y^2$

$2x = 2y \cdot y'$

$x = y \cdot y'$

$\frac{x}{y} = y'$

$\frac{x}{y} = \frac{y \cdot y'}{y}$

$\frac{x}{y} = y'$

$\frac{x}{y} = \frac{y \cdot y'}{y}$

$\frac{x}{y} = y'$

$$\frac{1}{y^2} + \frac{1}{y} - \frac{2x-2}{y^3} = 0$$

$$(ب) \quad 1 + y - \frac{2x-2}{y^2} = 0$$

$$1 + y = \frac{2x-2}{y^2}$$

$$\frac{1+y}{y^2} = \frac{2x-2}{y^2}$$

$$1+y = 2x-2$$

$$\frac{1+y}{y^2} = \frac{2x-2}{y^2}$$

$$\frac{1+y}{y^2} = \frac{2x-2}{y^2}$$

$$(y^2)$$

$$\frac{1+y}{y^2} = \frac{2x-2}{y^2}$$

$$y^2$$

$$\frac{1+y}{y^2} = \frac{2x-2}{y^2}$$

$$\frac{1+y}{y^2} = \frac{2x-2}{y^2}$$

$$y^2$$

$$\frac{1+y}{y^2} = \frac{2x-2}{y^2}$$

$$(ج) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \quad \text{حيث } y = x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = 2x$$

$$y = x^2 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 2x$$

$$\frac{dy}{dx} = 2x$$

$$\frac{dy}{dx} = 2x$$

$$\frac{d(x^2)}{dx} = 2x$$

$$\frac{d(x^2)}{dx} = 2x$$

$$\frac{d(x^2)}{dx} = 2x$$

$$(د) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln y = \ln x + C$$

$$\ln y = \ln x + C$$

$$\ln y = \ln x + C$$

$$\ln y = \ln x + C$$

٣) جد قيمة $\frac{y}{x}$ لكل من العلاقات الآتية عند النقط المبينة إزاء كل منها :

أ) $8x^2 + y^2 = \pi^2$ ، $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4})$

ب) $2x^2 + y^2 = 2$ ، $(1, 1)$

ج) $3 = \frac{2}{x} + \frac{4}{y}$ ، $(1, 4)$

الحل

أ) $8x^2 + y^2 = \pi^2$ ؟
 $16x^2 + 2y^2 = 2\pi^2$
 $16x^2 + 2y^2 = 2\pi^2$

$16x^2 + 2y^2 = 2\pi^2$
 $8x^2 + y^2 = \pi^2$

$8x^2 + y^2 = \pi^2$
 $8x^2 + y^2 = \pi^2$

$\frac{8x^2 + y^2}{8x^2 - y^2} = \frac{\pi^2}{\pi^2}$

عند $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4})$

$\frac{\frac{\pi}{2} \times 8 - \frac{\pi}{4} \times 8}{\frac{\pi}{2} \times 8 - \frac{\pi}{4} \times 8} = \frac{y}{x}$

$\frac{\pi \times 4 - \pi \times 2}{\pi \times 4 - \pi \times 2} = \frac{y}{x}$

ب) $2x^2 + y^2 = 2$ ، $(1, 1)$

$4x^2 + 2y^2 = 4$
 $4x^2 + 2y^2 = 4$

$4x^2 + 2y^2 = 4$
 $4x^2 + 2y^2 = 4$

$4x^2 + 2y^2 = 4$
 $4x^2 + 2y^2 = 4$

$4x^2 + 2y^2 = 4$
 $4x^2 + 2y^2 = 4$

$4x^2 + 2y^2 = 4$
 $4x^2 + 2y^2 = 4$

$4x^2 + 2y^2 = 4$
 $4x^2 + 2y^2 = 4$

$4x^2 + 2y^2 = 4$
 $4x^2 + 2y^2 = 4$

$4x^2 + 2y^2 = 4$
 $4x^2 + 2y^2 = 4$

$4x^2 + 2y^2 = 4$
 $4x^2 + 2y^2 = 4$

$4x^2 + 2y^2 = 4$
 $4x^2 + 2y^2 = 4$

$4x^2 + 2y^2 = 4$
 $4x^2 + 2y^2 = 4$

$4x^2 + 2y^2 = 4$
 $4x^2 + 2y^2 = 4$

٤) إذا كان جا(س + ص) = ص^٢ جتا(س)، فجد ص'.

