منهاجي
متعة التعليم الهادف

# حل تمارين كتاب الطالب

## أتحقق من فهمي

منهاجي
متعة التعليم الهادف

أَكتبُ معادلةَ الدائرةِ في الحالتيْنِ الآتيتيْنِ:

a) المركزُ هوَ النقطةُ (0, 4)، وطولُ نصفِ القُطْرِ 9 وحداتٍ.

$$x^2 + (y-4)^2 = 81$$

b) المركزُ هوَ نقطةُ الأصلِ، وطولُ القُطْرِ 8 وحداتٍ.

$$x^2 + y^2 = 16$$

أَجِدُ معادلةَ الدائرةِ التي مركزُها النقطةُ (4, −3)، وتمرُّ بالنقطةِ (2, 0).

$$(x-4)^2 + (y+3)^2 = 13$$

أَجِدُ إحداثياتِ المركزِ، وطولَ نصفِ القُطْرِ للدائرةِ $x^2 + y^2 + 2x - 10y - 10 = 0$.

$(-1, 5);\ r = 6$

أَجِدُ طولَ المماسِّ المرسومِ منَ النقطةِ $P\ (7, 4)$، الذي يمسُّ الدائرةَ التي معادلتُها $(x + 4)^2 + (y - 1)^2 = 81$ . 7 وحدات.

أُثبِتُ أنَّ المستقيمَ $y = 4x - 5$ هوَ مماسٌّ للدائرةِ التي معادلتُها $(x + 5)^2 + (y - 9)^2 = 68$.

بتعويض $y = 4x - 5$ في المعادلة: $(x + 5)^2 + (y - 9)^2 = 68$،
تنتج المعادلة: $17x^2 - 102x + 153 = 0$
وبقسمة هذه المعادلة على 17، تنتج المعادلة: $x^2 - 6x + 9 = 0$
التي لها حل واحد، هو: $x = 3$ وبتعويض القيمة $x = 3$
في المعادلة $y = 4x - 5$، فإن: $y = 7$ إذن: هذا المستقيم هو مماس للدائرة؛ لأنه يتقاطع معها في نقطة واحدة فقط، هي: $(3, 7)$.

## أتدرب وأحل المسائل

أَكتبُ معادلةَ الدائرةِ في كلٍّ منَ الحالاتِ الآتيةِ:

1 المركزُ هوَ نقطةُ الأصلِ، وطولُ نصفِ قُطْرِها 7 وحداتٍ.

$x^2 + y^2 = 49$

2 المركزُ هوَ النقطةُ $(-1, 3)$، وطولُ نصفِ قُطْرِها 5 وحداتٍ.

$(x+1)^2 + (y-3)^2 = 25$

3 المركزُ هوَ النقطةُ $(-3, -2)$، وطولُ قُطْرِها 10 وحداتٍ.

$(x+3)^2 + (y+2)^2 = 25$

أَجِدُ معادلةَ الدائرةِ المُعطى مركزُها وإحداثيّا نقطةٍ تمرُّ بها في كلٍّ ممّا يأتي:

4 المركزُ $(-1, 2)$، وتمرُّ بالنقطةِ $(3, 5)$. $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 25$

