

إجابات أسئلة الدرس

التكامل بالتعويض

(١) اكتب التعويض المناسب لإيجاد قيمة كل تكامل من التكاملات الآتية:

(أ) $\int (1-2s)(s-2)^4 ds$ (ب) $\int 6s^2 \sqrt{(2-s)^2} ds$

(ج) $\int (2s-3)(s^2-2s) ds$ (د) $\int \frac{s^3-9}{(s^2-2s)^2} ds$

الحل

(أ) $\int (1-2s)(s-2)^4 ds$

ص = $s-2 \Rightarrow ds = 1 ds$

$\int (1-2s)(s-2)^4 ds = \int (1-2(s-2))(s-2)^4 ds$

$= \int (1-2s+4)(s-2)^4 ds = \int (5-2s)(s-2)^4 ds$

(ب) $\int 6s^2 \sqrt{(2-s)^2} ds$

ص = $2-s \Rightarrow ds = -1 ds$

$\int 6s^2 \sqrt{(2-s)^2} ds = \int 6(2-s)^2 \sqrt{(2-s)^2} ds$

$$p + \frac{u}{\sqrt{u}} = p + \frac{u^{1+\frac{1}{2}}}{1+\frac{1}{2}}$$

$$p + \frac{\sqrt{u}}{2} =$$

$$p + \frac{\sqrt{2-3x}}{2} =$$

$$p + \frac{\sqrt{2-3x}}{2} = \frac{2-3x}{2} + \frac{2-3x}{2}$$

$$2-3x = \frac{2-3x}{2} \Rightarrow 2-3x = \frac{2-3x}{2}$$

$$2-3x = \frac{2-3x}{2}$$

$$\frac{2-3x}{2} = \frac{2-3x}{2}$$

$$p + \frac{2-3x}{2} = \frac{2-3x}{2} + \frac{2-3x}{2}$$

$$p + \frac{2-3x}{2} = \frac{2-3x}{2} + \frac{2-3x}{2}$$

$$p + \frac{9-4x}{2} = \frac{9-4x}{2} + \frac{9-4x}{2}$$

$$9-4x = \frac{9-4x}{2} \Rightarrow 9-4x = \frac{9-4x}{2}$$

$$9-4x = \frac{9-4x}{2}$$

$$= \frac{9-4x}{2} \times \frac{9-4x}{2}$$

$$= \frac{9-4x}{2} \times \frac{9-4x}{2} \times \frac{9-4x}{2}$$

$$p + \frac{9-4x}{2} = p + \frac{9-4x}{2}$$

$$p + \frac{9-4x}{2} = p + \frac{9-4x}{2}$$

(٢) جد قيمة كل من التكاملات الآتية:

(أ) $\int \sqrt{(2-s)^2} ds$
 (ب) $\int (1-s)(1-2s^2-s^4) ds$
 (ج) $\int 2 \sqrt{2-s} ds$
 (د) $\int 2s^2 \sqrt{1+s^4} ds$

الحل

(أ) $\int \sqrt{(2-s)^2} ds = \int (2-s) ds = 2s - \frac{1}{2}s^2 + C$

(ب) $\int (1-s)(1-2s^2-s^4) ds = \int (1-s-2s^3+2s^4-s^5+s^6) ds = s - \frac{1}{2}s^2 - \frac{1}{2}s^4 + \frac{2}{5}s^5 - \frac{1}{6}s^6 + \frac{1}{7}s^7 + C$

(ج) $\int 2 \sqrt{2-s} ds = 2 \int (2-s)^{1/2} ds = 2 \left(-\frac{2}{3} (2-s)^{3/2} \right) + C = -\frac{4}{3} (2-s)^{3/2} + C$

(د) $\int 2s^2 \sqrt{1+s^4} ds = \int 2s^2 (1+s^4)^{1/2} ds$
 Let $u = 1+s^4$, then $du = 4s^3 ds$
 $\int 2s^2 \sqrt{1+s^4} ds = \frac{1}{2} \int \frac{1}{s} \sqrt{u} du = \frac{1}{2} \int u^{-1/2} du = \frac{1}{2} \cdot 2 \sqrt{u} + C = \sqrt{1+s^4} + C$

(ج) $\int 2 \sqrt{2-s} ds = 2 \int (2-s)^{1/2} ds = 2 \left(-\frac{2}{3} (2-s)^{3/2} \right) + C = -\frac{4}{3} (2-s)^{3/2} + C$

(د) $\int 2s^2 \sqrt{1+s^4} ds = \int 2s^2 (1+s^4)^{1/2} ds$
 Let $u = 1+s^4$, then $du = 4s^3 ds$
 $\int 2s^2 \sqrt{1+s^4} ds = \frac{1}{2} \int \frac{1}{s} \sqrt{u} du = \frac{1}{2} \int u^{-1/2} du = \frac{1}{2} \cdot 2 \sqrt{u} + C = \sqrt{1+s^4} + C$

