

إجابات أسئلة الدرس

الاشتقاق الضمني

(١) جد $\frac{dy}{dx}$ لكل مما يأتي :

أ) $x^2 + 4y^2 = 16$

ج) $x^2 + 3y = x^3$

ب) $\sqrt{x^2 + 3y} = 2$

د) $(x+y)^2 = x^2$

الحل

أ) $x^2 + 4y^2 = 16$
 $\frac{d}{dx}(x^2 + 4y^2) = \frac{d}{dx}16$

$2x + 8y \frac{dy}{dx} = 0$

$8y \frac{dy}{dx} = -2x$

$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{8y}$

ب) $\sqrt{x^2 + 3y} = 2$
 $\frac{d}{dx}(\sqrt{x^2 + 3y}) = \frac{d}{dx}2$

$\frac{1}{2\sqrt{x^2 + 3y}}(2x + 3 \frac{dy}{dx}) = 0$

$\frac{2x + 3 \frac{dy}{dx}}{2\sqrt{x^2 + 3y}} = 0$

$$(ج) \quad 1 \times c + c' s = c' c^3 + c^3 c'$$

$$c^3 - c = c' s - c' c^3$$

$$\frac{c^3 - c}{s - c^3} = \frac{(s - c^3) c'}{s - c^3}$$

$$\frac{c^3 - c}{s - c^3} = c'$$

$$(د) \quad \text{حيث } (s) = (s + c) \quad c^2 =$$

$$s = s' \text{ حيث } (s) + c \text{ حيث } (s) = c^2$$

$$\frac{s = s' \text{ حيث } (s) + c \text{ حيث } (s) = c^2}{s \text{ حيث } (s) + c \text{ حيث } (s) = c^2} = c^2$$

$$s \text{ حيث } (s) + c \text{ حيث } (s) = c^2$$

$$\frac{s \text{ حيث } (s) + c \text{ حيث } (s) = c^2}{s \text{ حيث } (s) + c \text{ حيث } (s) = c^2} = c^2$$

(٢) جد $\frac{y^2}{x^2}$ لكل مما يأتي :

(ب) $4x^2 + 3y^2 = 16$
 (د) $\sqrt{y} = x + 2$

أ) $(x^2 - 4)^2 = 4$
 ج) $x = 3y$

الحل

أ) $x^2 - 4 = y^2$

$2x = 2y^2 \cdot \frac{dy}{dx}$

$x = y^2 \cdot \frac{dy}{dx}$

$\frac{dx}{x} = y^2 \cdot \frac{dy}{y^2}$

$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}$

$\ln x = \ln y + C$

$\ln x - \ln y = C$

$\ln \frac{x}{y} = C$

$$(ج) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \quad \text{حيث } y = x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = 2x$$

$$y = x^2 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 2x$$

$$\frac{dy}{dx} = 2x$$

$$\frac{dy}{dx} = 2x$$

$$\frac{d(x^2)}{dx} = 2x$$

$$\frac{d(x^2)}{dx} = 2x$$

$$\frac{d(x^2)}{dx} = 2x$$

$$(د) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \quad \text{حيث } y = x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = 2x$$

$$y = x^2 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 2x$$

$$\frac{dy}{dx} = 2x$$

$$\frac{dy}{dx} = 2x$$

$$\frac{dy}{dx} = 2x$$

$$\frac{dy}{dx} = 2x$$

٣) جد قيمة $\frac{y}{x}$ لكل من العلاقات الآتية عند النقط المبينة إزاء كل منها :

أ) $8x^2 + y^2 = \pi^2$ ، $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4})$

ب) $2x^2 + y^2 = 2$ ، $(1, 1)$

ج) $3 = \frac{2}{x} + \frac{4}{y}$ ، $(1, 4)$

الحل

أ) $8x^2 + y^2 = \pi^2$ ؟

$$8x^2 + y^2 = \pi^2$$

$$8x^2 + y^2 = \pi^2$$

$$8x^2 + y^2 = \pi^2$$

$$\frac{8x^2 + y^2}{8x^2 + y^2} = \frac{\pi^2}{8x^2 + y^2}$$

عند $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4})$

$$\frac{\frac{\pi^2}{4} + \frac{\pi^2}{4}}{\frac{\pi^2}{4} + \frac{\pi^2}{4}} = \frac{\pi^2}{\pi^2}$$

