

إجابات تدريبات الدرس

التكامل بالتعويض

تدريب ١

جد قيمة التكامل الآتي: $\int (2s^3 + 4s^2) ds$

الحل

$$\text{نفرض أن } s = u \Rightarrow ds = du$$

$$2s^3 + 4s^2 = 2u^3 + 4u^2$$

$$\int (2u^3 + 4u^2) du$$

$$= \frac{2u^4}{4} + \frac{4u^3}{3} + C$$

$$= \frac{1}{2}u^4 + \frac{4}{3}u^3 + C$$

$$= \frac{1}{2}(s^4) + \frac{4}{3}(s^3) + C$$

تدريب ٢

حلّ الفرع (٤) من المثال (٢) باستخدام قيم ص بالتعويض في حدود التكامل.
جد قيمة التكامل الآتي:

$$(٤) \int_1^3 \frac{1}{1+\sqrt{5x}} dx$$

الحل

$$0 = \frac{5x}{5} \Leftrightarrow 1 + \sqrt{5x} = 0$$

$$\cdot \sqrt{5x} = -1$$

$$\text{عندما } \sqrt{5x} = 3 \leftarrow 1 + 3 \times 5 = 16$$

$$\text{عندما } \sqrt{5x} = 1 \leftarrow 1 + 1 \times 5 = 6$$

$$\int_1^3 \frac{1}{1+\sqrt{5x}} dx = \int_6^{16} \frac{1}{u} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} du$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\ln u \right]_6^{16} = \frac{1}{\sqrt{5}} (\ln 16 - \ln 6)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \ln \frac{16}{6} = \frac{1}{\sqrt{5}} \ln \frac{4}{3}$$

تدريب ٣

جد قيمة كل من التكاملات الآتية:

$$(1) \int 3s^2(1+s^2)^{-5} ds \quad (2) \int 2s \sqrt{s^2-1} ds$$

$$(3) \int (4s-1) \sqrt{s^2-2s-1} ds \quad (4) \int \frac{1}{\sqrt{s+1}} ds$$

الحل

$$(1) \int 3s^2(1+s^2)^{-5} ds$$

$$\begin{aligned} u &= 1+s^2 \\ du &= 2s ds \\ ds &= \frac{du}{2s} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \int 3s^2 u^{-5} \cdot \frac{du}{2s} \\ &= \int \frac{3}{2} s u^{-5} du \end{aligned}$$

$$= \frac{3}{2} \int \frac{u^{-5}}{u} du = \frac{3}{2} \int u^{-6} du$$

$$= \frac{3}{2} \left(\frac{u^{-5}}{-5} \right) + C = -\frac{3}{10} \frac{1}{(1+s^2)^5} + C$$

(٤) $\int \frac{2x^2 - 1}{x^2 - 1} dx$

$$\begin{aligned} u &= x^2 - 1 \\ \frac{du}{dx} &= 2x \\ du &= 2x dx \end{aligned}$$

$\int \frac{2x^2 - 1}{x^2 - 1} dx$

$= \int \frac{u + 1}{u} du$

$= \int \frac{u}{u} + \frac{1}{u} du$

$= \int 1 + \frac{1}{u} du$

(٣) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$

$$\begin{aligned} u &= 1 - x^2 \\ \frac{du}{dx} &= -2x \\ du &= -2x dx \end{aligned}$$

$= \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{u}} \cdot \frac{-1}{2x} dx$

$= -\frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{u}} \cdot \frac{du}{x} = -\frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{u}} \cdot \frac{du}{1-u}$

$= -\frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{u}(1-u)} du = -\frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{u}(1-u)} du$

(٤) $\int \frac{1}{1+u^2} du$

$= \int \frac{1}{1+u^2} du = \arctan(u) + C$

$= \arctan\left(\frac{1}{x}\right) + C$

$= \arctan\left(\frac{1}{x}\right) + C$

$= \arctan\left(\frac{1}{x}\right) + C = \arctan\left(\frac{1}{x}\right) + C$

تدريب ٤

جد قيمة كل تكامل مما يأتي:

$$(1) \int (أس + ب)^\theta دس، حيث أ، ب ثابتان، أ \neq 0، ن \neq 1$$

$$(2) \int جتا(أس + ب) دس، حيث أ، ب ثابتان، أ \neq 0$$

الحل

$$(1) \int (أس + ب)^\theta دس = \frac{(أس + ب)^{\theta+1}}{أ(\theta+1)}$$

$$(2) \int جتا(أس + ب) دس = \frac{سب(أس + ب) - ب(أس + ب)^\theta}{أ}$$

تدريب ٥

جد قيمة كل تكامل مما يأتي:

$$(1) \int \frac{1}{س(س^2-1)} دس$$

$$(2) \int \frac{1}{س(س^4-1)} دس$$

الحل

$$(1) \frac{1}{س(س^2-1)} = \frac{1}{س(س-1)(س+1)} = \frac{A}{س} + \frac{B}{س-1} + \frac{C}{س+1}$$

$$(2) \int \frac{1}{س(س^4-1)} دس = \int \frac{1}{س(س-1)(س+1)(س^2+1)} دس$$