

## إجابات تدريبات الدرس

### التكامل بالتعويض

#### تدريب ١

جد قيمة التكامل الآتي:  $\int (2s^3 + 4s) ds$

#### الحل

$$\text{نفرض أن } s = u \Rightarrow ds = du$$

$$2s^3 + 4s = 2u^3 + 4u$$

$$\int (2u^3 + 4u) du$$

$$= \frac{2u^4}{4} + \frac{4u^2}{2} + C$$

$$= \frac{1}{2}u^4 + 2u^2 + C$$

$$= \frac{1}{2}(2s^2 + 4s) + C$$

**تدريب ٢**

حلّ الفرع (٤) من المثال (٢) باستخدام قيم ص بالتعويض في حدود التكامل.  
جد قيمة التكامل الآتي:

$$(٤) \int_1^3 \frac{1}{1+\sqrt{5x}} dx$$

**الحل**

$$0 = \frac{dx}{\sqrt{5x}} \Leftrightarrow 1 + \sqrt{5x} = u$$

$$\cdot \quad dx = \frac{2u}{5} du \Leftrightarrow$$

$$\text{عندما } u = 3 \leftarrow x = 1 \Rightarrow 1 + \sqrt{5 \times 1} = 3$$

$$\text{عندما } u = 1 \leftarrow x = 0 \Rightarrow 1 + \sqrt{5 \times 0} = 1$$

$$\int_1^3 \frac{1}{u} \cdot \frac{2u}{5} du = \frac{2}{5} \int_1^3 \frac{1}{u} du$$

$$\frac{2}{5} \left[ \ln|u| \right]_1^3 = \frac{2}{5} \left[ \ln|3| - \ln|1| \right]$$

$$\frac{2}{5} = 3 - x \cdot \frac{2}{5} = (3-1) \cdot \frac{2}{5} = \left( \ln 3 - \ln 1 \right) \cdot \frac{2}{5}$$

**تدريب ٣**

جد قيمة كل من التكاملات الآتية:

- (١)  $\int 3s^2(1+s^2)^{-5} ds$   
 (٢)  $\int 2s \sqrt{1-s^2} ds$   
 (٣)  $\int (4s-1) \sqrt{1-2s^2} ds$   
 (٤)  $\int \frac{1}{\sqrt{1+s^2}} ds$

**الحل**

(١)  $\int 3s^2(1+s^2)^{-5} ds$

$u = 1+s^2$   
 $du = 2s ds$   
 $\frac{du}{2} = s ds$

$\int 3s^2(1+s^2)^{-5} ds$   
 $= \int 3u^{-5} \frac{du}{2}$   
 $= \frac{3}{2} \int u^{-5} du$

$= \frac{3}{2} \left( \frac{u^{-4}}{-4} \right) + C$   
 $= -\frac{3}{8} \frac{1}{(1+s^2)^4} + C$

$= -\frac{3}{8} \frac{1}{(1+s^2)^4} + C$

(٤)  $\int \frac{2x^2 - 1}{x^2 - 1} dx$

$\frac{2x^2 - 1}{x^2 - 1} = \frac{2x^2 - 2x^2 + 2x^2 - 1}{x^2 - 1}$

$= \frac{2x^2 - 2x^2 + 2x^2 - 1}{x^2 - 1} = \frac{2x^2 - 1}{x^2 - 1}$

$= 2 + \frac{1}{x^2 - 1}$

$= 2 + \frac{1}{(x-1)(x+1)}$

$u = x - 1$   
 $\frac{du}{dx} = 1$   
 $dx = du$

(٣)  $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$

$u = 1 - x^2$   
 $\frac{du}{dx} = -2x$   
 $dx = \frac{du}{-2x}$

$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{u}} \cdot \frac{du}{-2x}$

$= -\frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{u}} \cdot \frac{du}{x}$

$= -\frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \frac{1}{x} dx$

$= -\frac{1}{2} \int \frac{1}{1+x} dx$

$= -\frac{1}{2} \ln|1+x| + C$

$= -\frac{1}{2} \ln|1+x| + C$

$= -\frac{1}{2} \ln|1+x| + C$

$= -\frac{1}{2} \ln|1+x| + C$

تدريب ٤

جد قيمة كل تكامل مما يأتي:

$$(1) \int (أس + ب)^\theta دس، حيث أ، ب ثابتان، أ \neq 0، ن \neq 1$$

$$(2) \int جتا(أس + ب) دس، حيث أ، ب ثابتان، أ \neq 0$$

الحل

$$(1) \int (أس + ب)^\theta دس = دس \frac{(أس + ب)^{\theta + 1}}{\theta + 1} + \frac{أ}{\theta + 1} \int (أس + ب)^{\theta + 1} دس$$

$$(2) \int جتا(أس + ب) دس = دس جتا(أس + ب) + \frac{1}{أ} \int جتا(أس + ب) دس$$

تدريب ٥

جد قيمة كل تكامل مما يأتي:

$$(1) \int_{-1}^2 (س^2 - 1) دس$$

$$(2) \int_{12} ١٢ جا(س٤ - ١) دس$$

الحل

$$(1) \int_{-1}^2 (س^2 - 1) دس = \left[ \frac{س^3}{3} - س \right]_{-1}^2 = \left( \frac{8}{3} - 2 \right) - \left( \frac{-1}{3} - (-1) \right) = \frac{8}{3} - 2 + \frac{1}{3} - 1 = \frac{8}{3} - \frac{6}{3} + \frac{1}{3} - \frac{3}{3} = \frac{0}{3} = 0$$

$$(2) \int_{12} ١٢ جا(س٤ - ١) دس = ١٢ \int_{12} جا(س٤ - ١) دس = ١٢ \left[ \frac{س٤ - ١}{٤} \right]_{12} = ٣ \left[ س٤ - ١ \right]_{12} = ٣ (١٤٤ - ١) = ٣ \times ١٤٣ = ٤٢٩$$