$$\frac{\pi^2}{\pi^2} = 1$$

ب) $2x^2 + y^2 = 2$ ، $(1, 1)$

$$2x^2 + y^2 = 2$$

$$2x^2 + y^2 = 2$$

$$2x^2 + y^2 = 2$$

$$2x^2 + y^2 = 2$$

$$2x^2 + y^2 = 2$$

$$2x^2 + y^2 = 2$$

$$2x^2 + y^2 = 2$$

$$2x^2 + y^2 = 2$$

$$2x^2 + y^2 = 2$$

$$2x^2 + y^2 = 2$$

$$2x^2 + y^2 = 2$$

$$2x^2 + y^2 = 2$$

٤) إذا كان جا(س + ص) = ص^٢ جتا(س)، فجد ص'.

الحل

منهاجي
متعة التعليم الهادف

$$\begin{aligned} \text{جبا}(س + ص) &= (ص + ١) (ص + ١) = ص^٢ \text{جتا}(س) + ص \text{جتا}(س) + \text{جتا}(س) \\ \text{جبا}(س + ص) + \text{جبا}(س + ص) &= ص' (ص + ص) + \text{جتا}(س) = ص' (٢ص) + \text{جتا}(س) \\ \text{جبا}(س + ص) (ص + ص) &= ص' (٢ص) + \text{جتا}(س) \\ \text{جبا}(س + ص) (٢ص) &= ص' (٢ص) + \text{جتا}(س) \\ \text{جبا}(س + ص) (٢ص) - \text{جتا}(س) &= ص' (٢ص) \\ \frac{\text{جبا}(س + ص) (٢ص) - \text{جتا}(س)}{٢ص} &= ص' \end{aligned}$$

منهاجي
متعة التعليم الهادف

منهاجي
متعة التعليم الهادف

٥) جد النقطة على منحنى العلاقة $\sqrt{ص} + \sqrt{س} = ٣$ التي يكون عندها المماس أفقيًا.

الحل

منهاجي
متعة التعليم الهادف

$$\begin{aligned} ٣ &= \sqrt{ص} + \sqrt{س} \\ ٠ &= \frac{١}{٢\sqrt{ص}} + \frac{١}{\sqrt{س}} \\ \frac{١}{٢\sqrt{ص}} = ص' &\Leftrightarrow \frac{١}{\sqrt{س}} = ص' \\ \text{المماس أفقي} &\Leftrightarrow ص' = ٠ \end{aligned}$$

منهاجي
متعة التعليم الهادف

منهاجي
متعة التعليم الهادف

$$\begin{aligned} \frac{١}{٢\sqrt{ص}} = ص' &\Leftrightarrow \frac{١}{\sqrt{س}} = ص' \\ \text{نعوض } \sqrt{س} = ٣ - \sqrt{ص} &\Leftrightarrow ٣ = \sqrt{ص} + \sqrt{س} \\ \Leftrightarrow ٩ = ص + س & \quad (٠.٦٩) \end{aligned}$$

(٦) إذا كان $v = \sqrt{2s + 1}$ فجد $\frac{dv}{ds}$.

الحل

$$v^2 = 2s + 1 \Rightarrow 2v \frac{dv}{ds} = 2$$

$$\frac{dv}{ds} = \frac{2}{2v} = \frac{1}{v}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2s + 1}}$$

(٧) إذا كان $s = \cos v$ ، فأثبت أن $v = \arccos s$.

الحل

$$s = \cos v$$

$$1 = \cos v \times \frac{1}{\cos v}$$

$$v = \arccos \frac{1}{\cos v} = \arccos s$$

نعرف \arccos

$$v = \arccos \frac{1}{\cos v}$$

$$v = \arccos s$$

$$v = \arccos s \text{ وهو المطلوب.}$$

(٨) إذا كان $v = \arcsin s$ ، فجد $\frac{dv}{ds}$ عند النقطة $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$.

