إجابات أسئلة الدرس

الاشتقاق الضمني

١) جد $\frac{ص}{س}$ لكلٍّ مما يأتي :

أ) $س^{٢} + ٤ص^{٢} = ١٦$

ب) $ص^{٢} = \sqrt{س^{٣} + ٤س^{٢}}$

جـ) $س^{٣} + ص^{٣} = س ص$

د) جا(س ص) = $س^{٢}$

الحل

أ)

$$\frac{د ص}{د س} = -\frac{٨ص}{-٢س} = \frac{٨ص}{د س} \times \frac{د ص}{٨ص}$$

$$\frac{د ص}{د س} = \frac{-س}{٤ص}$$

ب)

$$ص' = \frac{٨س + ٣س^{٢}}{٢\sqrt{٤س + ٣س^{٢}}}$$

$$ص' = \frac{٨س + ٣س^{٢}}{٢ص\sqrt{٤س + ٣س^{٢}}}$$

جـ) $3س^2 + 3ص^2 ص' = ص + س ص' \times 1$

$3ص^2 ص' - س ص' = ص - 3س^2$

$ص' (3ص^2 - س) = ص - 3س^2$

$$ص' = \frac{ص - 3س^2}{3ص^2 - س}$$

د) $هـ(س ص) (س ص' + ص) = 2س$

$س ص' هـ(س ص) + ص هـ(س ص) = 2س$

$$\frac{س ص' هـ(س ص)}{س هـ(س ص)} = \frac{2س - ص هـ(س ص)}{س هـ(س ص)}$$

$$ص' = \frac{2س - ص هـ(س ص)}{س هـ(س ص)}$$

٢) جد $\frac{د^{٢}ص}{د س^{٢}}$ لكلٍّ مما يأتي :

أ) $(س\ ص)^{٣} = ٤ س$

ب) $٤ س^{٢} + ٣ ص^{٢} = ١٦$

جـ) $ص = س\ جتا\ ص$

د) $جا\ س = \sqrt{ص} + ٢$

الحل

أ) $س^{٣} ص^{٣} = ٤ س$

$$س^{٣} \times ٣ ص^{٢} ص' + ص^{٣} \times ٣ س^{٢} = ٤$$

$$٣ س^{٣} ص^{٢} ص' = ٤ - ٣ ص^{٣} س^{٢}$$

$$ص' = \frac{٤ - ٣ ص^{٣} س^{٢}}{٣ س^{٣} ص^{٢}}$$

$$ص' = \frac{٤}{٣ س^{٣} ص^{٢}} - \frac{٣ ص^{٣} س^{٢}}{٣ س^{٣} ص^{٢}}$$

$$ص' = \frac{٤}{٣ س^{٢} ص^{٢}} - \frac{ص}{س}$$

$$ص'' = \frac{-٤(٣ س^{٢} \times ٢ ص\ ص')}{(٣ س^{٣} ص^{٢})^{٢}} - \frac{س\ ص' - ص}{س^{٢}}$$

$$ص'' = \frac{-٢٤ س^{٣} ص\ ص'}{٩ س^{٦} ص^{٤}} + \frac{ص'}{س} - \frac{ص}{س^{٢}}$$

$$\frac{ص}{س^{2}} + \frac{ص'}{س} - \frac{-٤ ص'}{٩ س^{٣} ص^{٣}} = ص''$$

ب) $٨ س + ٦ ص ص' = صفر$

$$٦ ص ص' = -٨ س$$

$$ص' = \frac{-٨ س}{٦ ص}$$

$$ص' = \frac{-٤ س}{٣ ص}$$

$$ص'' = \frac{٣ ص^{٢} \times -٤ - ٤ س \times ٣ ص^{٢} ص'}{(٣ ص)^{٤}}$$

$$= \frac{-١٢ ص^{٢} + ١٢ س ص^{٢} ص'}{٩ ص^{٤}}$$

$$= \frac{-٤ س}{٣ ص} \times ص^{-٢} + ١٢ س \times \frac{-٤ س}{٣ ص}$$

$$= \frac{\frac{٨ س - ٤٨ س}{٣ ص}}{٩ ص^{٤}}$$

$$= \frac{-٤٠ س}{٣ ص^{٣}} = \frac{-٤٠ س}{٩ ص^{٤} \times ٣ ص}$$

جـ) $ص = س \, ظا \, ص$

$ص' = س \times - ظا ص \, ص' + ظا ص$

$ص' = -س \, ظا ص \, ص' + ظا ص$

$ص' + س \, ظا ص \, ص' = ظا ص$

$ص' (1 + س \, ظا ص) = ظا ص$

$ص' = \frac{ظا ص}{1 + س \, ظا ص}$

$ص'' = \frac{(1 + س \, ظا ص) \times - ظا ص \, ص' - ظا ص (س \, ظا ص \, ص' + ظا ص)}{(1 + س \, ظا ص)^{2}}$

