إجابات تدريبات الدرس

تطبيقات القيم القصوى

تدريب ١

مجموع عدد مع مثلي عدد آخر يساوي ٤٠، جد العددين بحيث يكون حاصل ضربهما أكبر ما يمكن مستخدمًا تطبيقات التفاضل.

الحل

نفرض العددين س ، ص فيكون س + ٢ ص = ٤٠ ⟵ س = ٤٠ − ٢ ص

ل = س × ص

= (٤٠ − ٢ ص) × ص = ٤٠ ص − ٢ ص^{٢}

لَ = ٤٠ − ٤ ص = ٠ ⟵ ٤٠ = ٤ ص ⟵ ص = ١٠

لً = −٤

لً(١٠) = −٤ < ٠ قيمة عظمى عند ص = ١٠

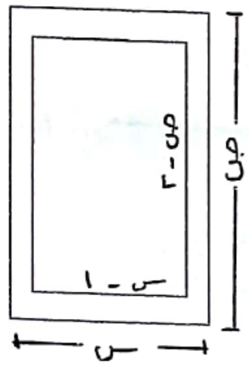
س = ٤٠ − ٢ × ١٠ = ٢٠

تدريب ٢

حُلَّ المسألة الواردة في بداية الدرس.

صفيحة من الورق مستطيلة الشكل مساحتها ١٢٨ سم^{٢}، يراد طباعة إعلان عليها، إذا كان عرض كلٍّ من الهامشين في رأس الورقة وأسفلها ١ سم، وفي كلٍّ من الجانبين $\frac{١}{٢}$ سم، فجد بُعدَيْ الورقة بحيث تكون المساحة المطبوعة أكبر ما يمكن.

الحل



$س \times ص = ١٢٨ \longrightarrow ص = \frac{١٢٨}{س}$

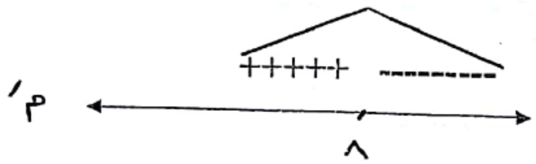
المساحة المطبوعة $م = (س - ١)(ص - ٢)$

$م = س ص - ٢ س - ص + ٢$

$م = ١٢٨ - ٢ س - \frac{١٢٨}{س} + ٢$

$م' = -٢ + \frac{١٢٨}{س^{٢}} = ٠ \longrightarrow ٢س^{٢} = ١٢٨$

$س^{٢} = ٦٤ \longrightarrow س = ٨$

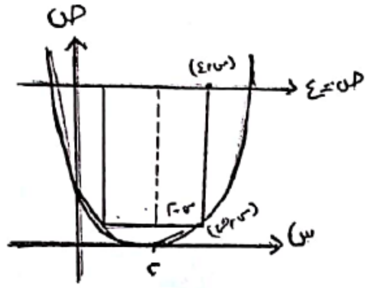


عظمى عند $س = ٨ \longrightarrow ص = \frac{١٢٨}{٨} = ١٦$

تدريب ٣

يقع المستطيل أ ب جـ د في المنطقة المحصورة بين منحنى ق(س)=س^{٢} − ٤س + ٤ والمستقيم ص= ٤ بحيث يقع رأساه أ، ب على منحنى ق، ورأساه الآخران جـ، د على المستقيم ص= ٤، جد بُعدَيْ المستطيل أ ب جـ د لتكون مساحته أكبر ما يمكن.

الحل



معادلة محور التماثل س = $\frac{\text{-ب}}{\text{٢أ}} = \frac{٤}{٢} = ٢$

م = ٢ (س − ٢) (٤ − (س^{٢} − ٤س + ٤))

م = ٢ (س − ٢) (-س^{٢} + ٤ س)

مَ = ٢ (س − ٢) (-٢س + ٤) + (-س^{٢} + ٤س) × ٢ = ٠   (÷ ٢)

(س − ٢) (-٢س + ٤) + -س^{٢} + ٤ س = ٠

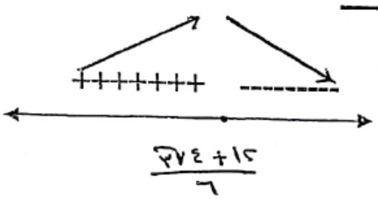
-٢ س^{٢} + ٤ س + ٤س − ٨ − س^{٢} + ٤س = ٠