5 المركزُ نقطةُ الأصلِ، وتمرُّ بالنقطةِ $(-9, -4)$. $x^2 + y^2 = 97$

لفهم درس معادلة الدائرة ، شاهد الفيديو

## أَجِدُ إحداثيَّيِ المركزِ، وطولَ نصفِ القُطْرِ لكلٍّ منَ الدوائرِ الآتيةِ:

6) $(x+5)^2+(y-8)^2=36$ $r=6$ , $(-5, 8)$

7) $(x-19)^2+(y-33)^2=400$ $r=20$ , $(19, 33)$

8) $x^2+(y+4)^2=45$ $r=3\sqrt{5}$ , $(0, -4)$

9) $(x-3)^2+(y+10)^2=28$ $r=2\sqrt{7}$ , $(3, -10)$

10) $x^2+y^2-18x+14y=14$ $r=12$ , $(9, -7)$

11) $x^2+y^2+8x=9$ $r=5$ , $(-4, 0)$

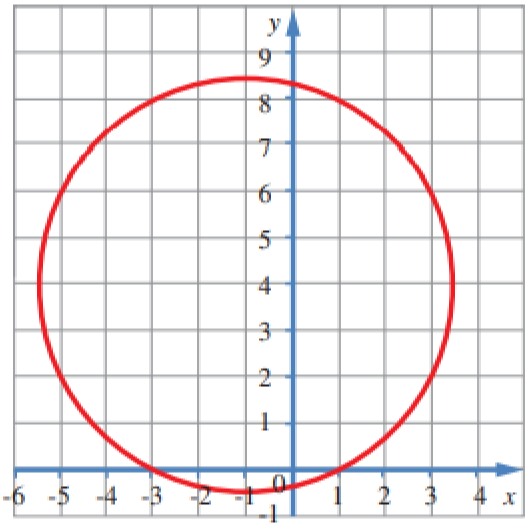
12) $2x^2+2y^2+20x+36y+158=0$ $r=3\sqrt{3}$ , $(-5, -9)$

13) $4x^2+4y^2+120x+855=24y$ $r\approx 13$ , $(-15, 3)$

أكتبُ معادلةَ الدائرةِ بالصورتيْنِ: $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ ,

$x^2+y^2+2fx+2gy+c=0$، حيثُ: $f$، وَ $g$، وَ $c$

أعدادٌ صحيحةٌ في الحالاتِ الآتيةِ:




**14** المركزُ $(-11, -1)$، وطولُ القُطْرِ 26 وحدةً.

$(x+11)^2+(y+1)^2=169$

$x^2+y^2+22x+2y-47=0$

**15** المركزُ $(3, 0)$، وطولُ نصفِ القُطْرِ $4\sqrt{3}$ وحداتٍ.

$(x-3)^2+y^2=48$

$x^2+y^2-6x-39=0$

**16** المركزُ $(-4, 7)$، وتمرُّ بالنقطةِ $(1, 3)$.

$$(x+4)^2 + (y-7)^2 = 41 \longrightarrow x^2 + y^2 + 8x - 14y + 24 = 0$$

**17** أَجِدُ معادلةَ الدائرةِ المُبيَّنةِ في الرسمِ البيانيِّ المجاورِ.

مركز هــذه الدائرة هو $(-1, 4)$، ومن المُلاحَظ أنها تمر بالنقطة $(1, 0)$؛ لذا، فإن مربع طول نصف قطرها: $2^2 + 4^2 = 20$ إذن: معادلتها هي: $(x+1)^2 + (y-4)^2 = 20$

أو: $x^2 + y^2 + 2x - 8y - 3 = 0$

**18** أَحُلُّ المسألةَ الواردةَ في بدايةِ الدرسِ.

معادلة الدائرة التي تمثل حدود المنطقة التي يصلها البث هي:

$(x-7)^2 + (y-4)^2 = 224^2$ بتعويض إحداثيات النقطة التي تمثل موقع بيت عمر في المعادلة، ينتج: $(-75-7)^2 + (95-4)^2 = 224^2$

$42928704 = 50176$ وهي عبارة غير صحيحة. وبما أن الطرف الأيســر أكبر من الطرف الأيمــن، فإن بيت عمر يقع خارج المنطقة التي يصلها البث.

**19** أجدُ إحداثيَّي المركزِ وطولَ نصفِ قُطْرِ الدائرةِ التي معادلتُها: $(2x-4)^2+(2y+6)^2=100$.

$$(2(x-2))^2+(2(y+3))^2=100$$

$4(x-2)^2+4(y+3)^2=100$ بالقسمة على 4 ينتج:

$(x-2)^2+(y+3)^2=25$ المركز هو $(2,-3)$، وطول نصف القطر 5 وحدات.

