

إجابات أسئلة الدرس

التكامل بالتعويض

(١) اكتب التعويض المناسب لإيجاد قيمة كل تكامل من التكاملات الآتية:

(أ) $\int (1-2s)(s-2)^4 ds$ (ب) $\int 6s^2 \sqrt{2-3s} ds$

(ج) $\int (2s-3s^2) \sqrt{2s-3} ds$ (د) $\int \frac{9-s^3}{(s^2-6s)^2} ds$

الحل

(أ) $\int (1-2s)(s-2)^4 ds$

ص = $s-2 \Rightarrow \frac{ds}{ds} = 1 = \frac{ds}{ds} \Rightarrow ds = \frac{ds}{1} = ds$

$\int (1-2s)(s-2)^4 ds = \int (1-2s) s^4 ds$

$= \int (1-2s) s^4 ds = \int (s^4 - 2s^5) ds$

(ب) $\int 6s^2 \sqrt{2-3s} ds$

ص = $2-3s \Rightarrow \frac{ds}{ds} = -1 = \frac{ds}{-3} \Rightarrow ds = \frac{ds}{-3} = -\frac{ds}{3}$

$\int 6s^2 \sqrt{2-3s} ds = \int 6s^2 \sqrt{2-3s} (-\frac{ds}{3})$

$$p + \frac{u}{\sqrt{u}} = p + \frac{u^{1+\frac{1}{2}}}{1+\frac{1}{2}}$$

$$p + \frac{\sqrt{u}}{\frac{1}{2}} =$$

$$p + \frac{\sqrt{2-3x}}{\frac{1}{2}} =$$

(ج) $\int (2-3x)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{2-3x}{-3} \cdot \frac{2}{3} + C$

$$ص = \frac{2-3x}{-3} \Rightarrow 3x - 2 = \frac{3}{ص}$$

$$\cdot 3x = \frac{3}{ص} + 2$$

$$\frac{3x}{3x-2} = \frac{3}{ص} + 2$$

$$p + \frac{3}{3x-2} = \frac{3}{ص} + 2$$

$$p + \frac{3}{2-3x} = \frac{3}{ص} + 2$$

(د) $\int \frac{9-x^2}{(x^2-6)^2} dx$

$$\Leftrightarrow 6-x^2 = \frac{3}{ص} \Leftrightarrow x^2 - 6 = \frac{3}{ص}$$

$$\cdot 3x = \frac{3}{ص} + 6$$

$$= \frac{3x}{3x-6} \times \frac{9-x^2}{(x^2-6)^2}$$

$$= \frac{3x}{(x-2)^2} \times \frac{(3-x)(3+x)}{(x^2-6)^2}$$

$$p + \frac{1}{x-2} = p + \frac{1+x}{1+x}$$

$$p + \frac{3}{(x^2-6)^2} = p + \frac{3}{3x-6}$$

(٢) جد قيمة كل من التكاملات الآتية:

(أ) $\int \sqrt{(2-s)^2} ds$
 (ب) $\int (1-s)(1-2s^2-s^4) ds$
 (ج) $\int 2 \sqrt{2-s} ds$
 (د) $\int 2s^2 \sqrt{1+s^4} ds$

الحل

(أ) $\int \sqrt{(2-s)^2} ds = \int (2-s) ds = 2s - \frac{1}{2}s^2 + C$

(ب) $\int (1-s)(1-2s^2-s^4) ds = \int (1-s-2s^3+s^4-2s^5+s^5) ds = \int (1-s-2s^3) ds = s - \frac{1}{2}s^2 - \frac{1}{2}s^4 + C$

(ج) $\int 2 \sqrt{2-s} ds = 2 \int (2-s)^{1/2} ds = 2 \cdot \frac{2}{3} (2-s)^{3/2} + C = \frac{4}{3} (2-s)^{3/2} + C$

(د) $\int 2s^2 \sqrt{1+s^4} ds = \frac{1}{2} \int \sqrt{1+s^4} ds$

ص = $1+s^4 = u \Rightarrow 4s^3 ds = du \Rightarrow ds = \frac{du}{4s^3}$
 $\int \sqrt{u} \cdot \frac{du}{4s^3} = \frac{1}{4} \int \frac{\sqrt{u}}{s^3} ds$

ص = $1+s^4 = u \Rightarrow 4s^3 ds = du \Rightarrow ds = \frac{du}{4s^3}$
 $\int \sqrt{u} \cdot \frac{du}{4s^3} = \frac{1}{4} \int \frac{\sqrt{u}}{s^3} ds$

ص = $1+s^4 = u \Rightarrow 4s^3 ds = du \Rightarrow ds = \frac{du}{4s^3}$
 $\int \sqrt{u} \cdot \frac{du}{4s^3} = \frac{1}{4} \int \frac{\sqrt{u}}{s^3} ds$

