إجابات تمارين ومسائل الدرس

التقعر - إجابات دليل المعلم

١) حدد فترات التقعر إلى الأعلى والتقعر إلى الأسفل لكلٍّ من منحنيات الاقترانات الآتية:

أ) ق(س)= س + $\frac{٤}{س}$

ب) ق(س)= $\sqrt{١٦ - س^{٢}}$ ، س ∈ [−٤، ٤]

جـ) ق(س) = { $س^{٢}-١$ ، س < ٢ ؛ ٥ − س ، س ≤ ٢ }

د) هـ (س) = $(\frac{س-١}{س})^{٢}$

هـ) ق(س) = جتاس − جا س+١ ، س ∈ [٠ ، π]

الحل

أ) منحنى الاقتران ق مقعر للأسفل في الفترة (− ∞ ، ٠)

منحنى الاقتران ق مقعر للأعلى في الفترة (٠ ، ∞)

ب) منحنى الاقتران ق مقعر للأسفل في الفترة (−٤، ٤)

جـ) منحنى الاقتران ق مقعر للأعلى في الفترة (−∞، ٢)

د) منحنى الاقتران ق مقعر للأعلى في الفترتين (− ∞ ، ٠) ، (٠ ، $\frac{٣}{٢}$)

منحنى الاقتران مقعر للأسفل في الفترة ($\frac{٣}{٢}$ ، ∞)

هـ) منحنى الاقتران ق مقعر للأعلى في الفترة ($\frac{\pi}{٤}$ ، π)

منحنى الاقتران ق مقعر للأسفل في الفترة (٠ ، $\frac{\pi}{٤}$)

٢) حدد نقط الانعطاف (إن وجدت) لكلٍّ من منحنيات الاقترانات الآتية:

أ) ق(س) = س^{٣} − ٦س^{٢} + ٩س + ٢ ، س ∈ ح

ب) ق(س) = س$^{\frac{٢}{٣}}$ − س$^{\frac{١}{٣}}$ ، س ∈ ح

جـ) ق(س) = س$^{\frac{٣}{٥}}$ ، س ∈ ح

د) ق(س) = س − ظا س ، س ∈ $\left(-\frac{\pi}{٢}، \frac{\pi}{٢}\right)$

الحل

أ) للاقتران ق نقطة انعطاف عند س = ٢ هي (٢، ٤)

ب) للاقتران ق نقطتي انعطاف عند س = ٠ ، س = ١ هما (٠،٠) ، (١، ٠)

جـ) للاقتران ق نقطة انعطاف عند س = ٠ هي (٠، ٠)

د) للاقتران ق نقطة انعطاف عند س = ٠ هي (٠، ٠)

---

٣) جد القيم العظمى والقيم الصغرى المحلية لكلٍّ من الاقترانات الآتية، باستخدام اختبار المشتقة الثانية، إن أمكن ذلك:

أ) ق(س) = جاس − جتاس ، س ∈ [٠، ٢ π]

ب) ق(س) = س^{٤} ، س ∈ ح

جـ) ق(س) = ٤ | س − ٢ | − | س + ١ | + س ، س ∈ ح

د) ق(س) = س^{٢} + $\frac{١٢٨}{\text{س}}$ ، س ≠ ٠

الحل

أ) للاقتران ق قيمة صغرى محلية عند س = $\frac{٧\pi}{٤}$ هي ق ($\frac{٧\pi}{٤}$) = − $\sqrt{٢}$

للاقتران ق قيمة عظمى محلية عند س = $\frac{٣\pi}{٤}$ هي ق ($\frac{٣\pi}{٤}$) = $\sqrt{٢}$

ب) يفشل اختبار المشتقة الثانية، ومن اختبار المشتقة الأولى نجد أنَّ للاقتران ق قيمة صغرى محلية عند س = ٠ هي ق (٠) = ٠

جـ) يفشل اختبار المشتقة الثانية، ومن اختبار المشتقة الأولى نجد أنَّ للاقتران ق قيمة عظمى محلية عند س = ٢ هي ق (٢) = − ١