$ص'' = \frac{- ظا ص \, ص' - س \, ظا ص \, ص' - ظا ص \, ظا ص}{(1 + س \, ظا ص)^{2}}$

$ص'' = \frac{\frac{- ظا ص \times ظا ص}{1 + س \, ظا ص} - \frac{س \, ظا ص \times ظا ص}{1 + س \, ظا ص} - \frac{س \, ظا^{3} ص}{1 + س \, ظا ص} - ظا ص \, ظا ص}{(1 + س \, ظا ص)^{2}}$

د) $جا س = ظا ص + 2$

$جتا س = \frac{1}{ظا ص + 2} \, ص'$

$ص' = ظا ص + 2 \, جتا س$

$ص'' = ظا ص \times - جا س + جتا س \times ظا ص \, ص'$

$= - ظا ص \, جا س + جتا س \times \frac{1}{ظا ص + 2} \times ظا ص + 2 \, جتا س$

$= - ظا ص \, جا س + ظا ص \, جتا س + 2 \, جتا س$

$= 2 \, جتا س - ظا ص \, جا س$

٣) جد قيمة $\frac{ص}{س}$ لكلٍّ من العلاقات الآتية عند النقط المبينة إزاء كلٍّ منها :

أ) $٨ س ص + جتا ص = \pi^{٢}$ ، $(\frac{\pi}{٢}، \frac{\pi}{٤})$

ب) $س^{٣} - ٢ س ص + ص^{٣} = ٢$ ، $(١، -١)$

جـ) $\frac{٤}{س} + \frac{٢}{ص} = ٣$ ، $(١، ٤)$

الحل

أ)

ب)

جـ)

٤) إذا كان جا(س + ص) = ص^{٢} جتاس، فجد صَ.

الحل

$$\text{جتا}(\text{س}+\text{ص})(1+\text{صَ}) = \text{ص}^2 \times -\text{جاس} + \text{جتاس} \times 2\text{ص}\,\text{صَ}$$

$$\text{جتا}(\text{س}+\text{ص}) + \text{جتا}(\text{س}+\text{ص})\,\text{صَ} = -\text{ص}^2\,\text{جاس} + 2\text{ص}\,\text{جتاس}\,\text{صَ}$$

$$\text{جتا}(\text{س}+\text{ص})\,\text{صَ} - 2\text{ص}\,\text{جتاس}\,\text{صَ} = -\text{ص}^2\,\text{جاس} - \text{جتا}(\text{س}+\text{ص})$$

$$\text{صَ}\left(\text{جتا}(\text{س}+\text{ص}) - 2\text{ص}\,\text{جتاس}\right) = -\text{ص}^2\,\text{جاس} - \text{جتا}(\text{س}+\text{ص})$$

$$\text{صَ} = \frac{-\text{ص}^2\,\text{جاس} - \text{جتا}(\text{س}+\text{ص})}{\text{جتا}(\text{س}+\text{ص}) - 2\text{ص}\,\text{جتاس}}$$

٥) جد النقطة على منحنى العلاقة $\sqrt{\text{س}} + \sqrt{\text{ص}} = ٣$ التي يكون عندها المماسّ أفقيًّا.

الحل

$$\sqrt{\text{س}} + \sqrt{\text{ص}} = 3$$

$$\frac{1}{2\sqrt{\text{س}}} + \frac{1}{2\sqrt{\text{ص}}}\,\text{صَ} = 0$$

$$\frac{1}{2\sqrt{\text{ص}}}\,\text{صَ} = -\frac{1}{2\sqrt{\text{س}}} \Leftarrow \text{صَ} = \frac{-\sqrt{\text{ص}}}{\sqrt{\text{س}}}$$

المماس أفقي $\Leftarrow$ صَ = صفر

$$\frac{-\sqrt{\text{ص}}}{\sqrt{\text{س}}} = \text{صفر} \Leftarrow \sqrt{\text{ص}} = \text{صفر} \Leftarrow \text{ص} = \text{صفر}$$

نعوض $\sqrt{\text{س}} + \sqrt{0} = 3 \Leftarrow \sqrt{\text{س}} = 3$

$\Leftarrow$ س = ٩ (٩، ٠)

٦) إذا كان ص = $\sqrt[3]{(٢س + ١)^{٢}}$ فجد $\frac{ص}{س}$.

الحل

$$ص = \sqrt[3]{(٢س+١)^{٢}} = (٢س+١)^{\frac{٢}{٣}}$$

$$\frac{ص}{س} = \frac{٢}{٣}(٢س+١)^{-\frac{١}{٣}} \times ٢$$

$$= \frac{٤}{٣\sqrt[3]{٢س+١}}$$

---

٧) إذا كان س = جاص ، فأثبت أنَّ صَ = ظاص قا٢ص.