ص = $1+s^4 = u \Rightarrow 4s^3 ds = du \Rightarrow ds = \frac{du}{4s^3}$
 $\int \sqrt{u} \cdot \frac{du}{4s^3} = \frac{1}{4} \int \frac{\sqrt{u}}{s^3} ds$

٣) احسب قيمة كل من التكاملات الآتية:

أ) $\int \sqrt{4s+1} ds$

ب) $\int \frac{3s^2(1-s)^2}{s^3} ds$

ج) $\int \frac{2s^2}{\sqrt{s^2-1}} ds$

د) $\int \frac{s^2-3}{s^2(s^3-2)} ds$

الحل

أ) $\int \sqrt{4s+1} ds = \int \sqrt{4(s+\frac{1}{4})} ds$

$$\int \sqrt{4(s+\frac{1}{4})} ds = \int \frac{1+\frac{1}{4}}{4 \times (1+\frac{1}{4})} ds$$

$$\int \frac{\sqrt{4(s+\frac{1}{4})}}{4} ds$$

$$\frac{1}{4} \left[\sqrt{4(s+\frac{1}{4})} - \frac{1}{2} \ln|2s+\frac{1}{2}| \right] + C$$

$$\frac{1}{4} (2\sqrt{s+\frac{1}{4}} - \ln|2s+\frac{1}{2}|) + C$$

$$\frac{1}{x} (1-2x) = \frac{1}{3x} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{x}$$

$$(ب) \int_{-1}^1 x^2 (1-x^2) dx = \text{مساحة}$$

$$(ج) \int_{-1}^1 x^2 \sqrt{1-x^2} dx =$$

$$\int_{-1}^1 x^2 (1-x^2)^{\frac{1}{2}} dx$$

$$\text{هنا } 1-x^2 = \frac{dx}{x} \Leftrightarrow x = \frac{dx}{1-x^2} \Leftrightarrow dx = \frac{dx}{x} = \frac{dx}{x}$$

$$\int_{-1}^1 x^2 \sqrt{1-x^2} dx = \frac{dx}{x} \sqrt{1-x^2}$$

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x} \sqrt{1-x^2} = \int_{-1}^1 \frac{dx}{1+x^2}$$

$$\frac{2}{3} \left[\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1-x^2}{1+x^2} \right| \right]_{-1}^1$$

(٥) إذا علمت أن $\int_0^2 (س) دس = ٣$ ، فجد قيمة التكامل الآتي: $\int_{-1}^2 ٨س ق(س٢ + ١) دس$

الحل

$$٥س = س٢ + ١ \Leftrightarrow س٢ = ٥س - ١ \Leftrightarrow دس = \frac{٥س}{٢س} = \frac{٥}{٢}$$

$$\int_{-1}^2 ٨س ق(س٢ + ١) دس = \int_{-1}^2 ٨س ق(٥س - ١) دس$$

$$\text{عند } س = -١ \Rightarrow س٢ = ٥(-١) - ١ = -٦ \Rightarrow ٢ = ١ + (-٦)$$

$$\text{عند } س = ٢ \Rightarrow س٢ = ٥(٢) - ١ = ٩ \Rightarrow ٥ = ١ + ٩$$

$$\int_{-1}^2 ٨س ق(س٢ + ١) دس = \int_{-1}^2 ٨س ق(٥س - ١) دس = ٣ - ٨٤ = ١٢$$

(٦) حل المسألة الواردة في بداية الدرس.
جد قيمة التكامل الآتي:

$$\int_0^2 ٢س \sqrt{٩ + س٢} دس$$

الحل

$$\int_0^2 ٢س (٩ + س٢)^{\frac{1}{2}} دس$$

$$\Leftrightarrow ٥س = ٩ + س٢ \Leftrightarrow دس = \frac{٥س}{٢س} = \frac{٥}{٢}$$

$$\text{عند } س = ٠ \Rightarrow دس = \frac{٥}{٢}$$

$$\int_0^2 ٢س \sqrt{٩ + س٢} دس = \int_{\frac{٥}{2}}^{\frac{٥}{2}} \frac{١ + \frac{1}{2}}{١ + \frac{1}{2}} دس = \int_{\frac{٥}{2}}^{\frac{5}{2}} \frac{٣}{٢} دس = \frac{٣}{٢} \left[\sqrt{٩ + س٢} \right]_{\frac{٥}{2}}^{\frac{5}{2}}$$

$$= \frac{3}{2} \left[\sqrt{٩ + ٢٥} - \sqrt{٩ + ٤} \right]$$

$$= \frac{3}{2} \left(\sqrt{٣٤} - \sqrt{١٣} \right) = \frac{3}{2} (٢٧ - ١٣) = \frac{3}{2} \times ١٤ = ٢١$$