الحل

$$v = \arcsin s \Rightarrow s = \sin v$$

$$s = \sin v \Rightarrow \frac{ds}{dv} = \cos v \Rightarrow \frac{dv}{ds} = \frac{1}{\cos v}$$

$$\text{عند } (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$$

$$\frac{dv}{ds} = \frac{1}{\cos \frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$$\frac{dv}{ds} = \frac{1}{\cos v} = \frac{1}{\cos \frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2}$$

$$\frac{dv}{ds} = \sqrt{2}$$

$$\sqrt{2} = \frac{dv}{ds}$$

٩) إذا كان $s = \cos$ ، فأثبت أن: $s' = -2s + s^2 + s = 0$

الحل

$$s = \cos$$

$$-s' = \sin = -\cos^2$$

$$s' = \cos^2 - \sin^2 = \cos^2 - (1 - \cos^2) = 2\cos^2 - 1$$

$$s' = 2s^2 - 1$$

$$s' - 2s^2 + 1 = 0 \quad (\text{عند } s = \cos)$$

$$s' - 2s^2 + 1 = 0 \quad \text{وهو المطلوب}$$

١٠) إذا كان $v = 2n^2 + 3n$ ، $\frac{dv}{dn} = 4n$ ، فجد $\frac{dv}{ds}$ عند $n = 1$.

الحل

$$v = 2n^2 + 3n$$

$$\frac{dv}{dn} = 4n + 3 = 7 \quad \text{عند } n = 1$$

$$\frac{dv}{ds} = \frac{dv}{dn} \times \frac{dn}{ds} = 7 \times \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$$

$$\frac{dv}{ds} = \frac{1}{4} \times (2n^2 + 3n) = \frac{2n^2 + 3n}{4}$$

$$\frac{dv}{ds} = \frac{2 \times 1^2 + 3 \times 1}{4} = \frac{5}{4}$$

$$\frac{dv}{ds} = \frac{2 \times 1^2 + 3 \times 1}{4} = \frac{5}{4}$$

$$\frac{dv}{ds} = \frac{5}{4}$$

$$\text{عند } n = 1$$

$$\frac{dv}{ds} = \frac{5}{4} = \frac{5}{4} = \frac{5}{4}$$

(١١) إذا كان $s + v = \text{جاس}$ ، فأثبت أن:
(ص) $v^2 = \text{ظتا ص - قتا ص}$

الحل

$$s + v = \text{جاس}$$

$$1 + v' = \text{جبا ص} \cdot \text{ص} \quad (\text{تستعمل قاعدة المشتقة})$$

$$v'' = \text{جبا ص} \cdot \text{ص}' + \text{ص} \cdot \text{ص}'' - \text{جاس} \times v'$$

$$\text{ص}'' = \text{جبا ص} \times \text{ص}' - (\text{ص}') \cdot \text{جاس}$$

$$(\text{ص}') \cdot \text{جاس} = \text{جبا ص} \times \text{ص}'' - \text{ص}''$$

$$(\text{ص}') \cdot \text{جاس} = \text{ص}'' (\text{جبا ص} - 1)$$

$$(\text{ص}') = \left(\frac{\text{جبا ص}}{\text{جاس}} - \frac{1}{\text{جاس}} \right) \text{ص}''$$

$$(\text{ص}')^2 = \text{ص}'' (\text{ظتا ص} - \text{قتا ص}) \quad \text{وهو المطلوب}$$

(١٢) إذا كان $s + v = \text{جاس}$ ، فأثبت أن:

$$\text{ص} + \frac{v^2}{s-1} = \text{ص}$$

الحل

$$v + \text{جاس} = \text{ص}$$

$$v - s = \text{ص} - \text{جاس}$$

$$v' - s' = (\text{ص}') - \text{جبا س}$$

$$\text{ص}' - s' - \text{ص} = \text{ص} - \text{جبا س} \quad (\text{نشتق})$$

$$\text{ص}' - s' - (\text{ص} - \text{جاس}) = \text{ص} - \text{جاس}$$

$$\text{ص}' - s' - \text{ص} + \text{جاس} = \text{ص} - \text{جاس}$$

$$\text{ص}' - s' - \text{ص} + \text{جاس} = \text{ص} - \text{جاس}$$

$$\text{ص}' - s' = \text{ص} - \text{جاس} + \text{ص} - \text{جاس}$$

$$\text{ص}' - s' = \text{ص} - \text{جاس} + \text{ص} - \text{جاس}$$

$$\text{ص}' - s' = \text{ص} - \text{جاس} + \text{ص} - \text{جاس}$$

$$\text{ص}' - s' = (\text{ص} - 1) + (\text{ص} - 1)$$

$$\frac{c'}{s-1} = \frac{(c''+c')(s-1)}{s-1}$$

وهو المطلوب $\frac{c'}{s-1} = c''+c'$