أتدرب وأحل المسائل

حل المعادلات المثلثية

أتدرب وأحل المسائل

أَحُلُّ المعادلاتِ الآتيةَ، علمًا بأنَّ $0^\circ \le x \le 360^\circ$:

1. $\sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}$
$x = 45^\circ, x = 135^\circ$

2. $\tan x = \frac{1}{\sqrt{3}}$
$x = 30^\circ, x = 210^\circ$

3. $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$
$x = 30^\circ, x = 330^\circ$

4. $7 + 9\cos x = 1$
$x \approx 131.81^\circ, x \approx 228.19^\circ$

5. $2\sin x + 1 = 0$
$x = 210^\circ, x = 330^\circ$

6. $1 - 2\tan x = 5$
$x \approx 116.57^\circ, x \approx 296.57^\circ$

أَحُلُّ المعادلاتِ الآتيةَ، علمًا بأنَّ $0^\circ \le x \le 90^\circ$:

7. $5 - 2\cos(4x) = 4$
$5 - 2\cos(4x) = 4, 0^\circ \le x \le 90^\circ$
$-2\cos(4x) = -1$
$\cos(4x) = \frac{1}{2}$
$\cos\theta = \frac{1}{2}, 0^\circ \le \theta \le 360^\circ$
$\Rightarrow \theta = 60^\circ, \theta = 300^\circ$
$\Rightarrow x = 15^\circ, x = 75^\circ$

8. $3 + 4\tan(2x) = 6$
$x \approx 18.435^\circ$

9. $13\sin(3x) + 1 = 6$
$x \approx 7.54^\circ, x \approx 52.46^\circ$

10. $2(\sin x - 2) + 1 = 3\sin x$
ϕ

11. $\tan x - 3(2\tan x - 1) = 10$
$x \approx 125.4^\circ, x \approx 305.54^\circ$

12. $15\tan x - 7 = 5\tan x - 3$
$x \approx 21.80^\circ, x \approx 201.80^\circ$

13. $5(\cos x - 1) = 6 + \cos x$
ϕ

14. $\tan^2 x - 9\tan x + 20 = 0$
$(\tan x - 4)(\tan x - 5) = 0$
$\tan x = 4 \Rightarrow x \approx 75.96^\circ, x \approx 255.96^\circ$
$\tan x = 5 \Rightarrow x \approx 78.69^\circ, x \approx 258.69^\circ$

15. $2\cos^2 x - \cos x = 0$
$\cos x(2\cos x - 1) = 0$
$\cos x = 0 \Rightarrow x = 90^\circ, x = 270^\circ$
$\cos x = 0.5 \Rightarrow x = 60^\circ, x = 300^\circ$

16 $4\sin^2 x - 3\sin x = 1$

$(\sin x - 1)(4\sin x + 1) = 0$

$\sin x = 1 \Rightarrow x = 90°$

$\sin x = -0.25 \Rightarrow x \approx 194.48° , x \approx 345.52°$

17 $2\sin^2 x - 1 = 0$

$x = 45° , x = 135°$

$x = 225° , x = 315°$

18 $4\cos^2 x - 4 = 15\cos x$ $x \approx 104.48°$, $x \approx 255.52°$

19 $\cos x = \sin x$ $x = 45°, x = 225°$

20 **ساعاتٌ**: أَحُلُّ المسألةَ الواردةَ في بدايةِ الدرسِ.

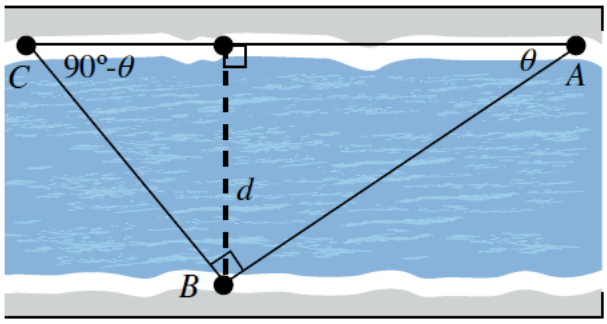
$118 = -60\cos(30x) + 110$

$\Rightarrow -60\cos(30x) = 8$

$\Rightarrow \cos(\theta) = \frac{-2}{15} \Rightarrow \theta \approx 97.66°$ or $262.34°$

$\Rightarrow x \approx 3.26° , x \approx 8.74°$

21 **سِباحةٌ**: سبحَ حامدٌ مسافةَ 90 m منَ النقطةِ A على الضفةِ الشماليةِ لنهرٍ إلى النقطةِ B على الضفةِ المقابلةِ، ثمَّ دارَ بزاويةٍ قائمةٍ، وسبحَ مسافةَ 60 m إلى نقطةٍ أُخرى C على الضفةِ الشماليةِ. إذا كانَ قياسُ الزاويةِ CAB هوَ θ، وقياسُ الزاويةِ ACB هوَ $(90° - \theta)$، وطولُ العمودِ منَ B إلى CA يساوي عرضَ النهرِ d، فأُعبِّرُ عنْ d بدلالةِ θ مرَّةً، وبدلالةِ $(90° - \theta)$ مرَّةً أُخرى، ثمَّ أَكتبُ معادلةً وأَحُلُّها لإيجادِ قيمةِ θ، ثمَّ أَجِدُ عرضَ النهرِ.