**20** دائـــرةٌ معادلتُها $x^2+y^2+px+6y=96$، وطولُ نصفِ قُطْرِها 11 وحـــدةً، وَ $p$ عددٌ ثابتٌ موجبٌ. أَجِدُ بُعْدَ مركزِ الدائرةِ عنْ نقطةِ الأصلِ.

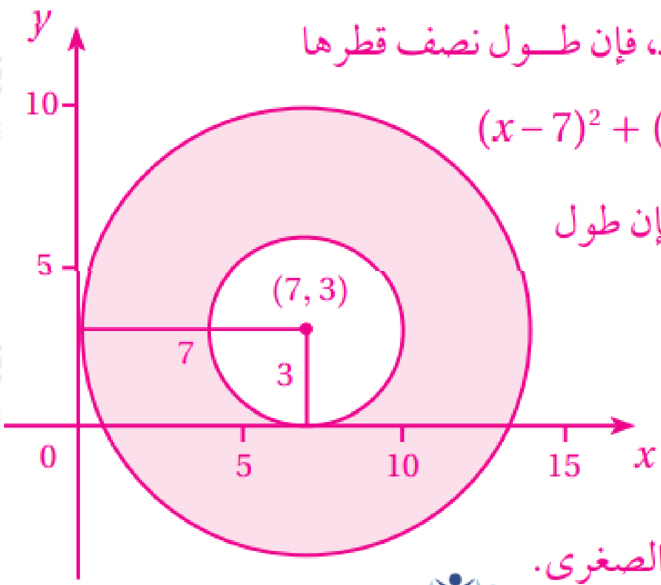
بإكمال المربع ينتج أن:

$$(x+\frac{P}{2})^2+(y+3)^2=96+(\frac{P}{2})^2+9 \Rightarrow r^2=96+(\frac{P}{2})^2+9$$

إذن: $11^2=105+\frac{P^2}{4} \Rightarrow 121-105=\frac{P^2}{4} \Rightarrow p^2=64 \Rightarrow p=8$

مركـز الدائـرة: $(-4,-3)$، وبُعْده عـن نقطة الأصـل: $\sqrt{16+9}$ ؛ أي 5 وحدات.

**21** **ممرٌّ:** ممرٌّ دائريٌّ محصورٌ بينَ دائرتيْنِ لهُما المركزُ نفسُهُ، وهوَ النقطةُ $(7, 3)$. إذا كانَتِ الدائرةُ الكبرى تمسُّ المحورَ $y$، والصغرى تمسُّ المحورَ $x$، فأكتبُ معادلتَي الدائرتيْنِ اللتيْنِ تُشكِّلانِ المحيطَ الخارجيَّ والمحيطَ الداخليَّ للممرِّ، ثمَّ أَجِدُ مساحةَ الممرِّ بالوحداتِ المربَّعةِ.




بما أن الدائرة الصغرى تمس المحور $x$، فإن طول نصف قطرها 3 وحدات، ومعادلتها هي: $(x-7)^2 + (y-3)^2 = 9$

وبما أن الدائرة الكبرى تمس المحور $y$، فإن طول نصف قطرها 7 وحدات، ومعادلتها هي:

$(x-7)^2 + (y-3)^2 = 49$

مساحة الممر يساوي الفرق بين مساحة الدائرة الكبرى ومساحة الدائرة الصغرى.

$A = 7^2 \times \pi - 3^2 \times \pi = 40\pi$

تُمثِّلُ النقطتانِ $D(2, 9)$، وَ $E(14, -7)$ نهايتَيْ قُطْرٍ لدائرةٍ مركزُها $C$:

