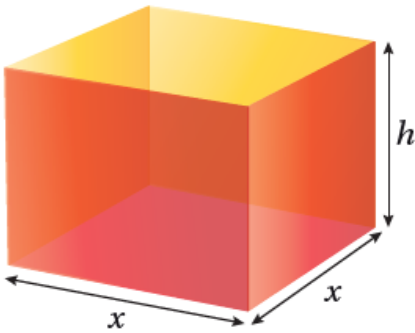


أتحقق من فهمي تطبيقات القيم القصوى

إيجاد أكبر حجم ممكن

أتحقق من فهمي صفحة 121



ترغب شركة في تصميم صندوق مفتوح من الأعلى،
cm² وقاعدته مربعة الشكل، ومساحة سطحه الكلية 1080
كما في الشكل المجاور. أجد أبعاد الصندوق ليكون حجمه
أكبر ما يمكن.

V ليكن حجم الصندوق ومساحة سطحه الكلية A

$$A = 4xh + x^2 = 1080 \rightarrow h = \frac{1080 - x^2}{4x} \quad V = x^2 h \quad V(x) = x^2 \left(\frac{1080 - x^2}{4x} \right) = \frac{1}{4} (1080x - x^3)$$

القيمة الحرجة هي: 360

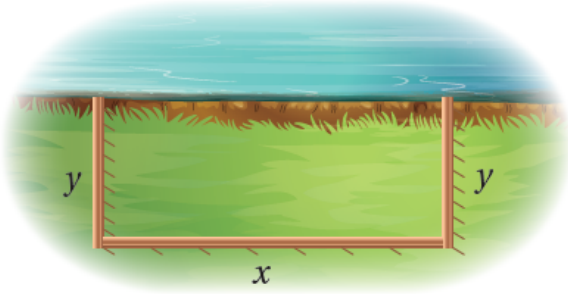
أجد حجم الصندوق عند القيمة الحرجة وعند طرفي المجال.

$$V(0) = 0 \quad V(360) = \frac{1}{4} (1080 \cdot 360 - 360^3) = 180360 = 108010 \quad V(1080) = 0$$

إذن يكون الحجم أكبر ما يمكن عندما $x = 610 \text{ cm}$ وعندها يكون الارتفاع $h = 310 \text{ cm}$

إيجاد أقل طول ممكن

أتحقق من فهمي صفحة 124



خطط مزارع لتسييح حظيرة مستطيلة الشكل قرب نهر كما في الشكل المجاور، وحدد مساحة الحظيرة بـ 245000 m^2 لتوفير كمية عشب كافية لأغنامه.

أجد أبعاد الحظيرة التي تجعل طول السياج أقل ما يمكن، علماً بأنّ الجزء المقابل للنهر لا يحتاج إلى تسييح.

L ليكن طول السياج ومساحة الحظيرة A

$$A=xy=245000 \rightarrow y=245000/x \quad L=x+2y \quad L(x)=x+490000/x, x>0 \quad L'(x)=1-490000/x^2$$

$L'(x)=0 \rightarrow x=700$ قيمة الحرجة هي: 700

$$L''(x)=980000/x^3 \rightarrow L''(700)=980000/(700)^3 > 0$$

$x = 700 \text{ m}$ إذن يكون طول السياج أقل ما يمكن عندما و
 $y=245000/700=350\text{m}$

إيجاد أقرب مسافة

أتحقق من فهمي صفحة 126

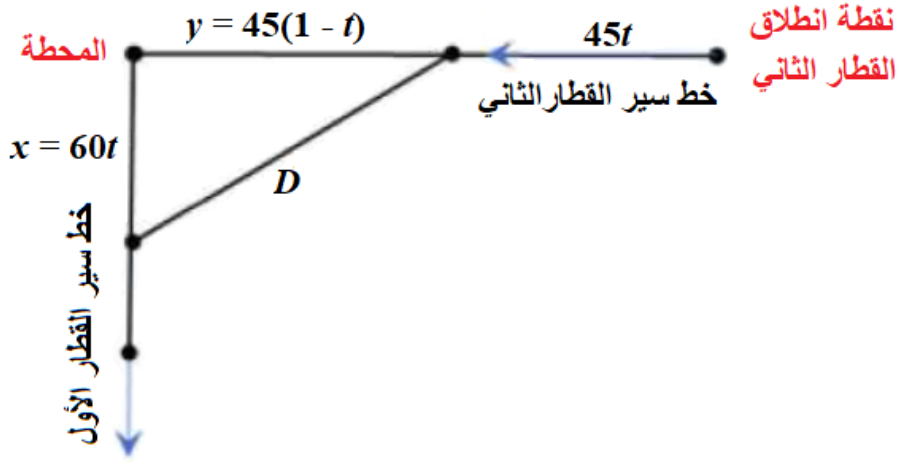


انطلق قطار من إحدى المحطات الساعة 10:00 a.m. ، وتحرك في اتجاه الجنوب بسرعة 60 km/h ، حيث المحطة التالية. وفي الوقت نفسه، انطلق قطار آخر نحو الغرب بسرعة 45 km/h ، ثم وصل إلى محطة الأول الساعة 11:00 a.m. في أي ساعة يكون القطاران أقرب ما يمكن إلى بعضهما؟

