

## إجابات تدريبات الدرس

### التكامل بالتعويض

#### تدريب ١

جد قيمة التكامل الآتي:  $\int (2s^3 + 4s) ds$

#### الحل

$$\text{نفرض أن } s = u$$

$$ds = du$$

$$ds = du$$

$$\int (2s^3 + 4s) ds = \int (2u^3 + 4u) du$$

$$\int (2u^3 + 4u) du = \frac{2u^4}{4} + \frac{4u^2}{2} + C$$

$$= \frac{1}{2}u^4 + 2u^2 + C$$

تدريب ٢

حلّ الفرع (٤) من المثال (٢) باستخدام قيم ص بالتعويض في حدود التكامل.  
جد قيمة التكامل الآتي:

$$(٤) \int_1^3 \frac{1}{1+\sqrt{5x}} dx$$

الحل

$$0 = \frac{5x}{5} \Leftrightarrow 1 + \sqrt{5x} = 0$$

$$\cdot \sqrt{5x} = -1$$

$$\text{عندما } \sqrt{5x} = 3 \leftarrow 1 + 3 \times 5 = 16$$

$$\text{عندما } \sqrt{5x} = 1 \leftarrow 1 + 1 \times 5 = 6$$

$$\int_1^3 \frac{1}{1+\sqrt{5x}} dx = \frac{1}{5} \int_6^{16} \frac{1}{u} du$$

$$= \frac{1}{5} \left[ \ln|u| \right]_6^{16} = \frac{1}{5} (\ln 16 - \ln 6)$$

$$= \frac{1}{5} \ln \frac{16}{6} = \frac{1}{5} \ln \frac{4}{3}$$

تدريب ٣

جد قيمة كل من التكاملات الآتية:

$$(1) \int 3x^2(1+x^2)^{-5} dx \quad (2) \int 2x^2 \sqrt{1-x^2} dx$$

$$(3) \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \quad (4) \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx$$

الحل

$$(1) \int 3x^2(1+x^2)^{-5} dx$$

$$\begin{cases} u = 1+x^2 \\ du = 2x dx \\ \frac{du}{2} = x dx \end{cases}$$

$$\int 3x^2 u^{-5} dx$$

$$\int \frac{3}{2} u^{-5} du =$$

$$\frac{3}{2} \cdot \frac{u^{-4}}{-4} = -\frac{3}{8} \frac{u^{-4}}{1} =$$

$$-\frac{3}{8} \frac{1}{u^4} = -\frac{3}{8} \frac{1}{(1+x^2)^4}$$

(٤)  $\int \frac{2x^2 - 1}{x^2 - 1} dx$

$\frac{2x^2 - 1}{x^2 - 1} = \frac{2x^2 - 2x^2 + 2x^2 - 1}{x^2 - 1}$

$= \frac{2x^2 - 2x^2 + 2x - 2x - 1}{x^2 - 1}$

$= 2x - \frac{2x + 1}{x^2 - 1}$

$= 2x - \frac{2x + 1}{(x-1)(x+1)}$

$u = x^2 - 1$   
 $\frac{du}{dx} = 2x$   
 $dx = \frac{du}{2x}$

(٣)  $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$

$u = 1 - x^2$   
 $\frac{du}{dx} = -2x$   
 $dx = \frac{du}{-2x}$

$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{u}} \cdot \frac{du}{-2x}$

$= -\frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{u}} \cdot \frac{du}{x}$

$= -\frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \frac{dx}{x}$

$= -\frac{1}{2} \int \frac{1}{1+x^2} dx$

$= -\frac{1}{2} \int \frac{1}{1+x^2} dx$

$= -\frac{1}{2} \arctan(x) + C$

$= -\frac{1}{2} \arctan(x) + C$

$= -\frac{1}{2} \arctan(x) + C$

تدريب ٤

جد قيمة كل تكامل مما يأتي:

$$(1) \int (أس + ب) \sqrt{أس} ، حيث أ، ب ثابتان، أ \neq 0 ، ن \neq 1$$

$$(2) \int (أس + ب) \sqrt{أس} ، حيث أ، ب ثابتان، أ \neq 0$$

الحل

$$(1) \int (أس + ب) \sqrt{أس} = \int \frac{(أس + ب) \sqrt{أس}}{أس(1+ن)} = \int \frac{(أس + ب) \sqrt{أس}}{أس(1+ن)}$$

$$(2) \int (أس + ب) \sqrt{أس} = \int \frac{(أس + ب) \sqrt{أس}}{أس}$$

تدريب ٥

جد قيمة كل تكامل مما يأتي:

$$(1) \int \frac{1}{(أس - 1) \sqrt{أس}} ، (2) \int \frac{1}{(أس - 1) \sqrt{أس}}$$

الحل

$$(1) \int \frac{1}{(أس - 1) \sqrt{أس}} = \int \frac{1}{(أس - 1) \sqrt{أس}} = \int \frac{1}{(أس - 1) \sqrt{أس}}$$

$$(2) \int \frac{1}{(أس - 1) \sqrt{أس}} = \int \frac{1}{(أس - 1) \sqrt{أس}}$$