**22** أَجِدُ إحداثيَّيِ المركزِ $C$. $C(8, 1)$

**23** أَجِدُ طولَ نصفِ القُطْرِ. $r = 10$

**24** أَكتبُ معادلةَ الدائرةِ. $(x-8)^2 + (y-1)^2 = 100$

**25** أُثبِتُ أنَّ المستقيمَ $y = 3x - 2$ هوَ مماسٌّ للدائرةِ التي معادلتُها:
$x^2 + y^2 + 4x - 24y + 108 = 0$.

بتعويض $y = 3x - 2$ في معادلة الدائرة، ينتج:

$$x^2 + (3x-2)^2 + 4x - 24(3x-2) + 108 = 0$$

$$x^2 + 9x^2 - 12x + 4 + 4x - 72x + 48 + 108 = 0$$

$$10x^2 - 80x + 160 = 0 \Rightarrow x^2 - 8x + 16 = 0$$

$$(x-4)^2 = 0 \Rightarrow x = 4$$

$$y = 3(4) - 2 = 10$$

إذن: هذا المستقيم مماس للدائرة؛ لأنه يقطعها في نقطة واحدة فقط هي: $(4, 10)$

## مهارات التفكير العليا

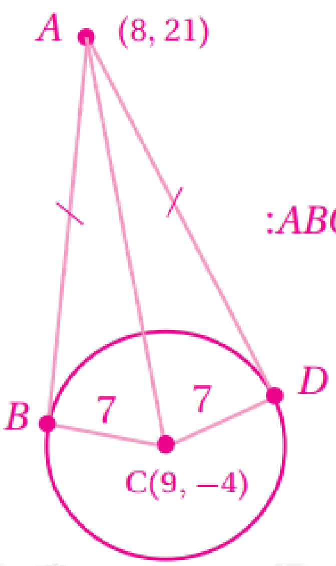
**27** **تبريرٌ:** قالَ عبدُ الرحمنِ إنَّ $x^2 + y^2 - 14x + 6y + 59 = 0$ ليسَتْ معادلةَ دائرةٍ.

هلْ قولُ عبدِ الرحمنِ صحيحٌ؟ أُبرِّرُ إجابتي. قوله صحيح لأن

$r^2 = a^2 + b^2 - c = 49 + 9 - 59 = -1$ وهي عدد غير حقيقي.

**28** **تحدٍّ:** رُسِمَ منَ النقطةِ $A\ (8, 21)$ مماسّانِ للدائرةِ التي مركزُها $C$، فمسّاها عندَ النقطتيْنِ $D$، وَ $B$. إذا كانَتْ معادلةُ الدائرةِ هيَ $(x-9)^2 + (y+4)^2 = 49$،

فما مساحةُ الشكلِ الرباعيِّ $ABCD$؟




$$(AB)^2 = (8-9)^2 + (21-(-4))^2 - 49 = 577$$

$$AB = \sqrt{577} \approx 24$$

مساحة الشكل $ABCD$ تساوي مثلي مساحة المثلث القائم $ABC$:

$$2 \times (\frac{1}{2} \times 24 \times 7) = 168$$

إذن: مساحة الشكل $ABCD$ هي 168 وحدة مربعة تقريبًا.

**29 تحدٍّ:** أكتبُ الصورةَ القياسيةَ لمعادلةِ الدائرةِ $x^2 + y^2 + 8x - 10y + 24 = 0$ منْ دونِ استعمالِ طريقةِ إكمالِ المربَّعِ.

لتكن الصورة القياسية لهذه المعادلة هي: $(x-h)^2 + (y-k)^2 = j^2$

بفك الأقواس، ينتج:

$$x^2 - 2hx + h^2 + y^2 - 2ky + k^2 = j^2$$

$$x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + h^2 + k^2 - j^2 = 0$$

وبمقارنة هذه المعادلة مع المعطاة في السؤال، وهي:

$$x^2 + y^2 + 8x \quad -10y \quad +24 = 0$$

ينتج أن: $8 = -2h\,;\ -10 = -2k\,;\ 24 = h^2 + k^2 - j^2$

أي إن: $24 = (-4)^2 + 5^2 - j^2 \Rightarrow j^2 = 17\,;\ h = -4;\ \ k = 5$

إذن: الصورة القياسية لهذه المعادلة هي: $(x+4)^2 + (y-5)^2 = 17$ .