x نفرض بُعد القطار الأول عن المحطة، y بُعد القطار الثاني عن المحطة، ونفرض D البعد بين القطارين.

القطار الثاني استغرق ساعة واحدة للوصول إلى المحطة، إذن فقد انطلق من نقطة

تبعد 24 كيلومتراً عنها.



بعد t ساعة من انطلاقهما يكون: $x=60t$ ، ويكون $y=45-45t=45(1-t)$

$$D(t) = (60t)^2 + (45(1-t))^2 = 3600t^2 + 2025(1-t)^2, 0 \leq t \leq 1$$

$$D'(t) = 7200t - 4050(1-t)$$

$$D'(t) = 0 \rightarrow t = \frac{4050}{11250} = \frac{9}{25}$$

القيمة الحرجة هي: $t = \frac{9}{25}$

أجد المسافة عند القيمة الحرجة وعند طرفي المجال.

$$D(0) = 2025 = 45^2 \quad D(1) = 3600 = 60^2 \quad D\left(\frac{9}{25}\right) = 3600\left(\frac{9}{25}\right)^2 + 2025\left(1 - \frac{9}{25}\right)^2 = 3600 \cdot \frac{81}{625} + 2025 \cdot \frac{16}{625} = \frac{291600}{625} + \frac{32400}{625} = \frac{324000}{625} = 518.4$$

إذن يكون القطاران أقرب ما يمكن إلى بعضهما عندما $t = \frac{9}{25}h$ ، أي بعد 21 دقيقة و 36 ثانية، وتكون الساعة حينئذ 10:21:36

تطبيقات اقتصادية

أتحقق من فهمي صفحة 128



يبيع متجر 200 شاشة تلفاز شهرياً بسعر JD 350 للشاشة الواحدة. وقد أشار مسح للسوق أعدّه خبير التسويق في المتجر إلى أن عدد الشاشات المباعة شهرياً يزيد بمقدار 20 شاشة عند كل خصم مقداره JD 10 من سعر الشاشة الواحدة. أجد سعر بيع الشاشة الواحدة الذي يحقق للمتجر أعلى إيراد ممكن.

x ليكن سعر بيع الشاشة الواحدة هو دينار.

x - أي أن مقدار الخصم من سعر بيع الشاشة الواحدة هو 350 دينار، وبالتالي تحصل زيادة في عدد الشاشات المباعة مقدارها $2010(700-2x-350)$ شاشة.

$x = 900 - 2x$ إذن عدد الشاشات المباعة سيكون: $200 + 700 - 2x$

الإيراد = عدد الشاشات المباعة \times سعر بيع الشاشة الواحدة بعد الخصم:

$$R(x) = (900 - 2x)x = 900x - 2x^2 \quad R'(x) = 900 - 4x \quad R'(x) = 0 \rightarrow x = 225$$

توجد قيمة حرجة وحيدة هي: 225

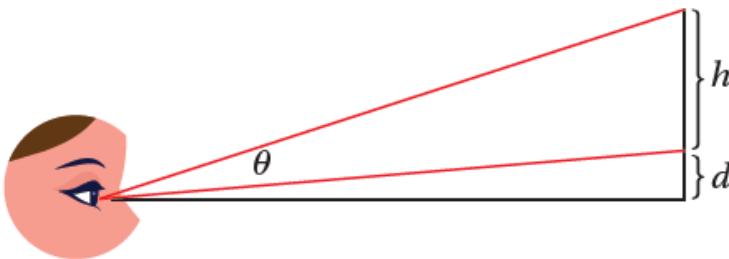
$$R''(x) = -4 \rightarrow R''(225) = -4 < 0$$

$x = 225$ نلاحظ أن اقتران الإيراد له قيمة عظمى عندما

إذن يحقق المتجر أعلى إيراد ممكن عندما يكون سعر بيع الشاشة الواحدة هو 225 ديناراً.

