أتدرب وأحل المسائل

المعدلات المرتبطة

cm/s يزداد طول أحد أضلاع مستطيل بمعدل 2 ، ويقل طول ضلعه الآخر بمعدل 3 cm/s ، بحيث يحافظ المستطيل على شكله، وفي لحظة معينة بلغ طول الضلع الأول 20 cm ، وطول الضلع الثاني 50 cm :

(1) ما معدل تغير مساحة المستطيل في تلك اللحظة؟

ليكون طول المستطيل x وعرضه y ومساحته A ومحيطه C وطول قطره R .

المعطى:

$$dydt=-3cm/s,dxdt=2cm/s$$

المطلوب:

$$A=xy\rightarrow dAdt=xdydt+ydxdt\rightarrow dAdt|x=20,y=50=20(-3)+50(2)=40cm2/s$$

(2) ما معدل تغير محيط المستطيل في تلك اللحظة؟

$$C=2x+2y\rightarrow dCdt=2dxdt+2dydt\rightarrow dCdt|x=20,y=50=2(2)+2(-3)=-2cm/s$$

(3) ما معدل تغير طول قطر المستطيل في تلك اللحظة؟

$$R2=x2+y22RdRdt=2xdxdt+2ydydt(20)2+(50)2dRdt|x=20,y=50=20(2)+50(-3)dRdt|x=20,y=50=-1101029=-1129cm/s$$

(4) أيّ الكميات في المسألة متزايد؟ وأيّها متناقص؟ أبرر إجابتي.

في اللحظة المذكورة تكون المساحة متزايدة (لأن معدل تغيرها موجب)، بينما يتناقص كلّ من المحيط وطول القطر (لأن معدل تغير كلّ منهما سالب).

cm مكعب طول ضلعه 10 . بدأ المكعب يتمدد فزاد طول ضلعه بمعدّل 6 cm/s ، وظل مُحافظاً على شكله:

(5) أجد معدل تغير حجم المكعب بعد 4s من بدء تمدده.

ليكن حجم المكعب V وطول ضلعه (حرفه) x

المعطى:

$$\frac{dx}{dt}=6cm/s$$

المطلوب:

$$\frac{dV}{dt}|_{t=4}$$

بعد مرور t ثانية يصبح طول ضلع المكعب:

$$x=10+6t$$

ويكون حجمه:

$$V=x^3=(10+6t)^3\frac{dV}{dt}=3(10+6t)^2\times6\frac{dV}{dt}|_{t=4}=3(34)^2(6)=20808cm^3/s$$

(6) أجد معدل تغير مساحة سطح المكعب بعد 6s من بدء تمدده.

لتكن مساحة سطح المكعب A

بعد مرور t ثانية تصبح مساحة سطح المكعب:

$$A=6x^2=6(10+6t)^2$$

$$\frac{dA}{dt}=12(10+6t)\times6\frac{dA}{dt}|_{t=6}=12(46)(6)=3312cm^2/s$$

وقود: خزّان أسطواني الشكل، ارتفاعه 15 m ، وقطر قاعدته 2 m . ملىء الخزان بالوقود بمعدّل 500 L/min :

(7) أجد معدل ارتفاع الوقود في الخزان عند أيّ لحظة.

ليكن ارتفاع الوقود في الخزان h سيكون طول نصف قطر قاعدته 1 m ، ويكون حجمه:

$$V=\pi r^2h=\pi h$$

المعطى:

$dVdt=500L/min=0.5m3/min$

المطلوب:

$dhdt$

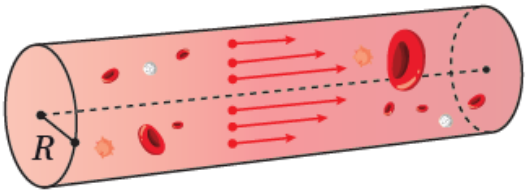
العلاقة التي تربط الحجم بالارتفاع:

$V=\pi hdVdt=\pi dhdt0.5=\pi dhdtdhdt=12\pi m/min$

(8) أجد معدل تغير المساحة الجانبية للوقود عند أيّ لحظة.

$A=2\pi rh=2\pi hdAdt=2\pi dhdt=2\pi\times12\pi=1m2/min$

(9) طب: تُمثل المعادلة:



$(V=31256(R2-(0.0005)2$

Rسرعة الدم في أحد الأوعية الدموية بالمليمتر لكل ثانية، حيث طول نصف قطر الوعاء بالمليمتر. إذا كان الوعاء ينقبض بحيث ينقص نصف قطره بمعدّل 0.0002 mm/s ، فأجد معدل تغير سرعة الدم في الوعاء في اللحظة التي يكون فيها طول نصف قطره 0.075 mm

المعطى:

$dRdt=-0.0002mm/s$

المطلوب:

$dVdt|R=0.075$

العلاقة المعطاة:

$V=31256(R2-(0.0005)2)dVdt=31256(2RdRdt)dVdt|R=0.075=31256($

$$2(0.075)(-0.0002))\approx -0.0156 mm/s2$$