أتدرب وأحل المسائل

حل نظام مكونة من معادلتين تربيعيتين

أتدرب وأحل المسائل

أَحُلُّ كلًّا منْ أنظمةِ المعادلاتِ التربيعيةِ الآتيةِ، ثمَّ أَتحقَّقُ منْ صِحَّةِ الحَلِّ:

1) $y = 2x^2 + x - 5$
$y = -x^2 - 2x - 5$
$(-1, -4), (0, -5)$

2) $y = x^2 - 4x + 1$
$y = -2x^2 - 4$
لا يوجد حل للنظام.

3) $y = x^2 + 1$
$y = 2x^2 - 3$
$(-2, 5), (2, 5)$

4) $y = x^2 + x + 1$
$y = -x^2 + x - 2$
لا يوجد حل للنظام.

5) $y = -x^2 + 5x$
$y = x^2 - 5x$
$(0, 0), (5, 0)$

6) $y = x^2$
$y = x^2 + x + 6$
$(-6, 36)$

7) $y = -x^2 + 6x + 8$
$y = -x^2 - 6x + 8$
$(0, 8)$

8) $x^2 + y^2 = 16$
$y = x^2 - 5$

9) $5x^2 - 2y^2 = 18$
$3x^2 + 5y^2 = 17$
$(2, 1), (2, -1), (-2, 1), (-2, -1)$

8) بجمع المعادلتين

$$\begin{array}{r} x^2 + y^2 = 16 \\ +\quad -x^2 + y = -5 \\ \hline y^2 + y = 11 \end{array}$$

$y^2 + y - 11 = 0$

$y \approx 2.85, y \approx -3.85$

$x^2 = 2.85 + 5 = 7.85$

$x \approx 2.80, x \approx -2.80$

$x^2 = -3.85 + 5 = 1.15$

$x \approx 1.07, x \approx -1.07$

$(2.80, 2.85), (-2.80, 2.85), (1.07, -3.85), (-1.07, -3.85)$

10 أَجِدُ نقاطَ التقاطعِ بينَ الدائرتيْنِ:

$$x^2 + (y-2)^2 = 4$$
$$x^2 + y^2 = 9$$

بطرح المعادلة (1) من (2)

$$\begin{array}{rl} & x^2 + (y-2)^2 = 4 \rightarrow (1) \\ - & x^2 + y^2 = 9 \rightarrow (2) \\ \hline & y^2 - (y-2)^2 = 5 \end{array}$$

$$y^2 - y^2 + 4y - 4 = 5$$
$$4y = 9$$
$$y = \frac{9}{4} = 2.25$$
$$x^2 + (\frac{9}{4})^2 = 9$$
$$x = \pm\frac{\sqrt{63}}{4}$$
$$x \approx \pm 1.98$$
$$(1.98, 2.25), (-1.98, 2.25)$$

11 عددانِ، مجموعُ مربَّعَيْهِما 89، والفرقُ بينَ مربَّعَيْهِما 39، ما هذانِ العددانِ؟

افترض أن العدد الأول هو x ، وأن العدد الثاني هو y:

$$x^2 + y^2 = 89$$
$$x^2 - y^2 = 39$$

بحل نظام المعادلات التربيعية، ينتج:

$$(8,5), (-8,5), (8,-5), (-8,-5)$$

12 **فيزياءُ:** قُذِفَتْ كرتانِ رأسيًّا في الوقتِ نفسِهِ منْ موقعيْنِ مختلفيْنِ. إذا كانَتِ المعادلةُ: $y=-2t^2+12t+10$ تُمثِّلُ ارتفاعَ الكرةِ الأولى بالأمتارِ بعدَ مرورِ t ثانيةٍ، وكانَتِ المعادلةُ: $y=-2t^2+4t+42$ تُمثِّلُ ارتفاعَ الكرةِ الثانيةِ، فأَجِدُ الزمنَ الذي يتساوى عندَهُ ارتفاعُ كلٍّ منَ الكرتيْنِ، ثمَّ أَجِدُ ارتفاعَ كلِّ كرةٍ في تلكَ اللحظةِ. $t=4\,sec, y=25m$

13 **ثقافةٌ ماليةٌ:** بالعودةِ إلى مقدمةِ الدرسِ، أَستعملُ نظامَ المعادلاتِ المعطى لإيجادِ نقاطِ التوازنِ التي يتساوى عندَها العرضُ والطلبُ.

$x^2+6x=-x^2+24x$

$\Rightarrow 2x^2-18x=0$

$\Rightarrow x^2-9x=0$

$\Rightarrow x(x-9)=0$ $\quad x=0$ تهمل

$\Rightarrow x=0, x=9$

$\Rightarrow (9.135)$

منهاجي

14 **أراضٍ:** قطعةُ أرضٍ على شكلِ مثلثٍ مُتطابِقِ الضلعيْنِ، طولُ ضلعِهِ المُتطابِقِ 50 m، ومساحتُهُ $1200\ m^2$. أَجِدُ طولَ قاعدتِهِ، وارتفاعَهُ.