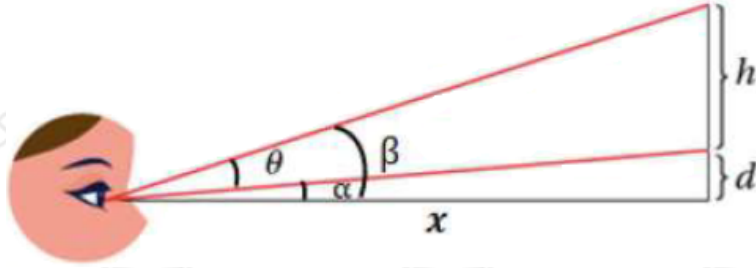
إيجاد أكبر زاوية

أتحقق من فهمي صفحة 129



نظرت سارة إلى لوحة معلقة على حائط منزلها ارتفاعها متراً وارتفاع حافتها السفلية d متراً فوق عينها كما في الشكل المجاور. كم متراً يجب أن تبعد سارة عن الجدار لتكون زاوية نظرها θ أكبر ما يمكن؟

نسمي الأبعاد وقياسات الزوايا كما في الشكل:



$$\tan\theta = \tan(\beta - \alpha) = \frac{\tan\beta - \tan\alpha}{1 + \tan\beta \tan\alpha} = \frac{h + dx - dx}{1 + d(h+d)x^2}, x > 0$$

$$\tan\theta = \frac{hx}{x^2 + d(h+d)}$$

$$\sec^2\theta \frac{d\theta}{dx} = \frac{(x^2 + d(h+d))(h) - xh(2x)}{(x^2 + d(h+d))^2}$$

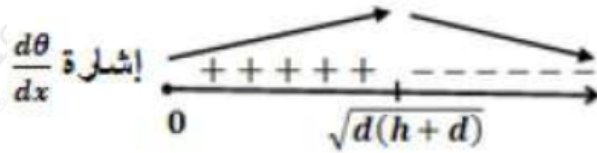
$$\frac{d\theta}{dx} = \cos^2\theta \times \frac{-x^2 + d(h+d)}{(x^2 + d(h+d))^2} = 0$$

بما أن $\theta < \frac{\pi}{2}$ ، فإن $\cos^2\theta \neq 0$ ، إذن $-x^2 + d(h+d) = 0$

$$x^2 = d(h+d) \rightarrow x = \sqrt{d(h+d)}$$

$x = \sqrt{d(h+d)}$ توجد قيمة حرجة وحيدة هي:

نستخدم اختبار المشتقة الأولى، وندرس إشارة $\frac{d\theta}{dx}$



$x = \sqrt{d(h+d)}$ أعوض

$$\frac{d\theta}{dx} = \cos^2\theta \times \frac{-d(h+d) + d(h+d)}{(d(h+d) + d(h+d))^2} = \cos^2\theta \times \frac{0}{2d(h+d)^2} = 0$$

($x = \sqrt{d(2h+d)}$ أعوض)

$$\frac{d\theta}{dx} = \cos^2\theta \times \frac{-d(2h+d) + d(h+d)}{(d(2h+d) + d(h+d))^2} = \cos^2\theta \times \frac{-dh}{d^2(2h+d)^2} < 0$$

θ إذن يجب أن تبتعد سارة عن الجدار مسافة $\sqrt{d(h+d)}$ لتكون زاوية نظرها أكبر ما يمكن.

تطبيقات في المستوى الإحداثي

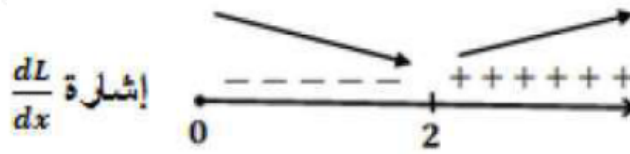
أتحقق من فهمي صفحة 131

أجد النقطة (النقاط) الواقعة على منحنى الاقتران: $f(x)=8x$ ، التي هي أقرب ما يُمكن إلى النقطة (2, 4).

لا، x لتكن النقطة () على منحنى $f(x)=8x$ ، ولتكن المسافة بينها وبين النقطة (4, 2) هي L حيث:

$$L=(x-4)^2+(y-2)^2=(x-4)^2+(8x-2)^2 \quad \frac{dL}{dx}=x-4+(8x-2)(48x) \quad (x-4)^2+(8x-2)^2=x-88x(x-4)^2+(8x-2)^2 \quad \frac{dL}{dx}=0 \rightarrow x=88x \rightarrow x8x=8 \rightarrow 8x^3=64 \rightarrow x^3=8 \rightarrow x=2$$

نستخدم اختبار المشتقة الأولى وندرس إشارة $\frac{dL}{dx}$



فإذن أقرب نقطة من نقاط المنحنى للنقطة (4, 2) هي: (2, 4).