-٣ س^{٢} + ١٢ س − ٨ = ٠

نستخدم المميز : ب^{٢} − ٤ أ جـ = ١٤٤ − ٤ × -٣ × -٨ = ٤٨

س = $\frac{\text{-ب} \mp \sqrt{\text{المميز}}}{\text{٢أ}} = \frac{-١٢ \mp \sqrt{٤٨}}{٢ \times -٣} = \frac{-١٢ \mp ٤\sqrt{٣}}{-٦}$

نأخذ س = $\frac{-١٢ - ٤\sqrt{٣}}{-٦} = \frac{١٢ + ٤\sqrt{٣}}{٦}$

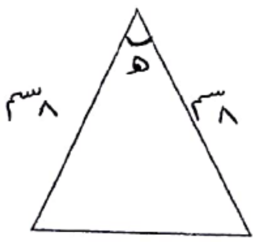


قيمة عظمى عند س

تدريب ٤

نحتاج إلى قص لوح خشبي، على شكل مثلث متطابق الضلعين، طول كلٍّ منهما ٨سم، إذا كانت زاوية رأس المثلث هـ متغيرة، فجد قياس الزاوية هـ التي تجعل مساحة المثلث أكبر ما يمكن.

الحل

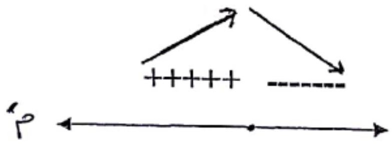


م = $\frac{١}{٢}$ × ٨ × ٨ × جـا هـ

م = ٣٢ جـا هـ

مَ = ٣٢ جتا هـ

٣٢ جتا هـ = ٠ ⟵ هـ = $\frac{\pi}{٢}$

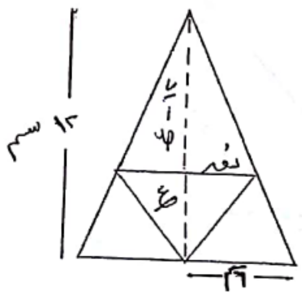


عظمى عند هـ = $\frac{\pi}{٢}$

تدريب ٥

جد حجم أكبر مخروط دائري قائم يمكن وضعه داخل مخروط دائري قائم، طول نصف قطر قاعدته ٦ سم، وارتفاعه ١٢ سم، بحيث يقع رأس المخروط الداخلي على مركز قاعدة المخروط الخارجي.

الحل



$\text{ح} = \frac{1}{3}\pi\,\text{نق}^2\,\text{ع}$

لكن: $\frac{12}{6} = \frac{12 - \text{ع}}{\text{نق}}$

$2\,\text{نق} = 12 - \text{ع} \longrightarrow \text{ع} = 12 - 2\,\text{نق}$

$\text{ع} = 2\,(6 - \text{نق})$

$\text{ح} = \frac{1}{3} \times \pi\,\text{نق}^2 \times 2\,(6 - \text{نق})$

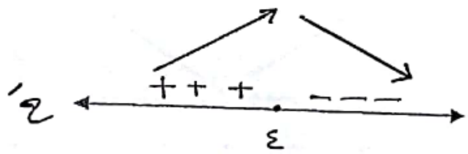
$= \frac{2}{3}\,\pi\,(6\,\text{نق}^2 - \text{نق}^3)$

$\text{ح}' = \frac{2}{3}\,\pi\,(12\,\text{نق} - 3\,\text{نق}^2) = 0$

$12\,\text{نق} - 3\,\text{نق}^2 = 0 \longrightarrow 3\,\text{نق}\,(4 - \text{نق}) = 0$