(ج) $\int 2 \sqrt{2-s} ds = 2 \int (2-s)^{1/2} ds = 2 \left(-\frac{2}{3} (2-s)^{3/2} \right) + C = -\frac{4}{3} (2-s)^{3/2} + C$

(د) $\int 2s^2 \sqrt{1+s^4} ds = \int 2s^2 (1+s^4)^{1/2} ds$
 Let $u = 1+s^4$, then $du = 4s^3 ds$
 $\int 2s^2 \sqrt{1+s^4} ds = \frac{1}{2} \int \frac{1}{s} \sqrt{u} du = \frac{1}{2} \int u^{-1/2} du = \frac{1}{2} \cdot 2 \sqrt{u} + C = \sqrt{1+s^4} + C$

٣) احسب قيمة كل من التكاملات الآتية:

أ) $\int \sqrt{4s+1} ds$

ب) $\int \frac{3s^2(1-s)^2}{s^2} ds$

ج) $\int \frac{2s^2}{\sqrt{s^2-1}} ds$

د) $\int \frac{s^2-3}{s^2(s^3-2)} ds$

الحل

أ) $\int \sqrt{4s+1} ds = \int (4s+1)^{\frac{1}{2}} ds$

$$\int \frac{(4s+1)^{\frac{1}{2}}}{4 \times \frac{1}{2}} ds = \int \frac{(4s+1)^{\frac{1}{2}}}{2} ds$$

$$\frac{1}{2} \int \sqrt{4s+1} ds$$

$$\frac{1}{2} \left[\frac{2}{3} (4s+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3} (4s+1)^{\frac{1}{2}} \right] + C$$

$$\frac{1}{3} (4s+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3} (4s+1)^{\frac{1}{2}} + C$$

$$\frac{1}{(1-x^2)^{3/2}} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{1-x^2}$$

$$(ب) \int_{-1}^1 \frac{1}{(1-x^2)^{3/2}} dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{1}{1-x^2} dx$$

$$(ج) \int_{-1}^1 \frac{1}{1-x^2} dx = \int_{-1}^1 \frac{1}{(1-x)(1+x)} dx$$

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{(1-x)(1+x)} dx$$

$$\frac{1}{1-x} = \frac{A}{1-x} + \frac{B}{1+x} \Rightarrow \frac{1}{1-x^2} = \frac{A}{1-x} + \frac{B}{1+x}$$

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{1-x^2} dx = \int_{-1}^1 \left(\frac{A}{1-x} + \frac{B}{1+x} \right) dx$$

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{1-x^2} dx = \int_{-1}^1 \frac{1}{1+x} dx + \int_{-1}^1 \frac{1}{1-x} dx$$

$$\frac{2}{3} \left[\sqrt{1-x^2} \right]_{-1}^1 = \frac{2}{3} \left(\sqrt{1-1} - \sqrt{1-1} \right) = 0$$

(٥) إذا علمت أن $\int_0^2 (س) دس = ٣$ ، فجد قيمة التكامل الآتي: $\int_{-1}^2 ٨س ق(س) دس$

الحل

$$٨س = ٨(١ + س) \Leftrightarrow ٨س = ٨ + ٨س \Leftrightarrow ٨س - ٨س = ٨ - ٨س \Leftrightarrow ٠ = ٨ - ٨س$$

$$\int_{-1}^2 ٨س دس = \int_{-1}^2 (٨ + ٨س) دس = ٨س + ٤س^٢ \Big|_{-1}^2$$

$$عند س = ٢ = ١٦ + ١٦ = ٣٢$$

$$عند س = -١ = ٨ - ٤ = ٤$$

$$\int_{-1}^2 ٨س دس = ٣٢ - ٤ = ٢٨$$

منهاجي
متعة التعليم الهادف

منهاجي
متعة التعليم الهادف

(٦) حل المسألة الواردة في بداية الدرس.
جد قيمة التكامل الآتي:

$$\int_0^2 ٢س \sqrt{٩ + س} دس$$

الحل

$$\int_0^2 ٢س \sqrt{٩ + س} دس = \int_0^2 (٩ + س) \sqrt{٩ + س} دس$$

$$\Leftrightarrow \int_0^2 (٩ + س)^{٣/٢} دس = \frac{٢}{٥} (٩ + س)^{٥/٢} \Big|_0^2$$

$$= \frac{٢}{٥} (١٦\sqrt{١٦} - ٩\sqrt{٩})$$

$$= \frac{٢}{٥} (١٦ \cdot ٤ - ٩ \cdot ٣) = \frac{٢}{٥} (٦٤ - ٢٧) = \frac{٢}{٥} \cdot ٣٧ = \frac{٧٤}{٥}$$

منهاجي
متعة التعليم الهادف

منهاجي
متعة التعليم الهادف

$$\left(\sqrt[٥]{١٦} - \sqrt[٥]{٩} \right) \cdot \frac{٢}{٥} = \left(٢ - ٣ \right) \cdot \frac{٢}{٥} = -\frac{٢}{٥}$$