إجابات أسئلة الدرس

الاشتقاق الضمني

١) جد $\frac{د ص}{د س}$ لكلٍّ مما يأتي :

أ) $س^{٢} + ٤ ص^{٢} = ١٦$

ب) $ص^{٢} = \sqrt{س^{٣} + ٤ س^{٢}}$

جـ) $س^{٣} + ص^{٣} = س ص$

د) جا(س ص) = $س^{٢}$

الحل

أ)

$$\frac{د ص}{د س} \times ٨ ص + ٢ س = صفر$$

$$\frac{د ص}{د س} \times ٨ ص = -٢ س$$

$$\frac{د ص}{د س} = \frac{-٢ س}{٨ ص}$$

$$\frac{د ص}{د س} = \frac{-س}{٤ ص}$$

ب)

$$ص' = \frac{٣ س^{٢} + ٨ س}{٢ \sqrt{س^{٣} + ٤ س^{٢}}}$$

$$ص' = \frac{٣ س^{٢} + ٨ س}{٤ ص}$$

جـ) $3س^2 + 3ص^2 ص' = ص + س ص' \times 1$

$3ص^2 ص' - س ص' = ص - 3س^2$

$ص' (3ص^2 - س) = ص - 3س^2$

$ص' = \frac{ص - 3س^2}{3ص^2 - س}$

د) $ظا(س ص) = س^2$

$س ص' ظا(س ص) + ص ظا(س ص) = 2س$

$س ص' ظا(س ص) = 2س - ص ظا(س ص)$

$ص' = \frac{2س - ص ظا(س ص)}{س ظا(س ص)}$

٢) جد $\frac{د^{٢}ص}{دس^{٢}}$ لكلٍّ مما يأتي :

أ) $(س\ ص)^{٣} = ٤س$

ب) $٤س^{٢} + ٣ص^{٢} = ١٦$

جـ) $ص = س\ جتا\ ص$

د) $جا\ س = \sqrt{ص} + ٢$

الحل

أ) $س^{٣} ص^{٣} = ٤س$

$س^{٣} \times ٣ص^{٢} ص' + ص^{٣} \times ٣س^{٢} = ٤$

$٣س^{٣} ص^{٢} ص' = ٤ - ٣ ص^{٣} س^{٢}$

$ص' = \frac{٤ - ٣ ص^{٣} س^{٢}}{٣ س^{٣} ص^{٢}}$

$ص' = \frac{٣ ص^{٣} س^{٢}}{٣ س^{٣} ص^{٢}} - \frac{٤}{٣ س^{٣} ص^{٢}}$

$ص' = \frac{ص}{س} - \frac{٤}{٣ س^{٣} ص^{٢}}$

$ص'' = \frac{ك ص' - ص}{س^{٢}} - \frac{-٤(٣ س^{٣} \times ٢ ص ص')}{(٣ س^{٣} ص^{٢})^{٢}}$

