

## إجابات تدريبات الدرس

### التكامل بالتعويض

#### تدريب ١

جد قيمة التكامل الآتي:  $\int (2s^3 + 4s) ds$

#### الحل

$$\text{نفرض أن } s = u \Rightarrow ds = du$$

$$2s^3 + 4s = 2u^3 + 4u$$

$$\int (2u^3 + 4u) du$$

$$= \frac{2u^4}{4} + \frac{4u^2}{2} + C$$

$$= \frac{1}{2}u^4 + 2u^2 + C$$

$$= \frac{1}{2}(2s^2 + 4s) + C$$

تدريب ٢

حلّ الفرع (٤) من المثال (٢) باستخدام قيم ص بالتعويض في حدود التكامل.  
جد قيمة التكامل الآتي:

$$(٤) \int_1^3 \frac{1}{1+\sqrt{5x}} dx$$

الحل

$$0 = \frac{5x}{5} \Leftrightarrow 1 + \sqrt{5x} = 0$$

$$\cdot \sqrt{5x} = -1$$

$$\text{عندما } \sqrt{5x} = 3 \leftarrow 1 + 3 \times 5 = 16$$

$$\text{عندما } \sqrt{5x} = 1 \leftarrow 1 + 1 \times 5 = 6$$

$$\int_1^3 \frac{1}{1+\sqrt{5x}} dx = \int_6^{16} \frac{1}{u} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} du$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \ln|u| \right]_6^{16} = \frac{1}{\sqrt{5}} (\ln 16 - \ln 6)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \ln \frac{16}{6} = \frac{1}{\sqrt{5}} \ln \frac{4}{3}$$



**تدريب ٣**

جد قيمة كل من التكاملات الآتية:

$$(1) \int 3s^2(1+s^2)^{-1} ds$$

$$(2) \int 2s \sqrt{s^2-1} ds$$

$$(3) \int (4s-1) \sqrt{s^2-2s-1} ds$$

$$(4) \int \frac{1}{\sqrt{s+1}} ds$$

**الحل**

$$(1) \int 3s^2(1+s^2)^{-1} ds$$

$$= \int \frac{3s^2}{1+s^2} ds$$

$$= \int \frac{3s^2-3+3}{1+s^2} ds$$

$$= \int \frac{3s^2-3}{1+s^2} ds + \int \frac{3}{1+s^2} ds$$

$$= 3 \int \frac{s^2-1}{1+s^2} ds + \int \frac{3}{1+s^2} ds$$

$$= 3 \int \frac{s^2-1}{(s+1)(s-1)} ds + \int \frac{3}{1+s^2} ds$$

$$\begin{aligned} v &= 1+s^2 \\ dv &= 2s ds \\ ds &= \frac{dv}{2s} \end{aligned}$$

(٤)  $\int \frac{2x^2 - 1}{x^2 - 1} dx$

$$\begin{aligned} u &= x^2 - 1 \\ \frac{du}{dx} &= 2x \\ du &= 2x dx \end{aligned}$$

$\int \frac{2x^2 - 1}{x^2 - 1} dx$

$= \int \frac{u + 1}{u} du$

$= \int \left( \frac{u}{u} + \frac{1}{u} \right) du$

$= \int \left( 1 + \frac{1}{u} \right) du$

$= \int \frac{1}{1-x^2} dx$

$$\begin{aligned} u &= 1 - x^2 \\ \frac{du}{dx} &= -2x \\ du &= -2x dx \end{aligned}$$

$= \int \frac{1}{1-x^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{1-x^2} dx$

$= \frac{1}{2} \int \frac{1}{(1-x)(1+x)} dx$

$= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2} \ln|1-x| - \frac{1}{2} \ln|1+x| \right] + C$

$= \frac{1}{4} \ln \left| \frac{1-x}{1+x} \right| + C$

$= \frac{1}{4} \ln \left| \frac{1-x}{1+x} \right| + C$

$= \frac{1}{4} \ln \left| \frac{1-x}{1+x} \right| + C$

$= \frac{1}{4} \ln \left| \frac{1-x}{1+x} \right| + C$

$= \frac{1}{4} \ln \left| \frac{1-x}{1+x} \right| + C$

تدريب ٤

جد قيمة كل تكامل مما يأتي:

$$(1) \int (أس + ب)^\theta دس، حيث أ، ب ثابتان، أ \neq 0، ن \neq 1$$

$$(2) \int جتا(أس + ب) دس، حيث أ، ب ثابتان، أ \neq 0$$

الحل

$$(1) \int (أس + ب)^\theta دس = \frac{(أس + ب)^{\theta+1}}{(\theta+1)أ} + ج$$

$$(2) \int جتا(أس + ب) دس = \frac{جنا(أس + ب)}{أ} + ج$$

تدريب ٥

جد قيمة كل تكامل مما يأتي:

$$(1) \int \frac{1}{(أس^2 - 1)دس} دس \quad (2) \int \frac{1}{(أس^4 - 1)دس} دس$$

الحل

$$(1) \int \frac{1}{(أس^2 - 1)دس} دس = \int \frac{1}{(أس - 1)(أس + 1)دس} دس = \frac{1}{2} \left[ \int \frac{1}{أس - 1} دس - \int \frac{1}{أس + 1} دس \right] = \frac{1}{2} \left[ \ln|أس - 1| - \ln|أس + 1| \right] + ج$$

$$(2) \int \frac{1}{(أس^4 - 1)دس} دس = \frac{1}{4} \int \frac{1}{(أس^2 - 1)(أس^2 + 1)دس} دس = \frac{1}{8} \left[ \int \frac{1}{أس^2 - 1} دس - \int \frac{1}{أس^2 + 1} دس \right] + ج$$