الحل

$$\text{جبا} (س + ص) (ص + ١) = ص' - ص \text{جا} + \text{جبا} \times ٢ ص ص'$$

$$\text{جبا} (س + ص) + \text{جبا} (س + ص) ص' = ص' - ص \text{جا} + ٢ ص \text{جبا} ص'$$

$$\text{جبا} (س + ص) ص' - ٢ ص \text{جبا} ص' = ص' - ص \text{جا} - \text{جبا} (س + ص) ص'$$

$$ص' (\text{جبا} (س + ص) - ٢ ص \text{جبا}) = ص' - ص \text{جا} - \text{جبا} (س + ص) ص'$$

$$ص' = \frac{ص' - ص \text{جا} - \text{جبا} (س + ص) ص'}{\text{جبا} (س + ص) - ٢ ص \text{جبا}}$$

٥) جد النقطة على منحنى العلاقة $\sqrt{ص} + \sqrt{س} = ٣$ التي يكون عندها المماس أفقيًا.

الحل

$$\sqrt{ص} + \sqrt{س} = ٣$$

$$\frac{1}{2\sqrt{ص}} = \frac{1}{2\sqrt{س}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{ص}} = \frac{1}{\sqrt{س}} \Leftrightarrow \sqrt{ص} = \sqrt{س}$$

$$\text{المماس أفقي} \Leftrightarrow ص' = ص'$$

$$\frac{\sqrt{ص}}{\sqrt{س}} = \frac{\sqrt{س}}{\sqrt{ص}} \Leftrightarrow \sqrt{ص} = \sqrt{س}$$

$$\text{نعوض } \sqrt{ص} = \sqrt{س} \text{ في } \sqrt{ص} + \sqrt{س} = ٣ \Rightarrow \sqrt{س} + \sqrt{س} = ٣$$

$$\Leftrightarrow ٢\sqrt{س} = ٣ \Rightarrow \sqrt{س} = \frac{٣}{٢} \Rightarrow س = \left(\frac{٣}{٢}\right)^2$$

(٦) إذا كان $v = \sqrt{2s + 1}$ فجد $\frac{dv}{ds}$.

الحل

$$v^2 = 2s + 1 \Rightarrow 2v \frac{dv}{ds} = 2$$

$$\frac{dv}{ds} = \frac{2}{2v} = \frac{1}{v}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2s + 1}}$$

(٧) إذا كان $s = \cos v$ ، فأثبت أن $v = \arccos s$.

الحل

$$s = \cos v$$

$$1 = \cos v \times \frac{1}{\cos v}$$

$$v = \arccos \frac{1}{\cos v} = \arccos s$$

$$v = \arccos s \Rightarrow \cos v = s$$

$$v = \arccos s \Rightarrow \sin v = \sqrt{1 - s^2}$$

$$v = \arccos s \Rightarrow \tan v = \frac{\sqrt{1 - s^2}}{s}$$

(٨) إذا كان $v = \arcsin s$ ، فجد $\frac{dv}{ds}$ عند النقطة $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$.

الحل

$$v = \arcsin s \Rightarrow \sin v = s$$

$$\cos v \frac{dv}{ds} = 1 \Rightarrow \frac{dv}{ds} = \frac{1}{\cos v}$$

$$\text{عند } (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$$

$$\frac{dv}{ds} = \frac{1}{\cos(\frac{\pi}{4})} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2}$$

$$\frac{dv}{ds} = \frac{1}{\cos v} = \frac{1}{\sqrt{1 - s^2}}$$

$$\frac{dv}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1 - s^2}}$$

$$\sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{1 - s^2}}$$

٩) إذا كان $s = \cos$ ، فأثبت أن: $s' = -2s + s^2 + s = 0$

الحل

$$s = \cos$$

$$-s' = \sin = -\cos^2$$

$$s' = \cos^2 - 2s = -2s + s^2 + s = 0$$

$$s' = \cos^2 - 2\cos = -2\cos + \cos^2 + \cos = 0$$

$$s' = \cos^2 - 2\cos + \cos = -\cos = 0$$

$$s' = \cos^2 - 2\cos + \cos = -\cos = 0$$

١٠) إذا كان $v = 2n^2 + 3n$ ، $\frac{dv}{dn} = 4n$ ، فجد $\frac{dv}{ds}$ عند $n = 1$.