$\text{نق} = 0$ ، $\text{نق} = 4$

قيمة عظمى عند $\text{نق} = 4$



$\text{ع} = 2\,(6 - 4) = 4$

$\text{ح} = \frac{\pi}{3} \times 16 \times 4$

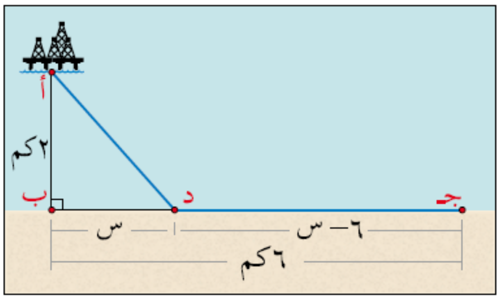
$\text{ح} = \frac{64\pi}{3}$

تدريب ٦

يقع حقل نفط في البحر عند النقطة أ التي تبعد ٢كم عن أقرب نقطة ب على الساحل، وأردنا أن نضخَّ البترول من الحقل إلى المصفاة التي تقع عند النقطة جـ على الساحل، وتبعد ٦كم من ب وذلك بواسطة أنابيب في البحر على خط مستقيم حتى النقطة د على الساحل، ثم بواسطة أنابيب على اليابسة على خط مستقيم من د إلى جـ ، على فرض أنَّ الأنابيب في البحر وفي اليابسة في مستوى واحد، إذا كانت تكلفة الأنابيب تحت سطح البحر ٥٠٠٠٠٠ دينار لكلِّ كيلومتر وعلى اليابسة ٣٠٠٠٠٠ دينار لكل كيلومتر، فأجب عما يأتي:

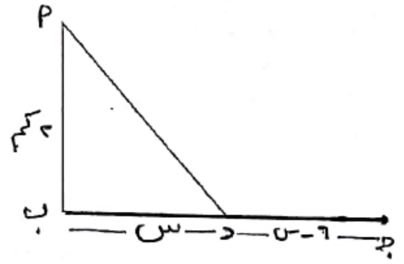
١) أين يجب أن تكون د لتحقق أقل تكلفة ممكنة؟

٢) أين يجب أن تكون د لتحقق أكبر تكلفة ممكنة؟



الشكل (٣–٢٥)

الحل



أ د = $\sqrt{\text{س}^{٢} + ٤}$

التكاليف :

ت = ت (في البحر) + ت (في اليابسة)

ت = ٥٠٠٠٠٠٠ × $\sqrt{\text{س}^{٢} + ٤}$ + ٣٠٠٠٠٠٠ (٦ – س)

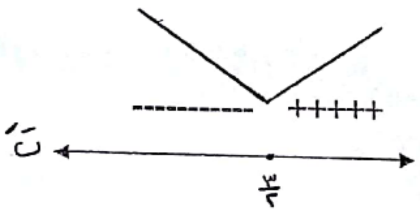
ت' = ٥٠٠٠٠٠٠ × $\frac{\cancel{٢}\,\text{س}}{\cancel{٢}\sqrt{\text{س}^{٢} + ٤}}$ + ٣٠٠٠٠٠٠ × -١ = صفر (÷ ١٠٠٠٠٠٠)

$\frac{٥\,\text{س}}{\sqrt{\text{س}^{٢} + ٤}}$ - ٣ = ٠ ← ٥ س = ٣ $\sqrt{\text{س}^{٢} + ٤}$

٢٥ س^{٢} = ٩ (س^{٢} + ٤) ← ٢٥ س^{٢} = ٩ س^{٢} + ٣٦

س^{٢} = $\frac{٣٦}{١٦}$ = $\frac{٩}{٤}$ ← س = $\frac{٣}{٢}$ ، $\frac{-٣}{٢}$

نأخذ س = $\frac{٣}{٢}$ صغرى عند س = $\frac{٣}{٢}$



٢) تحدث القيمة العظمى عند س = ٠ أو س = ٦ (أطراف الفترة)

عند س = ٠ : ت = ٥٠٠٠٠٠٠ × ٢ + ٣٠٠٠٠٠٠ × ٦

= ١٠٠٠٠٠٠٠ + ١٨٠٠٠٠٠٠ = ٢٨٠٠٠٠٠٠

عند س = ٦ : ت = ٥٠٠٠٠٠٠ × $\sqrt{٤٠}$ + ٠

= ٥٠٠٠٠٠٠ × ٦,٣

= ٣١٥٠٠٠٠٠

تكون أكبر ما يمكن عند س = ٦