$d = 90\cos\theta , d = 60\cos(90° - \theta)$

$\Rightarrow 90\cos\theta = 60\cos(90° - \theta)$

$\Rightarrow 90\cos\theta = 60\sin\theta \Rightarrow \tan\theta = \frac{3}{2}$

$\Rightarrow \theta \approx 56.31°$

$d = 90\cos 56.31° \approx 50$ m

22 **دولابٌ**: يُعطى ارتفاعُ الراكبِ عنِ الأرضِ في دولابِ دوّارٍ بالمعادلةِ: $h = 27 - 25\cos\theta$، حيثُ h الارتفاعُ بالأمتارِ، وَ θ قياسُ الزاويةِ التي دارَها الدولابُ. متى يكونُ ارتفاعُ الراكبِ عنِ الأرضِ 49 m؟

$49 = 27 - 25\cos\theta$

$\Rightarrow \cos\theta = -0.88$

$\Rightarrow \theta \approx 151.64°$ or $\theta \approx 208.36°$

23 **حركةُ مقذوفاتٍ:** المسافةُ الأفقيةُ التي تقطعُها مقذوفةٌ في الهواءِ (منْ دونِ افتراضِ وجودٍ لمقاومةِ الهواءِ) تُعطى بالمعادلةِ: $d = \frac{v_0^2 \sin(2\theta)}{g}$، حيثُ: v_0 السرعةُ الابتدائيةُ، وَ θ الزاويةُ التي تُطلَقُ بها المقذوفةُ، وَ g تسارُعُ الجاذبيةِ الأرضيةِ ($9.8\ m/s^2$). إذا قُذِفَتْ كرةُ بيسبول بسرعةٍ ابتدائيةٍ مقدارُها $40\ m/s$، فما الزاويةُ التي تُوجَّهُ بها الرميةُ لكيْ تقطعَ الكرةُ مسافةً أفقيةً مقدارُها $110\ m$ قبلَ سقوطِها على الأرضِ؟ ما أبعدُ نقطةٍ يُمكِنُ أنْ تصلَها الكرةُ إذا قُذِفَتْ بهذهِ السرعةِ الابتدائيةِ؟

$$110 = \frac{(40)^2 \sin(2\theta)}{9.8}$$
$$\Rightarrow \sin(2\theta) \approx 0.674$$
$$\Rightarrow \sin(x) \approx 0.674$$
$$\Rightarrow x \approx 42.38^\circ \quad \text{or} \quad x \approx 137.62^\circ$$
$$\Rightarrow \theta \approx 21.19^\circ \quad \text{or} \quad \theta \approx 68.81^\circ$$

منهاجي

يصل المقذوف أبعد نقطة عندما $\theta = 45^\circ$، عندئذٍ:

$$d = \frac{(40)^2 \sin(90^\circ)}{9.8} = \frac{1600 \times 1}{9.8} \approx 163.27\ m$$

مهارات التفكير العليا

24 **أكتشفُ الخطأَ:** حَلَّ كلٌّ منْ سعيدٍ وعليٍّ المعادلةَ: $2\sin x \cos x = \sin x$، حيثُ: $0^\circ \le x < 360^\circ$:

أخطأ علي عندما اختصر $\sin x$ من طرفي المعادلة الأصلية، أمّا سعيد فإجابته صحيحة.

25 **تحدٍّ:** أَحُلُّ المعادلةَ: $2\sin x \cos x + \sin x + 2\cos x + 1 = 0$، علمًا بأنَّ $0^\circ \le x \le 360^\circ$.

$$2\sin x \cos x + \sin x + 2\cos x + 1 = 0$$
$$\sin x\,(2\cos x + 1) + 2\cos x + 1 = 0$$
$$(2\cos x + 1)(\sin x + 1) = 0$$
$$\cos x = \frac{-1}{2} \Rightarrow x = 120^\circ \quad , \quad x = 240^\circ$$
$$\sin x = -1 \Rightarrow x = 270^\circ$$

منهاجي

26 **تحدٍّ:** أُحدِّدُ عددَ حلولِ المعادلةِ: $\cos x - \sin x - 1 = 0$، حيثُ: $0^\circ \le x < 360^\circ$.

$$\cos x - \sin x = 1$$
$$\cos x = 1 \quad , \quad \sin x = 0$$
$$\Rightarrow x = 0^\circ \quad , \quad x = 360^\circ$$
$$\cos x = 0 \quad , \quad \sin x = -1$$
$$\Rightarrow x = 270^\circ$$

منهاجي

منهاجي

إذن: يوجد ثلاثة حلول للمعادلة.