$ص'' = \frac{ص}{س^{٢}} + \frac{ص'}{س} - \frac{٢٤ س^{٣} ص ص'}{٩ س^{٦} ص^{٤}}$

$$\frac{ص}{س^{2}} + \frac{ص'}{س} - \frac{-٤ ص'}{٩ س^{٣} ص^{٣}} = ص''$$

ب) $٨ س + ٦ ص ص' = صفر$

$$٦ ص ص' = -٨ س$$

$$ص' = \frac{-٨ ك}{٦ ص}$$

$$ص' = \frac{-٤ س}{٣ ص}$$

$$ص'' = \frac{٣ ص'^{٢} \times -٤ + ٤ ك \times ٣ ص'}{(٣ ص)^{٤}}$$

$$= \frac{-١٢ ص'^{٢} + ١٢ س ص'}{٩ ص^{٤}}$$

$$= \frac{-٤ ك}{٣ ص} \times ١٢ ك + \frac{-٤ س}{٣ ص} \times -٢$$

$$= \frac{\frac{٨ ك - ٤٨ س}{٣ ص}}{٩ ص^{٤}}$$

$$= \frac{-٤٠ س}{٣ ص^{٧}} = \frac{-٤٠ س}{٣ ص^{٣} \times ٩ ص^{٤}}$$

جـ) $ص = س \, ظا \, ص$

$ص' = س \times - ق^2 ص \, ص' + ظا \, ص$

$ص' = -س \, ق^2 ص \, ص' + ظا \, ص$

$ص' + س \, ق^2 ص \, ص' = ظا \, ص$

$ص' (1 + س \, ق^2 ص) = ظا \, ص$

$ص' = \dfrac{ظا \, ص}{1 + س \, ق^2 ص}$

$ص'' = \dfrac{(1 + س \, ق^2 ص) \times - ق^2 ص \, ص' - ظا \, ص (س \, ظا \, ص \, ص' + ق^2 ص)}{(1 + س \, ق^2 ص)^2}$

$ص'' = \dfrac{- ق^2 ص \, ص' - س \, ق^2 ص \, ص' - س \, ظا \, ص \, ق^2 ص \, ص' - ظا \, ص \, ق^2 ص}{(1 + س \, ق^2 ص)^2}$

$ص'' = \dfrac{\dfrac{- ق^2 ص \times ظا \, ص}{1 + س \, ق^2 ص} - \dfrac{س \, ق^2 ص \times ظا \, ص}{1 + س \, ق^2 ص} - \dfrac{س \, ظا^2 ص \, ق^2 ص}{1 + س \, ق^2 ص} - ظا \, ص \, ق^2 ص}{(1 + س \, ق^2 ص)^2}$

د) $جا \, س = ق^2 ص + 2$

$جتا \, س = \dfrac{1}{ق^2 ص} \, ص'$

$ص' = ق^2 ص \, جتا \, س$

$ص'' = ق^2 ص \times - جا \, س \times ص' + جتا \, س \times 2 ق^2 ص \, ص' \times ص'$

$= -2 ق^2 ص \, جا \, س + جتا \, س \times \dfrac{1}{ق^2 ص} \times ق^2 ص \, جتا \, س$

$= -2 ق^2 ص \, جا \, س + جتا^2 س$

$= -2 ق^2 ص \, جا \, س + 1 - ظا^2 ص$

٣) جد قيمة $\frac{ص}{س}$ لكلٍّ من العلاقات الآتية عند النقط المبينة إزاء كلٍّ منها :