افترض أن طول القاعدة هو $2x$، وأن الارتفاع هو y:

منهاجي

$x^2+y^2=2500 \Rightarrow y=\sqrt{2500-x^2}$

$\frac{1}{2}(2x)(y)=1200 \Rightarrow xy=1200 \Rightarrow x\sqrt{2500-x^2}=1200$

$\Rightarrow x^2(2500-x^2)=1440000$

$\Rightarrow x^4-2500x^2+1440000=0$

$u=x^2 \Rightarrow u^2-2500u+1440000=0$

منهاجي

$u=\frac{2500\pm\sqrt{490000}}{2} \Rightarrow u=1600, u=900$

$x^2=1600 \Rightarrow x=40, y=30$

$x^2=900 \Rightarrow x=30, y=40$

أي إن طول القاعدة = 80 m، والارتفاع= 30 m

أو:

طول القاعدة = 60 m، والارتفاع = 40 m

مهارات التفكير العليا

15 **تبريرٌ:** قالَتْ زينبُ إنَّهُ لا يوجدُ حَلٌّ لنظامِ المعادلاتِ الآتي: لا يمكن إيجاد عددين مجموع مربعيهما يساوي 4، ويساوي 9 في آنٍ معًا.

$$x^2 + y^2 = 4$$
$$x^2 + y^2 = 9$$

هلْ قولُ زينبَ صحيحٌ؟ أُبرِّرُ إجابتي.

16 **مسألةٌ مفتوحةٌ:** أَكتبُ نظامًا مُكوَّنًا منْ معادلتيْنِ تربيعيتيْنِ ليسَ لهُ حَلٌّ. توجد إجابات متعددة، منها: $x^2 + y^2 = 9 , x^2 + y = 10$

17 **تحدٍّ:** أَحُلُّ نظامَ المعادلاتِ الآتيَ:

$$x^2 - 3xy + 2y^2 = 0$$
$$x^2 + xy = 6$$

$x^2 - 3xy + 2y^2 = 0 \Rightarrow (x - 2y)(x - y) = 0$

$\Rightarrow x = 2y$, or $x = y$

$x = y \Rightarrow x^2 + xy = x^2 + x^2 = 2x^2 = 6$

$\Rightarrow x^2 = 3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$, $y = \pm\sqrt{3}$

$x = 2y \Rightarrow y = \frac{1}{2}x \Rightarrow x^2 + xy = x^2 + \frac{1}{2}x^2 = \frac{3}{2}x^2 = 6$

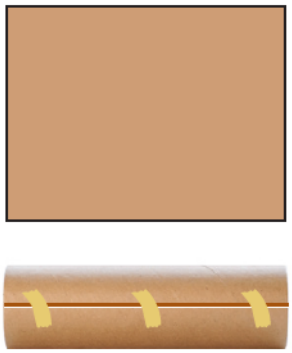
$\Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2 , y = \pm 1$

الحلول هي: $(\sqrt{3} , \sqrt{3}), (-\sqrt{3} , -\sqrt{3}), (2, 1), (-2, -1)$

18 **مسألةٌ مفتوحةٌ:** أَكتبُ نظامًا منْ معادلتيْنِ تربيعيتيْنِ؛ على أنْ تكونَ النقطةُ (5, 3) أحدَ حلولِهِ.

توجد إجابات متعددة، منها: $(x-5)^2+(y-1)^2=4,\ x^2-10x+y=-22$

19 **تحدٍّ:** قطعةٌ منْ ورقٍ مُقَوًّى مستطيلةُ الشكلِ، مساحتُها $216\ \text{cm}^2$، ثُنِيَ طولاها، ولُصِقا معًا، فتشكَّلَ أنبوبٌ أسطوانيٌّ حجمُهُ $224\ \text{cm}^3$. أَجِدُ بُعْدَيْ قطعةِ الورقِ.



$$x^2+y^2=500$$

$$y=2\pi r \Rightarrow r=\frac{y}{2\pi}$$

$$V=\pi r^2 x=\pi\left(\frac{y}{2\pi}\right)^2(x)=\frac{y^2x}{4\pi}=\frac{250}{\pi}$$

$$\Rightarrow y^2=\frac{1000}{x}$$

$$\Rightarrow x^2+\frac{1000}{x}=500$$

$$\Rightarrow x^3-500x+1000=0$$

بحل المعادلة

$$x\approx 21.28\ \text{cm},\ y\approx 6.85\ \text{cm},$$

or $x\approx 2.02\ \text{cm},\ y\approx 22.25\ \text{cm},$

or $x\approx -23.30$ (مرفوض)