د) للاقتران ق قيمة صغرى محلية عند س = ٤ هي ق (٤) = ٤٨

---

٤) عيِّن قاعدة الاقتران ق(س) = أس^{٣} + ب س^{٢} + جـ س + د ، (أ ≠ ٠ ، ب، جـ، د أعداد حقيقية) الذي يمر منحناه بالنقطة (١، ٥)، ومعادلة المماس لمنحناه عند نقطة الانعطاف (٢، ١)، هي:

ص + ٣س − ٧ = ٠

الحل

ق(س) = − س^{٣} + ٦ س^{٢} − ١٥س + ١٥

---

٥) إذا كان ق(س) = $\frac{١}{س}$ ، هـ(س) = س$^{\frac{١}{٣}}$ فأجب عما يأتي:

أ) قارن مجالات التقعر لكلٍّ من الاقترانين ق، هـ.

ب) جد قيم س التي يكون عندها كلٌّ من الاقترانين ق، هـ غير متصل.

جـ) جد نقط الانعطاف لكلٍّ من الاقترانين ق، هـ إن وُجدت.

الحل

منحنى ق(س) مقعر للأعلى في الفترة (٠ ، ∞)

منحنى ق(س) مقعر للأسفل في الفترة (−∞، ٠)

لا يوجد لمنحنى ق نقطة انعطاف عند س = ٠؛ لأنَّ ق غير معرف عند س = ٠.

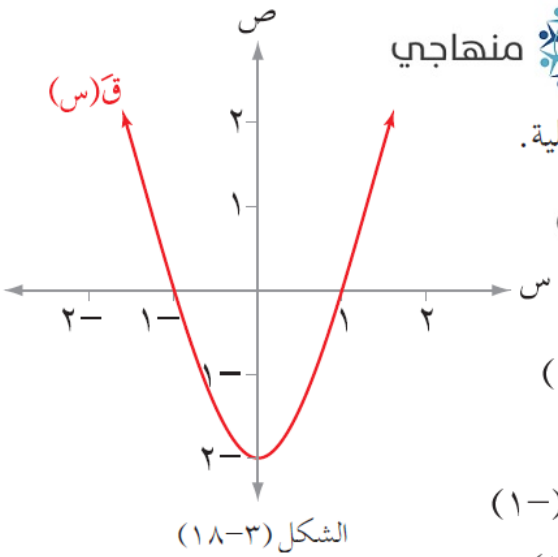
منحنى هـ(س) مقعر للأسفل في الفترة (٠ ، ∞)

منحنى هـ(س) مقعر للأعلى في الفترة (− ∞، ٠)

للاقتران هـ(س) نقطة انعطاف عند س = ٠ هي (٠، ٠)

---

٦) يمثل الشكل (٣-١٨) منحنى قَ(س)، للاقتران ق(س) المعرّف على ح. اعتمد على ذلك في الإجابة عن الأسئلة الآتية:



الشكل (٣-١٨)

أ) عيِّن مجالات التزايد والتناقص للاقتران ق.

ب) عيِّن قيم س التي يكون للاقتران عندها قيم قصوى محلية.

جـ) عيِّن مجالات التقعر للاقتران ق.

د) عيِّن نقط الانعطاف للاقتران ق.

الحل

أ) ق(س) متزايد في الفترتين $(-\infty ، -١]$ ، $[١ ، \infty)$

ق(س) متناقص في الفترة $[-١ ، ١]$

ب) للاقتران ق قيمة عظمى محلية عند س = -١ هي ق (-١)

للاقتران ق قيمة صغرى محلية عند س = ١ هي ق (١)

جـ) منحنى ق مقعر للأعلى في الفترة $[٠ ، \infty)$

منحنى ق مقعر للأسفل في الفترة $(-\infty ، ٠]$

د) للاقتران نقطة انعطاف عند س = ٠ هي (٠، ق(٠))