الحل

$$v = 2n^2 + 3n$$

$$\frac{dv}{dn} = 4n + 3 = 4(1) + 3 = 7$$

$$\frac{dv}{ds} = \frac{dv}{dn} \times \frac{dn}{ds} = 7 \times \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$$

$$\frac{dv}{ds} = \frac{1}{4} \times (4n + 3) = \frac{4n + 3}{4}$$

$$\frac{dv}{ds} = \frac{4(1) + 3}{4} = \frac{7}{4}$$

$$\frac{dv}{ds} = \frac{4(1) + 3}{4} = \frac{7}{4}$$

$$\frac{dv}{ds} = \frac{7}{4}$$

$$n = 1$$

$$\frac{dv}{ds} = \frac{7}{4} = \frac{7}{4}$$

(١١) إذا كان $s + v = \text{جاس}$ ، فأثبت أن:

$$v' = 2 \text{ص}'' \text{ (ظنا ص - قناص)}$$

الحل

$$v = \text{ص} + \text{جاس}$$

$$1 + v' = \text{ص}' + \text{جاس}' \text{ (تستعمل قاعدة المشتقة)}$$

$$v' = \text{ص}'' + \text{جاس}'' = \text{ص}'' + \text{ص}'' + \text{ص}'' = 3\text{ص}''$$

$$v' = \text{ص}'' + \text{جاس}'' = \text{ص}'' + \text{ص}'' + \text{ص}'' = 3\text{ص}''$$

$$v' = \text{ص}'' + \text{جاس}'' = \text{ص}'' + \text{ص}'' + \text{ص}'' = 3\text{ص}''$$

$$v' = \text{ص}'' + \text{جاس}'' = \text{ص}'' + \text{ص}'' + \text{ص}'' = 3\text{ص}''$$

$$v' = \text{ص}'' + \text{جاس}'' = \text{ص}'' + \text{ص}'' + \text{ص}'' = 3\text{ص}''$$

$$v' = \text{ص}'' + \text{جاس}'' = \text{ص}'' + \text{ص}'' + \text{ص}'' = 3\text{ص}''$$

(١٢) إذا كان $s + v = \text{جاس}$ ، فأثبت أن:

$$v' = \frac{2\text{ص}''}{s-1}$$

الحل

$$v = \text{ص} + \text{جاس}$$

$$v' = \text{ص}' + \text{جاس}'$$

$$v' = \text{ص}'' + \text{جاس}'' = \text{ص}'' + \text{ص}'' + \text{ص}'' = 3\text{ص}''$$

$$v' = \text{ص}'' + \text{جاس}'' = \text{ص}'' + \text{ص}'' + \text{ص}'' = 3\text{ص}''$$

$$v' = \text{ص}'' + \text{جاس}'' = \text{ص}'' + \text{ص}'' + \text{ص}'' = 3\text{ص}''$$

$$v' = \text{ص}'' + \text{جاس}'' = \text{ص}'' + \text{ص}'' + \text{ص}'' = 3\text{ص}''$$

$$v' = \text{ص}'' + \text{جاس}'' = \text{ص}'' + \text{ص}'' + \text{ص}'' = 3\text{ص}''$$

$$v' = \text{ص}'' + \text{جاس}'' = \text{ص}'' + \text{ص}'' + \text{ص}'' = 3\text{ص}''$$

$$v' = \text{ص}'' + \text{جاس}'' = \text{ص}'' + \text{ص}'' + \text{ص}'' = 3\text{ص}''$$

$$v' = \text{ص}'' + \text{جاس}'' = \text{ص}'' + \text{ص}'' + \text{ص}'' = 3\text{ص}''$$

$$v' = \text{ص}'' + \text{جاس}'' = \text{ص}'' + \text{ص}'' + \text{ص}'' = 3\text{ص}''$$

$$\frac{c}{s-1} = \frac{(c+s)(s-1)}{s-1}$$

وهو المطلوب $\frac{c}{s-1} = c+s$