أ) $٨ س ص + جتا ص = \pi^{٢}$ ، $(\frac{\pi}{٢}، \frac{\pi}{٤})$

ب) $س^{٣} - ٢ س ص + ص^{٣} = ٢$ ، $(١، -١)$

جـ) $\frac{٤}{س} + \frac{٢}{ص} = ٣$ ، $(١، ٤)$

الحل

أ) $٨ س ص + جتا ص = \pi^{٢}$

$٨ س ص' + ص \times ٨ - جا ص ص' = صفر$

$٨ س ص' - جا ص ص' = -٨ ص$

$ص' (٨ س - جا ص) = -٨ ص$

$ص' = \frac{-٨ ص}{٨ س - جا ص}$

عند $(\frac{\pi}{٤}، \frac{\pi}{٢})$

$ص' = \frac{-٨ \times \frac{\pi}{٢}}{٨ \times \frac{\pi}{٤} - جا \frac{\pi}{٢}}$

$= \frac{-٤ \pi}{\pi - ١}$

ب) $س^{٣} - ٢ س ص + ص^{٣} = ٢$ $(١، -١)$

$٣ س^{٢} - (٢ س ص' + ٢ ص) + ٣ ص^{٢} ص' = ٠$

$٣ (١)^{٢} - (٢ (١) ص' + ٢ (-١)) + ٣ (-١)^{٢} ص' = ٠$

$٣ - (٢ ص' - ٢) + ٣ ص' = ٠$

$٣ - ٢ ص' + ٢ + ٣ ص' = ٠$

$٥ + ص' = ٠ \Leftarrow ص' = -٥$

جـ) $\frac{٤}{س} + \frac{٢}{ص} = ٣$ $(١، ٤)$

$\frac{-٤}{س^{٢}} - \frac{٢}{ص^{٢}} ص' = ٠$

$\frac{-٤}{١٦} - \frac{٢}{١} ص' = ٠$

$٢ ص' = \frac{١}{٤}$

$ص' = \frac{١}{٨}$

٤) إذا كان جا(س + ص) = ص^{٢} جتاس، فجد صَ .

الحل

جتا (س + ص) (١ + صَ) = صَ × -جاس + جتاس × ٢ ص صَ

جتا (س + ص) + جتا (س + ص) صَ = -صَ جاس + ٢ ص جتاس صَ

جتا (س + ص) صَ - ٢ ص جتاس صَ = -صَ جاس - جتا (س + ص)

صَ (جتا (س + ص) - ٢ ص جتاس) = -صَ جاس - جتا (س + ص)

$$صَ = \frac{-صَ جاس - جتا(س+ص)}{جتا(س+ص) - ٢ص جتاس}$$

٥) جد النقطة على منحنى العلاقة $\sqrt{س} + \sqrt{ص} = ٣$ التي يكون عندها المماس أفقيًّا.

الحل

$$\sqrt{س} + \sqrt{ص} = ٣$$

$$\frac{١}{\sqrt{س}٢} + \frac{١}{\sqrt{ص}٢} صَ = ٠$$

$$\frac{١}{\sqrt{ص}٢} صَ = -\frac{١}{\sqrt{س}٢} \Leftarrow صَ = -\frac{\sqrt{ص}}{\sqrt{س}}$$

المماس أفقي $\Leftarrow$ صَ = صفر

$$-\frac{\sqrt{ص}}{\sqrt{س}} = صفر \Leftarrow \sqrt{ص} = صفر \Leftarrow ص = صفر$$

نعوض $\sqrt{س} + \sqrt{٠} = ٣ \Leftarrow \sqrt{س} = ٣$

$\Leftarrow س = ٩$ (٠، ٩)

٦) إذا كان ص = $\sqrt[3]{(٢س + ١)^{٢}}$ فجد $\frac{ص}{س}$.

الحل

$$ص = (٢س+١)^{\frac{٢}{٣}}$$

$$\frac{ص}{س} = \frac{٢}{٣}(٢س+١)^{-\frac{١}{٣}} \times ٢$$

$$= \frac{٤}{٣\sqrt[٣]{٢س+١}}$$

---

٧) إذا كان س = جاص ، فأثبت أنَّ صَ = ظاص قا٢ص.

الحل

$$س = جاص$$

$$١ = جتاص \times صَ$$

$$صَ = \frac{١}{جتاص} = قاص$$

نفوض قاص

$$صَ = قاص ظاص صَ$$

$$صَ = قاص ظاص قاص$$

$$صَ = ظاص قا^{٢}ص$$ وهو المطلوب.

---

٨) إذا كان ص جتا٢س = س جا ٢ص ، فجد $\frac{ص}{س}$ عند النقطة $(\frac{\pi}{٤}، \frac{\pi}{٢})$.