الحل

$$س = جاص$$

$$١ = جتاص \times صَ$$

$$صَ = \frac{١}{جتاص} = قاص$$

نفوض قاص

$$صَ = قاص ظاص صَ$$

$$صَ = قاص ظاص قاص$$

$$صَ = ظاص قا^{٢}ص$$ وهو المطلوب.

---

٨) إذا كان ص جتا٢س = س جا ٢ص ، فجد $\frac{ص}{س}$ عند النقطة $(\frac{\pi}{٤}، \frac{\pi}{٢})$.

الحل

$$ص جتا٢س = س جا٢ص$$

$$ص \times -٢ جا٢س + جتا٢س \times صَ = س \times ٢ جتا٢ص \times صَ + جا٢ص$$

عند $(\frac{\pi}{٤}، \frac{\pi}{٢})$

$$\frac{\pi}{٢} \times -٢ جا\frac{\pi}{٢} + جتا\frac{\pi}{٢} \times صَ = \frac{\pi}{٤} \times ٢ جتا\pi \times صَ + جا\pi$$

$$-\pi \times ١ + ٠ \times صَ = \frac{\pi}{٢} \times -١ \times صَ + ٠$$

$$-\pi = -\frac{\pi}{٢} صَ$$

$$صَ = ٢$$

٩) إذا كان س ص = جاس، فأثبت أنَّ: س صَّ + ٢صَ + س ص = ٠

الحل

$س ص = جا س$

$س ص' + ص = جتا س$

$س ص'' + ص' + ص' = - جا س$

$س ص'' + ٢ ص' = - جا س$

$س ص'' + ٢ ص' + جا س = ٠$ (حيث $ص = س ص$)

$س ص'' + ٢ ص' + س ص = ٠$ وهو المطلوب

---

١٠) إذا كان $ص = ن^{٣} + ٢ن$ ، $\frac{د س}{د ن} = ٤ن$ ، فجد $\frac{د^{٢} ص}{د س^{٢}}$ عند ن = ١.

الحل

$ص = ن^{٣} + ٢ن$

$\frac{د ص}{د ن} = ٣ن^{٢} + ٢$ و $\frac{د ن}{د ن} = ٤ن$

$\frac{د ص}{د س} = \frac{د ص}{د ن} \times \frac{د ن}{د س}$

$= (٣ن^{٢} + ٢) \times \frac{١}{٤ن} = \frac{٣ن^{٢} + ٢}{٤ن}$

$\frac{د^{٢} ص}{د س^{٢}} = \frac{٤ن \times ٦ن - (٣ن^{٢} + ٢) \times ٤}{(٤ن)^{٢}} \times \frac{د ن}{د س}$

$= \frac{٢٤ن^{٢} - ١٢ن^{٢} - ٨}{(٤ن)^{٢}} \times \frac{١}{٤ن}$

$\frac{د^{٢} ص}{د س^{٢}} = \frac{١٢ن^{٢} - ٨}{(٤ن)^{٣}}$.

عند ن = ١

$\frac{د^{٢} ص}{د س^{٢}} = \frac{١٢ - ٨}{٤^{٣}} = \frac{٤}{٦٤} = \frac{١}{١٦}$

١١) إذا كان س + ص = جا ص، فأثبت أنَّ:

$(ص')^2 = ص''$ (ظتا ص − قتا ص)

الحل

$س + ص = جا ص$

$1 + ص' = جتا ص \cdot ص'$ (باشتقاق الطرفين)

$ص'' = جتا ص \cdot ص'' + ص' \times -جا ص \times ص'$

$ص'' = جتا ص \times ص'' - (ص')^2 جا ص$

$(ص')^2 جا ص = جتا ص \times ص'' - ص''$

$(ص')^2 جا ص = ص''(جتا ص - 1)$

$(ص')^2 = ص''\left(\frac{جتا ص}{جا ص} - \frac{1}{جا ص}\right)$

$(ص')^2 = ص''$ (ظتا ص − قتا ص) وهو المطلوب.

---

١٢) إذا كان ص = جا س + س ص ، فأثبت أنَّ :

$ص'' + ص = \frac{٢ص'}{١ - س}$

الحل

$ص = جا س + س ص$

$ص - س ص = جا س$

$ص' - (س \times ص' + ص) = جتا س$

$ص' - س ص' - ص = جتا س$ (باشتقاق الطرفين)

$ص'' - (س ص'' + ص') - ص' = -جا س$

$ص'' - س ص'' - ص' - ص' = -جا س$

$ص'' - س ص'' - ٢ص' = -جا س$

$ص'' - س ص'' + جا س = ٢ص'$

$ص'' - س ص'' + جا ك = ٢ص'$

$ص'' - س ص'' + ص - س ص = ٢ص'$

$ص''(١ - س) + ص(١ - س) = ٢ص'$

$$\frac{ص'}{1-س} = \frac{(1-س)(ص'' + ص)}{1-س}$$

$$ص'' + ص = \frac{ص'}{1-س}$$ وهو المطلوب.