الحل

$$ص جتا٢س = س جا٢ص$$

$$ص \times -٢ جا٢س + جتا٢س \times صَ = س \times ٢ جتا٢ص \times صَ + جا٢ص$$

عند $(\frac{\pi}{٤}، \frac{\pi}{٢})$

$$\frac{\pi}{٢} \times -٢ جا\frac{\pi}{٢} + جتا\frac{\pi}{٢} \times صَ = \frac{\pi}{٤} \times ٢ جتا\pi \times صَ + جا\pi$$

$$-\pi \times ١ + ٠ \times صَ = \frac{\pi}{٢} \times -١ \times صَ + ٠$$

$$-\pi = -\frac{\pi}{٢} صَ$$

$$صَ = ٢$$

٩) إذا كان س ص = جاس، فأثبت أنَّ: س صَّ + ٢صَ + س ص = ٠

الحل

$س ص = جا س$

$س ص' + ص = جتا س$

$س ص'' + ص' + ص' = - جا س$

$س ص'' + ٢ ص' = - جا س$

$س ص'' + ٢ ص' + جا س = ٠$ (حيث $ص = س ص$)

$س ص'' + ٢ ص' + س ص = ٠$ وهو المطلوب

---

١٠) إذا كان $ص = ن^٣ + ٢ن$ ، $\frac{د س}{د ن} = ٤ن$ ، فجد $\frac{د^٢ ص}{د س^٢}$ عند ن = ١.

الحل

$ص = ن^٣ + ٢ن$

$\frac{د ص}{د ن} = ٣ن^٢ + ٢$ و $\frac{د س}{د ن} = ٤ن$

$\frac{د ص}{د س} = \frac{د ص}{د ن} \times \frac{د ن}{د س}$

$= (٣ن^٢ + ٢) \times \frac{١}{٤ن} = \frac{٣ن^٢ + ٢}{٤ن}$

$\frac{د^٢ ص}{د س^٢} = \frac{د}{د س}\left(\frac{٣ن^٢ + ٢}{٤ن}\right) \times \frac{د ن}{د س}$

$= \frac{٤ن \times ٦ن - (٣ن^٢ + ٢) \times ٤}{(٤ن)^٢} \times \frac{١}{٤ن}$

$= \frac{٢٤ن^٢ - ١٢ن^٢ - ٨}{(٤ن)^٣}$

$\frac{د^٢ ص}{د س^٢} = \frac{١٢ن^٢ - ٨}{(٤ن)^٣}$.

عند ن = ١

$\frac{د^٢ ص}{د س^٢} = \frac{١٢ - ٨}{٤^٣} = \frac{٤}{٣٤} = \frac{١}{١٦}$

١١) إذا كان س + ص = جا ص، فأثبت أنَّ:

$(ص')^2 = ص''$ (ظتا ص − قتا ص)

الحل

$س + ص = جا ص$

$1 + ص' = جتا ص \cdot ص'$ (باشتقاق الطرفين)

$ص'' = جتا ص \cdot ص'' + ص' \times -جا ص \times ص'$

$ص'' = جتا ص \times ص'' - (ص')^2 جا ص$

$(ص')^2 جا ص = جتا ص \times ص'' - ص''$

$(ص')^2 جا ص = ص''(جتا ص - 1)$

$(ص')^2 = ص''\left(\frac{جتا ص}{جا ص} - \frac{1}{جا ص}\right)$

$(ص')^2 = ص''$ (ظتا ص − قتا ص) وهو المطلوب.

---

١٢) إذا كان ص = جا س + س ص ، فأثبت أنَّ :

$ص'' + ص = \frac{2ص'}{1 - س}$

الحل

$ص = جا س + س ص$

$ص - س ص = جا س$

$ص' - (س \times ص' + ص) = جتا س$

$ص' - س ص' - ص = جتا س$ (باشتقاق الطرفين)

$ص'' - (س ص'' + ص') - ص' = -جا س$

$ص'' - س ص'' - ص' - ص' = -جا س$

$ص'' - س ص'' - 2ص' = -جا س$

$ص'' - س ص'' + جا س = 2ص'$

$ص'' - س ص'' + جا س = 2ص'$

$ص'' - س ص'' + ص - س ص = 2ص'$

$ص''(1 - س) + ص(1 - س) = 2ص'$

$$\frac{ص'}{1-س} = \frac{(1-س)(ص'' + ص)}{1-س}$$

$$ص'' + ص = \frac{ص'}{1-س}$$ وهو المطلوب.